

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el CONAHCYT (Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE © 2024, Todos los Derechos Reservados, CICESE

# Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



---

## Maestría en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Sismología

---

### Propagación de ondas elásticas en el dominio de la frecuencia en medios fracturados y anisótropos utilizando el método de Galerkin discontinuo

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Carlos Emmanuel Peral Altamirano**

Ensenada, Baja California, México

2024

Tesis defendida por

**Carlos Emmanuel Peral Altamirano**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado  
Director de tesis

Dr. Pratap Narayan Sahay Sahay

Dr. Cuauhtémoc Turrent Thompson

Dr. Diego Ruiz Aguilar



---

Dr. Diego Ruiz Aguilar  
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

---

Dra. Ana Denise Re Araujo  
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Carlos Emmanuel Peral Altamirano como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Sismología.

### **Propagación de ondas elásticas en el dominio de la frecuencia en medios fracturados y anisótropos utilizando el método de Galerkin discontinuo**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado

Director de tesis

Las fracturas son muy comunes en el subsuelo y determinan en gran medida las propiedades mecánicas del medio, por lo que un modelo sísmico realista debe incluir el efecto que las fracturas tienen en la propagación de ondas elásticas. Actualmente el desarrollo de métodos de caracterización de fracturas recae en las simulaciones numéricas, los métodos más utilizados se basan en diferencias finitas o elementos finitos, pero para incluir fracturas en dichos métodos, se hace uso de varias suposiciones que no siempre corresponden con la realidad física del medio. En contraste el método de Galerkin Discontinuo puede incluir a las fracturas de manera explícita en el modelo a través de la condición de desplazamiento discontinuo que a su vez es el esquema numérico que menos suposiciones requiere. El dominio de la frecuencia, al ofrecer múltiples ventajas respecto al dominio del tiempo, se ha convertido en la base para los métodos de inversión de forma de onda, por lo que la obtención de modelos precisos y realistas es de suma importancia en diferentes campos como la ingeniería minera, secuestro de CO<sub>2</sub>, administración de mantos acuíferos y especialmente en explotación de hidrocarburos. Es por ello que en este trabajo, se realizó una implementación del método de Galerkin discontinuo de Penalización Interior en el dominio de la frecuencia para simular medios heterogéneos, fracturados y anisótropos, con fronteras de tipo "Perfectly Matched Layers" (PML, por sus siglas en inglés) y para resolver el sistema de ecuaciones se utilizó "MULTifrontal Massively Parallel Sparse direct Solver" (MUMPS, por sus siglas en inglés). Para validar el modelo, se realizó una Transformada Inversa de Fourier (IFFT, por sus siglas en inglés) a los desplazamientos obtenidos para diferentes frecuencias con el objetivo de obtener un sismograma comparable con modelos en el dominio del tiempo. Se compararon sismogramas para medios homogéneos, anisótropos y fracturados obteniendo una gran coincidencia en los resultados.

**Palabras clave:** Fracturas, Galerkin Discontinuo, Dominio de la frecuencia, Fronteras PML, Ondas Elásticas.



Abstract of the thesis presented by Carlos Emmanuel Peral Altamirano as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Earth science with orientation in seismology.

**Frequency domain elastic wave propagation through fractured and anisotropic media with the discontinuous Galerkin method**

Abstract approved by:

---

PhD Jonás de Dios de Basabe Delgado

Thesis Director

Fractures are very common in the subsurface and largely determine the mechanical properties of the medium, so a realistic seismic model must include the effect that fractures have on the propagation of elastic waves. Currently, the development of fracture characterization methods relies on numerical simulations; the most used methods are based on finite differences or finite elements, but to include fractures in those methods, several assumptions are made that do not always correspond to the physical reality of the environment. In contrast, the Discontinuous Galerkin method can include fractures explicitly in the model through the linear slip condition, which in turn is the numerical scheme that requires the smallest number of assumptions. The frequency domain, by offering multiple advantages over the time domain, has become the basis for waveform inversion methods, so obtaining accurate and realistic models is of utmost importance in different fields such as mining engineering, CO<sub>2</sub> capture, management of aquifers and especially in hydrocarbon extraction industry. That is why in this work, an implementation of the discontinuous Galerkin method of interior penalty in the frequency domain was implemented to simulate heterogeneous, fractured and anisotropic media, with "Perfectly Matched Layers" (PML) type boundaries. To solve the system of equations "MULTifrontal Massively Parallel Sparse Direct Solver" (MUMPS) was used. To validate the model, an Inverse Fourier Transform (IFFT) was performed on the displacements obtained for different frequencies with the objective of obtaining a seismogram comparable with models in the time domain and with analytical solutions. Seismograms were compared for homogeneous, anisotropic and fractured media, great agreement was obtained in the results.

**Keywords: Fractures, Galerkin Discontinuous, Frequency Domain, PML Boundary, Elastic Waves.**

## Dedicatoria

**Queridos papá y mamá,  
porque no ha habido día sin ustedes  
porque no pude haber tenido mejor par que ustedes.**

## Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California.

Al Consejo Nacional de Humanidades Ciencia y Tecnologías por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

A todo el equipo que hace posible el funcionamiento de la súper computadora LAMB, indispensable para la realización de este trabajo de tesis.

Al Dr. Jonás de Dios De Basabe Delgado por ser un excelente asesor y guiarme durante mi maestría.

A mis padres, a su apoyo incondicional y a su confianza en mí, que me han convertido en el hombre que soy.

A mis viejos amigos, que siempre me han hecho sentir querido y acompañado sin importar la distancia.

A las increíbles personas que conocí durante mi maestría, que convirtieron a Ensenada en mi hogar e hicieron a esta experiencia algo inolvidable.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	viii
Lista de tablas .....	xv
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1. Antecedentes .....	1
1.2. Antecedentes de la simulación de medios fracturados .....	4
1.2.1. Teorías de medios equivalentes .....	4
1.2.2. Fracturas explícitas en el dominio del tiempo y la frecuencia .....	5
1.3. Hipótesis .....	6
1.4. Objetivo general .....	6
1.4.1. Objetivos específicos .....	6
<b>Capítulo 2. Modelado de fracturas</b>	
2.1. Fracturas .....	7
2.2. Condición de desplazamiento lineal .....	9
<b>Capítulo 3. Método de Galerkin discontinuo</b>	
3.1. Introducción al método .....	14
3.2. Formulación elástica .....	15
<b>Capítulo 4. Dominio de la frecuencia</b>	
4.1. Introducción a la transformada de Fourier .....	19
4.2. Señales .....	20
4.3. Análisis de series .....	21
4.4. Transformada rápida de Fourier .....	22
4.5. Problema elástico en el dominio de la frecuencia .....	23
4.5.1. Ecuación de onda .....	23
4.5.2. Ventajas del dominio de la frecuencia en sismología .....	23
4.6. Fronteras PML .....	24
4.6.1. Fronteras absorbentes .....	24
4.6.2. Introducción a las fronteras PML .....	25
4.6.3. Continuidad y atenuación .....	27
4.6.4. PML en el dominio de la frecuencia .....	28
4.6.5. Complicaciones .....	28

<b>Capítulo 5. Metodología</b>	
5.1. Formulación débil de la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia . . . . .	30
5.2. Cálculo de la FFT con oneMKL . . . . .	33
5.3. MUMPS . . . . .	33
5.4. Implementación de fronteras PML . . . . .	36
5.4.1. Formulación débil con fronteras PML . . . . .	36
5.4.2. Sistema de ecuaciones con PML . . . . .	38
5.4.3. Ajuste de los parámetros PML . . . . .	41
5.5. Desplazamientos y dominio del tiempo . . . . .	41
<b>Capítulo 6. Resultados y discusión</b>	
6.1. Resultados . . . . .	42
6.1.1. Ajuste de las fronteras PML . . . . .	42
6.1.1.1. Coeficiente de atenuación . . . . .	42
6.1.1.2. Ancho de dominio PML . . . . .	50
6.1.2. Medio homogéneo . . . . .	57
6.1.3. Medio fracturado . . . . .	66
6.1.4. Medio anisótropo . . . . .	75
6.1.5. Fracturas paralelas . . . . .	87
6.1.6. Fracturas verticales y roca anisótropa . . . . .	100
6.2. Discusión . . . . .	107
<b>Capítulo 7. Conclusiones y trabajo a futuro</b>	
7.1. Conclusiones . . . . .	108
7.2. Trabajo a futuro . . . . .	109
<b>Literatura citada</b> . . . . .	110

# Lista de figuras

Figura	Página
1. Condiciones de frontera para dos medios elásticos separados por una interfaz perfectamente acoplada (Cui et al.,2018). . . . .	10
2. Condiciones de frontera para dos medios elásticos separados por una interfaz desacoplada (Cui et al.,2018). . . . .	10
3. Fractura con simetría a) monoclinica y b) ortorrómbica (Schoenberg & Douma, 1988). . .	13
4. Se muestra la DFT sin y con relleno de ceros. a) Señal original, b) DFT de la señal original, c) señal después de agregar ceros y d) DFT de la señal modificada (Smith, 2008).	22
5. Incremento del tiempo efectivo de cómputo para obtener un gradiente para FWI en función de las fuentes sísmicas del modelo (Li et al., 2019). . . . .	24
6. Dominio de interés rodeado de una región PML (Pled & Desceliers, 2022). . . . .	26
7. Función fuente correspondiente a la primera derivada de una Gaussiana con un pico de frecuencia de 15 Hz, la primera corresponde al muestreo en el tiempo, el segundo al dominio de la frecuencia (FFT) y el tercero al regreso al dominio del tiempo (IFFT) . . .	31
8. Función fuente correspondiente a la primera derivada de una Gaussiana con un pico de frecuencia de 45 Hz, la primera corresponde al muestreo en el tiempo, el segundo al dominio de la frecuencia (FFT) y el tercero al regreso al dominio del tiempo (IFFT) . . .	31
9. Esquema del flujo de trabajo realizado para obtener la implementación en el dominio de la frecuencia. . . . .	32
10. Ejemplos de la parte real del campo de desplazamientos sin fronteras PML para un medio homogéneo. La primera fila corresponde a la componente $x$ mientras que la segunda a la componente $z$ . La primera columna muestra la frecuencia 10 Hz y la segunda 15 Hz. . .	35
11. Ejemplos de la parte real del campo de desplazamientos sin fronteras PML para un medio fracturado. La primera fila corresponde a la componente $x$ mientras que la segunda a la componente $z$ . La primera columna muestra la frecuencia 10 Hz y la segunda 15 Hz. . .	35
12. Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>9 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15. . . . .	44
13. Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>9 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15. . . . .	45
14. Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>15 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15. . . . .	46

15.	Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>15 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15. . . . .	47
16.	Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>24 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15. . . . .	48
17.	Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>24 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15. . . . .	49
18.	Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>9 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m. . . . .	51
19.	Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>9 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m. . . . .	52
20.	Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>15 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m. . . . .	53
21.	Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>15 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m. . . . .	54
22.	Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>24 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m. . . . .	55
23.	Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>24 Hz</b> , obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m. . . . .	56
24.	Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>3 Hz</b> , <b>15 Hz</b> y <b>21 Hz</b> para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . . . . .	59
25.	Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>3 Hz</b> , <b>15 Hz</b> y <b>21 Hz</b> para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . . . . .	60

26.	Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>24 Hz</b> , <b>30 Hz</b> y <b>36 Hz</b> para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de <b>30 Hz</b> . . . . .	61
27.	Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>24 Hz</b> , <b>30 Hz</b> y <b>36 Hz</b> para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de <b>30 Hz</b> . . . . .	62
28.	Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>39 Hz</b> , <b>45 Hz</b> y <b>51 Hz</b> para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . . . . .	63
29.	Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>39 Hz</b> , <b>45 Hz</b> y <b>51 Hz</b> para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . . . . .	64
30.	Sismogramas (componente $z$ del desplazamiento) obtenidos para una fuente con un pico de frecuencia de <b>15 Hz</b> , <b>30 Hz</b> y <b>45 Hz</b> con las características de la tabla 5. La línea roja corresponde la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y la negra al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo para el mismo problema. . . . .	65
31.	Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>3 Hz</b> , <b>15 Hz</b> y <b>21 Hz</b> para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . . . . .	68
32.	Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>3 Hz</b> , <b>15 Hz</b> y <b>21 Hz</b> para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . . . . .	69
33.	Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>24 Hz</b> , <b>30 Hz</b> y <b>36 Hz</b> para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de <b>30 Hz</b> . . . . .	70
34.	Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>24 Hz</b> , <b>30 Hz</b> y <b>36 Hz</b> para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de <b>30 Hz</b> . . . . .	71
35.	Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>39 Hz</b> , <b>45 Hz</b> y <b>51 Hz</b> para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . . . . .	72
36.	Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>39 Hz</b> , <b>45 Hz</b> y <b>51 Hz</b> para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . . . . .	73



37. Sismogramas (componente  $z$  del desplazamiento) obtenidos para un medio fracturado con las características de la tabla 7, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de **15 Hz, 30 Hz y 45 Hz**. La fractura es una línea horizontal que pasa por el centro del medio, la fuente y el receptor se encuentra a 100 metros sobre y debajo la fractura, respectivamente. La línea roja corresponde a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y la negra al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo. . . . . 74
38. Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **3 Hz, 15 Hz y 21 Hz** para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. . . . . 78
39. Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **3 Hz, 15 Hz y 21 Hz** para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. . . . . 79
40. Sismogramas (componente  $x$  del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 15 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio (0,0), mientras que el receptor se encuentra a 300 metros de distancia de la fuente (212,212). La línea roja corresponde a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y la negra al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo. . . . . 80
41. Sismogramas (componente  $z$  del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 15 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio (0,0), los tres receptores se muestran de arriba a abajo con las posiciones, (0,300), (300,0) y (212,212), respectivamente. Las líneas rojas corresponden a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y las negras al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo. 80
42. Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **24 Hz, 30 Hz y 36 Hz** para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de **30 Hz**. . . . . 81
43. Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **24 Hz, 30 Hz y 36 Hz** para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de **30 Hz**. . . . . 82
44. Sismogramas (componente  $x$  del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 30 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio (0,0), mientras que el receptor se encuentra a 300 metros de distancia de la fuente (212,212). La línea roja corresponde a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y la negra al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo. . . . . 83
45. Sismogramas (componente  $z$  del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 30 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio (0,0), los tres receptores se muestran de arriba a abajo con las posiciones, (0,300), (300,0) y (212,212), respectivamente. Las líneas rojas corresponden a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y las negras al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo. 83

Figura	Página
46. Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>39 Hz</b> , <b>45 Hz</b> y <b>51 Hz</b> para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . . . . .	84
47. Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>39 Hz</b> , <b>45 Hz</b> y <b>51 Hz</b> para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . . . . .	85
48. Sismogramas (componente $x$ del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 45 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio (0,0), mientras que el receptor se encuentra a 300 metros de distancia de la fuente (212,212). La línea roja corresponde a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y la negra al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo. . . . .	86
49. Sismogramas (componente $z$ del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 45 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio (0,0), los tres receptores se muestran de arriba a abajo con las posiciones, (0,300), (300,0) y (212,212), respectivamente. Las líneas rojas corresponden a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y las negras al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo. . . . .	86
50. Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>3 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	88
51. Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>15 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	89
52. Componente $x$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>27 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	90
53. Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>3 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	91
54. Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>15 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	92
55. Componente $z$ de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>27 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	93

56.	Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>33 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	94
57.	Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>45 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	95
58.	Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>57 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	96
59.	Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>33 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	97
60.	Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>45 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	98
61.	Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>57 Hz</b> para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de <b>45 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	99
62.	Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>3 Hz</b> para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	101
63.	Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>15 Hz</b> para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	102
64.	Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>27 Hz</b> para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	103
65.	Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de <b>3 Hz</b> para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de <b>15 Hz</b> . La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . .	104

Figura

Página

- 66. Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **15 Hz** para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . . 105
- 67. Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **27 Hz** para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente. . . . . 106

## Lista de tablas

Tabla		Página
1.	Parámetros de entrada para MUMPS. . . . .	34
2.	Parámetros elegibles por el usuario relacionados con las fronteras PML . . . . .	41
3.	Características del problema en las simulaciones que muestran el efecto que diferentes coeficientes de amortiguamiento de las fronteras PML tienen en el campo de desplazamientos. . . . .	43
4.	Características del problema en las simulaciones que muestran el efecto que diferentes anchos de las fronteras PML tienen en el campo de desplazamiento. . . . .	50
5.	Características del problema para las simulaciones del medio homogéneo. . . . .	57
6.	Se presentan los resultados de la correlación cruzada entre los sismogramas obtenidos directamente en el dominio del tiempo y aquellos calculados desde el dominio de la frecuencia para medios <b>homogéneos</b> . Las características del problema se muestran en la tabla 5 . . . . .	58
7.	Características de las fracturas para las simulaciones del medio fracturado. . . . .	66
8.	Se presentan los resultados de la correlación cruzada entre los sismogramas obtenidos directamente en el dominio del tiempo y aquellos calculados desde el dominio de la frecuencia para medios <b>fracturados</b> . . . . .	67
9.	Características del problema para las simulaciones del medio anisótropo. . . . .	75
10.	Se presentan los resultados de la correlación cruzada entre los sismogramas obtenidos directamente en el dominio del tiempo y aquellos calculados desde el dominio de la frecuencia para medios <b>anisótropos</b> . Las características del problema se muestran en la tabla 9 . . . . .	77
11.	Características del problema para las simulaciones del medio con fracturas verticales aleatorias. . . . .	87
12.	Características del problema para las simulaciones del medio con fracturas verticales aleatorias y roca anisótropa. . . . .	100

# Capítulo 1. Introducción

---

En este capítulo se presenta un panorama general de la simulación de ondas elásticas en medios fracturados. La presencia tan común de las fracturas en la corteza terrestre ha hecho que el estudio y caracterización de los sistemas fracturados sean de gran importancia en diferentes áreas de la industria. Las fracturas afectan la manera en que las ondas sísmicas se propagan por un medio, lo que altera la firma sísmica. Para inferir correctamente las características del medio, es indispensable obtener modelos realistas que sean aplicables para las condiciones físicas reales del problema, bajo este objetivo, han surgido múltiples implementaciones que contemplan de diferente manera la inclusión de fracturas en el medio. En este capítulo se ofrece un panorama general de esta problemática.

## 1.1. Antecedentes

Las fracturas pueden definirse como una discontinuidad macroscópica plana causada porque el medio fue sometido a un esfuerzo que excedió la fuerza de ruptura de la roca. La presencia de fracturas en un medio tiene efectos directos en sus propiedades mecánicas, pueden causar anisotropía, zonas de debilidad, además cambian la porosidad y permeabilidad de la roca, lo que altera la capacidad para que fluidos fluyan a través de ella. Dichas propiedades hacen que la caracterización de fracturas sea de suma importancia en múltiples áreas como la geología estructural (Pollard & Fletcher, 2005), ingeniería minera (Grenon & Hadjigeorgiou, 2012), secuestro de CO<sub>2</sub> (Luo & Bryant, 2014), manejo de desechos nucleares, administración de mantos acuíferos, aprovechamiento de campos geotérmicos y especialmente en la exploración y producción de petróleo y gas (Aguilera, 1998; Tarbuck et al., 2005).

Se calcula que para el año 2035 la demanda mundial de petróleo crecerá hasta alcanzar los 140 millones de barriles diarios a pesar de que los principales 800 campos que suministran la producción actual hayan pasado su máximo de producción (Ikelle & Amundsen, 2018). Los depósitos donde se atrapa el petróleo y el gas están asociados a estructuras geológicas con presencia de fracturas, además algunas estimaciones señalan que los yacimientos fracturados contienen un tercio de todas las reservas mundiales de petróleo e incluso en los yacimientos convencionales se presenta algún nivel de fracturamiento (Tsvankin et al., 2010). Con el posicionamiento del fracturamiento hidráulico como el principal procedimiento para mejorar el aprovechamiento en los campos de producción, la caracterización de las fracturas naturales se ha vuelto de suma importancia debido a que la interacción que existe entre estas y las fracturas hidráulicas es crucial para el diseño del fracturamiento hidráulico (Wang, 2019).

La mayor parte del conocimiento que se tiene sobre la estructura de la corteza terrestre se obtiene mediante el análisis de las ondas sísmicas. Las fracturas, al alterar las propiedades mecánicas del medio, también afectan su firma sísmica. Por ejemplo, la presencia de fracturas está relacionada con el desplazamiento de fase, filtrado de frecuencias, creación de ondas en la interfaz de las fracturas, dispersión de las ondas reflejadas y transmitidas. Por otro lado, la presencia de grupos de fracturas alineadas y homogéneamente distribuidas causa anisotropía en la velocidad de propagación de las ondas en el medio. Estos efectos permiten que se puedan inferir características de las fracturas a través del análisis de la firma sísmica del medio, por ejemplo estudiando la anisotropía se puede calcular la densidad y orientación de las fracturas (Queen & Rizer, 1990).

Una parte del desarrollo de mejores análisis de datos sísmicos depende en la capacidad de obtener simulaciones numéricas que representen de manera realista medios con redes complejas de fracturas (Chung et al., 2016). En las simulaciones numéricas existen dos principales formas de incorporar los efectos que las fracturas tienen en la propagación de ondas sísmicas (De Basabe et al., 2016):

1. Las fracturas pueden ser incluidas de manera implícita mediante las Teorías de Medios Equivalentes (EMT por sus siglas en inglés).
2. Incluir las fracturas de manera discreta y explícita utilizando diferentes esquemas numéricos, tales como:
  - Usar teorías de medios equivalentes de manera local (Vlastos et al., 2003).
  - Incluir localmente condiciones de baja densidad o velocidad.
  - Representar una fractura como una interfaz en la cual los esfuerzos son continuos pero los desplazamientos pueden ser discontinuos; a este esquema se le conoce como condición de desplazamiento discontinuo (LSM por sus siglas en inglés).

Las EMT tienen como objetivo definir un medio homogéneo que represente las propiedades elásticas efectivas de un sólido heterogéneo (Shuai et al., 2019). Su principal ventaja es que proporcionan relaciones analíticas entre los parámetros del medio y de las fracturas pero esto a costa de múltiples suposiciones que no siempre corresponden con las características físicas reales del medio, lo que limita su aplicabilidad. Por otro lado dentro de los esquemas numéricos, LSM utiliza la menor cantidad de suposiciones por lo que tiene mayor rango de aplicabilidad que las otras opciones (De Basabe et al., 2016), además ha sido validado experimentalmente y numéricamente en distintas ocasiones (Bakulin et al., 2000; Brajanovski

et al., 2005; Grechka & Kachanov, 2006; Hsu & Schoenberg, 1993; Rioyos-Romero et al., 2022; Vamaraju et al., 2020; Gavriliava et al., 2020a).

El esquema LSM, propuesto por Schoenberg (1980), describe a las fracturas como discontinuidades en el campo de desplazamiento. Estos saltos en los desplazamientos son proporcionales a la tracción y conformidad en la interfaz de la fractura. Muchos métodos han sido utilizados para simular la propagación de ondas elásticas en medios heterogéneos, por ejemplo diferencias finitas, elementos espectrales y volumen finito. Pero cuando se agregan condiciones de tipo LSM, se requieren complicadas herramientas para lograrlo (Zhang & Gao, 2009) debido a las discontinuidades en el campo solución. Afortunadamente el método de Galerkin Discontinuo (DG por sus siglas en inglés) puede incorporar discontinuidades en las caras de los elementos sin introducir oscilaciones espurias en el campo de solución (Cockburn et al., 2012), lo que significa que bajo el esquema de LSM las fracturas pueden ser incluidas de manera directa.

El software Seismic Wave Propagation (SWP por sus siglas en inglés) está escrito en el lenguaje C++, desarrollado por De Basabe (2009), integra diferentes métodos, todos en el dominio del tiempo, para la simulación de ondas elásticas en 2D y 3D. Dentro de estos métodos se incorpora Galerkin Discontinuo para simular la propagación de ondas en medios anisótropos, heterogéneos y fracturados, incluyendo dichas fracturas discretas bajo el esquema de LSM.

Para la inversión completa de forma de onda (FWI, por sus siglas en inglés) el dominio de la frecuencia ofrece ventajas respecto al dominio del tiempo, por lo que obtener modelos precisos en ese dominio se ha convertido en prioridad (Operto et al., 2015; Zhao et al., 2019). Cuando se trabaja en el dominio de la frecuencia, no es posible limitar el tiempo simulado para solo ver los efectos de interés. Por esta razón se deben agregar fronteras especiales que eviten reflexiones de ondas no deseadas. Se ha mostrado que las fronteras de tipo "capas perfectamente acopladas" (PML, por sus siglas en inglés) son las más robustas, por lo que en este trabajo la implementación incluye fronteras de tipo PML que se adaptan a cada frecuencia para una correcta atenuación de las ondas (Feng et al., 2019).

Resolver el problema de la propagación de ondas en el dominio de la frecuencia resulta en un sistema disperso algebraico de ecuaciones lineales donde el lado derecho corresponde a las fuentes sísmicas. La factorización **LU** requiere una gran cantidad de memoria para guardar los factores de la matriz, esta situación es la principal desventaja del dominio de la frecuencia respecto al dominio del tiempo (Operto et al., 2007). El desarrollo de hardware y de software ha permitido que sistemas con millones de entradas ahora puedan ser resueltos de manera eficiente, en especial las herramientas llamadas "massively parallel direct solvers" han hecho que las implementaciones en el dominio de la frecuencia sean factibles para los



métodos de inversión. Para este trabajo se utilizó la paquetería "MULTifrontal Massively Parallel Sparse direct Solver" (MUMPS, por sus siglas en inglés) para resolver el sistema de ecuaciones (Amestoy et al., 2019, 2001).

## 1.2. Antecedentes de la simulación de medios fracturados

Debido a la importancia de obtener modelos realistas de la propagación de ondas elásticas, se han desarrollado en la literatura diversos métodos para incluir fracturas. A continuación se mencionarán algunos ejemplos y sus características más destacadas.

### 1.2.1. Teorías de medios equivalentes

En general las teorías de medios equivalentes más comunes se basan en el llamado principio de no interacción (NIA, por sus siglas en inglés). NIA establece que las contribuciones de cada fractura al campo de esfuerzos se suma independientemente de la existencia de otras fracturas. Dicho supuesto se cumple cuando (Bakulin et al., 2000):

$$\text{longitud de onda sísmica} \gg \text{espacio entre fracturas} \gg \text{apertura de fracturas} \quad (1)$$

Existen dos formas de abordar el problema, la primera es sumar la contribución del medio con la aportación de cada fractura para obtener la conformidad efectiva del medio. La segunda es expresar la rigidez efectiva en función de la densidad de fracturas. Shuai et al. (2019) ofrece una síntesis de las diferentes EMT disponibles con el esquema NIA, además de realizar una comparación con datos experimentales para estudiar la aplicabilidad de diferentes EMT dependiendo de la densidad de fracturas y frecuencia de las ondas.

Existen varias situaciones donde los medios pueden no cumplir con los principios de NIA, por ejemplo para altas densidades de fracturas, geometrías complicadas, fracturas que se intersectan o fracturas muy grandes en relación con la longitud de onda, podrían ocasionar que los medios equivalentes no reproduzcan correctamente los efectos de las fracturas. Esto limita la aplicabilidad de las distintas teorías de medios equivalentes para representar correctamente medios realistas.

## 1.2.2. Fracturas explícitas en el dominio del tiempo y la frecuencia

Dentro de las técnicas para incluir fracturas explícitas en los modelos también se pueden utilizar condiciones locales de velocidades y densidades. Saenger et al. (2004), con el método “rotated staggered finite-difference grid” (RSG, por sus siglas en inglés) contempla a las fracturas secas como inclusiones con forma de moneda. Para fracturas secas se consideran las velocidades  $V_p = 0 \text{ m/s}$   $V_s = 0 \text{ m/s}$  con una densidad  $\rho = 0.0001 \text{ kg/m}^3$ , mientras que para fracturas saturadas de fluido se contemplan las velocidades  $V_p = 1485 \text{ m/s}$   $V_s = 0 \text{ m/s}$  con una densidad  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

Cuando se quiere implementar la condición LSM en métodos diferentes a Galerkin discontinuo, se tienen que plantear estrategias complicadas para incorporar el salto en el campo de desplazamientos. Zhang (2005) obtuvo una implementación de diferencias finitas, discretizando el espacio con una malla de celdas triangulares y empleando un operador de diferencias finitas triangular. La forma integral de la ecuación de elasticidad se utiliza para poder implementar la condición LSM, lo cual permite incluir fracturas en las caras de los triángulos, limitando las orientaciones posibles. La implementación puede manejar fracturas no planas y medios anisótropos diferentes para cada lado de la fractura.

De Basabe et al. (2016) obtuvo una implementación de Galerkin discontinuo para simular la propagación de ondas elásticas en el dominio del tiempo para medios fracturados. La condición LSM fue incluida directamente en la forma débil del problema. Se asume que las fracturas se encuentran en las caras de los elementos lo que permite incorporarlas con cualquier dirección y geometría, lo cual se logra ajustando correctamente la malla. El método no limita la cantidad de fracturas en el medio, ellas pueden interactuar con la superficie e intersectarse una con otra. Se ha comprobado en diferentes ocasiones que las fracturas interconectadas tienen efectos notables en la firma sísmica, por lo que este parámetro debe ser tomado en cuenta al caracterizar el medio (Guo et al., 2017; Germán Rubino et al., 2013; Romero, 2017; Shao & Pyrak Nolte, 2016).

En el dominio de la frecuencia, la discretización del problema utilizando diferencias finitas o elementos finitos conlleva a un gran sistema disperso matricial, por lo que obtener implementaciones eficaces es de suma importancia. Distintos autores se han enfocado en reducir la cantidad de incógnitas en el sistema y con ello la cantidad de grados de libertad del sistema lineal que se tiene que resolver (Li et al., 2015; Bonnasse-Gahot et al., 2017). Una descripción de las diferentes implementaciones de diferencias finitas se puede encontrar en Dong & Chen (2023).

Gavriliava et al. (2020a) abordan el problema de propagación de ondas en medios fracturados en el

dominio de la frecuencia, utilizando LSM e incluyendo condiciones de frontera absorbentes de primer orden (ABC por sus siglas en inglés). Se utiliza GD para la imposición de las condiciones de interfaz de las fracturas y luego se desarrolla una solución efectiva mediante el Método Generalizado de Elementos Finitos Multiescala (GMsFEM por sus siglas en inglés). ABC son un tipo de fronteras absorbentes menos robustas, efectivas y flexibles que las fronteras PML.

### **1.3. Hipótesis**

Es posible resolver eficientemente el problema de propagación de ondas en medios anisótropos en el dominio de las frecuencias combinando el método de Galerkin discontinuo con métodos innovadores para resolver sistemas de ecuaciones lineales. La solución puede incorporar el efecto de fracturas discretas y simular diversas fuentes sísmicas simultáneamente.

### **1.4. Objetivo general**

Implementar el método de Galerkin Discontinuo para simular la propagación de ondas en el dominio de la frecuencia en medios anisótropos fracturados.

#### **1.4.1. Objetivos específicos**

- Implementar fronteras absorbentes de tipo PML que atenuen apropiadamente las ondas no deseadas para cada frecuencia.
- Establecer las diferencias en los efectos que la anisotropía de la matriz y las fracturas tienen en la propagación de ondas.
- Generar sismogramas sintéticos a partir de las simulaciones obtenidas.
- Incorporar MUMPS para encontrar de manera eficiente la solución del sistema de ecuaciones obtenido para el problema elástico.

## Capítulo 2. Modelado de fracturas

---

La caracterización de fracturas con métodos sísmicos depende de la capacidad de incluir fracturas de manera realista en simulaciones numéricas. LSM proporciona una manera de incluir explícitamente fracturas en los modelos, tomando menos suposiciones que las alternativas disponibles (teorías de medios equivalentes o condiciones locales), con lo que el método representa adecuadamente a las fracturas para un mayor rango de situaciones. En este capítulo se revisan los efectos que las fracturas tienen sobre las propiedades elásticas del medio, el desarrollo de LSM y las ecuaciones necesarias para incluirlas en los modelos.

### 2.1. Fracturas

En geología las fracturas se definen como un par de superficies claramente separadas, causadas por deformación permanente en la roca. Su tamaño puede variar desde escalas microscópicas hasta regionales (Aguilera, 1998). Las fracturas están caracterizadas por su radio, longitud, densidad, orientación y tamaño de apertura (Cui et al., 2018). La presencia de fracturas hace que la roca sea más maleable o susceptible a deformaciones y también aumenta la permeabilidad de la roca en función de la conectividad de las discontinuidades, las fracturas se encuentran a lo largo de toda la corteza terrestre, esto hace importante su estudio porque proporcionan una forma de transporte de fluidos a través de la misma roca (Nara et al., 2011). No solo la forma, distribución y cantidad de las fracturas cambian el módulo elástico del medio, este valor también difiere significativamente si las fracturas se encuentran saturadas o vacías (Chelidze, 1993).

Las fracturas al cambiar la elasticidad del medio, también afectan como se propagan las ondas elásticas, causando dispersión, atenuación e induciendo anisotropía. Tradicionalmente los métodos para caracterizar fracturas son (Liu et al., 2018):

- **Birrefringencia de ondas cortantes:** La birrefringencia es la propiedad de un material para dividir una onda en dos componentes con diferentes velocidades. La onda S se ve especialmente afectada por la presencia de fracturas, por lo que normalmente se analiza su tiempo de propagación en diferentes direcciones para inferir características de las fracturas.
- **Variación de amplitudes con offset:** Las amplitudes en las reflexiones sísmicas cambian de acuerdo al ángulo de incidencia y a la dirección de propagación. Las fracturas también cambian

significativamente la amplitud de las reflexiones, por lo que anomalías o variaciones en muestras sísmicas para diferentes direcciones y ángulos de incidencia, pueden ser utilizadas para caracterizar sistemas fracturados.

La aparición de fracturas verticales a lo largo de la corteza terrestre se ve favorecida por la naturaleza triaxial del estrés tectónico (Carcione et al., 2012). También es importante mencionar que la mayoría de las fracturas naturales de mayor importancia comercial son verticales o casi verticales (Aguilera, 1998). Además en general los medios tienen algún tipo de anisotropía intrínseca, por ejemplo en las rocas sedimentarias la anisotropía puede ser causada por interacciones durante la reflexión y transmisión de las ondas a través de capas delgadas o de minerales presentes con orientaciones preferenciales. Los datos sísmicos indican que generalmente se trata de medios transversalmente isótropos con eje de simetría vertical o casi vertical (VTI y TTI, por sus siglas en inglés). La importancia de tomar en cuenta los modelos anisótropos se puede observar en la notable mejoría de las imágenes en exploraciones en el Golfo de México, a pesar de que la región sea considerada con anisotropía leve (Tsvankin et al., 2010), por lo que incluir anisotropía en modelos de medios fracturados es necesaria para representar de manera realista el problema.

En resumen, algunas de las características más importantes de la anisotropía como método de caracterización de fracturas son (Crampin & Peacock, 2005; Helbig & Thomsen, 2005; Carcione et al., 2012):

- Las fracturas en una roca se alinean preferentemente con sus caras planas perpendicular a la dirección de menos esfuerzo.
- En yacimientos, las grietas se alinean preferentemente con un plano vertical ya que a esas profundidades el esfuerzo dominante es el de la presión de sobrecarga.
- Por los puntos anteriores, las fracturas en yacimientos generalmente causan medios transversalmente isótropos con eje de simetría horizontal (HTI, por sus siglas en inglés).
- Mediciones de dos y tres componentes son adecuadas para medir la división de la onda S y con dichas observaciones obtener información sobre el estado de las fracturas en las rocas.
- Incluso anisotropía débil puede causar una gran variación en el coeficiente de reflexión.
- La división de las ondas cortantes ocurre cuando la onda entra a un sistema de fracturas alineadas. Las dos ondas se polarizan aproximadamente ortogonales entre sí y con diferentes velocidades. La

orientación de la polarización generalmente provee características sobre la simetría de la anisotropía mientras que la diferencia en velocidades proporciona información sobre la densidad de fracturas.

- La velocidad y atenuación de las ondas también son sensibles a la porosidad, permeabilidad y tipo de fluido en las fracturas.
- Teoría y experimentos muestran que cuando las fracturas están saturadas con fluido, la atenuación de la onda S y P son comparables. Por otro lado cuando son fracturas secas, la atenuación de la onda P es mucho mayor a la de la onda S.

Es de suma importancia para la exploración sísmica incluir todas las características que un medio puede tener en modelos matemáticos realistas. La manera en que se incorporan las fracturas es de suma importancia y se ha demostrado que LSM es una manera eficiente y precisa para la caracterización remota de fracturas (Wu et al., 2005)

## 2.2. Condición de desplazamiento lineal

Las condiciones de frontera a lo largo de una interfaz que separa a dos medios elásticos proporcionan un conjunto de 6 ecuaciones escalares que relacionan la tracción y el desplazamiento correspondientes a los dos lados de la frontera. En general dichas condiciones se pueden dividir en dos casos. Una interfaz perfectamente unida es una superficie donde los campos de desplazamiento y de esfuerzos son continuos, de un lado de la cara y del otro (figura 1). Si se denota al desplazamiento y a los esfuerzos en la parte inferior como  $\mathbf{u}^+$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^+$  y a los de la parte superior con  $\mathbf{u}^-$ ,  $\boldsymbol{\sigma}^-$ , las condiciones se escriben como:

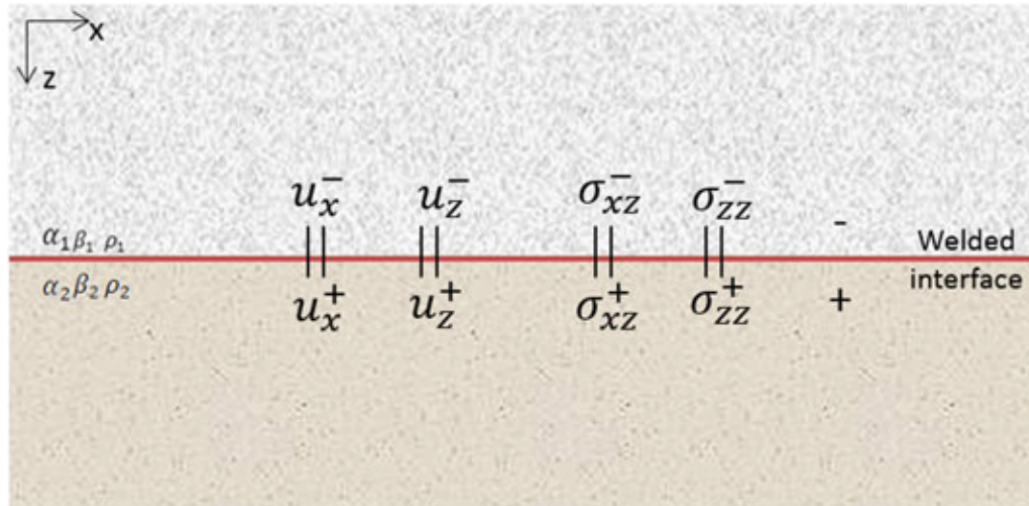
$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}^-, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{\sigma}^-. \quad (3)$$

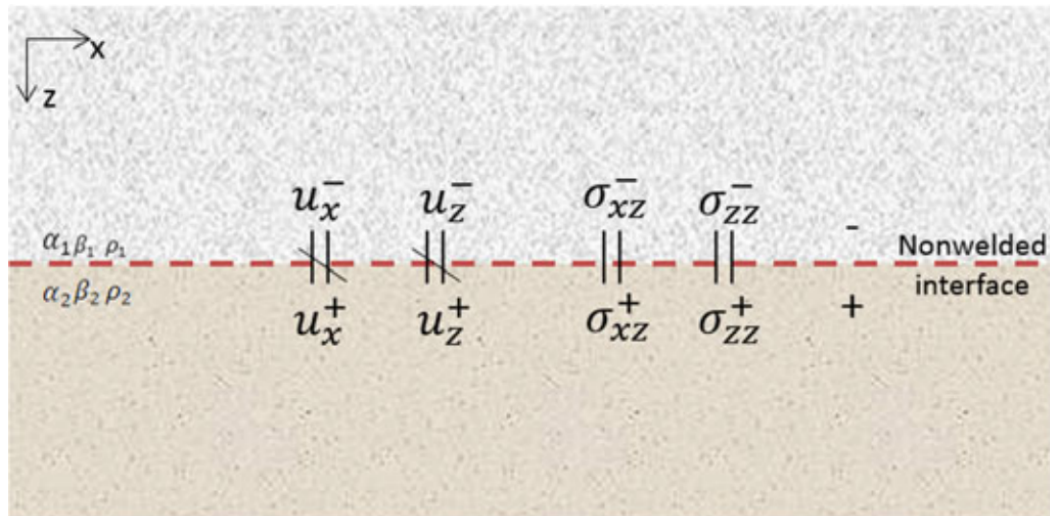
Para una interfaz con acoplamiento imperfecto, los esfuerzos son considerados continuos a lo largo de toda la frontera mientras que los desplazamientos no (figura 2), de tal forma que se tiene:

$$\mathbf{u}^+ \neq \mathbf{u}^- \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \boldsymbol{\sigma}^- \quad (5)$$



**Figura 1.** Condiciones de frontera para dos medios elásticos separados por una interfaz perfectamente acoplada (Cui et al.,2018).



**Figura 2.** Condiciones de frontera para dos medios elásticos separados por una interfaz desacoplada (Cui et al.,2018).

Michael Schoenberg (1980) propone un modelo para describir una interfaz unida imperfectamente que separa a dos medios elásticos. La diferencia en el desplazamiento se asume que depende linealmente de la tracción que actúa sobre la frontera, a esta condición se le conoce como "condición de deslizamiento lineal". Para calcular el salto en el desplazamiento primero se supone que la tracción  $\tau$  se puede escribir como una función analítica de  $\Delta \mathbf{u}$ , de esta forma se puede escribir dicha relación como una serie de potencias de  $\Delta \mathbf{u}$ :

$$\tau = F(\Delta \mathbf{u}) = k\Delta \mathbf{u} + O(\Delta u_i \Delta u_j), \quad (6)$$

notar que las unidades de  $k$  deben ser *esfuerzo/distancia*, además los factores no lineales pueden ser despreciados ( $\Delta \mathbf{u} \ll 1$ ). Por otro lado si la densidad de energía del sistema ( $U$ ) se supone está en

función de  $\Delta \mathbf{u}$  y que cuando  $\Delta \mathbf{u} = 0$  entonces  $U = 0$  ( $U|_0 = 0$ ), se puede escribir como:

$$U = L_j \Delta u_j + \frac{1}{2} K_{ij} \Delta u_i \Delta u_j + \text{términos cúbicos.} \quad (7)$$

Ahora, para la tasa de trabajo realizado sobre la interfaz  $S$  y el cambio de  $U$ , se tiene que:

$$\dot{W} = \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \Delta \dot{\mathbf{u}} dS = \int_S \dot{U} dS = \int_S (L_j \Delta \dot{u}_j + K_{ij} \Delta u_i \Delta \dot{u}_j) dS, \quad (8)$$

donde la ecuación se debe cumplir para cada parte de la discontinuidad por lo que se tiene que:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{L} + \Delta \mathbf{u} \mathbf{K} \quad (9)$$

que en conjunto con la ecuación 6 implica que:

$$L = 0, \quad (10)$$

$$k = K \quad (11)$$

con la matriz  $K$  positiva y simétrica. Con lo anterior podemos relacionar la discontinuidad en el desplazamiento linealmente con la tracción sobre la fractura. En general para la constante de proporcionalidad se elige la conformidad ( $\mathbf{Z}$ ) en lugar de la rigidez ( $\mathbf{K}$ ) de la interfaz, donde la matriz de rigidez es la inversa de la conformidad:

$$\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = [\mathbf{u}] = \mathbf{Z} \boldsymbol{\tau}, \quad (12)$$

las componentes de la matriz  $\mathbf{Z}$  se ven reducidas en función de las simetrías existentes en la fractura, si se toma la discontinuidad como  $\Delta \mathbf{u}$  (Schoenberg & Douma, 1988):

- **Fractura con simetría triclinica:** Este es el caso más general y las 6 componentes de  $\mathbf{Z}$  son requeridas:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{13} & Z_{23} & Z_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

- **Fractura con simetría monoclinica:** Si la fractura es invariante bajo reflexiones sobre algún plano que contenga al eje  $z$ . En general se debe a un leve desplazamiento y microcorrugación que en conjunto ocasionan que las geometrías de ambos lados de la fractura no coincidan (figura 3a). Así



$\mathbf{Z}$  toma la forma:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_N & 0 & Z_{N1} \\ 0 & Z_2 & 0 \\ Z_{N1} & 0 & Z_1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

- **Fractura con simetría ortorrómbica:** Si la fractura se encuentra a lo largo de  $z$  y es invariante bajo reflexiones sobre el plano  $x - y$ . En general esto ocurre cuando las irregularidades de ambos lados de la fractura coinciden (figura 3b). Así la matriz  $\mathbf{Z}$  toma la forma:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_N & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & Z_{12} \\ 0 & Z_{12} & Z_1 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

notar que siempre existe una rotación que diagonaliza  $\mathbf{Z}$  tal que:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_N & 0 & 0 \\ 0 & Z'_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z'_1 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

- **Fractura con simetría transversal:** Si el comportamiento de la fractura es invariante respecto a una rotación sobre el eje  $z$ , la matriz  $\mathbf{Z}$  toma la forma:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_T & 0 & 0 \\ 0 & Z_T & 0 \\ 0 & 0 & Z_N \end{bmatrix}, \quad (17)$$

donde  $Z_N$  y  $Z_T$  son la conformidad normal y tangencial de la fractura respectivamente. La forma de  $\mathbf{Z}$  es independiente de si el medio es isotrópico o anisótropo (Schoenberg & Douma, 1988). Para fracturas secas y con forma de moneda  $Z_N$  y  $Z_T$  se pueden escribir como (Tsvankin & Grechka, 2011):

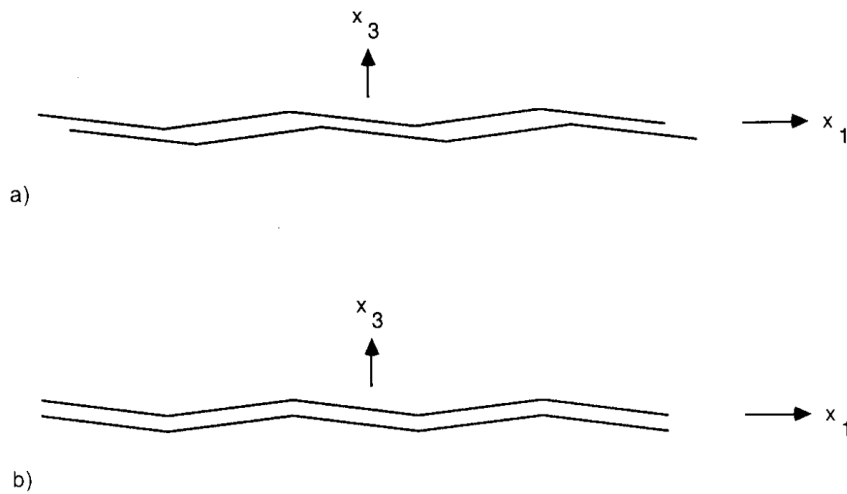
$$Z_N = \frac{16a(1 - \nu_b^2)}{3\pi E_b}, \quad (18)$$

$$Z_T = \frac{Z_N}{1 - \nu_b/2}, \quad (19)$$

con  $a$  siendo el radio de la fractura,  $\nu_b$  y  $E_b$  son la razón de Poisson y el módulo de Young respectivamente de la matriz.

