

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el CONAHCYT (Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE © 2024, Todos los Derechos Reservados, CICESE

# Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



## Maestría en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control

---

### Estabilización robusta en tiempo prescrito de sistemas en forma canónica por medio de integración implícita

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Miguel Alfonso Arámbula Barba**

Ensenada, Baja California, México

2024

Tesis defendida por

**Miguel Alfonso Arámbula Barba**

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Yury Orlov

Codirector de tesis

Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos

Codirector de tesis

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos

Dr. Luis Alejandro Márquez Martínez

Dr. Serguei Miridonov



Dra. María del Carmen Maya Sánchez

Coordinadora del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Ana Denise Re Araujo

Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Miguel Alfonso Arámbula Barba como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

### **Estabilización robusta en tiempo prescrito de sistemas en forma canónica por medio de integración implícita**

Resumen aprobado por:

Dr. Yury Orlov

Codirector de tesis

Dr. Luis Tupak Aguilar Bustos

Codirector de tesis

Este trabajo aborda la estabilización robusta en tiempo prescrito de sistemas dinámicos lineales en forma canónica, aplicando un enfoque de integración implícita. Este enfoque permite preservar las propiedades esenciales de los controladores en tiempo continuo bajo perturbaciones y ruidos de medición, utilizando esquemas de discretización implícita como el de Euler implícito. La metodología propuesta garantiza la convergencia de los estados del sistema al origen en un tiempo definido de antemano, independientemente de las condiciones iniciales y perturbaciones externas. El principal desafío abordado en la tesis es el diseño de controladores que mantengan sus propiedades de estabilización robusta en un marco de tiempo discretizado. La investigación demuestra que es posible alcanzar una estabilización uniforme en tiempo finito sin la necesidad de aumentar indefinidamente las ganancias del controlador, evitando así problemas de implementación relacionados con ganancias infinitas al acercarse el tiempo prescrito. Además, el estudio incluye análisis numéricos que ilustran la efectividad del enfoque propuesto, mostrando cómo las técnicas de discretización implícita pueden implementarse efectivamente para mantener la robustez y precisión del control en presencia de ruidos y perturbaciones. Se destaca la importancia de seleccionar adecuadamente las ganancias temporales y la estructura del controlador para el desempeño y la factibilidad práctica del sistema controlado en tiempo prescrito.

**Palabras clave: estabilización, tiempo prescrito, integración implícita**

Abstract of the thesis presented by Miguel Alfonso Arámbula Barba as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in with orientation in Instrumentation and Control.

**Robust stabilization of systems in prescribed time in canonical form through implicit integration**

Abstract approved by:

Dr. Yury Orlov  
Thesis Co-Director

PhD Luis Tupak Aguilar Bustos  
Thesis Co-Director

This work addresses the robust prescribed-time stabilization of linear dynamical systems in canonical form, applying an implicit integration approach. This approach allows preserving the essential properties of continuous-time controllers under disturbances and measurement noise, using an implicit Euler discretization scheme. The proposed methodology guarantees the convergence of the system states to the origin in a prescribed time, regardless of the initial conditions and external perturbations. The main challenge addressed in the thesis is the design of controllers that maintain their robust stabilization properties in a discretized time frame. The research demonstrates that it is possible to achieve stabilization in finite time without the need to increase controller gains indefinitely, thus avoiding implementation problems related to infinite gains as the prescribed time approaches. Additionally, the study includes numerical analyses that illustrate the effectiveness of the proposed approach, showing how implicit discretization techniques can be effectively implemented to maintain control robustness and accuracy in the presence of noise and disturbances. The importance of an appropriate selection of the temporal gains and controller structure to the performance and practical feasibility of the controlled system in prescribed time is highlighted.

**Keywords: stabilization, prescribed time, implicit integration**

# Dedicatoria

**A mi hija,  
a mi esposa  
y a mi madre.**

## Agradecimientos

Un especial agradecimiento al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencia y Tecnología (CONAHCYT), y al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE), cuyo soporte financiero fue vital para mi formación y desarrollo de esta investigación.

En primer lugar, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a mis directores de tesis Dr. Yuri Orlov y Dr. Luis Tupak Aguilar, quienes no solo fueron los que me ayudaron con su experiencia, sino que también fueron un guía crucial en este viaje académico. Su paciencia, conocimiento y dedicación fueron fundamentales para la realización de este trabajo. Gracias, también, por su aliento en los momentos más desafiantes.

Mi gratitud se extiende a los doctores Joaquín Álvarez Gallegos, Luis Alejandro Márquez Martínez y Serguei Miridonov, miembros del comité, cuyos comentarios y sugerencias enriquecieron significativamente este trabajo. A la Dra. María del Carmen Maya Sánchez, gracias por sus valiosas recomendaciones.

Quisiera expresar mi especial agradecimiento al M.C. Ricardo Núñez y al Dr. Ricardo Cuesta, quienes con mucha paciencia me explicaron temas que en momentos no comprendía completamente. Su dedicación y apoyo fueron esenciales para mi desarrollo y comprensión de los conceptos clave.

Finalmente a mi familia: gracias por su amor incondicional, apoyo constante y por creer en mí en todo momento. Este logro también es suyo.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	viii
Lista de tablas .....	ix
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1. Antecedentes .....	2
1.2. Justificación .....	4
1.3. Objetivos .....	4
1.3.1. Objetivo general .....	5
1.3.2. Objetivos específicos .....	5
1.3.3. Organización del trabajo de tesis .....	5
<b>Capítulo 2. Metodología</b>	
2.1. Preliminares .....	7
2.1.1. Convergencia en Tiempo Finito .....	7
2.1.2. Convergencia en Tiempo Fijo .....	9
2.1.3. Convergencia en Tiempo Prescrito .....	10
2.2. Métodos de integración .....	12
2.2.1. Método de Euler explícito .....	14
2.2.2. Método de Euler implícito .....	16
<b>Capítulo 3. Métodos de control en tiempo prescrito en tiempo continuo</b>	
3.1. Descripción en el espacio de estados de sistemas en tiempo continuo .....	19
3.2. Control en tiempo prescrito .....	22
3.2.1. Estabilidad uniforme .....	22
3.2.2. Alta ganancia variable en el tiempo .....	24
3.2.3. Definiciones y propiedades .....	25
3.3. Sistemas lineales de control en tiempo prescrito .....	26
3.3.1. Estabilización en tiempo prescrito por retroalimentación del estado .....	26
3.3.2. Diseño de observador .....	29
3.3.3. Estabilización por retroalimentación de la salida .....	30
3.4. Métodos de control por modos deslizantes en tiempo prescrito .....	31
3.4.1. Algoritmo twisting .....	34
3.4.2. Algoritmo Super-Twisting .....	35
3.4.3. Diseño de retroalimentación de estado para sistemas SISO de segundo orden .....	36
3.4.4. Diseño del observador para sistemas de segundo orden .....	40
3.4.5. Diseño de retroalimentación de la salida .....	43



**Capítulo 4. Discretización de algoritmos de estabilización en tiempo prescrito**

4.1.	Algoritmo Euler explícito para controlador por modos deslizantes . . . . .	45
4.2.	Discretización de sistemas lineales en forma canónica . . . . .	47
4.2.1.	Estabilización por retroalimentación del estado . . . . .	47
4.2.2.	Observador en tiempo discreto . . . . .	49
4.2.3.	Estabilización por retroalimentación de la salida . . . . .	52

**Capítulo 5. Resultados**

5.1.	Sistema lineal de segundo orden y su discretización por método de Euler implícito .	54
5.1.1.	Retroalimentación del estado . . . . .	54
5.1.2.	Retroalimentación de la salida . . . . .	56
5.2.	Controlador conmutado por modos deslizantes para sistemas de segundo orden . .	61
5.2.1.	Modelo dinámico del péndulo simple . . . . .	61
5.2.2.	Retroalimentación del estado para un doble integrador . . . . .	63
5.2.3.	Retroalimentación de la salida para un doble integrador . . . . .	66
5.2.4.	Comparación de resultados . . . . .	72

**Capítulo 6. Conclusiones**

6.1.	Problemas abiertos . . . . .	76
------	------------------------------	----

<b>Literatura citada</b>	. . . . .	77
--------------------------	-----------	----

<b>Anexos</b>	. . . . .	80
---------------	-----------	----

# Lista de figuras

Figura	Página
1. Trayectorias con convergencia en tiempo finito. . . . .	8
2. Trayectorias con convergencia en tiempo fijo. . . . .	10
3. Trayectorias con convergencia en tiempo prescrito. . . . .	11
4. Las relaciones entre sistemas asintóticos, exponenciales, TF, TFj, TPd y el control TP (Yongduan Song, et al., 2022). . . . .	12
5. Ejemplo de conjuntos convexo y no convexo. . . . .	14
6. Interpretación geométrica del método de Euler. . . . .	15
7. Modos deslizantes en la superficie $s_i(x)$ . . . . .	33
8. Evolución de los estados $x_1$ y $x_2$ del sistema. . . . .	55
9. Evolución de los estados $x_1$ , $x_2$ , $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ del sistema con perturbaciones pero sin ruido. . . . .	59
10. Evolución de los estados $x_1$ , $x_2$ , $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ del sistema con perturbaciones y ruido. . . . .	59
11. Evolución de los estados $x_1$ , $x_2$ , $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ del sistema sin perturbaciones ni ruido. . . . .	60
12. Diagrama de un péndulo simple. . . . .	61
13. Evolución de los estados $x_1$ , $x_2$ y la señal de control $u$ en presencia de perturbaciones. . . . .	64
14. Evolución de los estados $x_1$ , $x_2$ y la señal de control $u$ en presencia de perturbaciones. . . . .	65
15. Evolución de los estados $x_1$ , $x_2$ , $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ del sistema (70) y los errores de estimación $e_1$ y $e_2$ . . . . .	67
16. Evolución de los términos de inyección del observador $G_1$ , $G_2$ y la señal de control $u$ en presencia de perturbaciones. . . . .	69
17. Evolución de los estados $x_1$ , $x_2$ , $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ del sistema (78) y los errores de estimación $e_1$ y $e_2$ . . . . .	70
18. Evolución de los términos de inyección del observador $G_1$ , $G_2$ y la señal de control $u$ en presencia de perturbaciones. . . . .	70

# Lista de tablas

Tabla	Página
1. Parámetros y variables utilizados en el modelo del péndulo . . . . .	65

## **Acrónimos**

**TP** Tiempo Prescrito

**TF** Tiempo Finito

**TFj** Tiempo Fijo

**TPd** Tiempo Predefinido

**MIMO** Multiple Input Multiple Output

**SISO** Single Input Single Output

**UETP** Uniformemente Estable en Tiempo Prescrito

## Notación

La notación estándar utilizada a lo largo de este documento es la siguiente.  $\mathbb{R}$  es el conjunto de números reales,  $\mathbb{R}_{\geq x} = \{y \in \mathbb{R} : y \geq x\}$ . Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$ , el símbolo  $|x|$  representa el valor absoluto de un escalar  $x$ , y para cualquier  $x \in \mathbb{R}^n$ , el símbolo  $\|x\|$  se utiliza para la norma euclidiana del vector  $x$ . Para  $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , el símbolo  $\|A\|$  se usa para la norma inducida correspondiente.

La expresión  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  significa que la función  $f$  pertenece al conjunto de funciones continuas  $\mathcal{C}$  definidas en el dominio  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  con valores en  $\mathbb{R}^n$ .

$$[\cdot]^p = |\cdot|^p \text{sign}(\cdot) \quad \text{para } p \in \mathbb{R};$$

particularmente,  $[\cdot]^0 = \text{sign}(\cdot)$ .

$$\blacksquare \text{ sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

■  $x^T$ : Transpuesta del vector  $x$ .

■  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ : Vector fila con componentes  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

■  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ : Vector columna con componentes  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

■  $i = \{1, 2, \dots, n\}$ : Secuencia de  $n$  elementos.

■  $\|x\|$ : Norma del vector  $x$ .

■  $A^T$ : Transpuesta de la matriz  $A$ .

■  $A^{-1}$ : Inversa de  $A$ .

■  $M > 0, M \geq 0$ : La matriz simétrica o hermítica  $M$  es definida positiva o semidefinida positiva, respectivamente.

■  $\dot{x}, \ddot{x}$ : Primera y segunda derivadas temporales del vector variante en tiempo  $x$ .

- $t$ : Tiempo.
- $\mathbb{R}_+$ : Conjunto de números reales no negativos.
- $\mathbb{Z}$ : Conjunto de números enteros.
- $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{Z} \cap \mathbb{R}_+$ : Conjunto de números enteros no negativos.
- $\|\cdot\|_\infty$ : Norma suprema.
- $\mathcal{L}_\infty^m$ : Conjunto de funciones medibles de Lebesgue esencialmente acotadas.
- $\mathcal{L}_\infty$ : Conjunto de funciones esencialmente acotadas.
- $\mathcal{K}$ : Clase de funciones continuas  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  con  $\alpha(0) = 0$  y estrictamente crecientes.
- $\mathcal{K}_\infty$ : Clase de funciones continuas  $\alpha : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  en  $\mathcal{K}$  y que tienden a infinito.
- $I_n$ : Matriz identidad de dimensión  $n \times n$ .
- $\text{diag}\{g\}$ : Representa una matriz diagonal de dimensión  $n \times n$  con un vector  $g \in \mathbb{R}^n$  en la diagonal principal.
- $\lambda_{\min}(P)$ : Denota el valor propio mínimo de la matriz  $P$ .
- $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .
- $e$ : Denota  $e = \exp(1)$ .

# Capítulo 1. Introducción

---

En el campo del control automático, la estabilización de sistemas en un tiempo prescrito ha emergido como una técnica prometedora para garantizar la convergencia de los estados de un sistema a un estado deseado dentro de un marco de tiempo específicamente definido, independientemente de las condiciones iniciales del sistema (Song et al., 2023). Las técnicas existentes para implementar control en tiempo prescrito se han desarrollado en un marco de tiempo continuo, abarcando tanto métodos lineales como no lineales. Estas metodologías, aunque efectivas en teoría y bajo ciertas condiciones ideales, enfrentan desafíos significativos en su aplicación práctica, especialmente cuando se trata de sistemas en tiempo real donde los modelos continuos no capturan adecuadamente la naturaleza discreta de la implementación en sistemas computacionales y embebidos.

Los enfoques en tiempo continuo, especialmente aquellos que utilizan altas ganancias dinámicas para asegurar la estabilidad y rapidez en la convergencia, pueden enfrentar problemas de indeterminación y sensibilidad ante perturbaciones y ruidos externos. Esto se debe a la necesidad de implementar ganancias infinitas a medida que el tiempo se acerca al instante prescrito de estabilización. Esta situación puede conducir a errores numéricos significativos y comportamientos inestables, debido a las limitaciones de los actuadores y de los dispositivos de medición y control.

Para abordar estas dificultades, la discretización de los controladores diseñados en tiempo continuo se presenta como una estrategia viable. La discretización transforma los modelos y controladores de tiempo continuo en sus equivalentes de tiempo discreto, lo que permite una implementación más práctica en sistemas digitales. Sin embargo, la elección del método de discretización es crucial, ya que los métodos explícitos tradicionales pueden no ser adecuados debido a problemas de estabilidad y sensibilidad a la selección del paso de tiempo.

El desarrollo de controladores discretos que utilizan integración implícita para la estabilización en tiempo prescrito no solo extiende la aplicabilidad de esta técnica a sistemas digitales y computarizados, sino que también abre nuevas vías para el diseño de sistemas de control preservando la naturaleza de estabilidad desarrollados para sistemas continuos. Esta aproximación permite superar limitaciones clave de los modelos en tiempo continuo y representa un paso crucial hacia la implementación práctica de estrategias de control avanzadas en industrias donde la precisión del tiempo y la robustez son de suma importancia.

En este contexto, la integración implícita surge como un método alternativo para la discretización de controladores diseñados en tiempo continuo (Efimov & Orlov, 2023b). A diferencia de los métodos explícitos, que pueden sufrir de restricciones severas en la estabilidad y el rendimiento debido a la

elección del paso de tiempo, los métodos implícitos ofrecen ventajas inherentes en términos de estabilidad numérica frente a perturbaciones (Efimov & Orlov, 2023a). La aplicación de esquemas de integración implícita, como el método de Euler implícito, permite que las ganancias dinámicas altas se manejen de manera más efectiva, mitigando los problemas asociados con las aproximaciones y la implementación de controladores con altas ganancias.

En los sistemas de control en tiempo prescrito, uno de los desafíos más significativos radica en la implementación práctica de los controladores, en entornos donde las altas ganancias son necesarias para garantizar la estabilidad en un tiempo prescrito. Sin embargo, estos enfoques que suelen basarse en métodos de discretización explícita, pueden generar problemas de estabilidad y sensibilidad, afectando la robustez del sistema frente a perturbaciones y ruidos de medición. En particular, a medida que el sistema se aproxima al tiempo prescrito, las ganancias del controlador tienden a aumentar muy rápido, lo que puede provocar comportamientos inestables.

Para resolver estas limitaciones, en esta investigación se propone el uso de métodos de integración implícita, como el método de Euler implícito, que permiten manejar de manera efectiva las altas ganancias sin comprometer la estabilidad del sistema. Estos métodos no solo evitan los problemas asociados con la implementación de altas ganancias, sino que también garantizan que el sistema se estabilice en el tiempo prescrito, independientemente de las condiciones iniciales y las perturbaciones externas.

Por lo tanto, esta investigación se centra en la formulación y validación de un marco de trabajo para el diseño e implementación de controladores discretos usando integración implícita, con el objetivo de proporcionar soluciones efectivas y prácticas a los retos que enfrenta la estabilización robusta en tiempo prescrito.

## **1.1. Antecedentes**

La estabilización en tiempo prescrito busca llevar las trayectorias del sistema en lazo cerrado al origen en un instante a priori dado  $T$ , independientemente del estado inicial y las perturbaciones acopladas. Tal diseño fue inicialmente reformulado a partir de la estabilización por retroalimentación lineal, utilizando una escala singular tiempo-espacio (Song et al., 2017a). Aunque asegura la estabilización en tiempo prescrito para condiciones iniciales arbitrarias, la retroalimentación de estado resultante (Song et al., 2017a), el observador (Holloway & Krstic, 2019a) y la retroalimentación de salida (Holloway & Krstic,



2019b) sufrieron, sin embargo, de ganancias altas variables en el tiempo, escapando al infinito a medida que  $t \rightarrow T$ .

Para prevenir un problema de implementación que surge en la práctica, se propuso desactivar las ganancias variables en el tiempo que crecen infinitamente poco antes del instante prescrito  $T$ , lo cual podría hacerse sacrificando la precisión del lazo cerrado. Para una exploración más profunda de la estabilización en tiempo prescrito y sus desarrollos recientes, se recomienda consultar la revisión del estado del arte proporcionada en (Song et al., 2023), que involucra diseño de control adaptativo y generalización a sistemas multiagente.

Con el mismo propósito de prevenir el problema de implementación, se dedujeron algoritmos de retroalimentación alternativos no Lipschitz (Tran & Yucelen, 2020), (Chitour et al., 2020), (Aldana-López et al., 2021), (Aldana-López et al., 2023), (Gómez-Gutiérrez, 2020) reformulando sus contrapartes de estabilización en tiempo finito y fijo basadas en transformaciones de tiempo y estado adecuadas. Estos algoritmos trataron con ganancias finitas (en lugar de no acotadas) asegurando un límite superior prescrito en la función de tiempo de asentamiento (en lugar de tiempo de convergencia prescrito).

Hasta ahora, el problema de implementación mencionado anteriormente sigue siendo un desafío en presencia de ruido de medición, que se amplifica significativamente por la ganancia variable en el tiempo que crece infinitamente enfrentando así una falta de robustez en el lazo cerrado (Aldana-López et al., 2023), (Orlov et al., 2024). La robustez del método de retroalimentación por modos deslizantes no se pierde en la discretización implícita de Euler (Acary et al., 2011), (Brogliato & Polyakov, 2021) esto ha sido extendido con éxito hacia el diseño de diferenciadores/controladores que convergen extremadamente rápido (Efimov et al., 2022), (Efimov et al., 2023).

Tomando como referencia las publicaciones anteriormente mencionadas, la discretización por medio de Euler implícito se desarrolla aún más para el diseño de retroalimentación de salida en tiempo prescrito. La implementación conserva las principales características de la convergencia en tiempo prescrito del lazo cerrado, independientemente de las condiciones iniciales y las perturbaciones acopladas. Además, asegura la respuesta del estado en presencia de ruido de medición y evita el problema de implementación de ganancia infinita, logrando así que el sistema en lazo cerrado logre el objetivo de estabilización (Efimov & Orlov, 2023a). Los resultados teóricos están respaldados por experimentos numéricos, que ilustran la importancia de la discretización propuesta.

## 1.2. Justificación

Tradicionalmente, los controladores en tiempo prescrito se han desarrollado en un contexto de tiempo continuo. Sin embargo, estas estrategias enfrentan limitaciones significativas cuando se implementan en sistemas digitales, donde la naturaleza discreta de la implementación puede introducir errores y desafíos adicionales (Anh Tuan Vo & Kang, 2023).

La integración implícita ofrece una solución a los problemas de implementación digital de controladores diseñados en tiempo continuo. Estos métodos pueden manejar efectivamente las altas ganancias y las dinámicas rápidas requeridas en la estabilización en tiempo prescrito sin sufrir de los problemas típicos asociados con la saturación de actuadores y la precisión limitada de los dispositivos de medición y control.

*La contribución de esta tesis* se centra en el desarrollo y validación de estrategias de control en tiempo prescrito utilizando métodos de integración implícita para sistemas dinámicos. Al hacerlo, se aborda una brecha significativa en la literatura y se proporciona una metodología más robusta y eficiente para la implementación práctica de controladores en sistemas digitales y computarizados.

La aplicación de la integración implícita en el diseño de controladores en tiempo prescrito mejora significativamente el desempeño de los sistemas de control digitales, mitigando los efectos adversos de las altas ganancias dinámicas y el ruido de medición, comparado con los métodos de discretización explícita tradicionales.

Esto se basa en la suposición de que los métodos de integración implícita, al ser más robustos a las perturbaciones y menos sensibles a los pasos de tiempo en la discretización, permitirán una implementación más fiable y eficaz de controladores en tiempo prescrito en entornos digitales y computarizados.

## 1.3. Objetivos

Este estudio se centra en la estabilización de sistemas dinámicos en un tiempo prescrito técnicas de integración numérica. Se busca no solo entender los principios subyacentes de la estabilización en tiempo prescrito, sino también demostrar la aplicabilidad y eficacia de estos métodos en sistemas reales y simulados afectados por perturbaciones externas. A continuación, se especifican tanto el objetivo general que encamina el estudio como los objetivos específicos que detallan los pasos y metodologías que se seguirán para alcanzar las metas establecidas.

### **1.3.1. Objetivo general**

Examinar la metodología de estabilización en tiempo prescrito y su implementación en integradores de segundo y tercer orden afectados por perturbaciones externas y desarrollar métodos numéricos adaptados para estos controladores con una ganancia elevada durante el transitorio crítico, priorizando la convergencia más rápida posible y haciendo hincapié en métodos de integración implícitos para preservar las propiedades de los controladores en tiempo prescrito.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

- Analizar sistemas de lazo cerrado con controladores lineales con ganancias variables en el tiempo y controladores de modos deslizantes para lograr el objetivo de estabilización robusta en tiempo prescrito.
- Aplicar métodos numéricos implícitos para las soluciones del sistema y el controlador, ampliando así la perspectiva de análisis y evaluación de la estabilización en tiempo prescrito.

### **1.3.3. Organización del trabajo de tesis**

En este capítulo se han expuesto las motivaciones y objetivos del presente trabajo de tesis; asimismo, se han mencionado algunos antecedentes históricos que respaldan el desarrollo presentado.

En el capítulo 2, se presentan los antecedentes teóricos sobre la convergencia en tiempo finito, fijo y prescrito, así como los métodos de integración relevantes, como el método de Euler explícito e implícito, que son fundamentales para el desarrollo de controladores discretizados.

En el capítulo 3, se detallan los métodos de control en tiempo continuo, incluyendo controladores lineales y no lineales, con énfasis en la estabilidad uniforme en tiempo prescrito y la utilización de ganancias variables en el tiempo.

En el capítulo 4, se abordan los algoritmos de estabilización en tiempo prescrito discretizados, presentando el método de Euler explícito para controladores en modos deslizantes y la discretización de sistemas

lineales en forma canónica. Se incluye el diseño de controladores y observadores en tiempo discreto.

En el capítulo 5, se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas, corroborando la efectividad de los controladores diseñados y su robustez frente a perturbaciones y ruido de medición.

En el capítulo 6, se realiza una discusión detallada sobre los resultados obtenidos, analizando la eficiencia y practicidad de los métodos propuestos, así como las posibles limitaciones y áreas de mejora futura.

Finalmente, en el capítulo 7, se presentan las conclusiones del trabajo, destacando las contribuciones realizadas y sugiriendo posibles direcciones para investigaciones futuras en el campo de la estabilización robusta en tiempo prescrito de sistemas dinámicos.

## Capítulo 2. Metodología

---

### 2.1. Preliminares

La comprensión profunda de las tasas de convergencia en sistemas dinámicos es esencial no solo para el diseño efectivo de sistemas de control, sino también para garantizar la estabilidad en diversas aplicaciones prácticas. Las diversas categorías de convergencia, tales como asintótica, exponencial, en TF, en TFj, en TP y en TPd, tienen aplicaciones cruciales en sectores industriales y de investigación, cada una adaptada a requerimientos específicos de tiempo y precisión.

El control TP, se destaca por garantizar la estabilidad del sistema dentro de un tiempo de asentamiento dado por el usuario, independientemente de las condiciones iniciales. Esta característica es particularmente valiosa en aplicaciones donde el tiempo de respuesta es crítico, como en la guía de misiles, sistemas de frenado de emergencia en vehículos, y maniobras de evasión en sistemas robóticos (Song et al., 2023).

A diferencia del control TF y TFj, donde el tiempo de asentamiento puede depender significativamente de las condiciones iniciales o estar limitado por un límite superior, el control TP permite una configuración más precisa y flexible del tiempo de asentamiento.

