

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el CONAHCYT (Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Óptica con orientación en Óptica Física**

**Desarrollo de software para la simulación de generación y
propagación de haces láseres en cavidades bidimensionales**

Tesis
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Yael Saulinho Ramírez Twiss

Ensenada, Baja California, México
2024

Tesis defendida por
Yael Saulinho Ramírez Twiss

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Roger Sean Cudney Bueno
Director de tesis

Dr. Kevin Arthur O'Donnell

Dra. Mónica Elizabeth Tentori Espinosa

Dr. Serguei Miridinov



Dr. Daniel Jáuregui Vázquez
Coordinador del Posgrado en Óptica

Dra. Ana Denise Re Araujo
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta **Yael Saulinho Ramírez Twiss** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Óptica con orientación en Óptica Física.

Desarrollo de software para la simulación de generación y propagación de haces láseres en cavidades bidimensionales

Resumen aprobado por:

Dr. Roger Cudney Sean Bueno
Director de tesis

En este trabajo de tesis se presenta el uso de un software interactivo que sirve como herramienta complementaria para el diseño experimental de cavidades láseres. El software permite simular la propagación y generación de haces láseres en cavidades ópticas centradas y alineadas, utilizando la teoría de las matrices ABCD para haces gaussianos. Para validar el funcionamiento del software, se ha utilizado para asistir en el diseño experimental de una cavidad láser. La cavidad láser consiste en una fuente de bombeo pulsada a 880 nm dirigida longitudinalmente hacia un cristal de Nd:YAG, que actúa como medio activo para generar luz láser a 1064 nm. El cristal se coloca en medio de una cavidad delimitada por un espejo plano y un espejo curvo con un radio de curvatura de 200 mm. Con el software se simuló una cavidad equivalente a la experimental la cual nos dio información de la localización de la cintura de la fuente de bombeo, la condición de estabilidad de la cavidad y el grado de traslape entre la luz de la fuente de bombeo y el haz láser. Posteriormente, ajustando la potencia y tasa de repetición de la fuente de bombeo, se exploró experimentalmente la región de estabilidad de la cavidad y el efecto termo-óptico producido en el cristal de Nd:YAG. De los resultados experimentales y computacionales, se determinó la longitud de la cavidad que producía la mayor potencia de salida del láser y se infirió el grado de lenseo óptico del cristal, el cual se estimó equivalente a colocar una lente convergente con distancia focal de alrededor de 33 mm en la posición del cristal Nd:YAG.

Palabras clave: software interactivo, cavidad láser, matrices ABCD, estabilidad, lenseo óptico

Abstract of the thesis presented by **Yael Saulinho Ramirez Twiss** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Optics with orientation in Physical Optics

Software development for the simulation and propagation of laser beams in bidimensional cavities

Abstract approved by:

Dr. Roger Cudney Sean Bueno
Thesis Director

This thesis presents the use of an interactive software that serves as a complementary tool for the experimental design of laser cavities. The software allows to simulate the propagation and generation of laser beams in centered and aligned optical cavities, using the ABCD matrix theory for Gaussian beams. To validate the operation of the software, it has been used to assist in the experimental design of a laser cavity. The laser cavity consists of a pulsed pump source at 880 nm directed longitudinally towards a Nd:YAG crystal, which acts as an active medium to generate laser light at 1064 nm. The crystal is placed in the middle of a cavity delimited by a flat mirror and a curved mirror with a radius of curvature of 200 mm. With the software, a cavity equivalent to the experimental one was simulated, which gave us information about the location of the pump source waist, the stability condition of the cavity and the degree of overlap between the light from the pump source and the laser beam. Subsequently, by adjusting the power and repetition rate of the pump source, the stability region of the cavity and the thermo-optic effect produced in the Nd:YAG crystal were experimentally explored. From the experimental and computational results, the cavity length that produced the highest laser output power was determined and the degree of optical lensing of the crystal was inferred, which was estimated to be equivalent to placing a convergent lens with a focal length of about 33 mm at the position of the Nd:YAG crystal.

Keywords: interactive software, laser cavity, ABCD matrix, stability, optical lensing

Dedicatoria

A mi padre†, a mi madre y a mi hermana.

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT), por permitirme realizar mis estudios de posgrado.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE), al Posgrado en Óptica y al Departamento de Óptica Física por la oportunidad de poder formarme académica y personalmente.

A mi director de tesis, Dr. Roger Sean Cudney Bueno, por su paciencia, atención y confianza, para poder llevar a conclusión mi tesis de maestría.

A mi familia por su apoyo incondicional y por recordarme que al final todo tiene su propósito.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español.....	ii
Resumen en inglés.....	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos.....	v
Lista de figuras.....	viii
Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Objetivos	4
1.1.1 Objetivo general.....	4
1.1.2 Objetivos específicos.....	4
1.2 Estructura de la tesis	4
Capítulo 2. Fundamentos teóricos	6
2.1 Modo gaussiano	6
2.1.1 Propagación en el espacio libre.....	8
2.2 Modos superiores: Hermite-Gaussiano	9
2.3 Cavidades	10
2.3.1 Cavity sencilla: dos espejos curvos.....	10
2.3.2 Cavidades más complejas.....	12
Capítulo 3. Diseño del software	19
3.1 Conceptos de programación orientada a objetos.....	19
3.1.1 Clases y objetos	19
3.1.2 Herencia	20

3.1.3	Eventos	21
3.2	Funcionamiento del software	21
3.2.1	Diseño de cavidad óptica	22
3.2.2	Diseño de cavidad óptica con elementos ópticos	24
3.2.3	Algoritmo para el cálculo de la estabilidad	25
3.2.4	Algoritmo para la propagación de la fuente de bombeo	27
Capítulo 4.	Arreglo experimental	28
4.1	Prueba de la navaja	29
4.2	Cavidad óptica	31
4.2.1	Localización de la cintura del haz de bombeo	31
4.2.2	Emisión láser	33
4.3	Lenseo térmico	35
Capítulo 5.	Conclusiones	38
	Literatura citada	41
	Anexos	43

Lista de figuras

Figura	Página
Figura 1. Procesos de emisión de luz. a) Emisión espontánea. El átomo excitado decae de un nivel superior a uno menor espontáneamente, emitiendo un fotón con energía igual a la diferencia de energía entre los niveles. b) Emisión estimulada. Un fotón incidente estimula el decaimiento de un átomo excitado en un nivel superior a un nivel inferior produciendo un nuevo fotón idéntico al incidente cuya energía es igual a la diferencia de energía entre los niveles.	1
Figura 2. Amplificación. La energía de bombeo sobre un medio activo logra la inversión de población para amplificar la luz incidente.	2
Figura 3 Cavity óptica. Diagrama donde se muestran los tres sistemas para obtener emisión láser. Los espejos que forman la cavidad permiten redireccionar la luz de vuelta al medio activo amplificándola para obtener luz láser a la salida del espejo con menor reflectancia.	3
Figura 4 Amplitud de campo eléctrico. Se muestra una amplitud de un campo eléctrico arbitrario $\mathbf{E}(x, y, z)$ con variaciones en el plano transversal xy a lo largo de su dirección de propagación z . Las flechas negras punteadas nos indican dirección y contracción de la onda.	6
Figura 5 Modo gaussiano. En la parte superior, visto desde el plano transversal xy , se muestra la distribución en intensidad (proporcional al módulo cuadrado del campo eléctrico) y el semi ancho $w(z)$. En la parte inferior se muestra la distribución en intensidad a lo largo del eje x de manera esquemática.	7
Figura 6 Modo gaussiano. Visto desde el plano zy se muestran algunos parámetros del modo gaussiano: el semiancho w_0 en el plano $z = 0$, ángulo de divergencia θd ; y a diferentes planos a lo largo del eje de propagación z el semi ancho $w(z)$ y el radio de curvatura del frente de onda $R(z)$ (línea negra punteada).	8
Figura 7 Perfil transversal en intensidad de los modos Hermite-Gaussiano. Se muestra el modo 00 (parte inferior izquierda), cuyo semiancho es el más pequeño, hasta el modo 22 (parte superior derecha) cuyo semiancho es el más grande de entre los modos mostrados en la imagen.	10
Figura 8 a) Un haz gaussiano con semi ancho w_0 en la cintura y b) una cavidad óptica compuesta por dos espejos curvos. Se muestra una cavidad delimitada por dos espejos curvos separados a una distancia L entre sí, cuyos radios de curvatura R_1 y R_2 coinciden con el radio de curvatura del frente de onda (líneas negras punteadas) del modo gaussiano en las posiciones colocados.	11
Figura 9 Diagrama de estabilidad para una cavidad óptica compuesta por dos espejos curvos. La región estable corresponde a la zona sombreada, mientras que la línea punteada es la curva $g_1 g_2 = 1$	11
Figura 10 Rayo de luz. Rayo (flecha roja) con posición $\mathbf{r}(z)$ y pendiente θ respecto al eje z	12
Figura 11 Propagación de un rayo en el espacio libre. Las magnitudes del rayo cambian de una posición $\mathbf{r}(z_1)$ y pendiente θ a una nueva posición $\mathbf{r}(z_2)$ y pendiente θ' respecto al eje z	13
Figura 12 Matrices ABCD de elementos ópticos comunes.	13