Los valores de la conformidad asociada a la fractura también pueden ser obtenidos de manera experi-

mental. Lubbe & Lubbe (2005) calcularon los valores de  $Z_N$  y  $Z_T$  en función de la presión confinante para una muestra de piedra caliza, desde los 5 MPa hasta los 60 MPa. Dichos valores se encuentran en el orden de  $10^{-14} m/Pa$ . La componente normal y tangencial mantienen una razón de 0.4 para todas las presiones y la conformidad disminuye cuando se aumenta la presión. Por otra parte, LSM admite valores complejos que tomen en cuenta efectos de atenuación y dispersión. Rubino et al. (2015) y Barbosa et al. (2017) extendieron LSM para incluir disipación de energía, debida a la viscosidad del fluido contenido en las fracturas y además también se incluyen efectos poroelásticos.



**Figura 3.** Fractura con simetría a) monoclinica y b) ortorrómbica (Schoenberg & Douma, 1988).

LSM es utilizado ampliamente para incluir de manera explícita fracturas en simulaciones numéricas debido a que representa de manera precisa los efectos que generan en la propagación de ondas. Se han observado buenos resultados para cualquier escala de fracturas, lo que convierte a LSM en un método ideal para incorporar fracturas pequeñas o grandes (Gomez et al., 2022). El método no solo es utilizado para estudiar la mecánica de fracturas sino también su creación y propagación, además LSM resulta especialmente útil cuando la densidad de fracturas es muy alta ya que las teorías de medios equivalentes suelen dar predicciones no realistas para densidades altas (Wu & Olson, 2014; Rioyos-Romero et al., 2022).

## Capítulo 3. Método de Galerkin discontinuo

---

El método de Galerkin discontinuo (DG por sus siglas en inglés) permite discretizar y resolver sistemas de ecuaciones parciales, dividiendo el dominio en elementos y expresando la solución como una combinación lineal de funciones discontinuas en las caras de los elementos. DG puede incorporar condiciones de frontera directamente en las caras de los elementos, por lo que incluir condiciones específicas del modelo resulta sencillo. Debido a las discontinuidades o cambios abruptos de materiales, DG ha ganado cierta popularidad para resolver problemas de propagación de ondas en medios complicados. En este capítulo, se da una breve introducción al método y se revisa el problema de propagación de ondas elásticas de manera general.

### 3.1. Introducción al método

El método de DG es una generalización del método de Elementos Finitos (De Basabe et al., 2016). El antecedente de DG aparece en 1915 como una aproximación de la solución de ecuaciones diferenciales propuesta por Boris Grigoryevich Galerkin, un ingeniero civil del instituto tecnológico de San Petersburgo (Zienkiewicz et al., 2003). No fue hasta 1973 que el método fue propuesto por primera vez y usado para resolver el problema lineal de transporte de neutrones (Hu et al., 1999). Las funciones utilizadas para definir los elementos de DG se permiten ser discontinuas en las caras de los elementos (Shu, 2014), así discontinuidades en el campo de solución como lo son las condiciones de LSM pueden ser incluidas.

DG se ha aplicado en áreas muy diversas como la aeroacústica, electromagnetismo, dinámica de gases, flujo granular, magnetohidrodinámica, meteorología, modelado de aguas someras, oceanografía, simulación de dispositivos semiconductores, transporte de contaminantes en medios porosos, flujo turbulento, pronóstico del clima y transporte químico, entre muchos otros campos (Cockburn, 1999). DG ha sido implementado exitosamente por De Basabe et al. (2016) para simular la propagación de ondas elásticas en medios fracturados y heterogéneos, incorporando las fracturas con LSM.

DG tiene muchas ventajas sobre los métodos de diferencias finitas (FD por sus siglas en inglés) y elementos finitos (FEM por sus siglas en inglés), algunas de ellas son (Zienkiewicz et al., 2003; Cockburn et al., 2012):

- La precisión del método depende del grado de los polinomios que aproximan la solución.

- Las matrices de masa son diagonales a bloques por lo que el método es altamente paralelizable.
- Se pueden incorporar directamente condiciones de frontera entre los elementos.
- El orden de los polinomios base puede ser elegido elemento por elemento, lo que significa que el método goza de gran adaptación para estructuras complejas.
- Soporta geometrías complicadas, discontinuidades o grandes gradientes sin introducir oscilaciones espurias.
- Se pueden incluir nodos colgantes o casi aislados y las discontinuidades físicas se pueden incluir en las interfaces de los elementos.

DG también tiene desafíos importantes como (Kubatko et al., 2009):

- Incremento sustancial de la cantidad de variables.
- La cantidad de variables puede ocasionar sistemas menos dispersos, lo que impacta en la cantidad de memoria requerida y la eficiencia computacional.

DG tiene diferentes formulaciones que dependen de la forma en que se impone la continuidad en la formulación débil. La formulación utilizada en este trabajo de tesis es la llamada de penalización interior (IP-DGM por sus siglas en inglés), la cual se divide en tres tipos dependiendo del término de simetría elegido (De Basabe et al., 2008):

- **Galerkin de penalización interior simétrico (SIPG):** El parámetro de simetría  $S = -1$ , es la formulación utilizada en este trabajo de tesis. Para más información sobre el análisis de estabilidad y dispersión numérica de SIPG revisar los trabajos de De Basabe et al. (2008) y De Basabe & Sen (2010).
- **Galerkin de penalización interior no simétrico (NIPG):** El parámetro de simetría  $S = 1$ .
- **Galerkin de penalización interior incompleto (IIPG):** El parámetro de simetría  $S = 0$ .

## 3.2. Formulación elástica

Para poder presentar la formulación débil de la ecuación de onda elástica se empleará la notación estándar en la literatura sobre IP-DGM (Wheeler, 1978). El dominio físico se representa con  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d$

indica el número de dimensiones físicas,  $\Omega_h$  describe una partición de elemento finito de  $\Omega$ ,  $\Gamma_h$  denota al conjunto de todas las caras entre los elementos de  $\Omega_h$ . Al subconjunto de caras donde el campo de desplazamientos es continuo se le denota  $\Gamma_c \subset \Gamma_h$ . Por otra parte, al subconjunto de caras que corresponden a las fracturas se le llama  $\Gamma_f \subset \Gamma_h$  con  $\Gamma_c \cup \Gamma_f = \Gamma_h$  y  $\Gamma_c \cap \Gamma_f = \emptyset$ . El promedio de una función se denota por  $\{\cdot\}$  y el salto por  $[\cdot]$  por lo que si  $\gamma$  es la interfaz entre los elementos  $E_1$  y  $E_2$  se tiene que las funciones promedio y salto de  $u$  están dadas por:

$$\{u\} = \frac{1}{2}(u|_{E_1} + u|_{E_2}), \quad (20)$$

$$[u] = (u|_{E_1} - u|_{E_2}). \quad (21)$$

La ecuación de onda para medios isótropos heterogeneos es:

$$\rho \partial_{tt} u_i - \partial_i \lambda \partial_j u_j - \partial_j \mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j) = f_i \text{ en } \Omega \times (0, T] \text{ con } i, j = 1, \dots, d, \quad (22)$$

$$\tau_i(\mathbf{u}) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \quad (23)$$

$$u_i = \partial_t u_i = 0 \text{ para } t = 0 \quad (24)$$

donde  $\partial\Omega$  es la frontera del dominio espacial  $\Omega$ ,  $(0, T]$  es el dominio del tiempo,  $u_i$  es una componente del desplazamiento,  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  la densidad del medio,  $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$  y  $\mu = \mu(\mathbf{x})$  son los parámetros de Lamé. La tracción está dada por:

$$\tau_i(\mathbf{u}) = \sigma_{ij} \cdot n_j = \lambda \partial_k u_k n_i + \mu (\partial_i u_j + \partial_j u_i) n_j, \quad (25)$$

con  $\mathbf{n}$  como el vector normal a la superficie donde se ejerce la tracción.

Para obtener la formulación débil de la ecuación 22 apropiada para IP-DGM, se define el espacio vectorial  $\mathbf{X} = X^d$ , con  $X = \text{span}\{\phi_i\}_{i=1}^N$  donde  $\phi_i$  son funciones base y  $N$  es el número total de funciones base. Las funciones base no necesitan ser continuas en todo el dominio pero si dentro de los elementos. Para obtener la formulación débil se multiplica por la llamada función prueba  $\mathbf{v} \in \mathbf{X}$ , se integra sobre los elementos y se suman todas las contribuciones de los elementos, lo que lleva a (De Basabe et al., 2016; Riviere & Wheeler, 2003):

$$\sum_{E \in \Omega_h} ((\rho \partial_{tt} \mathbf{u}, \mathbf{v})_E + \mathbf{B}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \sum_{\gamma \in \Gamma_c} \mathbf{J}_\gamma^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{E \in \Omega_h} (\mathbf{f}, \mathbf{v})_E, \quad (26)$$

donde:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_E = \int_E u_i v_i d\mathbf{x}, \quad (27)$$

$$\mathbf{B}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_E c_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} d\mathbf{x}, \quad (28)$$

$$\mathbf{J}_\gamma^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = - \int_\gamma \{T_i(\mathbf{u})\} [v_i] d\gamma + S \int_\gamma \{T_i(\mathbf{v})\} [u_i] d\gamma + \frac{R}{|\gamma|} \int_\gamma \{c_{11}\} [u_i] [v_i] d\gamma. \quad (29)$$

Si se supone que las fracturas se encuentran entre las interfaces de los elementos de la malla de elementos finitos, la condición de LSM se impone en la formulación débil con el término (De Basabe et al., 2016):

$$\mathbf{J}_\gamma^f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\gamma Z_{ij}^{-1} [u_j] [v_i] d\gamma, \quad (30)$$

de esta forma, la formulación débil que incluye los efectos de las fracturas (en las caras de los elementos) en el dominio del tiempo es:

$$\sum_{E \in \Omega_h} ((\rho \partial_{tt} \mathbf{u}, \mathbf{v})_E + \mathbf{B}_E(\mathbf{u}, \mathbf{v})) + \sum_{\gamma \in \Gamma_c} \mathbf{J}_\gamma^c(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sum_{\gamma \in \Gamma_f} \mathbf{J}_\gamma^f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{E \in \Omega_h} (\mathbf{f}, \mathbf{v})_E. \quad (31)$$

La formulación débil del problema elástico es utilizada para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinario, para ello se sustituye la solución de  $\mathbf{u}$  por la aproximación  $\mathbf{u}_h$  dado por la combinación lineal:

$$\mathbf{u}_h(x, z, t) = (U_j^x(t) \phi_j(x, z), U_j^z(t) \phi_j(x, z))^T, \quad (32)$$

donde  $U_j^x$  y  $U_j^z$  son los coeficientes de la combinación lineal para el desplazamiento horizontal y vertical respectivamente.

Sustituyendo la función prueba por  $\mathbf{v} = (\phi_i, 0)^T$  se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$M_{ij} \partial_{tt} U_j^x + K_{ij}^1 U_j^x + K_{ij}^2 U_j^z = F_i^x, \quad (33)$$

con  $\mathbf{v} = (0, \phi_i)^T$  se obtiene:

$$M_{ij} \partial_{tt} U_j^z + K_{ij}^3 U_j^x + K_{ij}^4 U_j^z = F_i^z, \quad (34)$$

donde los vectores  $F^x$  y  $F^z$  corresponden a la componente  $x$  y  $z$  respectivamente de la fuente, mientras  $M$  y  $K$  se denominan las matrices de masa y rigidez respectivamente.

Las matrices en las ecuaciones 33 y 34 están dadas por:

$$M_{ij} = \sum_{E \in \Omega_h} (\rho \phi_i, \phi_j)_E \quad (35)$$

$$K_{ij}^1 = \sum_{E \in \Omega_h} \mathbf{B}_E((\phi_i, 0)^T, (\phi_j, 0)^T) + \mathbf{J}_\gamma^c((\phi_i, 0)^T, (\phi_j, 0)^T) + \mathbf{J}_\gamma^f((\phi_i, 0)^T, (\phi_j, 0)^T) \quad (36)$$

$$K_{ij}^2 = \sum_{E \in \Omega_h} \mathbf{B}_E((0, \phi_i)^T, (\phi_j, 0)^T) + \mathbf{J}_\gamma^c((0, \phi_i)^T, (\phi_j, 0)^T) + \mathbf{J}_\gamma^f((0, \phi_i)^T, (\phi_j, 0)^T) \quad (37)$$

$$K_{ij}^3 = \sum_{E \in \Omega_h} \mathbf{B}_E((\phi_i, 0)^T, (0, \phi_j)^T) + \mathbf{J}_\gamma^c((\phi_i, 0)^T, (0, \phi_j)^T) + \mathbf{J}_\gamma^f((\phi_i, 0)^T, (0, \phi_j)^T) \quad (38)$$

$$K_{ij}^4 = \sum_{E \in \Omega_h} \mathbf{B}_E((0, \phi_i)^T, (0, \phi_j)^T) + \mathbf{J}_\gamma^c((0, \phi_i)^T, (0, \phi_j)^T) + \mathbf{J}_\gamma^f((0, \phi_i)^T, (0, \phi_j)^T) \quad (39)$$

$$F_{ij}^x = \sum_{E \in \Omega_h} (fx, \phi_i)_E \quad (40)$$

$$F_{ij}^z = \sum_{E \in \Omega_h} (fz, \phi_i)_E \quad (41)$$

La implementación de SIPG de De Basabe et al. (2016) se ha utilizado para reproducir los efectos que las fracturas tienen sobre la propagación de ondas. Por ejemplo, se han comparado los resultados obtenidos con SWP y con diferentes EMT, para un amplio rango de parámetros de las fracturas y de los medios. Los resultados demuestran que SWP da resultados físicamente realistas, incluso cuando las EMT pierden precisión (Antonio, 2021; Romero, 2017; Peral Altamirano, 2021).

## Capítulo 4. Dominio de la frecuencia

---

Resolver el problema de propagación de ondas en el dominio de la frecuencia ofrece una serie de ventajas respecto a trabajar en el dominio del tiempo, sobre todo cuando se trata de caracterización de fracturas. Cuando se resuelve en el dominio de la frecuencia, se tienen que incorporar herramientas matemáticas para mitigar la interacción no deseada de ondas con los límites del dominio computacional. Las fronteras de tipo PML han mostrado excelentes resultados en sismología. En este capítulo se exploran las ventajas y complicaciones del dominio de la frecuencia, su relación con el dominio del tiempo y se expone el fundamento de las fronteras PML y su funcionamiento.

### 4.1. Introducción a la transformada de Fourier

La transformada de Fourier (FT, por sus siglas en inglés) es una de las herramientas matemáticas más importantes y más utilizadas en la ciencia e ingeniería. Es una transformación que toma una función en el dominio del tiempo o espacio y la reescribe en términos de la frecuencia o del número de onda. De esta manera, la FT de una función puede ser interpretada como una función que indica la contribución de cada frecuencia presente en la función original (Bracewell, 1989). Las amplitudes y fases relacionadas con las frecuencias pueden proporcionar información que no es fácil de interpretar en el dominio original. La definición matemática de la FT se puede escribir como (Hsu, 1970):

- La función  $F(w)$  se conoce como la transformada de Fourier de  $f(t)$  y la operación de integración se simboliza por  $\mathcal{F}$ :

$$F(w) = \mathcal{F}[f(w)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt} dt, \quad (42)$$

mientras que  $\mathcal{F}^{-1}$  simboliza la función inversa,  $f(t)$  es llamada la transformada inversa de Fourier si cumple que:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt} dw, \quad (43)$$

La transformada discreta de Fourier (DFT, por sus siglas en inglés) es un caso especial de la transformada de Fourier. Si se asume que  $n$  muestras de la función original  $f(t)$  corresponden a un periodo de la función, la FT de la función  $f(t)$  estará dada por también  $n$  muestras. La muestra  $k$  se calculará tal que (Brigham, 1988):

$$\hat{f}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j e^{-i2\pi jk/n}, \quad (44)$$



donde el símbolo  $\hat{\cdot}$  indica que el valor se encuentra en el dominio de la frecuencia. La transformada discreta inversa (IDFT, por sus siglas en inglés) tendrá la forma:

$$f_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}_j e^{i2\pi jk/n}. \quad (45)$$

## 4.2. Señales

La DFT es de gran interés debido a que en la mayoría de las situaciones, se cuenta con una serie de datos discretos que representan una función, y la DFT permite aproximar la FT de dicha función. La validez de la aproximación depende de la serie de datos a la que se le aplica la DFT, por lo que es importante una buena elección de la forma en que se recolectan los datos. Algunos casos especiales para funciones periódicas son (Brigham, 1988):

- **Intervalo de muestreo igual al periodo:** Este caso representa las únicas funciones que su DFT coincide exactamente con su FT si se cumple que:
  1. La función a muestrear debe ser periódica.
  2. La función debe ser de banda limitada.
  3. La tasa de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia más alta contenida en la función.
  4. Se debe muestrear regularmente durante todo el periodo.
  
- **Intervalo de muestreo diferente al periodo:** Si una función periódica de banda limitada es muestreada durante un intervalo que no es un múltiplo del periodo de la función, la DFT y FT serán considerablemente diferentes. En la función original habrá cambios abruptos, lo que resulta en componentes de frecuencia adicionales que no deberían existir. A este efecto se le conoce como fuga de frecuencias.
  
- **Función de duración finita:** Si la función es finita en el tiempo, puede aparecer el efecto conocido como *aliasing*. Los errores introducidos por *aliasing* se reducen si se elige un intervalo de muestreo lo suficientemente pequeño.
  
- **Funciones generales:** Cuando la función no es ni finita en el tiempo ni de banda limitada, un

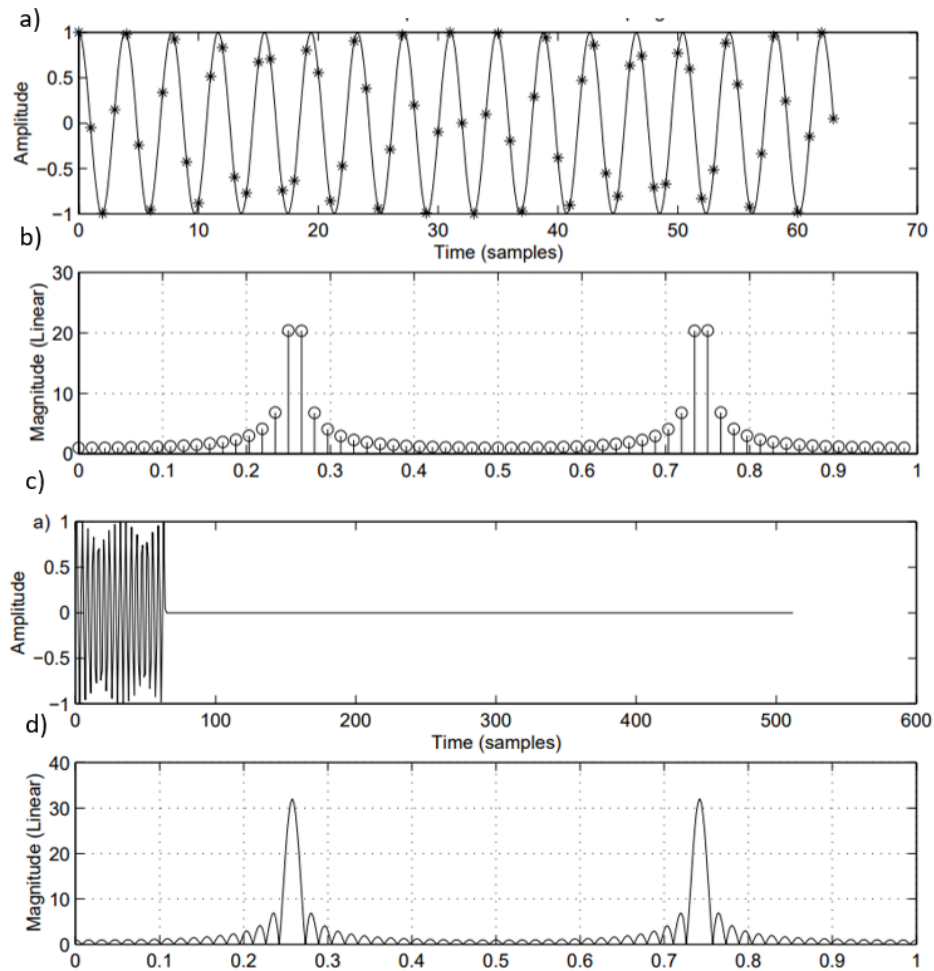
tiempo de muestreo diferente a un periodo en la señal puede ocasionar ondulaciones en el dominio de la frecuencia.

### 4.3. Análisis de series

Aplicar una DFT a una serie de datos no periódicos tiene impactos negativos en la calidad de los datos obtenidos, es por ello que muestrear y preparar correctamente la señal es de suma importancia. Algunas de las técnicas utilizadas para lograr dicho objetivo son (Donnelle & Rust, 2005; He & Feng, 2022; Smith, 2008; Sujatha, 2023):

- **Rellenado de ceros:** Agregar ceros al principio o final de la serie de tiempo antes de realizar la DFT tiene varias ventajas y beneficios:
  1. Algunos algoritmos de FFT necesitan que la cantidad de datos sea potencia de dos ( $2^n$ ), por lo que si no se cuentan con datos necesarios, se pueden agregar ceros sin repercusiones negativas.
  2. Agregar ceros a la señal, aumenta la resolución en el dominio de la frecuencia, por ejemplo en la figura 4, se muestra como agregar ceros a los datos iniciales hace que en la frecuencia aparezcan valles que antes no se observaban.
  3. Eliminar discontinuidades en la señal.
- **Ventaneo:** El ventaneo es utilizado para descartar datos o para suavizar datos. En general una ventana es una función positiva, suave, simétrica, con valor máximo de 1 y que en sus extremos se aproxima a cero. Las ventanas se aplican multiplicando la serie de datos por la función ventana. En general se aplican ventanas de amortiguamiento para reducir la fuga de frecuencias en funciones no periódicas.
- **Frecuencia de Nyquist:** Para garantizar que la señal muestreada mantenga la información de la función original, se debe muestrear con una frecuencia  $f_s$  al menos el doble de la frecuencia máxima  $f_{max}$  presente en la función original. En la práctica es común que no se pueda muestrear con frecuencias altas. Cuando se puede elegir el muestreo, regularmente se toma que al menos se cumpla la relación:

$$f_s \geq 5f_{max} \quad (46)$$



**Figura 4.** Se muestra la DFT sin y con rellenado de ceros. a) Señal original, b) DFT de la señal original, c) señal después de agregar ceros y d) DFT de la señal modificada (Smith, 2008).

#### 4.4. Transformada rápida de Fourier

Calcular directamente la DFT de una función es un proceso computacionalmente costoso, se requiere un número de operaciones del orden de  $N^2$  donde  $N$  se refiere al tamaño de la señal. La transformada rápida de Fourier (FFT por sus siglas en inglés) se refiere a un tipo de algoritmo que reduce el costo computacional al orden de  $N \log_2 N$  (Duhamel & Vetterli, 1990). Mientras más grande sea  $N$ , menos aporta  $\log_2 N$  para la cantidad total de operaciones por lo que para series muy grandes, el orden de costo computacional pasa de ser cuadrático a aproximadamente lineal. La FFT es un método complicado pero puede interpretarse como dividir la señal en grupos más pequeños, calcular la DFT de cada grupo y luego tomando en cuenta la estructura y simetrías, se combinan los grupos hasta llegar a la DFT de la serie original completa (Cochran et al., 1967).

La FFT de una secuencia de datos reales es conjugadamente simétrica en el dominio de la frecuencia, lo que significa que el espectro de frecuencias tiene una simetría de espejo, por lo que en general se obtienen  $N/2$  puntos en frecuencia para una serie original de  $N$  puntos. La frecuencia más alta que se puede calcular es:

$$f_{max} = \frac{1}{2}f_s, \quad (47)$$

por otro lado, la resolución en la frecuencia  $\Delta f$  está dada por:

$$\Delta f = 2\frac{f_{max}}{N}. \quad (48)$$

## 4.5. Problema elástico en el dominio de la frecuencia

### 4.5.1. Ecuación de onda

Para poder escribir la ecuación de onda, se considera un dominio computacional  $\Omega \in R^d$ , donde  $d$  representa la dimensión del medio. La propagación de ondas elásticas está determinada por la ecuación de Helmholtz (Gavriliéva et al., 2020b):

$$-\nabla \cdot \sigma(\mathbf{u}) - \omega^2 \rho \mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}} \quad x \in \Omega, \quad (49)$$

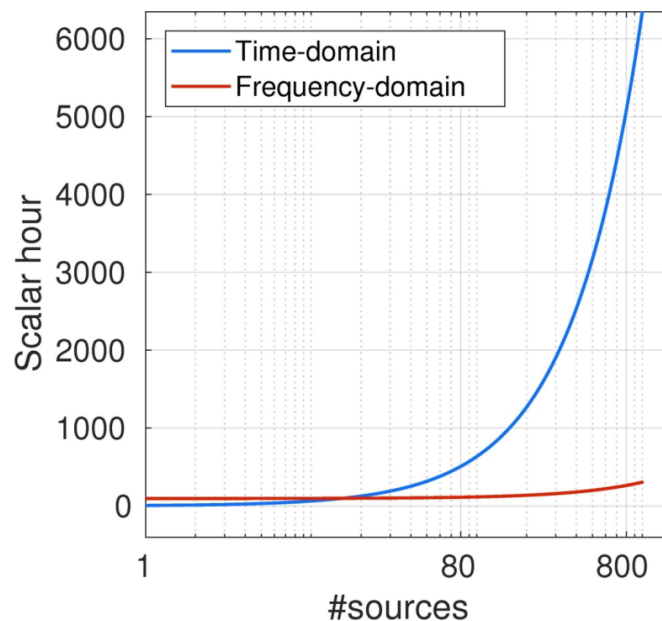
donde  $\omega$  es la frecuencia,  $\sigma$  es el tensor de estrés,  $\rho$  es la densidad del medio y  $\hat{\mathbf{f}}$  es la función fuente en el dominio de la frecuencia.

### 4.5.2. Ventajas del dominio de la frecuencia en sismología

Actualmente las simulaciones en el dominio de la frecuencia tienen un papel muy importante en los métodos de inversión de forma de onda, ya que se pueden obtener los mismos resultados que en el dominio del tiempo y con mayor eficiencia debido a que solo son necesarias unas cuantas frecuencias para obtener imágenes confiables del medio, lo que reduce la cantidad de datos necesarios (Operto et al., 2007). Problemas con la dispersión numérica debida a los saltos discretos en el tiempo también son mitigados, además el sistema de ecuaciones resultante es altamente paralelizable debido a que

los componentes de la frecuencia son relativamente independientes (Feng et al., 2019). Algunas otras ventajas del dominio de la frecuencia son:

- Se pueden agregar fácilmente efectos viscoelásticos introduciendo frecuencias complejas (Min et al., 2000).
- Una vez resuelto el problema, agregar múltiples fuentes conlleva poco costo computacional (Pratt, 1990). Esto se ve reflejado en la diferencia de tiempo que existe para construir un gradiente de FWI en función de la cantidad de fuentes sísmicas, entre el dominio del tiempo y la frecuencia, ver imagen 5.
- Se tiene total control sobre las frecuencias que se desean modelar (Marfurt, 1984).



**Figura 5.** Incremento del tiempo efectivo de cómputo para obtener un gradiente para FWI en función de las fuentes sísmicas del modelo (Li et al., 2019).

## 4.6. Fronteras PML

### 4.6.1. Fronteras absorbentes

Cuando se trabaja en el dominio del tiempo, las reflexiones en la frontera pueden ser eliminadas escogiendo adecuadamente la ventana de tiempo a simular o también se puede extender lo suficiente el

dominio computacional para que las ondas no lleguen a interactuar con la frontera durante el tiempo de simulación. Debido a que en el dominio de la frecuencia se obtiene una solución para una frecuencia específica pero para todos los tiempos, el efecto de las fronteras no puede ser ignorado (Pratt, 1990). Para solucionar esto, se introducen fronteras artificiales que limiten la zona de interés y permitan deshacerse de las reflexiones no deseadas. Algunos de los esquemas más populares son las condiciones de fronteras absorbentes (ABC por sus siglas en inglés), capas absorbentes (AL por sus siglas en inglés) y las capas perfectamente acopladas (PML por sus siglas en inglés). Las fronteras PML en múltiples ocasiones han mostrado ser el tipo de frontera más eficiente (Marcinkovich & Olsen, 2003; Gvozdic & Djurdjevic, 2017; Gao et al., 2017).

#### 4.6.2. Introducción a las fronteras PML

Las fronteras PML fueron desarrolladas por Berenger (1996) para mitigar las ondas electromagnéticas en simulaciones numéricas. Consiste en rodear el medio de interés por una región PML donde mediante una transformada compleja a las coordenadas se introduce un decaimiento exponencial de las ondas, donde la parte imaginaria de la transformada está relacionada con el factor de atenuación. Las PML tienen dos propiedades básicas (Givoli, 2008):

1. La impedancia del medio de interés y de la región PML son idénticas, por lo que no existe reflexiones en la frontera. Esta propiedad se mantiene incluso para ondas de compresión y de cizalla acopladas.
2. La solución decae exponencialmente en el dominio PML.

Para lograr estos dos puntos, se define el dominio PML  $\Omega_{PML}$  alrededor de la región de interés  $\Omega_{BD}$ , como se muestra en la figura 6.  $\Omega_{PML}$  y  $\Omega_{BD}$  se describen como (Pled & Desceliers, 2022):

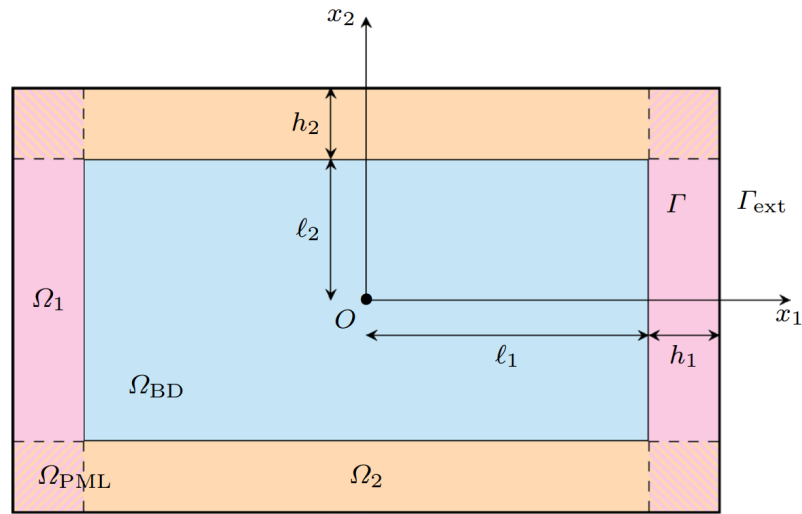
$$\Omega_{BD} = x_i \in [-l_i, l_i] \text{ con } i = 1, \dots, d, \quad (50)$$

$$\Omega_{PML} = x_i \in [-l_i - h_i, l_i + h_i] \setminus \Omega_{BD} \text{ con } i = 1, \dots, d, \quad (51)$$

donde  $h_i$  es el ancho de la región PML en la dirección  $i$  y  $d$  es la dimensión del dominio. A su vez la región PML es dividida en subregiones  $\Omega_i$  descritas por:

$$\Omega_i = \{\mathbf{x} \in \Omega_{PML} : |x_i| > l_i\}, \quad (52)$$

la frontera exterior de  $\Omega_{PML}$  se denomina  $\Gamma_{\text{ext}}$ , mientras que la frontera entre  $\Omega_{PML}$  y  $\Omega_{BD}$  se denota por  $\Gamma$  y a la frontera entre  $\Omega_{BD}$  y  $\Omega_i$  se le llama  $\Gamma_i$ .



**Figura 6.** Dominio de interés rodeado de una región PML (Pled & Desceliers, 2022).

La transformada de variables compleja está dada por:

$$\mathbf{S} : \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbf{S}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{x}} \in C = \mathbf{S}(\Omega) \subset \mathbb{C}^d, \quad (53)$$

donde la transformada para la coordenada  $x_i$  se escribe como:

$$\tilde{x}_i = S_i(x_i) = \int_0^{x_i} s_i(\xi) d\xi, \quad (54)$$

para que ésta transformada cumpla con los dos requisitos de las fronteras PML anteriormente mencionados, se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$s_i(x_i) : \begin{cases} \text{Im}(s_i(x_i)) < 0 & \text{en } \Omega_i \\ s_i(x_i) = 1 & \text{fuera de } \Omega_i. \end{cases} \quad (55)$$

En general la forma que se utiliza para la función de estiramiento es:

$$s_i(x_i) = 1 + \frac{d_i(x_i)}{i\omega}, \quad (56)$$

donde a la función  $d_i(x_i)$  se le llama la función de amortiguamiento, la cual debe ser monótona creciente

y definida positiva con:

$$d_i(x_i) : \begin{cases} d_i(x_i) > 0 & \text{en } \Omega_i \\ d_i(x_i) = 0 & \text{fuera de } \Omega_i. \end{cases} \quad (57)$$

#### 4.6.3. Continuidad y atenuación

Para comprobar que con las condiciones de la expresión 55 es suficiente para que exista atenuación de las ondas entrantes al dominio PML, se considera una onda plana de la forma (Basu & Chopra, 2004):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (58)$$

donde  $\mathbf{A}$  es el vector de polarización y el número de onda es  $\mathbf{k} = k\mathbf{p}$ , con  $\mathbf{p} = p_i\mathbf{e}_i$  como el vector unitario que apunta en la dirección de propagación de la onda. Si en el dominio PML se considera la transformación  $S_i(x_i) = \tilde{x}_i$  y la función amortiguamiento 56, el desplazamiento se puede reescribir como:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{x}})} = \mathbf{A}e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x}))} \quad (59)$$

$$= \mathbf{A}e^{i(\omega t - k_i \int_0^{x_i} (1 + \frac{d_i(\xi)}{i\omega}) d\xi)} \quad (60)$$

$$= \mathbf{A}e^{i(\omega t - k_i x_i)} e^{-\frac{k}{\omega} \int_0^{x_i} d_i(\xi) d\xi} \quad (61)$$

$$= \mathbf{A}e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} e^{-\alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}} \quad (62)$$

$$= \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-\alpha(\mathbf{x})}, \quad (63)$$

donde  $\alpha(\mathbf{x})$  se le conoce como vector de amplitud de atenuación, con  $\alpha(\mathbf{x}) = \alpha_i\mathbf{e}_i$  y las componentes están dadas por:

$$\alpha_i(x_i) = \frac{k}{\omega} \int_0^{x_i} d_i(\xi) d\xi, \quad (64)$$

en la ecuación 63 se observa que no existe cambio de impedancia (no reflexiones), el término  $e^{-\alpha(\mathbf{x})}$  atenúa exponencialmente la onda original conforme incrementa el valor de  $|x_i|$  pero la atenuación depende del ángulo que se forma entre la dirección de propagación de la onda y el vector normal  $\mathbf{n}$  a  $\Gamma$  (apuntando hacia afuera de  $\Omega$ ). Se tienen los siguientes 3 casos (Pled & Desceliers, 2022):

1. **No atenuación**  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \approx 0$  : Cuando la onda entra de manera casi tangencial al dominio  $\Omega_{PML}$ , el



término de atenuación tiende a 1, por lo que la onda entrante no disminuye su amplitud.

2. **Atenuación exponencial**  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} > 0$  : Para ondas salientes existe un grado de atenuación exponencial.
3. **Amplificación exponencial**  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} < 0$  : Cuando las ondas se propagan desde la frontera  $\Gamma_{ext}$  hacia el dominio  $\Omega_{BD}$ , existe un crecimiento exponencial de la onda. Para también mitigar las ondas reflejadas, se utiliza la condición de Dirichlet:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_{ext}. \quad (65)$$

#### 4.6.4. PML en el dominio de la frecuencia

En el dominio de la frecuencia, el uso de la transformada 53 en  $\Omega_{PML}$ , hace que se vean afectados los operadores de la siguiente manera (Pled & Desceliers, 2022):

$$\tilde{\nabla} \hat{u} = \mathbf{J}^{-T} \nabla \hat{u} = \frac{1}{s_i} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x_i} \mathbf{e}_i, \quad (66)$$

$$\tilde{\nabla} \hat{\mathbf{u}} = (\nabla \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{s_j} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (67)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\mathbf{J}^{-T} \nabla) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{s_j} \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i, \quad (68)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} ((\nabla \hat{\mathbf{u}}) \mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}^{-T} (\nabla \hat{\mathbf{u}})^T) \quad (69)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s_j} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{s_i} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad (70)$$

aunque definiendo ciertos operadores, en ciertos casos se puede reescribir el problema para que en  $\Omega_{PML}$  los operadores no se vean afectados y en su lugar se tomen en cuenta una densidad y tensor de rigidez de un material complejo, anisótropo y heterogéneo (Bindel & Govindjee, 2005).

#### 4.6.5. Complicaciones

Teóricamente para el caso continuo, las fronteras PML aseguran una excelente absorción y completa continuidad para las ondas entrantes a  $\Omega_{PML}$  pero en la práctica, la discretización y características particulares del modelo alteran su funcionamiento, lo que puede introducir complicaciones que incluso

son objeto de estudio en la actualidad (Gao et al., 2017; Givoli, 2008):

- Las PML son más sensibles a como se discretiza el problema que su contraparte ABC. El diseño teórico de las ABC en general garantiza un correcto funcionamiento cuando se discretiza el problema pero con las fronteras PML esta afirmación no siempre se cumple.
- No existe una receta infalible para la correcta elección de los distintos parámetros de las fronteras PML, por lo que los parámetros deben ser elegidos y probados para cada problema.
- Ajustar los parámetros también requiere un cambio en la discretización del problema, por ejemplo un factor de amortiguamiento alto, requerirá más resolución, lo que afectará negativamente a la eficiencia computacional. Agregar dominio PML también requerirá cambios en el dominio total computacional.
- Las fronteras PML no están asociadas con una convergencia clara.
- El análisis de las fronteras PML es difícil especialmente cuando se aplican en el dominio del tiempo.
- Complicaciones para atenuar ondas casi tangentes, evanescentes y con frecuencias bajas.

## Capítulo 5. Metodología

---

Para desarrollar la implementación, se partió del software SWP escrito en C++ que incorpora distintos métodos numéricos para resolver el problema de la propagación de ondas elásticas. En específico, se adaptó el método de Galerkin discontinuo para poder calcular la solución en el dominio de la frecuencia. Un resumen de la metodología seguida en este trabajo de tesis, con la que se obtuvo la solución numérica de la ecuación de onda, se puede ver en la figura 9.

### 5.1. Formulación débil de la ecuación de onda en el dominio de la frecuencia

Para obtener la formulación débil de la ecuación de onda para Galerkin Discontinuo se pueden tomar dos caminos: (1) El primero es partir desde la ecuación de onda planteada en el dominio de la frecuencia 49, multiplicar por una función prueba, integrar elemento por elemento y sumar la contribución de todos los elementos. (2) También se puede aplicar la transformada de Fourier a la formulación débil obtenida para el dominio del tiempo.

En este trabajo se partió del sistema de ecuaciones 33 y 34, al cual se le aplicó la transformada de Fourier afectando solo a los términos dependientes del tiempo (la derivada que acompaña a la matriz masa y a la fuente), por lo que la forma débil en el dominio de la frecuencia es:

$$-w^2 M_{ij} \hat{U}_j^x + K_{ij}^1 \hat{U}_j^x + K_{ij}^2 \hat{U}_j^z = \hat{F}_i^x \quad (71)$$

$$-w^2 M_{ij} \hat{U}_j^z + K_{ij}^3 \hat{U}_j^x + K_{ij}^4 \hat{U}_j^z = \hat{F}_i^z \quad (72)$$

donde  $\hat{F}$  indica que la función se encuentra en el dominio de la frecuencia.

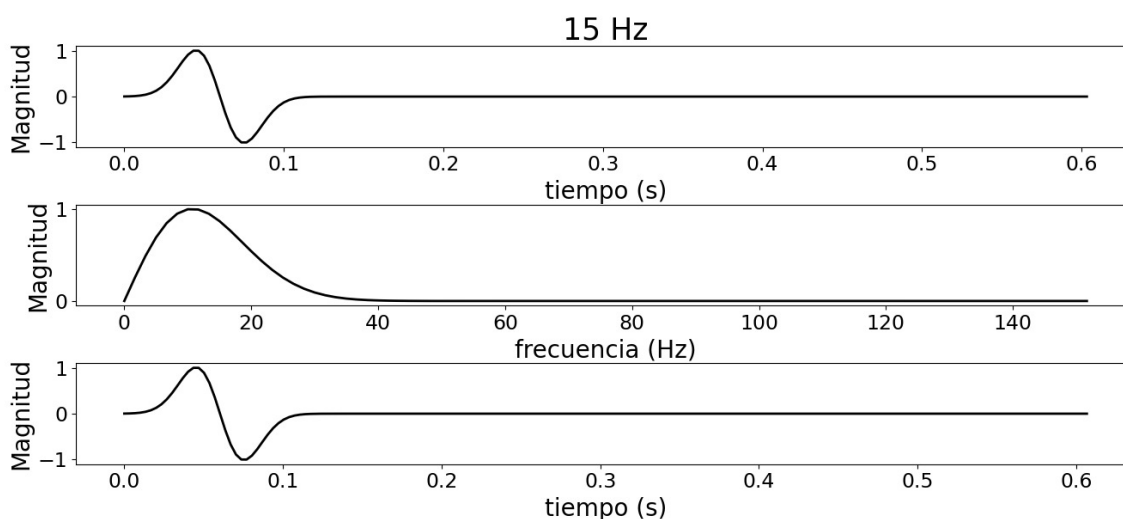
La fuente puede ser dividida en su componente espacial y temporal como:

$$F(\vec{x}, t) = f(t)g(\vec{x}), \quad (73)$$

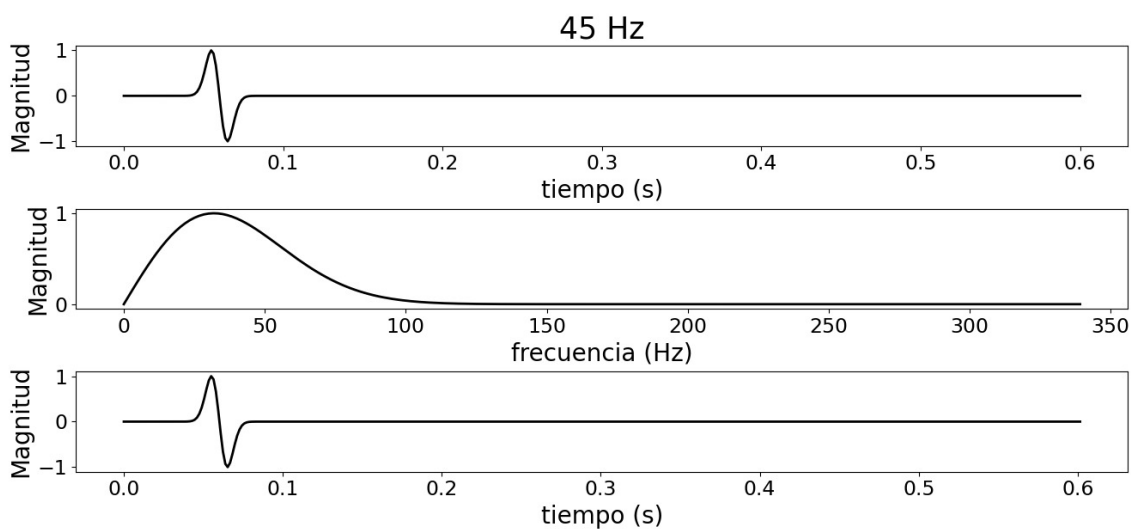
por lo que para proporcionar la fuente en el dominio de la frecuencia se aplicó una FFT a su parte temporal. Para los casos presentados en éste trabajo de tesis, la función temporal de la fuente tiene la forma de la primera derivada de la función gaussiana. Las figuras 7 y 8, muestran la forma original en el dominio del tiempo, la magnitud de la función obtenida en el dominio de la frecuencia y la transformada

inversa de Fourier. Es importante destacar que la magnitud en la transformada de Fourier tiende a cero pero para todas las frecuencias tiene una magnitud no nula. La ecuación 46 dicta que para una correcta FFT, la tasa de muestreo debe ser al menos el doble de la frecuencia máxima presente en la función.