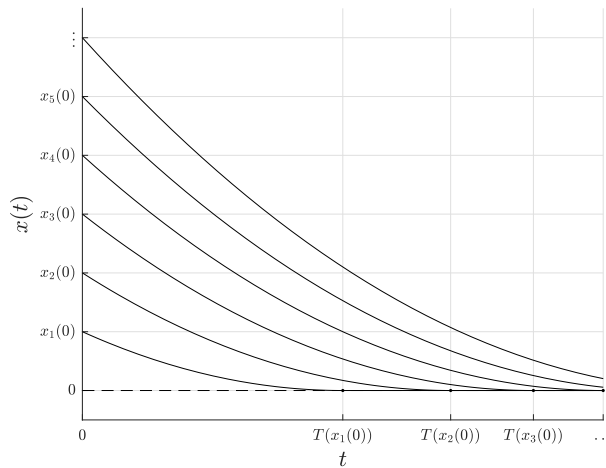
#### 2.1.1. Convergencia en Tiempo Finito

El control en tiempo finito es un área del control automático que estudia y diseña controladores que aseguren que el estado de un sistema alcance el equilibrio o una configuración deseada en un tiempo finito. A diferencia del control asintótico, que solo asegura que el sistema se estabilizará en el infinito, el control en tiempo finito garantiza que el sistema alcanzará su objetivo en un intervalo de tiempo finito, dependiendo de las condiciones iniciales del sistema. Esta capacidad es útil en aplicaciones donde la respuesta rápida y la precisión son críticas. Algunas de las aplicaciones para este tipo de controladores podrían ser el control de seguimiento de posición de aeronaves o de naves espaciales (Du et al., 2011), o para el control de un cadricóptero (Xu, 2018). En estas aplicaciones, la estabilidad en tiempo finito es fundamental porque permite que el sistema responda y se ajuste rápidamente a condiciones cambiantes o perturbaciones. Por ejemplo, en el control de seguimiento de posición de una aeronave o de una nave espacial, es crucial que el sistema alcance la trayectoria deseada en un tiempo determinado para asegurar

la operación o acción de movimiento. De manera similar, en el control de un cuadricóptero (dron), la capacidad de estabilizarse rápidamente frente a perturbaciones del entorno o cambios en las dinámicas del vuelo es esencial para mantener un control preciso y evitar accidentes. Estas aplicaciones ilustran cómo el control en tiempo finito puede ser implementado en sistemas donde la estabilidad y la rapidez son críticas.

**Definición 2.1** (Song et al., 2023) *Un sistema no autónomo descrito por  $\dot{x} = f(x, t)$ , donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f$  es una función localmente Lipschitz en  $x$  y continua por partes en  $t$ , se dice que es estable en tiempo finito, si es estable y  $\exists T(x(0))$  tal que  $x(t) = 0$  para  $t \geq T(x(0))$ .*

Los sistemas que exhiben convergencia en tiempo finito alcanzan el estado de equilibrio en un tiempo finito. Un ejemplo típico se modela a continuación.



**Figura 1.** Trayectorias con convergencia en tiempo finito.

**Ejemplo 2.1** *Consideremos el sistema dinámico descrito por la siguiente ecuación diferencial:*

$$\tau \dot{x} = -\text{sign}(x) \sqrt{|x|}.$$

*La solución de la ecuación diferencial anterior es*

$$x(t) = \text{sign}(x_0) \left( \sqrt{|x_0|} - \frac{t}{2\tau} \right)^2$$

en donde el tiempo de asentamiento está dado por  $T(x_0) = 2\tau\sqrt{|x_0|}$ . En la figura 1 se ilustra que las trayectorias del sistema convergen al origen dependiendo de la condición inicial.

### 2.1.2. Convergencia en Tiempo Fijo

El control en tiempo fijo, se centra en diseñar controladores que aseguren que el sistema alcance un estado deseado independientemente de las condiciones iniciales del sistema. Esta característica es crucial en aplicaciones donde el tiempo de respuesta es crítico.

Uno de los principales beneficios del control en tiempo fijo es su capacidad para proporcionar tiempos de convergencia garantizados, lo que es esencial para la planificación y la coordinación en aplicaciones como la robótica móvil. Por ejemplo, en (Labbadi et al., 2022) se habla sobre el control de modo deslizante global fraccionario de orden fijo para sistemas de robots móviles no holonómicos bajo perturbaciones externas. En este estudio, se discute cómo la aplicación de estas técnicas garantiza que el sistema alcance la estabilidad global en un tiempo fijo, independientemente de las condiciones iniciales, y cómo se logra reducir el problema de chattering durante las operaciones de control.

**Definición 2.2** (Song et al., 2023) *Un sistema no autónomo descrito por  $\dot{x} = f(x, t)$ , donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f$  es una función localmente Lipschitz en  $x$  y continua por partes en  $t$ , se dice que es estable en tiempo fijo, si es estable y  $T(x(0))$  está acotado superiormente en  $\mathbb{R}$ , es decir,  $\exists T_{max} > 0$  tal que  $x(t) = 0$  para  $t \geq T_{max}$ .*

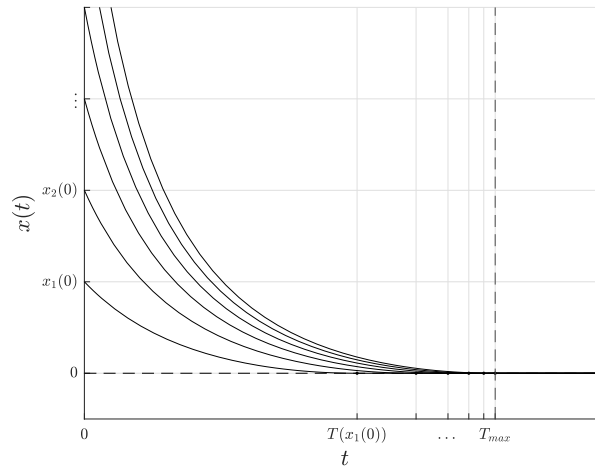
**Ejemplo 2.2** *Consideremos el sistema dinámico no lineal descrito por la siguiente ecuación diferencial*

$$\tau\dot{x} = -\text{sign}(x)|x|^{0.5} - \text{sign}(x)|x|^{1.5}$$

la solución de la anterior ecuación diferencial es

$$x(t) = \tan \left[ \arctan(\sqrt{|x_0|}) - \frac{t}{2\tau} \right]^2 \text{sign}(x)$$

cuyo tiempo de asentamiento es  $T(x_0) = 2\tau \arctan(\sqrt{|x_0|}) < \tau\pi$ . Nótese en la figura 2 que las trayectorias no rebasan el tiempo  $T_{max}$ .



**Figura 2.** Trayectorias con convergencia en tiempo fijo.

### 2.1.3. Convergencia en Tiempo Prescrito

En los sistemas con convergencia en tiempo prescrito, el diseñador puede especificar el tiempo exacto en el que el sistema debe estabilizarse en el equilibrio, independientemente de las condiciones iniciales. Esto significa que el tiempo de convergencia es un parámetro del diseño del controlador, y no depende del estado inicial del sistema. La característica clave del control en tiempo prescrito es su capacidad para garantizar que el sistema alcanzará su estado deseado en un momento preciso, lo que proporciona un nivel de precisión muy alto.

El control en tiempo prescrito se logra mediante el diseño de leyes de control que incorporan funciones de tiempo que aseguran que la convergencia ocurra exactamente en el tiempo especificado. Estas leyes de control pueden ser lineales o no lineales, y a menudo utilizan técnicas avanzadas como enfoques de control con ganancia variable en el tiempo.

Una de las principales aplicaciones del control en tiempo prescrito se encuentra en la coordinación de sistemas multiagente y la guía de misiles, donde es crucial que todos los agentes o misiles alcancen un consenso o un objetivo en un momento exactamente determinado (Zhang et al., 2021).

Estas aplicaciones destacan la importancia del control en tiempo prescrito en escenarios donde el tiempo de respuesta no solo es crítico, sino que debe ser exactamente controlado para asegurar que se logra alcanzar el objetivo.



**Definición 2.3** (Song et al., 2023) Un sistema no autónomo descrito por  $\dot{x} = f(x, t)$ , donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $f$  es una función localmente Lipschitz en  $x$  y continua por partes en  $t$ , se dice que es estable en tiempo-prescrito, si es estable y además el tiempo de asentamiento  $T = T_{\text{usuario}}$  tal que  $x(t) = 0$  para  $t \geq T_{\text{usuario}}$ .

**Ejemplo 2.3** Un sistema modelo para esto es

$$\tau(1-t)^2 \dot{x} = -x.$$

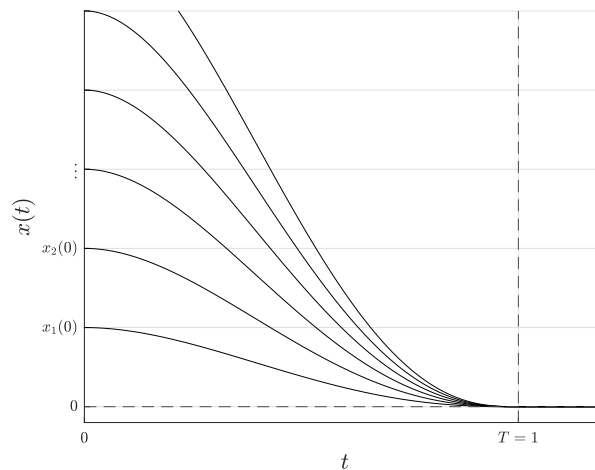
La solución de la ecuación diferencial anterior es

$$x(t) = \exp\left(-\frac{1}{\tau(1-t)}\right) x_0, \quad t < 1$$

$$x(t) = 0, \quad \forall t \geq 1$$

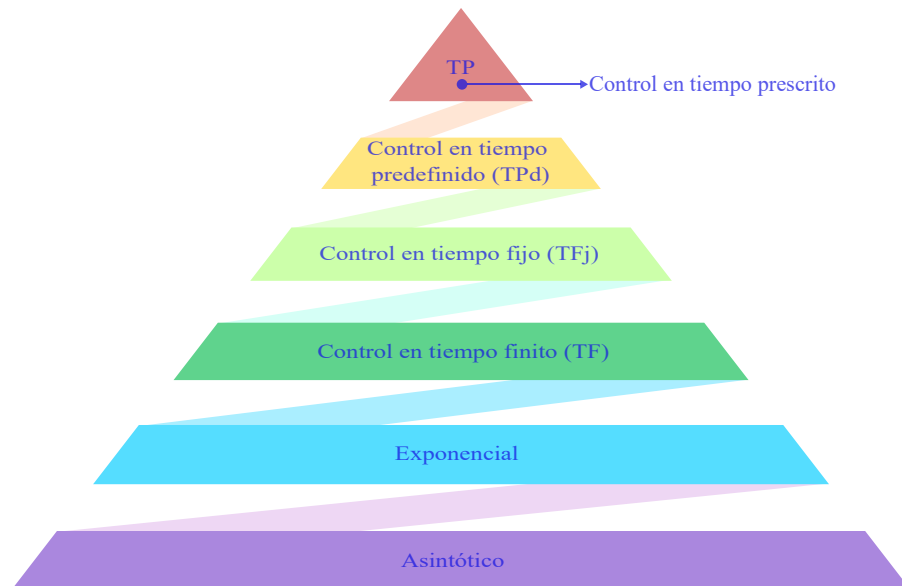
Aquí, el tiempo prescrito se ajusta de manera que la convergencia a cero se produzca exactamente al final del intervalo de tiempo especificado.

En este caso el tiempo de asentamiento lo define el usuario en  $T(x_0) = 1$  como puede observarse en la figura 3.



**Figura 3.** Trayectorias con convergencia en tiempo prescrito.

En el campo del control dinámico, las metodologías de control TF, TFj, TPd y TP ofrecen una gama progresivamente más selectiva y especializada de aplicaciones. El control TF proporciona una convergencia dentro de un intervalo finito que depende de las condiciones iniciales. Avanzando hacia el control TFj, la dependencia de las condiciones iniciales se elimina, estipulando un límite superior en el tiempo de convergencia para cualquier estado inicial. El control TPd lleva esto un paso más allá permitiendo que el diseñador establezca un límite superior para el tiempo de convergencia, independientemente de los parámetros de diseño o las condiciones iniciales. Finalmente, el control TP se integra a estas metodologías, permitiendo que el tiempo de convergencia sea precisamente preestablecido por el usuario, proporcionando una herramienta poderosa y flexible para aplicaciones críticas donde el tiempo de respuesta exacto es crucial. Estos controles forman una jerarquía donde cada nivel subsecuente ofrece un mayor control y precisión sobre el comportamiento temporal del sistema, como se visualiza en la figura 4.



**Figura 4.** Las relaciones entre sistemas asintóticos, exponenciales, TF, TFj, TPd y el control TP (Yongduan Song, et al., 2022).

## 2.2. Métodos de integración

Las ecuaciones diferenciales son fundamentales en ciencias e ingeniería para modelar situaciones donde una variable cambia con respecto a otra. Estos modelos suelen estar asociados a un problema de valor inicial, en el que se busca una solución que cumpla con una condición inicial específica.

En la práctica, las ecuaciones diferenciales que describen estos problemas pueden ser demasiado complejas para resolverlas de forma exacta. Por ello, se adoptan dos enfoques principales: el primero consiste en simplificar la ecuación diferencial para obtener una versión que pueda resolverse exactamente y luego usar esa solución simplificada para aproximar la solución al problema más complejo.

El segundo enfoque, que se discutirá en este capítulo, se centra en el uso de métodos de aproximación para encontrar la solución del problema original. Este enfoque es preferido porque proporciona estimaciones más precisas y un manejo del error más realista. Los métodos que abordaremos aquí no generan una solución continua, sino que ofrecen aproximaciones en puntos discretos específicos, espaciados de manera uniforme.

Es esencial tener ciertas definiciones y resultados basados en la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, especialmente al explorar métodos diseñados para aproximar soluciones a problemas de valor inicial (Burden et al., 2017).

**Definición 2.4** (Burden et al., 2017) *Se dice que una función  $f(t, x)$  satisface la condición de Lipschitz en la variable  $x$  y en un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$  si existe una constante  $L > 0$  tal que*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2|,$$

*siempre que  $(t, x_1)$  y  $(t, x_2)$  estén en  $D$ . La constante  $L$  recibe el nombre de constante de Lipschitz para  $f$ .*

**Definición 2.5** (Burden et al., 2017) *Se define un conjunto  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  como convexo si para cualquier par de puntos  $(t_1, x_1)$  y  $(t_2, x_2)$  en  $D$ , el punto  $(\lambda t_2 + (1 - \lambda)t_1, \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_1)$  también está en  $D$  para todo  $\lambda$  en el intervalo  $[0, 1]$ .*

Desde un punto de vista geométrico, la definición implica que un conjunto es convexo si, dado cualquier par de puntos dentro del conjunto, el segmento de línea que los une está completamente contenido en el conjunto (ver figura 5).

**Teorema 2.1** (Burden et al., 2017) *Suponga que  $f(t, x)$  se define sobre un conjunto convexo  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Si existe una constante  $L > 0$  con*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq L, \quad \text{para todo } (t, x) \in D, \quad (1)$$

entonces  $f$  satisface la condición de Lipschitz en  $D$  en la variable  $x$  con constante  $L$  de Lipschitz.

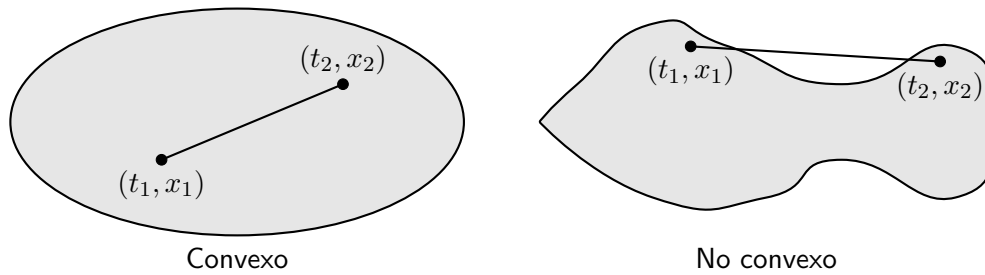


Figura 5. Ejemplo de conjuntos convexo y no convexo.

**Definición 2.6** (Burden et al., 2017) El problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad a \leq t \leq b, \quad x(a) = \alpha, \quad (2)$$

se dice que es un problema bien planteado si:

- Existe una única solución,  $x(t)$ , y
- Existen constantes  $\varepsilon_0 > 0$  y  $k > 0$ , tales que para cualquier  $\varepsilon$  en  $(0, \varepsilon_0)$ , siempre que  $\delta(t)$  es continua con  $|\delta(t)| < \varepsilon$  para toda  $t \in [a, b]$ , y cuando  $|\delta_0| < \varepsilon$ , el problema de valor inicial

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z) + \delta(t), \quad a \leq t \leq b, \quad z(a) = \alpha + \delta_0, \quad (3)$$

tiene una única solución  $z(t)$  que satisface

$$|z(t) - x(t)| < k\varepsilon \quad \text{para toda } t \in [a, b].$$

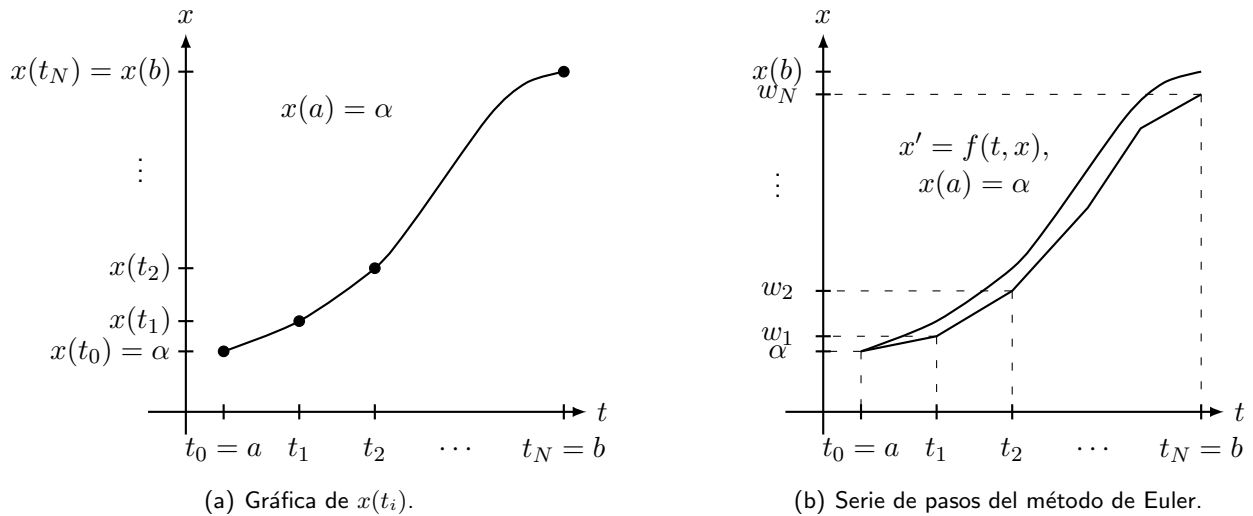
El problema descrito por la ecuación (3) es conocido como problema perturbado, derivado del problema principal en la ecuación (2).

### 2.2.1. Método de Euler explícito

El método de Euler es una técnica elemental para abordar problemas de valor inicial. Su fácil derivación facilita la comprensión de métodos numéricos más avanzados y es útil para demostrar ideas fundamentales en el análisis numérico.

El propósito de este método es proporcionar aproximaciones numéricas al problema de valor inicial bien definido en la ecuación (2).

A diferencia de obtener una solución continua  $x(t)$ , el método produce una serie de aproximaciones en puntos discretos dentro del intervalo  $[a, b]$ , conocidos como puntos de malla.



**Figura 6.** Interpretación geométrica del método de Euler.

Primero, se define que los puntos de malla están distribuidos uniformemente a lo largo del intervalo  $[a, b]$ , asegurando que se elija un número entero positivo  $N$ , y se defina  $h = (b - a)/N$  como el tamaño del paso. Los puntos de malla se designan como

$$t_i = a + ih, \quad \text{para cada } i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

El paso entre cada par de puntos consecutivos,  $h = t_{i+1} - t_i$ , es el tamaño de paso. Aplicando el teorema de Taylor al método de Euler y suponiendo que  $x(t)$ , la única solución a la ecuación, tiene derivadas continuas en  $[a, b]$ , podemos expresar

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(t_i, x(t_i)).$$

El método de Euler genera las aproximaciones  $w_i \approx x(t_i)$  para cada  $i = 1, 2, \dots, N$ . Así, el proceso del

método de Euler se define por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} w_0 &= \alpha, \\ w_{i+1} &= w_i + hf(t_i, w_i), \quad \text{para cada } i = 0, 1, \dots, N - 1. \end{aligned} \tag{4}$$

La figura 6 ilustra la interpretación geométrica del método de Euler. En la gráfica 6(b), se observa la evolución de la solución  $x(t)$  sobre el intervalo  $[a, b]$ . En la gráfica 6(a), se muestra cómo cada paso  $w_i$  se obtiene explícitamente  $w_{i+1}$  mediante la fórmula 4, lo que genera una serie de pasos discretos que aproximan la solución continua. Estos pasos discretos están representados como puntos en la gráfica que se conectan mediante segmentos de línea recta, lo que refleja la naturaleza del método de Euler para resolver numéricamente ecuaciones diferenciales ordinarias al aproximar la pendiente en cada subintervalo.

### 2.2.2. Método de Euler implícito

El método de Euler implícito es una técnica básica pero ampliamente utilizada para resolver problemas de valor inicial, especialmente en problemas con soluciones que pueden ser sensibles a pasos de tiempo grandes en el método explícito.

El objetivo principal de este método es proporcionar aproximaciones numéricas al problema de valor inicial (2), mejorando la estabilidad del método a costa de requerir, la solución de un sistema algebraico en cada paso de tiempo.

A diferencia del método explícito, donde se utiliza la información disponible hasta el instante actual  $t_i$  para predecir el valor en  $t_{i+1}$ , el método implícito hace uso de la información al final del intervalo,  $t_{i+1}$ , para esta predicción.

Supongamos que los puntos de malla están uniformemente distribuidos en el intervalo  $[a, b]$ , con un tamaño de paso  $h = (b - a)/N$  y se designan como

$$t_i = a + ih, \quad \text{para } i = 0, 1, 2, \dots, N.$$

El valor de  $x$  en el tiempo  $t_{i+1}$  se calcula de forma implícita a través de la ecuación

$$x(t_{i+1}) = x(t_i) + hf(t_{i+1}, x(t_{i+1})),$$

lo que requiere resolver esta ecuación para  $x(t_{i+1})$ , generalmente mediante métodos numéricos iterativos, dado que  $x(t_{i+1})$  aparece en ambos lados de la ecuación.

El proceso para el método de Euler implícito, entonces, se puede definir por

$$w_0 = \alpha,$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_{i+1}, w_{i+1}), \quad \text{para } i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Este enfoque garantiza una mayor estabilidad, especialmente útil en problemas donde el método explícito puede fallar debido a restricciones de estabilidad para pasos de tiempo más grandes.

Los métodos implícitos son preferidos debido a su capacidad para manejar la estabilidad numérica de manera más efectiva que los métodos explícitos, particularmente en sistemas rígidos. En contextos donde los controladores deben garantizar una convergencia rápida y precisa dentro de un tiempo prescrito, los métodos implícitos, como se discute en trabajos de investigación sobre discretización implícita de estabilizadores en tiempo prescrito para sistemas lineales, muestran una retención efectiva de las propiedades de convergencia del modelo continuo en su versión discreta (Efimov & Orlov, 2023a).

La implementación de controladores que aseguren la convergencia en tiempo prescrito presenta varios desafíos prácticos. Entre ellos, el manejo de altas ganancias y la sensibilidad del sistema a las perturbaciones y ruidos de medición son de particular importancia. Las ganancias del controlador tienden a aumentar infinitamente a medida que se aproxima el tiempo prescrito, lo cual puede resultar en problemas significativos de estabilidad y precisión. Para abordar estos problemas, se ha propuesto el uso de métodos de discretización implícita, que ofrecen ventajas inherentes en términos de estabilidad numérica y robustez frente a perturbaciones. La discretización implícita, como el método de Euler implícito, limita el crecimiento de la ganancia y asegura que el sistema permanezca bien definido y estable a lo largo de todo el tiempo, incluso más allá del tiempo de asentamiento prescrito.

Un desafío específico en la implementación de estos controladores es el manejo de la alta ganancia y las indeterminaciones que surge cuando  $T = t$  en la función  $q(t) = \frac{T}{T-t}$ . En sistemas de tiempo prescrito, las ganancias del controlador tienden a aumentar infinitamente a medida que se acerca el tiempo de asentamiento prescrito, lo cual puede resultar en problemas de implementación práctica y estabilidad numérica. La discretización implícita aborda este problema limitando el crecimiento de la ganancia y asegurando que el sistema permanezca bien definido y estable para todos los tiempos, incluso más allá del tiempo de asentamiento prescrito.

La implementación de estos métodos en sistemas lineales en forma canónica es particularmente beneficiosa debido a la estructura predecible y controlable de estos sistemas. Permite una aplicación directa y efectiva de técnicas de control basadas en realimentación lineal con ganancias variables en el tiempo, diseñadas para asegurar una convergencia exacta y uniforme en un tiempo prescrito sin sacrificar la robustez frente a perturbaciones y ruido (Efimov & Orlov, 2023b).



## Capítulo 3. Métodos de control en tiempo prescrito en tiempo continuo

---

En este capítulo, se aborda la implementación del método de integración de Euler explícito aplicado a los controladores por modos deslizantes. Este método se elige por su simplicidad en la resolución de ecuaciones diferenciales en tiempo discreto, lo que permite una mejor aproximación en sistemas de control. Se detallarán las técnicas empleadas para la discretización de los sistemas, los beneficios de utilizar el método de Euler explícito, y su aplicación en la estabilización de sistemas en tiempo prescrito.

### 3.1. Descripción en el espacio de estados de sistemas en tiempo continuo

En esta tesis se abordan tanto sistemas lineales como no lineales. Por esta razón, comenzaremos la exposición del tema desde una perspectiva general que abarque ambos sistemas. Esta aproximación nos permitirá desarrollar metodologías aplicables a una amplia gama de sistemas dinámicos y garantizar que las técnicas y resultados presentados sean de utilidad para una variedad de aplicaciones. Por consiguiente, la representación en el espacio de estados se presentará inicialmente en su forma más general, describiendo sistemas dinámicos a través de ecuaciones diferenciales que pueden ser lineales o no lineales.

Para sistemas lineales, esta representación permite describir el comportamiento del sistema mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden. En esta formulación, el estado del sistema se representa por un vector en un espacio multidimensional, y las dinámicas del sistema se expresan a través de matrices que relacionan el estado actual, las entradas y las salidas del sistema.

Consideremos sistemas descritos por ecuaciones de la forma

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (5)$$

$$y = g(t, x, u), \quad (6)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^p$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$ ,  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , y  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ . Aquí  $u$  y  $y$  denotan la entrada y salida del sistema, respectivamente. La ecuación (5) se llama la *ecuación de estado*, (6) se llama la *ecuación de salida*, y (5) y (6) constituyen la descripción del espacio de estado de sistemas continuos de dimensión finita.