- Figura 13 Descripción de rayos y haces gaussianos. a) En la parte superior se muestra la descripción por rayos paraxiales al pasar por una serie de elementos ópticos. b) Mientras que la parte inferior se muestra la descripción usando modos gaussianos. Los cuales son calculables de manera análoga. 14
- Figura 14 Elementos ópticos colocados en la trayectoria de un modo. Un modo con parámetro complejo q_1 incide sobre el 1er elemento óptico modificando, a la salida, el parámetro complejo a q_2 , que a su vez al pasar por el 2do elemento óptico modifica el parámetro a q_3 y así sucesivamente hasta pasar por el n-ésimo elemento óptico. 15
- Figura 15 Elementos ópticos alineados sobre el eje z delimitados por dos espejos. Un modo con parámetro complejo q_1 se propaga desde el primer al n-ésimo elemento óptico. Al reflejarse en el espejo de la derecha se redirecciona a la misma serie de elementos ópticos propagándose desde el n-ésimo elemento al primer elemento óptico..... 16
- Figura 16 Comparación de un modo gaussiano (rojo) y un modo de orden superior (azul). El modo gaussiano con ángulo de divergencia θ y semiancho $w(z)$, mientras que el modo de orden mayor posee ángulo de divergencia $M2\theta$ y semiancho $Mw(z)$ sobrepuestos a lo largo de sus cinturas. 17
- Figura 17 Ejemplo de un diagrama de la clase Espejo en UML (Fowler y Scott, 1999). La parte superior contiene el nombre de la clase, la parte central los atributos y la sección inferior los métodos. 20
- Figura 18 Ejemplo de un diagrama de clases en UML. Placa dieléctrica, Fuente, Espejos y Lente son subclases de la clase Elemento óptico. 20
- Figura 19 Interfaz gráfica del programa. Ventana principal donde se encuentran los botones para agregar elementos ópticos (rectángulo rojo) el Canvas (rectángulo magenta), barras de desplazamiento debajo y a la derecha del Canvas (encerradas en café), las reglas de referencia en milímetros, botones para escalar el ancho del haz (rectángulo verde), botón para crear la cavidad (rectángulo azul) y botón para graficar el semiancho y radio de curvatura (rectángulo negro). . 22
- Figura 20 Simulación de cavidad óptica formada por dos espejos. En la figura superior a) se muestra la ventana secundaria (al presionar el botón "MirrorsOrder") junto con la selección de los espejos que formarán la cavidad. En la figura inferior b) se observa que la cavidad óptica es estable desplegando el haz láser (línea verde)..... 23
- Figura 21 Posibles trayectorias de la luz con cuatro espejos. Se muestran las posibles trayectorias que un haz (flechas rojas) en una cavidad compuesta por cuatro espejos (puntos negros) puede tener. 23
- Figura 22 Cavidad compuesta por cuatro espejos. Se muestra el orden de selección de los cuatro espejos que formarán la cavidad óptica. En la parte inferior de la ventana secundaria se observan los botones "Lineal Cavity" y "Ring Cavity" que indican las dos posibles configuraciones de la cavidad. 24
- Figura 23 Simulación de una cavidad formada por dos espejos curvos. En la parte superior a) se muestra una cavidad formada por dos espejos curvos y tres elementos ópticos en el canvas alejados de la línea guía. En la parte inferior b) se muestra los mismos elementos ópticos centrados y alineados. 25

- Figura 24 Cavity óptica con dos lentes y una placa dieléctrica. En la figura a) se muestra el parámetro q_1 , en la cara frontal del espejo, obtenido de concatenar y multiplicar en reversa las matrices asociadas a todos los elementos ópticos de acuerdo con como aparecen en la trayectoria del lazo negro punteado. b) El parámetro q_2 para el plano contiguo tras concatenar las matrices en reversa en el orden en que el lazo negro punteado pasa por ellos y así sucesivamente como se ilustra en c) y d) para los planos siguientes. 26
- Figura 25 Diagrama de flujo del cálculo de estabilidad. Partimos calculando la estabilidad, si la condición de estabilidad se cumple se calculan el semiancho y el radio de curvatura para todos los planos dentro de la cavity para finalmente desplegar el modo gaussiano. 26
- Figura 26 Fuente de bombeo fuera de una cavity óptica. a) La luz proveniente de la fuente de bombeo llega con parámetro q_1 a la parte posterior del primer lente. b) Al pasar por la lente, aplicando la matriz M_2 asociada a la lente, se obtiene el nuevo parámetro del modo q_2 . c) Propagamos la luz hasta la cara posterior del primer espejo utilizando la matriz M_3 para obtener q_3 y en d) propagamos una vez más hasta la cara frontal del espejo obteniendo q_4 27
- Figura 27 Diagrama de flujo del cálculo de propagación. Desde donde parte el modo y entre cada uno de los planos entre los elementos ópticos se calcula el semiancho y el radio de curvatura a lo largo de su trayectoria. 27
- Figura 28 Esquema general del láser. La luz a la salida de la fibra, proveniente del diodo, es recolectada y enfocada con una lente convergente hacia un cristal de Nd:YAG cortado al ángulo de Brewster, el cual está dentro de una cavity hecha por un espejo plano y un espejo curvo acoplador. 28
- Figura 29 Diagrama de la prueba de la navaja. a) Se indican las distancias relativas de los siete planos donde se colocó una navaja. b) Se coloca una navaja en la trayectoria del haz y como al desplazar la navaja transversalmente altera la cantidad de luz medida por el detector (región roja sombreada). 29
- Figura 30 Gráficas de la energía contra el desplazamiento de la navaja (columna izquierda) y la derivada de la energía contra el desplazamiento de la navaja (columna derecha) en el primer y último plano. 30
- Figura 31 Datos del semi ancho de la luz proveniente de la salida de la fibra óptica. Se muestra el semi ancho de la luz proveniente de la salida de la fibra óptica en cada una de las siete posiciones donde se colocó la navaja. El ajuste se obtuvo con la ecuación 27. 30
- Figura 32 Esquema de la emisión láser. La luz pulsada de un diodo a 880 nm proveniente de una fibra óptica es recolectada por una lente convergente, pasando por el espejo plano hasta el espejo acoplador. En la cintura de la fuente de bombeo se coloca el medio activo: cristal de Nd:YAG produciendo emisión a 1064 nm, la cual es recolectada por un detector de potencia después de pasar por un filtro con longitud de onda de corte a 1000 nm, la cual evita el paso de luz cuya longitud de onda sea menor a 1000 nm y permite el paso de luz con longitud de onda mayor a 1000 nm. 31
- Figura 33 Simulación para la localización de la cintura de la fuente de bombeo. La simulación contiene una fuente de bombeo a 880 nm, $M_2 = 53$ y semi ancho inicial de 1.36 mm colocada a 475 mm detrás de una lente convergente con distancia focal de 60 mm. A 35 mm de la lente se coloca el espejo plano con grosor de 2 mm. La simulación nos indica que la cintura del haz de bombeo, donde la luz está más fuertemente enfocada, se encuentra aproximadamente a 70 mm de la lente.