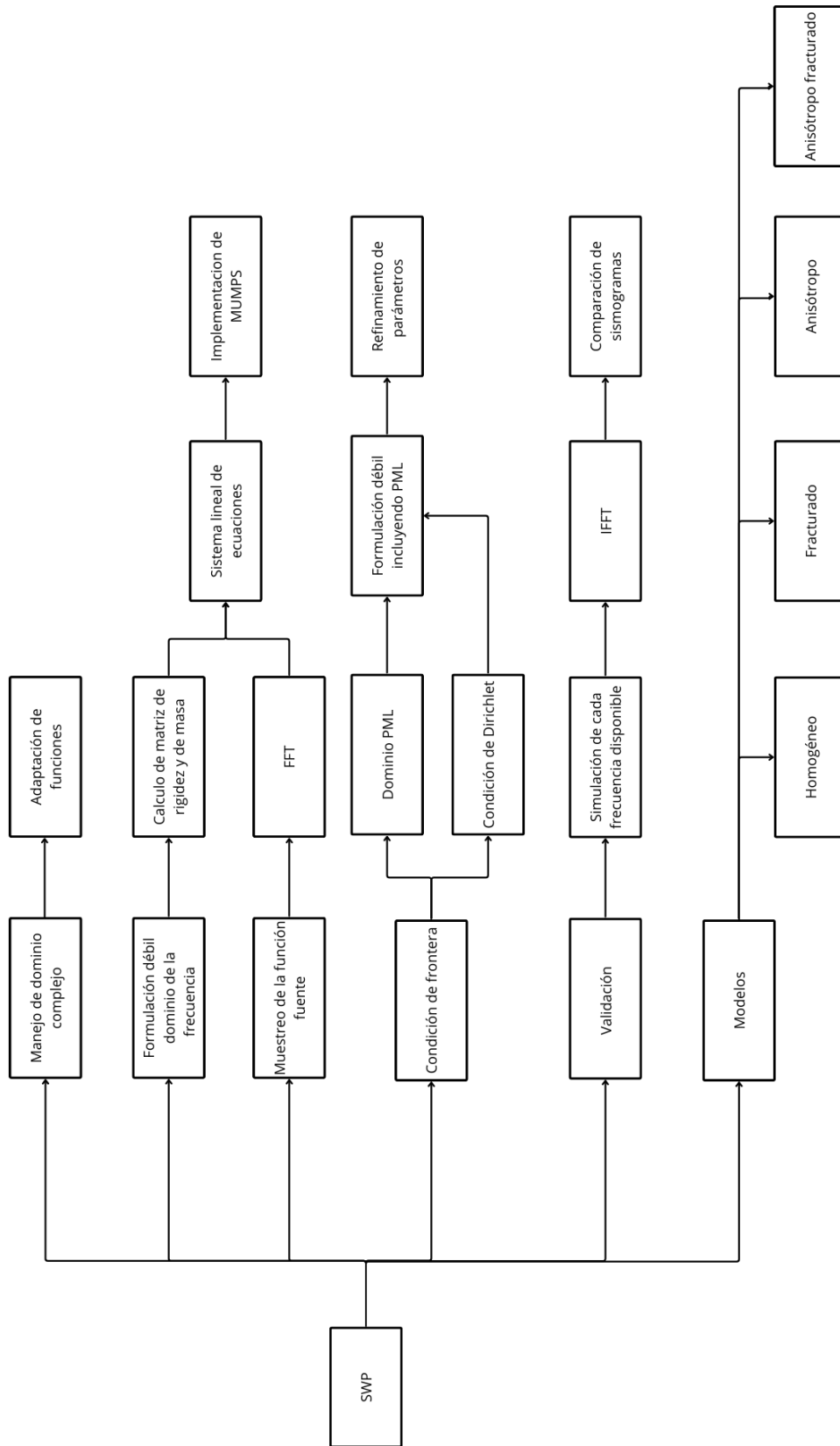
Las funciones fuentes elegidas no tienen una frecuencia máxima, por lo que se optó por una tasa de muestreo proporcional a su pico de frecuencia, para un pico de 15 Hz, 30 Hz y 45 Hz se muestreo 20, 18 y 15 veces dicha frecuencia respectivamente, para una tasa de muestreo final de 300 Hz, 540 Hz y 675 Hz respectivamente.



**Figura 7.** Función fuente correspondiente a la primera derivada de una Gaussiana con un pico de frecuencia de 15 Hz, la primera corresponde al muestreo en el tiempo, el segundo al dominio de la frecuencia (FFT) y el tercero al regreso al dominio del tiempo (IFFT)



**Figura 8.** Función fuente correspondiente a la primera derivada de una Gaussiana con un pico de frecuencia de 45 Hz, la primera corresponde al muestreo en el tiempo, el segundo al dominio de la frecuencia (FFT) y el tercero al regreso al dominio del tiempo (IFFT)



**Figura 9.** Esquema del flujo de trabajo realizado para obtener la implementación en el dominio de la frecuencia.

## 5.2. Cálculo de la FFT con oneMKL

La biblioteca “oneAPI Math Kernel Library” comprende varias herramientas matemáticas computacionales con rutinas optimizadas, cuenta con interfaces para lenguajes de programación Fortran y especialmente C que pueden ser invocadas desde aplicaciones escritas en C o C++. Tiene soporte para calcular la FFT en una o múltiples dimensiones y además puede trabajar con series de datos que no necesariamente tienen un tamaño potencia de dos. También proporciona funciones para el cálculo de la IFFT.

## 5.3. MUMPS

El sistema de ecuaciones 71 y 72 puede ser escrito como:

$$A\vec{u} = \hat{\vec{F}}, \quad (74)$$

con

$$A = -w^2M + K, \quad (75)$$

Se utilizó la versión secuencial de MUMPS para resolver el sistema de ecuaciones 74, el cual está basado en el método multifrontal que consiste en dividir la matriz  $A$  en matrices más pequeñas para posteriormente realizar una descomposición  $LU$  a cada una de ellas. Es importante mencionar que la parte que más tiempo consume es obtener la solución del sistema de ecuaciones. MUMPS está escrito en Fortran 90 y tiene una interfaz disponible en C, la cual fue incorporada en la implementación (Li et al., 2020).

La solución se obtiene en tres pasos (Raju, 2009; Padua, 2011):

1. **Análisis:** Primero se reordena la matriz con el objetivo de preservar la dispersión en los factores triangulares  $L$  y  $U$ . Posteriormente se hace una factorización simbólica, con la que se calcula un árbol de eliminación el cual se utiliza para estimar los flops y el costo de memoria de los siguientes dos pasos.
2. **Factorización:** Durante este paso se utiliza la información obtenida en la fase de análisis para calcular los factores  $L$  y  $U$  de la factorización. Este es el proceso más demandante en términos computacionales.

3. Solución: Aquí los factores  $L$  y  $U$  en conjunto con el lado derecho de la ecuación (el término de fuente) son utilizados para resolver el sistema. También se incluyen opciones para comprobar la solución o para refinarla.

No es necesario realizar los primeros dos pasos cada vez que se calcula la solución y cada proceso puede ser llamado de manera independiente. Debido a que la estructura del sistema de ecuaciones no cambia para cada frecuencia simulada, el análisis fue omitido una vez que se realizó para una frecuencia. Esto permitió hacer más eficiente el modelado de diferentes frecuencias para el mismo problema, caso que aparece cuando el usuario pide simular múltiples frecuencias o cuando se realiza una IFFT para obtener un sismograma en el dominio del tiempo a partir de los resultados en el dominio de la frecuencia.

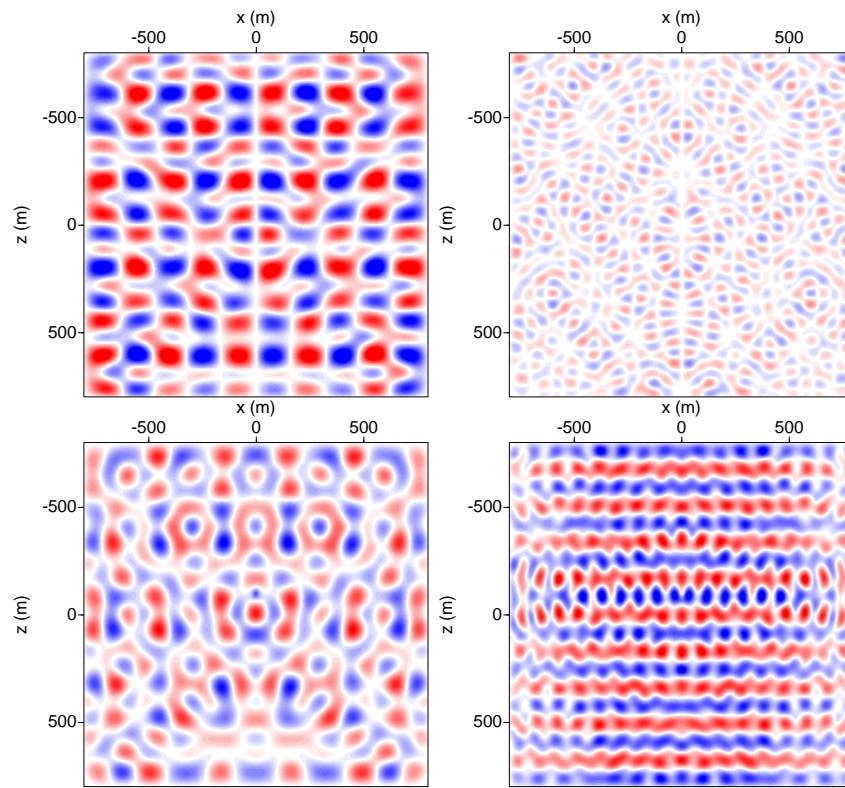
Con el formato de la tabla 1 se introdujo el sistema de ecuaciones 74. Cuando se requiere actualizar el problema, solo se recalcularon las entradas necesarias, esto con el objetivo de ahorrar recursos computacionales.

**Tabla 1.** Parámetros de entrada para MUMPS.

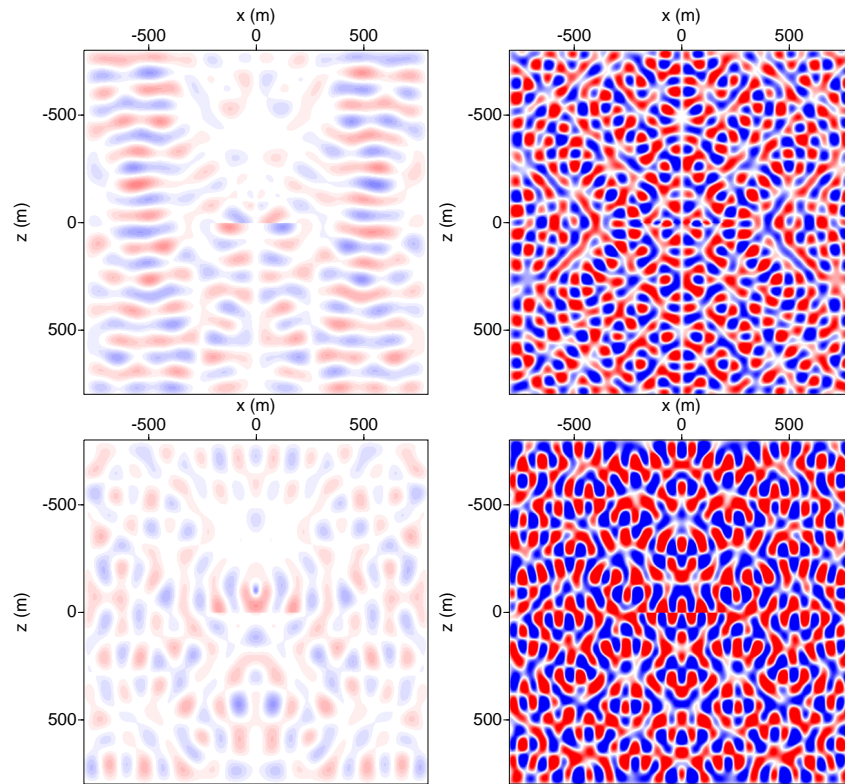
Nombre del parámetro	Descripción
N	Indica el orden de la matriz $A$
NNZ	Entero que indica la cantidad de entradas diferentes a 0 de la matriz $A$
A	Arreglo de complejos de tamaño NNZ donde cada entrada representa un valor diferente a 0 de $A$
IRN y JCN	Arreglos de $a$ enteros de tamaño NNZ de tal forma que se cumple que $A(k)$ es el valor de la entrada en la fila $IRN(k)$ y la columna $JCN(k)$
RHS	Arreglo de complejos donde cada entrada corresponde al término de fuente

Para cumplir con la doble atenuación expresada en la ecuación 63, la condición de Dirichlet (ecuación 65) fue impuesta igualando a 0 las filas de la matriz de rigidez  $K$  y del término fuente correspondientes a nodos pertenecientes a la frontera del dominio. Esto es posible debido a que se utilizaron bases nodales para expresar el campo solución y a que la matriz diagonal de masa no es nula en ninguna entrada con lo que el desplazamiento debe ser cero para cumplir con las ecuaciones 71 y 71.

Algunos ejemplos de los campos de desplazamiento obtenidos sin incluir fronteras PML se presentan en la figura 10, mientras que la figura 11 muestra los resultados para el mismo medio pero con una fractura horizontal en el medio. La gran cantidad de interferencia observada hace imposible notar efectos claros causados por la fractura, esto hace indispensable la inclusión de fronteras PML en el modelo para así evitar las reflexiones no deseadas.



**Figura 10.** Ejemplos de la parte real del campo de desplazamientos sin fronteras PML para un medio homogéneo. La primera fila corresponde a la componente  $x$  mientras que la segunda a la componente  $z$ . La primera columna muestra la frecuencia 10 Hz y la segunda 15 Hz.



**Figura 11.** Ejemplos de la parte real del campo de desplazamientos sin fronteras PML para un medio fracturado. La primera fila corresponde a la componente  $x$  mientras que la segunda a la componente  $z$ . La primera columna muestra la frecuencia 10 Hz y la segunda 15 Hz.



## 5.4. Implementación de fronteras PML

### 5.4.1. Formulación débil con fronteras PML

Para incorporar fronteras PML en el dominio de la frecuencia, se partió de la ecuación 31, a la cual se le aplicó la transformada de Fourier y posteriormente una transformada a la coordenada de posición como se indica en la ecuación 53. Si se reemplaza  $x$  con  $\tilde{x}$  siempre que el término se vea afectado por la transformada espacial, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{E}} \tilde{\varepsilon}(v) : \tilde{\sigma}(u) d\tilde{\mathbf{x}} - \omega^2 \int_{\tilde{E}} \rho v \cdot u d\tilde{\mathbf{x}} - \int_{\tilde{\gamma}} \{ \tilde{\sigma}(u) \cdot \tilde{\mathbf{n}} \} \cdot [v] d\tilde{\gamma} \\ + S \int_{\tilde{\gamma}} \{ \tilde{\sigma}(v) \cdot \tilde{\mathbf{n}} \} \cdot [u] d\tilde{\gamma} \\ + \frac{R}{|\gamma|} \int_{\tilde{\gamma}} \{ \lambda + 2\mu \} [u] \cdot [v] d\tilde{\gamma} = 0, \end{aligned} \quad (76)$$

donde  $\tilde{\cdot}$  indica que el factor depende de las nuevas coordenadas transformadas, además los términos correspondientes a las fracturas y a la fuente fueron omitidos debido a que no se consideran discontinuidades ni fuentes en el dominio PML. Ahora si se regresa a las coordenadas originales, se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_E \tilde{\varepsilon}(v) : \tilde{\sigma}(u) \det(J) d\mathbf{x} - \omega^2 \int_E \rho v \cdot u \det(J) d\mathbf{x} - \int_{\gamma} \{ \tilde{\sigma}(u) \cdot J^{-T} \mathbf{n} \} \cdot [v] \det(J) d\gamma \\ + S \int_{\gamma} \{ \tilde{\sigma}(v) \cdot J^{-T} \mathbf{n} \} \cdot [u] \det(J) d\gamma \\ + \frac{R}{|\gamma|} \int_{\gamma} \{ \lambda + 2\mu \} [u] \cdot [v] \det(J) d\gamma = 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Ahora para reescribir  $\tilde{\varepsilon}$  y  $\tilde{\sigma}$  en términos de las coordenadas originales, se tomaron en cuenta las ecuaciones 54 y 56 para calcular la nueva derivación compleja expresada con las coordenadas reales:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{1}{s_i(x_i)} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}, \quad (78)$$

sustituyendo la ecuacion anterior en la definición del tensor de deformación:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})\frac{\partial u_p}{\partial x_q}, \quad (79)$$

se obtiene:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\frac{1}{s_q} = \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})\frac{\partial u_p}{\partial x_q}\frac{1}{s_q} \quad (80)$$

$$= \frac{1}{2}(\delta_{ip}\frac{1}{s_j} + \frac{1}{s_i}\delta_{jp})\frac{\partial u_p}{\partial x_q} = \tilde{I}_{ijpq}\frac{\partial u_p}{\partial x_q}, \quad (81)$$

donde se definió:

$$\tilde{I}_{ijpq} := \frac{1}{2}(\delta_{ip}\delta_{jq}\frac{1}{s_j} + \frac{1}{s_i}\delta_{iq}\delta_{jp}). \quad (82)$$

Es fácil ver que si se define:

$$\tilde{C}_{pqrs} := \tilde{I}_{ijpq}C_{ijkl}\tilde{I}_{klrs}, \quad (83)$$

entonces:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{w})C_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{\partial w_p}{\partial x_q}\tilde{C}_{pqrs}\frac{\partial u_r}{\partial x_s}, \quad (84)$$

y debido a que  $\tilde{C}_{pqrs}$  hereda las simetrías de  $C_{ijkl}$ , se tiene que:

$$\frac{\partial w_p}{\partial x_q}\tilde{C}_{pqrs} = \frac{\partial w_p}{\partial x_0}\tilde{C}_{p0rs} + \frac{\partial w_p}{\partial x_1}\tilde{C}_{p1rs} \quad (85)$$

$$= \frac{\partial w_0}{\partial x_0}\tilde{C}_{00rs} + \frac{\partial w_1}{\partial x_0}\tilde{C}_{10rs} + \frac{\partial w_0}{\partial x_1}\tilde{C}_{01rs} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\tilde{C}_{11rs}, \quad (86)$$

por otro lado:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{w})\tilde{C}_{ijrs} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\tilde{C}_{ijrs} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\tilde{C}_{ijrs}\right) \quad (87)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x_j}\tilde{C}_{0jrs} + \frac{\partial w_1}{\partial x_j}\tilde{C}_{1jrs} + \frac{\partial w_0}{\partial x_i}\tilde{C}_{i0rs} + \frac{\partial w_1}{\partial x_i}\tilde{C}_{i1rs}\right) \quad (88)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\tilde{C}_{00rs} + \frac{\partial w_0}{\partial x_1}\tilde{C}_{01rs} + \frac{\partial w_1}{\partial x_0}\tilde{C}_{10rs} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\tilde{C}_{11rs}\right) \quad (89)$$

$$+ \frac{\partial w_0}{\partial x_0}\tilde{C}_{00rs} + \frac{\partial w_0}{\partial x_1}\tilde{C}_{10rs} + \frac{\partial w_1}{\partial x_0}\tilde{C}_{01rs} + \frac{\partial w_1}{\partial x_1}\tilde{C}_{11rs}$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial w_0}{\partial x_0}\tilde{C}_{00rs} + 2\frac{\partial w_0}{\partial x_1}\tilde{C}_{01rs} + 2\frac{\partial w_1}{\partial x_0}\tilde{C}_{10rs} + 2\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\tilde{C}_{11rs}\right), \quad (90)$$

con la ecuación 86 y 90 se concluye que:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(\mathbf{w})C_{ijkl}\tilde{\varepsilon}_{kl}(\mathbf{u}) = \frac{\partial w_p}{\partial x_q}\tilde{C}_{pqrs}\frac{\partial u_r}{\partial x_s} \quad (91)$$

$$= \varepsilon_{pq}(\mathbf{w})\tilde{C}_{pqrs}\varepsilon_{rs}(\mathbf{u}). \quad (92)$$

Recordando que:

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{u}) = C : \tilde{\varepsilon}, \quad (93)$$

y sustituyendo la ecuación 92 en 76, se obtiene la forma débil para el dominio  $\Omega_{PML}$ :

$$\begin{aligned} \int_E \varepsilon(\mathbf{v}) : \tilde{C} : \varepsilon(\mathbf{u}) \det(J) d\mathbf{x} - \omega^2 \int_E \rho v \cdot u \det(J) d\mathbf{x} - \int_\gamma \{\tilde{\sigma}(u) \cdot J^{-T} \mathbf{n}\} \cdot [v] \det(J) d\gamma \\ + S \int_\gamma \{\tilde{\sigma}(v) \cdot J^{-T} \mathbf{n}\} \cdot [u] \det(J) d\gamma + \frac{R}{|\gamma|} \int_\gamma \{\lambda + 2\mu\} [u] \cdot [v] \det(J) d\gamma = 0, \end{aligned} \quad (94)$$

si se define:

$$C^{PML} := \tilde{C} \det(J) \quad (95)$$

$$\rho^{PML} := \rho \det(J), \quad (96)$$

se obtiene la forma débil:

$$\begin{aligned} \int_E \varepsilon(\mathbf{v}) : C^{PML} : \varepsilon(\mathbf{u}) d\mathbf{x} - \omega^2 \int_E \rho^{PML} v \cdot u d\mathbf{x} - \int_\gamma \{\tilde{\sigma}(u) \cdot J^{-T} \mathbf{n}\} \cdot [v] \det(J) d\gamma \\ + S \int_\gamma \{\tilde{\sigma}(v) \cdot J^{-T} \mathbf{n}\} \cdot [u] \det(J) d\gamma + \frac{R}{|\gamma|} \int_\gamma \{\lambda + 2\mu\} [u] \cdot [v] \det(J) d\gamma = 0. \end{aligned} \quad (97)$$

#### 5.4.2. Sistema de ecuaciones con PML

La función de amortiguamiento elegida en este trabajo de tesis fue una función polinomial, debido a los buenos resultados que se han obtenido para problemas elásticos. El polinomio tiene la forma:

$$d_i(x_i) = d_i^{max} \left( \frac{|x_i| - l_i}{h_i} \right)^p, \quad (98)$$

con  $d_i^{max} > 0$  y  $p$  el grado de polinomio. Notar que la función 98 cumple con las condiciones 55 y el jacobiano  $J$  de la transformación es:

$$J = \begin{pmatrix} s_0(x_0) & 0 \\ 0 & s_1(x_1) \end{pmatrix}, \quad (99)$$

notar que las transformaciones en una dirección, son independientes de las otras coordenadas. Para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de la forma débil 97 se sustituye el desplazamiento y la función prueba por una combinación lineal de las funciones base. De la ecuación 97 se puede ver claramente que los primeros dos términos son los mismo que los primeros dos términos de la forma débil en el dominio de interés a excepción de las características del medio. La región PML se puede interpretar como un medio absorbente artificial anisótropo y heterogéneo con propiedades complejas.

Calculando el tercer término:

$$\int_{\gamma} \{\tilde{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot J^{-T} \mathbf{n}\} \cdot [\mathbf{v}] \det(J) d\gamma = \int_{\gamma} \det(J) \{\tilde{\tau}_i(\mathbf{u})\} [v_i] d\gamma, \quad (100)$$

recordando que la tracción está dada por:

$$\tilde{\tau}_i(\mathbf{u}) = C_{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{kl} \tilde{n}_j \quad (101)$$

$$= \frac{1}{2} C_{ijkl} \left( \delta_{ip} \frac{1}{s_j} + \frac{1}{s_i} \delta_{jp} \right) \frac{\partial u_p}{\partial x_q} \tilde{n}_j \quad (102)$$

$$= \frac{1}{2} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{x_l} \frac{1}{s_l} + C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{x_k} \frac{1}{s_k} \right) \tilde{n}_j \quad (103)$$

$$= \frac{1}{2} \left( C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{x_l} \frac{1}{s_l} \tilde{n}_j + C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{x_k} \frac{1}{s_k} \tilde{n}_j \right) \quad (104)$$

$$= \frac{1}{2} \left( C_{ijk0} \frac{\partial u_k}{x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_j + C_{ijk1} \frac{\partial u_k}{x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_j + C_{ijk0} \frac{\partial u_0}{x_k} \frac{1}{s_k} \tilde{n}_j + C_{ijk1} \frac{\partial u_1}{x_k} \frac{1}{s_k} \tilde{n}_j \right) \quad (105)$$

$$= \frac{1}{2} \left( C_{ij00} \frac{\partial u_0}{x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_j + C_{ij10} \frac{\partial u_1}{x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_j + C_{ij01} \frac{\partial u_0}{x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_j + C_{ij11} \frac{\partial u_1}{x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_j \right) \quad (106)$$

$$+ C_{ij00} \frac{\partial u_0}{x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_j + C_{ij10} \frac{\partial u_0}{x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_j + C_{ij01} \frac{\partial u_1}{x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_j + C_{ij11} \frac{\partial u_1}{x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_j,$$

$$= C_{ij00} \frac{\partial u_0}{x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_j + C_{ij10} \frac{\partial u_1}{x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_j + C_{ij01} \frac{\partial u_0}{x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_j + C_{ij11} \frac{\partial u_1}{x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_j \quad (107)$$

$$= C_{i000} \frac{\partial u_0}{x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_0 + C_{i100} \frac{\partial u_0}{x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_1 + C_{i010} \frac{\partial u_1}{x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_0 + C_{i110} \frac{\partial u_1}{x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_1$$

$$+ C_{i001} \frac{\partial u_0}{x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_0 + C_{i101} \frac{\partial u_0}{x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_1 + C_{i011} \frac{\partial u_1}{x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_0 + C_{i111} \frac{\partial u_1}{x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_1, \quad (108)$$

con  $\tilde{n}_i = \frac{1}{s_i} n_i$  e introduciendo la forma para el desplazamiento:

$$\mathbf{u} = (U_n^0 \phi_n, U_n^1 \phi_n) \quad (109)$$

entonces la ecuación 101 toma la forma:

$$\tilde{\tau}_i(\mathbf{u}) = C_{i000} U_n^0 \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_0 + C_{i100} U_n^0 \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_1 + C_{i010} U_n^1 \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_0 + C_{i110} U_n^1 \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} \frac{1}{s_0} \tilde{n}_1 \quad (110)$$

$$+ C_{i001} U_n^0 \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_0 + C_{i101} U_n^0 \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_1 + C_{i011} U_n^1 \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_0 + C_{i111} U_n^1 \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \frac{1}{s_1} \tilde{n}_1, \quad (111)$$

sustituyendo este resultado en el integrando del lado derecho de la ecuación 100, tomando la función prueba como  $\mathbf{v} = (\phi_m, 0)^T$  y factorizando los términos relacionados con  $U_n^0$  y  $U_n^1$  se tiene que:

$$\det(J)\{\tilde{\tau}_i(\mathbf{u})\}[v_i] = \det(J)\{\tilde{\tau}_0(\mathbf{u})\}[\phi_m] \quad (112)$$

$$\begin{aligned} &= U_n^0 \left\{ C_{0000} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} \frac{s_1}{s_0} n_0 + C_{0100} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} n_1 + C_{0001} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} n_0 + C_{0101} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \frac{s_0}{s_1} n_1 \right\} [\phi_m] \\ &+ U_n^1 \left\{ C_{0010} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} \frac{s_1}{s_0} n_0 + C_{0110} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} n_1 + C_{0011} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} n_0 + C_{0111} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \frac{s_0}{s_1} n_1 \right\} [\phi_m]. \end{aligned} \quad (113)$$

Por otro lado, si ahora se utiliza  $v = (0, \phi_m)$  en la ecuación 100 y se factorizan  $U_n^0$  y  $U_n^1$  se obtiene:

$$\det(J)\{\tilde{\tau}_i(\mathbf{u})\}[v_i] = \det(J)\{\tilde{\tau}_1(\mathbf{u})\}[\phi_m] \quad (114)$$

$$\begin{aligned} &= U_n^0 \left\{ C_{1000} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} \frac{s_1}{s_0} n_0 + C_{1100} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} n_1 + C_{1001} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} n_0 + C_{1101} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \frac{s_0}{s_1} n_1 \right\} [\phi_m] \\ &+ U_n^1 \left\{ C_{1010} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} \frac{s_1}{s_0} n_0 + C_{1110} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_0} n_1 + C_{1011} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} n_0 + C_{1111} \frac{\partial \phi_n}{\partial x_1} \frac{s_0}{s_1} n_1 \right\} [\phi_m], \end{aligned} \quad (115)$$

Se repitió este proceso para cada uno de los factores de la ecuación 97 para obtener el sistema de ecuaciones :

$$-w^2 M_{ij} \hat{U}_j^x + K_{ij}^1 \hat{U}_j^x + K_{ij}^2 \hat{U}_j^z = 0 \quad (116)$$

$$-w^2 M_{ij} \hat{U}_j^z + K_{ij}^3 \hat{U}_j^x + K_{ij}^4 \hat{U}_j^z = 0. \quad (117)$$

### 5.4.3. Ajuste de los parámetros PML

En la tabla 2 se pueden apreciar los parámetros correspondientes a las PML que pueden ser elegidos por el usuario. A pesar de que la ecuación 63 proporciona una guía para elegir correctamente el ancho del dominio PML y el coeficiente de amortiguamiento en base a la cantidad de atenuación que se requiera, se tuvieron que ajustar los parámetros para una correcta absorción de las ondas para cada problema en específico.

**Tabla 2.** Parámetros elegibles por el usuario relacionados con las fronteras PML

Parámetro	Descripción
Distancia PML	Indica la distancia del inicio de la PML al contorno externo del dominio
Grado de polinomio	Indica el orden del polinomio utilizado en la transformación de coordenadas
Coficiente de amortiguamiento	Indica la intensidad del decaimiento exponencial de las ondas

## 5.5. Desplazamientos y dominio del tiempo

Como parte de la validación del modelo, se incluyó el caso donde el usuario quiera realizar una IFFT a los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia, con la finalidad de calcular un sismograma en el dominio del tiempo que sea comparable con otras implementaciones. Para realizar la IFFT se obtiene la solución para cada frecuencia disponible en el muestreo de la función fuente y se guarda el desplazamiento de cada una de ellas para un punto en el dominio elegido por el usuario. Para un cálculo correcto, se debe contemplar que una IFFT supone que la señal en el tiempo es periódica, por lo que se ajustó la duración del muestreo de la función fuente para cada caso con el objetivo de obtener un sismograma en el dominio del tiempo que empiece y termine con un desplazamiento igual a cero. La tasa de muestreo de la fuente fue elegida en base a cuantos puntos en el dominio del tiempo se requerían para tener una buena representación de la señal. A los sismogramas obtenidos se les aplicaron una correlación cruzada con el objetivo de evaluar la similitud de las señales obtenidas (Sheriff & Geldart, 1995). Los sismogramas y la correlación obtenida se muestran en el siguiente capítulo.

## Capítulo 6. Resultados y discusión

---

### 6.1. Resultados

#### 6.1.1. Ajuste de las fronteras PML

Como se expuso en la sección 5.4.2, son dos los parámetros más importantes que afectan el funcionamiento de las fronteras PML. Con el objetivo de encontrar la mejor configuración de las variables  $d^{max}$  y  $h$  de la ecuación 98, se realizaron simulaciones numéricas con diferentes valores para visualizar el efecto causado en el campo de desplazamientos.

##### 6.1.1.1. Coeficiente de atenuación

Las figuras 12, 14, 16, muestran la componente  $x$  de la parte real del desplazamiento para las frecuencias 9, 15 y 24 Hz respectivamente, mientras que las figuras 13, 15, 17 corresponden a la componente  $z$  para las frecuencias 9, 15 y 24 Hz respectivamente. Cada imagen muestra 6 coeficientes de amortiguamiento diferentes: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 8 y 10. Todos los ejemplos mencionados tienen un ancho fijo de 600 m para los dominios PML. El medio es homogéneo y el problema tiene las características de la tabla 3.

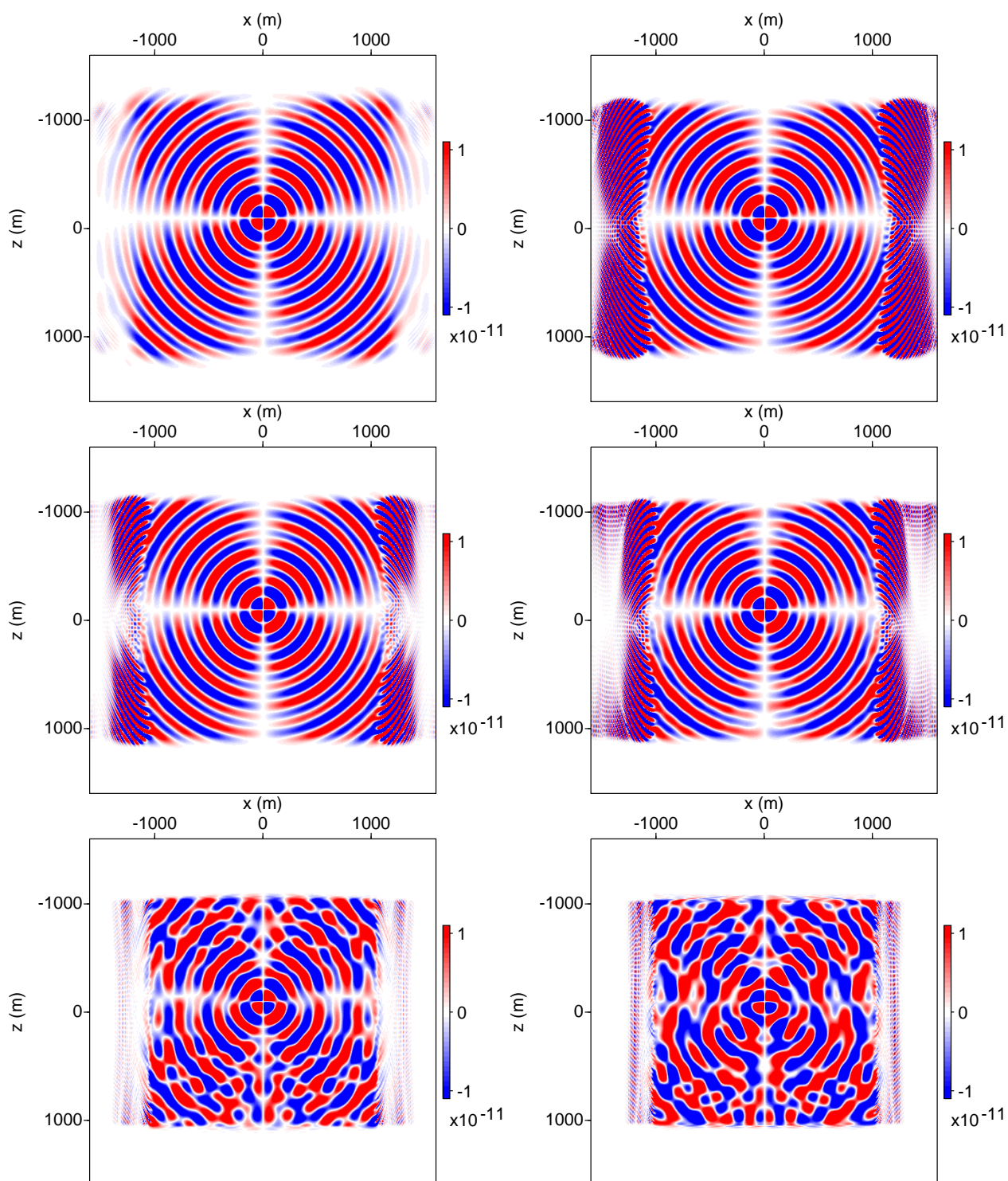
En la Figura 12, se observa que con un coeficiente de atenuación bajo de 0.1, la componente  $x$  del desplazamiento se atenúa de manera satisfactoria para frecuencias bajas. Sin embargo, se nota una mayor penetración de la onda en el dominio PML en comparación con coeficientes mayores. En contraste, para la componente  $z$  (consultar Figura 13), es evidente una interferencia significativa en las ondas con un coeficiente de 0.1, ya que la atenuación durante su recorrido en el dominio PML es insuficiente, obteniendo buenos resultados hasta un coeficiente de 0.5. A medida que la frecuencia aumenta (ver Figuras 14 y 15), se requiere un coeficiente de atenuación menor para obtener resultados satisfactorios, como se observa en el desplazamiento en  $z$  con un coeficiente de 0.3. Para frecuencias más altas (ver Figuras 16 y 17), un coeficiente de 0.1 logra atenuar completamente las ondas salientes. Esto sugiere que, conforme se incrementa la frecuencia, se pueden emplear coeficientes de atenuación cada vez más reducidos y aún así lograr resultados óptimos.

A medida que el valor de  $d_{\max}$  aumenta, se registran mayores atenuaciones hasta alcanzar un valor de 1, momento en el cual se observa un cambio de impedancia entre el dominio PML y el de interés, ocasionando reflexiones no deseadas en la frontera. Los mejores resultados para todo el rango de frecuencias utilizadas en esta tesis se obtuvieron con un coeficiente de atenuación de 0.5.

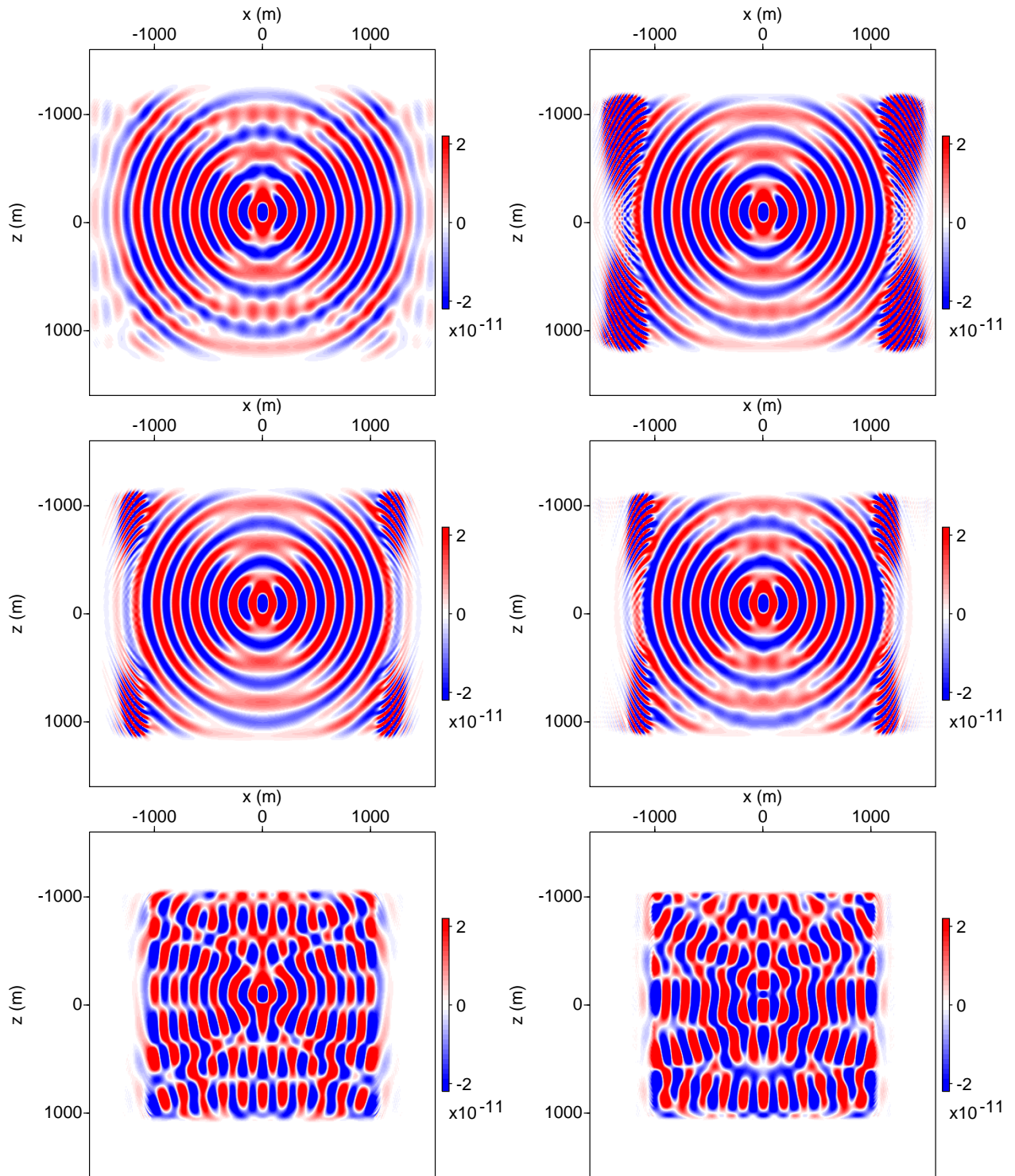
**Tabla 3.** Características del problema en las simulaciones que muestran el efecto que diferentes coeficientes de amortiguamiento de las fronteras PML tienen en el campo de desplazamientos.

<b>Parámetro</b>	<b>Descripción</b>
Dominio completo	3.2 km × 3.2 km
Dominio de interés	2 km × 2 km
Número de elementos	260 × 260
Ancho de dominio PML	0.6 km
Velocidad onda P	3.31 km/s
Velocidad onda S	1.62 km/s
Densidad del medio	2.5 g/cm <sup>3</sup>
Tipo de fuente	Puntual
Ubicación de la fuente	(0, -100)
Función fuente	Primera derivada de la función Gaussiana
Frecuencia pico	15 Hz

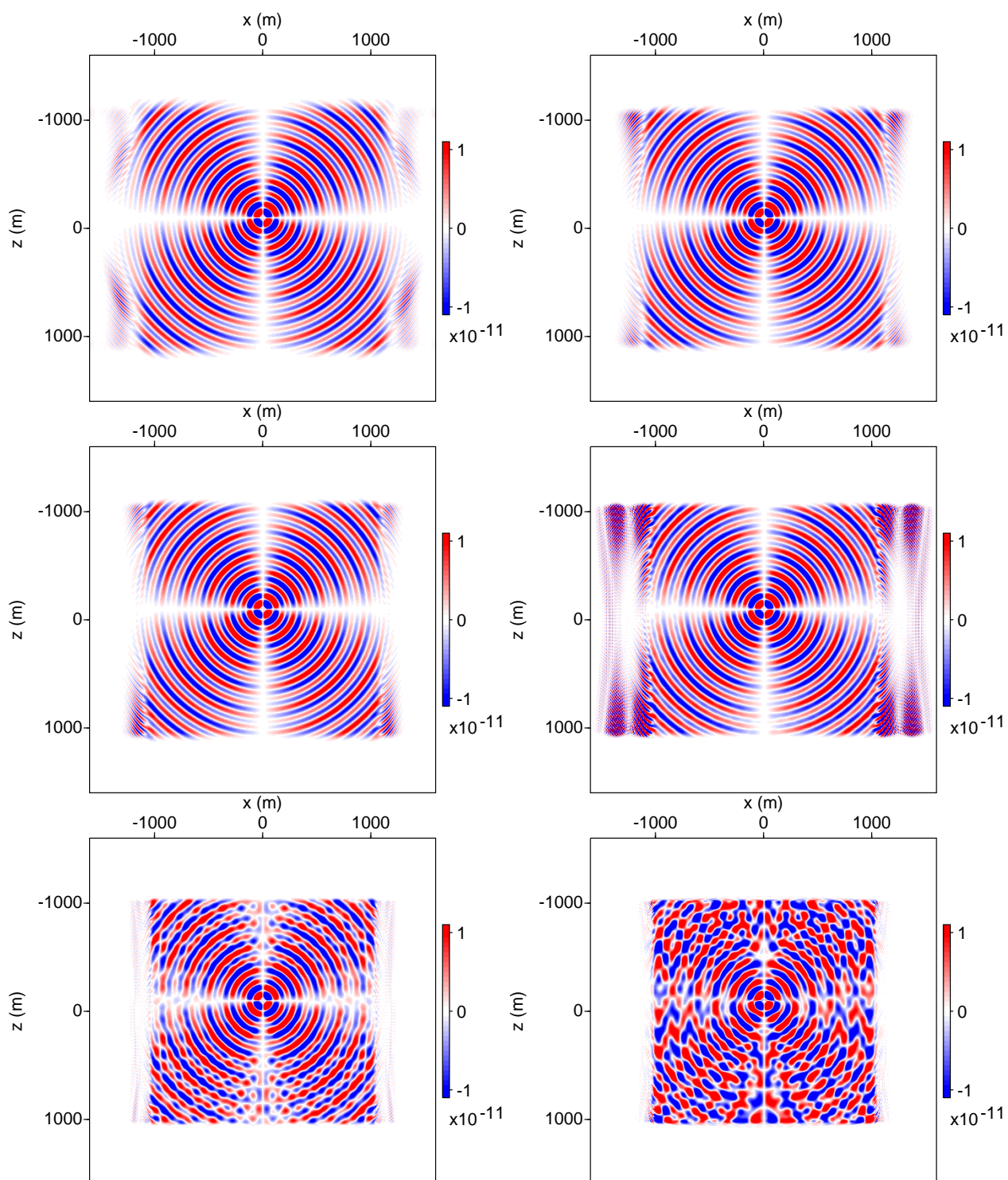




**Figura 12.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **9 Hz**, obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15.

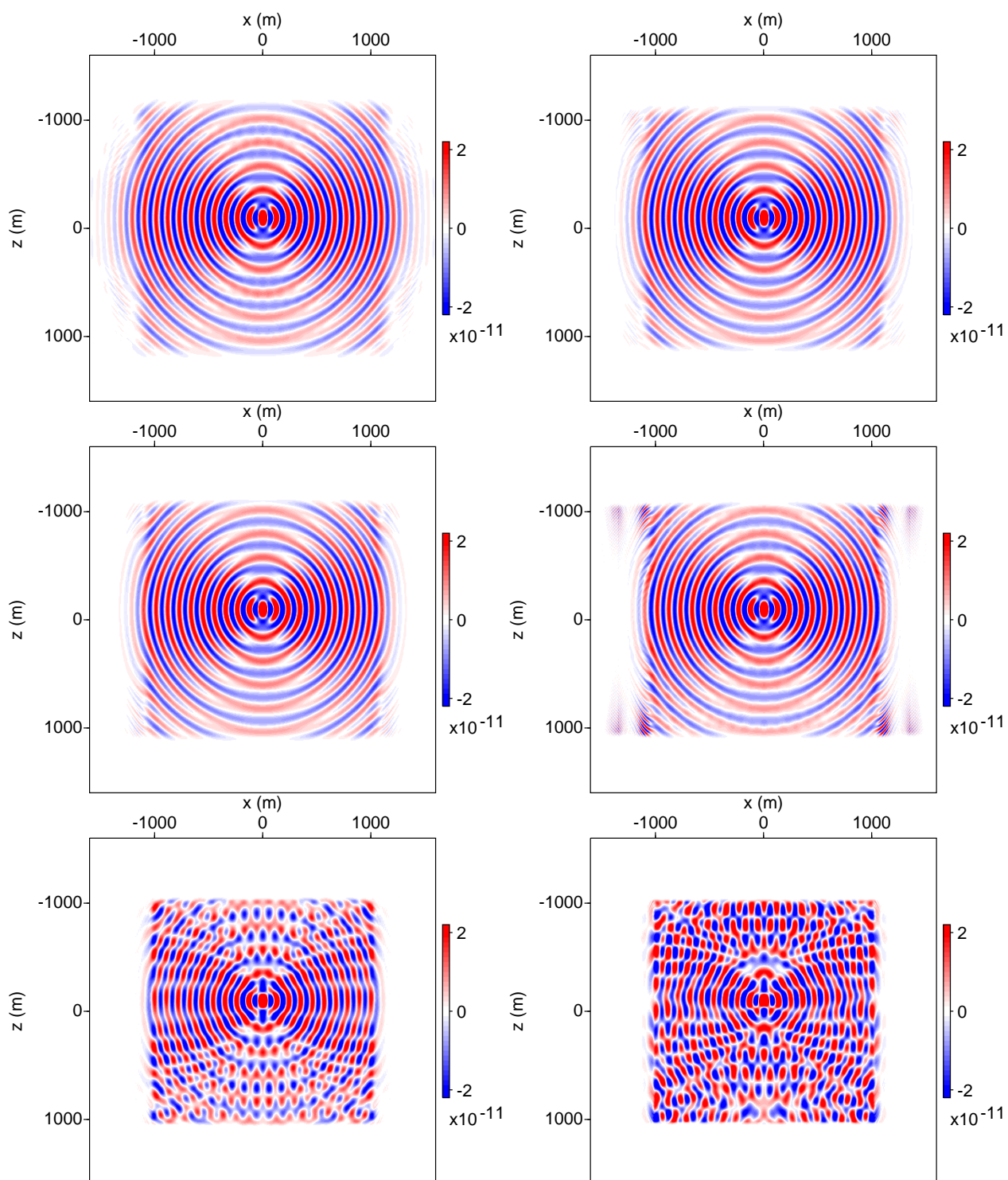


**Figura 13.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **9 Hz**, obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15.