La entrada del sistema puede ser una función del tiempo  $t$  (es decir,  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ) o, ser una función del tiempo y del estado (es decir,  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ). En cualquier caso, para un  $u$  y un  $f(t, x)$  dado, reescribimos (5) como

$$\dot{x} = F(t, x). \quad (7)$$

**Teorema 3.1** (Antsaklis & Michel, 2006) *Sea  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  para algún intervalo abierto  $J \subset \mathbb{R}$  y sea  $f$  Lipschitz en  $J \times \mathbb{R}^n$  (con respecto a  $x$ ). Entonces, para cualquier  $(t_0, x_0) \in J \times \mathbb{R}^n$ , el problema de valor inicial tiene una solución única que existe en todo el intervalo  $J$ .*

**Teorema 3.2** (Antsaklis & Michel, 2006) *Sea  $f \in \mathcal{C}(J \times \mathbb{R}^n \times G, \mathbb{R}^m)$ , donde  $J \subset \mathbb{R}$  es un intervalo abierto y  $G \subset \mathbb{R}^m$ . Supongamos que para cada par de subconjuntos compactos  $J_0 \subset J$  y  $G_0 \subset G$  existe una constante  $L = L_{J_0, G_0} > 0$  tal que para todo  $(t, \lambda) \in J_0 \times G_0$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , la condición de Lipschitz*

$$\|f(t, x, \lambda) - f(t, y, \lambda)\| \leq L\|x - y\|$$

*es verdadera. Entonces, el problema de valor inicial que exhibe dependencia para algún parámetro  $\lambda \in G \subset \mathbb{R}^m$  dado por*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, \lambda) \\ x(\tau) &= x_\lambda \end{aligned}$$

*tiene una solución única  $\phi(t, \tau, \lambda)$ , donde  $\phi \in \mathcal{C}(J \times J \times G, \mathbb{R}^n)$ . Además, si  $D$  es un conjunto tal que para todo  $\lambda_0 \in D$  existe  $\epsilon > 0$  tal que  $[\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon] \cap D \subset D$ , entonces  $\phi(t, \tau, \lambda) \rightarrow \phi(t, \tau, \lambda_0)$  uniformemente para  $t_0 \in J_0$ , como  $(\tau, \lambda) \rightarrow (\tau_0, \lambda_0)$ , donde  $J_0$  es cualquier subconjunto compacto de  $J$ .*

Ahora, según los teoremas 3.1 y 3.2, si  $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  y si para cualquier subintervalo compacto  $J_0 \subset \mathbb{R}$  hay una constante  $L_{J_0}$  tal que  $\|F(t, x) - F(t, \tilde{x})\| \leq L_{J_0}\|x - \tilde{x}\|$  para todo  $t \in J_0$  y para todo  $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ , entonces lo siguiente es cierto

1. Para cualquier  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ , la ecuación (7) tiene una solución única  $\phi(t, t_0, x_0)$  que satisface  $\phi(t_0, t_0, x_0) = x_0$  y que existe para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

2. La solución  $\phi$  es continua en  $t$ ,  $t_0$  y  $x_0$ .
3. Si  $F$  depende continuamente de parámetros (por ejemplo,  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ ) y si  $x_0$  depende continuamente de  $\lambda$ , la solución  $\phi$  es continua en  $\lambda$  también.

Así, si se cumplen las condiciones anteriores, entonces para un  $t_0$ ,  $x_0$  y  $u$  dados, la ecuación (5) tendrá una solución única que existe para  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto  $\phi(t, t_0, x_0)$  caracteriza el *estado* del sistema en el tiempo  $t$ . Además, bajo estas condiciones, el sistema tendrá una respuesta única para  $t \in \mathbb{R}$ , determinada por la ecuación (6).

Un caso especial importante de (5) y (6) son los sistemas descritos por ecuaciones lineales con matrices dependientes del tiempo de la forma

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u \quad (8)$$

$$y = C(t)x + D(t)u, \quad (9)$$

donde  $A \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ ,  $B \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m})$ ,  $C \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times n})$ , y  $D \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{p \times m})$ . Algunos ejemplos de esta situación se pueden verificar en problemas de seguimiento de trayectorias en manipuladores robóticos y vehículos de superficie no tripulados (Chen et al., 2024; Wang et al., 2018; Han et al., 2023).

Para cada condición inicial  $x(t_0) = x_0$  y para cada entrada dada  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ , el sistema (8) posee una solución única que existe para todo  $t \in \mathbb{R}$  y que es continua en  $t$ ,  $t_0$  y  $x_0$ . Además, si  $A$  y  $B$  dependen continuamente de parámetros, por ejemplo,  $\lambda \in \mathbb{R}^l$ , entonces las soluciones serán continuas en los parámetros también. De hecho, esta solución se da por

$$\phi(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u(s) ds \quad (10)$$

donde  $\Phi(t, t_0)$  denota la matriz de transición de estado del sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (11)$$

Utilizando (9) y (10) se tiene que

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(t, s)B(s)u(s) ds + D(t)u(t). \quad (12)$$

Cuando en (8) y (9),  $A(t) \equiv A$ ,  $B(t) \equiv B$ ,  $C(t) \equiv C$  y  $D(t) \equiv D$ , tenemos el caso lineal invariante en el tiempo dado por

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (13)$$

$$y = Cx + Du, \quad (14)$$

cuya solución está dada por

$$\phi(t, t_0, x_0) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s) ds \quad (15)$$

y la respuesta del sistema está dada por

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + C \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}Bu(s) ds + Du(t). \quad (16)$$

La representación en el espacio de estados proporciona una estructura matemática que permite analizar y diseñar sistemas dinámicos lineales. Esta metodología permite una descripción integral del comportamiento del sistema mediante ecuaciones de primer orden, facilitando el estudio de propiedades fundamentales como la estabilidad, la controlabilidad y la observabilidad. A continuación, exploraremos métodos específicos de estabilización y control en tiempo prescrito.

## 3.2. Control en tiempo prescrito

### 3.2.1. Estabilidad uniforme

La estabilidad uniforme en tiempo prescrito es un concepto crucial en el diseño de sistemas de control, especialmente cuando se requiere que un sistema alcance un estado deseado dentro de un tiempo prescrito,

independientemente de las condiciones iniciales. Esta propiedad es particularmente útil en aplicaciones donde el tiempo de respuesta es crítico. En esta subsección, consideraremos una ecuación diferencial no autónoma y exploraremos los métodos para garantizar que el sistema mantenga una estabilidad uniforme en el tiempo prescrito. Analizaremos las condiciones necesarias y suficientes para lograr esta estabilidad, proporcionando una base teórica sólida para el diseño de controladores que cumplan con estos requisitos estrictos.

Consideremos una ecuación diferencial no autónoma

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), d(t)), \quad t \geq t_0, \quad t_0 \in \mathbb{R}^+, \quad (17)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa el vector de estado,  $d(t) \in \mathbb{R}^m$  denota el vector de perturbaciones externas y  $d(t) \in \mathcal{L}_\infty^m$ . La función  $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua en  $x$  y  $d(t)$ , y continua por partes en  $t$ , con  $f(t, 0, 0) = 0$  para cualquier  $t \in \mathbb{R}^+$ . Una solución del sistema (17) para una condición inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  en el momento  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  y alguna  $d \in \mathcal{L}_\infty^m$  se denota como  $X(t, t_0, x_0, d)$ . Suponemos que  $f$  garantiza la existencia y unicidad de las soluciones  $X(t, t_0, x_0, d)$  al menos localmente en el tiempo futuro.

La siguiente definición, basada en (Holloway & Krstic, 2019a), se aplica a un sistema sin control (17) desde una perspectiva de tiempo prescrito, es decir, donde el instante de estabilización es designado por el diseñador.

**Definición 3.1** (Efimov & Orlov, 2023b) Para un  $T > 0$  dado y un conjunto  $\mathbb{D} \subset \mathcal{L}_\infty^m$ , el sistema (17) se llama uniformemente estable en tiempo prescrito (UETP) si existen  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{K}$  tales que para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}^+$  y  $d \in \mathbb{D}$

$$\|X(t, t_0, x_0, d)\| \leq \max\{\sigma_1(\|x_0\|), \sigma_2(\|d\|_\infty)\}, \quad 0 < \|X(t, t_0, x_0, 0)\|$$

para todo  $t \in [t_0, t_0 + T)$ , y

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + T} \|X(t, t_0, x_0, d)\| = 0.$$

Es crucial señalar que la acotación de las soluciones se garantiza solo en un intervalo finito  $[t_0, t_0 + T)$ ,

y las soluciones de (17) pueden no estar definidas para  $t > T$ . Por lo tanto, un sistema UETP podría no mostrar un comportamiento estable de Lyapunov. Una característica destacable de un sistema estable en tiempo prescrito es que su tiempo de estabilización es constante para todas las condiciones iniciales fuera del origen en un entorno libre de perturbaciones. En esta definición, la uniformidad de la convergencia se interpreta de dos maneras: como independencia del tiempo inicial  $t_0$  y de la entrada  $d \in \mathbb{D}$ . Aunque se asume que  $\mathbb{D} \subset \mathcal{L}_\infty^m$ , se puede considerar cualquier otra clase admisible de entradas.

### 3.2.2. Alta ganancia variable en el tiempo

Consideremos la función de ganancia variable  $\varrho(t)$  definida por

$$\varrho(t) = \begin{cases} \frac{T}{T-t}, & t \in [0, T) \\ \frac{T}{2T-t}, & t \in [T, 2T) \\ \vdots & \vdots \\ \frac{T}{kT-t}, & t \in [(k-1)T, kT). \end{cases} \quad (18)$$

En sistemas de control, ajustar la ganancia del controlador en función del tiempo puede ser crucial para garantizar una respuesta adecuada del sistema. Una técnica eficaz para manejar este ajuste es la utilización de una ganancia variable con inicializaciones periódicas. Esta estrategia permite limitar el crecimiento excesivo de la ganancia y mantener la estabilidad del sistema, incluso después del tiempo de asentamiento prescrito. Los resultados de las simulaciones, que se presentan en capítulos posteriores, ilustran claramente cómo estas inicializaciones periódicas contribuyen a la estabilidad y desempeño del sistema.

La función  $\varrho(t)$  es una función estrictamente creciente y no acotada en cada intervalo  $[0, T)$ ,  $[T, 2T)$ , etc. Esta forma de ganancia variable fue propuesta inicialmente solo para el intervalo  $[0, T)$  en (Song et al., 2017b). Posteriormente, nosotros propusimos hacer inicializaciones de la ganancia en los intervalos  $[T, 2T)$ ,  $[2T, 3T)$ , etc. Al final de cada intervalo de longitud  $T$ , la ganancia se reinicia, lo que limita su crecimiento.

Nótese que la definición de la función  $\varrho(t)$ , presenta una indeterminación cuando  $t = kT$ . En este punto, la función es infinito, siendo problemático para la implementación práctica. Sin embargo, esta

indeterminación se puede evitar mediante técnicas de discretización implícita, que limitan el crecimiento de la ganancia y aseguran que el sistema permanezca bien definido y estable para todos los tiempos, incluso más allá del tiempo de asentamiento prescrito.

### 3.2.3. Definiciones y propiedades

Para garantizar que el diseño del control cumpla con los requisitos de estabilidad y convergencia en tiempo prescrito, los sistemas considerados en el desarrollo de la tesis se asumen que son controlables y observables, y son presentados en su forma canónica.

La representación en forma canónica de las matrices está dada por ciertas estructuras específicas que facilitan el análisis y diseño de sistemas de control. Estas matrices en su forma canónica se utilizan para asegurar una estructura estándar que simplifica el estudio y manejo de las propiedades del sistema.

**Propiedad 3.1** (Efimov & Orlov, 2023b) *La representación en forma canónica de las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $H$  está dada por:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0_{n-1 \times 1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{1 \times n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0_{n-1 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0_{n-1 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}^\top, \quad H = \text{diag}\{[0 \ 1 \ \dots \ n-1]^\top\}. \end{aligned} \quad (19)$$

*Estas matrices en su forma canónica son utilizadas para analizar y diseñar sistemas de control, asegurando una estructura estándar que facilita el estudio de las propiedades del sistema.*

**Propiedad 3.2** (Bhat & Bernstein, 2005) *Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  y  $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Sean además  $A$ ,  $D$ ,  $S_1$  y  $S_2$  matrices no singulares. Entonces las siguientes propiedades se cumplen*

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BS_1CA^{-1} & -A^{-1}BS_1 \\ -S_1CA^{-1} & S_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_2 & -S_2BD^{-1} \\ -D^{-1}CS_2 & D^{-1} + D^{-1}CS_2BD^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

donde

$$S_1 = (D - CA^{-1}B)^{-1}, \quad S_2 = (A - BD^{-1}C)^{-1}.$$

**Lema 3.1** (Praly & Jiang, 2004) Para cualquier  $a_1 > 0$  existen constantes  $d_0 > 0$ ,  $d_1 \geq 0$ , matrices simétricas  $P_o, P_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y vectores  $K_o, K_c \in \mathbb{R}^n$  tales que

$$(A + bK_c^\top)^\top P_c + P_c(A + bK_c^\top) \leq -d_0 P_c,$$

$$(A + K_o c)^\top P_o + P_o(A + K_o c) \leq -d_0 P_o,$$

$$P_c > 0, \quad -a_1 P_c \leq P_c H + H P_c \leq d_1 P_c,$$

$$P_o > 0, \quad -a_1 P_o \leq P_o H + H P_o \leq d_1 P_o.$$

En conclusión, la estabilidad uniforme en tiempo prescrito es una propiedad esencial para el diseño de sistemas de control que deben alcanzar un estado deseado de manera rápida y predecible. Estos principios forman la base para el desarrollo de controladores robustos que pueden manejar perturbaciones y garantizar una convergencia uniforme dentro de un tiempo predefinido. La capacidad de garantizar una estabilidad en tiempo prescrito proporciona una ventaja significativa en aplicaciones donde el tiempo de respuesta es crítico.

### 3.3. Sistemas lineales de control en tiempo prescrito

#### 3.3.1. Estabilización en tiempo prescrito por retroalimentación del estado

Habiendo establecido los principios de la estabilidad uniforme en tiempo prescrito, pasamos ahora a explorar los métodos de control por retroalimentación de estado. Estos métodos se basan en el uso de la información del estado del sistema para diseñar leyes de control que aseguren un rendimiento deseado. La retroalimentación de estado permite una mayor precisión y flexibilidad en el control de sistemas dinámicos, facilitando la implementación de estrategias de control avanzadas. En esta subsección, examinaremos diversas técnicas de control por retroalimentación de estado, para mejorar la estabilidad y el rendimiento del sistema.

Considere un sistema lineal de entrada única y salida única en la forma canónica con perturbaciones



acopladas

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(u(t) + d(t)), \quad y(t) = x(t) + v(t), \quad (21)$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $u(t) \in \mathbb{R}$  es el control a diseñar;  $d(t) \in \mathbb{R}$  es la perturbación,  $d \in \mathcal{L}^1_\infty$ ;  $y(t), v(t) \in \mathbb{R}^n$  son la salida medida y el ruido, respectivamente, y  $v \in \mathcal{L}^n_\infty$ ;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^n$  están en forma canónica como se describe en (19).

**Problema 3.1** Dado  $T > 0$ , se requiere diseñar una retroalimentación  $u(t) = u(y(t), d)$  que para el sistema en lazo cerrado sea UETP para  $d \in D = \mathcal{L}^1_\infty$  mientras  $\|v\|_\infty = 0$ , y garantice además un comportamiento acotado del estado para  $v \in \mathcal{L}^1_\infty$ .

En el ámbito del tiempo continuo, diversas metodologías han sido aplicadas para abordar este tema, como se detalla en (Song et al., 2019) y (Song et al., 2017c). No obstante, el enfoque en tiempo discreto representa la aportación más significativa de este estudio.

De acuerdo con (Song et al., 2017c) y (Chitour et al., 2020), considérese la siguiente ley de control que soluciona el problema EPTU en el lazo cerrado cuando  $v \equiv 0$

$$u(t) = -KD(t)y(t) \quad (22)$$

$$D(t) = \text{diag}\{\varrho^n(t) \varrho^{n-1}(t) \dots \varrho(t)\},$$

donde  $K = [K_1 \dots K_n] \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  es la ganancia de control,  $\varrho(t) = \frac{T}{T-t}$  es una función estrictamente creciente y no acotada del tiempo para  $t \in [0, T)$ .

Como es común en los sistemas de convergencia en tiempo prescrito (Song et al., 2023), en presencia de una ganancia que escapa al infinito en  $t = T$ , el lado derecho de (22) está definido en un intervalo finito de tiempo  $[0, T)$ . Debido a esto, para  $t \geq T$ , frecuentemente se aplica otro algoritmo de estabilización o estimación, ya que  $D(t)$  no está definido (Orlov et al., 2022). En este trabajo, consideraremos más adelante otro enfoque en el ajuste del tiempo, implementando la función de alta ganancia con inicializaciones periódicas mostrada en la ecuación (18).

Definamos la dinámica del sistema en lazo cerrado (21), (22):

$$\dot{x}(t) = (A - BKD(t))x(t) + Bd(t) - BKD(t)v(t). \quad (23)$$

Para encontrar las ganancias de  $K$ , podemos apoyarnos en los resultados presentados en el teorema 3.3.

Este teorema proporciona una base sólida para la selección de  $K$ , garantizando la estabilidad en tiempo prescrito del sistema controlado.

El teorema 3.3 establece que, dado un  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $U \in \mathbb{R}^n$  y constantes positivas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , si se satisfacen ciertas desigualdades matriciales lineales, entonces  $P^{-1} > 0$  y otras condiciones de estabilidad se cumplen. Específicamente, las desigualdades matriciales lineales proporcionan restricciones explícitas para  $K = UP$ , que aseguran que las condiciones de estabilidad y desempeño del sistema en lazo cerrado se mantengan.

Estos resultados permiten seleccionar las ganancias  $K$  del controlador de manera que el sistema en lazo cerrado cumpla con las especificaciones de estabilidad y rendimiento en tiempo prescrito, asegurando así un comportamiento robusto y predecible del sistema controlado.

**Teorema 3.3** *Supongamos que existen  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $U \in \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_1 > 0$  y  $\gamma_2 > 0$  tales que las siguientes desigualdades matriciales lineales se verifican:*

$$P^{-1} > 0, \quad \begin{bmatrix} Q_{11} & b & -b \\ b^\top & -\gamma_1 & 0 \\ -b^\top & 0 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$Q_{11} = P^{-1}(A - \Delta)^\top + (A - \Delta)P^{-1} - bU - U^\top b^\top + P^{-1}.$$

$$\Delta = T^{-1} \text{diag}\{[0 \ 1 \ \dots \ n-1]^\top\}.$$

Entonces, para  $K = UP$ ,  $T > 2n - 2$  el sistema (21), (22) es uniformemente estable en tiempo prescrito con respecto a condiciones iniciales arbitrarias y perturbaciones  $d \in \mathcal{L}_\infty^1$ .

Los métodos de control por retroalimentación de estado ofrecen una herramienta poderosa para el diseño de controladores eficientes y precisos. Al utilizar la información del estado del sistema, es posible implementar estrategias de control que aseguren una rápida convergencia y un comportamiento deseado, incluso en presencia de perturbaciones y ruido. Estos métodos no solo mejoran la estabilidad del sistema, sino que también permiten una mayor flexibilidad y adaptabilidad en diversas aplicaciones. En la siguiente sección, exploraremos cómo estos principios pueden aplicarse al diseño de observadores, esenciales para estimar los estados del sistema cuando no se pueden medir directamente.

### 3.3.2. Diseño de observador

Para lograr un control efectivo en sistemas donde no todos los estados son directamente observables, es fundamental el uso de observadores. Un observador es una estructura que permite estimar los estados internos del sistema a partir de las salidas medidas y la entrada conocida. En esta sección, analizaremos el diseño de observadores, enfocándonos en cómo estas estimaciones pueden utilizarse para mejorar el desempeño de los sistemas de control. Veremos cómo se pueden implementar observadores para sistemas con perturbaciones y ruido, garantizando una estimación precisa y robusta de los estados del sistema.

Supongamos que una señal continuamente diferenciable  $\psi(t) \in \mathbb{R}$  se mide con un ruido  $v(t) \in \mathbb{R}$

$$y(t) = \psi(t) + v(t),$$

donde  $y(t) \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathcal{L}^1_\infty$ , y  $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  tiene  $n > 1$  derivadas  $\psi^{(i)}(t) = \frac{d^{(i)}\psi(t)}{dt^{(i)}}$  con  $\psi^{(n)} \in \mathcal{L}^1_\infty$  (sin un límite superior constante conocido).

Es necesario estimar las derivadas  $\psi^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  de la señal  $\psi$  con un tiempo de convergencia prescrito  $T > 0$  y de manera robusta con respecto a la perturbación  $v$ .

El problema puede plantearse de manera equivalente como la estimación del estado para el sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B\psi^{(n)}(t), \quad y(t) = Cx(t) + v(t),$$

donde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  es el estado,  $x(0) = [\psi(0) \quad \dots \quad \psi^{(n-1)}(0)]^\top$ , en donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  se encuentran en su forma canónica como en (19).

Siguiendo (Holloway & Krstic, 2019a), tomemos el observador de estado para este sistema en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + D_o(t)L(y(t) - C\hat{x}(t)), \\ D_o(t) &= \text{diag}\{\varrho(t), \dots, \varrho^n(t)\}^\top, \end{aligned} \tag{24}$$

donde  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  es la estimación del estado  $x(t)$ ,  $L \in \mathbb{R}^n$  es la ganancia del observador que será seleccionada posteriormente y  $\varrho(t) = \frac{T}{T-t}$  es una función de tiempo estrictamente creciente y no acotada para  $t \in [0, T)$ .

Para encontrar las ganancias  $L$  del observador, podemos apoyarnos en los resultados presentados en el teorema 3.4. Este teorema proporciona una base sólida para la selección de  $L$ , garantizando la estabilidad

en tiempo prescrito del sistema observado.

**Teorema 3.4** (Efimov et al., 2022) *Existe una  $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $U \in \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_1 > 0$  y  $\gamma_2 > 0$  tal que las desigualdades matriciales lineales se satisfacen*

$$P > 0, \quad \begin{bmatrix} Q_{11} & Pb & -U \\ b^\top P & -\gamma_1 & 0 \\ -U^\top & 0 & -\gamma_2 \end{bmatrix} \leq 0,$$

$$Q_{11} = (A - \Delta)^\top P + P(A - \Delta) - UC - C^\top U^\top + P,$$

entonces, para  $L = P^{-1}U$ ,  $T > 2n - 2$  el sistema (25), (24), (26) es uniformemente estable en tiempo prescrito con respecto a condiciones iniciales arbitrarias y con  $\psi^{(n)} \in \mathcal{L}_\infty^1$ .

Definimos el error de estimación como  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , cuyas dinámicas pueden escribirse como sigue

$$\dot{e}(t) = (A - D_o(t)LC)e(t) + B\psi^{(n)}(t) - D_o(t)Lv(t).$$

En conclusión, el diseño de observadores permite estimar de manera efectiva los estados internos de un sistema cuando no todos son directamente medibles. Al utilizar un observador, es posible obtener una representación precisa del comportamiento del sistema, lo cual es esencial para implementar estrategias de control robustas. Los observadores no solo mejoran la capacidad de respuesta del sistema, sino que también aumentan su estabilidad frente a perturbaciones y ruido. A continuación, exploraremos cómo estos observadores pueden integrarse en la estabilización de sistemas mediante la retroalimentación de la salida.

### 3.3.3. Estabilización por retroalimentación de la salida

Ahora consideraremos la estabilización de sistemas mediante la retroalimentación de la salida, utilizando los observadores previamente diseñados. La retroalimentación de la salida es una técnica fundamental que permite ajustar el comportamiento del sistema en tiempo real, basándose en las mediciones disponibles. Este enfoque es crucial para garantizar que el sistema alcance un estado deseado de manera rápida y

precisa, a pesar de la presencia de perturbaciones y ruido. Exploraremos cómo el estado estimado por el observador puede ser utilizado en la ley de control para mejorar la estabilidad y el rendimiento del sistema.

Consideremos el sistema de la planta dado por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B(u(t) + d(t)), & z(t) &= Cx(t) + v(t), \\ x(t), u(t), d(t) &\in \mathbb{R}, & z(t), v(t) &\in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{25}$$

Finalmente, consideremos el controlador

$$u(t) = -KD(t)\hat{x}(t).\tag{26}$$

Es importante destacar que, en lugar de utilizar la salida del sistema  $y(t)$ , el controlador se alimentará del estado estimado  $\hat{x}(t)$  proporcionado por el observador (24). Además, las matrices  $K$  y  $D$  son las mismas que se utilizan en la ecuación (22).

Es importante destacar que, en lugar de utilizar la salida del sistema  $y(t)$ , el controlador se alimentará del estado estimado  $\hat{x}(t)$  proporcionado por el observador (24).

Para que el observador tenga una estimación precisa del estado del sistema, debe tener en cuenta todos los términos que afectan al estado real, incluido el término de control  $Bu(t)$ . Si el observador no incluye el término  $Bu(t)$ , la estimación del estado sería incorrecta, ya que ignoraría la influencia del control aplicado al sistema. La inclusión del término  $Bu(t)$  en la ecuación del observador permite que el observador ajuste su estimación  $\hat{x}(t)$  de acuerdo con las correcciones realizadas por el controlador, asegurando así una mejor convergencia y robustez frente a perturbaciones.

### 3.4. Métodos de control por modos deslizantes en tiempo prescrito

La idea detrás del control por modos deslizantes (MD) radica en la introducción de una función especialmente diseñada, conocida como variable deslizante. Una vez que esta variable se iguala a cero, se define la superficie deslizante. El diseño adecuado de la variable deslizante garantiza un rendimiento óptimo del sistema en lazo cerrado, siempre y cuando las trayectorias del sistema se mantengan en la superficie

deslizante. El objetivo del control por MD es guiar la trayectoria del sistema hacia la superficie deslizante y, una vez allí, mantener el movimiento sobre dicha superficie mediante la acción de control. Esto permite aprovechar las principales características de los modos deslizantes: insensibilidad a perturbaciones (internas y externas) acopladas a la señal de control, máxima exactitud y convergencia en tiempo finito.

Este tipo de sistemas se caracteriza por tener el lado derecho discontinuo en las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (27)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estados,  $t$  es el tiempo y  $f(x, t)$  es un campo vectorial que tiene discontinuidades en un cierto conjunto dentro del espacio dimensional  $(n + 1)$ ,  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ .

Una característica distintiva de las ecuaciones diferenciales que describen cualquier sistema de control es la presencia de un escalar o vector paramétrico  $u$  llamado control, de manera que el sistema (27) puede representarse como sigue

$$\dot{x} = f(x, t, u), \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (28)$$

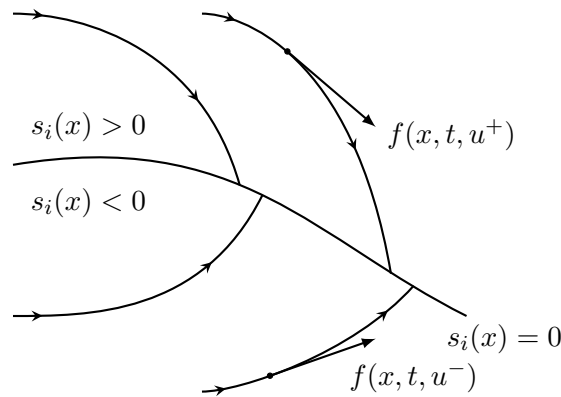
Se ha demostrado que el control  $u$  discontinuo resulta ser una herramienta efectiva para controlar plantas con dinámica compleja, mejorar el desempeño del sistema, hacer frente a posibles variaciones paramétricas, minimizar el consumo de potencia para propósitos de control, entre otros. Debido a esto, es de interés analizar el comportamiento dinámico de (28) cuando  $u$  es una función discontinua del estado, especialmente cuando tiene la forma

$$u_i(x, t) = \begin{cases} u_i^+(x, t) & \text{si } s_i(x) > 0, \\ u_i^-(x, t) & \text{si } s_i(x) < 0, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, \quad (29)$$

donde  $u^T = (u_1, \dots, u_m)$  y todas las funciones  $u_i^+(x, t)$  y  $u_i^-(x, t)$  son continuas, mientras que  $s_i(x)$  es una función del estado llamada *función de conmutación*. Esta función es responsable de seleccionar entre diferentes controles o modos de operación en un sistema dinámico, dependiendo del estado del sistema. En un sistema de control por modos deslizantes, la función de conmutación  $s_i(x)$  indica cuándo activar las diferentes leyes de control  $u_i^+(x, t)$  o  $u_i^-(x, t)$ , según el signo de  $s_i(x)$ . Esta función es fundamental

para garantizar que el sistema mantenga la trayectoria deseada, alternando entre diversas estrategias de control según el estado del sistema.