- Se ha hecho un escalamiento para apreciar el haz de bombeo (línea morada), lo que ha causado que sea más grande que la altura del espejo curvo acoplador, pero no significa que salga de la cavidad. 32
- Figura 34 Simulación para la localización de la cintura de la fuente de bombeo al colocar el cristal. La simulación contiene una fuente de bombeo a 880 nm, $M^2= 53$ y semi ancho de 1.36 mm colocada a 475 mm detrás de una lente convergente con distancia focal de 60 mm. A 35 mm de la lente se coloca el espejo plano con grosor de 2 mm. Alrededor de 40 mm del espejo plano se coloca el cristal, tal que coincida con la cintura del haz de bombeo (línea morada). Se ha hecho un escalamiento para apreciar el haz de bombeo (línea morada), lo que ha causado que sea más grande que la altura del espejo curvo acoplador, pero no significa que salga de la cavidad. 32
- Figura 35 Simulación del traslape del haz de bombeo y la emisión láser del cristal. Se tiene una cavidad formada por un espejo plano y un espejo curvo, en su interior se coloca el cristal. En la figura superior a) se observa que el ancho del haz láser es mayor que el haz de bombeo en la parte central del cristal. En la figura inferior b) el traslape entre la emisión láser y el haz de bombeo es mayor. 32
- Figura 36 Gráfica de potencia del láser contra recorrido del espejo curvo. Se muestra la potencia medida del láser a 1064nm en función de la distancia recorrida por el espejo curvo acoplador al bombear con un diodo pulsado a una tasa de repetición de 10 Hz y potencias a 2.4W (negro), 3.1W (azul), 3.7W (rojo) y 4.3W (verde). 34
- Figura 37 Gráfica de potencia del láser contra recorrido del espejo ajustados con una función spline. Se indica una ligera tendencia hacia la derecha de los máximos de la potencia del láser (triángulo negro) conforme aumenta la potencia de bombeo. 34
- Figura 38 Potencia del láser contra recorrido del espejo. Lecturas de potencia de láser al variar la tasa de repetición del diodo pulsado a una potencia fija de 3.1W mientras se alarga la longitud de la cavidad. 35
- Figura 39 Distancia promedio recorrida por el espejo curvo contra frecuencia. Se muestran las posiciones promedio a la cual la potencia cayó a un valor menor a 0.05 W para cada una de las tasas de repetición. 36
- Figura 40 Sección de un medio activo y gráfica de su índice de refracción respecto a la dirección transversal. Los rayos incidentes cambian su dirección de propagación, enfocándolo, al pasar por un elemento cuyo índice de refracción varía cuadráticamente respecto a su centro (Siegman, 1986). 36
- Figura 41 Cavidad delimitada por dos espejos y una lente convergente. En la figura superior a) se muestra una lente convergente con distancia focal de 32 mm que no produce una cavidad estable cuando los espejos que forman la cavidad están a 190 mm entre sí. b) Se necesita reducir el tamaño de la cavidad para encontrar la estabilidad. c) Mientras que, si se ajusta la distancia focal a 33 mm, a una longitud de 190 mm, la cavidad es estable. 37
- Figura 42 Cavidad óptica formada por dos espejos y un prisma. La cavidad, a pesar de estar conformada solo por dos espejos el prisma permite redireccionar la luz de vuelta a un espejo, formando una cavidad tipo anillo. 40

Figura 43 Camino que sigue un rayo al pasar por un elemento óptico. Un rayo proveniente de un punto P del frente de onda $u(x)$ incidiendo a una altura x e inclinación θ respecto al eje z pasa por un elemento óptico de ancho L siguiendo una trayectoria dada por $\rho(x, x')$ emergiendo en un punto S del frente de onda $v(x')$ a una altura x' e inclinación θ' 47

Capítulo 1. Introducción

Un láser es un dispositivo que amplifica luz por medio de un proceso conocido como emisión estimulada. Básicamente, los elementos mínimos necesarios para obtener amplificación láser son los siguientes: un medio activo que amplifica la luz, un sistema de bombeo que suministra la energía necesaria al medio activo para poder realizar la amplificación, y un sistema de retroalimentación que regresa la luz amplificada de vuelta al medio activo para amplificarla aún más. A continuación, describiremos las condiciones necesarias que dichos elementos deben cumplir para tener emisión láser.

El medio activo (o medio de ganancia) es una colección de átomos (o moléculas) que se encuentran en diferentes niveles de energía. De manera natural, los átomos excitados (los que tienen mayor energía) tienden a decaer a un estado de energía menor, liberando fotones con energía igual a la diferencia de energía entre los niveles atómicos inicial y final en una dirección aleatoria. A este fenómeno se le conoce como emisión espontánea y se muestra esquemáticamente en la figura 1 a). Se llama así porque la emisión no requiere de un agente externo para producirse.

Por otro lado, la emisión estimulada, es un fenómeno que sucede por la interacción con un agente externo: la luz. Un fotón que interactúa con un átomo en un estado excitado puede estimular la emisión de un nuevo fotón idéntico al incidente, es decir, que posee la misma longitud de onda y dirección de propagación (Figura 1 b)) (Einstein, 1917; Siegman, 1986).

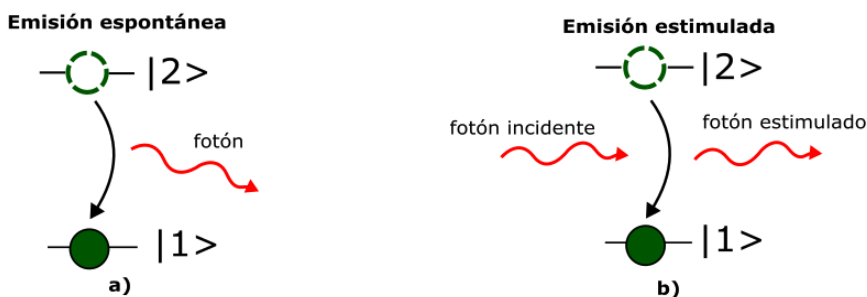


Figura 1. Procesos de emisión de luz. a) Emisión espontánea. El átomo excitado decae de un nivel superior a uno menor espontáneamente, emitiendo un fotón con energía igual a la diferencia de energía entre los niveles. b) Emisión estimulada. Un fotón incidente estimula el decaimiento de un átomo excitado en un nivel superior a un nivel inferior produciendo un nuevo fotón idéntico al incidente cuya energía es igual a la diferencia de energía entre los niveles.

Adicionalmente a los procesos de emisión, existe el proceso de absorción de la luz, que se da cuando un fotón incide sobre un átomo y provoca su excitación a un nivel energético superior. Einstein demostró que

es igualmente probable que ocurra una absorción como una emisión estimulada (Einstein, 1917). Para lograr una amplificación neta (aumento del número de fotones), es necesario que haya más átomos en el nivel excitado que en el nivel inferior, a esta condición se conoce como inversión de población. Sin embargo, en condiciones de equilibrio termodinámico, siempre hay más átomos en estados de menor energía que en estados de mayor energía, por lo que normalmente no hay inversión de población en el medio y, por lo tanto, no hay amplificación neta. La inversión de población se logra, entre otras cosas, inyectando energía al medio a través de un sistema de bombeo, como se muestra esquemáticamente en la figura 2.

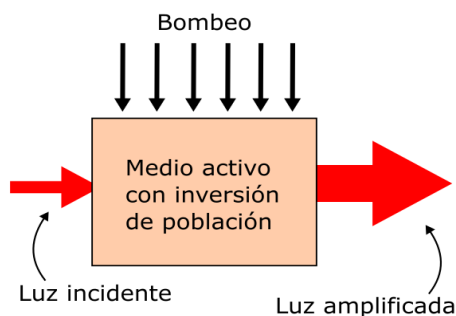


Figura 2. Amplificación. La energía de bombeo sobre un medio activo logra la inversión de población para amplificar la luz incidente.

Para aprovechar al máximo este fenómeno se usa un sistema de retroalimentación para redireccionar la luz amplificada de vuelta al medio y así amplificarla aún más. Esto generalmente se logra colocando un par de espejos paralelos, uno de ellos con una alta reflectancia (idealmente del 100%) y el otro con una reflectancia ligeramente menor para permitir la extracción de la luz. Bajo las condiciones anteriores, la luz confinada viaja entre los espejos indefinidamente en lo que se llama cavidad óptica (figura 3).

La luz dentro de la cavidad se puede describir utilizando la teoría escalar de la difracción. Fox y Li, pioneros en este método (Siegman, 1986), utilizaron la teoría para propagar la luz entre dos espejos paralelos utilizando un programa computacional. Descubrieron que el campo electromagnético (luz) en cualquier punto dentro de la cavidad se auto-reproduce, es decir, no varía sin importar cuantas veces viaje entre los espejos (Fox & Li, 1961). Otras técnicas, como la representación angular (Agrawal & Pattanayak, 1979; Carter, 1972) y la transformada de Fourier (Boyd & Gordon, 1961), han dado como resultado resultados similares.

Una alternativa más común a las técnicas anteriores es utilizar la ecuación de onda paraxial (Goubau & Schwering, 1961; Lax et al., 1975). Las soluciones a esta ecuación nos dan la amplitud del campo eléctrico

dentro de la cavidad asumiendo haces casi colimados, es decir, estrechos y que no divergen mucho. Para una cavidad con dos espejos curvos, la solución más sencilla de esta ecuación es un modo gaussiano. Este modo tiene una gran amplitud en el centro y una baja amplitud a los bordes. Además, de entre todas las soluciones de la ecuación paraxial, es la que menos diverge y la que más frecuentemente se encuentra en la práctica (Kogelnik & Li, 1966).

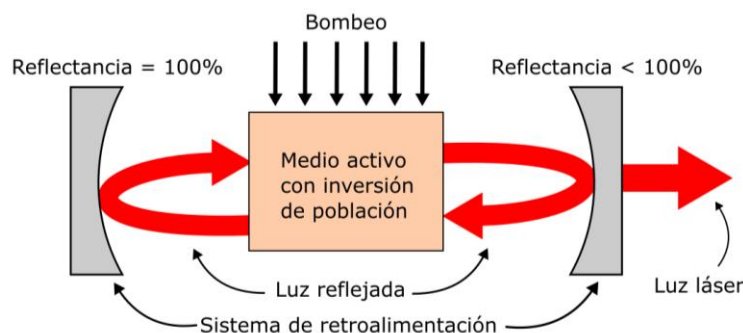


Figura 3 Cavidad óptica. Diagrama donde se muestran los tres sistemas para obtener emisión láser. Los espejos que forman la cavidad permiten redireccionar la luz de vuelta al medio activo amplificándola para obtener luz láser a la salida del espejo con menor reflectancia.