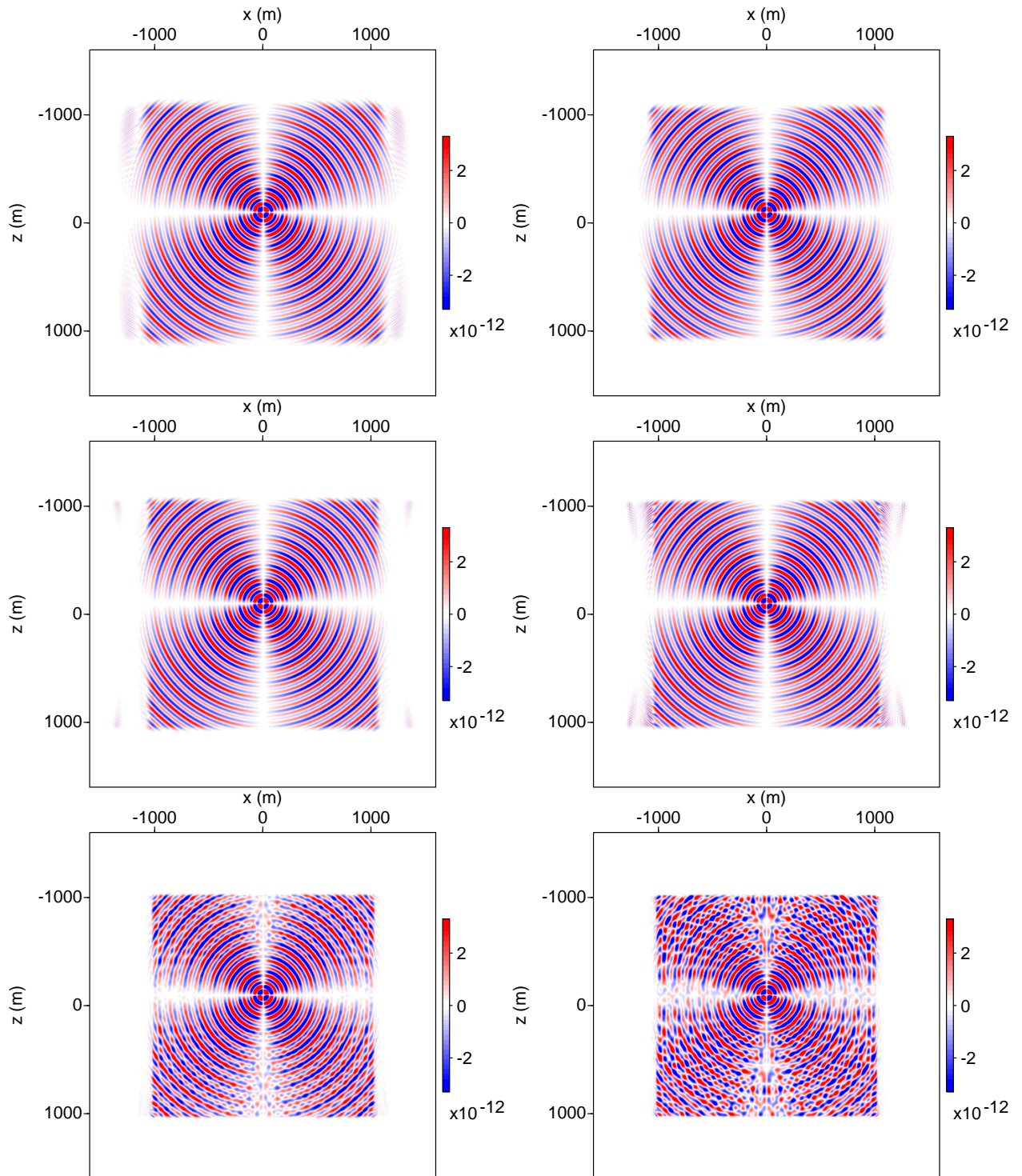


**Figura 14.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **15 Hz**, obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15.

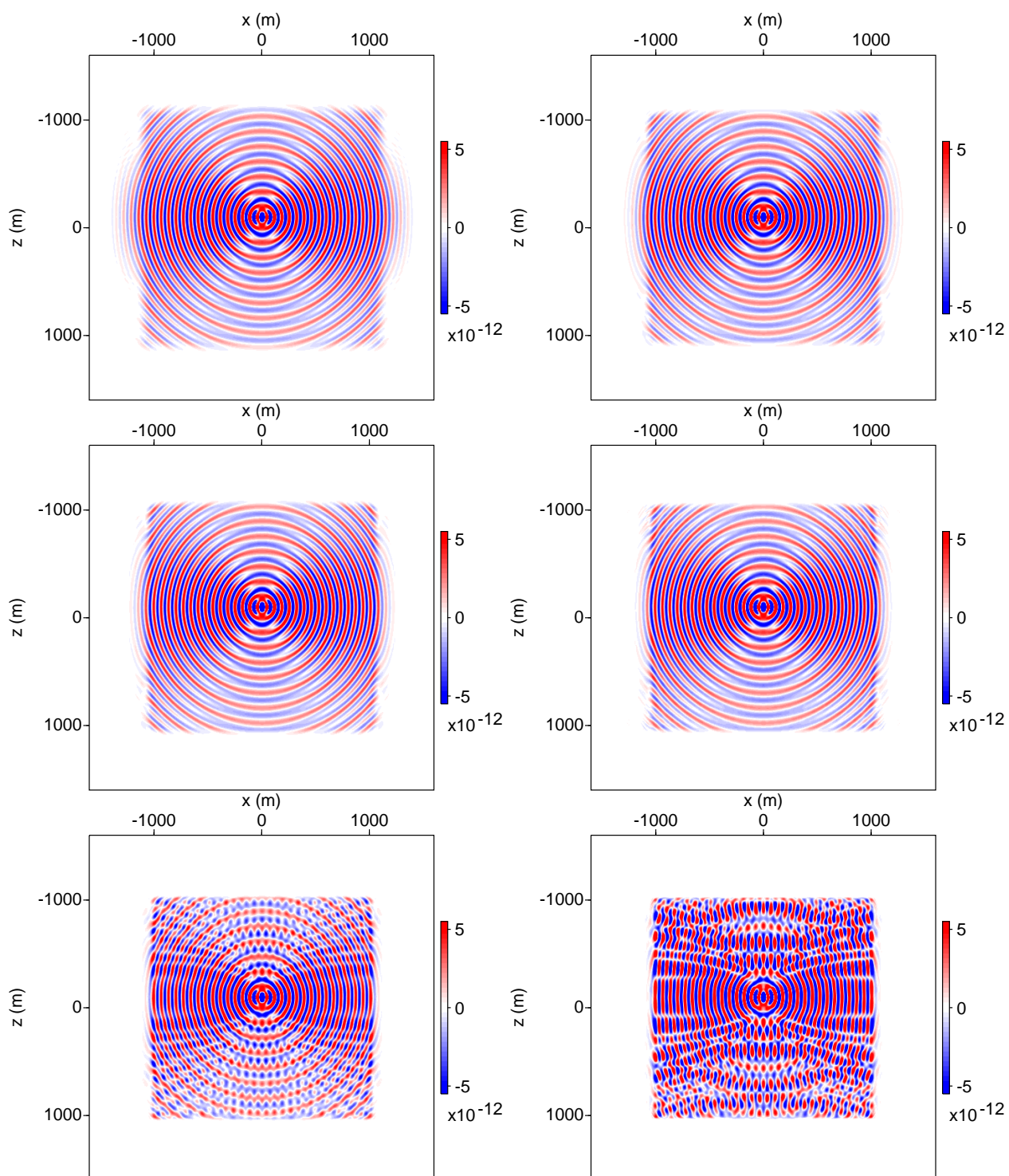




**Figura 15.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **15 Hz**, obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15.



**Figura 16.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **24 Hz**, obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15.



**Figura 17.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **24 Hz**, obtenido con las características de la tabla 3 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los coeficientes de amortiguamiento: 0.1, 0.3, 0.5, 1, 6 y 15.

### 6.1.1.2. Ancho de dominio PML

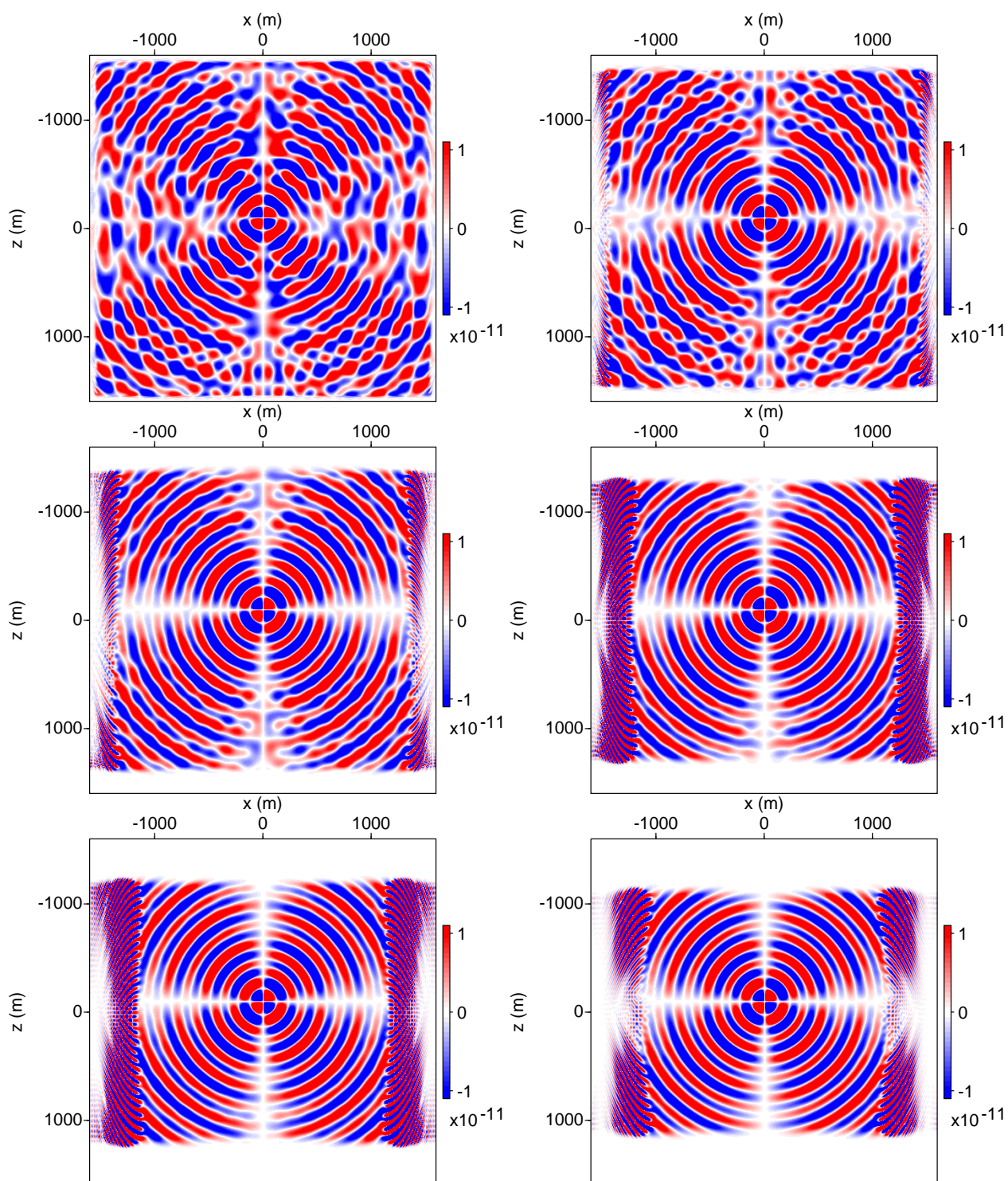
Las figuras 18, 20, 22, muestran la componente  $x$  de la parte real del desplazamiento para las frecuencias de 9, 15 y 24 Hz respectivamente, mientras que las figuras 19, 21, 23 corresponden a la componente  $z$  para las frecuencias de 9, 15 y 24 Hz respectivamente. Cada imagen muestra 6 diferentes anchos para las fronteras PML: 100, 200, 300, 400, 500 y 600m. Todos los ejemplos mencionados tienen un coeficiente de atenuación de 0.3, el medio es homogéneo y el problema tiene las características de la tabla 4.

**Tabla 4.** Características del problema en las simulaciones que muestran el efecto que diferentes anchos de las fronteras PML tienen en el campo de desplazamiento.

Parámetro	Descripción
Dominio completo	3.2 km × 3.2 km
Dominio de interés	2 km × 2 km
Número de elementos	260 × 260
Coeficiente de atenuación para el dominio PML	0.3
Velocidad onda P	3.31 km/s
Velocidad onda S	1.62 km/s
Densidad del medio	2.5 g/cm <sup>3</sup>
Tipo de fuente	Puntual
Ubicación de la fuente	(0, -100)
Función fuente	Primera derivada de la función Gaussiana
Frecuencia pico	15 Hz

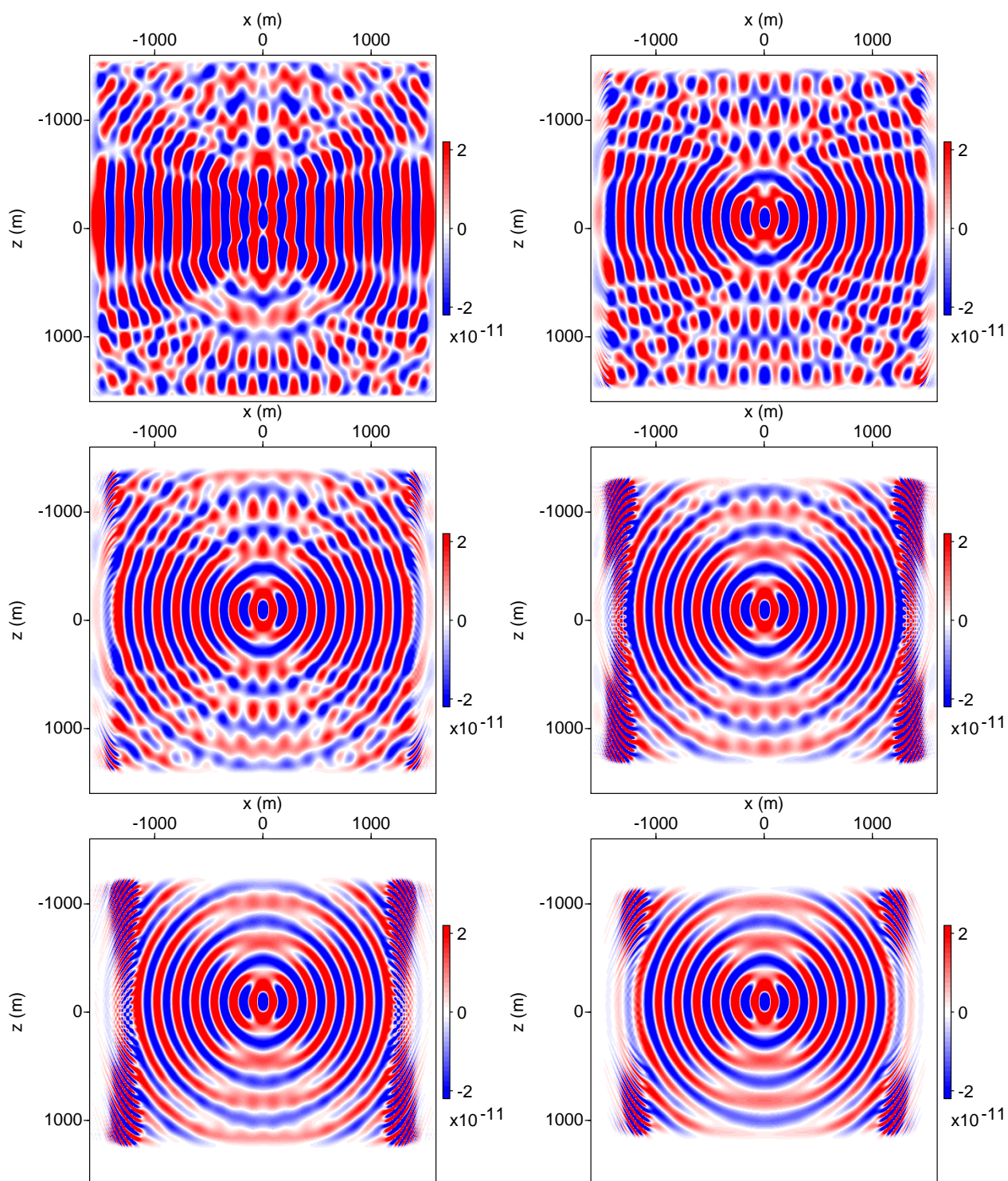
En las Figuras 18 y 19, se puede apreciar que, para ambas componentes del desplazamiento, la interferencia disminuye a medida que se incrementa el ancho de las fronteras PML. Resultados satisfactorios se obtienen hasta un ancho de 600 m para frecuencias bajas. Por otro lado, al aumentar la frecuencia (ver Figuras 20 y 21), la interferencia ya no es notable a partir de los 500 m. Para frecuencias más altas (consultar Figuras 22 y 23), soluciones satisfactorias se logran a partir de los 400 m. Esto implica que, conforme aumenta la frecuencia, se requiere una región PML más reducida para atenuar correctamente las ondas salientes. Se observa que aparecen ondas superficiales en la región PML conforme incrementa su ancho, pero para una distancia PML suficientemente grande, dichas ondas se atenúan antes de regresar al dominio de interés. Es relevante destacar que, para las características del modelo (tabla 4), una distancia de 400, 500 y 600 m de ancho de las PML equivale al 43%, 52% y 60% del dominio computacional total, respectivamente. Esto sugiere la importancia crucial de seleccionar adecuadamente el tamaño mínimo del dominio PML para mejorar la eficiencia en el cálculo de la solución.



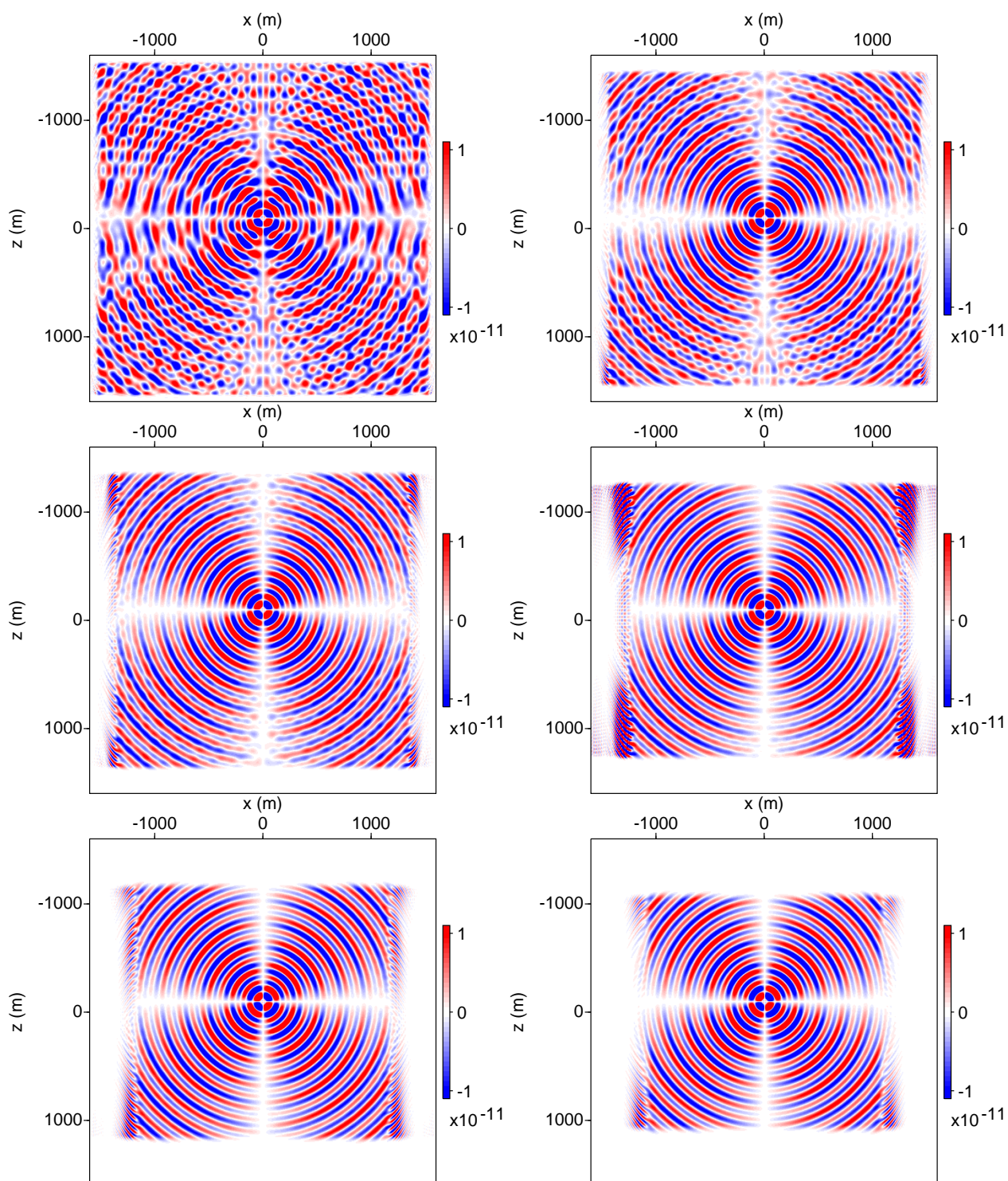


**Figura 18.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **9 Hz**, obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m.



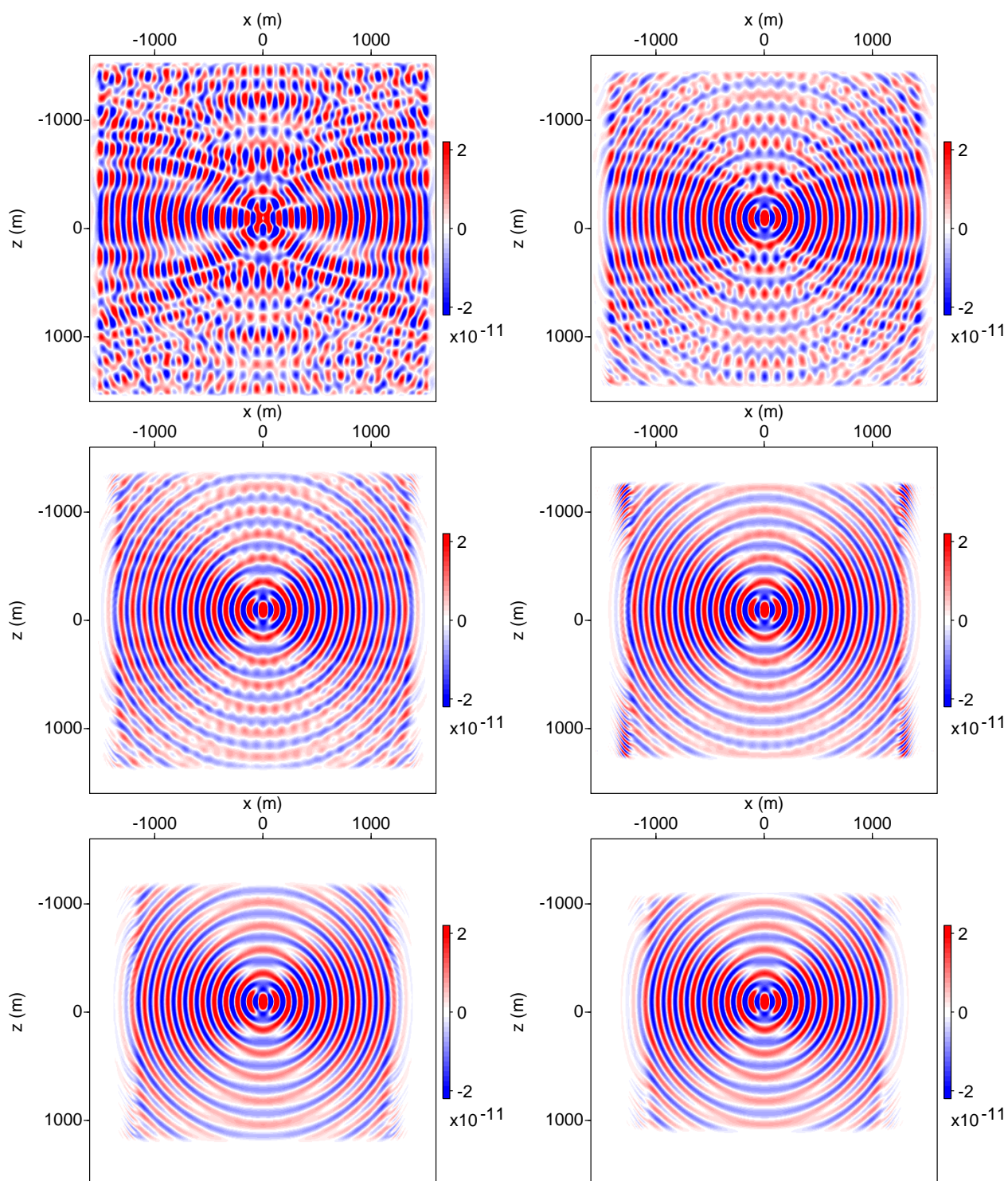


**Figura 19.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 9 Hz, obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de 15 Hz. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m.

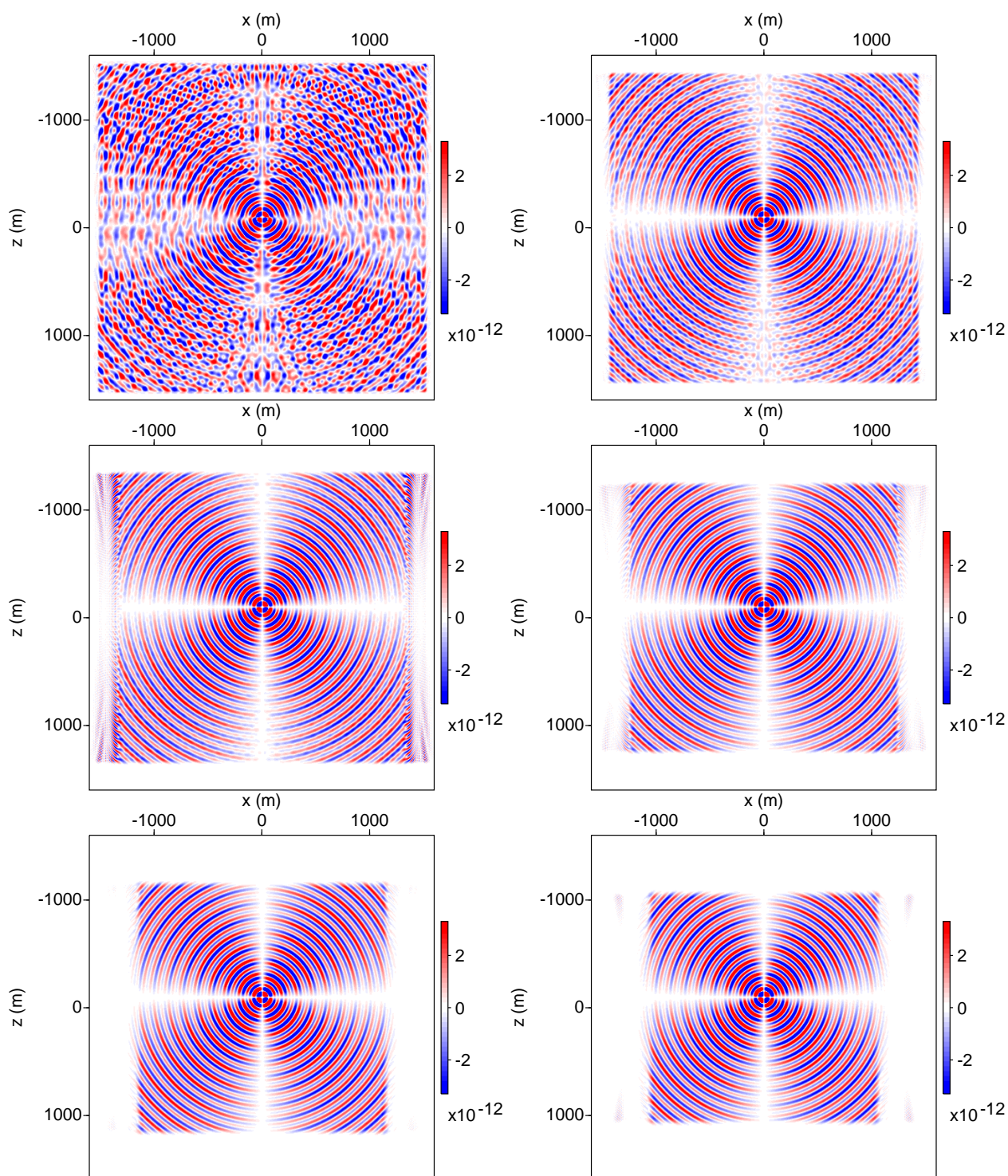


**Figura 20.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **15 Hz**, obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m.



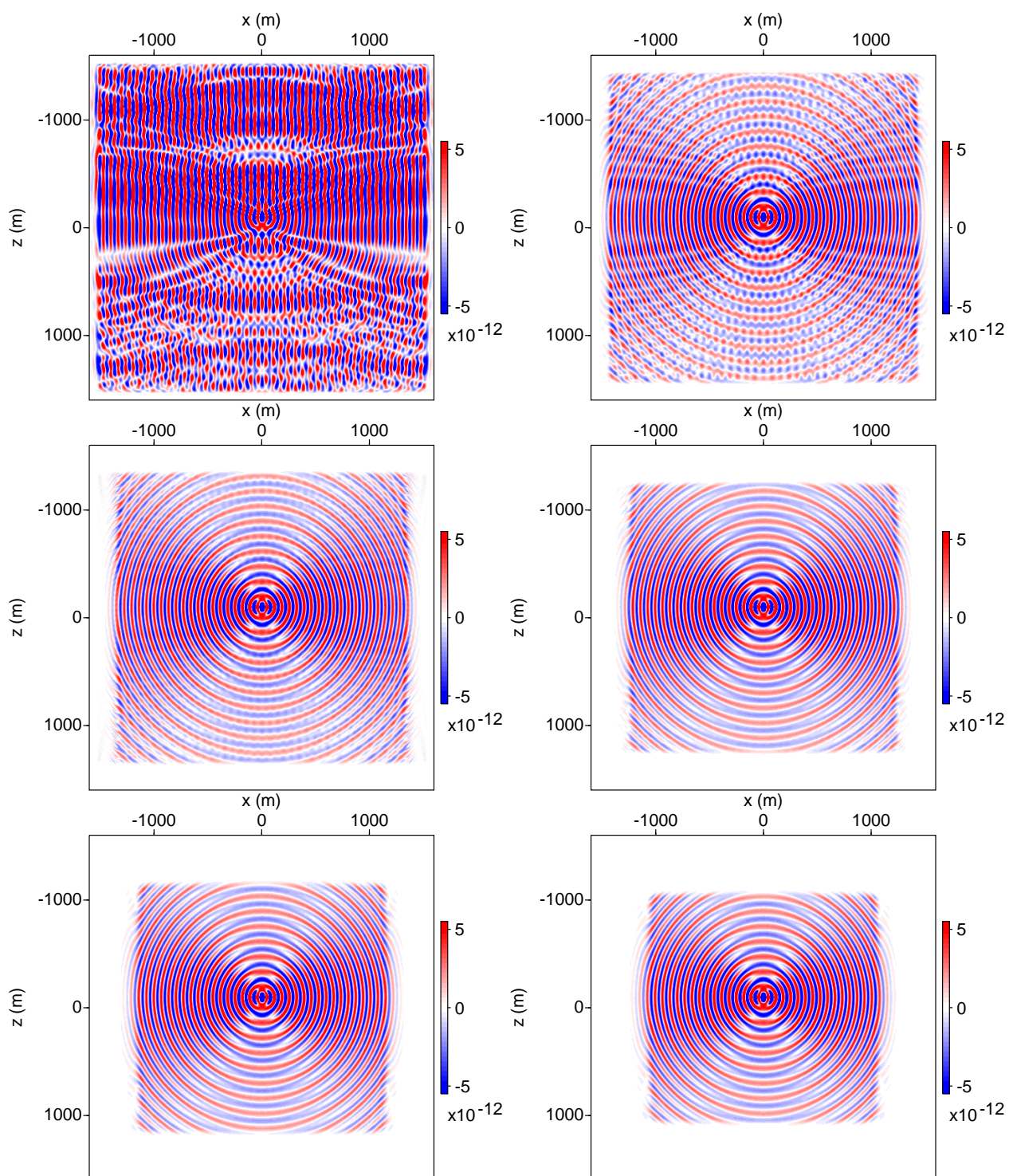


**Figura 21.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **15 Hz**, obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m.



**Figura 22.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **24 Hz**, obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m.





**Figura 23.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **24 Hz**, obtenido con las características de la tabla 4 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. De izquierda a derecha y de arriba a abajo se muestran los resultados para anchos de las fronteras PML de: 100m , 200m, 300m, 400m, 500m y 600m.

### 6.1.2. Medio homogéneo

Todos los resultados presentados en esta sección fueron calculados para un medio homogéneo con las características de la tabla 5.

**Tabla 5.** Características del problema para las simulaciones del medio homogéneo.

Parámetro	Descripción
Dominio completo	3.2km × 3.2km
Dominio de interés	2km × 2km
Número de elementos	260 × 260
Coefficiente de atenuación para el dominio PML	0.3
Ancho del dominio PML	0.6 km
Función de atenuación de dominio PML	Polinomio segundo orden
Velocidad onda P	3.31 km/s
Velocidad onda S	1.62 km/s
Densidad del medio	2.5 g/cm <sup>3</sup>
Tipo de fuente	Puntual
Ubicación de la fuente	(0, -100)
Función fuente	Primera derivada de la función Gaussiana
Ubicación del sismograma	(0, 100)

Para fuentes con picos de frecuencia de **15 Hz**, **30 Hz** y **45 Hz**, se obtuvo el desplazamiento en las componentes  $x$  y  $z$  en diferentes frecuencias. Con una fuente de **15 Hz**, la figura 24, muestra la componente  $x$  del desplazamiento para las frecuencias de **3 Hz**, **15 Hz** y **21 Hz**, mientras que la figura 25 representa la componente  $z$  para las mismas frecuencias. Para el análisis con fuente de **30 Hz**, la figura 26 muestra la componente  $x$  del desplazamiento para las frecuencias de **24 Hz**, **30 Hz** y **36 Hz**, mientras que la figura 27 representa la componente  $z$  para estas frecuencias. Por último para la fuente de **45 Hz** la figura 28 muestra la componente  $x$  del desplazamiento para las frecuencias de **39 Hz**, **45 Hz** y **51 Hz**, mientras que la figura 29 representa la componente  $z$  para las mismas frecuencias.

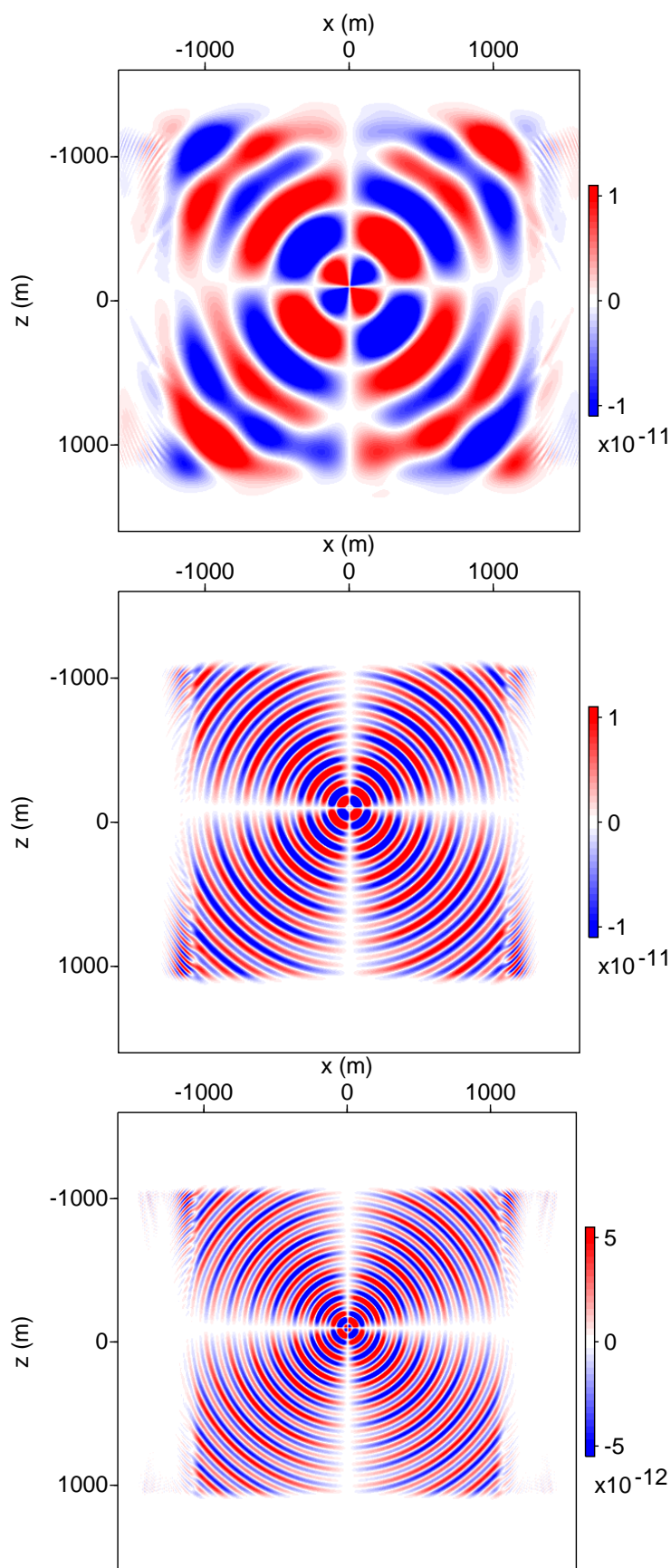
Para cada una de las fuentes de **15 Hz**, **30 Hz** y **45 Hz**, se calcularon dos sismogramas: (1) El de color rojo es resultado de aplicar una IFFT a los desplazamientos calculados con todas las frecuencias disponibles, las cuales se obtuvieron al muestrear la función fuente en el dominio del tiempo a una

frecuencia de **300 Hz**, **540 Hz** y **675 Hz** para cada fuente respectivamente, durante 0.6 s y (2) la línea negra es producto de resolver el mismo problema pero directamente en el dominio del tiempo utilizando SWP. La figura 30 muestra el desplazamiento en  $z$  para cada fuente. La tabla 6 muestra las correlaciones calculadas para cada uno de los sismogramas obtenidos en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

**Tabla 6.** Se presentan los resultados de la correlación cruzada entre los sismogramas obtenidos directamente en el dominio del tiempo y aquellos calculados desde el dominio de la frecuencia para medios **homogéneos**. Las características del problema se muestran en la tabla 5

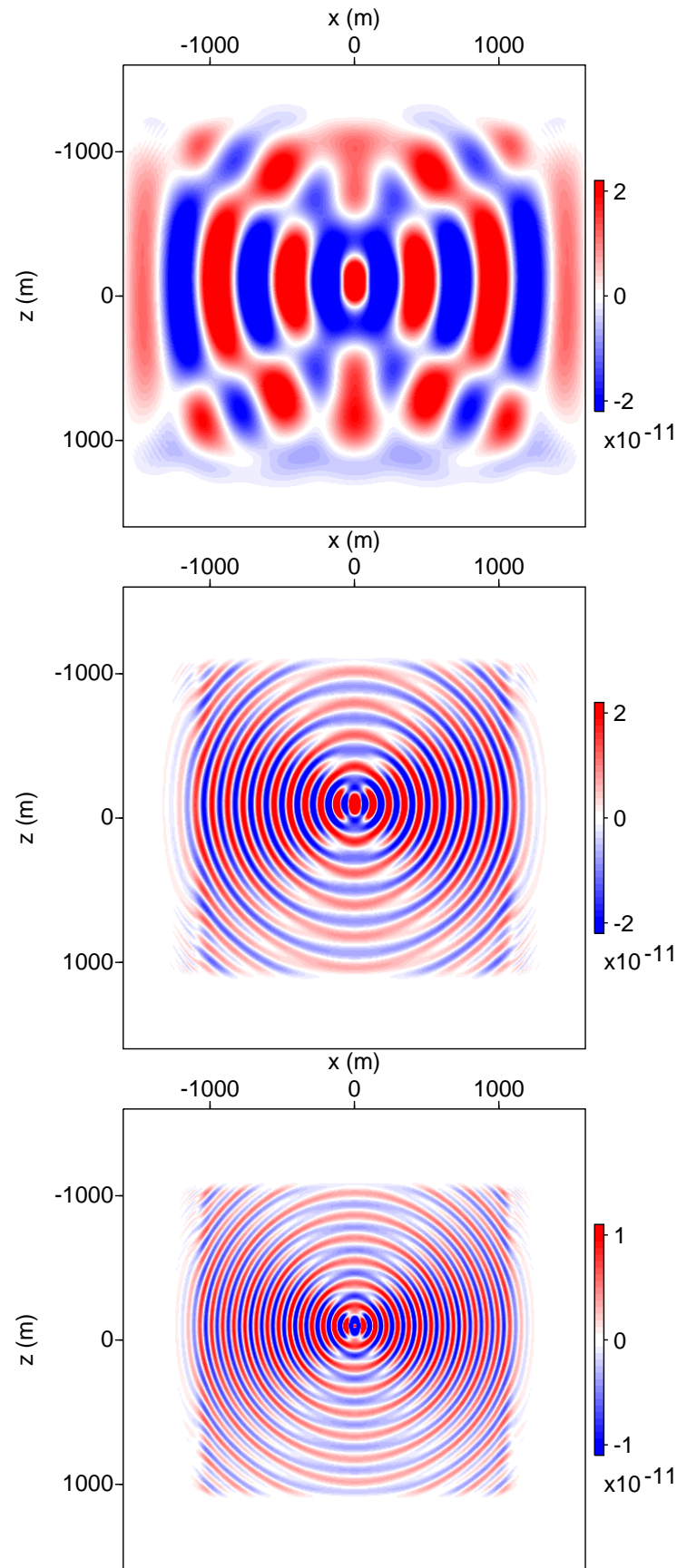
<b>Frecuencia pico de la fuente</b>	<b>Coefficiente de correlación máximo</b>	<b>Desplazamiento para la máxima similitud</b>
15 Hz	0.9810	0
30 Hz	0.9912	0
45 Hz	0.9946	0

Todos los sismogramas calculados a partir de las simulaciones en el dominio de la frecuencia (ver figura 30) no presentan algún desfase respecto a los sismogramas obtenidos directamente en el dominio del tiempo, tampoco se observan aparentes reflexiones en la frontera del dominio PML. En la tabla 6 se puede observar que todos los sismogramas tienen una gran similitud, mostrando que la implementación en el dominio de la frecuencia representa correctamente la propagación de ondas para medios homogéneos. Se puede observar como conforme se incrementa la frecuencia, la longitud de onda disminuye.

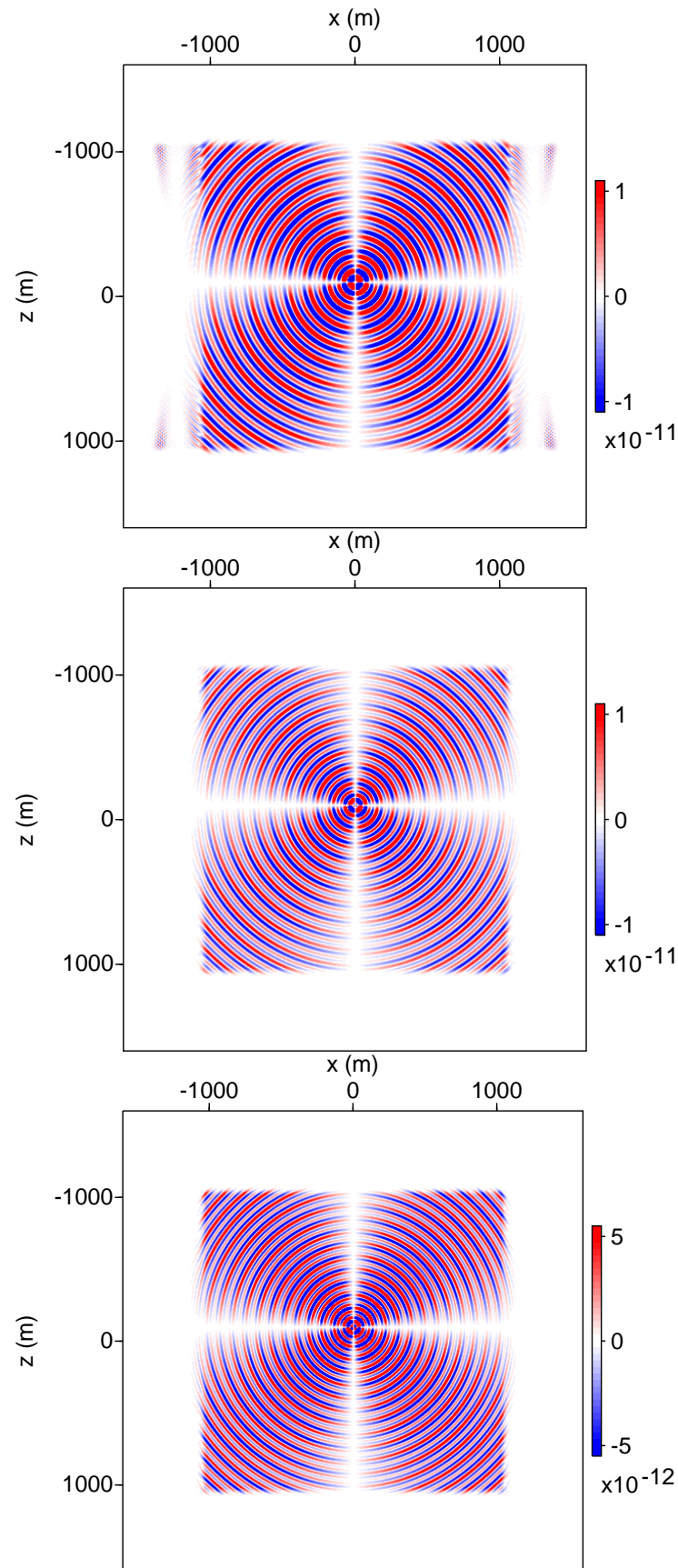


**Figura 24.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 3 Hz, 15 Hz y 21 Hz para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de 15 Hz.