El estado de los sistemas representados por (28) y (29) puede estar en alguna de las superficies de discontinuidad, caracterizadas por  $s_i(x) = 0$  o en la intersección de éstas. Las trayectorias del sistema estarán sobre la superficie  $s_i(x) = 0$  si en la vecindad de esta superficie los vectores de velocidad  $f(x, t, u)$  están dirigidos uno hacia el otro, como lo muestra la figura 7. Una vez que el estado se encuentra en la superficie de discontinuidad, permanece en la misma mientras esta situación se mantenga, desplazándose (*deslizándose*) eventualmente a lo largo de la misma. A tal comportamiento dinámico se le llama *modos deslizantes ideales*. Son ideales en el sentido de que, teóricamente, la frecuencia con que las trayectorias cruzan la línea de discontinuidad es infinita, por lo que están confinadas a permanecer en esta superficie. Sin embargo, en la práctica, la conmutación es de frecuencia finita, por lo que las trayectorias cruzan de un lado a otro la superficie de discontinuidad, fenómeno conocido como *chattering*.



**Figura 7.** Modos deslizantes en la superficie  $s_i(x)$ .

Para que exista un modo deslizante sobre una superficie de discontinuidad  $s = 0$  se debe cumplir que  $s$  y  $\dot{s}$  sean de signo contrario

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \quad \text{y} \quad \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0. \quad (30)$$

La condición (30) puede escribirse de la siguiente manera

$$s\dot{s} < 0. \quad (31)$$

Debido a que la ley de control (29) no está definida para la superficie de discontinuidad  $s = 0$ , el sistema es, aparentemente, independiente del control. La ley de control asegura que la condición (31) se cumpla, mientras que la función de conmutación determina la respuesta del sistema cuando está en la superficie de discontinuidad, por lo que el diseño de la función  $s_i(x)$  requiere de un estudio detallado, ya que de esto depende el rendimiento del sistema (?).

Por la forma en que se diseña  $s(x)$  en el caso tradicional, el término discontinuo aparecerá en la derivada  $\dot{s}$ .

### 3.4.1. Algoritmo twisting

El algoritmo Twisting es un método de control robusto diseñado para sistemas con incertidumbres y perturbaciones. Su principal ventaja es su capacidad de alcanzar estabilidad en tiempo finito, lo que es crucial para aplicaciones donde la velocidad de respuesta es crítica.

Consideremos el sistema descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\beta \operatorname{sign}(x_1) - \alpha \operatorname{sign}(x_2) + f.\end{aligned}\tag{32}$$

El algoritmo Twisting se basa en la aplicación de funciones de signo para garantizar el deslizamiento de la trayectoria del sistema sobre la superficie de control. Este método se utiliza principalmente en el control deslizante de segundo orden.

Para garantizar la estabilidad en tiempo finito, es necesario cumplir con las siguientes condiciones

$$\beta > 0, \quad \alpha > |f|, \quad \beta - \alpha > |f|.\tag{33}$$

Estas condiciones aseguran que la trayectoria del sistema converge al origen en un tiempo finito.

El tiempo de estabilización  $T$  del sistema controlado por el algoritmo Twisting se puede estimar a partir de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$ . En general, el tiempo de estabilización está inversamente relacionado con la magnitud de estos parámetros.



La elección de los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  es crucial para el desempeño del controlador. Se recomienda un proceso iterativo de sintonización, donde se ajustan estos parámetros basándose en la respuesta del sistema y en el nivel de perturbación  $f$ .

El algoritmo Twisting proporciona un método efectivo para el control robusto de sistemas con perturbaciones e incertidumbres. Su capacidad de estabilizar el sistema en tiempo finito lo hace particularmente útil en aplicaciones donde la rapidez y la precisión son críticas.

### 3.4.2. Algoritmo Super-Twisting

El algoritmo Supertwisting es una extensión del algoritmo Twisting, diseñado para mejorar el desempeño en términos de robustez y rapidez de convergencia. A diferencia del algoritmo Twisting, el algoritmo Supertwisting no solo utiliza funciones de signo, sino también términos continuos en las variables de estado.

Consideremos el sistema descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - k_1 \sqrt{|x_1|} \text{sign}(x_1) \\ \dot{x}_2 &= -k_2 \text{sign}(x_1) + f.\end{aligned}\tag{34}$$

El algoritmo Supertwisting combina términos discontinuos y continuos en sus leyes de control, lo que permite una convergencia más suave y rápida hacia el origen. Esta característica reduce el chattering típico de los controladores de segundo orden, mejorando así la eficiencia del sistema.

Para garantizar la estabilidad en tiempo finito del sistema controlado por el algoritmo Supertwisting, es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

$$k_1 > |f|, \quad k_2 > 0, \quad \frac{k_1 k_2}{1 + k_1} > |f|.\tag{35}$$

Estas condiciones aseguran que la trayectoria del sistema converge al origen en un tiempo finito.

El tiempo de estabilización del algoritmo Supertwisting es generalmente menor que el del algoritmo Twisting debido a la inclusión de términos continuos que suavizan la trayectoria del sistema. La sintonización

adecuada de los parámetros  $k_1$  y  $k_2$  es crucial para optimizar el desempeño del controlador.

El algoritmo Supertwisting representa una mejora significativa respecto al algoritmo Twisting en términos de robustez y rapidez de respuesta. Su capacidad para reducir el chattering y mejorar la suavidad de la convergencia lo hace especialmente útil en aplicaciones prácticas donde la precisión y la eficiencia son fundamentales.

### 3.4.3. Diseño de retroalimentación de estado para sistemas SISO de segundo orden

En particular, la estabilización en tiempo prescrito mediante retroalimentación del estado es una extensión avanzada de este enfoque, donde se asegura que el sistema alcance un estado deseado dentro de un tiempo finito. Los algoritmos twisting y supertwisting son prominentes en este contexto, proporcionando mejoras significativas en términos de rapidez y suavidad de la convergencia. En este capítulo, se presenta una visión detallada los algoritmos de estabilización en tiempo prescrito, con un enfoque particular en la retroalimentación del estado mediante métodos de control por modos deslizantes.

$$\mu(1 - t_0; T) = \frac{T}{T + t_0 - t} : [t_0, t_0 + T) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 1}, \quad (36)$$

forma el núcleo del diseño seminal de estabilización en tiempo prescrito, entre otros, tal que

1.  $\mu(t)$  es una función monótonamente creciente con valores finitos en  $[t_0, t_0 + T)$ ;
2.  $\mu(t_0) = 1$ ;
3.  $\lim_{t \rightarrow t_0 + T} \int_{t_0}^t \mu(\tau) d\tau = \infty$ .

Dentro del enfoque de la función de Lyapunov de control, una solución no negativa de

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -k\mu(t)V(t), \quad k > 0, \quad t \in [t_0, t_0 + T) \quad (37)$$

la función  $\mu(t)$  escapa a cero cuando  $t \rightarrow t_0 + T$  independientemente de la condición inicial  $V(t_0) \geq 0$ .

Vale la pena notar que hay infinitas funciones que satisfacen las condiciones anteriores 1-3, siendo capaces de asegurar que cualquier solución arbitraria  $V(t)$  de (37) se reinicie a cero no más tarde que en el tiempo prescrito  $T > 0$  independientemente del valor inicial  $V(t_0) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

La función no acotada (36) con valores infinitamente grandes cuando  $t - t_0 \rightarrow T$  se utiliza posteriormente en el diseño basado en deformación de la retroalimentación estabilizadora en tiempo prescrito con ganancias finitas.

En esta sección, el diseño del controlador se desarrolla aún más para la estabilización en tiempo prescrito del sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u + w(t)), \quad x(t_0) = x^0 \quad (38)$$

en la forma triangular superior (4), siendo  $t \geq t_0$ , el instante inicial  $t_0 \in \mathbb{R}_+$ , los estados del sistema  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ , la señal de entrada de control  $u \in \mathbb{R}$ , y el término de perturbación  $w(t)$ .

El problema en cuestión es asegurar que las trayectorias  $x(t)$  escapen a cero para todo  $t \geq t_0 + T$  donde  $T > 0$  es un tiempo prescrito arbitrario, independiente del estado inicial y de la perturbación admisible aplicada.

Sea  $r_i = n - i + 1$ ,  $i = 1, \dots, n$  y dejando que  $\alpha_n \geq \alpha_{n-1} \geq \dots \geq \alpha_1 \geq n$ , introduzcamos

$$\vartheta_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ r_1 \end{bmatrix}, \quad \vartheta_i = \begin{bmatrix} x_i \\ r_i \end{bmatrix} + k_{r_i}^{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}} [\vartheta_{i-1}]^{\frac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}}}, \quad i = 2, \dots, n. \quad (39)$$

El algoritmo de control

$$\begin{aligned} v(x) &= -k_n [\vartheta_n(x)]^0, \\ k_i &= \mu_i k_1^{\frac{n}{n-(i-1)}}, \quad k_n > \mu_n k_1^n + L. \end{aligned} \quad (40)$$

La estrategia de control, propuesta para abordar el problema anterior, consiste en el diseño del algoritmo híbrido ya que integra dos tipos diferentes de controladores o estrategias de control en un solo esquema

$$u = \begin{cases} a_c^T \mathcal{P}_c x(t) + v(\mathcal{P}_c x(t)), & \text{si } \|x(t)\| \neq 0 \\ v(x(t)), & \text{de otro modo.} \end{cases} \quad (41)$$

compuesto por el controlador de estabilización en tiempo finito  $v(\cdot)$ , y su contraparte variante en el tiempo. El algoritmo anterior se especifica con

$$\mathcal{P}_c(t) = P_c^{-1} \mathcal{M}_c(t), \quad (42)$$

donde la matriz  $n \times n$  variante en el tiempo es

$$\mathcal{M}_c(t) = \text{diag} (\mu_1^n(t), \mu_1^{n-1}(t), \dots, \mu_1(t)) \quad (43)$$

y la función de escalado temporal se denomina como

$$\mu_1(t) = \frac{T}{T + t_0 - t}, \quad t_0 \leq t < t_0 + T. \quad (44)$$

El diseño del controlador se ha desarrollado para la estabilización en tiempo prescrito de sistemas de orden  $n$ . Este enfoque proporciona una solución general que garantiza que las trayectorias  $x(t)$  escapen a cero en un tiempo prescrito  $T$ , independientemente del estado inicial y de las perturbaciones admisibles.

Para ilustrar y profundizar en la metodología propuesta, nos enfocaremos en el caso específico de sistemas de segundo orden. Esta simplificación no solo facilita la comprensión de los principios fundamentales, sino que también permite una implementación práctica más directa. En consecuencia, el sistema de segundo orden de interés se presenta en la forma normal como se describe a continuación.

El sistema de segundo orden de interés se da en la forma normal

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = \zeta(x, t) + u, \quad t \geq t_0 \quad (45)$$

donde  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$  es el vector de estado, inicializado con  $x^0 = (x_1^0, x_2^0)^T \in \mathbb{R}^2$  en el instante  $t = t_0$ , y  $u$  es la entrada de control.

La perturbación externa  $\zeta(x, t)$ , que afecta al sistema (45), es una función continua a trozos, cuya magnitud es

$$|\zeta(x, t)| \leq N|x_2|^\alpha \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq t_0, \quad (46)$$

para algún  $N \geq 0$  conocido a priori y  $\alpha \in \{0\} \cup (\frac{2}{3}, 1)$ .

Si  $\alpha \in (\frac{2}{3}, 1)$ ,  $\zeta(x, t)$  es una perturbación admisible (46) que se desvanece en el origen, mientras que para  $\alpha = 0$ , es una restricción de magnitud estándar. En situaciones donde  $N$  es desconocido a priori, el enfoque de deformación del espacio-tiempo a desarrollar parece aplicable con una especie de adaptación similar a la utilizada en algoritmos de control de modo deslizante adaptativos.

El objetivo de la presente sección es estabilizar en tiempo finito el sistema (45), mediante una retroalimentación de estado uniformemente acotada, con un límite de tiempo de establecimiento arbitrariamente pequeño  $T > 0$  independiente de las condiciones iniciales y perturbaciones admisibles.

La extensión  $\alpha$ -fraccional

$$v_\alpha(x) = -k_1|x_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2|x_2|^\alpha - k_3x_1 - k_4x_2, \quad (47)$$

$$k_1 - N > k_2 > N, \quad k_3, k_4 \geq 0, \quad k_3 = k_4 = 0 \quad \text{cuando } \alpha \neq 0$$

del controlador *twisting* (Levant, 1993), que está gobernado por (47) con  $\alpha = 0$  y  $k_3 = k_4 = 0$ , se le conoce (Oza et al., 2015, Teorema 3.2) para imponer una estabilidad robusta en tiempo finito en el sistema de lazo cerrado (45), (47), impulsado por  $u = v_\alpha$  con cualquier  $\alpha \in (\frac{2}{3}, 1)$ . Su versión escalada

$$\begin{aligned} \nu_\alpha(x, t; t_0, T) = & -k_1\mu_1^2(t-t_0; T)|x_1|^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} - k_2\mu_2^{2-\alpha}(t-t_0; T)|x_2|^\alpha \\ & - k_3\mu_1^2(t-t_0; T)x_1 - k_4\mu_1(t-t_0; T)x_2 \end{aligned} \quad (48)$$

se utiliza además para estabilizar (45) más rápido que en el tiempo prescrito  $T$ . Una vez que  $x(t)$  se reinicia a cero en

$$T_0(x^0) = \inf\{t \geq t_0 : x(t) = 0\}, \quad (49)$$

el controlador se cambia a (47) para mantener el sistema de lazo cerrado en el origen. El controlador híbrido resultante

$$u_\alpha(x, t; t_0, T) = \begin{cases} \nu_\alpha(x, t; t_0, T), & \text{si } x \neq 0 \\ v_\alpha(x), & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (50)$$

referido además como un controlador  $\alpha$ -twisting preescalado (o basado en twisting), es capaz de lograr el objetivo deseado en oposición al controlador lineal (Song et al., 2017), coincidiendo formalmente con el caso  $\alpha = 1$  y operando con alta ganancia (36).

**Teorema 3.5** (Orlov et al., 2022) *Considere el sistema de lazo cerrado (45)-(50), afectado por una perturbación externa (46) y accionado por el controlador  $\alpha$ -twisting preescalado (50). Sea el sistema de lazo cerrado especificado con algún  $\alpha \in \{0\} \cup (\frac{2}{3}, 1)$  y un  $T > 0$  arbitrario. Entonces es estable en tiempo fijo con el tiempo de convergencia  $T_0(x^0) < T$  y con la ganancia de tiempo variable acotada (18), aplicada solo en la etapa inicial  $[t_0, t_0 + T_0(x^0)]$ .*

En esta sección se han explorado los principios y metodologías para el diseño de sistemas de control basados en la retroalimentación de estado. Hemos analizado cómo estas técnicas permiten una estabilización eficiente y robusta de sistemas dinámicos, garantizando un rendimiento óptimo incluso en presencia de perturbaciones y ruido. Además, se han discutido los algoritmos de control por modos deslizantes, destacando las ventajas del algoritmo Supertwisting en términos de rapidez y suavidad de la convergencia.

#### 3.4.4. Diseño del observador para sistemas de segundo orden

La motivación para diseñar un observador híbrido que utiliza modos deslizantes y estabilización en tiempo prescrito radica en la necesidad de combinar la robustez y precisión en la estimación del estado del sistema. Este observador emplea una función inicial,  $G_1(e_1(t), t)$ , que se enfoca en la estimación del estado mientras maneja perturbaciones y ruidos presentes en el sistema. Una vez que la estimación del estado se estabiliza, el observador conmuta a otra función,  $G_2(e_1(t), t)$ , que se encarga de mantener la precisión de la estimación del estado del sistema de manera continua. Esta aproximación permite aprovechar las ventajas de los modos deslizantes para manejar incertidumbres, mientras que la estabilización en tiempo prescrito asegura una convergencia en un tiempo prescrito, independientemente de las condiciones iniciales y las perturbaciones presentes.

En esta subsección, nos enfocaremos en el diseño de observadores para sistemas de segundo orden. Después de haber explorado los métodos de control por retroalimentación de estado y haber establecido las bases para la estabilización en tiempo prescrito de sistemas SISO de segundo orden, es fundamental contar con observadores que permitan estimar con precisión los estados internos del sistema que no son observables. A continuación, desarrollaremos un observador híbrido específico para sistemas de segundo orden, que se utilizará para estimar el estado del sistema.

La diferenciación en tiempo real de una señal suave se aborda en términos de la estimación exacta robusta del estado del doble integrador

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = f(x_1, t) + \zeta(x, t), \quad (51)$$

donde  $t \in \mathbb{R}_+$  es la variable de tiempo,  $x(t) = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$  es el vector de estado, la posición  $x_1(t)$  es la única medida disponible. El integrador es impulsado por una entrada continua a trozos conocida a priori  $f(x_1, t)$  y se ve afectado por una perturbación continua a trozos  $\zeta(x, t)$  con una magnitud conocida a priori  $Z > 0$  tal que

$$|\zeta(x, t)| < Z \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (52)$$

El objetivo principal de la presente sección es estimar exactamente la velocidad del estado  $x_2(t)$  a partir de la medición del estado  $x_1(t)$  dentro de un tiempo prescrito  $T > 0$ , independientemente de las condiciones iniciales y las perturbaciones admisibles. Alternativamente, el objetivo puede verse como diferenciar exactamente la señal  $x_1(t)$  en tiempo prescrito con la entrada despreciada  $f(x_1, t) = 0$  y con el término de perturbación  $\zeta(x, t)$ , representando imperfecciones de medición.

El siguiente observador híbrido

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + G_1(e_1(t), t), \\ \dot{\hat{x}}_2 &= f(x_1(t), t) + G_2(e_1(t), t) \end{aligned} \quad (53)$$

se propone para el doble integrador perturbado (51). En adelante,  $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T$  es el estado del observador,  $e = x - \hat{x}$  es el error de observación con los componentes  $e_1$  y  $e_2$ , como también

$$G_1(e_1, t) = \begin{cases} \frac{\mu_1(t)}{T} e_1 + \alpha \sqrt{\mu_1(t)} |e_1|^{\frac{1}{2}}, & \text{si } |\text{sign } e_1| = 1 \\ \alpha |e_1|^{\frac{1}{2}}, & \text{en caso contrario,} \end{cases} \quad (54)$$

y

$$G_2(e_1, t) = \begin{cases} \beta x_1(t) \text{ sign } e_1, & \text{si } |\text{sign } e_1| = 1 \\ \beta \text{ sign } e_1, & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (55)$$

que son los términos de inyección del observador con  $x_1(t)$ , dado por (36), y  $\alpha, \beta > 0$  tales que

$$\alpha > 2\zeta \quad \text{y} \quad \beta > (1 + \alpha^{-1})\zeta. \quad (56)$$

El observador híbrido (53) está compuesto por el observador super-twisting, que actúa si y solo si  $|\text{sign } e_1| \neq 1$ , y su contraparte que varía en el tiempo, confinada al conjunto  $e \in \mathbb{R}^2 : |\text{sign } e_1| = 1$ . Como se muestra en la prueba de estabilidad del observador a continuación, el componente del observador que varía en el tiempo obliga al error de observación a restablecerse a cero más rápido que el tiempo prescrito cuando cambia al observador supertwisting estándar, que mantiene el error de observación en el modo deslizante que ocurre en el origen  $e_1 = e_2 = 0$  del espacio de estados del error una vez que  $|\text{sign } e_1| \neq 1$ .

Por inspección, las dinámicas del error están gobernadas por

$$\dot{e}_1 = e_2 - G_1(e_1, t),$$

$$\dot{e}_2 = \zeta(x(t), t) - G_2(e_1, t).$$

**Teorema 3.1** *Considere el doble integrador (51) y su observador (53)-(56) con un  $T > 0$  arbitrariamente pequeño, independiente de las condiciones iniciales y las perturbaciones admisibles. Las dinámicas del error (16) son entonces estables en tiempo fijo con el tiempo de convergencia  $T_0 < T$  y con la ganancia que varía en el tiempo acotada (36), aplicada solo en la etapa inicial  $[0, T_0)$ .*

En resumen, el diseño del observador para sistemas de segundo orden es una herramienta crucial para la estimación precisa de los estados no observables directamente. A lo largo de esta sección, hemos



desarrollado y analizado un observador híbrido que proporciona robustez frente a perturbaciones y ruido, garantizando un rendimiento óptimo del sistema. La implementación de este observador permite mejorar significativamente la capacidad de control y estabilidad del sistema, asegurando que los objetivos de control en tiempo prescrito se alcancen de manera efectiva. Con esta base sólida, estamos preparados para avanzar hacia el diseño de estrategias de retroalimentación de la salida, que se abordará en la siguiente sección.

### 3.4.5. Diseño de retroalimentación de la salida

Tras haber establecido las bases para el diseño de observadores en sistemas de segundo orden, en esta sección nos centraremos en el diseño de estrategias de retroalimentación de la salida. La retroalimentación de la salida es esencial cuando no todos los estados del sistema son directamente medibles, y debemos basarnos en las salidas del sistema para el control. Exploraremos diversas metodologías que permiten utilizar las salidas del sistema para estabilizarlo de manera efectiva, manteniendo la robustez frente a perturbaciones y ruido. Este enfoque complementa los observadores desarrollados previamente, proporcionando un marco completo para el control robusto en tiempo prescrito de sistemas dinámicos.

En el contexto de la estabilización en tiempo prescrito, el paradigma del principio de separación se revisa de la siguiente manera. El intervalo de tiempo prescrito

$$[t_0, t_0 + T) = [t_0, t_1) \cup [t_1, t_0 + T) \quad (57)$$

se desacopla en dos subintervalos con un  $T_1$  arbitrario  $\in (0, T)$ , y  $t_1 = t_0 + T_1$ ,  $T_2 = T - T_1$ . En el primer subintervalo, la estimación exacta del estado se realiza en el tiempo prescrito  $T_1$ , mientras que se supone que el sistema subyacente permanece uniformemente acotado (por ejemplo, debido a que está debidamente controlado, utilizando la medición disponible). Una vez que se logra la estimación exacta del estado, el controlador se cambia a la retroalimentación de salida, alimentado por el estimador de estado exacto, para estabilizar el sistema en tiempo finito  $T_1 + T_2 = T$ .

Para el doble integrador perturbado (45), afectado por una perturbación uniformemente acotada

$$|\phi(x, t)| \leq N \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq t_0, \quad (58)$$

El diseño resultante de retroalimentación de salida estabilizadora en tiempo prescrito es el siguiente. Según los Teoremas 2.4 y 2.5, las versiones que varían en el tiempo de la retroalimentación del estado basada en twisting y del observador basado en supertwisting, correspondientes a (50) con  $\alpha = 0$  y respectivamente a (53) con  $\omega = 1/2$ , son capaces de rechazar perturbaciones uniformemente acotadas. El diseño de retroalimentación de salida previsto se compone por lo tanto de esos componentes de controlador y observador en la forma

$$u(\hat{x}, t; t_0, T) = \begin{cases} 0, & \text{si } |\text{sign } e_1| = 1 \\ \nu_0, & \text{si } |\text{sign } e_1| \neq 1 \text{ y } \hat{x} \neq 0 \\ v_0, & \text{si } |\text{sign } e_1| \neq 1 \text{ y } \hat{x} = 0 \end{cases} \quad (59)$$

donde  $\hat{x}$  es el estado del observador,  $e = (e_1, e_2)^T$  es el error de observación,  $v_0 = v_0(\hat{x})$  y  $v_0 = v_0(\hat{x}, t; t_0 + T_0, T_2)$  están dados por (48) y (47) con  $\alpha = 0$ , y  $T_0 \in [t_0, t_0 + T_1)$  está especificado por  $T_0 = \inf\{t \in [t_0, t_0 + T] : \text{sign } e_1(t) \in (-1, 1)\}$  con  $T = T_1$ .

La ecuación (59) describe un controlador de retroalimentación de salida con tres casos; (1)  $u(\hat{x}, t; t_0, T) = 0$  cuando  $\text{sign}(e_1) = 1$  y  $\hat{x} = 0$ , indicando que el estado se estima exactamente y no se requiere acción de control; (2)  $u(\hat{x}, t; t_0, T) = \nu_0$  cuando  $\text{sign}(e_1) = 1$  y  $\hat{x} \neq 0$ , aplicando una entrada para estabilizar el sistema en el tiempo prescrito  $T$ ; y (3)  $u(\hat{x}, t; t_0, T) = v_0$  cuando  $\text{sign}(e_1) \neq 1$  y  $\hat{x} \neq 0$ , asegurando que el sistema permanezca estabilizado después de alcanzar el estado deseado.

En conclusión, el diseño de estrategias de retroalimentación de la salida para sistemas de segundo orden ha demostrado ser una herramienta eficaz para la estabilización robusta en tiempo prescrito. A lo largo de esta sección, hemos explorado métodos que permiten utilizar las salidas del sistema para controlar y estabilizar el sistema de manera eficiente, incluso en presencia de perturbaciones y ruido. Estos métodos complementan los observadores diseñados previamente, proporcionando un marco completo y robusto para el control de sistemas dinámicos. Con este enfoque integral, se logra una mayor precisión y estabilidad en el control del sistema, asegurando que los objetivos de rendimiento sean alcanzados de manera consistente.

## Capítulo 4. Discretización de algoritmos de estabilización en tiempo prescrito

---

Los métodos explícitos e implícitos son enfoques populares en la integración numérica, cada uno con sus ventajas y limitaciones. Los métodos explícitos son directos y sencillos de aplicar, ya que calculan el estado siguiente utilizando exclusivamente la información del estado actual. Sin embargo, tienen la característica de que requieren pasos de integración pequeños para mantener la precisión, lo que se traduce en más iteraciones, cálculos y capacidad de cómputo. Particularmente en sistemas de control en tiempo prescrito, este método falla justo cuando  $t = T$  ya que la ganancia es infinita en ese instante de tiempo.

Para abordar las limitaciones del método explícito frente a la alta ganancia, consideramos la aplicación de métodos de control con modos deslizantes, que permiten garantizar la convergencia del sistema antes de un tiempo prescrito. Esta aplicación nos permite combinar la simplicidad del método explícito con la estabilidad y robustez del control por modos deslizantes, ofreciendo una solución equilibrada para la integración numérica en sistemas de control.