Sin embargo, en la práctica, no se suelen tener cavidades solo compuestas por dos espejos, se suelen agregar más espejos, lentes, placas dieléctricas y espacio libre, entre otras cosas. Al pasar a través de estos elementos, la amplitud del campo eléctrico se ve afectada. Por lo tanto, es necesario utilizar un método para evaluar los cambios de la amplitud en cavidades más complejas.

El método consiste en el formalismo de las matrices ABCD. Una matriz ABCD representa el efecto promedio que un elemento óptico tiene sobre la distribución de luz. Matemáticamente, basta con concatenar las matrices de todos los elementos ópticos en la cavidad para determinar el efecto neto sobre el haz (Bertolotti, 1964; Svelto, 2010). Este cálculo puede ser realizado fácilmente por una computadora, proporcionándonos información sobre el modo, como su ancho y frente de onda, en cualquier punto de su trayectoria.

Con el actual conocimiento de las cavidades láseres y el gran poder computacional no es problema calcular las propiedades del modo gaussiano con cualquier método que se desee. Existen softwares comerciales especializados (Oxalis, LASCAD, COMSOL Multiphysics, por mencionar algunos) que hacen uso de algunos de estos formalismos teóricos. Sin embargo, generalmente estos softwares son de código privado, costosos y complejos. Esto los hace poco atractivos a menos que se utilicen todas las funcionalidades del software o sea indispensable para las exigencias del experimento.

Como alternativa planteamos desarrollar un software en Xojo, sencillo e interactivo, para diseñar cavidades láseres utilizando la teoría de las matrices ABCD. Xojo es un lenguaje de programación orientado a objetos y también una herramienta de desarrollo de aplicaciones multiplataforma con un compilador de interfaces gráficas («Xojo», s. f.). Esta herramienta nos permitirá crear un canvas que emule una mesa óptica donde el usuario podrá colocar los elementos ópticos y observar en tiempo real el efecto que tienen sobre el modo gaussiano.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo general

Desarrollar una interfaz interactiva para la simulación de cavidades ópticas y propagación de haces láseres utilizando el formalismo de las matrices ABCD que sirva de apoyo para el diseño experimental de cavidades láseres.

1.1.2 Objetivos específicos

- Diseñar un software interactivo
- Simular cavidades ópticas formadas por espejos
- Simular la propagación de haces láseres por una cavidad óptica
- Construir una cavidad láser experimentalmente

1.2 Estructura de la tesis

En el capítulo 1 se mencionan los componentes esenciales de una cavidad láser y el principio de funcionamiento. Se indica qué método teórico se utilizará para estudiar la cavidad láser y qué herramienta computacional se empleará para desarrollar el software. Al final, se menciona el objetivo general y enlistan los objetivos particulares que se trabajarán.

En el capítulo 2 se ven los fundamentos teóricos del formalismo de las matrices ABCD. Se introduce al lector las soluciones de la ecuación de onda paraxial, haciendo énfasis en el modo gaussiano. Después se

describe la conexión entre las propiedades de dichas soluciones con la teoría de las matrices ABCD.

En el capítulo 3 daremos una descripción general del diseño orientado a objetos del software desarrollado. Se exponen algunos conceptos inherentes al paradigma, la interfaz gráfica del software y los algoritmos implementados.

En el capítulo 4 se describen los arreglos experimentales que fueron diseñados con ayuda del software, los resultados de los experimentos, así como los arreglos simulados en el software.

En el capítulo 5 finalizamos con las conclusiones del proyecto y los posibles trabajos a futuro.

Capítulo 2. Fundamentos teóricos

El propósito del presente capítulo es, partiendo de la ecuación de onda, describir las características transversales de los modos confinados en una cavidad óptica, incluyendo el modo gaussiano y los modos de orden superior: Hermite-Gaussiano. Luego, conociendo cómo las características transversales del modo cambian al propagarse por el espacio libre, mostraremos, cómo podemos crear una cavidad formada por dos espejos. Finalmente introduciremos una herramienta matemática, la ley de las matrices ABCD para modos gaussianos, que nos permitirá estudiar el cambio de las propiedades transversales del modo en una cavidad compleja compuesta por muchos elementos ópticos.

2.1 Modo gaussiano

El campo eléctrico \mathcal{E} de una onda de luz monocromática con frecuencia angular ω que se propaga por el espacio libre en la dirección z y con un campo uniformemente polarizado se escribe escalarmente como

$$\mathcal{E}(x, y, z) = E(x, y, z)e^{-i\omega t}e^{-ikz}, \quad (1)$$

donde $k = \omega/c$ es el número de onda y la amplitud compleja del campo escalar $E(x, y, z)$ describe el perfil transversal del campo eléctrico. En coordenadas rectangulares, la amplitud satisface la ecuación de Helmholtz, la cual se puede expresar de la siguiente manera

$$\nabla^2 E(x, y, z) + k^2 E(x, y, z) = 0. \quad (2)$$

En general, cualquier amplitud de campo eléctrico realista tiene variaciones a lo largo de los planos transversales a su dirección de propagación (Figura 4).

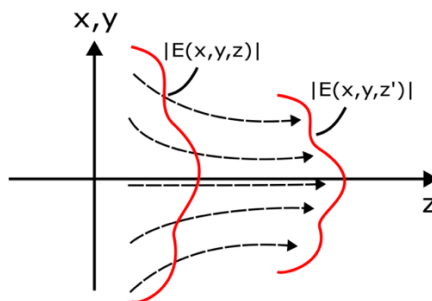


Figura 4 Amplitud de campo eléctrico. Se muestra una amplitud de un campo eléctrico arbitrario $E(x, y, z)$ con variaciones en el plano transversal xy a lo largo de su dirección de propagación z . Las flechas negras punteadas nos indican dirección y contracción de la onda.

Esto significa que, para luz altamente colimada, como la que se encuentra en una cavidad láser, las variaciones transversales de la amplitud del campo eléctrico son más grandes que las variaciones a lo largo de su dirección de propagación. En estas situaciones podemos aproximar la ecuación de onda a su forma paraxial (Svelto, 2010)

$$\nabla_{\perp}^2 E(x, y, z) - 2ik\partial_z E(x, y, z) = 0, \quad (3)$$

donde ∇_{\perp}^2 es el operador laplaciano actuando sobre las coordenadas transversales. Entre las soluciones analíticas de la ecuación 3, la más sencilla, después de la onda plana, corresponde al modo gaussiano

$$E(x, y, z) \propto e^{-ik(x^2+y^2)/2R(z)} e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)}, \quad (4)$$

x y y las coordenadas transversales e i la unidad imaginaria. El modo gaussiano posee un patrón en intensidad (módulo cuadrado del campo eléctrico) simétricamente circular en cualquier plano transversal a su trayectoria. La intensidad es máxima en el centro y decae de manera gaussiana mientras nos alejamos radialmente del centro (Figura 5).

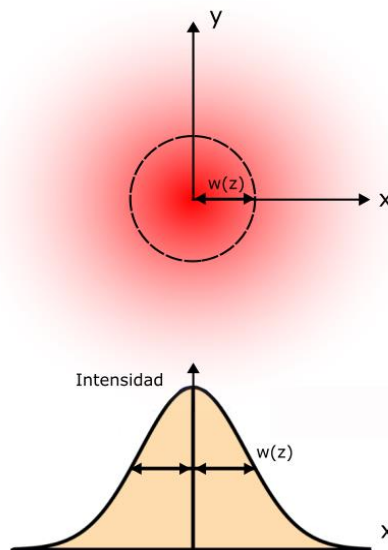


Figura 5 Modo gaussiano. En la parte superior, visto desde el plano transversal xy , se muestra la distribución en intensidad (proporcional al módulo cuadrado del campo eléctrico) y el semi ancho $w(z)$. En la parte inferior se muestra la distribución en intensidad a lo largo del eje x de manera esquemática.

Se suele definir el parámetro complejo $q(z)$ como

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi w^2(z)}. \quad (5)$$

Este parámetro contiene el radio de curvatura $R(z)$ del frente de onda y el semiancho transversal $w(z)$. El radio de curvatura nos da una medida de qué tan curvo es el frente de onda y el semiancho transversal se define como la distancia espacial entre los puntos donde la amplitud del campo eléctrico es máxima y donde cae a $1/e$ de su valor máximo, o de manera equivalente, la distancia espacial entre los puntos donde la intensidad es máxima y donde cae a $1/e^2$ de su valor máximo en un plano perpendicular a su dirección de propagación (Figura 6).