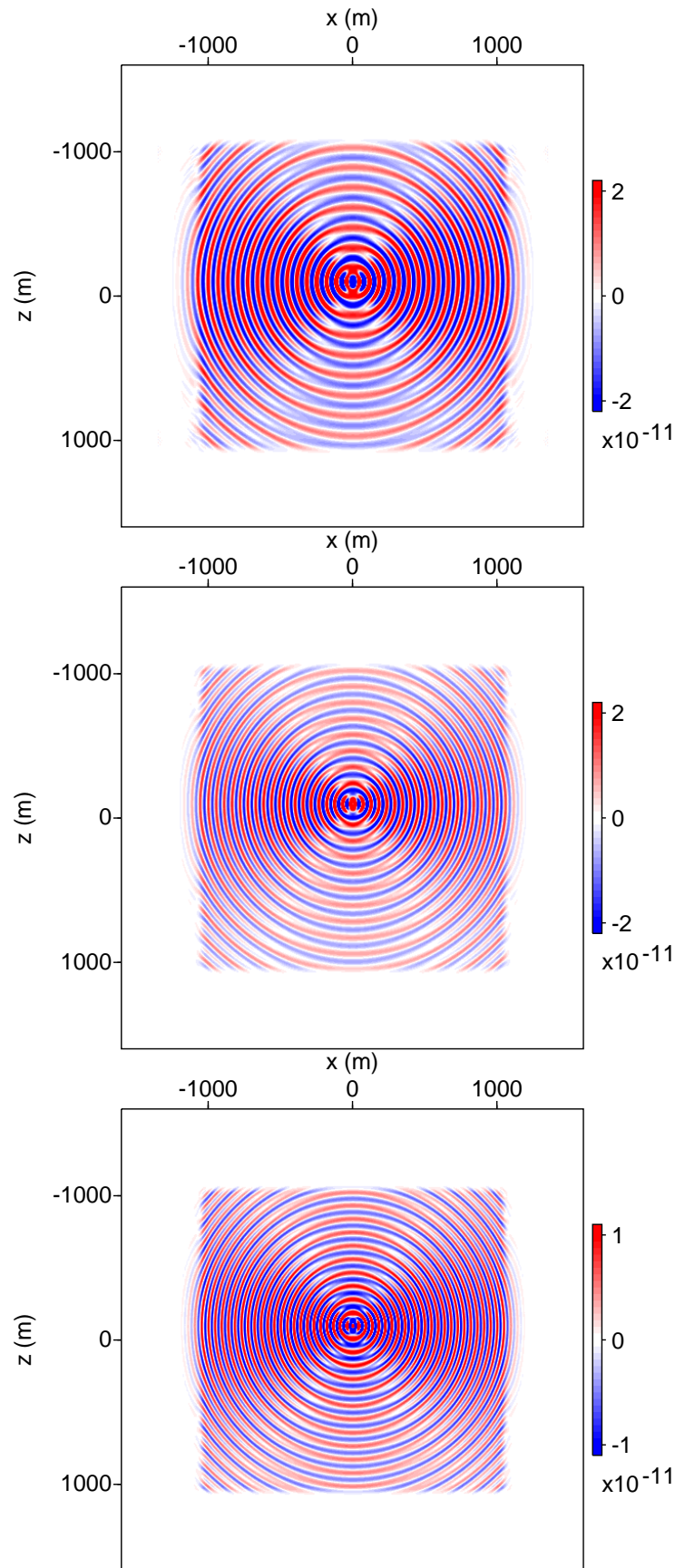




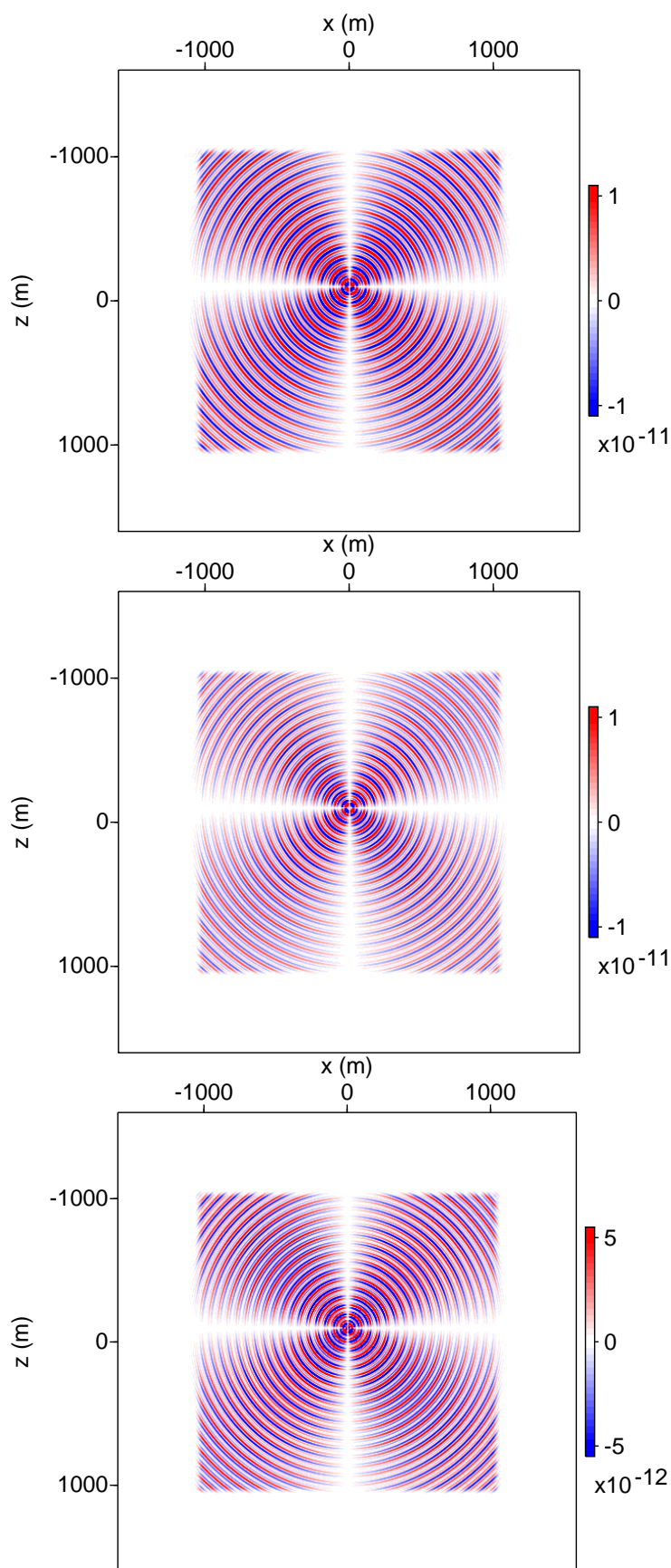
**Figura 25.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 3 Hz, 15 Hz y 21 Hz para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de 15 Hz.



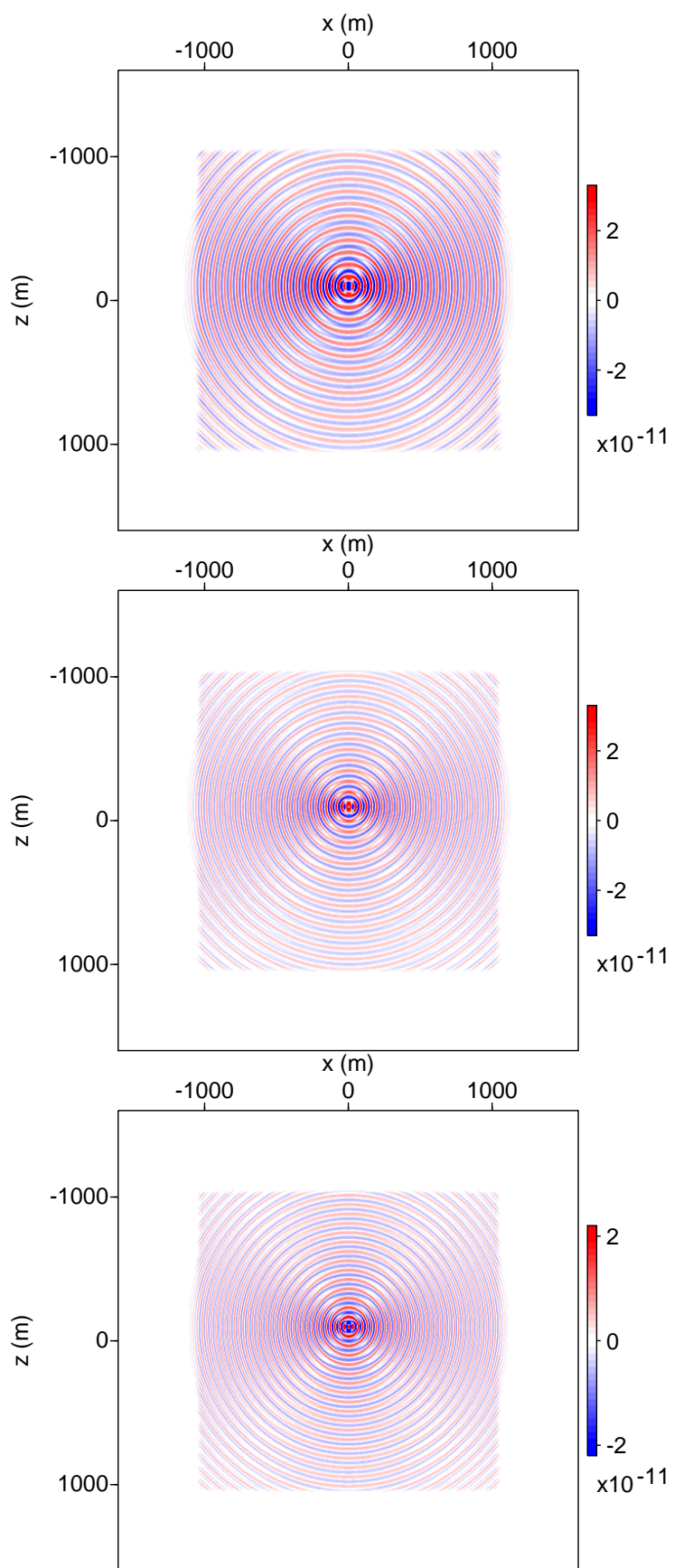
**Figura 26.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 24 Hz, 30 Hz y 36 Hz para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de 30 Hz.



**Figura 27.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 24 Hz, 30 Hz y 36 Hz para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de 30 Hz.

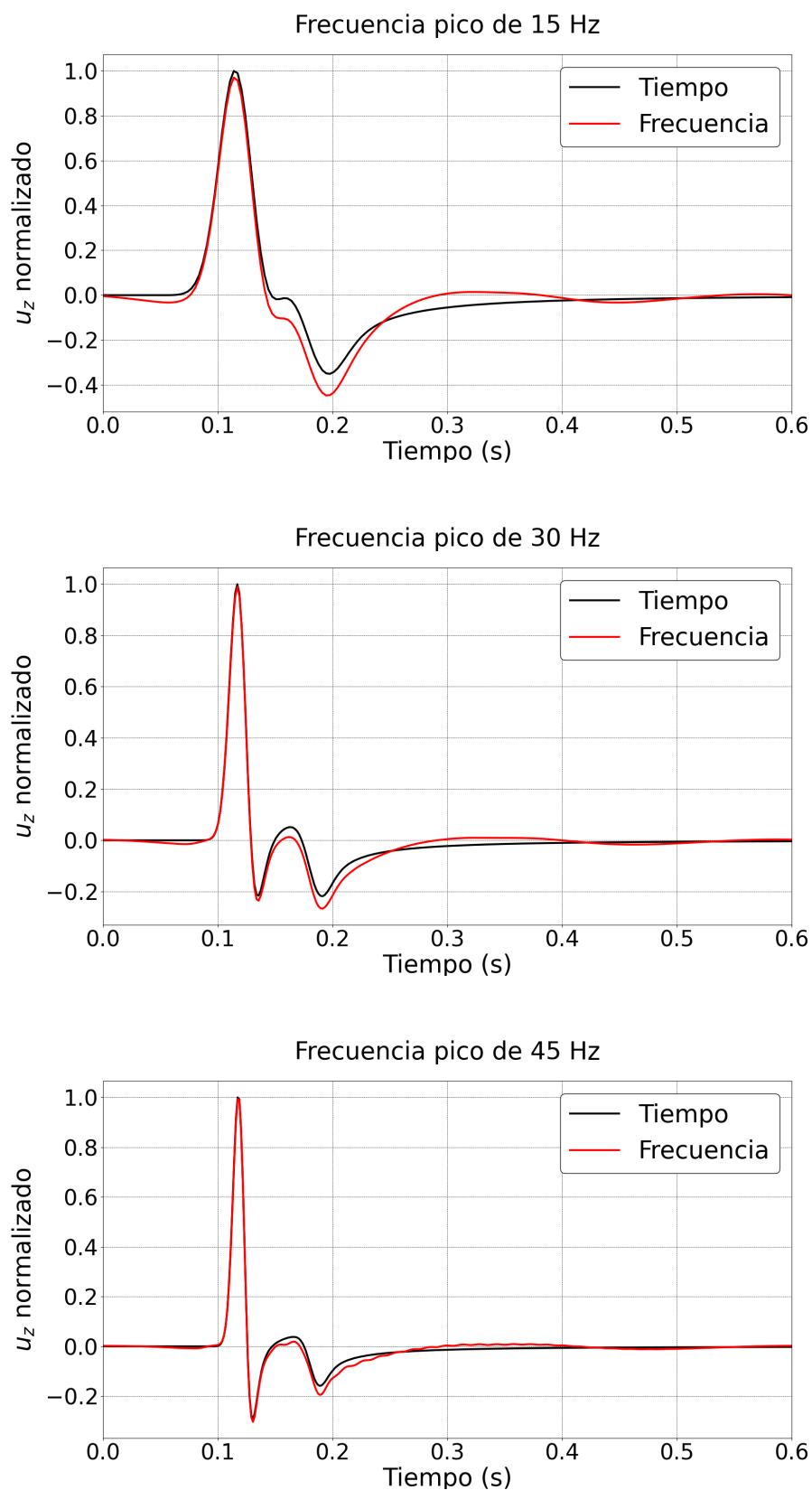


**Figura 28.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 39 Hz, 45 Hz y 51 Hz para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de 45 Hz.



**Figura 29.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 39 Hz, 45 Hz y 51 Hz para un medio homogéneo con las características de la tabla 5 y una fuente con frecuencia pico de 45 Hz.





**Figura 30.** Sismogramas (componente  $z$  del desplazamiento) obtenidos para una fuente con un pico de frecuencia de **15 Hz**, **30 Hz** y **45 Hz** con las características de la tabla 5. La línea roja corresponde la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y la negra al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo para el mismo problema.

### 6.1.3. Medio fracturado

Todos los resultados presentados en esta sección fueron calculados para un medio con una fractura horizontal en el centro, una fuente puntual centrada a 100 m sobre la fractura y los simogramas se encuentran 100 m debajo la fractura. Las características del problema son las mismas que para el caso homogéneo (ver tabla 5) y la descripción de las fracturas se encuentra en la tabla 7.

**Tabla 7.** Características de las fracturas para las simulaciones del medio fracturado.

Parámetro	Descripción
<b>Fracturas</b>	
Orientación	Fractura horizontal
Posición	De $(-1000, 0)$ a $(1000, 0)$
$Z_N$	$9.89 \times 10^{-11} [\text{m}/\text{Pa}]$
$Z_T$	$1.19 \times 10^{-10} [\text{m}/\text{Pa}]$

Para fuentes con picos de frecuencia de **15 Hz**, **30 Hz** y **45 Hz**, se obtuvo el desplazamiento en las componentes  $x$  y  $z$  en diferentes frecuencias. Con una fuente de **15 Hz**, la figura 31 muestra la componente  $x$  del desplazamiento para las frecuencias **3 Hz**, **15 Hz** y **21 Hz**, mientras que la figura 32 representa la componente  $z$  para las mismas frecuencias. Para el análisis con fuente de **30 Hz**, la figura 33 muestra la componente  $x$  del desplazamiento para las frecuencias de **24 Hz**, **30 Hz** y **36 Hz**, mientras que la figura 34 representa la componente  $z$  para estas frecuencias. Por último para la fuente de **45 Hz** la figura 35 muestra la componente  $x$  del desplazamiento para las frecuencias de **39 Hz**, **45 Hz** y **51 Hz**, mientras que la figura 36 representa la componente  $z$  para estas frecuencias.

Para cada una de las fuentes de **15 Hz**, **30 Hz** y **45 Hz**, se calcularon dos sismogramas: (1) El de color rojo es resultado de aplicar una IFFT a los desplazamientos calculados con todas las frecuencias disponibles, las cuales se obtuvieron al muestrear la función fuente en el dominio del tiempo a una frecuencia de **300 Hz**, **540 Hz** y **675 Hz** para cada fuente respectivamente, durante 0.6 s y (2) la línea negra es producto de resolver el mismo problema pero directamente en el dominio del tiempo utilizando SWP. La figura 37 muestra el desplazamiento en  $z$  para cada fuente. La tabla 10 muestra las correlaciones calculadas para cada uno de los sismogramas obtenidos en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

Todos los sismogramas calculados a partir de las simulaciones en el dominio de la frecuencia (ver figura 37) no presentan algún desfase respecto a los sismogramas obtenidos directamente en el dominio del

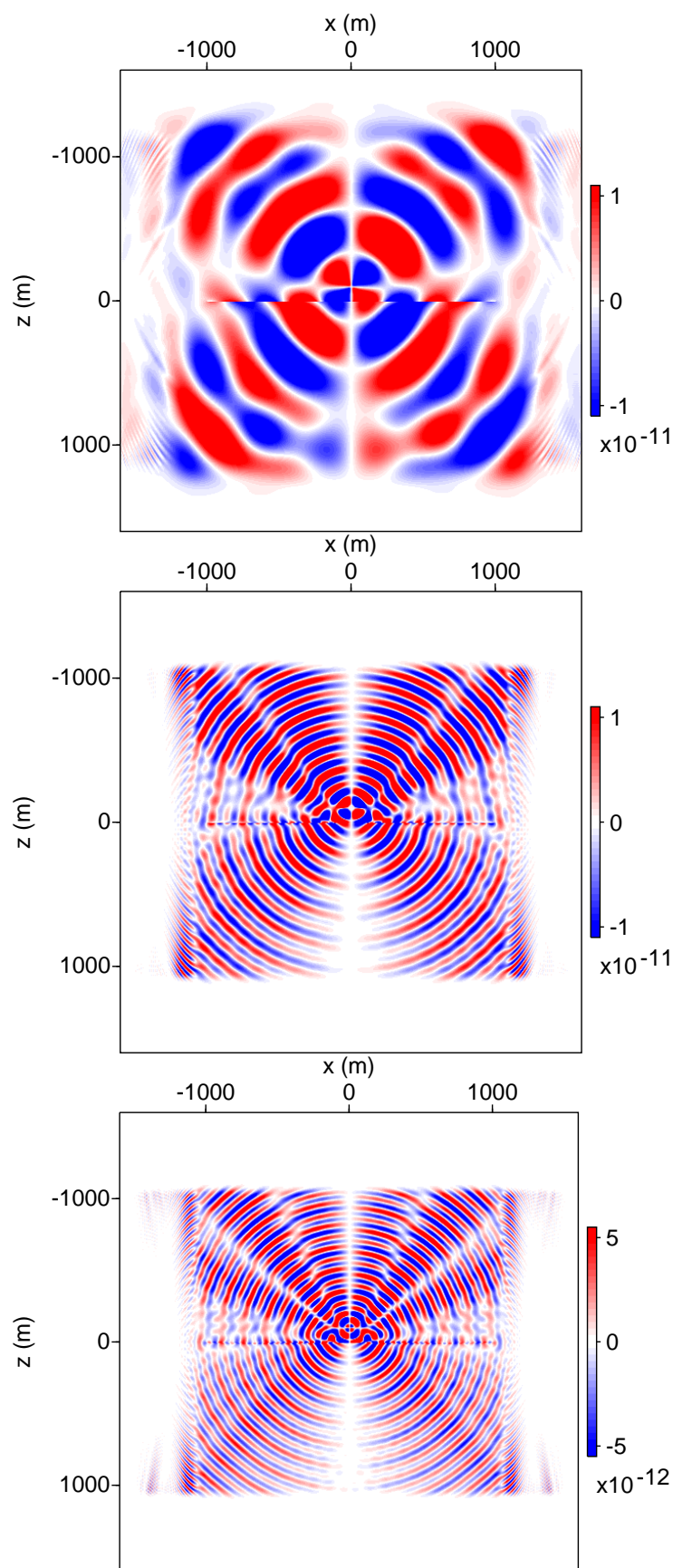
tiempo, tampoco se observan aparentes reflexiones en la frontera del dominio PML. En la tabla 8 se puede observar que todos los sismogramas tienen una gran similitud, mostrando que la implementación en el dominio de la frecuencia, representa correctamente la propagación de ondas para medios fracturados.

En las frecuencias bajas (ver Figuras 31 y 32), apenas se percibe algún efecto de la fractura en el campo de desplazamientos. No obstante, es relevante destacar que el desplazamiento en z parece ser especialmente insensible a la presencia de la fractura en comparación con el desplazamiento en x. A medida que se aumenta la frecuencia, la influencia de la fractura se vuelve más evidente (véanse las figuras 33 y 34). En frecuencias más altas, la atenuación es notablemente más pronunciada; por ejemplo, en las Figuras 35 y 36, las ondas parecen estar casi completamente atenuadas tras interactuar con la fractura. Es notable que la presencia de la fractura, incluso en contacto directo con la frontera PML, no parece afectar negativamente la absorción de las ondas.

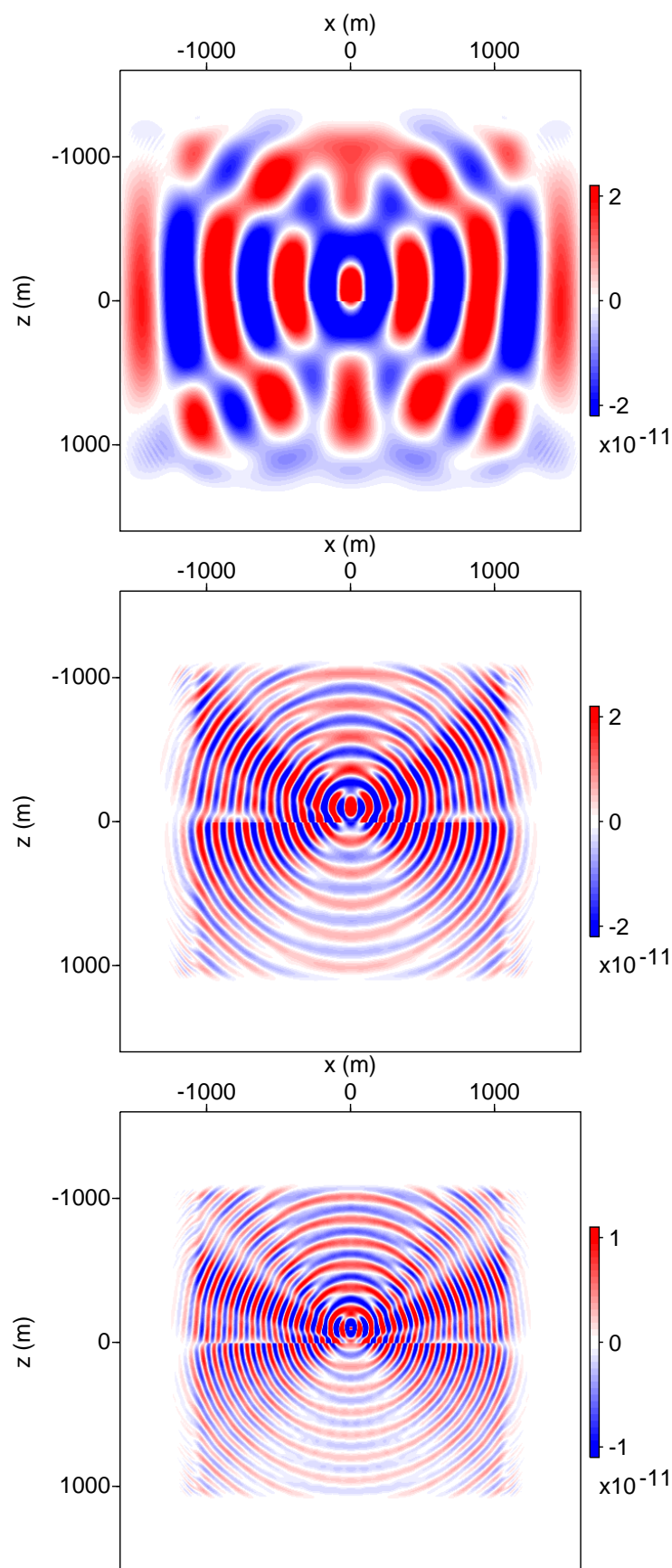
**Tabla 8.** Se presentan los resultados de la correlación cruzada entre los sismogramas obtenidos directamente en el dominio del tiempo y aquellos calculados desde el dominio de la frecuencia para medios **fracturados**.

<b>Frecuencia pico de la fuente</b>	<b>Coefficiente de correlación máximo</b>	<b>Desplazamiento para la máxima similitud</b>
15 Hz	0.9686	0
30 Hz	0.9762	0
45 Hz	0.9798	0

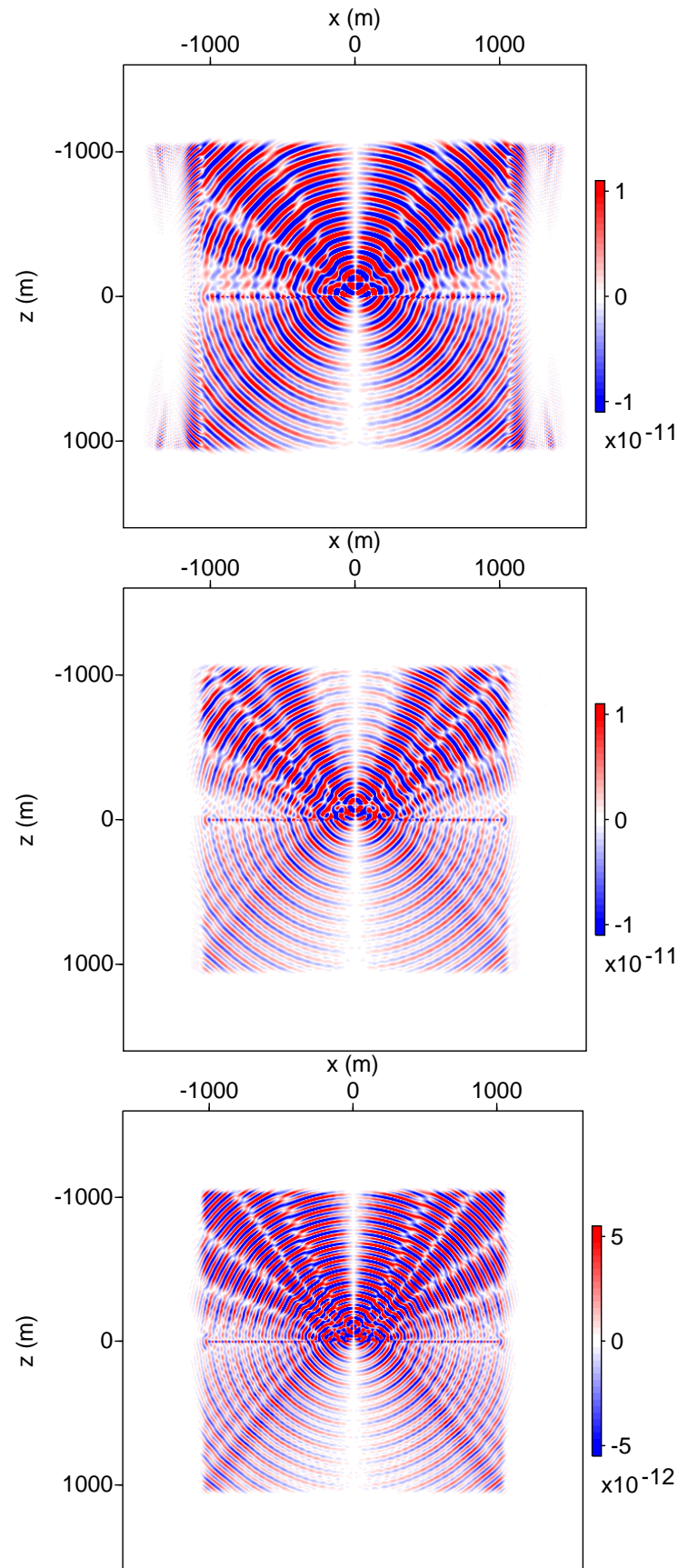




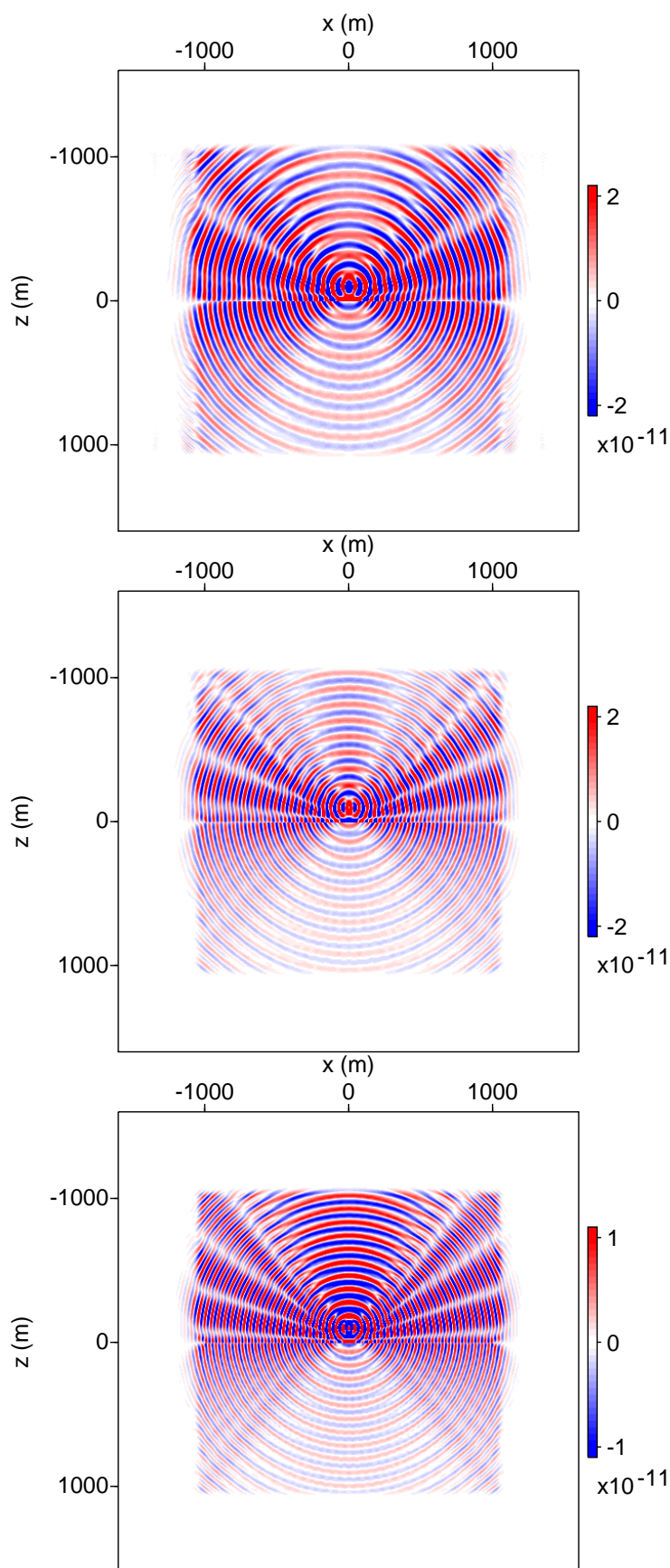
**Figura 31.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 3 Hz, 15 Hz y 21 Hz para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de 15 Hz.



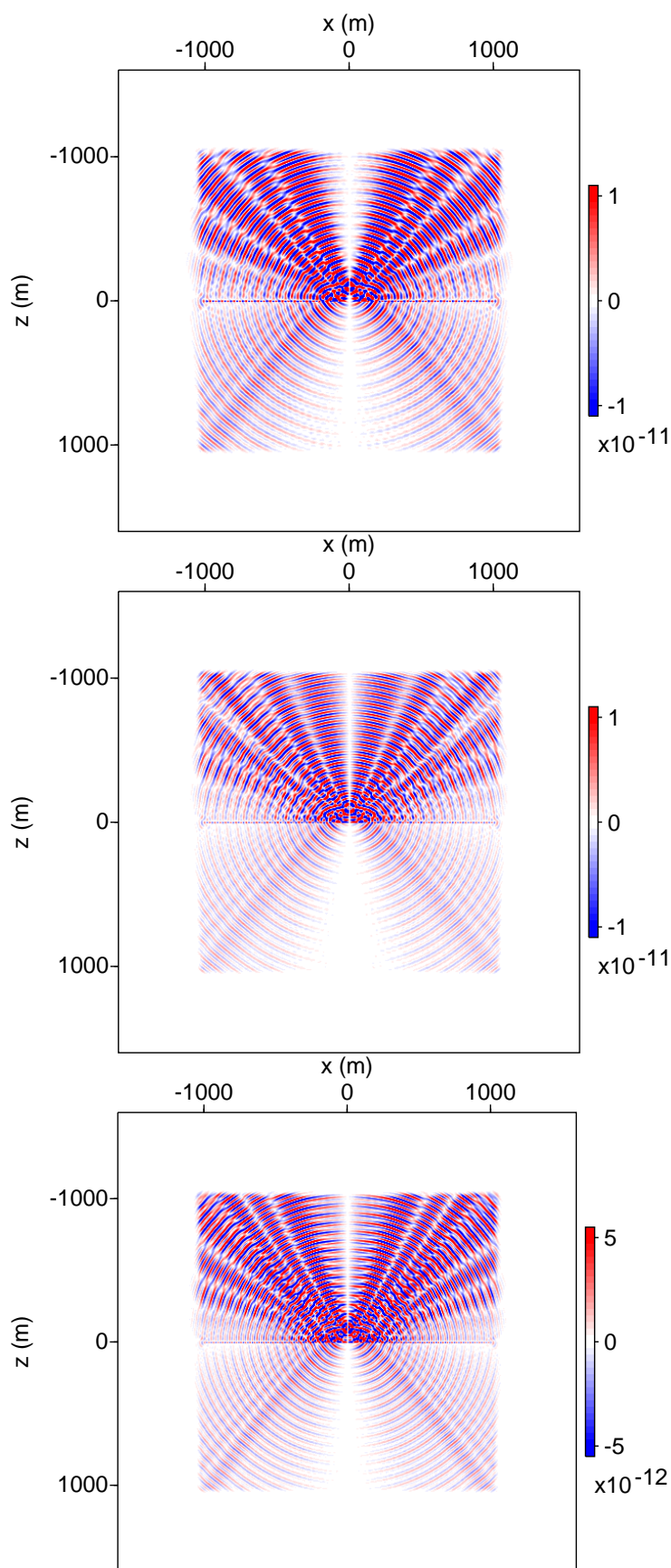
**Figura 32.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 3 Hz, 15 Hz y 21 Hz para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de 15 Hz.



**Figura 33.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 24 Hz, 30 Hz y 36 Hz para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de 30 Hz.

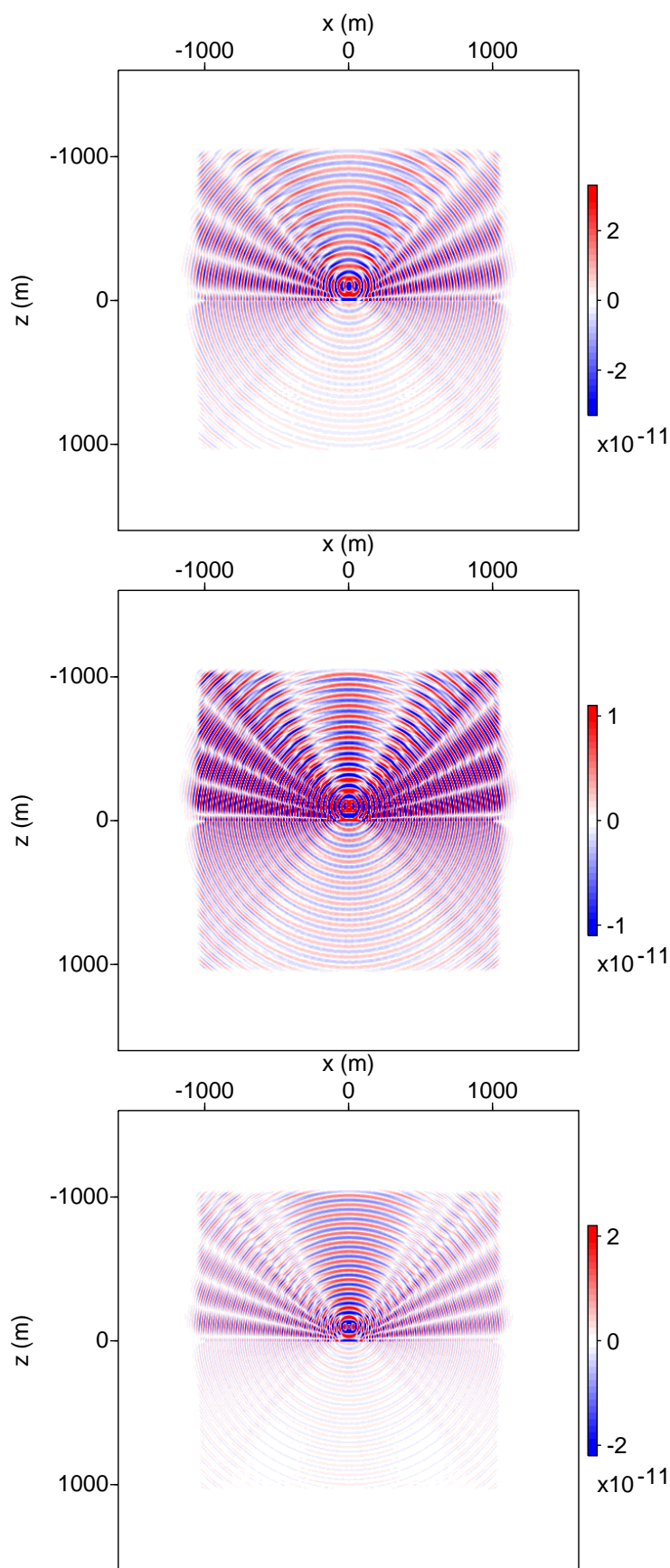


**Figura 34.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 24 Hz, 30 Hz y 36 Hz para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de 30 Hz.

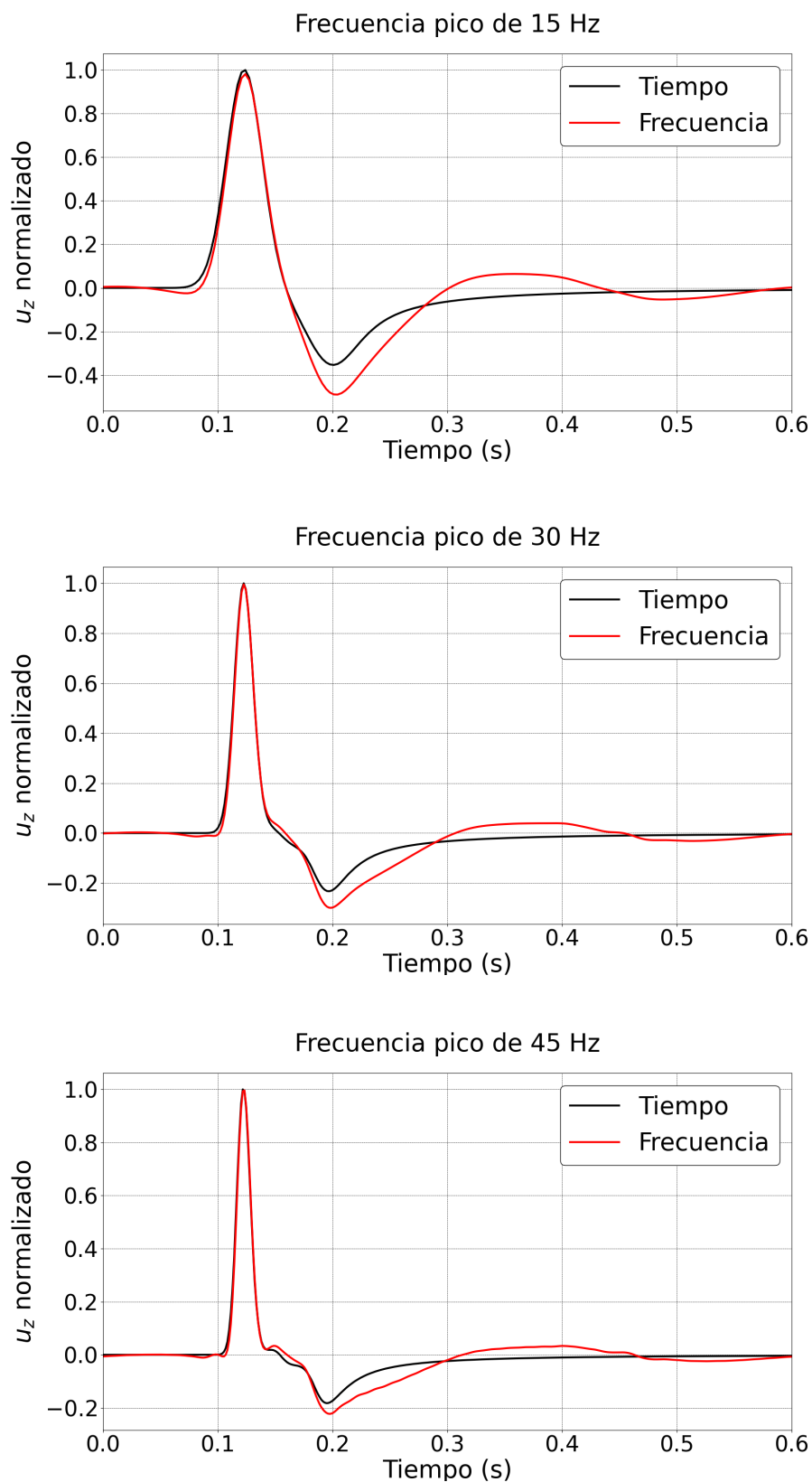


**Figura 35.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 39 Hz, 45 Hz y 51 Hz para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de 45 Hz.





**Figura 36.** Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 39 Hz, 45 Hz y 51 Hz para un medio fracturado con las características de la tabla 7 y una fuente con frecuencia pico de 45 Hz.



**Figura 37.** Sismogramas (componente z del desplazamiento) obtenidos para un medio fracturado con las características de la tabla 7, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de **15 Hz**, **30 Hz** y **45 Hz**. La fractura es una línea horizontal que pasa por el centro del medio, la fuente y el receptor se encuentra a 100 metros sobre y debajo la fractura, respectivamente. La línea roja corresponde a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y la negra al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo.

### 6.1.4. Medio anisótropo

Todos los resultados presentados en esta sección fueron calculados para un medio con anisotropía VTI (ver ecuación 118), una fuente puntual en el centro del dominio y tres sismogramas colocados en  $(0, 300)$ ,  $(300, 0)$  y  $(212, 212)$ , todos a 300 m de distancia de la fuente. Las características completas del problema se muestran en la tabla 9.

$$c = \begin{bmatrix} 27.32 & 14.2 & 14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 14.2 & 27.32 & 14.2 & 0 & 0 & 0 \\ 14.2 & 14.2 & 20.65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6.56 \end{bmatrix}. \quad (118)$$

**Tabla 9.** Características del problema para las simulaciones del medio anisótropo.

Parámetro	Descripción
Dominio completo	3.2 km × 3.2 km
Dominio de interés	2 km × 2 km
Número de elementos	260 × 260
Coefficiente de atenuación para el dominio PML	0.3
Ancho del dominio PML	0.6 km
Función de atenuación de dominio PML	Polinomio segundo orden
Parámetro de Lamé $\lambda$	14.2 [GPa]
Parámetro de Lamé $\mu$	6.54 [GPa]
Densidad del medio	2.5 g/cm <sup>3</sup>
Tipo de anisotropía	VTI
Tensor de rigidez	Ecuación 118
Tipo de fuente	Puntual
Ubicación de la fuente	$(0, 0)$
Función fuente	Primera derivada de la función Gaussiana



Para fuentes con picos de frecuencia de **15 Hz**, **30 Hz** y **45 Hz**, se obtuvo el desplazamiento en las componentes  $x$  y  $z$  en diferentes frecuencias. Con una fuente de **15 Hz**, la figura 38 muestra la componente  $x$  del desplazamiento para las frecuencias **3 Hz**, **15 Hz** y **21 Hz**, mientras que la figura 39 representa la componente  $z$  para las mismas frecuencias. Para el análisis con fuente de **30 Hz**, la figura 42 muestra la componente  $x$  del desplazamiento para las frecuencias **24 Hz**, **30 Hz** y **36 Hz**, mientras que la figura 43 representa la componente  $z$  para estas frecuencias. Por último para la fuente de **45 Hz** la figura 46 muestra la componente  $x$  del desplazamiento para las frecuencias **39 Hz**, **45 Hz** y **51 Hz**, mientras que la figura 47 representa la componente  $z$  para estas frecuencias.