Para el caso de retroalimentación lineal también podemos evitar el problema de alta ganancia implementando métodos implícitos de discretización de sistemas en lazo cerrado. En este caso el método requiere la inversión de una matriz (véase 62) en cada paso y escoger pasos de integración adecuados para prevenir la amplificación de ruido y perturbaciones. Esta aproximación por medio de la integración implícita resulta en encontrar soluciones del sistema discretizado numéricamente estables en presencia de perturbaciones y ruido incluyendo el momento cuando  $t = T$ .

Con esta motivación intentamos desarrollar ambos tipos de métodos de integración para sus implementaciones en sistemas de lazo cerrado.

### 4.1. Algoritmo Euler explícito para controlador por modos deslizantes

La implementación del método de integración de Euler explícito en los controladores por modos deslizantes se caracteriza por su simplicidad. Este método, como se describe en la Sección (§2.2.1), es una técnica fundamental en el análisis y diseño de sistemas de control discretos, debido a su capacidad para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales de manera directa y sencilla.

**Algoritmo 1:** Simulación del sistema de control conmutado por modos deslizantes**Entrada:** Constantes, parámetros del controlador, condiciones iniciales**Salida:** Solucion aproximada en el tiempo de  $x$  y  $\hat{x}$ 

```

1 Definir constantes y parámetros
2 Definir parámetros del controlador
3 Crear vector de tiempo  $t$  de 0 a  $T_{sim}$  con paso  $dt$ 
4 Definir condiciones iniciales  $x, \hat{x}$ 
5 Inicializar vectores de resultados:  $e, x, \hat{x}, G_1, G_2$ 
6 Para  $i = 1$  hasta  $\frac{T_{sim}}{dt} + 1$  hacer
7   Almacenar y actualizar el estado y variables del observador en sus vectores
8    $d \leftarrow$  admisible // Incluir perturbación
9    $e(i) \leftarrow x - \hat{x}$  // Calcular errores
10   $\mu_1 \leftarrow \frac{T}{T-t(i)}$  // Calcular término de alta ganancia
    // Observador desarrollado en 3.4.4
11  Si  $T - t(i) > 0$  y  $|sign(e_1(i))| = 1$  entonces
12     $G_1(i) \leftarrow \frac{\mu_1}{T} e_1(i) + \alpha \sqrt{\mu_1} [e_1]^{1/2}$  // ecuación (54)
13  si no
14     $\alpha [e_1]^{1/2}$ 
15  Si  $T - t(i) > 0$  y  $|sign(e_1(i))| = 1$  entonces
16     $G_2(i) \leftarrow \beta \mu_1 sign(e_1(i))$  // ecuación (55)
17  si no
18     $G_2(i) \leftarrow \beta sign(e_1(i))$ 
    // Controlador desarrollado en 3.4.3
19  Si  $T - t(i) > 0$  y  $\sqrt{(\hat{x}_1^2) + (\hat{x}_2^2)} > 0$  entonces
20     $u \leftarrow -k_1 \mu_1^2 (t - t_0; T) [x_1]^{2-\alpha} - k_2 \mu_2^{2-\alpha} (t - t_0; T) [\hat{x}_2]^\alpha - k_3 \mu_1^2 (t - t_0; T) x_1 - k_4 \mu_1 (t -$ 
     $t_0; T) \hat{x}_2$  // ecuación (48)
21  si no
22     $u \leftarrow -k_1 [x_1]^{2-\alpha} - k_2 [\hat{x}_2]^\alpha - k_3 x_1 - k_4 \hat{x}_2$  // ecuación (47)
    // Aplicación de Euler explícito
23   $\hat{x}_1 \leftarrow \hat{x}_1(i) + dt \cdot (\hat{x}_2(i) + G_1(i))$ 
24   $\hat{x}_2 \leftarrow \hat{x}_2(i) + dt \cdot (u + G_2(i))$ 
25   $x_1 \leftarrow x_1(i) + dt \cdot x_2(i)$ 
26   $x_2 \leftarrow x_2(i) + dt \cdot u$ 

```

En el contexto de los controladores por modos deslizantes, detallados en las secciones (§3.4.3), (§3.4.4) y (§3.4.5), la implementación del método de Euler explícito es particularmente ventajosa. Los modos deslizantes son una técnica robusta de control que puede manejar incertidumbres y perturbaciones en el sistema. La integración de Euler explícita permite discretizar las ecuaciones del controlador sin la necesidad de manipulaciones algebraicas complejas, lo que facilita enormemente el proceso de implementación.

En resumen, la implementación del método de integración de Euler explícito en controladores por modos deslizantes representa una técnica directa que simplifica el diseño y el análisis de sistemas de control discretos. La simplicidad de su implementación, junto con la robustez inherente de los controladores por modos deslizantes, convierte esta combinación en una opción altamente recomendable para aplicaciones prácticas en el control de sistemas. El pseudocódigo de los pasos empleados se detalla en el algoritmo (1).

## 4.2. Discretización de sistemas lineales en forma canónica

### 4.2.1. Estabilización por retroalimentación del estado

A continuación se aborda la discretización de sistemas lineales en forma canónica mediante la estabilización por retroalimentación del estado. Este enfoque es fundamental para garantizar que el sistema controlado mantenga su estabilidad y desempeño en un entorno digital, donde las señales y operaciones son inherentemente discretas. La metodología propuesta se basa en adaptar técnicas de control continuo a un marco de tiempo discreto, preservando las propiedades esenciales del sistema. A continuación, se detallan los procedimientos y resultados obtenidos al aplicar estos conceptos a sistemas representativos, destacando las ventajas y desafíos encontrados en el proceso.

Note que (21), (22) están modelados por un sistema lineal variante en el tiempo con entradas externas  $d(t)$  y  $v(t)$ . Dado que la ganancia variante en el tiempo  $D(t)$  crece estrictamente hacia el infinito, la discretización explícita de Euler no puede ser usada para todo  $t \in [0, T]$  porque las dinámicas resultantes en tiempo discreto serán inestables para cualquier tasa de muestreo con el crecimiento de  $\rho(t)$ . Sin embargo, la discretización implícita puede ser efectivamente aplicada (Butcher, 2008). Para explicar esto, sea  $h > 0$  un paso de discretización constante, denote por  $t_k = hk$  para  $k \in \mathbb{Z}_+$  los instantes de tiempo de discretización, y, asúmase que existe  $N \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $T = Nh$ , entonces la aplicación del método de discretización implícita de Euler a (21), (22) para  $k \in \{0, N - 1\}$

$$\xi_{k+1} = F^{-1}(t_{k+1}) (\xi_k + hbd_{k+1} + Q(t_{k+1})v_{k+1}), \quad (60)$$

$$F(t) = I_n - h(A - bKD(t)), \quad Q(t) = -hbKD(t), \quad (61)$$

donde  $\xi_k \in \mathbb{R}^n$  es una aproximación de  $x_k = x(t_k)$  (es decir,  $\xi_k \rightarrow x_k$  cuando  $h \rightarrow 0$ ),  $v_k = v(t_k)$  y  $d_k = d(t_k)$ . Para la parte en tiempo discreto asumimos que  $v_k$  y  $d_k$  toman valores finitos con normas acotadas como antes, es decir,  $d \in L_1^\infty$  y  $v \in L_n^\infty$ .

Para calcular la expresión de  $F^{-1}(t)$  y analizar sus propiedades, usemos la primera fórmula de inversión de matrices por bloques dada en la propiedad (20). Para ello, representemos esta matriz como sigue:

$$F(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}(t) & \mathcal{D}(t) \end{bmatrix}, \quad (62)$$

donde

$$\mathcal{A} = I_{n-1} - h \begin{bmatrix} 0_{n-2 \times 1} & I_{n-2} \\ 0 & 0_{1 \times n-2} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0_{n-2 \times 1} \\ -h \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}(t) = h [K_1 \varrho^n(t) \cdots K_{n-1} \varrho^2(t)], \quad \mathcal{D}(t) = 1 + hK_n \varrho(t),$$

Entonces,

$$F^{-1}(t) = \frac{W(t)}{O(t)},$$

donde

$$O(t) = \mathcal{D}(t) - \mathcal{C}(t)\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} = 1 + \sum_{i=1}^n K_i h^{n-i+1} \varrho^{n-i+1}(t),$$

$$W(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{-1}(O(t)I_{n-1} + \mathcal{B}\mathcal{C}(t)\mathcal{A}^{-1}) & -\mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} \\ -\mathcal{C}(t)\mathcal{A}^{-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

Además, los cálculos directos muestran que

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & h & \cdots & h^{n-2} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & h \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B} = - \begin{bmatrix} h^{n-1} \\ h^{n-2} \\ \vdots \\ h \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{C}(t)\mathcal{A}^{-1} = \left[ (\mathcal{C}(t)\mathcal{A}^{-1})_1 \cdots (\mathcal{C}(t)\mathcal{A}^{-1})_{n-1} \right].$$

En conclusión, la implementación de controladores en tiempo prescrito para sistemas lineales en tiempo discreto, utilizando el método de Euler implícito, implica una serie de manipulaciones algebraicas que culminan en la necesidad de invertir matrices en cada paso de tiempo.

#### 4.2.2. Observador en tiempo discreto

variación Note que la ecuación (24) es modelada por un sistema lineal variante en el tiempo con una entrada externa conocida  $y(t)$ . Dado que la ganancia  $D(t)$  22 crece estrictamente hasta el infinito, la discretización explícita de Euler no puede ser utilizada para todos los  $t \in [0, T]$ ; sin embargo, la discretización implícita puede ser aplicada efectivamente (Butcher, 2008). Sea  $h > 0$  un paso de discretización constante, denote por  $t_k = hk$  para  $k \in \mathbb{Z}_+$  los instantes de tiempo de discretización. Suponiendo, que existe  $N \in \mathbb{Z}_+$  tal que  $T = Nh$ , entonces la aplicación del método de discretización de Euler implícito a la ecuación (24) da para  $k \in \{0, N - 1\}$

$$\hat{\xi}_{k+1} = Z(t_{k+1}) \left( \hat{\xi}_k + hD(t_{k+1})Ly_{k+1} \right), \quad (63)$$

donde  $\hat{\xi}_k$  es una aproximación de  $\hat{x}(t_k)$ ,  $y_k = y(t_k)$ ,

$$Z(t) = (I_n - h(A - D(t)LC))^{-1}. \quad (64)$$

Nótese que

$$I_n - h(A - D(t)LC) = \begin{bmatrix} 1 + L_1 h q(t) & \mathcal{B} \\ \mathcal{C}(t) & \mathcal{D}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (65)$$

donde

$$\mathcal{B} = [-h \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$\mathcal{D} = \left( \begin{bmatrix} I_{n-1} - h & 0 \\ 0 & 0_{1 \times n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0_{1 \times n-2} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & h & \dots & h^{n-2} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{C}(t) = h \begin{bmatrix} L_2 \varrho^2(t) \\ L_3 \varrho^3(t) \\ \vdots \\ L_n \varrho^n(t) \end{bmatrix},$$

luego, usando la fórmula de inversión de bloques dada en la propiedad (20), escribimos

$$Z(t) = \frac{\mathcal{K}(t)}{O(t)}, \quad K(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\mathcal{B}\mathcal{D} \\ -\mathcal{C}(t) & \mathcal{D}O(t) + \mathcal{D}\mathcal{C}(t)\mathcal{B}\mathcal{D} \end{bmatrix},$$

$$O(t) = 1 + \sum_{i=1}^n L_i h^i \varrho^i(t).$$

**Observación 4.1** El Teorema 3.4 garantiza que  $O(t) \geq 1 + \sum_{i=1}^n L_i h^i > 0$  para todo  $t \geq 0$ , siempre que la matriz  $A - LC$  sea Hurwitz (en tal caso  $L_i > 0$  para todos  $i = 1, \dots, n$ , y notar que esto es una restricción adicional a las condiciones del teorema 3.4, donde es suficiente tener la propiedad de Hurwitz para la matriz  $A - LC - \Delta$ ). Dado que

$$\mathcal{B}\mathcal{D} = -[h \ \dots \ h^{n-1}],$$

$$\mathcal{D}\mathcal{C}(t) = [(\mathcal{D}\mathcal{C}(t))_1 \ \dots \ (\mathcal{D}\mathcal{C}(t))_{n-1}]^T,$$

$$(\mathcal{D}\mathcal{C}(t))_j = \sum_{i=j+1}^n L_i h^{i-j} \varrho^i(t), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

se puede concluir que la matriz de transición de estado discreta  $Z(t)$  es no singular y está acotada para



todo  $t \in [0, T]$ . De hecho, los elementos de  $K(t)$  son constantes o funciones polinomiales de  $\varrho(t)$  de órdenes  $\{1, \dots, n\}$ , el denominador  $O(t)$  también es un polinomio de  $\varrho(t)$  de orden  $n$  y la función  $\varrho(t)$  es monótona creciente de 1 a  $+\infty$  mientras  $t$  avanza desde 0 hasta  $T$ , entonces  $Z(t)$  permanece acotada para  $t \in [0, T]$ .

Consideremos un modelo en tiempo discreto que representa las soluciones de (24), el cual puede ser aproximado utilizando el mismo método de Euler implícito

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= Z(t_{k+1}) \left( \xi_k + hb\phi_{k+1}^{(n)} + hD(t_{k+1})L(y_{k+1} - v_{k+1}) \right), \\ y_k &= C\xi_k + v_k, \end{aligned} \quad (66)$$

para  $k \in \mathbb{Z}_+$ , donde  $\xi_k$  debe aproximarse a  $\xi(t_k)$  a medida que  $h$  converge a cero,  $\phi_k^{(n)} = \phi^{(n)}(t_k)$  y  $v_k = v(t_k)$ . En esta tesis asumiremos que  $v_k$  y  $\phi_k^{(n)}$  toman valores finitos con normas acotadas como antes, es decir,  $v \in \mathcal{L}_\infty^1$  y  $\phi^{(n)} \in \mathcal{L}_\infty^1$ .

Para obtener el sistema en lazo cerrado, es necesario expresar la salida  $y_{k+1}$  en términos de  $\xi_{k+1}$ . Para ello se utiliza la ecuación (67), donde la salida  $y_{k+1}$  se define como la suma de  $C\xi_{k+1}$  y el ruido  $v_{k+1}$ , se sustituye esta relación en la ecuación (66)

$$y_{k+1} = C\xi_{k+1} + v_{k+1}, \quad (67)$$

donde, realizando algunas manipulaciones algebraicas, podemos obtener una forma más compacta del sistema en lazo cerrado

$$\begin{aligned} \xi_{k+1} &= Z(t_{k+1}) \left( \xi_k + hb\dot{\phi}_{k+1} + hD(t_{k+1})LC\xi_{k+1} \right) \\ &= Z(t_{k+1}) \left( \xi_k + hb\dot{\phi}_{k+1} \right) + Z(t_{k+1})hD(t_{k+1})LC\xi_{k+1} \\ \xi_{k+1} - Z(t_{k+1})hD(t_{k+1})LC\xi_{k+1} &= Z(t_{k+1}) \left( \xi_k + hb\dot{\phi}_{k+1} \right) \\ (I - hZ(t_{k+1})D(t_{k+1})LC) \xi_{k+1} &= Z(t_{k+1}) \left( \xi_k + hb\dot{\phi}_{k+1} \right) \\ \xi_{k+1} &= (I - hZ(t_{k+1})D(t_{k+1})LC)^{-1} Z(t_{k+1}) \left( \xi_k + hb\dot{\phi}_{k+1} \right). \end{aligned} \quad (68)$$

Para analizar las propiedades de (63) consideraremos el error de discretización  $e_k = \xi_k - \hat{\xi}_k$ , cuya

estabilidad y tasa de convergencia han sido evaluadas en el teorema 3.4 para el escenario en tiempo continuo. Los cálculos directos muestran que

$$e_{k+1} = Z(t_{k+1}) \left( e_k + hb\phi_{k+1}^{(n)} - hD(t_{k+1})Lv_{k+1} \right).$$

Las manipulaciones algebraicas aplicadas en 68 permiten la inversión de matrices, que son fundamentales para encontrar las expresiones necesarias que facilitan la implementación del método de integración de Euler implícito. A través de estas técnicas algebraicas, es posible asegurar que el sistema controlado mantenga su estabilidad y desempeño deseado.

### 4.2.3. Estabilización por retroalimentación de la salida

En las secciones anteriores, hemos explorado la estabilización de sistemas mediante retroalimentación del estado (§4.2.1) y el diseño de observadores en tiempo discreto utilizando el método de integración de Euler implícito (§4.2.2). Estas técnicas han demostrado ser efectivas para la estabilización y observación de sistemas lineales en tiempo discreto. En esta sección, nos enfocaremos en la estabilización por retroalimentación de la salida. Esta metodología es crucial cuando no se dispone de todas las variables de estado para la retroalimentación y se necesita confiar en las mediciones de salida disponibles. Aplicaremos los métodos anteriormente discutidos para ejemplificar un sistema de segundo orden, integrando los conceptos desarrollados previamente para garantizar la estabilidad y el desempeño del sistema bajo consideraciones teóricas.

Consideramos el sistema lineal en forma canónica descrito en la ecuación (21) La discretización del sistema mediante el método de Euler implícito nos lleva a la ecuación de estado descrito por (60), donde  $F(t_{k+1})$  y  $Q(t_{k+1})$  están definidas en la ecuación (61) respectivamente.

El observador, como se detalla en (24), es responsable de estimar los estados del sistema. La discretización del observador utilizando el método de Euler implícito resulta en la expresión mostrada en (63), donde  $Z(t_{k+1})$  está definida en (64) respectivamente.

Para implementar la retroalimentación de la salida, la entrada del sistema será la salida del observador. Esto se formula utilizando el controlador (26) descrito en la sección (§3.3.3), donde  $K$  es la ganancia del controlador diseñada para estabilizar el sistema. Al utilizar las salidas estimadas del observador, el

sistema completo con retroalimentación de la salida se describe mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} &= F^{-1}(t_{k+1}) (\xi_k + hbd_{k+1} + Q(t_{k+1})v_{k+1}), \\ \hat{\xi}_{k+1} &= Z(t_{k+1}) \left( \hat{\xi}_k + hD(t_{k+1})L \left( y_{k+1} - C\hat{\xi}_{k+1} \right) \right).\end{aligned}\tag{69}$$

Con esta configuración, la retroalimentación de la salida garantiza que el sistema se estabilice a través de las estimaciones de los estados proporcionadas por el observador, incluso en presencia de perturbaciones y ruido. Este enfoque es robusto y adecuado para aplicaciones prácticas donde la medición de todos los estados no es factible.

En resumen, la formulación y el análisis detallado de las ecuaciones de estado y observador han permitido desarrollar un marco robusto para el control y la observación de sistemas dinámicos en tiempo discreto. La combinación de estas ecuaciones en una sola matriz inversa facilita la implementación de algoritmos de control. Esta integración de los términos de perturbación y ruido en la dinámica del sistema proporciona un enfoque completo y efectivo para la compensación de estos efectos.

A continuación, en la sección de resultados, presentaremos diversas simulaciones y experimentos que validan la eficacia de los métodos propuestos. Estos resultados demostrarán la aplicabilidad y el rendimiento del sistema bajo diferentes condiciones y escenarios, destacando la utilidad de los controladores y observadores desarrollados.

## Capítulo 5. Resultados

---

### 5.1. Sistema lineal de segundo orden y su discretización por método de Euler implícito

#### 5.1.1. Retroalimentación del estado

Para analizar la estabilización de un sistema de segundo orden, consideremos el siguiente sistema descrito en el dominio continuo

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u + d(t)\end{aligned}\tag{70}$$

El sistema descrito por las ecuaciones (70) representa un modelo de segundo orden donde  $x_1$  y  $x_2$  son los estados del sistema,  $u$  es la entrada de control ya presentada en (26), y  $d(t)$  es una perturbación externa.

Para implementar este sistema en un entorno digital, es necesario discretizar las ecuaciones diferenciales. Utilizamos el método de Euler implícito para este propósito, lo que nos lleva a las siguientes ecuaciones discretas

La discretización por el método de Euler implícito resuelve

$$\begin{aligned}x_{1_{k+1}} &= x_{1_k} + hx_{2_{k+1}}, \\ x_{2_{k+1}} &= x_{2_k} + h[-KD(t_{k+1})x_{k+1} - KD(t_{k+1})v(t_{k+1}) + d(t_{k+1})]\end{aligned}\tag{71}$$

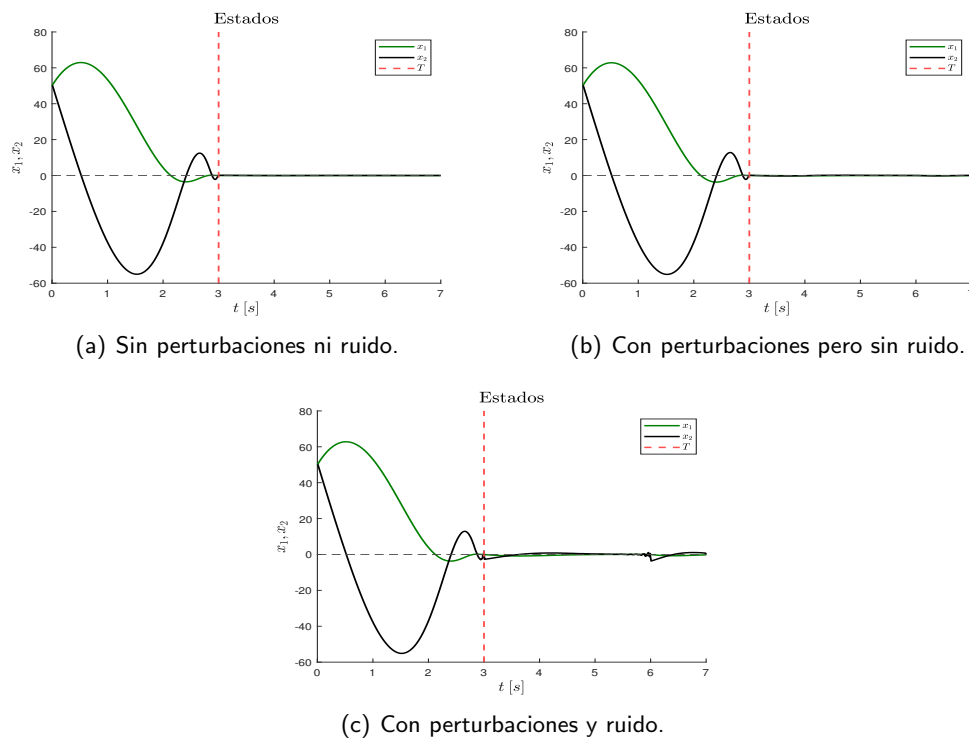
donde  $h$  es el paso de discretización,  $K$  es una constante de control mencionada en el Teorema 3.3,  $D(t_{k+1})$  es una función que varía con el tiempo, y  $v(t_{k+1})$  es un término de ruido.

Para simplificar la implementación y el análisis del sistema discretizado, reescribimos las ecuaciones anteriores en una forma matricial compacta

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & -h \\ hK_1\varrho^2(t_{k+1}) & 1 + hK_2\varrho(t_{k+1}) \end{bmatrix}^{-1} (x_k + hBd(t_{k+1}) - hBKD(t_{k+1})v(t_{k+1})). \quad (72)$$

La ecuación (72) muestra cómo la forma matricial compacta permite integrar tanto el sistema original como las perturbaciones y el control en una sola formulación. La matriz inversa que multiplica el vector de estados garantiza que se cumplan las condiciones necesarias para la estabilidad y precisión del sistema.

Es crucial notar que la presencia de los términos de perturbación  $d(t_{k+1})$  y el ruido  $v(t_{k+1})$  directamente en la dinámica del sistema proporciona un marco completo para la compensación de estos efectos. Esto resulta en un modelo que no solo es matemáticamente robusto, sino que también es práctico para su implementación en sistemas de control en tiempo real.



**Figura 8.** Evolución de los estados  $x_1$  y  $x_2$  del sistema.

Los parámetros utilizados en las simulaciones son los siguientes

$$h = 0.01, \quad T = 3, \quad d(t) = -2\text{rand}(1), \quad v(t) = 0.1[\text{sen}(2t) + \text{rand}(1), \text{cos}(\pi t) + \text{rand}(1)]^T.$$

donde

$$A = \text{rand}(n), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A_{ij} \in [0, 1] \quad \text{para} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

En la subfigura 8(a), se observa que los estados del sistema se estabilizan rápidamente sin la presencia de perturbaciones ni ruido, confirmando la efectividad del controlador en condiciones ideales. En la subfigura 8(b), la introducción de perturbaciones externas  $d(t)$  genera oscilaciones en los estados del sistema, pero éstos logran estabilizarse, mostrando la robustez del controlador frente a perturbaciones. Finalmente, en la subfigura 8(c), se analiza el comportamiento del sistema bajo la presencia tanto de perturbaciones como de ruido  $v(t)$ . A pesar de la introducción de estos factores adversos, el sistema logra estabilizarse, aunque con una mayor amplitud de oscilaciones y un tiempo de estabilización ligeramente mayor.

En la gráfica se puede apreciar cómo el sistema responde ante la influencia de la perturbación y el ruido, logrando mantener la estabilidad gracias al controlador diseñado. La línea discontinua roja indica el tiempo prescrito  $T$ , después del cual se espera que los estados del sistema converjan a los valores deseados.

### 5.1.2. Retroalimentación de la salida

En las secciones anteriores, hemos explorado la estabilización de sistemas mediante retroalimentación del estado (§4.2.1) y el diseño de observadores en tiempo discreto utilizando el método de integración de Euler implícito (§4.2.2). Estas técnicas han demostrado ser efectivas para la estabilización y observación de sistemas lineales en tiempo discreto. En esta sección, nos enfocaremos en la estabilización por retroalimentación de la salida. Esta metodología es crucial cuando no se dispone de todas las variables de estado para la retroalimentación y se necesita confiar en las mediciones de salida disponibles. Aplicaremos los métodos anteriormente discutidos para ejemplificar un sistema de segundo orden, integrando los conceptos desarrollados previamente para garantizar la estabilidad y el desempeño del sistema bajo consideraciones teóricas.

Consideremos el sistema de segundo orden de la ecuación (70). Para representar este sistema, definimos las matrices de estado, entrada y salida de la siguiente manera

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora podemos escribir los sistemas (25),(24) y el controlador (26) considerado en la sección 3.3.3, en su representación discreta de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \xi_{1_{k+1}} &= \xi_{1_k} + h\xi_{2_{k+1}} \\ \xi_{2_{k+1}} &= \xi_{2_k} + h \left[ -K_1 \varrho^2(t_{k+1}) \hat{\xi}_{1_{k+1}} - K_2 \varrho(t_{k+1}) \hat{\xi}_{2_{k+1}} + d(t_{k+1}) \right] \\ \hat{\xi}_{1_{k+1}} &= \hat{\xi}_{1_k} + h \hat{\xi}_{2_{k+1}} + h \varrho(t_{k+1}) L_1 \left[ \xi_{1_{k+1}} - \hat{\xi}_{1_{k+1}} + v(t_{k+1}) \right] \\ \hat{\xi}_{2_{k+1}} &= \hat{\xi}_{2_k} + h \varrho^2(t_{k+1}) L_2 \left[ \xi_{1_{k+1}} - \hat{\xi}_{1_{k+1}} + v(t_{k+1}) \right] - K_1 \varrho^2(t_{k+1}) \hat{\xi}_{1_{k+1}} - K_2 \varrho(t_{k+1}) \hat{\xi}_{2_{k+1}}. \end{aligned} \quad (73)$$

Estas ecuaciones describen la evolución de los estados  $\xi_1$  y  $\xi_2$  del sistema, así como de sus estimaciones  $\hat{\xi}_1$  y  $\hat{\xi}_2$ , en función de los parámetros de control  $K_1$  y  $K_2$ , y de los observadores  $L_1$  y  $L_2$ . La función  $\varrho(t)$  representa una ganancia variable en el tiempo, y  $d(t)$  y  $v(t)$  son términos de perturbación y ruido, respectivamente.