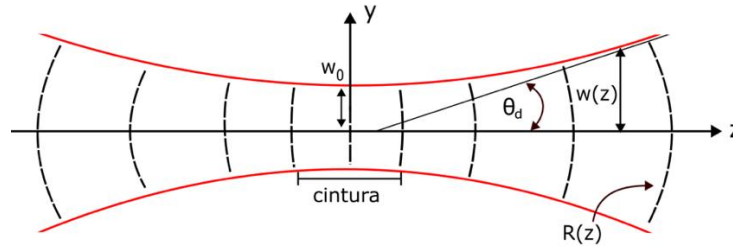


Figura 6 Modo gaussiano. Visto desde el plano zy se muestran algunos parámetros del modo gaussiano: el semiancho w_0 en el plano $z = 0$, ángulo de divergencia θ_d ; y a diferentes planos a lo largo del eje de propagación z el semiancho $w(z)$ y el radio de curvatura del frente de onda $R(z)$ (línea negra punteada).

2.1.1 Propagación en el espacio libre

El parámetro complejo $q(z)$ nos permite saber de qué manera cambia la amplitud del campo eléctrico mientras se propaga por el espacio libre. Este parámetro cambia en función de la siguiente relación (Anexo A)

$$q(z) = q_0 + z. \quad (6)$$

La ecuación 6 nos dice que el parámetro q cambia linealmente respecto a la distancia z . Tomando como ejemplo la figura 6 veamos cómo el semiancho y el radio de curvatura cambian con la distancia. La zona donde la intensidad está más fuertemente enfocada y cuyo frente de onda es plano se le conoce como cintura; el plano $z = 0$ en la figura 6. En este plano se tiene que $q(z = 0) = q_0$. Apoyándonos en la ecuación 5 encontramos que

$$q_0 = \frac{i\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (7)$$

donde λ es la longitud de onda y w_0 el semiancho en la cintura. Sustituyendo la ecuación 5 y 7 en 6 podemos encontrar el semiancho $w(z)$ y el radio de curvatura $R(z)$ en cualquier plano tangente a la dirección de propagación por el espacio libre

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right], \quad (8)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

Mientras nos alejamos de la cintura el contorno del semiancho $w(z)$ crece gradualmente formando una hipérbola con asíntotas inclinadas a un ángulo θ_d respecto al eje de propagación, conocido como ángulo de divergencia, que podemos calcular, en distancias muy alejadas de la cintura, como

$$\theta_d = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (10)$$

Las ecuaciones 8, 9 y 10 son todas las necesarias para describir y predecir completamente la amplitud del campo eléctrico mientras se propaga por el espacio libre.

2.2 Modos superiores: Hermite-Gaussiano

El modo gaussiano introducido anteriormente no es la única solución de la ecuación de onda paraxial. Existen los llamados modos de orden superior, o modos Hermite-Gaussiano, también soluciones de la ecuación de onda paraxial (Anexo B). De hecho, el modo gaussiano anteriormente introducido es el modo más bajo de esta familia de modos superiores. La amplitud del campo eléctrico $E(x, y, z)$ en coordenadas rectangulares de estos modos se escribe

$$E(x, y, z) \propto H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right) e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{q(z)}}, \quad (11)$$

donde H_m es un polinomio de Hermite de orden m . El orden del polinomio determina la cantidad de lóbulos y la distribución en intensidad a lo largo del plano transversal a su dirección de propagación. Mientras más grande sea el orden del polinomio más grande es el ancho de la distribución en intensidad, como se observa de la figura 7. Cuando el orden m y n son ambos iguales a cero recuperamos el modo gaussiano.

De manera análoga al caso gaussiano, es posible determinar el semi ancho transversal y el radio de curvatura de los frentes de onda de los modos de orden superior a través de su parámetro $q(z)$ correspondiente, los cuales mostraremos más adelante.

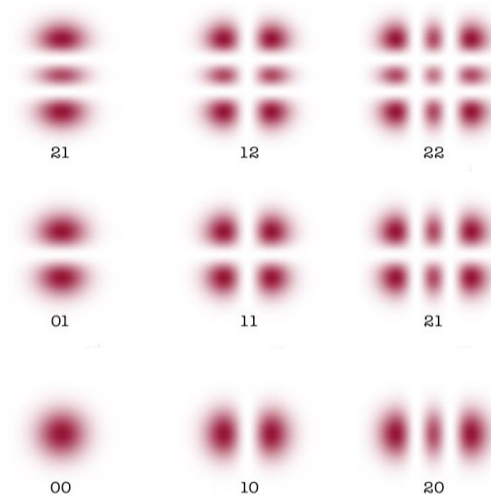


Figura 7 Perfil transversal en intensidad de los modos Hermite-Gaussiano. Se muestra el modo 00 (parte inferior izquierda), cuyo semiancho es el más pequeño, hasta el modo 22 (parte superior derecha) cuyo semiancho es el más grande de entre los modos mostrados en la imagen.

2.3 Cavidades

En esta sección veremos cómo crear una cavidad sencilla compuesta por dos espejos, y luego hablaremos de cavidades con más elementos ópticos; para ello introduciremos el formalismo matricial que nos permitirá trabajar con este tipo de cavidades más complejas.

2.3.1 Cavidad sencilla: dos espejos curvos

Supongamos que tenemos un modo gaussiano con cierto semi ancho w_0 en la cintura como se muestra en la figura 8 a). Para crear una cavidad óptica es suficiente con colocar un par de espejos uno frente al otro. Si hacemos que el radio de curvatura de los espejos coincidan exactamente con el radio de curvatura del frente de onda del modo gaussiano y son más grandes que el semi ancho del modo en las posiciones en que se colocan, cada uno de estos espejos reflejará el modo gaussiano con una curvatura y dirección del frente onda exactamente inverso. Estos espejos atraparán el modo gaussiano, que rebotará entre los dos espejos, formando así una cavidad óptica como se muestra en la figura 8 b) (Siegman, 1986).

Trabajando con las ecuaciones 8 y 9 es posible demostrar que solo se podrá confinar un modo gaussiano entre los dos espejos si se cumple la siguiente condición

$$0 < g_1 g_2 < 1, \quad (12)$$

donde los parámetros g_1 y g_2 están dados en función de los radios de curvatura de los espejos R_1 y R_2 y la distancia L entre ellos (Saleh & Teich, 2019; Siegman, 1986)

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1}, \quad (13)$$

$$g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}. \quad (14)$$

Si, en cambio, esta condición no se cumple, no es posible confinar luz dentro de la cavidad. Cualquier cavidad compuesta por dos espejos puede trasladarse a un punto en el diagrama de estabilidad de la figura 9. Si el punto cae en la región sombreada, determinada por la ecuación 12 (Shimoda, 1986), entonces tenemos de una cavidad estable y puede soportar un modo gaussiano o un modo de orden mayor. Si, por el contrario, cae fuera de la región sombreada la cavidad correspondería a una cavidad inestable.

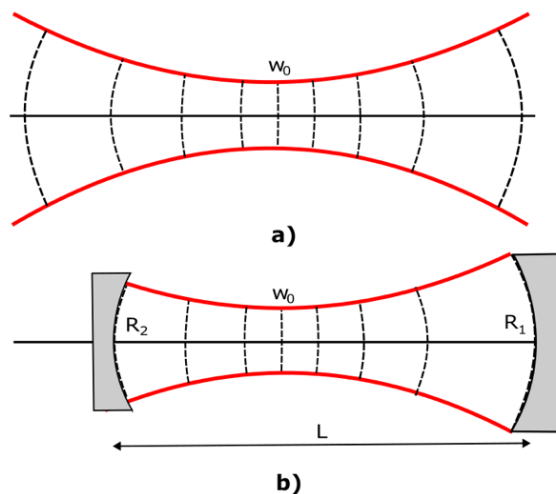


Figura 8 a) Un haz gaussiano con semi ancho w_0 en la cintura y b) una cavidad óptica compuesta por dos espejos curvos. Se muestra una cavidad delimitada por dos espejos curvos separados a una distancia L entre sí, cuyos radios de curvatura R_1 y R_2 coinciden con el radio de curvatura del frente de onda (líneas negras punteadas) del modo gaussiano en las posiciones colocados.

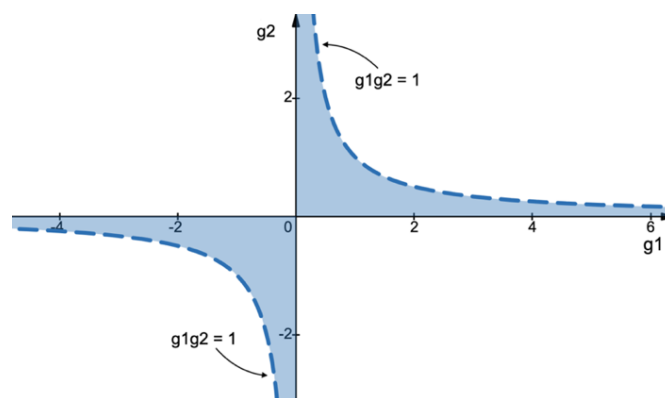


Figura 9 Diagrama de estabilidad para una cavidad óptica compuesta por dos espejos curvos. La región estable corresponde a la zona sombreada, mientras que la línea punteada es la curva $g_1g_2 = 1$.