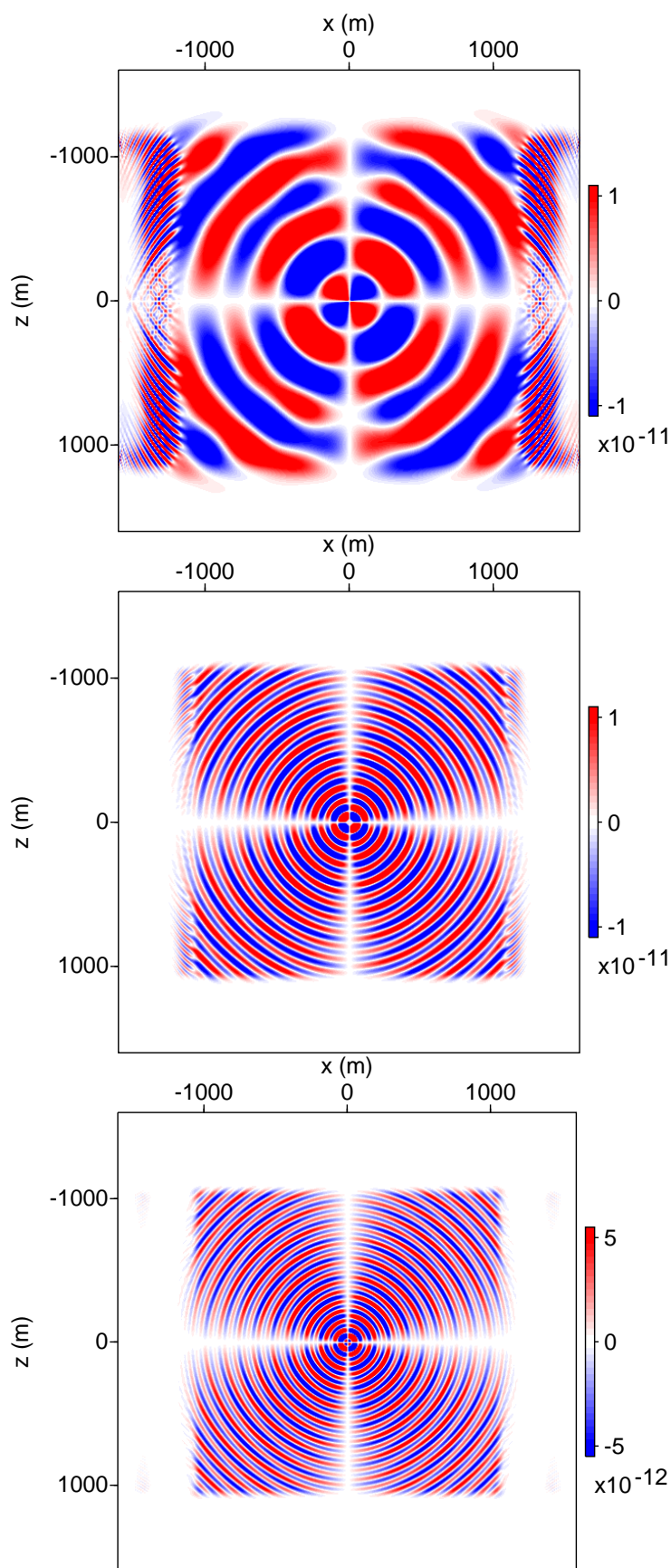
Para cada una de las fuentes de **15 Hz**, **30 Hz** y **45 Hz**, se calcularon dos sismogramas: (1) El de color rojo es resultado de aplicar una IFFT a los desplazamientos calculados con todas las frecuencias disponibles, las cuales se obtuvieron al muestrear la función fuente en el dominio del tiempo a una frecuencia de **300 Hz**, **540 Hz** y **675 Hz** para cada fuente respectivamente, durante 0.6 s y (2) la línea negra es producto de resolver el mismo problema pero directamente en el dominio del tiempo utilizando SWP. Las figuras 40, 44 y 48 muestran el desplazamiento en  $x$  para cada fuente, respectivamente, mientras que 41, 45 y 49 corresponden a la componente  $z$ . La tabla 10 muestra las correlaciones calculadas para cada uno de los sismogramas obtenidos en el dominio del tiempo y de la frecuencia.

Todos los sismogramas calculados a partir de las simulaciones en el dominio de la frecuencia (ver figuras 40, 41, 44, 45, 48 y 49) no presentan algún desfase respecto a los sismogramas obtenidos directamente en el dominio del tiempo, tampoco se observan aparentes reflexiones en la frontera del dominio PML. En la tabla 10 se puede observar que todos los sismogramas tienen una gran similitud, mostrando que la implementación en el dominio de la frecuencia para medios anisótropos, representa correctamente la propagación de ondas.

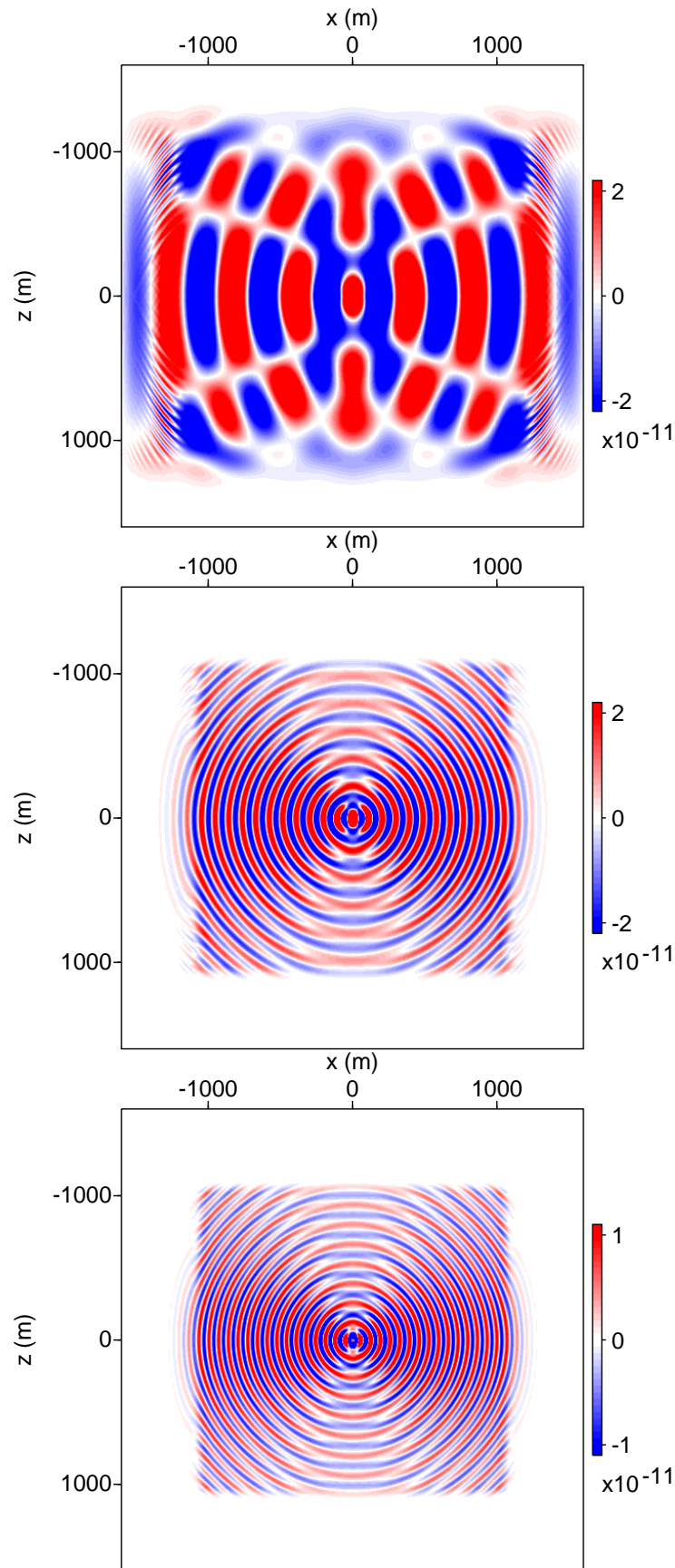
Se pueden observar frentes de onda ligeramente más achatados debido a la diferencia que existe entre la velocidad en la dirección vertical y horizontal. Comparando las imágenes 24 con 38 y 25 con 39 se puede ver que para el caso anisótropo aparecen lo que parecen ser ondas superficiales, por lo que un ajuste de los parámetros de las fronteras PML puede ser necesario para asegurar una correcta absorción.

**Tabla 10.** Se presentan los resultados de la correlación cruzada entre los sismogramas obtenidos directamente en el dominio del tiempo y aquellos calculados desde el dominio de la frecuencia para medios **anisótropos**. Las características del problema se muestran en la tabla 9

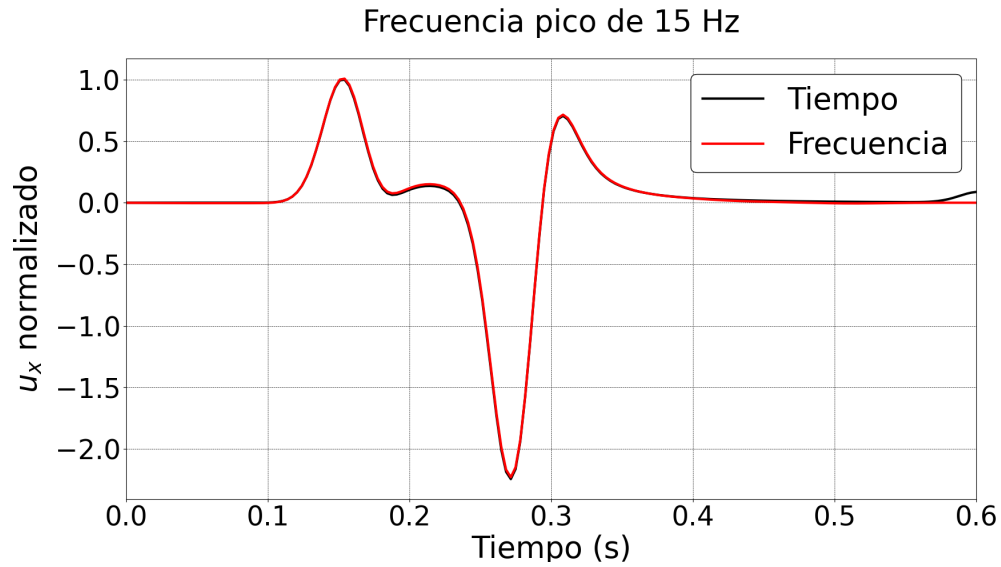
<b>Frecuencia pico de la fuente</b>	<b>Ubicación del sismograma</b>	<b>Coefficiente de correlación máximo</b>	<b>Desplazamiento para la máxima similitud</b>
<b>15 Hz</b>	<b>Desplazamiento en x</b>		
	(212,212)	0.9993	0
	<b>Desplazamiento en z</b>		
	(0,300)	0.8683	0
	(300,0)	0.9950	0
	(212,212)	0.9659	0
<b>30 Hz</b>	<b>Desplazamiento en x</b>		
	(212,212)	0.9995	0
	<b>Desplazamiento en z</b>		
	(0,300)	0.9373	0
	(300,0)	0.9981	0
	(212,212)	0.9830	0
<b>45 Hz</b>	<b>Desplazamiento en x</b>		
	(212,212)	0.9996	0
	<b>Desplazamiento en z</b>		
	(0,300)	0.9598	0
	(300,0)	0.9987	0
	(212,212)	0.9863	0



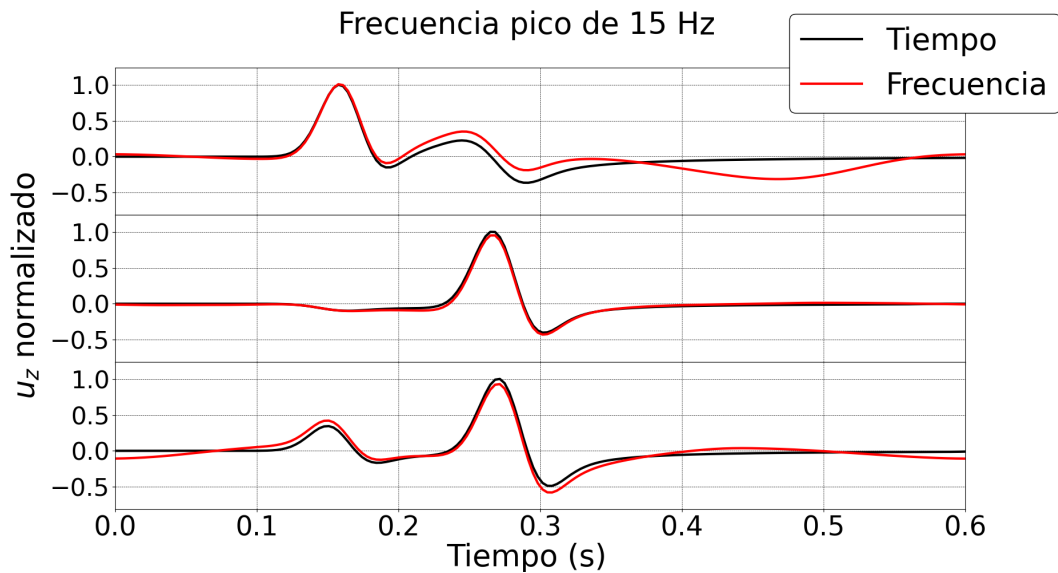
**Figura 38.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 3 Hz, 15 Hz y 21 Hz para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de 15 Hz.



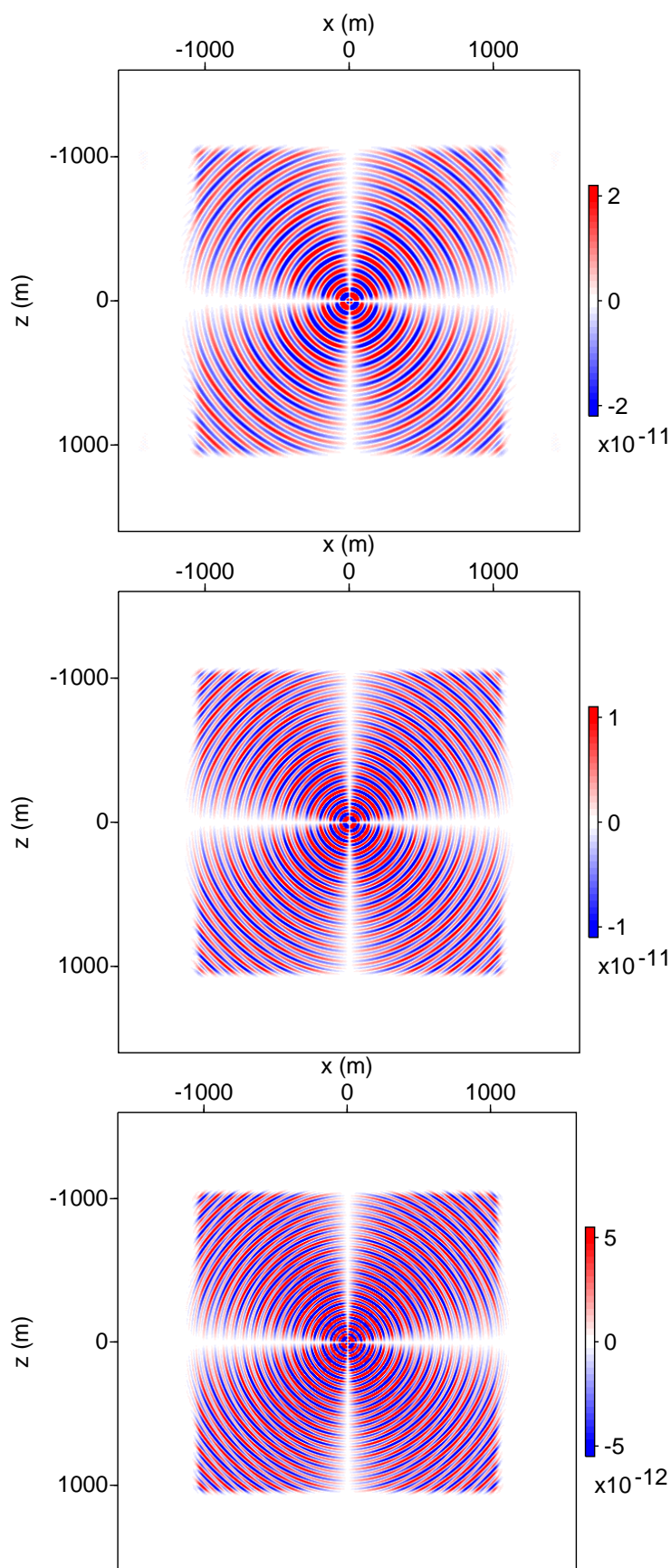
**Figura 39.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 3 Hz, 15 Hz y 21 Hz para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de 15 Hz.



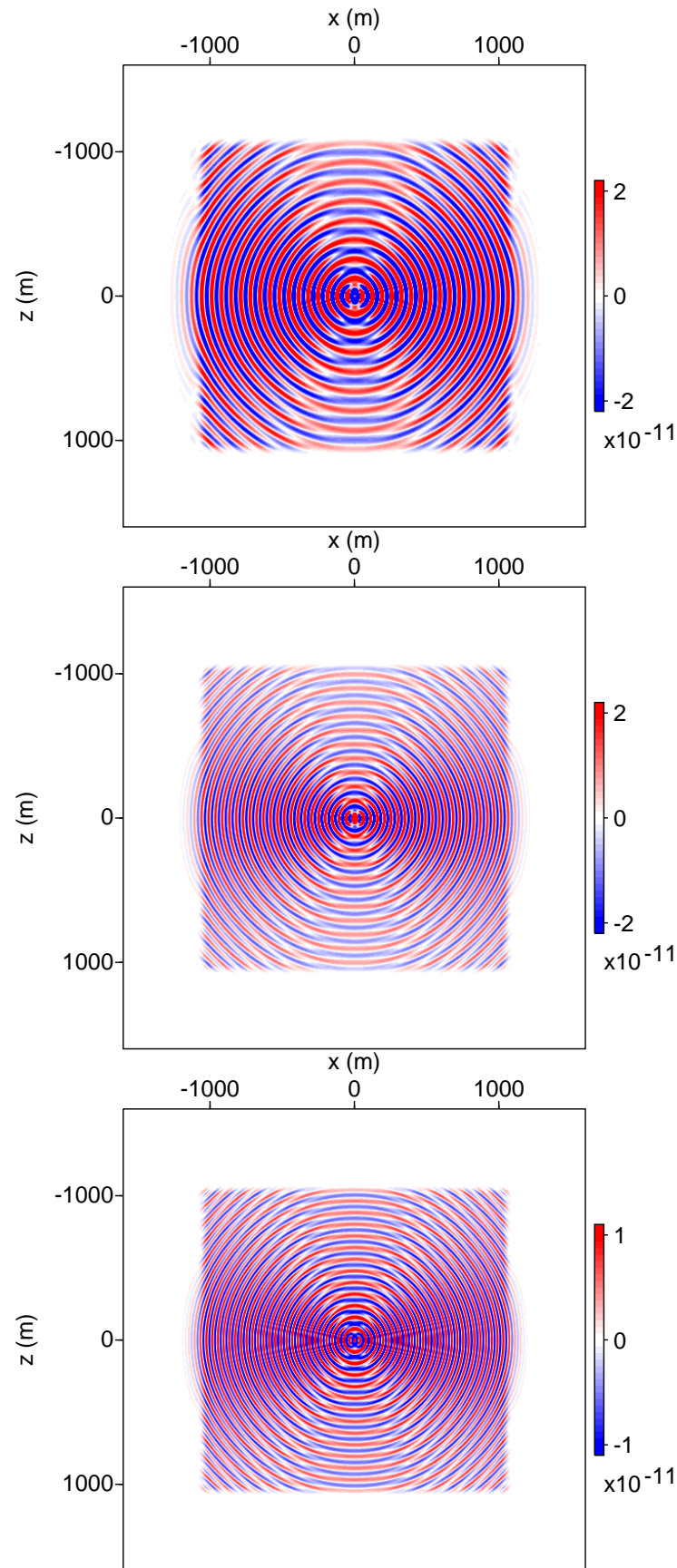
**Figura 40.** Sismogramas (componente x del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 15 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio  $(0, 0)$ , mientras que el receptor se encuentra a 300 metros de distancia de la fuente  $(212, 212)$ . La línea roja corresponde a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y la negra al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo.



**Figura 41.** Sismogramas (componente z del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 15 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio  $(0, 0)$ , los tres receptores se muestran de arriba a abajo con las posiciones,  $(0, 300)$ ,  $(300, 0)$  y  $(212, 212)$ , respectivamente. Las líneas rojas corresponden a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y las negras al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo.

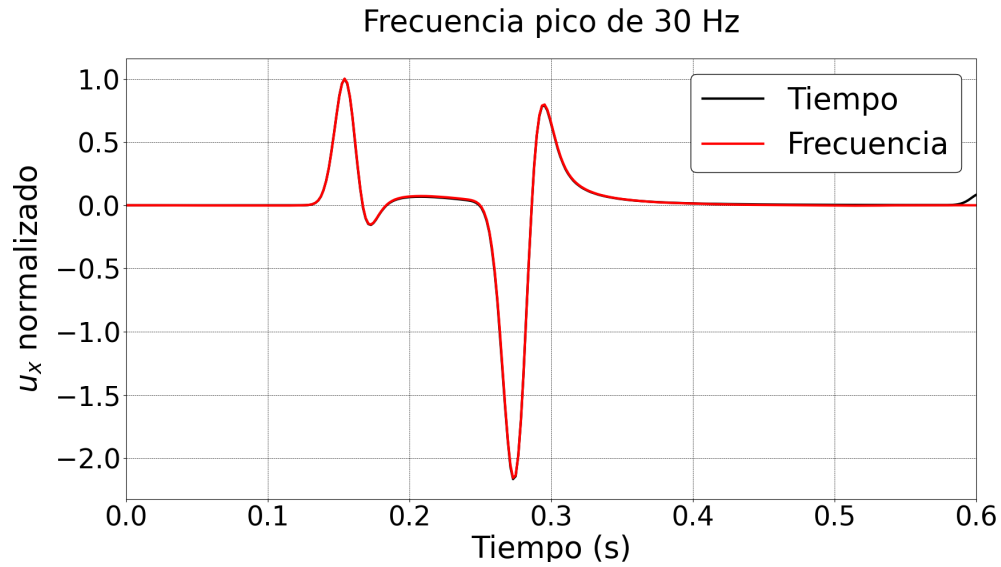


**Figura 42.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 24 Hz, 30 Hz y 36 Hz para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de 30 Hz.

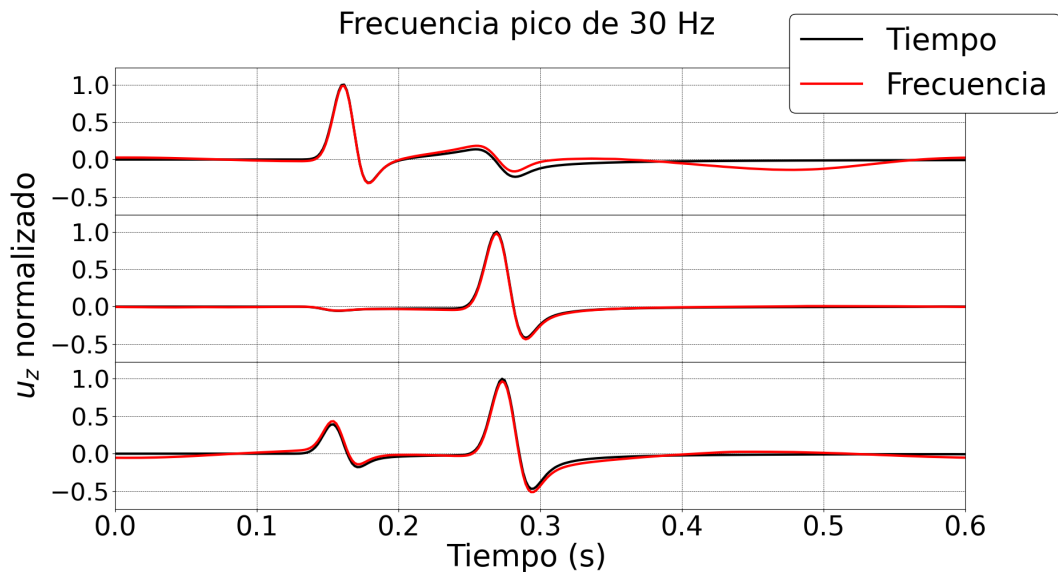


**Figura 43.** Componente  $z$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 24 Hz, 30 Hz y 36 Hz para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de 30 Hz.



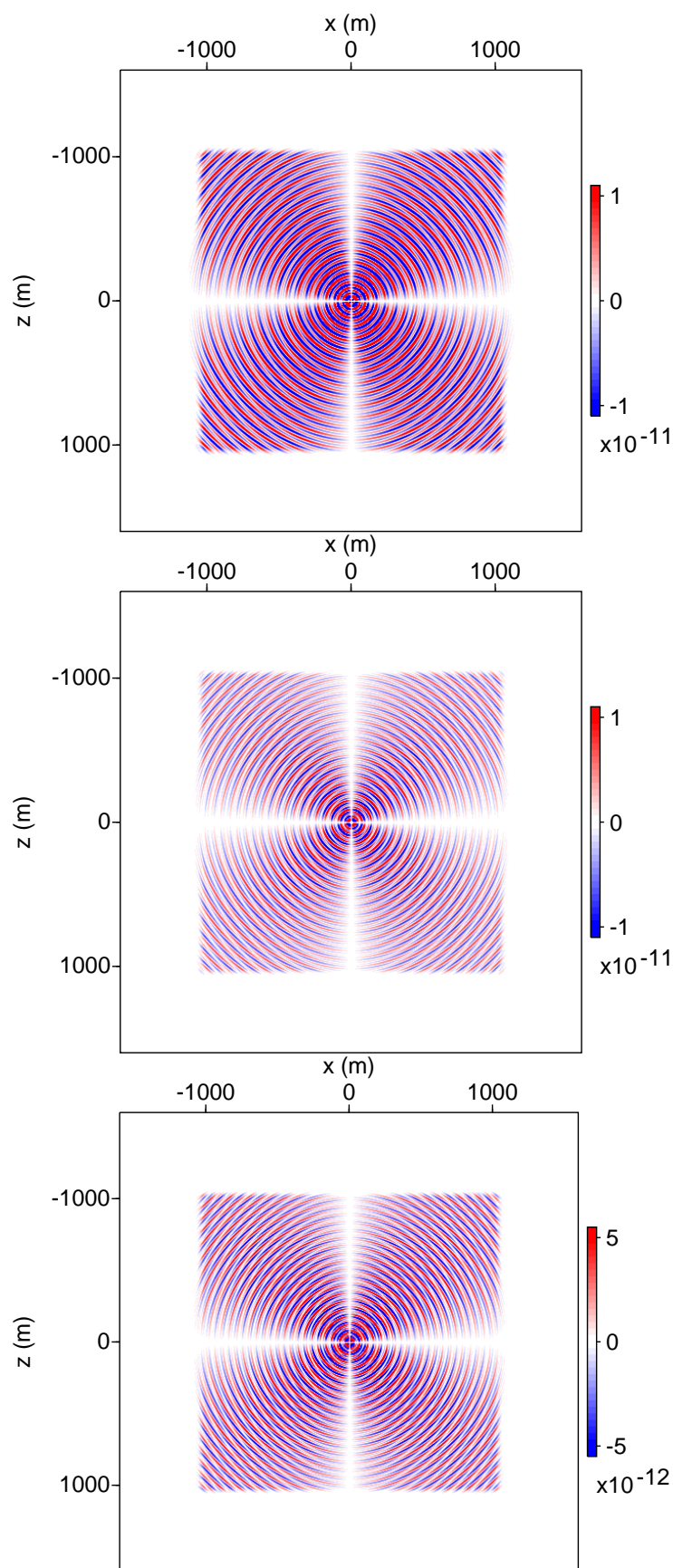


**Figura 44.** Sismogramas (componente x del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 30 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio  $(0, 0)$ , mientras que el receptor se encuentra a 300 metros de distancia de la fuente  $(212, 212)$ . La línea roja corresponde a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y la negra al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo.

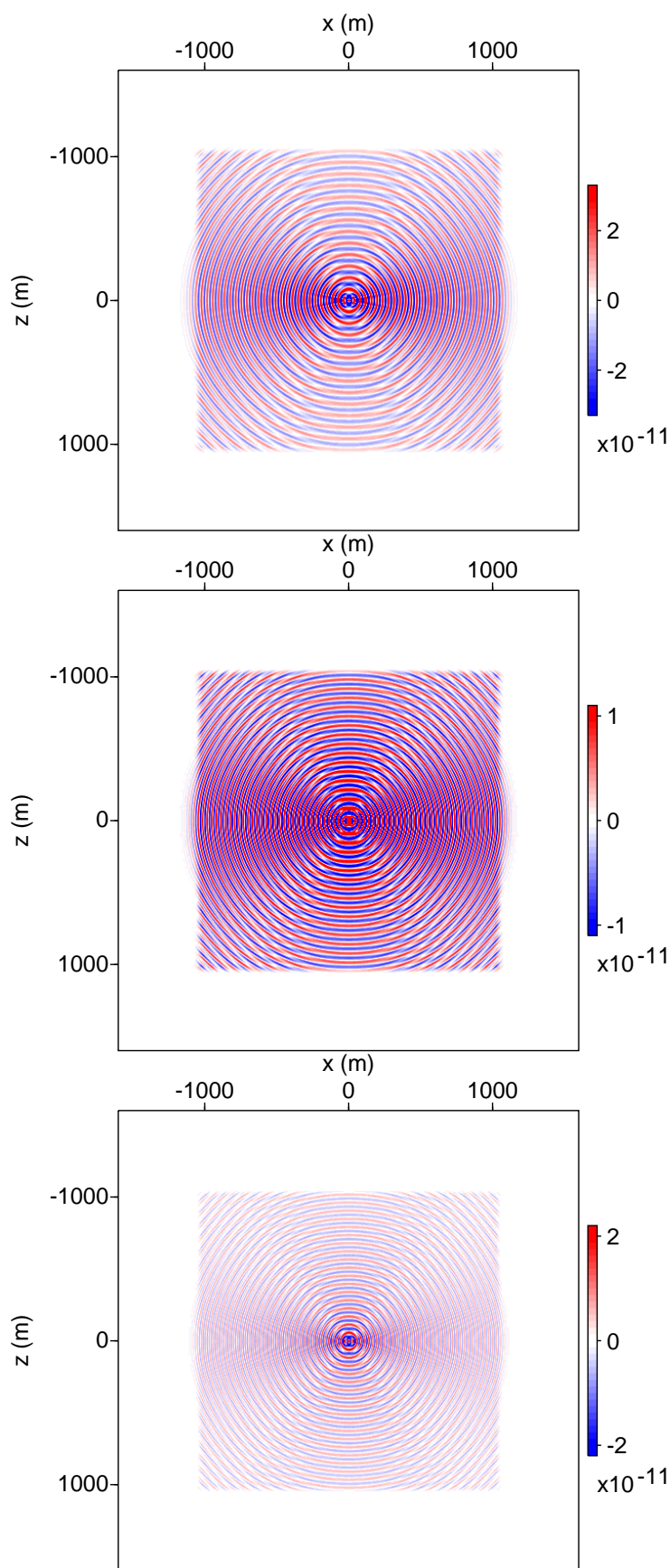


**Figura 45.** Sismogramas (componente z del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 30 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio  $(0, 0)$ , los tres receptores se muestran de arriba a abajo con las posiciones,  $(0, 300)$ ,  $(300, 0)$  y  $(212, 212)$ , respectivamente. Las líneas rojas corresponden a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y las negras al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo.

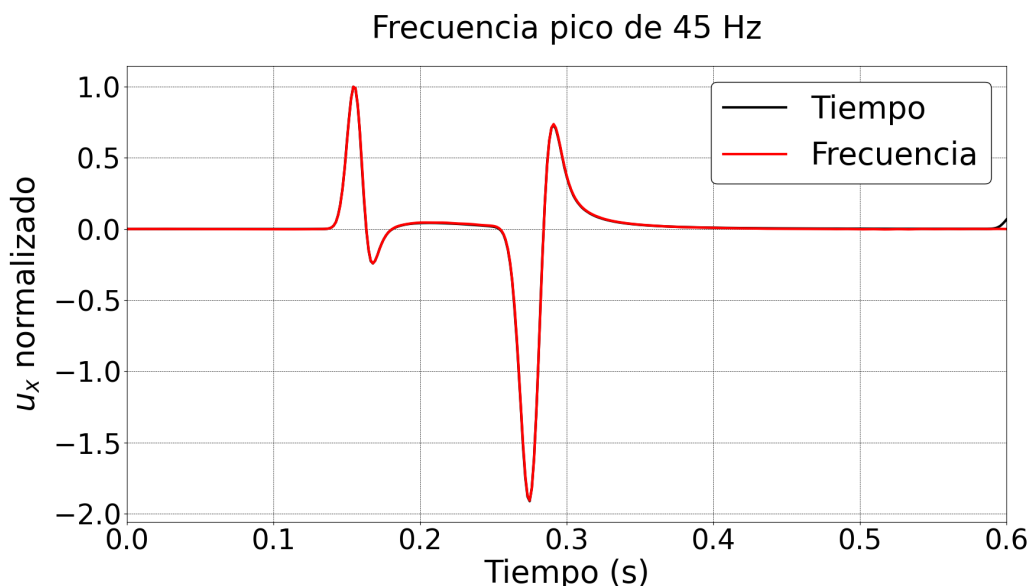




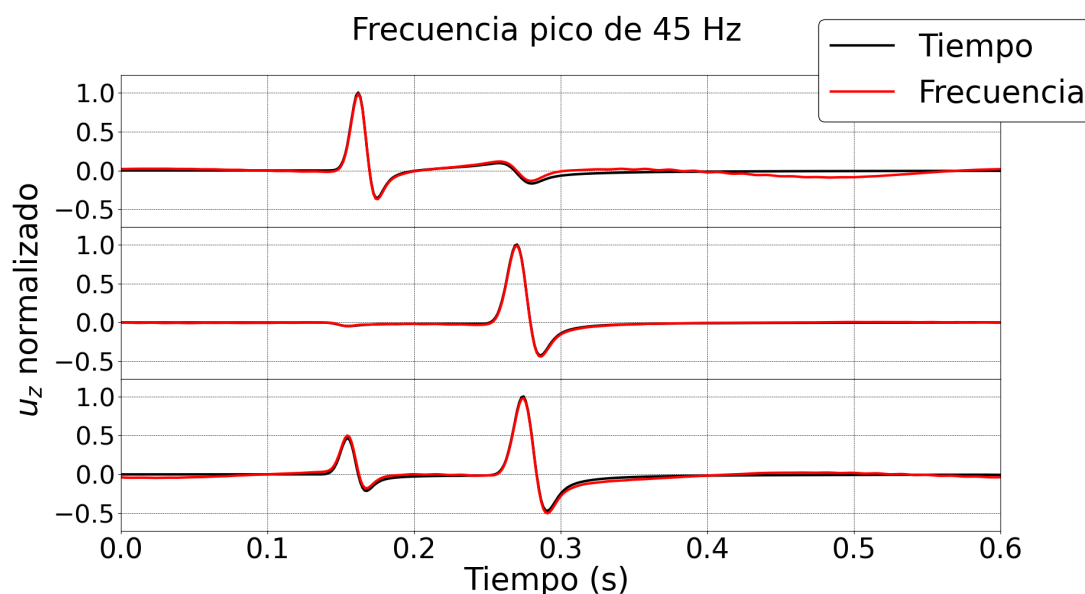
**Figura 46.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 39 Hz, 45 Hz y 51 Hz para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de 45 Hz.



**Figura 47.** Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 39 Hz, 45 Hz y 51 Hz para un medio anisótropo con las características de la tabla 9 y una fuente con frecuencia pico de 45 Hz.



**Figura 48.** Sismogramas (componente x del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 45 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio (0,0), mientras que el receptor se encuentra a 300 metros de distancia de la fuente (212, 212). La línea roja corresponde a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y la negra al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo.



**Figura 49.** Sismogramas (componente z del desplazamiento) obtenidos para un medio anisótropo con las características de la tabla 9, utilizando una fuente con un pico de frecuencia de 45 Hz. La fuente se encuentra en el centro del medio (0,0), los tres receptores se muestran de arriba a abajo con las posiciones, (0, 300), (300, 0) y (212, 212), respectivamente. Las líneas rojas corresponden a la IFFT de los desplazamientos obtenidos en el dominio de la frecuencia y las negras al desplazamiento obtenido directamente en el dominio del tiempo.

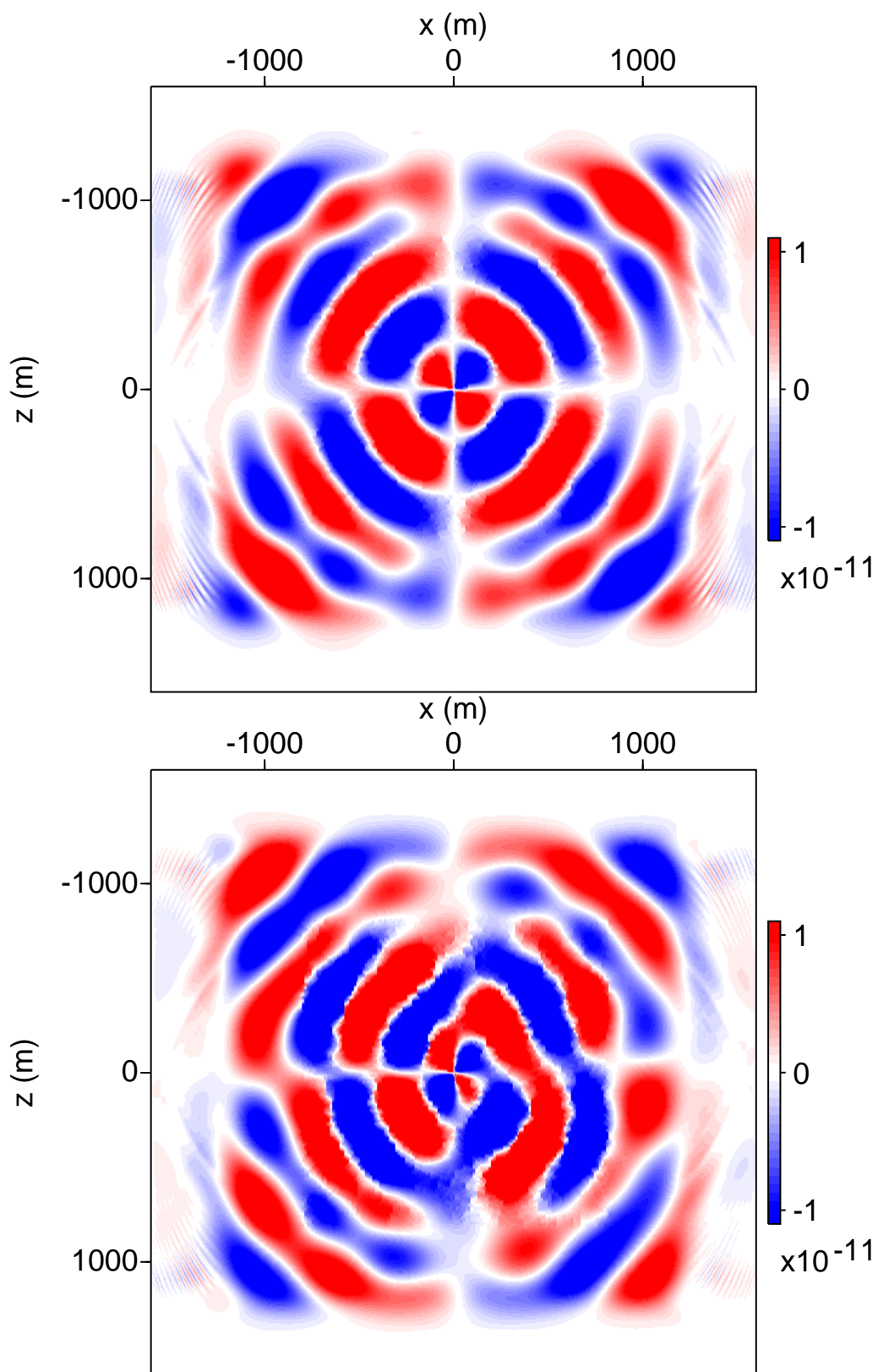
### 6.1.5. Fracturas paralelas

Todos los resultados mostrados en esta sección contemplan medios con fracturas verticales distribuidas aleatoriamente en el medio. Las características del problema se muestran en la tabla 11. Para fuentes con picos de frecuencia de **15 Hz** y **45 Hz**, se analizó el desplazamiento en las componentes  $x$  y  $z$  en diferentes frecuencias. Las figuras 50, 51, y 52 muestran la componente  $x$  del desplazamiento para las frecuencias de **3 Hz**, **15 Hz** y **27 Hz**, respectivamente, mientras que las figuras 53, 54, y 55 representan la componente  $z$  para las mismas frecuencias. Además, se evaluaron densidades de fracturas de 0.01 (3138 fracturas) y 0.05 (9175 fracturas) en cada caso. Para el análisis con fuentes de **45 Hz**, las figuras 56, 57, y 58 muestran la componente  $x$  del desplazamiento para las frecuencias de **33 Hz**, **45 Hz** y **57 Hz**, respectivamente, mientras que las figuras 59, 60, y 61 representan la componente  $z$  para estas frecuencias. De nuevo, se consideraron densidades de fracturas de 0.01 y 0.05 en cada caso.

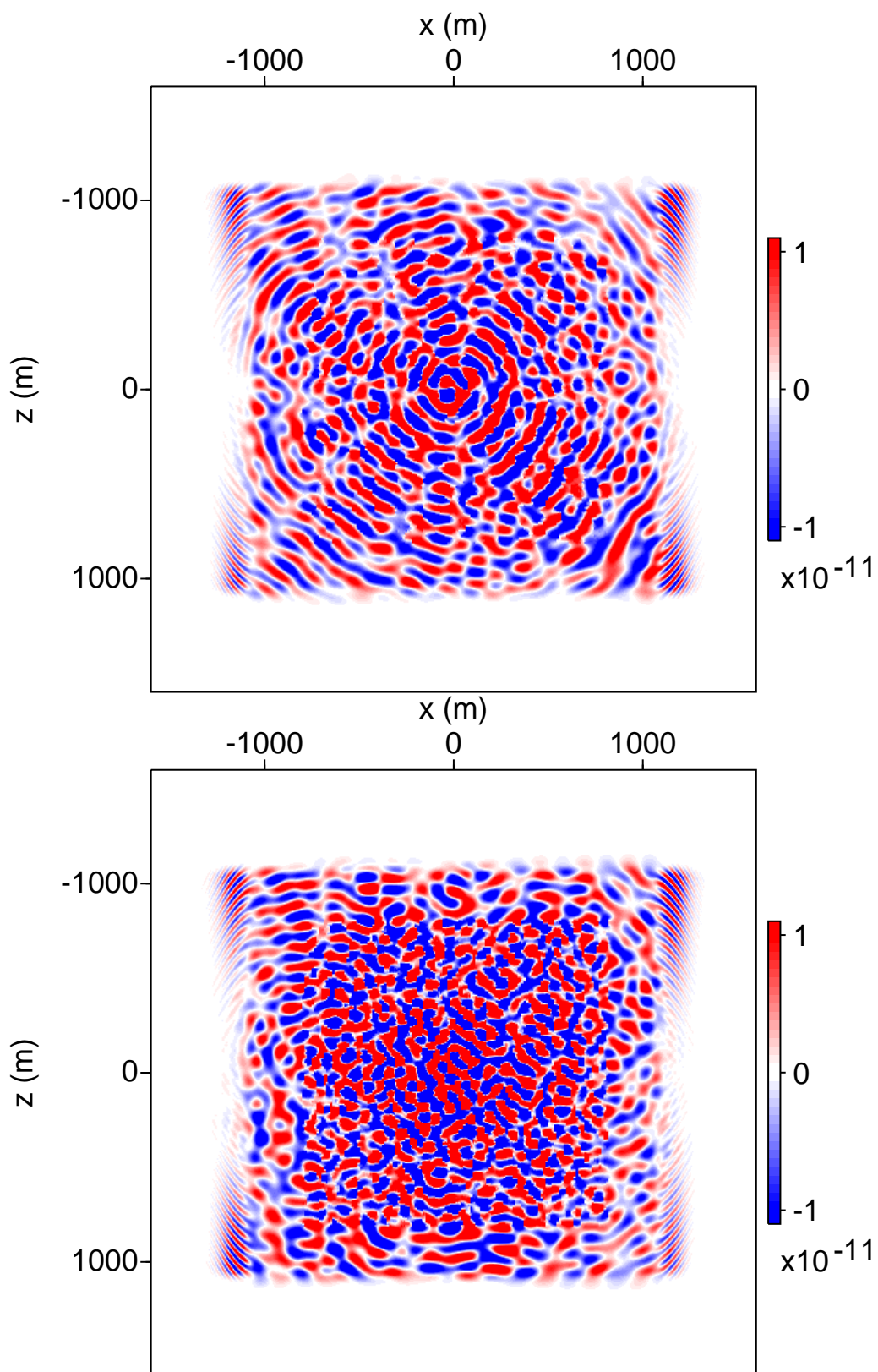
**Tabla 11.** Características del problema para las simulaciones del medio con fracturas verticales aleatorias.