Para la implementación práctica, las ecuaciones del sistema y del observador se combinan en una única matriz que facilita el cálculo de los estados y sus estimaciones

$$\begin{aligned} \xi_{1_{k+1}} - h\xi_{2_{k+1}} &= \xi_{1_k} \\ \xi_{2_{k+1}} + hK_2 \varrho^2(t_{k+1}) \hat{\xi}_{1_{k+1}} + hK_2 \varrho(t_{k+1}) \hat{\xi}_{2_{k+1}} &= \xi_{2_k} + hd(t_{k+1}) \\ \hat{\xi}_{1_{k+1}} - h \hat{\xi}_{2_{k+1}} - h \varrho(t_{k+1}) L_1 \xi_{1_{k+1}} + h \varrho(t_{k+1}) L_1 \hat{\xi}_{1_{k+1}} &= \hat{\xi}_{1_k} + h \varrho(t_{k+1}) L_1 v(t_{k+1}) \\ \hat{\xi}_{2_{k+1}} - h \varrho^2(t_{k+1}) L_2 \xi_{1_{k+1}} + h \varrho^2(t_{k+1}) L_2 \hat{\xi}_{1_{k+1}} + \dots \\ \dots + hK_1 \varrho^2(t_{k+1}) \hat{\xi}_{1_{k+1}} + hK_2 \varrho(t_{k+1}) \hat{\xi}_{2_{k+1}} &= \hat{\xi}_{2_k} + h \varrho^2(t_{k+1}) L_2 v(t_{k+1}). \end{aligned} \quad (74)$$

Esta ecuación matricial compacta permite integrar tanto el sistema original como el observador en una sola formulación. La matriz inversa que multiplica el vector de estados y estimaciones garantiza que se cumplan las condiciones necesarias para la estabilidad y la precisión del observador. Es importante notar que los términos de perturbación  $d(t_{k+1})$  y el ruido  $v(t_{k+1})$  son incorporados directamente en la dinámica del sistema, proporcionando un marco completo para la compensación de estos efectos.

La combinación de estos elementos permite no sólo un análisis más profundo del comportamiento del sistema bajo control y observación, sino también la implementación práctica de algoritmos de control en tiempo real para sistemas dinámicos complejos.

$$\begin{bmatrix} \xi_{1_{k+1}} \\ \xi_{2_{k+1}} \\ \hat{\xi}_{1_{k+1}} \\ \hat{\xi}_{2_{k+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & hK_1\varrho^2(t_{k+1}) & hK_2\varrho(t_{k+1}) \\ -h\varrho(t_{k+1})L_1 & 0 & 1 + h\varrho(t_{k+1}) & -h \\ -h\varrho^2(t_{k+1}) & 0 & h\varrho^2(t_{k+1})(L_2 + K_1) & 1 + hK_2\varrho(t_{k+1}) \end{bmatrix}^{-1} \quad (75)$$

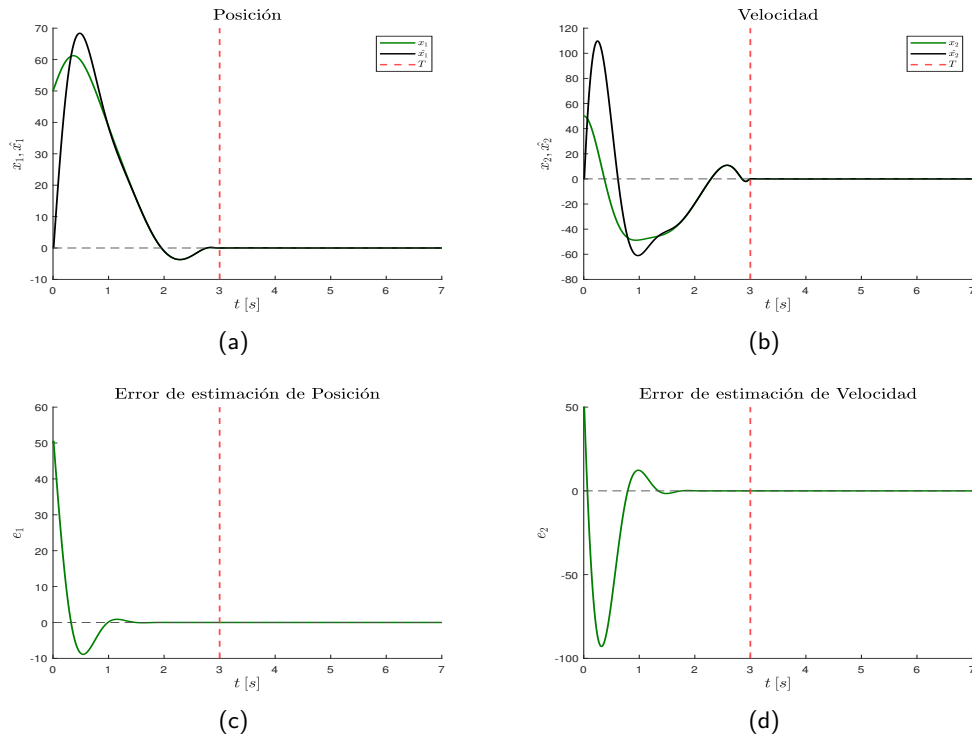
$$\times \left( \begin{bmatrix} \xi_{1_k} \\ \xi_{2_k} \\ \hat{\xi}_{1_k} \\ \hat{\xi}_{2_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ hd(t_{k+1}) \\ h\varrho(t_{k+1})L_1v(t_{k+1}) \\ h\varrho^2(t_{k+1})L_2v(t_{k+1}) \end{bmatrix} \right).$$

En las siguientes figuras se presentan las gráficas que muestran la evolución de los estados de un sistema de segundo orden controlado para estabilizarse en un tiempo prescrito. Las gráficas ilustran tanto los estados del sistema  $x_1$  y  $x_2$ , como sus estimaciones  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  obtenidas a través de un observador diseñado específicamente para este propósito.

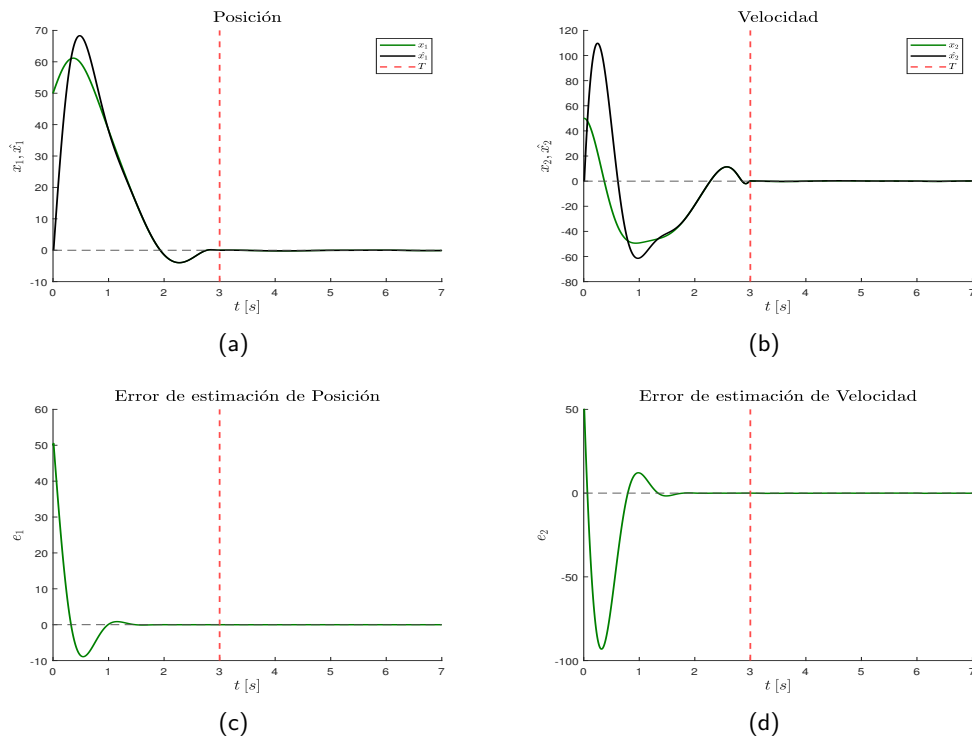
En la Figura 9, observamos la evolución de los estados del sistema sin perturbaciones ni ruido. La gráfica 9(a) muestra la posición  $x_1(t)$  y su estimación  $\hat{x}_1(t)$ , mientras que la gráfica 9(b) presenta la velocidad  $x_2(t)$  y su estimación  $\hat{x}_2(t)$ . Las gráficas 9(c) y 9(d) representan los errores de estimación de posición y velocidad, respectivamente. En todos los casos, el controlador logra estabilizar el sistema en el tiempo prescrito  $T$ , indicado por la línea roja discontinua.

En la Figura 10, se muestran resultados similares pero con la presencia de perturbaciones pero sin ruido. A pesar de estas condiciones, las gráficas demuestran que el sistema se estabiliza en el tiempo prescrito, aunque con ligeras desviaciones debidas a las perturbaciones. Las gráficas 10(a) y 10(b) nuevamente ilustran la posición y velocidad junto con sus estimaciones, mientras que las gráficas 10(c) y 10(d) muestran los errores de estimación.



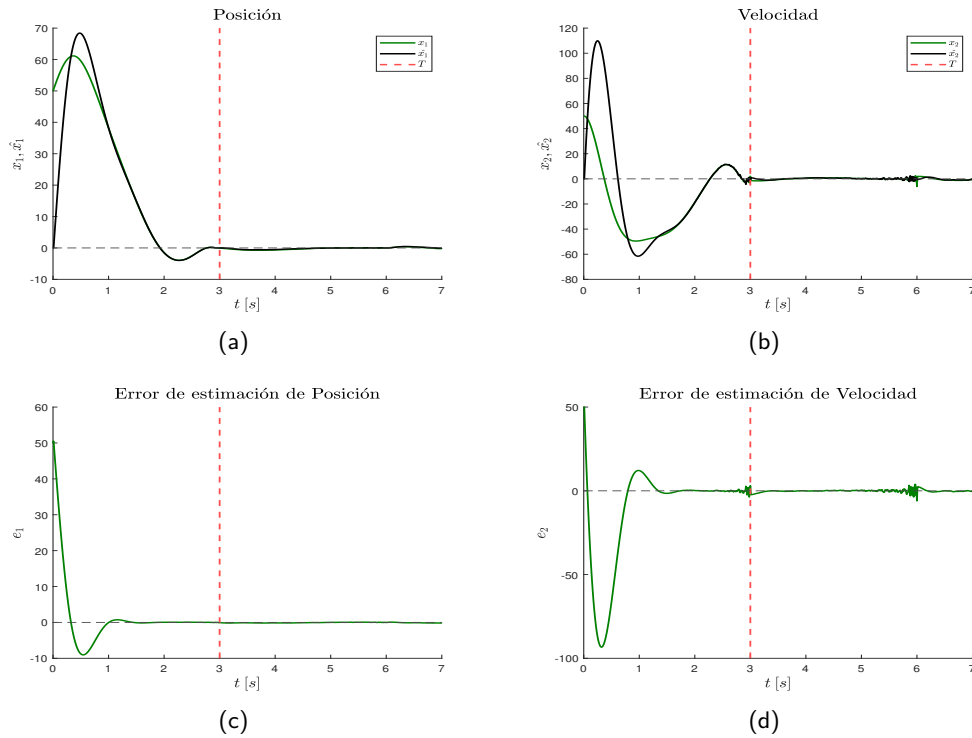


**Figura 9.** Evolución de los estados  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  del sistema con perturbaciones pero sin ruido.



**Figura 10.** Evolución de los estados  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  del sistema con perturbaciones y ruido.

Finalmente, en la figura 11, se comparan las evoluciones de los estados del sistema bajo condiciones de ruido y perturbaciones. Las gráficas 11(a) y 11(b) representan la posición y velocidad del sistema en presencia de una perturbación específica, y las gráficas 11(c) y 11(d) muestran los errores de estimación correspondientes.



**Figura 11.** Evolución de los estados  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  del sistema sin perturbaciones ni ruido.

En todas las figuras, se puede observar que el controlador diseñado es capaz de estabilizar el sistema en el tiempo prescrito, demostrando la eficacia del método de integración de Euler implícito para la retroalimentación por salida en sistemas lineales de segundo orden. Estas gráficas validan el desempeño teórico del controlador y el observador, mostrando que son capaces de manejar tanto perturbaciones externas como ruido en el sistema, asegurando la estabilidad y precisión deseadas.

## 5.2. Controlador conmutado por modos deslizantes para sistemas de segundo orden

### 5.2.1. Modelo dinámico del péndulo simple

En el estudio de los sistemas dinámicos, los sistemas lagrangianos juegan un papel fundamental debido a su capacidad para describir de manera precisa una amplia variedad de sistemas físicos. Un sistema lagrangiano se basa en el principio de mínima acción y utiliza la formulación de Lagrange para derivar las ecuaciones de movimiento de un sistema. Esta formulación es especialmente útil para sistemas con múltiples grados de libertad y donde las fuerzas pueden ser derivadas de una función de energía potencial. En esta sección, nos centraremos en el desarrollo del modelo dinámico de un péndulo, incluyendo términos críticos como el momento de inercia, la fricción viscosa y las perturbaciones externas, utilizando la formulación de Lagrange. Este enfoque nos permitirá obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales que describen completamente el comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones de operación.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para un sistema mecánico se derivan a partir del Lagrangiano,  $L$ , que es la diferencia entre la energía cinética,  $T$ , y la energía potencial,  $V$ , del sistema

$$L = T - V. \quad (76)$$

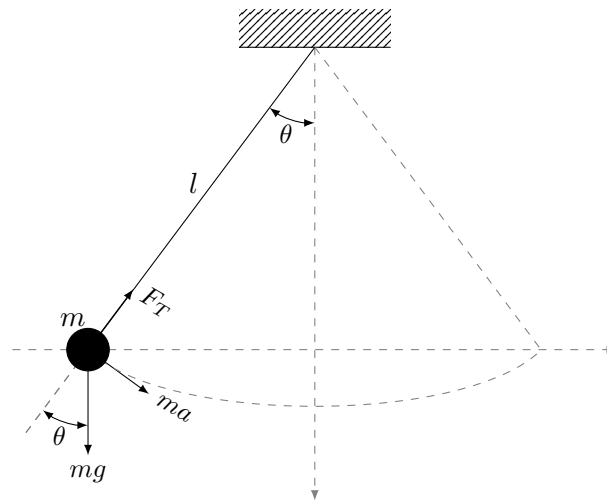


Figura 12. Diagrama de un péndulo simple.

Para un péndulo simple como se muestra en la figura 12, la energía cinética  $T$  y la energía potencial  $V$  son

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{q}^2 + \frac{1}{2}J\dot{q}^2 = \frac{1}{2}(ml^2 + J)\dot{q}^2,$$

$$V = mgl(1 - \cos(q)).$$

El Lagrangiano del sistema es entonces

$$L = \frac{1}{2}(ml^2 + J)\dot{q}^2 - mgl(1 - \cos(q)).$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se expresan como

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau - f_v \dot{q} + d(t),$$

donde  $\tau$  es el torque aplicado,  $f_v$  es el coeficiente de fricción viscosa, y  $d(t)$  es una perturbación externa.

Primero, calculamos las derivadas parciales del Lagrangiano

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = (ml^2 + J)\dot{q},$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = mgl \sin(q).$$

Luego, calculamos la derivada total con respecto al tiempo de  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = (ml^2 + J)\ddot{q}.$$

Sustituyendo estas expresiones en las ecuaciones de Euler-Lagrange, obtenemos

$$(ml^2 + J)\ddot{q} - mgl \sin(q) = \tau - f_v \dot{q} + d(t).$$

Reorganizando, obtenemos la ecuación del movimiento del péndulo

$$(ml^2 + J)\ddot{q} + f_v\dot{q} + mgl \sin(q) = \tau + d(t). \quad (77)$$

El modelo dinámico del péndulo simple desarrollado en esta sección proporciona una comprensión fundamental de la dinámica no lineal de un sistema físico básico. Este modelo incluye los efectos de la inercia, la fricción viscosa y una perturbación externa, lo cual permite una representación más realista del comportamiento del péndulo bajo diferentes condiciones operativas. Al integrar estos términos en las ecuaciones de movimiento, se logra capturar la complejidad del sistema, facilitando el diseño de estrategias de control más robustas y eficientes.

### 5.2.2. Retroalimentación del estado para un doble integrador

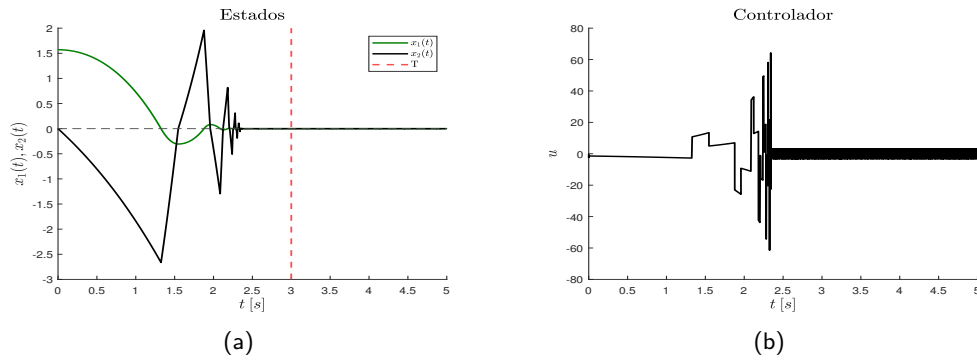
En esta sección, se presentan los resultados obtenidos al aplicar el controlador basado en modos deslizantes, desarrollado en la sección 3.4.3, al sistema de doble integrador representado por la ecuación (70). La ecuación (70) describe un sistema de segundo orden donde  $x_1$  y  $x_2$  son los estados del sistema,  $u$  es la entrada de control, y  $d(t)$  representa una perturbación externa.

El controlador por modos deslizantes, tal como se define en la sección 3.4.3, utiliza una superficie de deslizamiento  $s$ , que puede expresarse como:

En esta sección, se presentan los resultados obtenidos al aplicar el controlador basado en modos deslizantes desarrollado en la 3.4.3 al sistema de doble integrador representado por la ecuación (70). La ecuación (70) describe un sistema de segundo orden donde  $x_1$  y  $x_2$  son los estados del sistema,  $u$  es la entrada de control, y  $d(t)$  representa una perturbación externa.

El controlador por modos deslizantes, tal como se define en la ecuación (50), se implementa de manera directa utilizando el método de integración explícita de Euler. Esta aproximación permite una discretización eficiente del sistema y la aplicación del control de manera precisa, asegurando que las condiciones de estabilidad se mantengan a lo largo de la operación del sistema.

A continuación, se muestran las gráficas obtenidas de la simulación del sistema controlado bajo diferentes escenarios. Se analizan las respuestas del sistema en presencia de perturbaciones y ruido, así como en su ausencia, para demostrar la robustez y efectividad del controlador por modos deslizantes. Las gráficas muestran la evolución de los estados  $x_1$  y  $x_2$  del sistema.



**Figura 13.** Evolución de los estados  $x_1$ ,  $x_2$  y la señal de control  $u$  en presencia de perturbaciones.

En la figura 13(a) se presenta la evolución de los estados  $x_1$  y  $x_2$  del sistema de doble integrador bajo la acción del controlador por modos deslizantes implementado mediante el método de integración explícita de Euler. La gráfica muestra cómo ambos estados convergen al origen en un tiempo predeterminado,  $T$ , indicado por la línea roja discontinua. Este comportamiento es consistente con el objetivo de la estabilización en tiempo prescrito, garantizando que el sistema alcance el equilibrio de manera robusta ante posibles perturbaciones.

En la figura 13(b) se observa la señal de control  $u$  generada por el controlador por modos deslizantes. La señal de control presenta variaciones significativas durante el periodo transitorio, reflejando la acción del controlador para llevar al sistema a su estado deseado. Después del tiempo predefinido  $T$ , la señal de control se estabiliza, lo que indica que el sistema ha alcanzado el equilibrio y que el controlador ha cumplido su objetivo.

La implementación del controlador de retroalimentación del estado en el sistema de doble integrador, como se muestra en las figuras anteriores, demuestra la capacidad del controlador para estabilizar el sistema en tiempo prescrito. Observamos que los estados  $x_1$  y  $x_2$  convergen al origen dentro del tiempo deseado, a pesar de la presencia de perturbaciones y ruido. Ahora, extendemos este enfoque al modelo dinámico del péndulo, previamente descrito en la ecuación (77). Al aplicar el mismo controlador, mostrado en la ecuación (50), al modelo de péndulo, podemos analizar la efectividad del método en un sistema más complejo. Esta transición nos permite evaluar cómo el controlador de modos deslizantes puede ser implementado utilizando el método de integración explícita de Euler para estabilizar sistemas no lineales con perturbaciones externas y fricción viscosa.

Aquí, las siguientes ecuaciones definen las relaciones entre las variables del sistema, donde

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= b[\tau(t) - f_v x_2 - mgl \sin(x_1) + d(t)] \end{aligned} \quad (78)$$

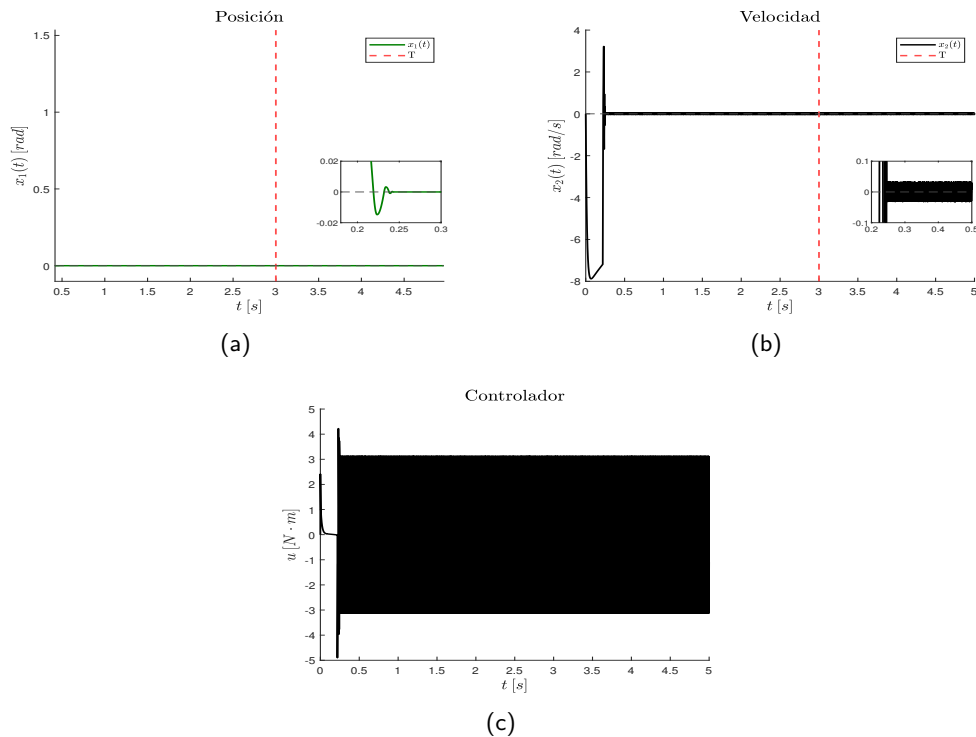
con  $b = 1/(ml^2 + J)$ . Al denotar

$$f(x_1, t) = b[\tau - mgl \sin(x_1)], \quad \phi(x, t) = b[d(t) - f_v x_2], \quad (79)$$

podemos formular el sistema en una estructura adecuada para la implementación del controlador presentado en la ecuación (50).

**Tabla 1.** Parámetros y variables utilizados en el modelo del péndulo

Símbolo	Descripción	Valor/Unidad
$m$	0.0474	$kg$
$l$	0.11	$m$
$J$	$3.11 \times 10^{-3}$	$kg \cdot m^2$
$f_v$	$2.43 \times 10^{-4}$	$N \cdot s/m$
$g$	9.8	$9.81 m/s^2$



**Figura 14.** Evolución de los estados  $x_1$ ,  $x_2$  y la señal de control  $u$  en presencia de perturbaciones.

El modelo del péndulo que hemos desarrollado incorpora varios parámetros y variables esenciales para describir su dinámica. La tabla 1 presenta los símbolos utilizados, su descripción y las unidades de medida correspondientes. Estos parámetros incluyen la masa del péndulo  $m$ , la longitud  $l$ , el momento de inercia  $J$ , el coeficiente de fricción viscosa  $f_v$ , la aceleración debida a la gravedad  $g$ .

Las gráficas presentadas en la figura 14 muestran la evolución de los estados  $x_1$  y  $x_2$  del sistema en presencia de perturbaciones, así como la señal de control  $u$  correspondiente. En la subfigura 14(a), observamos cómo los estados  $x_1$  y  $x_2$  responden a lo largo del tiempo, desde la condición inicial hasta alcanzar la estabilización. La línea verde representa el estado  $x_1(t)$ , mientras que la línea negra representa el estado  $x_2(t)$ . La línea discontinua roja indica el tiempo  $T$  en el cual el sistema debe alcanzar la estabilización prescrita.

En la subfigura 14(b), se muestra la evolución de la señal de control  $u(t)$ . Notamos que la señal de control experimenta variaciones significativas al inicio, necesarias para contrarrestar las perturbaciones y llevar el sistema a su estado deseado. Sin embargo, a medida que el sistema se estabiliza, la señal de control queda acotada entre dos valores, indicando que el controlador ha logrado mantener el sistema en el estado objetivo de manera eficiente.

Estas gráficas demuestran que, a pesar de las perturbaciones presentes, el controlador es capaz de estabilizar el sistema dentro del tiempo prescrito  $T$ . La respuesta dinámica tanto de los estados como de la señal de control valida la robustez del enfoque de control implementado, utilizando el método de integración explícita de Euler para la discretización del sistema.

### 5.2.3. Retroalimentación de la salida para un doble integrador

En esta subsección, se implementará el controlador conmutado por modos deslizantes aplicado a un sistema de doble integrador, utilizando los resultados obtenidos en las ecuaciones anteriores. Específicamente, se empleará el sistema descrito en la ecuación (70) y el controlador correspondiente de la ecuación (50). Además, para la estimación del estado, se utilizará el observador diseñado en la ecuación (53) junto con las funciones de inyección de las ecuaciones (54) y (55).