2.3.2 Cavidades más complejas

Experimentalmente hablando, no se suelen construir cavidades solo conformadas por espejos curvos. En la práctica se suelen colocar tantos elementos ópticos como sean necesarios, tales como lentes, más espejos, placas dieléctricas, entre otros. Para tratar este caso más complicado y realista es necesario utilizar una herramienta más poderosa.

2.3.2.1 Rayos paraxiales

Cualquier punto de una onda de luz puede identificarse con un rayo, inequívocamente, con dos magnitudes; la distancia transversal $r(z)$ desde el eje de propagación y la inclinación θ respecto a dicho eje, como se muestra en la figura 10.

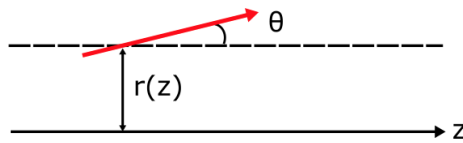


Figura 10 Rayo de luz. Rayo (flecha roja) con posición $r(z)$ y pendiente θ respecto al eje z .

Matricialmente un rayo cualquiera se describe completamente por un vector columna

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (15)$$

La luz dentro de la cavidad la suponemos casi totalmente colimada, es decir, rayos de luz cuyo grado de inclinación respecto al eje óptico es muy pequeño, tal que la razón de cambio entre el desplazamiento transversal y longitudinal es pequeña, esto es, $\Delta r/\Delta z = \tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$. A los rayos que cumplen con dicha condición se les conoce como rayos paraxiales.

Al pasar un rayo paraxial por un elemento óptico, el elemento óptico modificará las magnitudes que identifican al rayo. Por ejemplo, supongamos que un rayo se mueve en línea recta por el espacio libre, nos interesa saber cómo cambian las magnitudes del rayo después de viajar una distancia arbitraria como se muestra en la figura 11. Un análisis geométrico nos relaciona las magnitudes del rayo en los planos z_1 y z_2 de la siguiente manera

$$r(z_2) = r(z_1) + (z_2 - z_1)\theta, \quad (16)$$

$$\theta' = \theta. \quad (17)$$

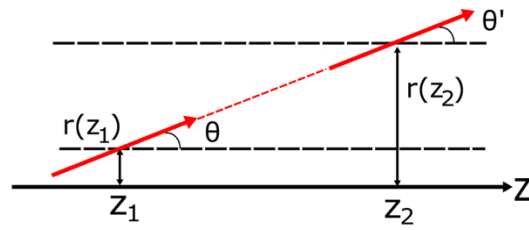


Figura 11 Propagación de un rayo en el espacio libre. Las magnitudes del rayo cambian de una posición $r(z_1)$ y pendiente θ a una nueva posición $r(z_2)$ y pendiente θ' respecto al eje z

que matricialmente se escribe

$$\begin{pmatrix} r(z_2) \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 - z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(z_1) \\ \theta \end{pmatrix}. \quad (18)$$

En general, podemos expresar el efecto de cualquier elemento óptico (espacio libre, lente, etcétera) sobre las magnitudes antes y después de interactuar con el elemento óptico a través de una transformación lineal dada por el siguiente producto matricial

$$\begin{pmatrix} r(z_2) \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(z_1) \\ \theta \end{pmatrix}, \quad (19)$$

donde z_1 es el plano justo antes de incidir en el elemento óptico, z_2 es el plano justo después de interactuar con el elemento óptico, y A, B, C y D son elementos de la matriz ABCD que contienen el efecto promedio que el elemento óptico tiene sobre el rayo paraxial. Las matrices ABCD de algunos elementos ópticos comunes se muestran en la figura 12.

Espacio libre		$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Lente delgada		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$
Interfaz dieléctrica plana		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_2/n_1 \end{pmatrix}$
Espejo esférico		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix}$

Figura 12 Matrices ABCD de elementos ópticos comunes.

2.3.2.2 Ley de las matrices ABCD para haces gaussianos

Es posible demostrar que la ecuación 19 también es válida para los modos Hermite-Gaussiano en términos del parámetro q (Anexo C)

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}, \quad (20)$$

conocida como ley de las matrices ABCD para modos gaussianos, donde q_2 es el parámetro complejo después de pasar por el elemento óptico, q_1 el parámetro complejo al incidir sobre el elemento óptico y A,B,C y D son los elementos de la matriz ABCD del elemento óptico.

Las ecuaciones 19 y 20, ambas, necesitan de las entradas de la matriz ABCD para conocer el efecto sobre el rayo paraxial y el modo, respectivamente. La diferencia radica en que los modos gaussianos son representados por el parámetro q , mientras que los rayos paraxiales requieren de una pareja de coordenadas (r, θ) (Figura 13). Sin embargo, la lógica que nos permite conocer dichas magnitudes en sus descripciones correspondientes es análoga. Por lo tanto, démosnos el lujo de representar el parámetro q con una flecha, análogo al caso del rayo paraxial, reconociendo que, si bien no son matemáticamente iguales, nos permite estudiar el cambio del parámetro q de manera ilustrativa cuando tenemos más de un elemento óptico en la trayectoria del modo.

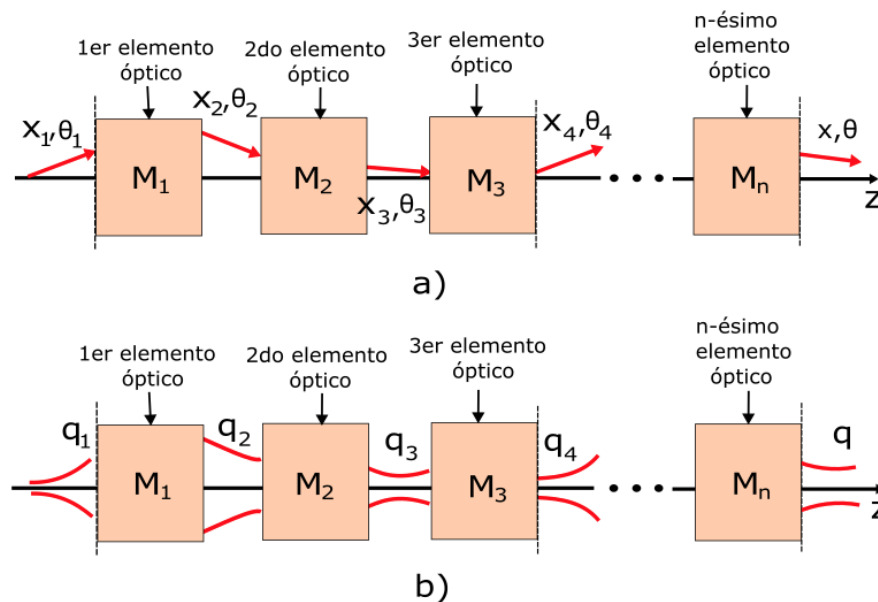


Figura 13 Descripción de rayos y haces gaussianos. a) En la parte superior se muestra la descripción por rayos paraxiales al pasar por una serie de elementos ópticos. b) Mientras que la parte inferior se muestra la descripción usando modos gaussianos. Los cuales son calculables de manera análoga.

2.3.2.3 Serie de elementos

En la práctica las cavidades no solo contienen un elemento óptico además de los espejos. Generalmente se usan tantos elementos sean necesarios dependiendo las exigencias del experimento.

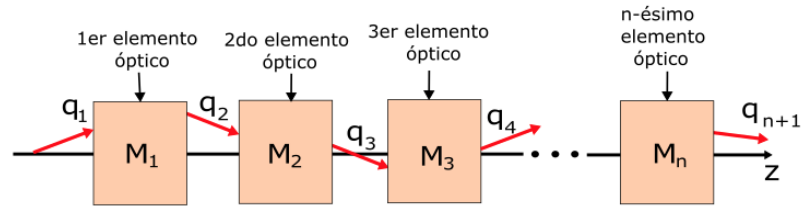


Figura 14 Elementos ópticos colocados en la trayectoria de un modo. Un modo con parámetro complejo q_1 incide sobre el 1er elemento óptico modificando, a la salida, el parámetro complejo a q_2 , que a su vez al pasar por el 2do elemento óptico modifica el parámetro a q_3 y así sucesivamente hasta pasar por el n-ésimo elemento óptico.