Parámetro	Descripción
Dominio completo	3.2 km × 3.2 km
Dominio de interés	2 km × 2 km
Número de elementos	260 × 260
Coefficiente de atenuación para el dominio PML	0.3
Ancho del dominio PML	0.6 km
Función de atenuación de dominio PML	Polinomio segundo orden
Velocidad onda P	3.31 km/s
Velocidad onda S	1.62 km/s
Densidad del medio	2.5 g/cm <sup>3</sup>
Tipo de fuente	Puntual
Ubicación de la fuente	(0, 0)
Función fuente	Primera derivada de la función Gaussiana
Frecuencia pico de la fuente	15 Hz
Fracturas	
Orientación	Vertical
Posición	Aleatoria
Densidad e=0.01	3138 fracturas
Densidad e=0.05	9175 fracturas
Zona fracturada	Cuadrado 800 m × 800 m centrado en el origen
$Z_N$	$9.89 \times 10^{-11}$ [m/Pa]
$Z_T$	$1.19 \times 10^{-10}$ [m/Pa]

Se puede apreciar como la zona fracturada actúa como una región de atenuación especialmente efectiva para frecuencias altas (ver figuras 58 y 61), dicha atenuación es notoriamente más alta para densidades de fracturas mayores.

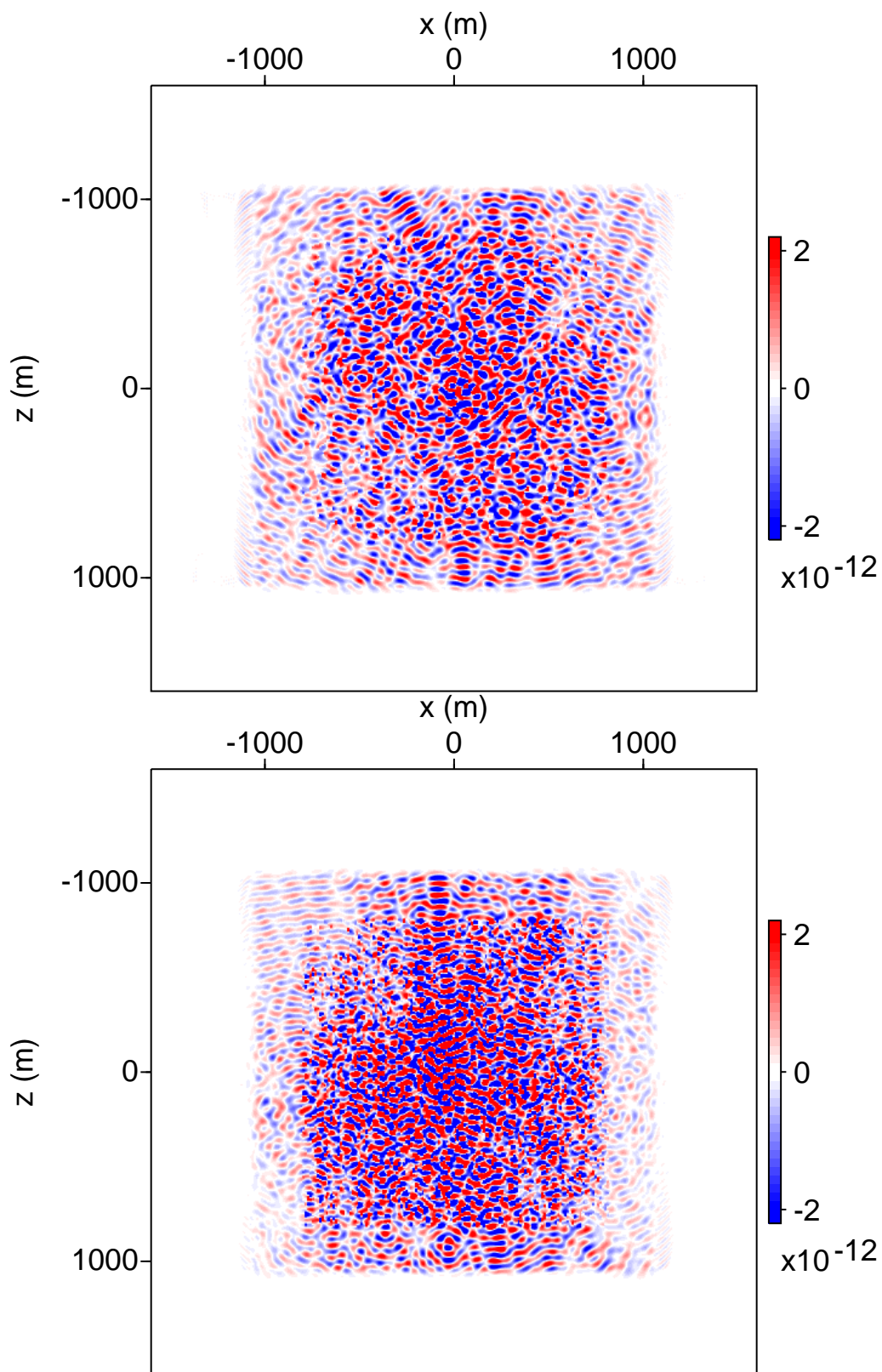


**Figura 50.** Componente  $x$  de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **3 Hz** para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. La primera y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.

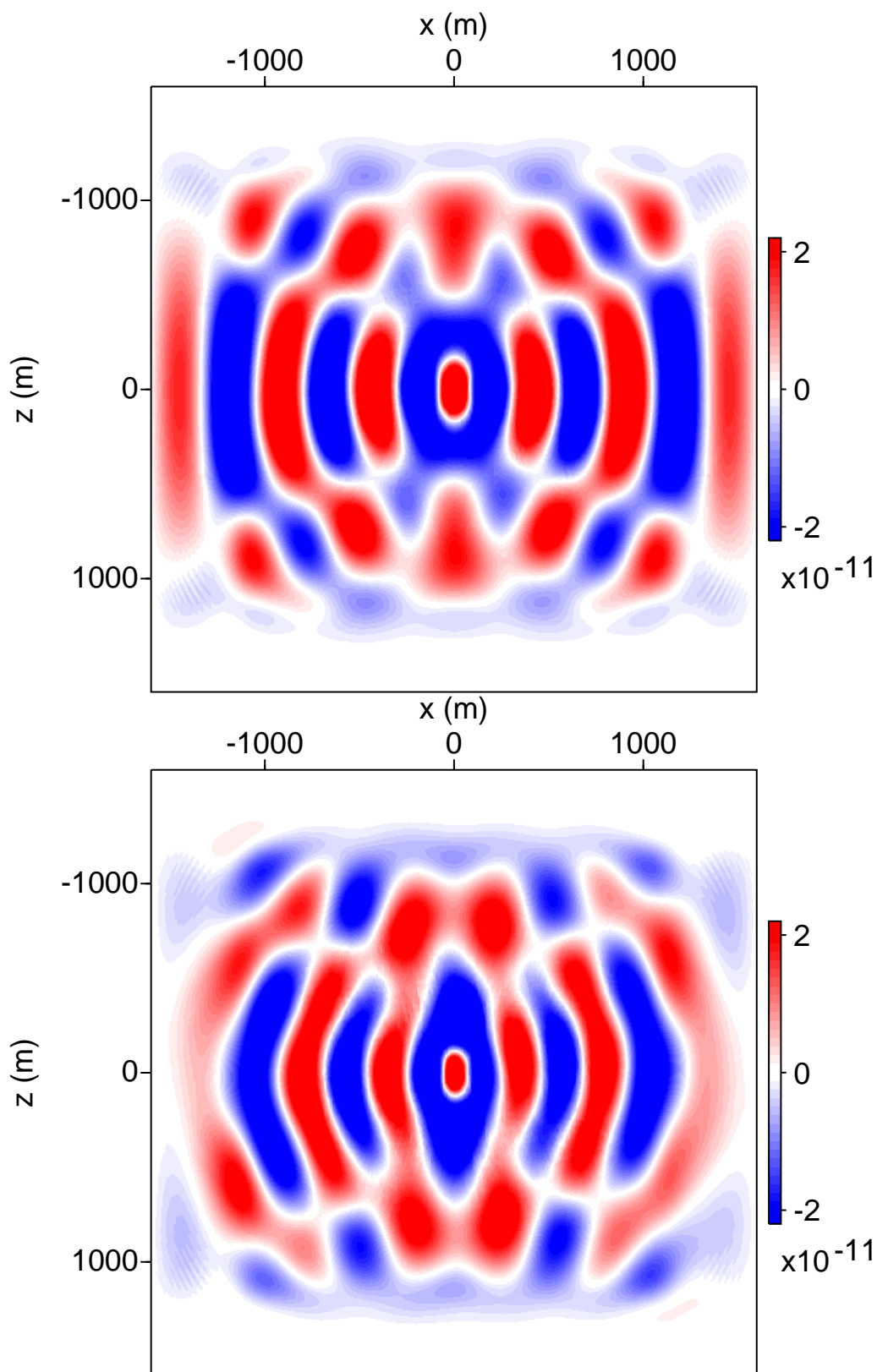


**Figura 51.** Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **15 Hz** para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. La primera y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.



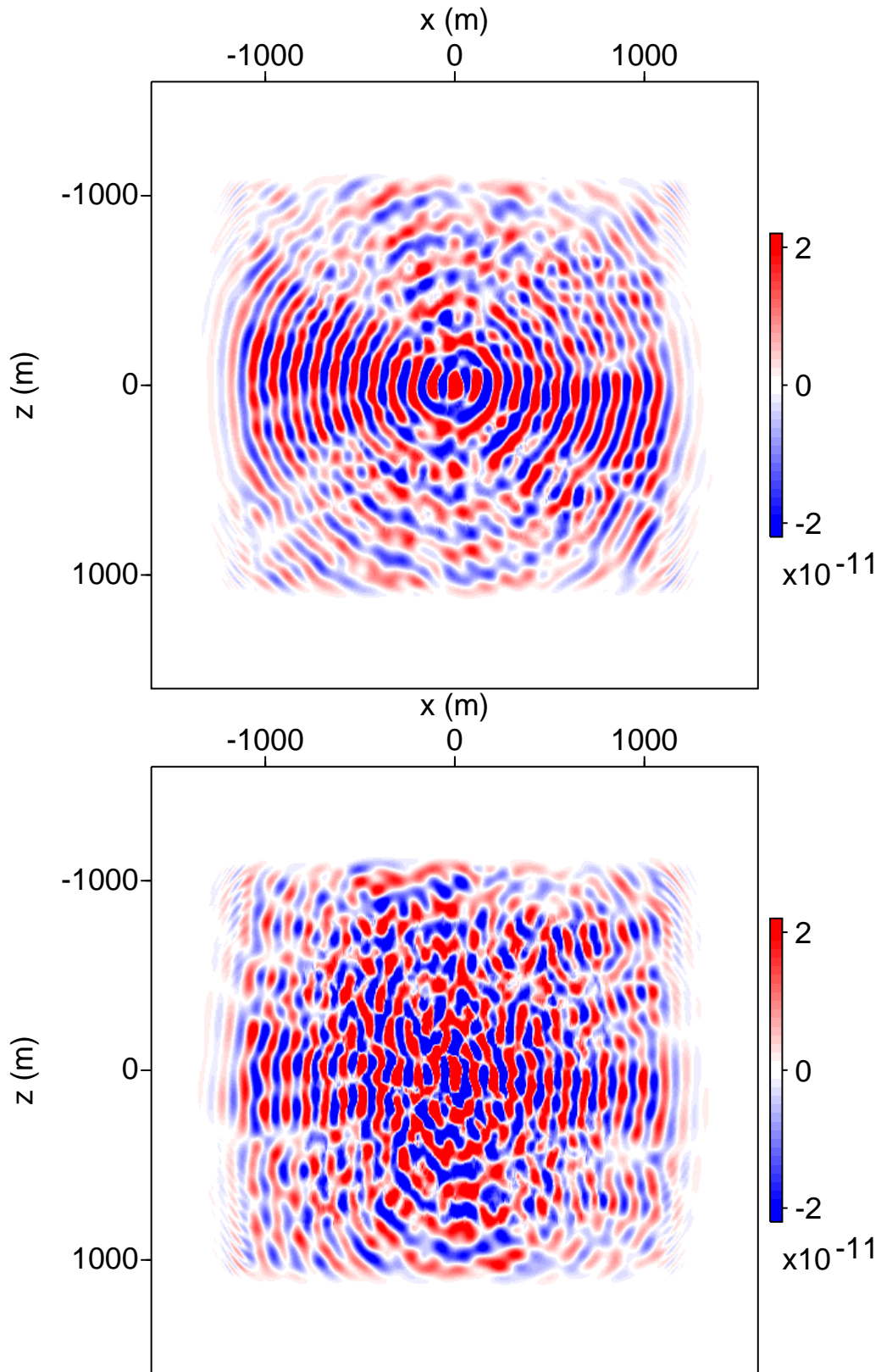


**Figura 52.** Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **27 Hz** para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.

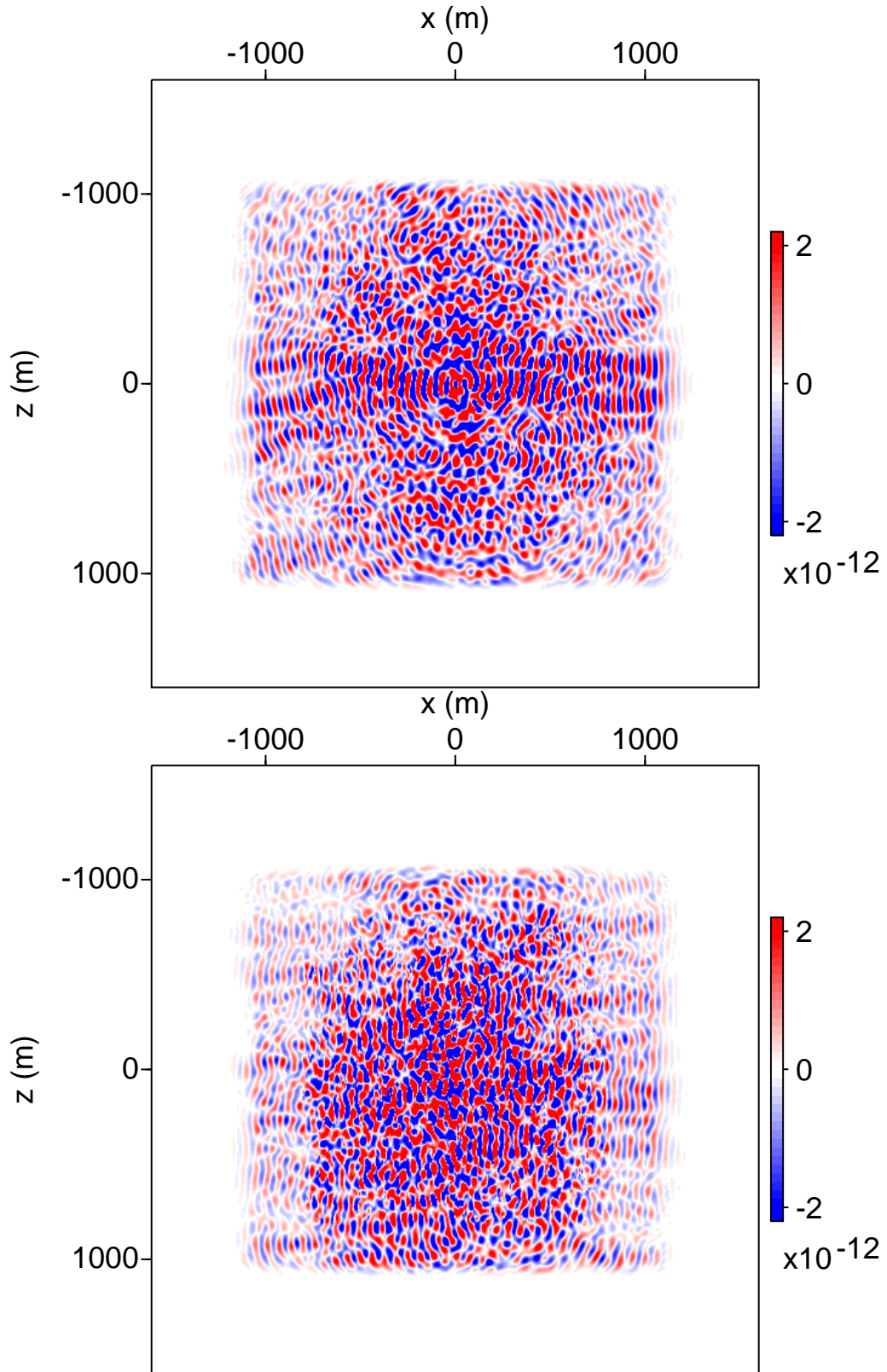


**Figura 53.** Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **3 Hz** para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. La primera y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.

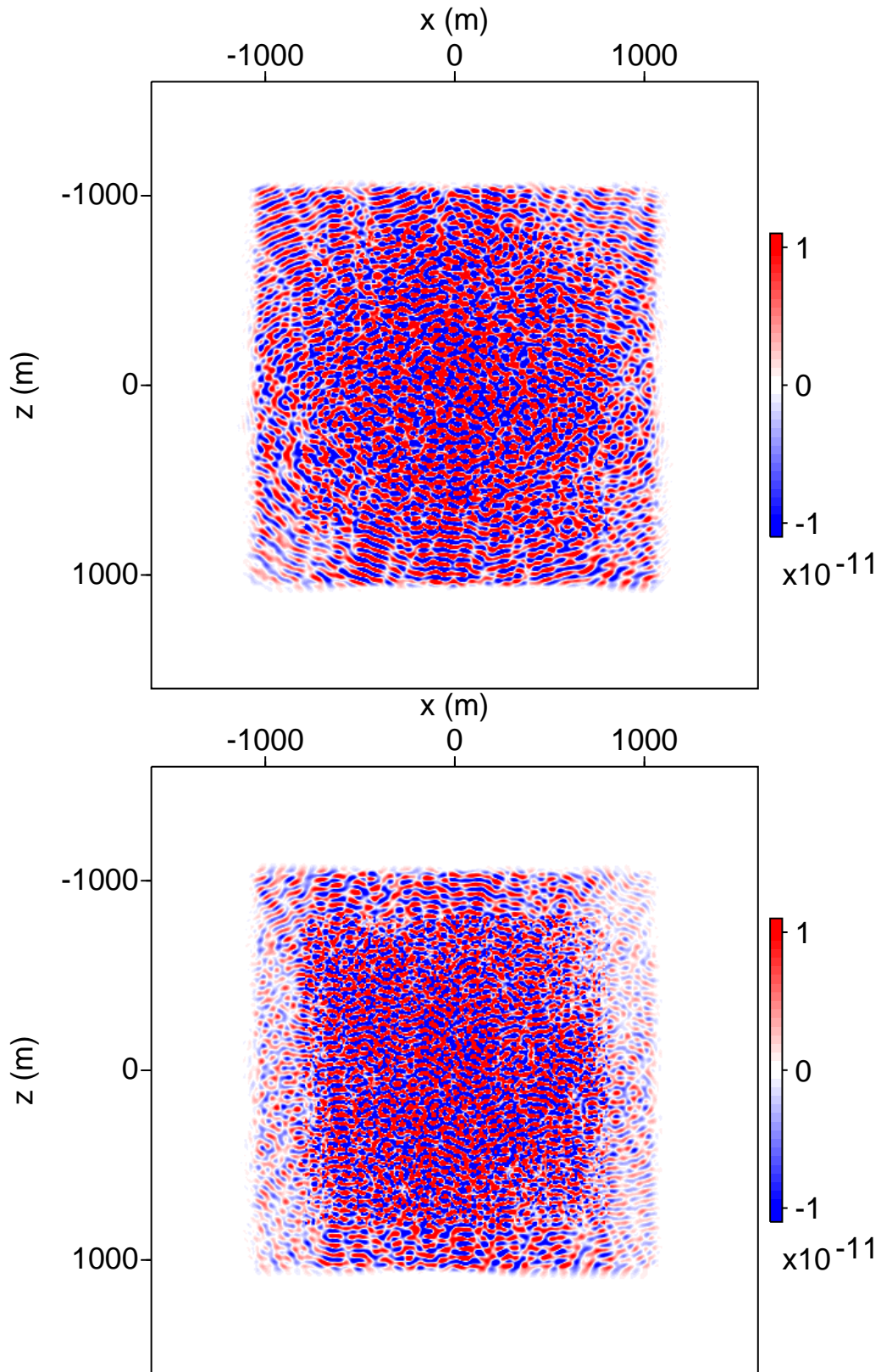




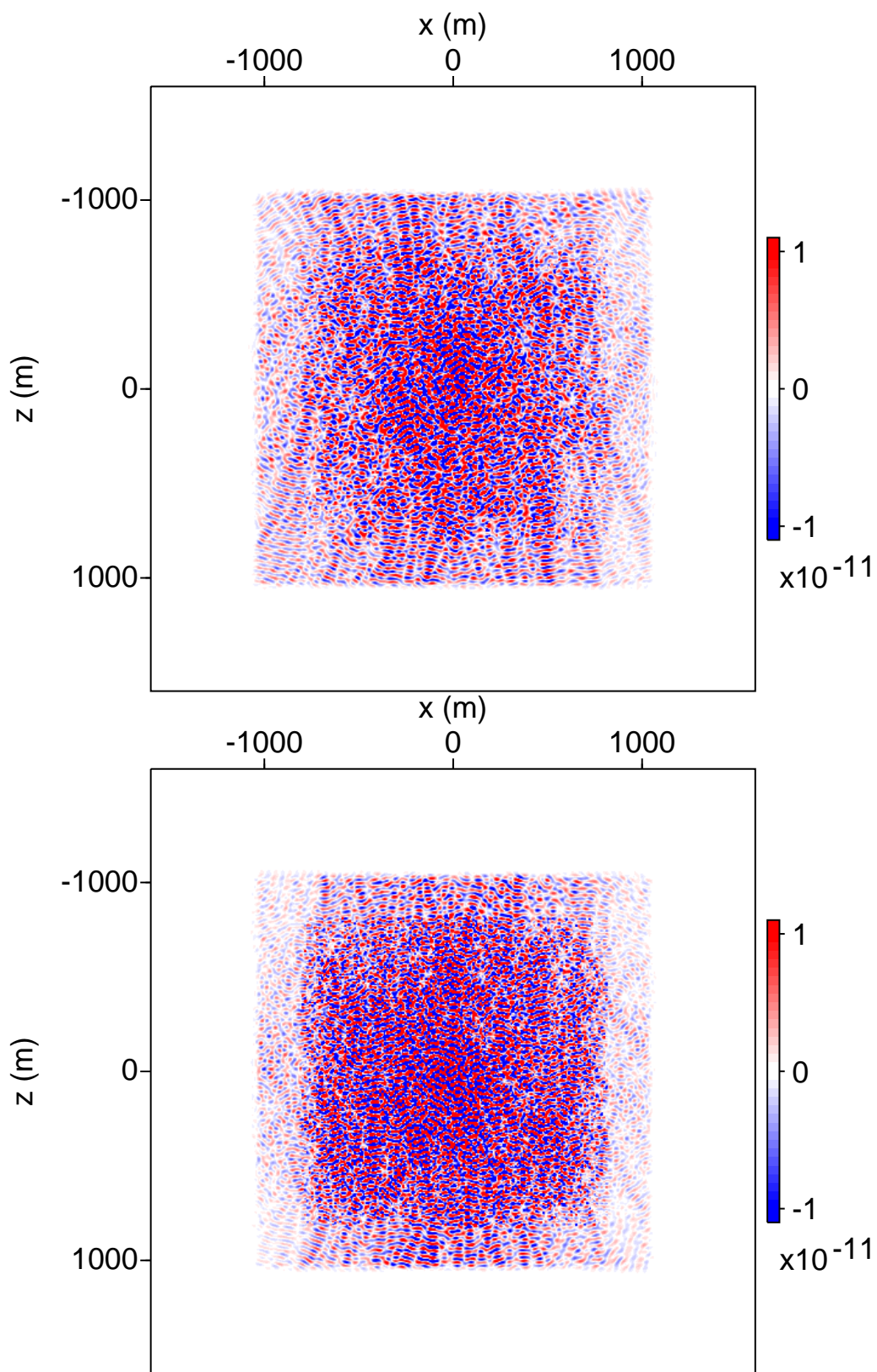
**Figura 54.** Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **15 Hz** para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. La primera y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.



**Figura 55.** Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 27 Hz para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de 15 Hz. La primera y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.

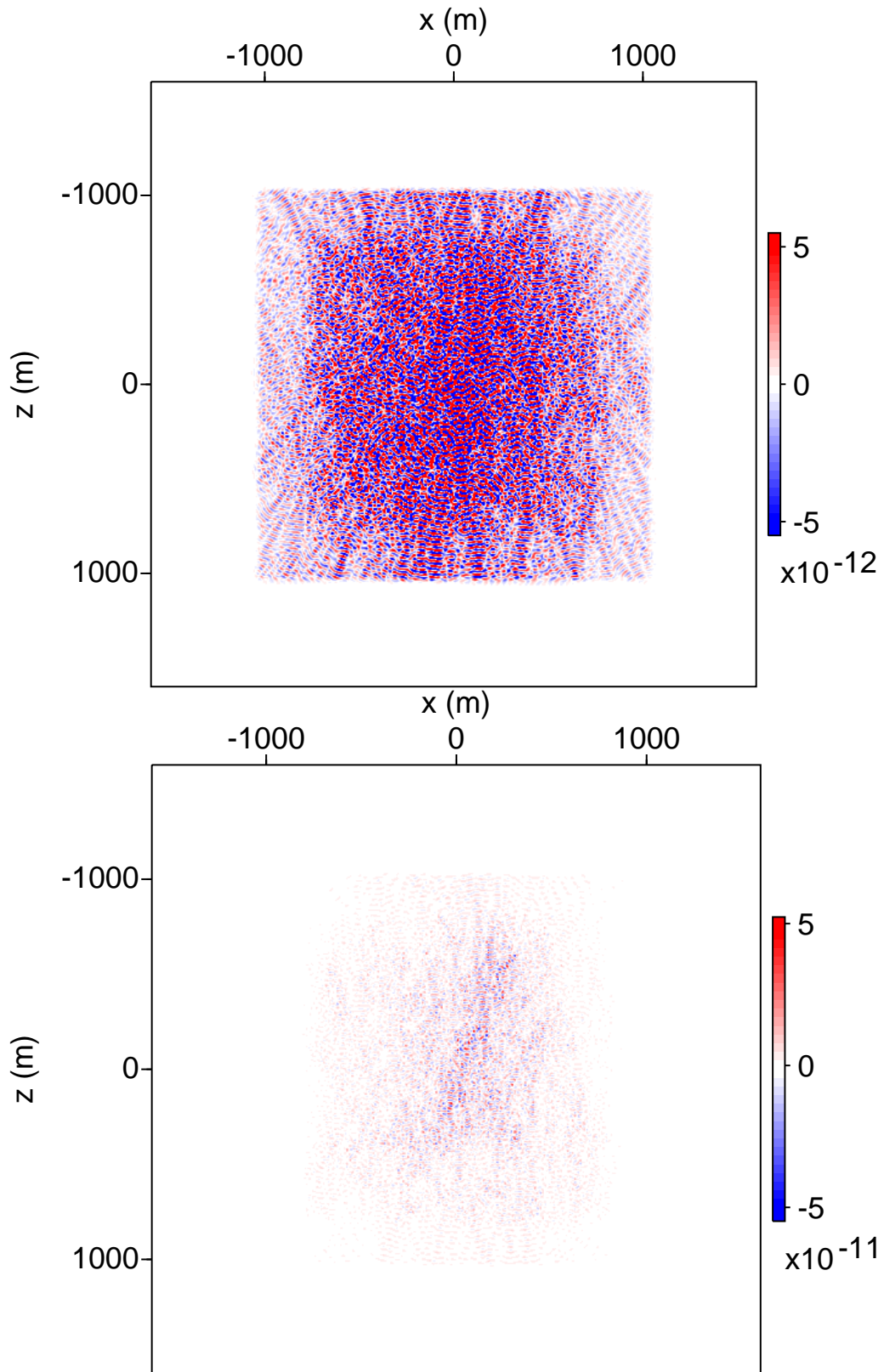


**Figura 56.** Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **33 Hz** para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de **45 Hz**. La primera y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.

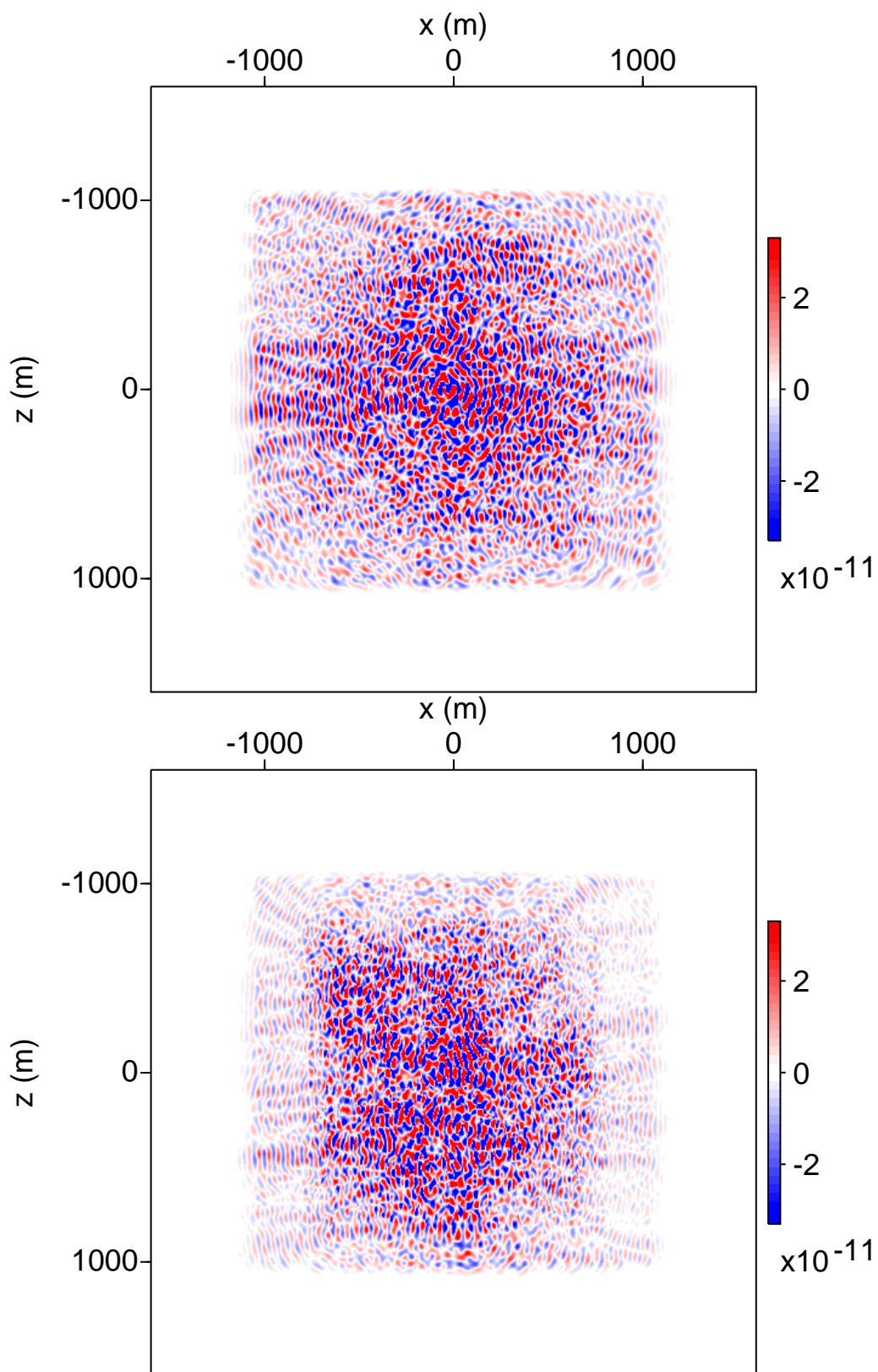


**Figura 57.** Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **45 Hz** para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de **45 Hz**. La primera y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.

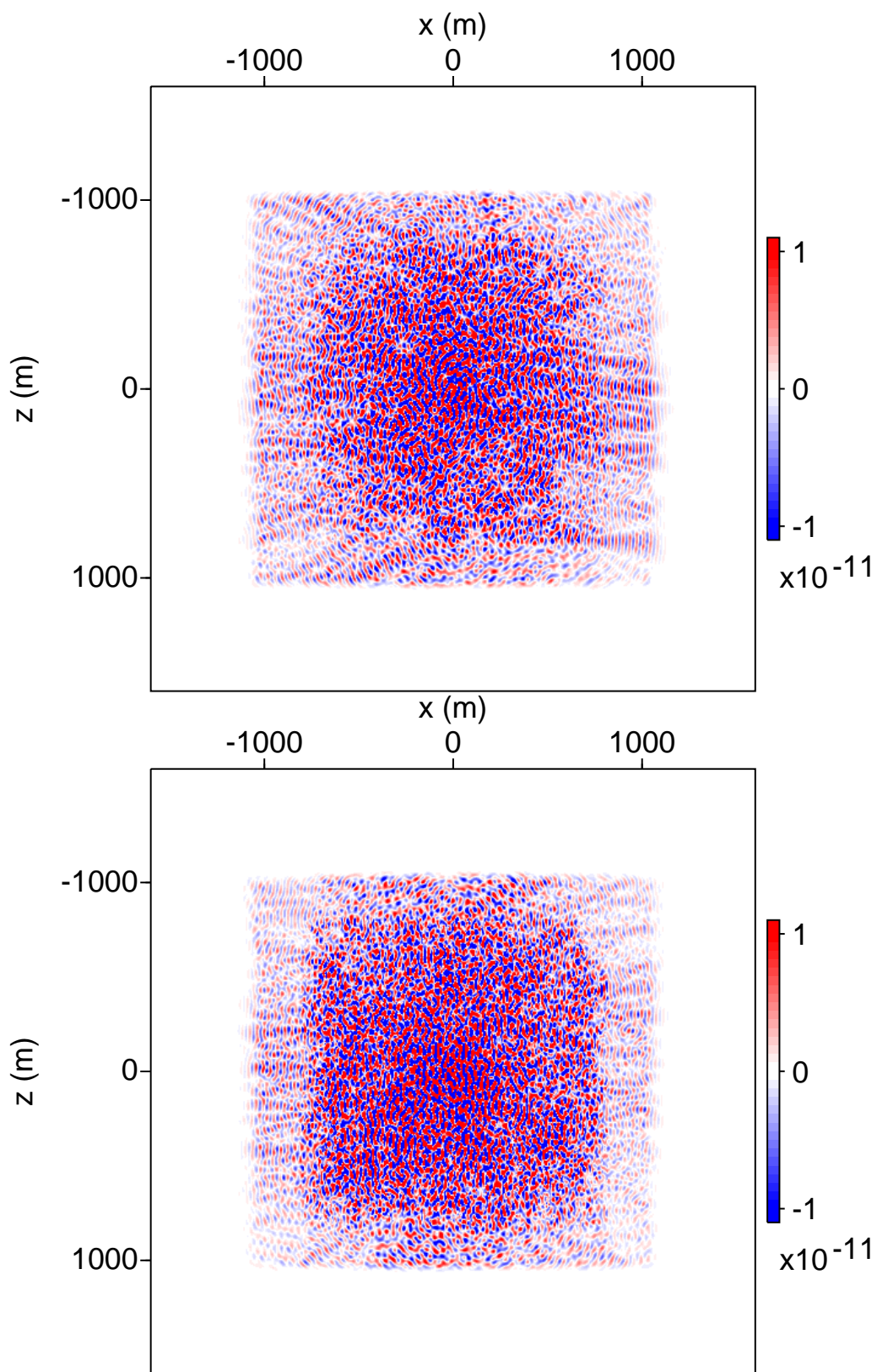




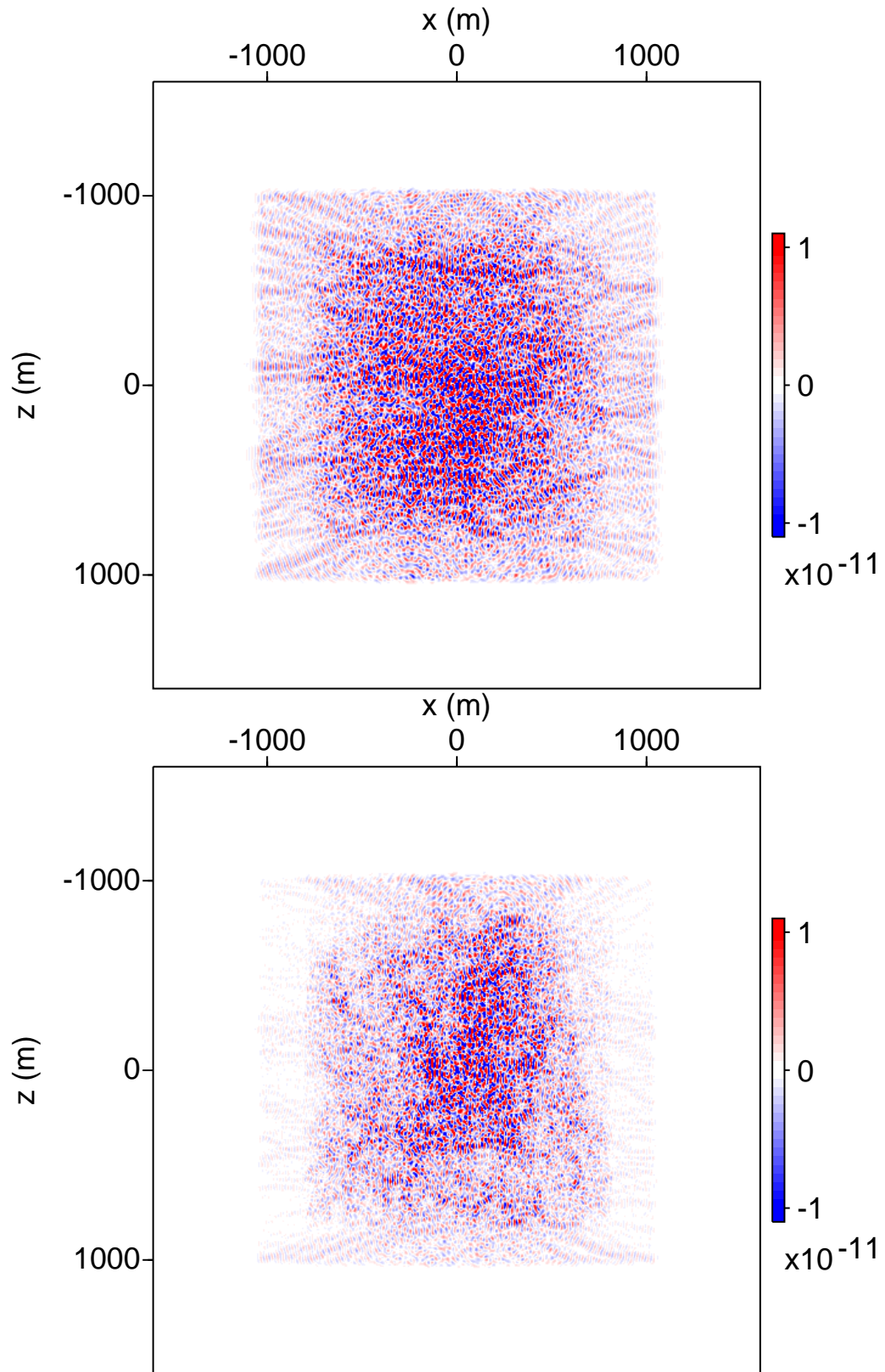
**Figura 58.** Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **57 Hz** para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de **45 Hz**. La primera y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.



**Figura 59.** Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **33 Hz** para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de **45 Hz**. La primera y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.



**Figura 60.** Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **45 Hz** para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de **45 Hz**. La primera y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.



**Figura 61.** Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **57 Hz** para un medio con fracturas verticales con las características de la tabla 11 y una fuente con frecuencia pico de **45 Hz**. La primera y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.



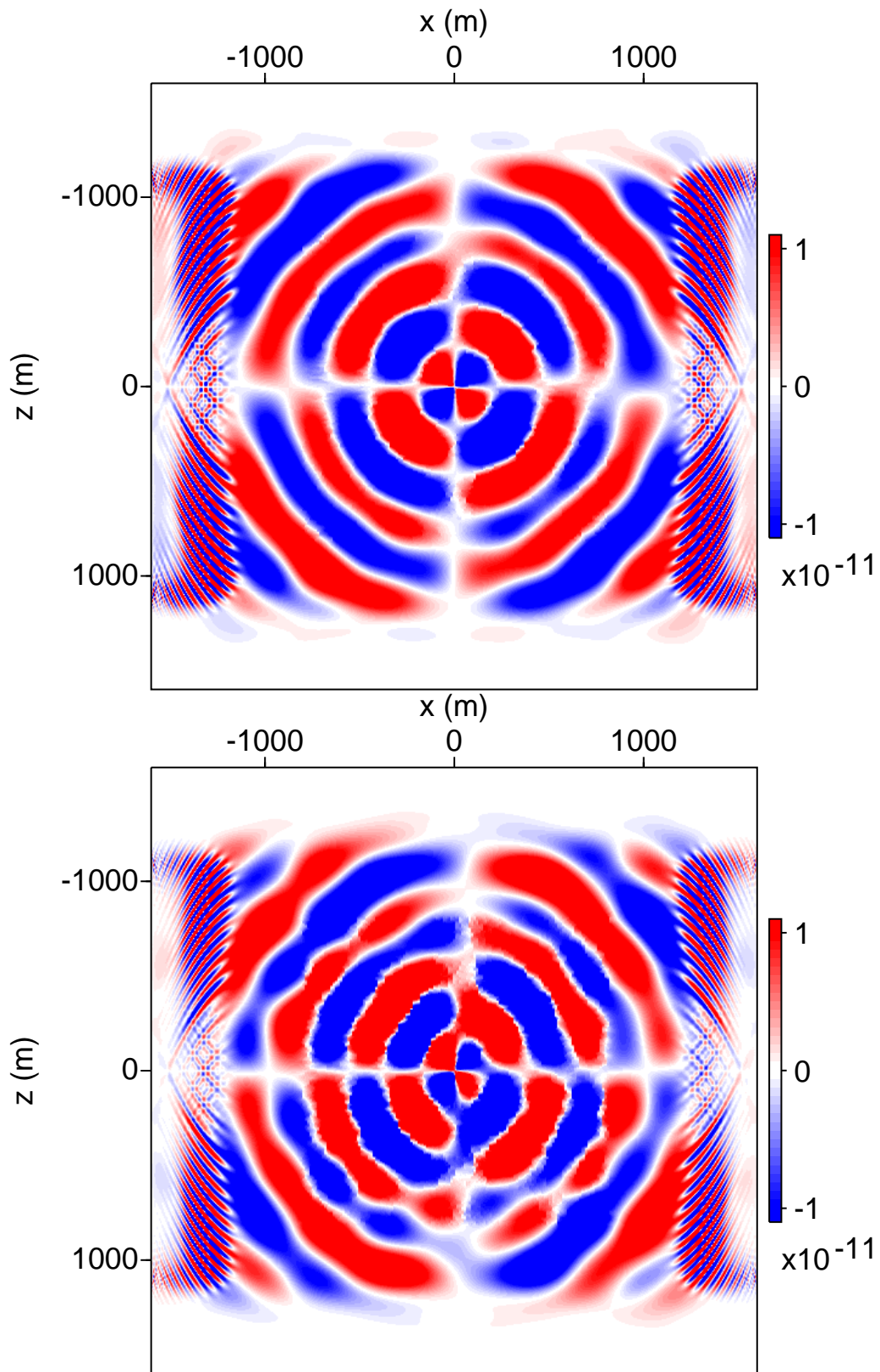
### 6.1.6. Fracturas verticales y roca anisótropa

Todos los resultados mostrados en esta sección son para un medio anisótropo con fracturas verticales distribuidas aleatoriamente en el medio. La fuente es puntual y se encuentra en el centro del dominio, las características del problema se muestran en la tabla 12.

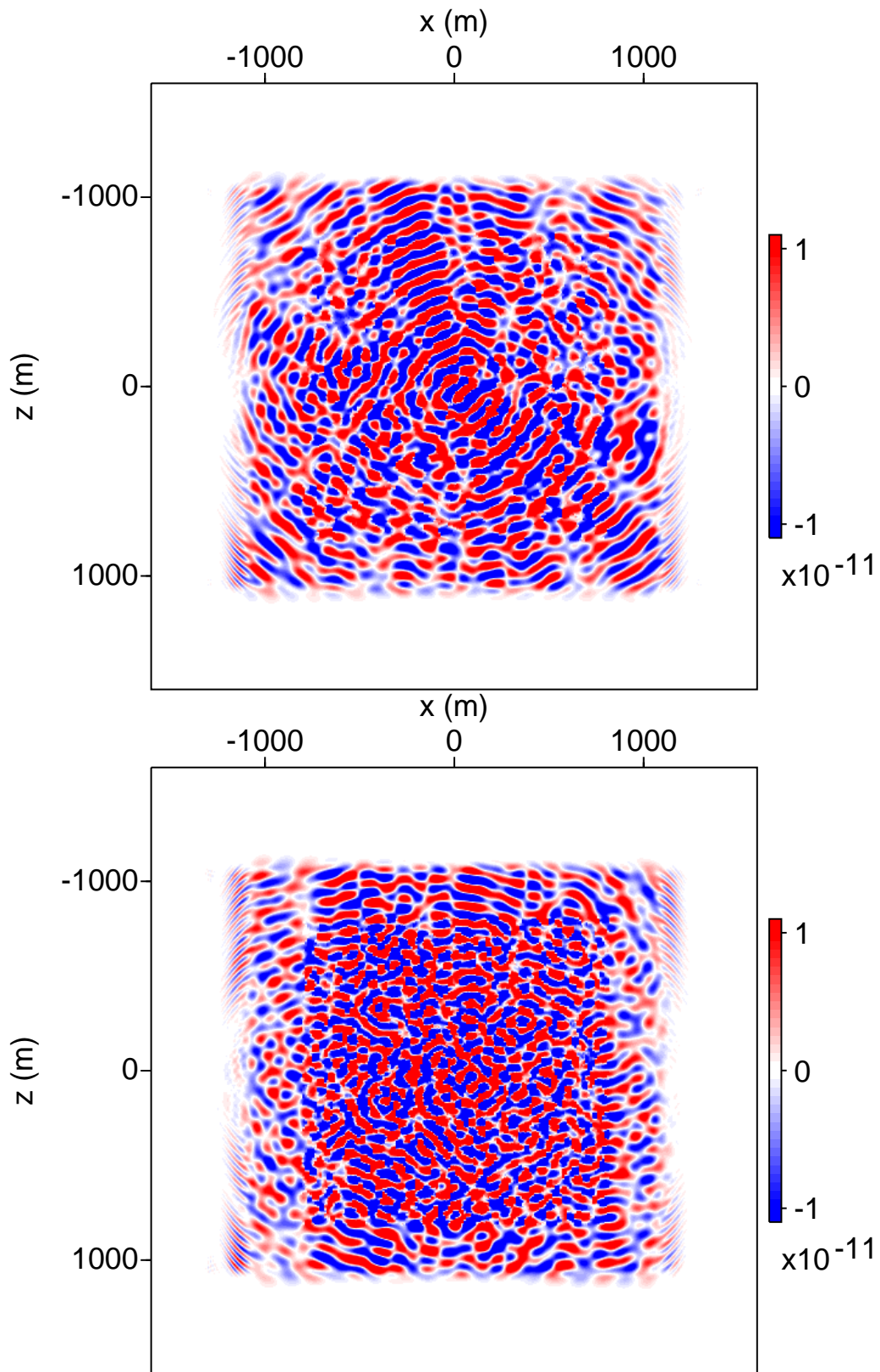
**Tabla 12.** Características del problema para las simulaciones del medio con fracturas verticales aleatorias y roca anisótropa.