La implementación de este esquema de control se llevará a cabo mediante el método de integración explícita de Euler. Al combinar estas ecuaciones, se garantiza que el sistema de doble integrador mantenga su estabilidad y desempeño en presencia de perturbaciones, logrando la convergencia de los estados hacia

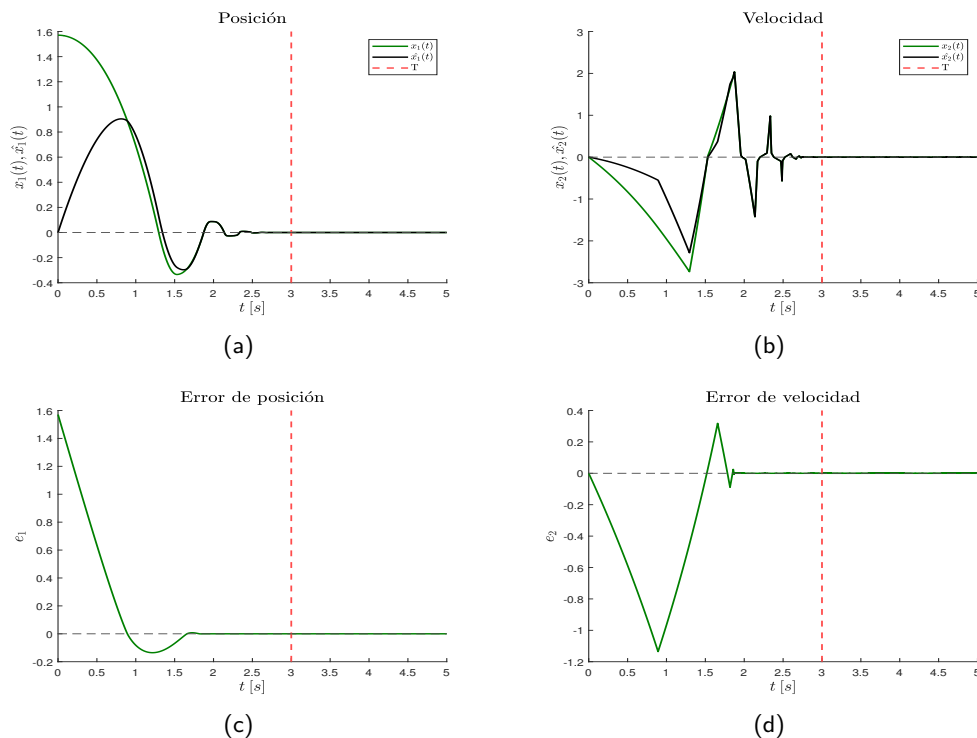


el origen en un tiempo predefinido.

Este enfoque permite evaluar la efectividad del controlador propuesto y su capacidad para manejar las perturbaciones mientras asegura la robustez del sistema. Los resultados obtenidos en esta sección proporcionarán una visión clara de la dinámica del sistema bajo control y la influencia del observador en la estimación precisa de los estados.

En la figura 15 se presenta la evolución de los estados  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  del sistema descrito en la ecuación (70) y los errores de estimación  $e_1$  y  $e_2$ . Las subfiguras permiten observar el desempeño del controlador y del observador implementados utilizando el método de integración explícita de Euler.

La subfigura 15(a) muestra la evolución de la posición  $x_1(t)$  y su estimación  $\hat{x}_1(t)$ . Se puede apreciar que ambos estados convergen al origen en el tiempo prescrito, indicando la efectividad del controlador en la estabilización del sistema. La subfigura 15(b) presenta la evolución de la velocidad  $x_2(t)$  y su estimación  $\hat{x}_2(t)$ . Al igual que en la subfigura anterior, los estados convergen al origen, lo que confirma la robustez del controlador en presencia de perturbaciones.



**Figura 15.** Evolución de los estados  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  del sistema (70) y los errores de estimación  $e_1$  y  $e_2$ .

En las subfiguras 15(c) y 15(d) se muestran los errores de estimación de posición  $e_1$  y velocidad  $e_2$ ,

respectivamente. Estos errores tienden a cero conforme transcurre el tiempo, lo que demuestra la precisión del observador diseñado en la ecuación (53).

En conjunto, estas gráficas validan la correcta implementación del controlador de la ecuación (50) y del sistema observado, destacando la capacidad del método de integración explícita de Euler para mantener la estabilidad y precisión en sistemas de segundo orden bajo control conmutado por modos deslizantes.

En la figura 16 se presenta la evolución de los términos de inyección del observador  $G_1$  y  $G_2$ , así como la señal de control  $u$  en presencia de perturbaciones.

La subfigura 16(a) muestra la evolución del término de inyección  $G_1$ . Este término es crucial para la estimación del estado del sistema, y su variación refleja los ajustes necesarios para compensar las perturbaciones y corregir los errores de estimación. Se observa que  $G_1$  inicialmente presenta oscilaciones antes de estabilizarse, lo que indica la respuesta del observador ante las perturbaciones.

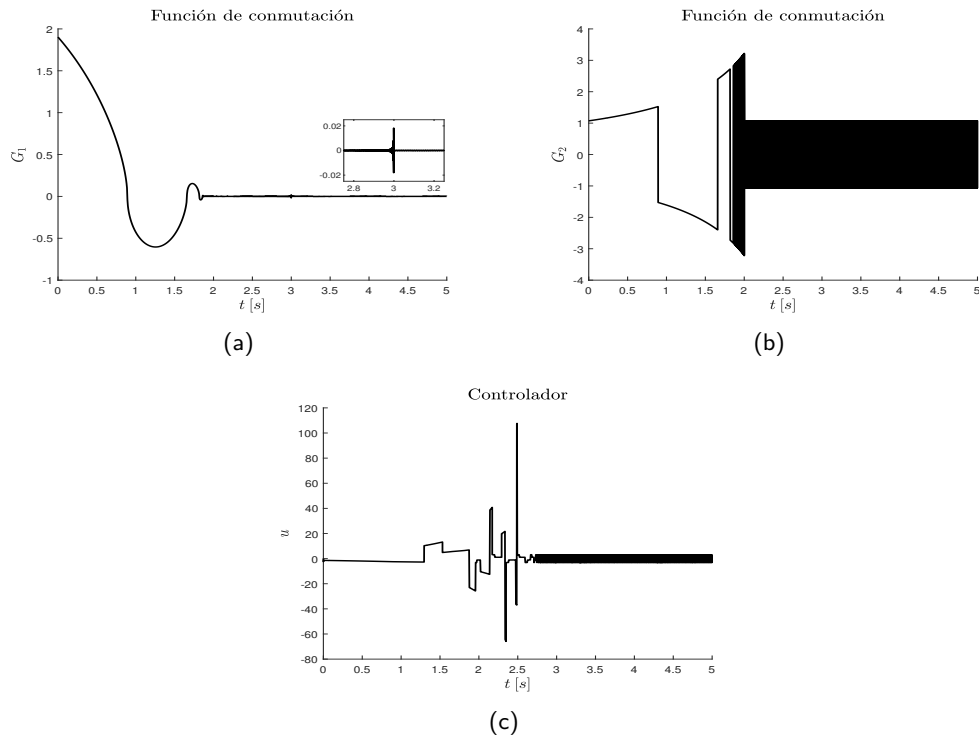
La subfigura 16(b) presenta la evolución del término de inyección  $G_2$ . Al igual que  $G_1$ ,  $G_2$  desempeña un papel esencial en la corrección de la estimación del estado. Se nota que  $G_2$  experimenta mayores oscilaciones y amplitudes en comparación con  $G_1$ , lo que sugiere que responde de manera más agresiva a las perturbaciones presentes en el sistema.

Finalmente, la subfigura 16(c) muestra la evolución de la señal de control  $u$ . La señal de control es responsable de estabilizar el sistema siguiendo las indicaciones del controlador de la ecuación (50). Al inicio,  $u$  muestra variaciones significativas necesarias para contrarrestar las perturbaciones y llevar el sistema a su estado deseado. A medida que el sistema se estabiliza, la señal de control tiende a valores constantes, lo que indica que el sistema ha alcanzado la estabilidad deseada.

Para continuar con la validación de nuestro método de retroalimentación de la salida, implementamos el mismo controlador y observador descritos anteriormente, pero aplicados al sistema del péndulo. El modelo dinámico del péndulo, que fue desarrollado utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange, se presentó anteriormente en la ecuación (77). Este modelo se transformó en un sistema de segundo orden según la ecuación (78).

En esta implementación, utilizamos el controlador descrito en la ecuación (50), el cual ha demostrado ser eficaz en la estabilización de sistemas mediante modos deslizantes. Además, el observador empleado es el que se describe en la ecuación (53), diseñado para estimar los estados del sistema de manera precisa en presencia de perturbaciones. Las funciones de inyección  $G_1$  y  $G_2$ , definidas en las ecuaciones (54) y (55), se emplean para ajustar la ganancia del observador y asegurar una respuesta adecuada ante

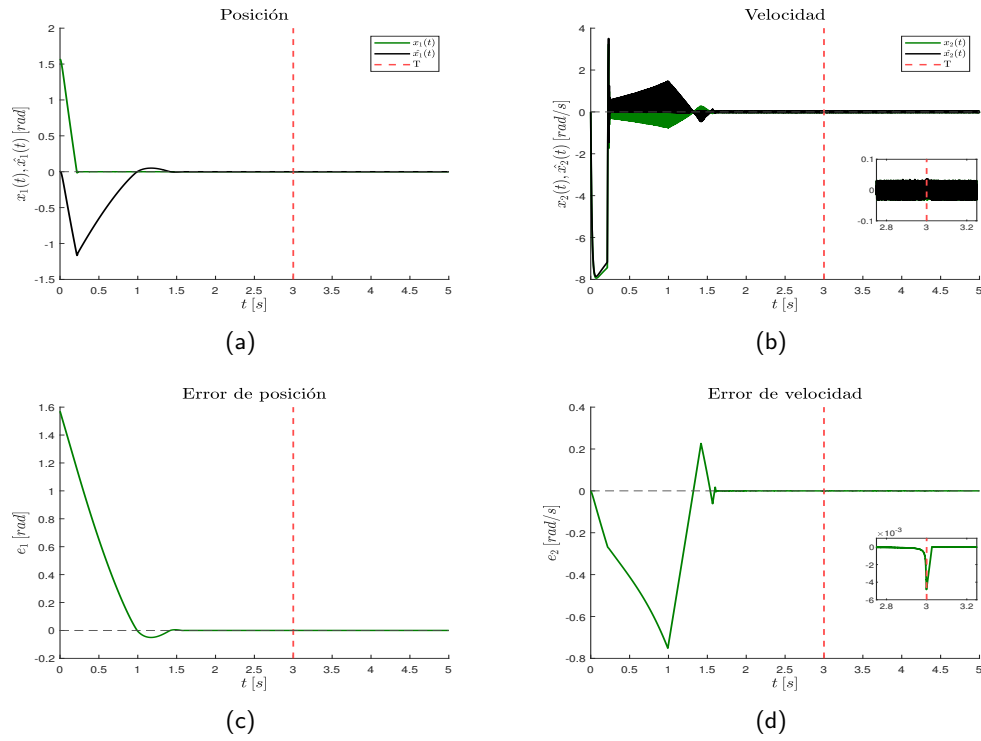
variaciones en los estados del sistema. Al aplicar este enfoque al sistema del péndulo, buscamos evaluar la robustez y efectividad del método de control y observación en un sistema no lineal que incluye términos de perturbación y fricción viscosa.



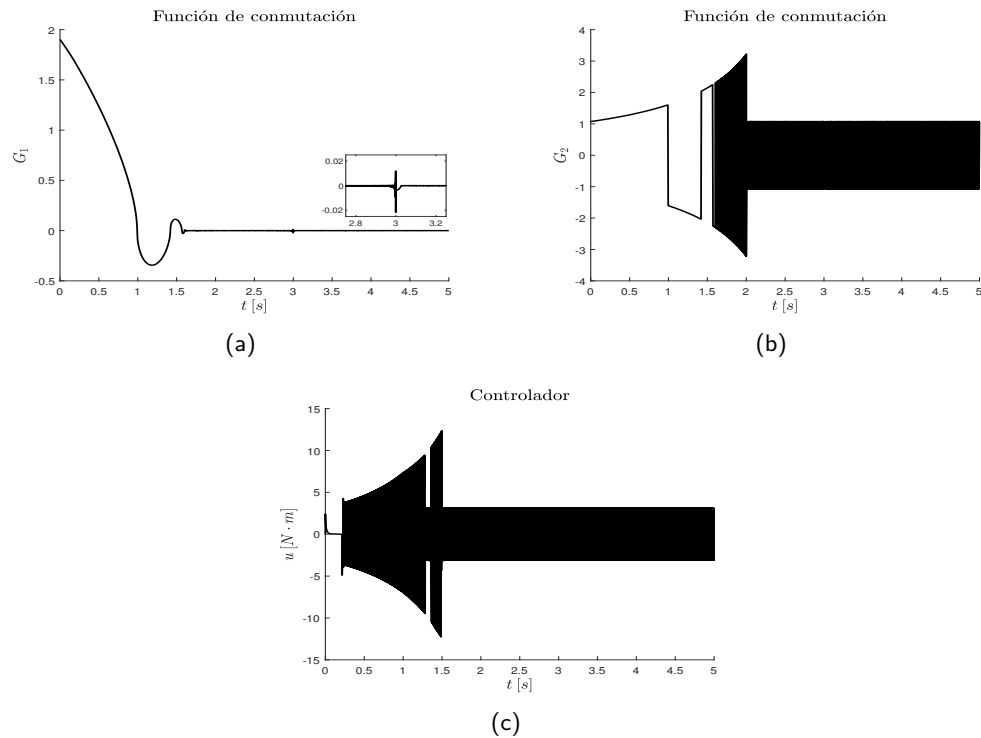
**Figura 16.** Evolución de los términos de inyección del observador  $G_1$ ,  $G_2$  y la señal de control  $u$  en presencia de perturbaciones.

En las figuras 17 y 18, se presentan los resultados de la implementación del método de retroalimentación de la salida utilizando el controlador de la ecuación (50), el sistema del péndulo simple de la ecuación (78), y el observador de la ecuación (53).

En las figuras 17(a) y 17(b), se observa la evolución de los estados  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\hat{x}_1$ , y  $\hat{x}_2$  del sistema del péndulo invertido en presencia de perturbaciones. La subfigura 17(a) muestra la posición  $x_1(t)$  y la estimación  $\hat{x}_1(t)$ , mientras que la subfigura 17(b) presenta la velocidad  $x_2(t)$  y su estimación  $\hat{x}_2(t)$ . En ambas gráficas se puede apreciar cómo las estimaciones siguen de cerca el comportamiento de los estados reales, indicando la efectividad del observador en tiempo discreto. Además, se destaca el tiempo prescrito  $T$  (línea roja punteada), donde se espera que el sistema haya alcanzado la estabilización deseada.



**Figura 17.** Evolución de los estados  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  del sistema (78) y los errores de estimación  $e_1$  y  $e_2$ .



**Figura 18.** Evolución de los términos de inyección del observador  $G_1$ ,  $G_2$  y la señal de control  $u$  en presencia de perturbaciones.

Las figuras 17(c) y 17(d) ilustra los errores de estimación de la posición ( $e_1$ ) y de la velocidad ( $e_2$ ), respectivamente. En estas gráficas, se puede observar que los errores disminuyen rápidamente, alcanzando valores cercanos a cero antes del tiempo prescrito  $T$ , lo que demuestra la robustez del controlador y la precisión del observador bajo las condiciones de perturbación aplicadas.

Por otro lado, la Figura 18 muestra la evolución de los términos de inyección del observador  $G_1$  y  $G_2$ , así como la señal de control  $u(t)$ . En la subfigura 18(a), se presenta el término de inyección  $G_1$ , mientras que en la subfigura 18(b) se observa  $G_2$ . La subfigura 18(c) muestra la señal de control  $u(t)$ , que es aplicada al sistema para lograr la estabilización en tiempo prescrito. Notamos que los términos de inyección y la señal de control experimentan variaciones significativas al inicio, necesarias para contrarrestar las perturbaciones y llevar el sistema a su estado deseado. Sin embargo, a medida que el sistema se estabiliza, estas señales quedan acotadas.

En conjunto, estas gráficas demuestran la efectividad del método de retroalimentación de la salida con el controlador y el observador implementados para estabilizar el sistema del péndulo invertido en tiempo prescrito, incluso en presencia de perturbaciones externas.

Esta tesis presenta una serie de resultados numéricos y gráficos que ilustran la efectividad de los métodos de control propuestos. Este capítulo se centra en dos enfoques principales: la estabilización de sistemas de segundo orden mediante controladores conmutados por modos deslizantes y la implementación de retroalimentación de la salida en sistemas de doble integrador y péndulo simple.

El desarrollo del modelo del péndulo simple con los términos de fricción viscosa, momento de inercia y perturbaciones permite una representación precisa de las dinámicas del sistema. Los resultados indican que el método de control propuesto puede manejar estas complejidades adicionales y asegurar la estabilidad del sistema.

Utilizando el método de integración explícita de Euler, los resultados demuestran que el controlador es capaz de estabilizar el sistema en el tiempo prescrito. Las gráficas presentadas muestran una convergencia clara de los estados del sistema hacia el origen.

Al aplicar el controlador y observador al sistema de doble integrador descrito en las ecuaciones relevantes, los resultados muestran que se puede alcanzar una estabilidad robusta incluso en presencia de perturbaciones. Los errores de estimación se reducen significativamente, y los términos de inyección del observador se comportan de manera estable.

Los resultados confirman que el uso de métodos de integración implícita, como el método de Euler

implícito, proporciona una solución robusta para la discretización de controladores diseñados en tiempo continuo. Esto es especialmente evidente en la estabilización en tiempo prescrito, donde las ganancias dinámicas altas pueden manejarse de manera efectiva.

Tanto en los sistemas de doble integrador como en el péndulo simple, los métodos de control propuestos muestran una alta robustez frente a perturbaciones externas y ruido de medición. Esto se refleja en la estabilidad y precisión de los estados estimados y controlados.

La selección adecuada de las ganancias del controlador y del observador es crucial para el desempeño del sistema. Los resultados demuestran que es posible alcanzar la estabilización sin necesidad de aumentar indefinidamente las ganancias del controlador, evitando así problemas de implementación relacionados con ganancias infinitas.

#### **5.2.4. Comparación de resultados**

Se realiza una comparación entre el controlador por modos deslizantes implementado mediante el método de integración explícita de Euler y el controlador lineal implementado mediante el método de integración implícita de Euler, aplicados a un sistema de doble integrador.

El controlador por modos deslizantes, implementado con integración explícita de Euler, logra converger hacia el estado deseado momentos antes del tiempo prescrito. Este enfoque es especialmente útil para evitar la alta ganancia que ocurre en  $t = T$  en métodos de integración explícitos, lo que se traduce en una convergencia más rápida del sistema. La robustez ante perturbaciones es una característica de este controlador, ya que muestra una alta capacidad para mantener el desempeño del sistema incluso en presencia de ruido y perturbaciones, como se observa en las gráficas de simulación. Además, la implementación explícita facilita un cálculo más directo y menos complejo. Sin embargo, los resultados obtenidos en las simulaciones de este controlador sufren el característico chattering asociado a este tipo de controladores.

A su vez, el controlador de retroalimentación lineal implementado mediante el método de integración implícita de Euler presenta características que permiten precisión en la convergencia del tiempo prescrito asignado por el diseñador. A diferencia del método explícito, el método implícito maneja la alta ganancia ajustando el paso de integración y las ganancias del controlador, sin necesidad de sacrificar la exactitud de convergencia en tiempo prescrito, ya que este método siempre se aproxima a la solución en lazo

cerrado con valores finitos de la función de alta ganancia (18). Este método asegura que el sistema mantenga una trayectoria estable hacia el estado deseado, sin los problemas de alta ganancia que pueden afectar a los métodos explícitos cuando  $t = T$  si los implementamos para este tipo de controladores de retroalimentación lineal.

## Capítulo 6. Conclusiones

---

El presente trabajo de investigación se ha centrado en la estabilización robusta en tiempo prescrito de sistemas en forma canónica. Los conceptos fundamentales relacionados con la convergencia en tiempo finito, fijo y prescrito, así como los métodos de integración explícitos e implícitos, han sido esenciales para el desarrollo de la investigación, proporcionando una base teórica sólida.

Uno de los principales aportes de esta tesis es demostrar teóricamente y corroborar por medio de simulaciones que los controladores diseñados pueden mantener la estabilidad del sistema incluso en presencia de perturbaciones y ruido. La implementación de técnicas de retroalimentación de la salida ha permitido ajustar continuamente las variables del sistema basándose en las salidas observadas, corrigiendo errores de manera continua y mostrando que los términos de perturbación y ruido incorporados directamente en la dinámica del sistema pueden ser manejados efectivamente.

La investigación ha demostrado que la implementación de controladores en tiempo discreto es efectiva y no pierde propiedades de convergencia de los estados del sistema al origen en un tiempo prescrito, manteniendo la robustez ante perturbaciones y ruido mostrada para sistemas en tiempo continuo. El uso del método de Euler implícito para la discretización de las ecuaciones del sistema con retroalimentación lineal ha sido clave para conservar las propiedades de estabilidad numérica y la precisión en la solución de las ecuaciones diferenciales discretizadas. Los resultados obtenidos validan esta metodología como adecuada para la implementación práctica de controladores lineales.

Las simulaciones numéricas presentadas en el capítulo 5 han corroborado la efectividad de los controladores diseñados, ilustrando la evolución de los estados del sistema en diversas condiciones. Estas simulaciones hacen evidente que, independientemente de las condiciones iniciales, los estados del sistema convergen al origen dentro del tiempo prescrito, confirmando la robustez y precisión del método propuesto.

En resumen, el estudio comparativo entre el controlador por modos deslizantes implementado mediante el método de integración explícita de Euler y el controlador lineal implementado mediante el método de integración implícita de Euler, aplicado a un sistema de doble integrador, revela diferencias significativas, especialmente en el fenómeno de chattering. Este efecto se manifiesta en el controlador por modos deslizantes, mientras que no ocurre en el controlador lineal.

El controlador por modos deslizantes, ha demostrado buen desempeño en términos de convergencia hacia el estado deseado. Este método es particularmente útil para evitar la alta ganancia, estabilizando el



sistema antes de  $t = T$  y proporcionando robustez ante perturbaciones y ruido, manteniendo un desempeño confiable. Sin embargo, el uso del método de integración explícita puede conllevar a problemas de cálculo numérico, especialmente en controladores de tiempo prescrito, si no se manejan adecuadamente las ganancias del controlador y del observador, el paso de integración y la condición de conmutación entre los controladores empleados. Además, es importante destacar que el método explícito no mitiga el fenómeno de chattering, una oscilación indeseada de alta frecuencia en la señal de control, la cual es inherente a los controladores por modos deslizantes y puede afectar la precisión y estabilidad del sistema. El manejo cuidadoso de estos factores es crucial para asegurar una implementación exitosa del controlador.

De manera adicional, el controlador lineal implementado mediante el método de integración implícita de Euler conserva estabilidad numérica y precisión notable. A diferencia del método explícito, el método implícito maneja la alta ganancia sin causar chattering y siempre usando valores finitos de alta ganancia en su última iteración, sin sacrificar exactitud en el tiempo prescrito de convergencia.

En cuanto al manejo de perturbaciones externas y ruido de medición, se observan diferencias significativas entre ambos controladores. Ambos controladores, por modos deslizantes y lineal con integración implícita, preservan su efectividad en la presencia de perturbaciones externas. Sin embargo, el ruido de medición afecta de manera más crítica al sistema en lazo cerrado en tiempo prescrito. Este solo puede manejar ruidos de medición en un intervalo de valores, ya que en presencia de estos, el sistema solo puede garantizar convergencia en una vecindad del origen, pero no exactamente en el origen, ya que son perturbaciones no acopladas. Esta limitación subraya la importancia de considerar la calidad de las mediciones y la magnitud del ruido al diseñar y aplicar estos controladores.

En resumen, mientras que el controlador por modos deslizantes con integración explícita se destaca por su rápida convergencia y robustez ante perturbaciones, el controlador lineal con integración implícita proporciona estabilidad numérica y precisión en la convergencia en tiempo prescrito. La elección entre estos métodos debe basarse en las necesidades específicas del sistema y las condiciones de operación. En aplicaciones donde la rapidez de respuesta es esencial, el controlador por modos deslizantes con integración explícita de Euler es una opción viable debido a su buena respuesta ante perturbaciones. Sin embargo, este controlador puede presentar el fenómeno de chattering y exige más cálculos numéricos. Por otro lado, en situaciones que requieren precisión en la convergencia y estabilidad numérica sin chattering, el método implícito es preferible. Ambos controladores son robustos, pero la elección entre ellos depende del contexto y los requisitos específicos del sistema controlado, asegurando así un buen desempeño y fiabilidad.

Este trabajo ha contribuido al campo de la implementación numérica de controladores de estabilización en tiempo prescrito, proporcionando nuevas perspectivas sobre el uso de la integración implícita para la estabilización robusta. Prácticamente, los algoritmos desarrollados se espera que sean aplicables a una amplia gama de sistemas dinámicos, ofreciendo soluciones efectivas para el control de estos sistemas.

## **6.1. Problemas abiertos**

Para futuras investigaciones, se sugiere explorar la aplicación de estos controladores en sistemas no lineales y de mayor complejidad, como por ejemplo en algún mecanismo que cuente con más grados de libertad y eslabones o algún robot móvil. Además, sería beneficioso investigar la integración de otros métodos de discretización implícita y su impacto en la estabilidad y robustez del sistema. La combinación de técnicas de control adaptativo con los métodos desarrollados en esta tesis también representa una prometedora área de estudio, que podría ampliar aún más las aplicaciones prácticas de estos algoritmos de control.

En conclusión, la investigación realizada ha demostrado que es posible diseñar e implementar controladores robustos y precisos en tiempo prescrito utilizando técnicas de integración implícita. Los resultados obtenidos validan esta metodología y abren nuevas vías para la investigación y desarrollo en el campo del control de sistemas dinámicos.