Consideremos n elementos ópticos alineados respecto al mismo eje z por donde pasa un modo gaussiano. Cada uno de los elementos posee una matriz ABCD característica. Iniciando desde el lado izquierdo de la figura 14, de acuerdo con la ecuación 20 podemos calcular q_2 a partir de saber el parámetro complejo incidente q_1 y la matriz ABCD M_1 asociada al primer elemento óptico. De manera análoga podemos calcular q_3 sabiendo q_2 y M_2 , q_4 conociendo q_3 y M_3 y así sucesivamente.

Entonces, si quisiéramos encontrar q_{n+1} a partir de q_1 , donde se han colocado n número de elementos ópticos en la trayectoria del haz, se forma un sistema ABCD caracterizado por una matriz que es el producto en reversa de las matrices asociadas a los elementos ópticos por donde pasa el modo, es decir, $M_R = M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1$. Por lo tanto, el parámetro q_{n+1} después de pasar por el n-ésimo elemento está determinado por el parámetro complejo incidente q_1 y las entradas de la matriz resultante M_R . Simbólicamente expresado en la siguiente ecuación

$$q_{n+1} = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}, \quad (21)$$

donde A, B, C y D son los elementos de la matriz resultante M_R .

2.3.2.4 Condición de estabilidad

Al colocar un par de espejos a los extremos de la serie de elementos ópticos el modo gaussiano es redireccionado de vuelta a la serie de elementos como se muestra en la figura 15.

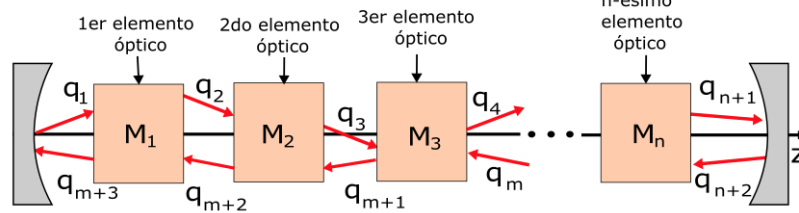


Figura 15 Elementos ópticos alineados sobre el eje z delimitados por dos espejos. Un modo con parámetro complejo q_1 se propaga desde el primer al n -ésimo elemento óptico. Al reflejarse en el espejo de la derecha se redirecciona a la misma serie de elementos ópticos propagándose desde el n -ésimo elemento al primer elemento óptico.

En general, el parámetro complejo del modo tendrá un valor distinto después de pasar por la serie de elementos óptico como lo dicta la ecuación 21. Sin embargo, si deseamos confinar el modo dentro de la cavidad esperaríamos que este se autoreproduzca. Es decir, que tenga el mismo parámetro complejo después de hacer un viaje ida y vuelta por la cavidad. Esta condición es

$$q_1 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}, \quad (22)$$

donde A , B , C y D son las entradas de la matriz resultante $M_R = M_1 M_2 \dots M_{n-1} M_n M_{n-1} \dots M_2 M_1$ que contienen la información de todo el sistema después de que el modo se haya propagado ida y vuelta por la cavidad. Con un poco de álgebra encontramos que el parámetro q_1 tiene solución solo si se cumple la siguiente condición (Anexo D)

$$0 < \frac{D + A}{4} + \frac{1}{2} < 1. \quad (23)$$

Cuando las entradas de la matriz resultante M_R cumplen con la ecuación 23 se dice que la cavidad es estable y que el modo se auto-reproduce. Además, trabajando la ecuación 22 podemos calcular el radio de curvatura R y el semiancho transversal w del parámetro q_1 en función de las entradas de la matriz resultante (Kogelnik & Li, 1966)

$$R = \frac{2B}{A - D}, \quad (24)$$

$$w^2 = \frac{2B\lambda}{\pi\sqrt{4 - (D + A)^2}}. \quad (25)$$

2.3.2.5 Caso complementario para haces gaussianos

En general, cualquier solución de la ecuación de onda paraxial es una combinación lineal de funciones

Hermite-Gaussiano

$$E(x, y, z) \propto \sum_j a_j H_{mj} \left(\frac{\sqrt{2}x}{W(z)} \right) H_{nj} \left(\frac{\sqrt{2}y}{W(z)} \right), \quad (26)$$

donde a_j es una constante. Es posible demostrar que el semi ancho y ángulo de divergencia de los modos superiores se reduce a calcular el caso del modo gaussiano multiplicando por un factor M^2 (Svelto, 2010). El factor M^2 es una medida de la calidad del láser, este factor nos dice qué tanto se difracta el haz. Un valor $M^2 = 1$ corresponde al modo gaussiano. Valores $M^2 > 1$ corresponde a modos de orden superior mientras que valores $M^2 < 1$ no son posibles físicamente. Aunque este factor nos dé una noción de la calidad del haz no es suficiente para describirlo por completo.

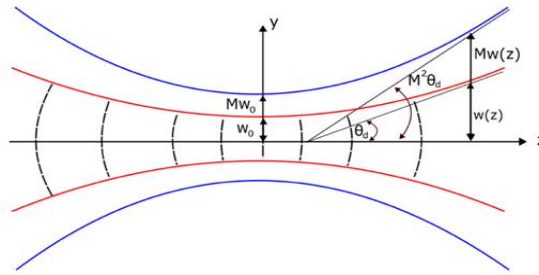


Figura 16 Comparación de un modo gaussiano (rojo) y un modo de orden superior (azul). El modo gaussiano con ángulo de divergencia θ y semiancho $w(z)$, mientras que el modo de orden mayor posee ángulo de divergencia $M^2\theta$ y semiancho $Mw(z)$ sobrepuestos a lo largo de sus cinturas.

Debido a la cantidad de lóbulos y la distribución espacial de los modos de orden superior, no muestran un perfil de intensidad radialmente simétrico, como lo es el modo gaussiano (Figura 6). Por tal motivo no nos podemos permitir definir de la misma manera el ancho del haz para estos modos. Para los modos de orden mayor se define el semiancho del haz con (Svelto, 2010)

$$W^2(z) = W_0^2 \left[1 + \left(\frac{M^2 \lambda z}{\pi W_0^2} \right)^2 \right], \quad (27)$$

donde $W(z)$ es el semiancho en el plano z , W_0 el semiancho en la cintura, λ la longitud de onda y z la distancia a lo largo de la dirección de propagación. Es posible demostrar que la ecuación 27 se puede relacionar con el semiancho del modo gaussiano $w(z)$ de la siguiente manera (Svelto, 2010)

$$W(z) = Mw(z). \quad (28)$$

Mientras que el ángulo de divergencia θ'_d se puede relacionar con el ángulo de divergencia del modo gaussiano θ_d de la siguiente manera

$$\theta'_d = M^2 \frac{\lambda}{\pi W_0} = M^2 \theta_d. \quad (29)$$

Entonces, para conocer el semi ancho y el ángulo de divergencia de los modos superiores basta con calcular el caso del modo gaussiano y multiplicar por un factor M y un factor M^2 , respectivamente (Figura 16). El factor M^2 , a su vez, es igual a $1 + 2n$, donde n es el orden del polinomio de Hermite, entonces el factor M^2 , aumenta entre más grande sea el orden del polinomio (Paschotta, s.f.).

Capítulo 3. Diseño del software

Diseñar rutinas específicas para cada tipo de configuración que una cavidad óptica puede tener resultaría no solo una tarea ardua si no imposible de realizar si no se conocen de antemano los elementos ópticos. Afortunadamente, el paradigma orientado a objetos nos permite plantear y abstraer el problema desde una perspectiva general, haciendo flexible el diseño de cavidades ópticas.

Resulta conveniente describir algunos conceptos de programación orientado a objetos, sin la intención de ser una discusión profunda, pero sí introductoria a los términos que usaremos al hablar del desarrollo del sistema. Luego, mostraremos funcionalidades esenciales para utilizar el software haciendo referencia a su interfaz gráfica y cerraremos el capítulo con los algoritmos que implementan el formalismo de las matrices ABCD para la simulación de generación y propagación de haces láseres.

3.1 Conceptos de programación orientada a objetos

La programación orientada a objetos es una tecnología, cuyo enfoque, es representar el sistema computacional como un conjunto de objetos que interactúan entre sí (Smith, 1991). Estos objetos se comunican mediante mensajes durante la ejecución, simulando interacciones en el ambiente computacional. Pensar en términos de programación orientada a objetos es como concebir una comunidad organizada, donde cada miembro tienen responsabilidades específicas (Budd, 1991).

3.1.1 Clases y objetos

El paradigma orientado a objetos se basa en el uso de clases. Una clase es un bosquejo compuesto por propiedades y métodos. Las propiedades describen qué características tiene la clase, mientras que los métodos indican cómo se comporta. Por ejemplo, una clase podría ser “Espejo”, con propiedades como, posición y radio de curvatura, y métodos como `calcularDistancia` y `dibujarContorno` (figura 17). Las propiedades y los métodos no están limitadas a las descritas, sino que dependen de la función específica que el objeto deba cumplir.