Parámetro	Descripción
Dominio completo	3.2 km × 3.2 km
Dominio de interés	2 km × 2 km
Número de elementos	260 × 260
Coefficiente de atenuación para el dominio PML	0.3
Ancho del dominio PML	0.6 km
Función de atenuación de dominio PML	Polinomio segundo orden
Parámetro de Lamé $\lambda$	14.2 [GPa]
Parámetro de Lamé $\mu$	6.54 [GPa]
Tipo de anisotropía	VTI
Tensor de rigidez	Ecuación 118
Tipo de fuente	Puntual
Ubicación de la fuente	(0, 0)
Función fuente	Primera derivada de la función Gaussiana
<b>Fracturas</b>	
Orientación	Fractura vertical
Posición	Aleatoria
Densidad $e=0.01$	3138 fracturas
Densidad $e=0.05$	9175 fracturas
$Z_N$	$9.89 \times 10^{-11}$ [m/Pa]
$Z_T$	$1.19 \times 10^{-10}$ [m/Pa]

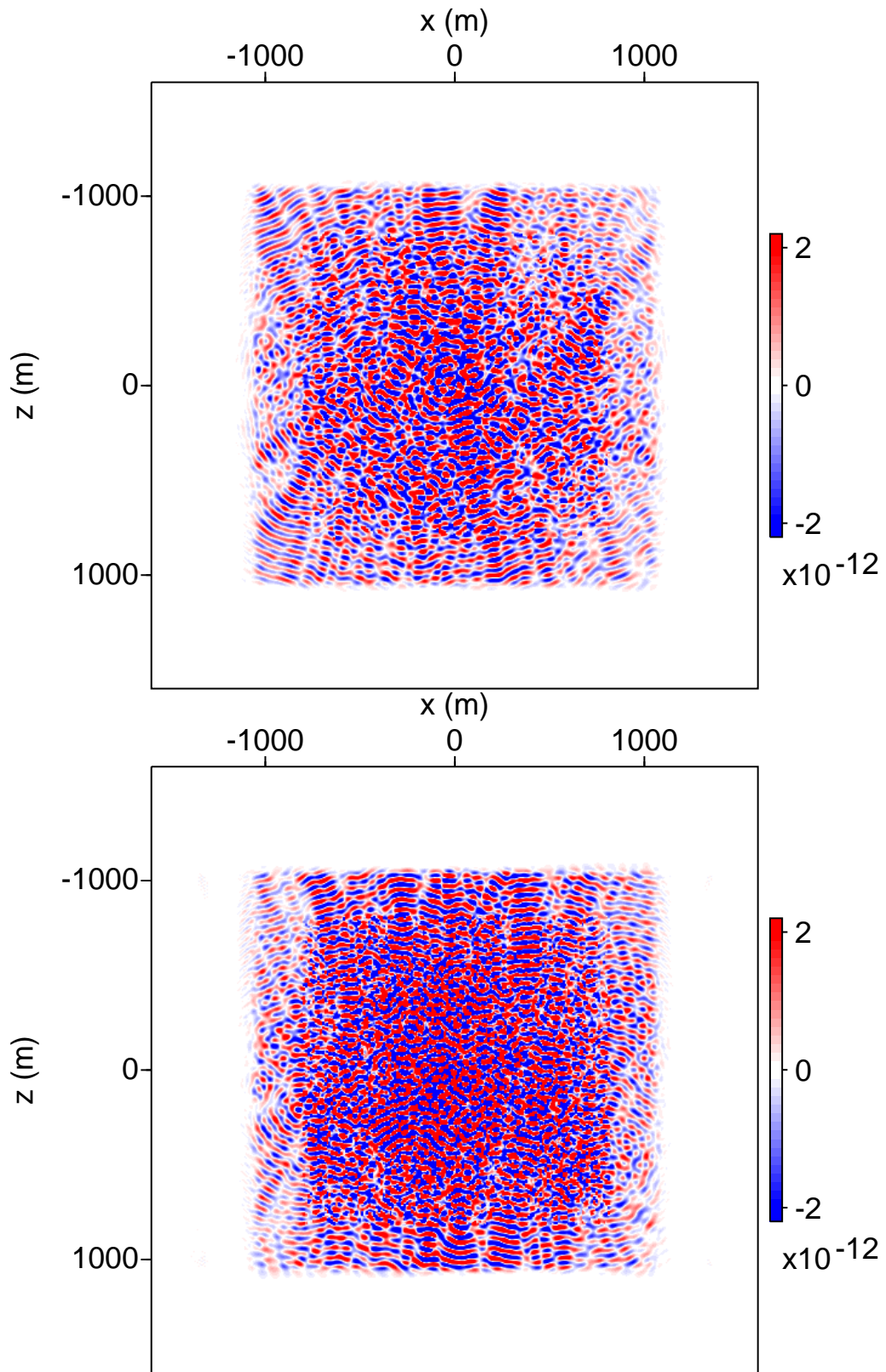
Para una fuente con un pico de frecuencia de **15 Hz**, las figuras 62, 63 y 64 muestran la componente  $x$  de la parte real del desplazamiento para las frecuencias **3, 15 y 27 Hz** respectivamente; por otro lado, las figuras 65, 66 y 67 exponen la componente  $z$  de la parte real del desplazamiento para las frecuencias **3, 15 y 27 Hz** respectivamente. Además se evaluaron densidades de fractura de 0.01 (3138 fracturas) y 0.05 (9175 fracturas) para cada frecuencia. La anisotropía y las fracturas no parecen alterar el funcionamiento de las fronteras PML más allá de los efectos observados en frecuencias bajas para el caso anisótropo sin fracturas.



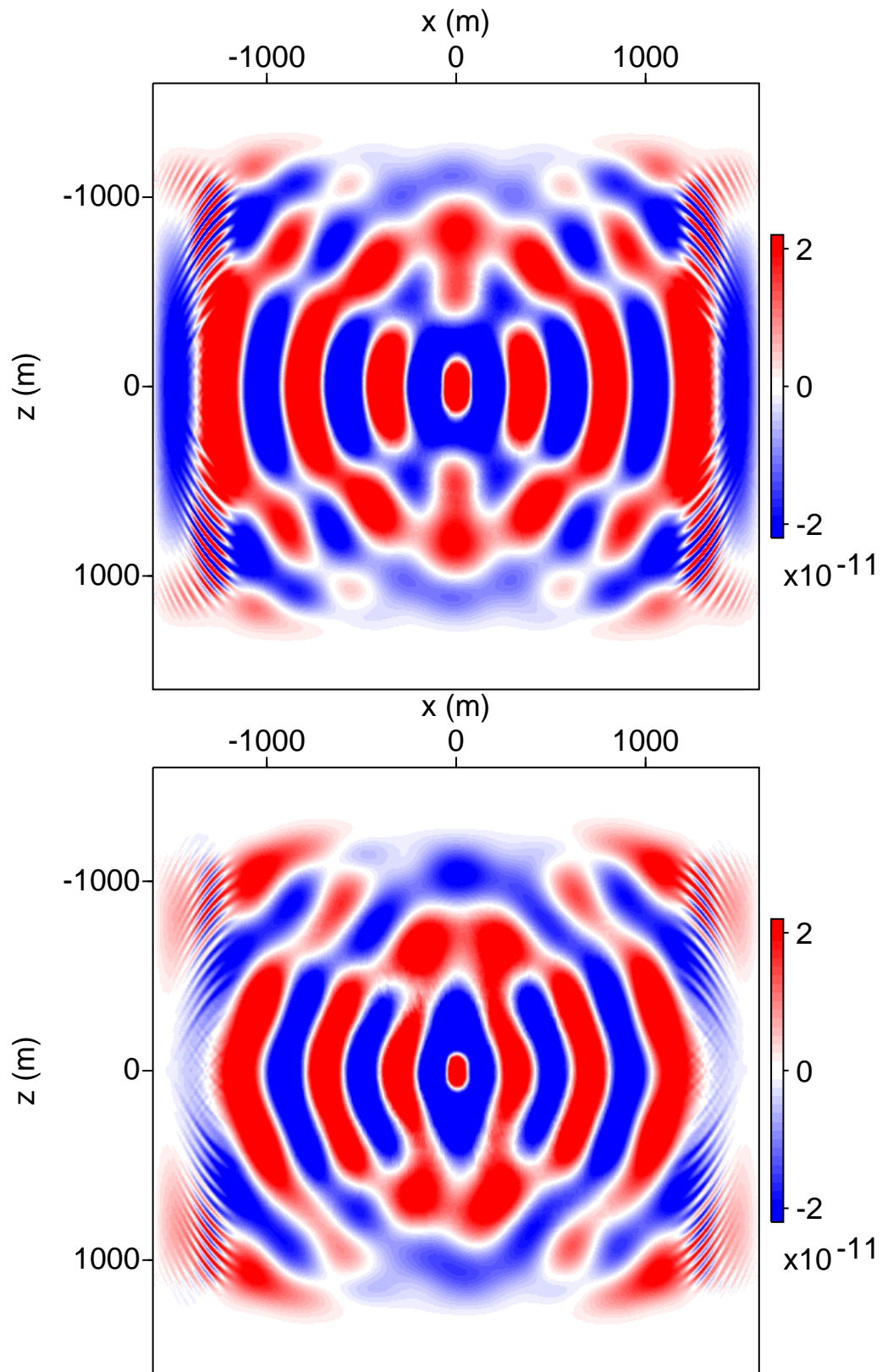
**Figura 62.** Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 3 Hz para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de 15 Hz. La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.



**Figura 63.** Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **15 Hz** para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.

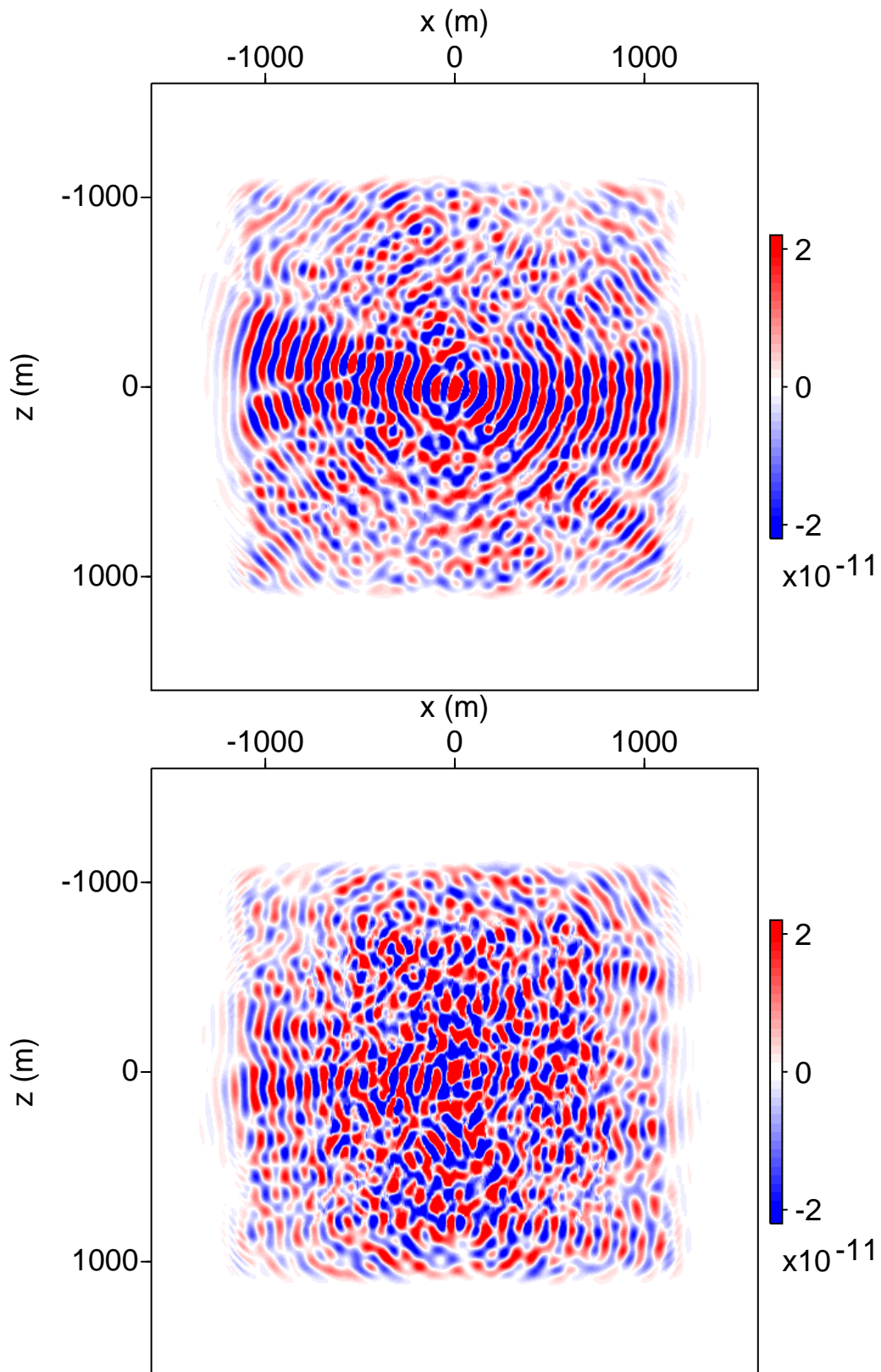


**Figura 64.** Componente x de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **27 Hz** para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.

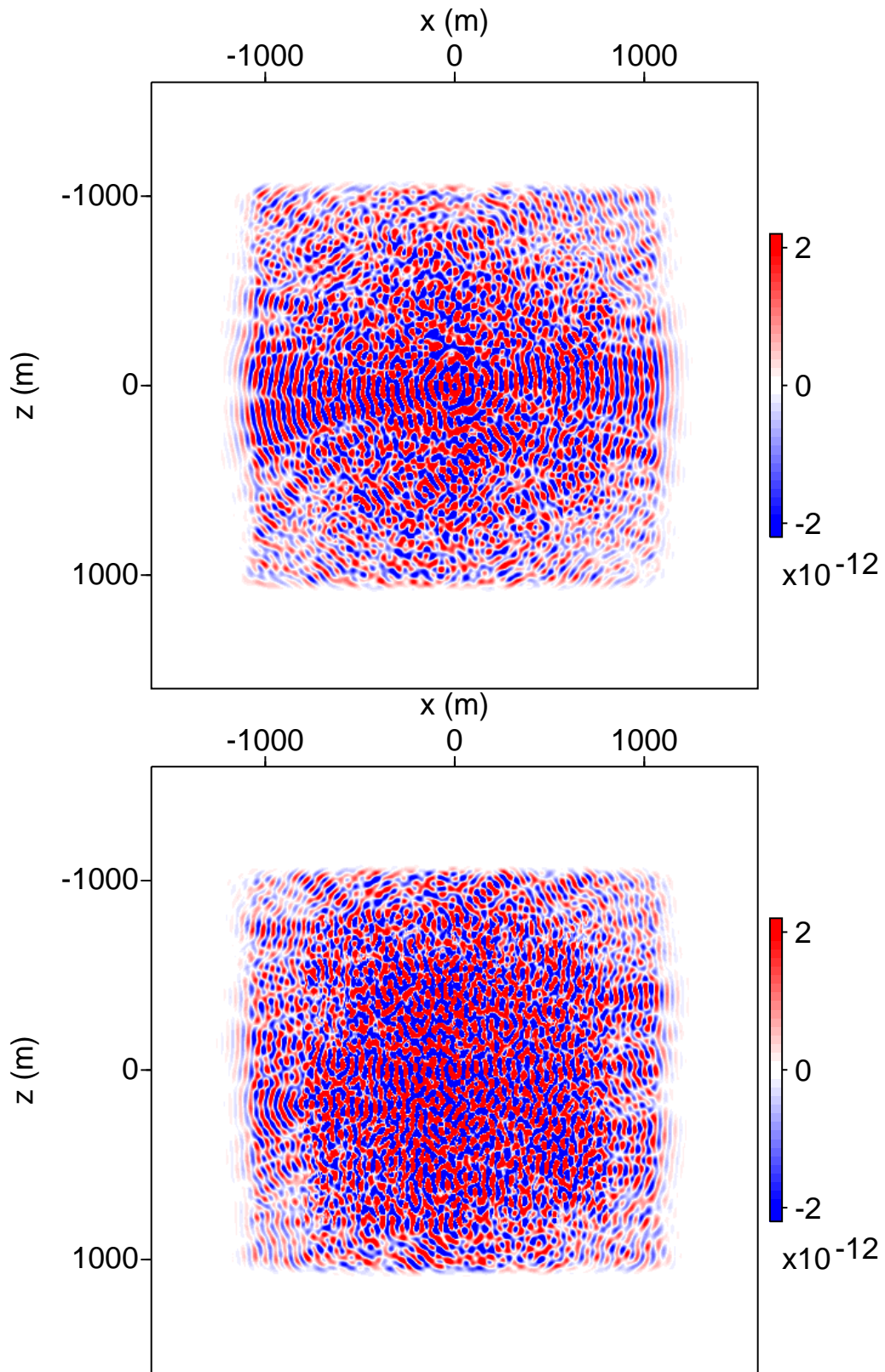


**Figura 65.** Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de 3 Hz para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de 15 Hz. La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.





**Figura 66.** Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **15 Hz** para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.



**Figura 67.** Componente z de la parte real del desplazamiento en km para una frecuencia de **27 Hz** para un medio anisótropo y con fracturas verticales con las características de la tabla 12 y una fuente con frecuencia pico de **15 Hz**. La primer y segunda imagen corresponden a una densidad de fracturas de 0.01 y 0.05 respectivamente.

## 6.2. Discusión

En esta sección se resaltarán los resultados más importantes obtenidos en éste trabajo de tesis. Se explorará el comportamiento de la implementación desarrollada y las características de esta misma.

- Bindel & Govindjee (2005) menciona que para implementaciones de elementos finitos en el dominio de la frecuencia, la región PML puede ser interpretada como un medio con anisotropía dependiente de frecuencias complejas. Esto significa que una implementación puede incorporar PML simplemente modificando la densidad y el tensor de rigidez del medio. Para implementaciones de Galerkin discontinuo, no es suficiente pensar el dominio PML como un medio de características especiales, debido a que la tracción de ese tipo de medio no corresponde con la calculada en la forma débil.
- Los sismogramas calculados a partir de aplicar una IFFT a los resultados en el dominio de la frecuencia muestran excelente similitud con los sismogramas obtenidos directamente en el dominio del tiempo por De Basabe et al. (2016), esto a pesar de los errores inherentes a la IFFT. Esta tendencia se mantiene para todos los casos pero se puede ver un leve incremento en la discrepancia para el medio fracturado. Resulta interesante explorar si el comportamiento de las condiciones de LSM tienen diferente comportamiento en el dominio de la frecuencia y del tiempo, hasta ahora no se ha explorado dicha posibilidad.
- Zhuang et al. (2020) describen una transformada de las coordenadas para la región PML diferente a la utilizada en este trabajo. Su función incorpora un término extra que tiene como objetivo atenuar las ondas evanescentes y las casi tangenciales a la frontera PML. A pesar de incorporar medios fracturados cerca o en contacto con la frontera PML, la difracción causada en ningún caso fue un problema en la implementación obtenida. Por otro lado las ondas evanescentes en frecuencias bajas causan inevitablemente reflexiones no deseadas, por lo que agregar dicho término ayudaría a reducir el dominio computacional dedicado a las fronteras PML para bajas frecuencias.
- Los efectos de la anisotropía, fracturas y densidad de fracturas se ven correctamente reflejados en las simulaciones numéricas. La anisotropía se hace presente achatando los frentes de onda en los resultados y no se aprecian efectos negativos notables en las fronteras PML. Las fracturas introducen dispersión y atenuación. Dichos efectos se hacen más fuertes para las frecuencias altas que para las frecuencias bajas, como se muestra en el trabajo de Antonio (2021), además los efectos mencionados incrementan si se aumenta la densidad de fracturas.



## Capítulo 7. Conclusiones y trabajo a futuro

---

### 7.1. Conclusiones

El método del Galerkin Discontinuo de Penalización Interior fue empleado en este estudio para llevar a cabo simulaciones numéricas de la propagación de ondas elásticas en medios fracturados, anisótropos y heterogéneos en el dominio de la frecuencia. Para validar los resultados obtenidos, se generó un sismograma a partir de las simulaciones en el dominio de la frecuencia y se comparó con uno obtenido directamente en el dominio del tiempo. Mediante el cálculo de la correlación cruzada entre ambos sismogramas, se obtuvo un coeficiente positivo muy cercano a uno, indicando una gran similitud entre las dos señales. Además, se encontró que la máxima concordancia entre los sismogramas se logró sin necesidad de retrasar o adelantar la señal. Estos hallazgos respaldan la eficacia y la precisión del método utilizado en la simulación de la propagación de ondas elásticas en medios complejos.

La falta de una guía clara para la selección de los parámetros de las fronteras PML en conjunto con los efectos que el método numérico utilizado y las condiciones particulares que cada problema tienen sobre la eficiencia de las fronteras PML, provocan que los parámetros tengan que ser evaluados de manera práctica antes de asegurar su correcto funcionamiento.

El esquema de LSM reproduce el efecto de atenuación para frecuencias altas. Existe una clara relación entre la cantidad de atenuación y la frecuencia. Las frecuencias bajas son poco perturbadas por la presencia de fracturas mientras que la atenuación en frecuencias altas es muy alta. La orientación de las fracturas influye en la dirección de mayor atenuación.

La influencia de la anisotropía en la eficacia de las fronteras PML para bajas frecuencias no es despreciable, destacando la importancia de considerar cuidadosamente el grado de anisotropía al seleccionar los parámetros del dominio PML. Este análisis es fundamental para garantizar una transición y absorción efectiva de las ondas, asegurando así un rendimiento óptimo del método PML en la simulación de problemas de propagación de ondas.

El algoritmo MUMPs resulta ser una herramienta eficaz para resolver los complejos sistemas dispersos de ecuaciones generados por la implementación desarrollada en este trabajo.

## 7.2. Trabajo a futuro

Una implementación en el dominio de la frecuencia, que incorpora de manera realista los efectos de fracturas en la propagación de ondas en medios complejos, puede ser utilizada como un recurso en la exploración sísmica y la caracterización de medios fracturados. Se mencionan algunas perspectivas para ampliar y aplicar esta metodología innovadora:

- Extender el modelo para poder incorporar efectos viscoelásticos del medio y de las fracturas.
- Paralelizar el problema y estudiar la eficiencia de MUMPS cuando se omiten los procesos de análisis y de factorización cuando se simulan múltiples frecuencias. Esto con el objetivo de mejorar la eficiencia computacional.
- Estudiar directamente en el dominio de la frecuencia como la densidad, longitud, orientación, conectividad y ángulo entre fracturas conectadas, afecta la propagación de ondas elásticas.
- Tomando en cuenta las ventajas que el dominio de la frecuencia ofrece y que FWI requiere una implementación robusta que pueda incluir casos realistas, la metodología desarrollada en este trabajo de tesis puede ser adaptada para aplicaciones de FWI.
- Extender la implementación a espacios 3D.
- Aplicar el método a casos reales para explorar su eficiencia y aplicabilidad en situaciones prácticas.

## Literatura citada

- Aguilera, R. (1998). Geologic aspects of naturally fractured reservoirs. *The Leading Edge*, 17(12), 1667–1670. <https://doi.org/10.1190/1.1437912>.
- Amestoy, P. R., Buttari, A., L'Excellent, J.-Y., & Mary, T. (2019). Performance and scalability of the block low-rank multifrontal factorization on multicore architectures. *ACM Trans. Math. Softw.*, 45(1). <https://doi.org/10.1145/3242094>.
- Amestoy, P. R., Duff, I. S., L'Excellent, J.-Y., & Koster, J. (2001). A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(1), 15–41. <https://doi.org/https://doi.org/10.1137/S0895479899358194>.
- Amestoy, P. R., Guermouche, A., L'Excellent, J.-Y., & Pralet, S. (2006). Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel Computing*, 32(2), 136–156. Parallel Matrix Algorithms and Applications (PMAA'04), <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.parco.2005.07.004>.
- Antonio, J. M. F. (2021). Simulación de propagación de ondas elásticas en medios con fracturas conectadas. [Tesis de Maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California]. <http://cicese.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1007/3542>.
- Bakulin, A., Grechka, V., & Tsvankin, I. (2000). Estimation of fracture parameters from reflection seismic data—Part I: HTI model due to a single fracture set. *Geophysics*, 65(6), 1788–1802. <https://doi.org/10.1190/1.1444863>.
- Barbosa, N. D., Rubino, J. G., Caspari, E., & Holliger, K. (2017). Extension of the classical linear slip model for fluid-saturated fractures: Accounting for fluid pressure diffusion effects. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 122(2), 1302–1323. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/2016JB013636>.
- Basu, U. & Chopra, A. K. (2004). Perfectly matched layers for transient elastodynamics of unbounded domains. *International journal for numerical methods in engineering*, 59(8), 1039–1074. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/nme.896>.
- Berenger, J.-P. (1996). Perfectly matched layer for the fdtd solution of wave-structure interaction problems. *IEEE Transactions on antennas and propagation*, 44(1), 110–117. <https://doi.org/10.1109/8.477535>.
- Bindel, D. S. & Govindjee, S. (2005). Elastic pmls for resonator anchor loss simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(6), 789–818. <https://doi.org/10.1002/nme.1394>.
- Bonnasse-Gahot, M., Calandra, H., Diaz, J., & Lanteri, S. (2017). Hybridizable discontinuous Galerkin method for the 2-D frequency-domain elastic wave equations. *Geophysical Journal International*, 213(1), 637–659. <https://doi.org/10.1093/gji/ggx533>.
- Bracewell, R. N. (1989). The fourier transform. *Scientific American*, 260(6), 86–95. <https://doi.org/10.1038/scientificamerican0689-86>.
- Brajanovski, M., Gurevich, B., & Schoenberg, M. (2005). A model for P-wave attenuation and dispersion in a porous medium permeated by aligned fractures. *Geophysical Journal International*, 163(1), 372–384. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2005.02722.x>.
- Brigham, E. (1988). *The Fast Fourier Transform and Its Applications*. Prentice-Hall Signal Processing Series: Advanced monographs. Prentice Hall, <https://books.google.com.mx/books?id=XfJQA AAAMAAJ>.

- Carcione, J. M., Santos, J. E., & Picotti, S. (2012). Fracture-induced anisotropic attenuation. *Rock mechanics and rock engineering*, 45(5), 929–942. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s00603-012-0237-y>.
- Chelidze, T. (1993). Fractal damage mechanics of geomaterials. *Terra Nova*, 5(5), 421–437. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1365-3121.1993.tb00280.x>.
- Chung, E. T., Efendiev, Y., Gibson, R. L., & Vasilyeva, M. (2016). A generalized multiscale finite element method for elastic wave propagation in fractured media. *GEM-International Journal on Geomathematics*, 7, 163–182. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s13137-016-0081-4>.
- Cochran, W. T., Cooley, J. W., Favin, D. L., Helms, H. D., Kaenel, R. A., Lang, W. W., Maling, G. C., Nelson, D. E., Rader, C. M., & Welch, P. D. (1967). What is the fast fourier transform? *Proceedings of the IEEE*, 55(10), 1664–1674. <https://doi.org/10.1109/PROC.1967.5957>.
- Cockburn, B. (1999). *Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems*. Springer, Berlin, Heidelberg, [https://doi.org/10.1007/978-3-662-03882-6\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03882-6_2).
- Cockburn, B., Karniadakis, G. E., & Shu, C. W. (2012). *Discontinuous Galerkin methods: theory, computation and applications*. Springer Science & Business Media, <https://j.1365-246X.2009.04151.x>.
- Crampin, S. & Peacock, S. (2005). A review of shear-wave splitting in the compliant crack-critical anisotropic earth. *Wave motion*, 41(1), 59–77. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.05.006>.
- Cui, X., Lines, L., Krebs, E. S., & Peng, S. (2018). *Seismic forward modeling of fractures and fractured medium inversion*. Springer, <https://link.springer.com/book/10.1007/978-981-10-3584-5>.
- De Basabe, J., Sen, M. K., & Wheeler, M. F. (2016). Elastic wave propagation in fractured media using the discontinuous galerkin method. *Geophysics*, 81(4), T163–T174. <https://doi.org/10.1190/geo2015-0602.1>.
- De Basabe, J. D. (2009). High-order finite element methods for seismic wave propagation. [Tesis de Doctorado, The University of Texas at Austin]. <https://repositories.lib.utexas.edu/items/c9ab8ccc-412d-49bb-956b-5ecd6a9075e2>.
- De Basabe, J. D. & Sen, M. K. (2010). Stability of the high-order finite elements for acoustic or elastic wave propagation with high-order time stepping. *Geophysical Journal International*, 181(1), 577–590. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2010.04536.x>.
- De Basabe, J. D., Sen, M. K., & Wheeler, M. F. (2008). The interior penalty discontinuous galerkin method for elastic wave propagation: grid dispersion. *Geophysical Journal International*, 175(1), 83–93. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2008.03915.x>.
- Dong, S. L. & Chen, J. B. (2023). Finite-difference modeling of 3d frequency-domain elastic wave equation using an affine mixed-grid method. *Geophysics*, 88(2), 45–63. <https://doi.org/https://doi.org/10.1190/geo2022-0074.1>.
- Donnelle, D. & Rust, B. (2005). The fast fourier transform for experimentalists. part i. concepts. *Computing in Science & Engineering*, 7(2), 80–88. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2005.42>.
- Duhamel, P. & Vetterli, M. (1990). Fast fourier transforms: a tutorial review and a state of the art. *Signal processing*, 19(4), 259–299. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0165-1684\(90\)90158-U](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0165-1684(90)90158-U).

- Feng, D., Ding, S., & Wang, X. (2019). An exact pml to truncate lattices with unstructured-mesh-based adaptive finite element method in frequency domain for ground penetrating radar simulation. *Journal of Applied Geophysics*, *170*, 103836. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2019.103836>.
- Gao, Y., Song, H., Zhang, J., & Yao, Z. (2017). Comparison of artificial absorbing boundaries for acoustic wave equation modelling. *Exploration Geophysics*, *48*(1), 76–93. <https://doi.org/https://doi.org/10.1071/EG15068>.
- Gavriliuva, U., Vasilyeva, M., & Chung, E. T. (2020a). Generalized multiscale finite element method for elastic wave propagation in the frequency domain. *Computation*, *8*(3). <https://doi.org/10.3390/computation8030063>.
- Gavriliuva, U., Vasilyeva, M., & Chung, E. T. (2020b). Generalized multiscale finite element method for elastic wave propagation in the frequency domain. *Computation*, *8*(3), 63. <https://doi.org/https://doi.org/10.3390/computation8030063>.
- Germán Rubino, J., Guarracino, L., Müller, T. M., & Holliger, K. (2013). Do seismic waves sense fracture connectivity? *Geophysical Research Letters*, *40*(4), 692–696. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/grl.50127>.
- Givoli, D. (2008). *Computational absorbing boundaries*. Springer, [https://doi.org/10.1007/978-3-540-77448-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-540-77448-8_6).
- Gomez, Q., Goument, B., & Ionescu, I. R. (2022). A lagrangian dg-method for wave propagation in a cracked solid with frictional contact interfaces. *Mathematics*, *10*, 871. <https://doi.org/10.3390/math10060871>.
- Grechka, V. & Kachanov, M. (2006). Effective elasticity of fractured rocks: A snapshot of the work in progress. *GEOPHYSICS*, *71*(6), W45–W58. <https://doi.org/10.1190/1.2360212>.
- Grenon, M. & Hadjigeorgiou, J. (2012). Applications of fracture system models (fsm) in mining and civil rock engineering design. *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, *26*(1), 55–73. <https://doi.org/https://doi.org/10.1080/17480930.2011.639190>.
- Guo, J., Rubino, J. G., Glubokovskikh, S., & Gurevich, B. (2017). Effects of fracture intersections on seismic dispersion: theoretical predictions versus numerical simulations. *Geophysical Prospecting*, *65*(5), 1264–1276. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/1365-2478.12474>.
- Gvozdic, B. D. & Djurdjevic, D. Z. (2017). Performance advantages of cpml over upml absorbing boundary conditions in fdtd algorithm. *Journal of Electrical Engineering*, *68*(1), 47–53. <https://doi.org/https://doi.org/10.1515/jee-2017-0006>.
- He, L. & Feng, B. (2022). *Fundamentals of Measurement and Signal Analysis*. Springer Singapore, <https://doi.org/10.1007/978-981-19-6549-4>.
- Helbig, K. & Thomsen, L. (2005). 75-plus years of anisotropy in exploration and reservoir seismics: A historical review of concepts and methods. *Geophysics*, *70*(6), 9–23. <https://doi.org/https://doi.org/10.1190/1.2122407>.
- Hsu, C. J. & Schoenberg, M. (1993). Elastic waves through a simulated fractured medium. *Geophysics*, *58*(7), 964–977. <https://doi.org/10.1190/1.1443487>.
- Hsu, H. (1970). *Fourier Analysis*, (2a ed.). Simon and Schuster, <https://books.google.com.mx/books?id=M1HvAAAAAAAJ>.

- Hu, F. Q., Hussaini, M. Y., & Rasetarinera, P. (1999). An analysis of the discontinuous galerkin method for wave propagation problems. *Journal of Computational Physics*, *151*(2), 921–946. <https://doi.org/https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6227>.
- Ikelle, L. T. & Amundsen, L. (2018). *Introduction to petroleum seismology*, (2a ed.). Society of Exploration Geophysicists, <https://library.seg.org/doi/book/10.1190/1.9781560803447>.
- Kubatko, E., Bunya, S., Dawson, C., Westerink, J., & Mirabito, C. (2009). A performance comparison of continuous and discontinuous finite element shallow water models. *Journal of Scientific Computing*, *40*, 315–339. <https://doi.org/10.1007/s10915-009-9268-2>.
- Li, Y., Brossier, R., & Métivier, L. (2019). 3d frequency-domain elastic wave modeling using spectral element method with a parallel direct linear solver. In *81st EAGE Conference and Exhibition 2019*, volume 2019, 1–5. European Association of Geoscientists & Engineers. <https://doi.org/https://doi.org/10.3997/2214-4609.201901534>.
- Li, Y., Brossier, R., & Métivier, L. (2020). 3D frequency-domain elastic wave modeling with the spectral element method using a massively parallel direct solver. *Geophysics*, *85*(2), 71–88. <https://doi.org/10.1190/geo2019-0172.1>.
- Li, Y., Métivier, L., Brossier, R., Han, B., & Virieux, J. (2015). 2d and 3d frequency-domain elastic wave modeling in complex media with a parallel iterative solver. *Geophysics*, *80*(3), T101–T118. <https://doi.org/https://doi.org/10.1190/geo2014-0480.1>.
- Liu, H., Sen, M. K., & Spikes, K. T. (2018). 3D simulation of seismic-wave propagation in fractured media using an integral method accommodating irregular geometries. *Geophysics*, *83*(1), WA121–WA136. <https://doi.org/10.1190/geo2017-0060.1>.
- Lubbe, R. & Lubbe, D. R. (2005). A field and laboratory investigation of the compliance of fractured rock. [Tesis de Maestría, University of Oxford]. <https://ora.ox.ac.uk/objects/uuid:699841b5-3f5f-4b04-8123-ec8912bdaf4a>.
- Luo, Z. & Bryant, S. (2014). Impacts of injection induced fractures propagation in co2 geological sequestration – is fracturing good or bad for co2 sequestration. *Energy Procedia*, *63*, 5394–5407. 12th International Conference on Greenhouse Gas Control Technologies, GHGT-12, <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.egypro.2014.11.570>.
- Marcinkovich, C. & Olsen, K. (2003). On the implementation of perfectly matched layers in a three-dimensional fourth-order velocity-stress finite difference scheme. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *108*(B5). <https://doi.org/https://doi.org/10.1029/2002JB002235>.
- Marfurt, K. J. (1984). Accuracy of finite-difference and finite-element modeling of the scalar and elastic wave equations. *Geophysics*, *49*(5), 533–549. <https://doi.org/https://doi.org/10.1190/1.1441689>.
- Matzen, R. (2011). An efficient finite element time-domain formulation for the elastic second-order wave equation: A non-split complex frequency shifted convolutional pml. *88*(10). <https://doi.org/10.1002/NME.3205>.
- Min, D.-J., Shin, C., Kwon, B.-D., & Chung, S. (2000). Improved frequency-domain elastic wave modeling using weighted-averaging difference operators. *Geophysics*, *65*(3), 884–895. <https://doi.org/https://doi.org/10.1190/1.1444785>.

- Nara, Y., Meredith, P. G., Yoneda, T., & Kaneko, K. (2011). Influence of macro-fractures and micro-fractures on permeability and elastic wave velocities in basalt at elevated pressure. *Tectonophysics*, 503(1-2), 52–59. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.tecto.2010.09.027>.
- Operto, S., Miniussi, A., Brossier, R., Combe, L., Métivier, L., Monteiller, V., Ribodetti, A., & Virieux, J. (2015). Efficient 3-D frequency-domain mono-parameter full-waveform inversion of ocean-bottom cable data: application to Valhall in the visco-acoustic vertical transverse isotropic approximation. *Geophysical Journal International*, 202(2), 1362–1391. <https://doi.org/10.1093/gji/ggv226>.
- Operto, S., Virieux, J., Amestoy, P., L'Excellent, J.-Y., Giraud, L., & Ali, H. B. H. (2007). 3d finite-difference frequency-domain modeling of visco-acoustic wave propagation using a massively parallel direct solver: A feasibility study. *Geophysics*, 72(5), 195–211. <https://doi.org/10.1190/1.2759835>.
- Padua, D. (2011). *Encyclopedia of parallel computing*. Springer Science & Business Media, <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09766-4>.
- Peral Altamirano, C. E. (2021). Análisis de la teoría de medios equivalentes de hudson para medios fracturados y anisótropos con simetría vti. [Tesis de maestría, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla]. <https://repositorioinstitucional.buap.mx/items/965a4053-7809-4cf6-b142-4e3ac08a1d90>.
- Pled, F. & Desceliers, C. (2022). Review and recent developments on the perfectly matched layer (pml) method for the numerical modeling and simulation of elastic wave propagation in unbounded domains. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 29(1), 471–518. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s11831-021-09581-y>.
- Pollard, D. & Fletcher, R. (2005). *Fundamentals of Structural Geology*. Cambridge University Press, <https://books.google.com.mx/books?id=9atcPwpwgJ0C>.
- Pratt, R. G. (1990). Frequency-domain elastic wave modeling by finite differences: A tool for crosshole seismic imaging. *Geophysics*, 55(5), 626–632. <https://doi.org/https://doi.org/10.1190/1.1442874>.
- Queen, J. & Rizer, W. (1990). An integrated study of seismic anisotropy and the natural fracture system at the conoco borehole test facility, kay county, oklahoma. *Journal of Geophysical Research*, 95, 11255–11273. <https://doi.org/10.1029/JB095IB07P11255>.
- Raju, M. (2009). Parallel computation of finite element navier-stokes codes using mumps solver. *International Journal of Computer Science Issues*, 4. <https://doi.org/https://doi.org/10.48550/arXiv.0910.1845>.
- Rioyos-Romero, R., De Basabe, J. D., Solorza-Calderón, S., González-Escobar, M., & Gross, M. (2022). Comparison of wave-propagation simulations in fractured domains using discrete fractures and equivalent media. *Geophysical Journal International*, 230(1), 427–447. <https://doi.org/https://doi.org/10.1093/gji/ggac014>.
- Riviere, B. & Wheeler, M. F. (2003). Discontinuous finite element methods for acoustic and elastic wave problems. *Contemporary Mathematics*, 329(271-282), 4–6. <https://doi.org/10.1090/conm/329/05862>.
- Romero, R. R. (2017). Simulación numérica de los efectos de las fracturas en los datos sísmicos. [Tesis de Maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California]. <http://cicese.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1007/1398>.

- Rubino, J. G., Castromán, G. A., Müller, T. M., Monachesi, L. B., Zyserman, F. I., & Holliger, K. (2015). Including poroelastic effects in the linear slip theory. *Geophysics*, *80*(2), A51–A56. <https://doi.org/https://doi.org/10.1190/geo2014-0409.1>.
- Saenger, E. H., Krüger, O. S., & Shapiro, S. A. (2004). Effective elastic properties of randomly fractured soils: 3d numerical experiments. *Geophysical Prospecting*, *52*(3), 183–195. <https://doi.org/http://doi.org/10.1111/j.1365-2478.2004.00407.x>.
- Schoenberg, M. (1980). Elastic wave behavior across linear slip interfaces. *The Journal of the Acoustical Society of America*, *68*(5), 1516–1521. <https://doi.org/10.1121/1.385077>.
- Schoenberg, M. & Douma, J. (1988). Elastic wave propagation in media with parallel fractures and aligned cracks1. *Geophysical prospecting*, *36*(6), 571–590. <https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1988.tb02181.x>.
- Shao, S. & Pyrak Nolte, L. (2016). Wave propagation in isotropic media with two orthogonal fracture sets. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, *49*, 4033–4048. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s00603-016-1084-z>.
- Sheriff, R. E. & Geldart, L. P. (1995). *Exploration seismology*, (2a ed.). Cambridge University Press, <https://doi.org/10.1017/CB09781139168359>.
- Shu, C. W. (2014). *Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Problems: Survey and Recent Developments*. Springer International Publishing, [https://doi.org/10.1007/978-3-319-01818-8\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-01818-8_2).
- Shuai, D., Wei, J., Di, B., Guo, J., Li, D., Gong, F., & Stovas, A. (2019). Experimental study of crack density influence on the accuracy of effective medium theory. *Geophysical Journal International*, *220*(1), 352–369. <https://doi.org/10.1093/gji/ggz452>.
- Smith, J. O. (2008). *Mathematics of the discrete Fourier transform (DFT): with audio applications*, (2a ed.). Julius Smith, [https://books.google.com.mx/books/about/Mathematics\\_of\\_the\\_Discrete\\_Fourier\\_Trans.html?id=fT0xS9huzHoC&redir\\_esc=y](https://books.google.com.mx/books/about/Mathematics_of_the_Discrete_Fourier_Trans.html?id=fT0xS9huzHoC&redir_esc=y).
- Sujatha, C. (2023). *Fundamentals of Signal Analysis*. Springer, <https://doi.org/10.1007/978>.
- Tarback, E. J., Lutgens, F. K., Tasa, D., & Tasa, D. (2005). *Earth: an introduction to physical geology*, (8va ed.). Pearson Prentice Hall, [https://books.google.com.mx/books/about/Earth.html?id=Dt6cQQAACAAJ&redir\\_esc=y](https://books.google.com.mx/books/about/Earth.html?id=Dt6cQQAACAAJ&redir_esc=y).
- Tsvankin, I., Gaiser, J., Grechka, V., Van Der Baan, M., & Thomsen, L. (2010). Seismic anisotropy in exploration and reservoir characterization: An overview. *Geophysics*, *75*(5), 15–29. <https://doi.org/https://doi.org/10.1190/1.3481775>.
- Tsvankin, I. & Grechka, V. (2011). *Seismology of azimuthally anisotropic media and seismic fracture characterization*. Society of Exploration Geophysicists, <https://library.seg.org/doi/10.1190/1.9781560802839>.
- Vamaraju, J., Sen, M. K., De Basabe, J., & Wheeler, M. (2020). A hybrid Galerkin finite element method for seismic wave propagation in fractured media. *Geophysical Journal International*, *221*(2), 857–878. <https://doi.org/10.1093/gji/ggaa037>.
- Vlastos, S., Liu, E., Main, I. G., & Li, X.-Y. (2003). Numerical simulation of wave propagation in media with discrete distributions of fractures: effects of fracture sizes and spatial distributions. *Geophysical Journal International*, *152*(3), 649–668. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.2003.01876.x>.



- Wang, H. (2019). Hydraulic fracture propagation in naturally fractured reservoirs: Complex fracture or fracture networks. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, *68*, 102911. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jngse.2019.102911>.
- Wheeler, M. F. (1978). An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, *15*(1), 152–161. <https://doi.org/https://doi.org/10.1137/0715010>.
- Wu, C., Harris, J., Nihei, K., & Nakagawa, S. (2005). Two-dimensional finite-difference seismic modeling of an open fluid-filled fracture: comparison of thin-layer and linear-slip models. *Geophysics*, *70*, T57–T62. <https://doi.org/10.1190/1.1988187>.
- Wu, K. & Olson, J. (2014). Simultaneous multifracture treatments: fully coupled fluid flow and fracture mechanics for horizontal wells. *Spe Journal*, *20*, 337–346. <https://doi.org/10.2118/167626-pa>.
- Zhang, J. (2005). Elastic wave modeling in fractured media with an explicit approach. *Geophysics*, *70*(5), T75–T85. <https://doi.org/10.1190/1.2073886>.
- Zhang, J. & Gao, H. (2009). Elastic wave modelling in 3-D fractured media: an explicit approach. *Geophysical Journal International*, *177*(3), 1233–1241. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2009.04151.x>.
- Zhao, Z., Chen, J., Liu, X., & Chen, B. (2019). Frequency-domain elastic wavefield simulation with hybrid absorbing boundary conditions. *Journal of Geophysics and Engineering*, *16*(4), 690–706. <https://doi.org/10.1093/jge/gxz038>.
- Zhuang, M., Zhan, Q., Zhou, J., Guo, Z., Liu, N., & Liu, Q. H. (2020). A simple implementation of pml for second-order elastic wave equations. *246*. <https://doi.org/10.1016/J.CPC.2019.106867>.
- Zienkiewicz, O., Taylor, R., Sherwin, S., & Peiro, J. (2003). On discontinuous galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, *58*(8), 1119–1148. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/nme.884>.