## Literatura citada

- Abdurahman, A., Jiang, H., & Hu, C. (2021). Improved fixed-time stability results and application to synchronization of discontinuous neural networks with state-dependent switching. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31, 5725–5744. <https://doi.org/10.1002/rnc.5566>.
- Acary, V., Brogliato, B., & Orlov, Y. V. (2011). Chattering-free digital sliding-mode control with state observer and disturbance rejection. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 57(5), 1087–1101. <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2174676>.
- Aldana-López, R., Gómez-Gutiérrez, D., Trujillo, M. A., Navarro-Gutiérrez, M., Ruiz-León, J., & Becerra, H. M. (2021). A predefined-time first-order exact differentiator based on time-varying gains. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, (11), 5510–5522. <https://doi.org/10.1002/rnc.5536>.
- Aldana-López, R., Seeber, R., Gómez-Gutiérrez, D., Angulo, M. T., & Defoort, M. (2022). A redesign methodology generating predefined-time differentiators with bounded time-varying gains. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 33(15), 9050–9065. <https://doi.org/10.1002/rnc.6315>.
- Aldana-López, R., Seeber, R., Haimovich, H., & Gómez-Gutiérrez, D. (2023). On inherent limitations in robustness and performance for a class of prescribed-time algorithms. *Automatica*, 158, 111284. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2023.111284>.
- Anh Tuan Vo, T. N. T. & Kang, H.-J. (2023). A model-free-based control method for robot manipulators: Achieving prescribed performance and ensuring fixed time stability. <https://doi.org/https://doi.org/10.3390/app13158939>.
- Antsaklis, P. J. & Michel, A. N. (2006). *Linear systems*. Birkhäuser.
- Bhat, S. P. & Bernstein, D. S. (2005). Geometric homogeneity with applications to finite-time stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17, 101–127. <https://doi.org/10.1007/s00498-005-0151-x>.
- Brogliato, B. & Polyakov, A. (2021). Digital implementation of sliding-mode control via the implicit method: A tutorial. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 31(9), 3528–3586. <https://doi.org/10.1002/rnc.5121>.
- Burden, R. L., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2017). *Numerical Analysis*, (10ma ed.). Cengage Learning, Boston, MA.
- Butcher, J. C. (2008). *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons.
- Chen, Y., Ding, J., & Yan, D. (2024). Nonlinear robust adaptive control of universal manipulators based on desired trajectory. *Applied Sciences*, 14(5), 2219. <https://doi.org/10.3390/app14052219>.
- Chitour, Y., Ushirobira, R., & Bouhemou, H. (2020). Stabilization for a perturbed chain of integrators in prescribed time. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 58(2), 1022–1048. <https://doi.org/10.1137/19M1285937>.
- Du, H., Li, S., & Qian, C. (2011). Finite-time attitude tracking control of spacecraft with application to attitude synchronization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56, 2711–2717. <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2159419>.

- Efimov, D. & Orlov, Y. (2023a). On implicit discretization of prescribed-time converging differentiator. In *Conference on Decision and Control (CDC)*, (accepted).
- Efimov, D. & Orlov, Y. (2023b). On implicit discretization of prescribed-time stabilizers. In *Conference on Decision and Control (CDC)*, (accepted).
- Efimov, D., Polyakov, A., Zimenko, K., & Wang, J. (2022). An exact robust hyperexponential differentiator. In *61th Conference on Decision and Control (CDC), Cancun*.
- Efimov, D., Polyakov, A., Zimenko, K., & Wang, J. (2023). On hyperexponential stabilization of double integrator in continuous and discrete time. In *IFAC World Congress, Yokohama*.
- Gómez-Gutiérrez, D. (2020). On the design of nonautonomous fixed-time controllers with a predefined upper bound of the settling time. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 30(10), 3871–3885. <https://doi.org/10.1002/rnc.4976>.
- Han, L., Mao, J., & Li, J. (2023). Optimized trajectory tracking for robot manipulators with uncertain dynamics: A composite position predictive control approach. *Electronics*, 12(21), 4548. <https://doi.org/10.3390/electronics12214548>.
- Holloway, J. & Krstic, M. (2019a). Prescribed-time observers for linear systems in observer canonical form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 64(9), 3905–3912. <https://doi.org/10.1109/TAC.2018.2890751>.
- Holloway, J. & Krstic, M. (2019b). Prescribed-time output feedback for linear systems in controllable canonical form. *Automatica*, 107, 77–85. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.05.027>.
- Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Prentice-Hall.
- Labbadi, M., Boubaker, S., Djemai, M., Mekni, S. K., & Bekrar, A. (2022). Fixed-time fractional-order global sliding mode control for nonholonomic mobile robot systems under external disturbances. *Fractal and Fractional*, 6. <https://doi.org/10.3390/FRACTALFRACT6040177>.
- Levant, A. (2007). Principles of 2-sliding mode design. *Automatica*, 43, 576–586. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.10.008>.
- Orlov, Y., Kairuz, R. I. V., & Aguilar, L. T. (2022). Prescribed-time robust differentiator design using finite varying gains. *IEEE Control Systems Letters*, 6, 620–625. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3084134>.
- Orlov, Y., Verdés Kairuz, R. I., & Aguilar, L. T. (2024). Scaling technique for prescribed-time output feedback stabilization: Autonomous and non-autonomous paradigms and their comparative study. *Journal of the Franklin Institute*, 361(5), 106642. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2024.01.043>.
- Polderman, J. W. & Willems, J. C. (2013). *Introduction to the Mathematical Theory of Systems and Control Plant Controller*. [Texto PDF].
- Praly, L. & Jiang, Z. (2004). Linear output feedback with dynamic high gain for nonlinear systems. *Systems and Control Letters*, 53(2), 107–116. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2003.11.001>.
- Song, Y., Wang, Y., Holloway, J., & Krstic, M. (2017a). Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time. *Automatica*, 83, 243–251. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.06.008>.

- Song, Y., Wang, Y., Holloway, J., & Krstic, M. (2017b). Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time. *Automatica*, *83*, 243–251. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.06.008>.
- Song, Y., Wang, Y., Holloway, J., & Krstic, M. (2017c). Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time. *Automatica*, *83*, 243–251. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2017.06.008>.
- Song, Y., Wang, Y., & Krstic, M. (2019). Time-varying feedback for stabilization in prescribed finite time. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, *29*(3), 618–633. <https://doi.org/10.1002/rnc.4323>.
- Song, Y., Ye, H., & Lewis, F. L. (2023). Prescribed-time control and its latest developments. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, *53*(7), 4102–4116. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2023.3240751>.
- Tran, D. & Yucelen, T. (2020). Finite-time control of perturbed dynamical systems based on a generalized time transformation approach. *Systems & Control Letters*, *136*, 104605. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2019.104605>.
- Utkin, V., Poznyak, A., Orlov, Y., Utkin, A. P. . V., & Polyakov, A. (2020). Conventional and high order sliding mode control. *Journal of the Franklin Institute*, *357*, 243–251. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2020.08.001>.
- Verdés Kairuz, R. I., Orlov, Y., & Aguilar, L. T. (2022). Prescribed-time stabilization of controllable arbitrary order systems using switched state feedback. In *American Control Conference (ACC)*, 1847–1852.
- Wang, G., Fan, Y., Qiu, B., & Sun, X. (2018). Adaptive trajectory tracking control for underactuated unmanned surface vehicle subject to unknown dynamics and time-varying disturbances. *Applied Sciences*, *8*(4), 547. <https://doi.org/10.3390/app8040547>.
- Xu, B. (2018). Composite learning finite-time control with application to quadrotors. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, *48*, 1806–1815. <https://doi.org/10.1109/TSMC.2017.2698473>.
- Zhang, C., Yan, Y., Narayan, A., & Yu, H. (2018). Practically oriented finite-time control design and implementation: Application to a series elastic actuator. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, *65*, 4166–4176. <https://doi.org/10.1109/TIE.2017.2764843>.
- Zhang, K., Zhou, B., Jiang, H., Liu, G., & Duan, G. (2021). Practical prescribed-time sampled-data control of linear systems with applications to the air-bearing testbed. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. <https://doi.org/10.1109/TIE.2021.3086720>.

# Anexos

## Anexo A

En la sección 4.1., se describió el diseño y simulación de un controlador conmutado por modos deslizantes. A continuación, se presenta el código en MATLAB que permite la simulación de dicho controlador (50). Este código realiza la simulación del comportamiento del sistema bajo estudio, aplicando las estrategias de control y observación discutidas previamente en la sección 3. Se incluyen comentarios sobre las constantes y parámetros utilizados, así como las especificaciones de la simulación y las condiciones iniciales. El bucle de simulación utiliza el método de Euler explícito para la integración numérica de las ecuaciones del sistema, mientras que los resultados obtenidos se almacenan y visualizan mediante gráficas que muestran la evolución de los estados, los errores y las funciones de conmutación.

```

1  clc; close all; clear all;
2  %% Constantes y parametros del sistema (72)
3  % Constantes Pendulo
4  M = 0.0474;
5  l = 0.11;
6  J = 3.11e-03;
7  g = 9.81;
8  fv = 2.43e-04;
9  b = 1/(M*l^2 - J);
10
11 % Parametros observador (47)
12 PHI = 0.3;
13 alpha = (2*PHI)+0.5;
14 beta = ((1 + (alpha^(-1))))*PHI)+0.5;
15
16 % Parametros de señales externas (perturbacion y control)
17 a1 = 10;
18 w1t = 4.2;
19 D = 1;
20 w1d = 1.57;
21 w2d = 1.26;
22
23 % Parametros del controlador (44)
24 k1 = 2.1;
25 k2 = 1;
26 k3 = 0.2;

```

```
27 k4 = 0.5;
28 parametro_a = 0;
29
30 % Especificaciones del tiempo de simulación
31 T = 3;          % tiempo prescrito
32 Tsym = 5;      % duración de la simulación (s)
33 dt = 1e-5;     % paso
34 t = 0:dt:Tsym;
35
36 % Condiciones iniciales
37 x1 = pi/2;
38 x2 = 0;
39 xi1 = 0;
40 xi2 = 0;
41 u=0;
42
43 % Inicialización de vectores de resultados
44 e1 = zeros(size(t));
45 e2 = zeros(size(t));
46 etheta = zeros(size(t));
47 x1_vector = zeros(size(t));
48 x2_vector = zeros(size(t));
49 xi1_vector = zeros(size(t));
50 xi2_vector = zeros(size(t));
51 G1 = zeros(size(t));
52 G2 = zeros(size(t));
53 Gw = zeros(size(t));
54 H = zeros(size(t));
55 u_vector = zeros(size(t));
56
57 tic
58 % Bucle de simulación
59 for i=1:length(t)
60
61     % Almacenamiento de resultados
62     x1_vector(i) = x1;
63     x2_vector(i) = x2;
64     xi1_vector(i) = xi1;
```

```

65     xi2_vector(i) = xi2;
66     u_vector(i) = u;
67
68     % Perturbación
69     d = (D/(2*b))*(sin(w1d*t(i)) + cos(w2d*t(i)));
70
71     % Errores de observación
72     e1(i) = x1 - xi1;
73     e2(i) = x2 - xi2;
74
75     % Termino de alta ganancia variable
76     miu1 = T/(T-t(i));
77
78     % Observador (47)
79     if T-t(i) > 1e-3 && abs(sign(e1(i)))==1
80     G1(i) = (miu1/T)*e1(i) + alpha*sqrt(miu1)*sqrt(abs(e1(i)))*sign(e1(i))
81         ;
82     else
83     G1(i) = alpha*sqrt(abs(e1(i)))*sign(e1(i));
84     end
85
86     if T-t(i) > 10e-1 && abs(sign(e1(i)))==1
87     G2(i) = beta*miu1*sign(e1(i));
88     else
89     G2(i) = beta*sign(e1(i));
90     end
91
92
93     %%-----Sistema doble integrador-----
94
95     % Controlador con todo el estado (44)
96     if T-t(i) > 1e-2 && sqrt((x1^2) + (x2^2)) > 0.01
97     nu_a = -k1*(miu1^2)*(sign(x1))*abs(x1)^(parametro_a/(2-parametro_a)) -
98         (k2*(miu1^(2-parametro_a))*(abs(x2)^parametro_a)*sign(x2)) + ((
99         miu1/T)*x2) - (k3*(miu1^2)*x1) - (k4*miu1*x2);
100     u = nu_a;
101     else

```



```

100     va = -(k1*(abs(x1)^(parametro_a/(2-parametro_a))*sign(x1)) - (k2*(abs
        (x2)^parametro_a)*sign(x2)) - (k3*x1) - (k4*x2);
101     u = va;
102     end
103
104     % Controlador con estimacion del estado
105     % if T-t(i) > 1e-4 && sqrt((x1^2) + (x2^2)) > 1e-1
106     %     nu_a = -k1*(miu1^2)*(sign(x1))*abs(x1)^(parametro_a/(2-
        parametro_a)) - (k2*(miu1^(2-parametro_a))*(abs(xi2)^parametro_a)*
        sign(xi2)) + ((miu1/T)*xi2) - (k3*(miu1^2)*x1) - (k4*miu1*xi2);
107     %     u = nu_a;
108     % else
109     %     va = -(k1*(abs(x1)^(parametro_a/(2-parametro_a))*sign(x1)) - (
        k2*(abs(x2)^parametro_a)*sign(xi2)) - (k3*x1) - (k4*xi2);
110     %     u = va;
111     % end
112
113     xi1 = xi1_vector(i) + dt*(xi2_vector(i) + G1(i));
114     xi2 = xi2_vector(i) + dt*(u + G2(i));
115
116     x1 = x1_vector(i) + dt*(x2_vector(i));
117     x2 = x2_vector(i) + dt*(u);
118
119
120
121     %%-----Sistema Pendulo-----
122
123     % Controlador con todo el estado
124     % if T-t(i) > 1e-4 && sqrt((x1^2) + (x2^2)) > 1e-1
125     %     nu_a = k1*(miu1^2)*(sign(x1))*abs(x1)^(parametro_a/(2-
        parametro_a)) + (k2*(miu1^(2-parametro_a))*(abs(x2)^parametro_a)*
        sign(x2)) - ((miu1/T)*x2) + (k3*(miu1^2)*x1) + (k4*miu1*x2);
126     %     u = nu_a;
127     % else
128     %     va = (k1*(abs(x1)^(parametro_a/(2-parametro_a))*sign(x1)) + (k2
        *(abs(x2)^parametro_a)*sign(x2)) + (k3*x1) + (k4*x2);
129     %     u = va;
130     % end

```

```

131
132 % Controlador con estimacion del estado
133 % if T-t(i) > 1e-4 && sqrt((x1^2) + (x2^2)) > 1e-1
134 %     nu_a = k1*(miu1^2)*(sign(x1))*abs(x1)^(parametro_a/(2-
        parametro_a)) + (k2*(miu1^(2-parametro_a))*(abs(xi2)^parametro_a)*
        sign(xi2)) - ((miu1/T)*xi2) + (k3*(miu1^2)*x1) + (k4*miu1*xi2);
135 %     u = nu_a;
136 % else
137 %     va = (k1*(abs(x1)^(parametro_a/(2-parametro_a))*sign(x1)) + (k2
        *(abs(x2)^parametro_a)*sign(xi2)) + (k3*x1) + (k4*xi2);
138 %     u = va;
139 % end
140
141 % % Aplicación de Euler explicito
142 % xi1 = xi1_vector(i) + dt*(xi2_vector(i) + G1(i));
143 % xi2 = xi2_vector(i) + dt*(b*(u - M*g*l*sin(x1_vector(i))) + G2(i));
144 %
145 % % Aplicación de Euler explicito para un pendulo
146 % x1 = x1_vector(i) + dt*(x2_vector(i));
147 % x2 = x2_vector(i) + dt*(b*(u - fv*x2_vector(i) - M*g*l*sin(x1_vector
        (i)) + d));
148 end
149 toc
150
151 fig1 = figure(1);
152 fig1.Color = 'w';
153
154 fig2 = figure(2);
155 fig2.Color = 'w';
156
157 fig3 = figure(3);
158 fig3.Color = 'w';
159
160 fig4 = figure(4);
161 fig4.Color = 'w';
162
163 fig5 = figure(5);
164 fig5.Color = 'w';

```

```

165
166 fig6 = figure(6);
167 fig6.Color = 'w';
168
169 fig7 = figure(7);
170 fig7.Color = 'w';
171
172 figure(1), hold on
173 plot(t,x1_vector,'LineWidth',1.5,'Color',[0 0.5 0]);
174 plot(t,xi1_vector,'LineWidth',1.5,'Color',[0 0 0]);
175 xline(T,'Color','r','LineStyle','--','LineWidth',1.5);
176 yline(0,'Color','k','LineStyle','--');
177 xlabel('$t$', 'FontSize',14,'Interpreter','latex');
178 ylabel('$x_1(t), \hat{x}_1(t)$', 'FontSize',14,'Interpreter','latex');
179 title('Posicion', 'FontSize',16,'Interpreter','latex');
180 legend(['$x_1(t)$' '$\hat{x}_1(t)$' "T"], 'Interpreter','latex')
181
182 figure(2), hold on
183 plot(t,x2_vector,'LineWidth',1.5,'Color',[0 0.5 0]);
184 plot(t,xi2_vector,'LineWidth',1.5,'Color',[0 0 0]);
185 xline(T,'Color','r','LineStyle','--','LineWidth',1.5);
186 yline(0,'Color','k','LineStyle','--');
187 xlabel('$t$', 'FontSize',14,'Interpreter','latex');
188 ylabel('$x_2(t), \hat{x}_2(t)$', 'FontSize',14,'Interpreter','latex');
189 title('Velocidad', 'FontSize',16,'Interpreter','latex');
190 legend(['$x_2(t)$' '$\hat{x}_2(t)$' "T"], 'Interpreter','latex')
191
192 figure(3), hold on
193 plot(t,e1,'LineWidth',1.5,'Color',[0 0.5 0]);
194 xline(T,'Color','r','LineStyle','--','LineWidth',1.5);
195 yline(0,'Color','k','LineStyle','--');
196 xlabel('$t$', 'FontSize',14,'Interpreter','latex');
197 ylabel('$e_1$', 'FontSize',14,'Interpreter','latex');
198 title('Error de posicion', 'FontSize',16,'Interpreter','latex');
199
200 figure(4), hold on
201 plot(t,e2,'LineWidth',1.5,'Color',[0 0.5 0]);
202 xline(T,'Color','r','LineStyle','--','LineWidth',1.5);

```

```
203 yline(0, 'Color', 'k', 'LineStyle', '--');
204 xlabel('$t$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex');
205 ylabel('$e_2$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex');
206 title('Error de velocidad', 'FontSize', 16, 'Interpreter', 'latex');
207
208 figure(5), hold on
209 plot(t, G1, 'LineWidth', 1.5, 'Color', [0 0 0]);
210 xlabel('$t$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex');
211 ylabel('$G_1$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex');
212 title('Funcion de conmutacion', 'FontSize', 16, 'Interpreter', 'latex');
213
214 figure(6), hold on
215 plot(t, G2, 'LineWidth', 1.5, 'Color', [0 0 0]);
216 xlabel('$t$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex');
217 ylabel('$G_2$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex');
218 title('Funcion de conmutacion', 'FontSize', 16, 'Interpreter', 'latex');
219
220 figure(7), hold on
221 plot(t, u_vector, 'LineWidth', 1.5, 'Color', [0 0 0]);
222 xlabel('$t$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex');
223 ylabel('$u$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex');
224 title('Controlador', 'FontSize', 16, 'Interpreter', 'latex');
```

## Anexo B

En la sección 5.1.1, se presenta la implementación de un método implícito aplicado a un sistema lineal de segundo orden con retroalimentación del estado [70]. Este código en MATLAB permite la simulación de dicho sistema, utilizando el método de Euler implícito mostrado en la ecuación (60) para la discretización de las ecuaciones diferenciales. La retroalimentación del estado se incorpora en el controlador, permitiendo ajustar las variables del sistema en función del estado. En el código se definen los parámetros y constantes necesarios, así como las condiciones iniciales y las especificaciones de la simulación. Además, se ha programado para almacenar y visualizar los resultados obtenidos, permitiendo así un análisis detallado del comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones. A continuación, se presenta el código utilizado para la simulación y análisis del sistema en la sección 5.1.1.

```

1  clc; clear; close all;
2
3  % Especificaciones de la simulación
4  Tsym = 7;          % duración de la simulación (s)
5  h = 1e-2;        % paso
6  t = 0:h:Tsym;
7  T = 3;           % tiempo prescrito
8
9  % Matrices del sistema
10 A = [0 1;0 0];
11 B = [0;1];
12 C = [1 0];
13
14 % Ganancias
15 K = [1 1];
16
17 % Condiciones iniciales
18 x = [50;50];
19
20 % Inicialización de vectores de resultados
21 x_vector = zeros(2,length(t));
22
23 tic
24 % Bucle de simulación
25 k = ceil(t/T);

```

```

26
27
28 %% simulacion sin ruido ni perturbaciones
29 for i=1:length(t)-1
30     % Almacenamiento de resultados
31     x_vector(:,i) = x;
32
33     % Funcion de alta ganancia
34     rhoM12 = k(i)*T/(k(i)*T-t(i)+h);
35
36     % perturbacion
37     d = -rand(1)*0;
38
39     % Ruido
40     nuM1 = [sin(2*(t(i)+h)) + rand(1); cos(pi*(t(i)+h)) + rand(1)]*0;
41
42     Acur = 1;
43     Bcur = -h;
44
45     DM1 = [rhoM12^2 0 ; 0 rhoM12];
46     Ccur = h*K(1)*rhoM12^2;
47     Dcur = 1 + h*K(2)*rhoM12;
48     F = [Acur Bcur;Ccur Dcur];
49     Finv = inv(F);
50     LM1 = -h*B*K*DM1;
51
52     xM = Finv*(x + h*B*d + LM1*nuM1);
53
54     x = xM;
55 end
56 toc
57
58 fig1 = figure(1);
59 fig1.Color = 'w';
60
61 figure(1), hold on, grid minor
62 plot(t,x_vector(1,:), 'LineWidth',1.5, 'Color', [0 0.5 0]);
63 plot(t,x_vector(2,:), 'LineWidth',1.5, 'Color', [0 0 0]);

```

```
64 xline(T,'Color','r','LineStyle','--','LineWidth',1.5);
65 xlabel('$t_k$','FontSize',14,'Interpreter','latex');
66 ylabel('$x_1, x_2$','FontSize',14,'Interpreter','latex');
67 title('Estados','FontSize',16,'Interpreter','latex');
68 legend(['$x_1$' '$x_2$' '$T$'],'Interpreter','latex')
69 axis tight
```

## Anexo C

En la sección 5.1.2, se presenta la implementación de un método de retroalimentación de la salida aplicado a un sistema lineal de segundo orden. Este enfoque utiliza un observador para estimar los estados del sistema y un controlador para estabilizar el sistema basado en estas estimaciones. El código en MATLAB desarrollado para esta sección permite la simulación del sistema utilizando el método de Euler implícito para la discretización de las ecuaciones diferenciales.

La retroalimentación de la salida se implementa mediante el uso del controlador y del observador, que ajustan las variables del sistema en función de las mediciones de salida y las estimaciones de estado. El código incluye la definición de los parámetros y constantes necesarios, las condiciones iniciales, y las especificaciones de la simulación. Además, se ha programado para almacenar y visualizar los resultados obtenidos, permitiendo así un análisis detallado del comportamiento del sistema bajo diferentes condiciones.

A continuación, se presenta el código utilizado para la simulación y análisis del sistema en la sección 5.1.2.

```

1  clc; clear; close all;
2
3  % Especificaciones de la simulación
4  Tsym = 7;          % duración de la simulación (s)
5  h = 1e-2;        % paso
6  t = 0:h:Tsym;
7  T = 3;           % tiempo prescrito
8
9  %% Preambulo de simulación
10 A = [0 1;0 0];
11 B = [0;1];
12 C = [1 0];
13
14 % Ganancias
15 K = [1 1];
16 L = [5;20];
17
18 % Condiciones iniciales
19 x = [50;50];

```



```

20  xi = [0;0];
21
22  % Inicialización de vectores de resultados
23  x_vector = zeros(2,length(t));
24  xi_vector = zeros(2,length(t));
25
26  tic
27  % Bucle de simulación
28  k = ceil(t/T);
29
30  for i=1:length(t)-1
31      % Almacenamiento de resultados
32      x_vector(:,i) = x;
33      xi_vector(:,i) = xi;
34
35      % Tiempo prescrito
36      rhoM12 = k(i)*T/(k(i)*T-t(i)+h);
37
38      d = -rand(1)*2;
39
40      % Ruido
41      nuM1 = 0.1*(sin(2*(t(i)+h)) + rand(1));
42
43      F = [1 -h 0 0 ; 0 1 h*K(1)*(rhoM12^2) h*K(2)*rhoM12 ; -h*rhoM12*L(1) 0
           1+h*rhoM12*L(1) -h ; -h*(rhoM12^2)*L(2) 0 h*(rhoM12^2)*(L(2)+K(1))
           1+h*K(2)*rhoM12];
44      Finv = inv(F);
45
46      Xm1 = Finv*([x;xi]+[0;h*d;h*rhoM12*L(1)*nuM1;h*(rhoM12^2)*L(2)*nuM1]);
47
48      x = [Xm1(1);Xm1(2)];
49      xi = [Xm1(3);Xm1(4)];
50  end
51  toc
52
53  e = x_vector - xi_vector;
54
55  fig1 = figure(1);

```

```

56  fig1.Color = 'w';
57
58  fig2 = figure(2);
59  fig2.Color = 'w';
60
61  fig3 = figure(3);
62  fig3.Color = 'w';
63
64  fig4 = figure(4);
65  fig4.Color = 'w';
66
67  figure(1), hold on
68  plot(t,x_vector(1,:), 'LineWidth',1.5, 'Color',[0 0.5 0]);
69  plot(t,xi_vector(1,:), 'LineWidth',1.5, 'Color',[0 0 0]);
70  xline(T, 'Color','r', 'LineStyle','--', 'LineWidth',1.5);
71  yline(0, 'Color','k', 'LineStyle','--');
72  xlabel('$t_k$', 'FontSize',14, 'Interpreter','latex');
73  ylabel('$x_1, \hat{x}_1$', 'FontSize',14, 'Interpreter','latex');
74  title('Posici\'' on', 'FontSize',16, 'Interpreter','latex');
75  legend(["$x_1$" "$\hat{x}_1$" "$T$"], 'Interpreter','latex')
76
77  figure(2), hold on
78  plot(t,x_vector(2,:), 'LineWidth',1.5, 'Color',[0 0.5 0]);
79  plot(t,xi_vector(2,:), 'LineWidth',1.5, 'Color',[0 0 0]);
80  xline(T, 'Color','r', 'LineStyle','--', 'LineWidth',1.5);
81  yline(0, 'Color','k', 'LineStyle','--');
82  xlabel('$t_k$', 'FontSize',14, 'Interpreter','latex');
83  ylabel('$x_2, \hat{x}_2$', 'FontSize',14, 'Interpreter','latex');
84  title('Velocidad', 'FontSize',16, 'Interpreter','latex');
85  legend(["$x_2$" "$\hat{x}_2$" "$T$"], 'Interpreter','latex')
86
87  figure(3)
88  hold on,
89  plot(t,e(1,:), 'LineWidth',1.5, 'Color',[0 0.5 0]);
90  xline(T, 'Color','r', 'LineStyle','--', 'LineWidth',1.5);
91  yline(0, 'Color','k', 'LineStyle','--');
92  xlabel('$t_k$', 'FontSize',14, 'Interpreter','latex');
93  ylabel('$e_1$', 'FontSize',14, 'Interpreter','latex');

```

```
94 title('Error de estimaci\''on de Posici\''on', 'FontSize', 16, 'Interpreter', 'latex');
95
96 figure(4)
97 hold on
98 plot(t, e(2,:), 'LineWidth', 1.5, 'Color', [0 0.5 0]);
99 xline(T, 'Color', 'r', 'LineStyle', '--', 'LineWidth', 1.5);
100 yline(0, 'Color', 'k', 'LineStyle', '--');
101 xlabel('$t_k$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex');
102 ylabel('$e_2$', 'FontSize', 14, 'Interpreter', 'latex');
103 title('Error de estimaci\''on de Velocidad', 'FontSize', 16, 'Interpreter', 'latex');
```