Para acceder a las propiedades y métodos de la clase es necesario crear un objeto. A este proceso se le llama instanciación de la clase. Se pueden crear múltiples instancias de la misma clase; es decir, se pueden

crear tantos objetos, de la misma clase, cómo se necesiten. Solo la propia clase puede acceder a sus propiedades, no otras clases; esto se conoce como encapsulación. Esta característica nos protege de modificar accidentalmente información del objeto.

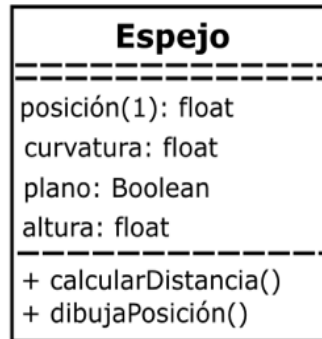


Figura 17 Ejemplo de un diagrama de la clase Espejo en UML (Fowler y Scott, 1999). La parte superior contiene el nombre de la clase, la parte central los atributos y la sección inferior los métodos.

3.1.2 Herencia

La herencia se refiere al proceso en el cual una clase recibe funcionalidades, métodos y propiedades de otra clase. Este proceso se aprovecha cuando existen clases con funcionalidades parecidas. Para evitar crear una clase totalmente nueva se utiliza la herencia para agregar o eliminar funcionalidades particulares de la nueva clase.

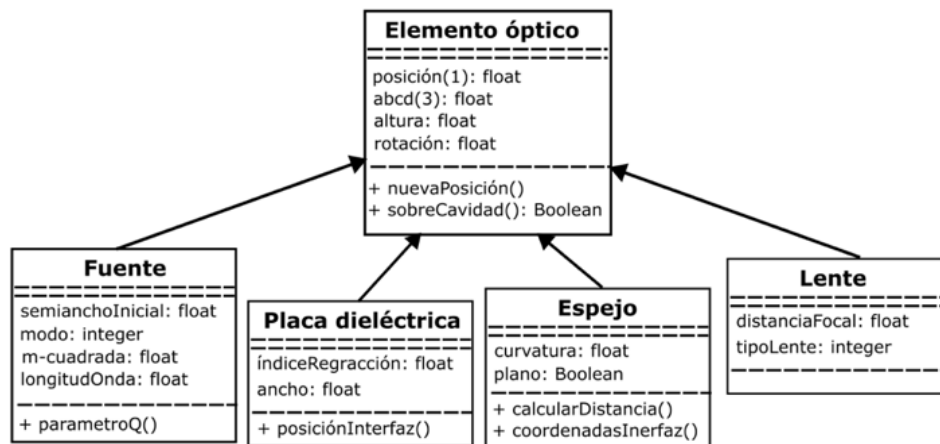


Figura 18 Ejemplo de un diagrama de clases en UML. Placa dieléctrica, Fuente, Espejos y Lente son subclases de la clase Elemento óptico.

Por ejemplo, en la figura 18, las clases "Fuente", "Placa dieléctrica", "Espejo" y "Lente" heredan las propiedades y métodos de la clase "Elemento óptico", extendiendo así las propiedades y métodos

definidas en esta última. La herencia es siempre transitiva, lo que significa que una subclase puede heredar características de todos los niveles superiores a la clase en cuestión. En otras palabras, se puede considerar a una subclase como una extensión más rigurosa de las propiedades asociadas con la clase original (Budd, 1991).

3.1.3 Eventos

Los eventos ocurren cuando un usuario realiza una acción. Son comunes en las interfaces gráficas; presionar una tecla del teclado, arrastrar el ratón, aumentar el tamaño de una ventana o hacer doble clic son algunas acciones que generan eventos. Al completar una acción, automáticamente se llama a una clase auxiliar que ejecuta el método asociado a la acción (Ferg, 2006).

Cuando la tarea que la comunidad de objetos debe simular no puede satisfacerse completamente solo mediante el envío de información entre ellos, se recurre a las notificaciones por eventos. En una interfaz gráfica, donde los objetos dependen de la interacción del usuario, programar los eventos nos permiten indicar solo las acciones válidas que deban producir una respuesta.

Por ejemplo, si en una ventana dar clic en el centro debe desplegar una ventana informativa al usuario, se puede programar un evento para manejar la acción de hacer clic. Cualquier otro clic en la ventana también llamará al evento, pero solo se desplegará la ventana informativa si el clic ocurre en el centro. Este enfoque nos permite asociar eventos específicos cuando se interactúa con el software en cuestión.

3.2 Funcionamiento del software

Pensando en un software interactivo se ha implementado una interfaz gráfica, con un área de trabajo, que emula una mesa óptica donde montar los elementos ópticos. Algunas de los elementos más importantes de la ventana principal se muestran en la Figura 19. Los íconos, cuyos gráficos simbolizan alguno de los elementos ópticos que soporta esta versión (espejos, lentes, placas dieléctricas y fuentes), se encuentran en la parte superior de la ventana. Al seleccionar alguno de estos íconos se despliega una ventana secundaria con todos los parámetros necesarios para crear un objeto asociado al elemento y desplegarlo en el Canvas. El Canvas, a su vez, permite dibujar, mover y eliminar los elementos a través de eventos.

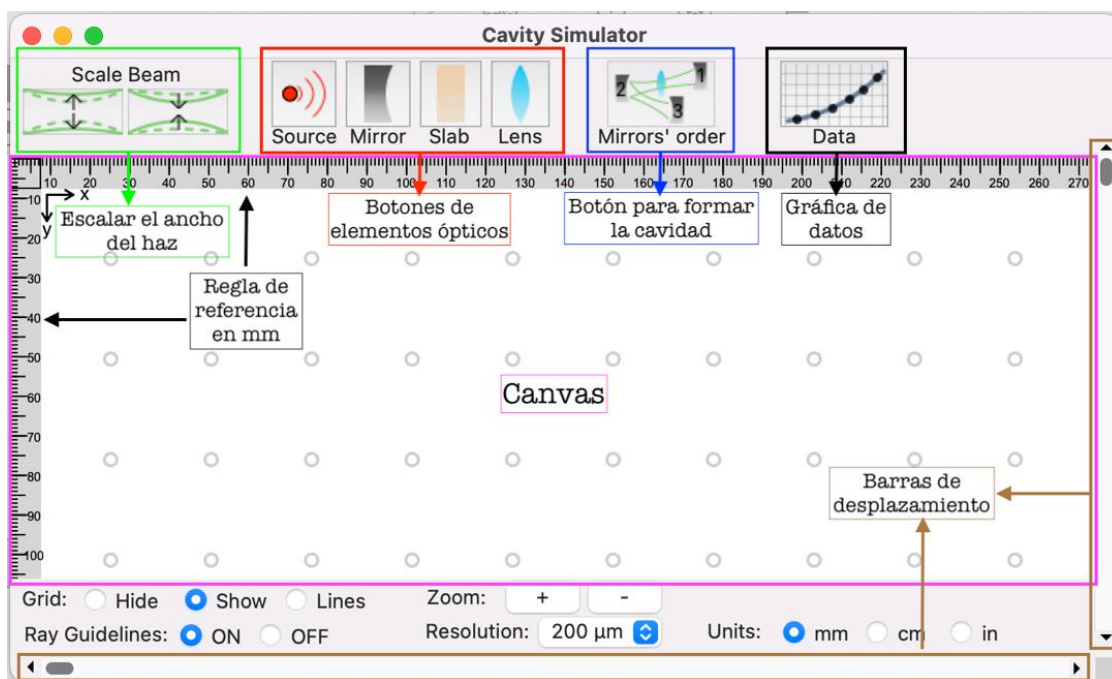


Figura 19 Interfaz gráfica del programa. Ventana principal donde se encuentran los botones para agregar elementos ópticos (rectángulo rojo) el Canvas (rectángulo magenta), barras de desplazamiento debajo y a la derecha del Canvas (encerradas en café), las reglas de referencia en milímetros, botones para escalar el ancho del haz (rectángulo verde), botón para crear la cavidad (rectángulo azul) y botón para graficar el semiancho y radio de curvatura (rectángulo negro).

3.2.1 Diseño de cavidad óptica

Para formar una cavidad óptica necesitamos al menos dos espejos. La posición y orientación de los espejos puede tomar cualquier valor. Sin embargo, no todas las posiciones y orientaciones generan una cavidad óptica estable (más adelante veremos cómo se calcula la estabilidad algorítmicamente). Para ajustar los espejos que forman la cavidad, orientándolos en la dirección adecuada, seleccionamos el botón “Mirrors Order” (rectángulo azul en la figura 19), cuyo evento despliega una ventana secundaria (Figura 20 a) que nos pide seleccionar el orden de los espejos. Una vez seleccionados y confirmado el orden el software mantiene fija la distancia entre los espejos y los orienta para formar una cavidad óptica (Figura 20 b)).

Cuando tenemos dos espejos y deseamos formar una cavidad, es fácil ver que la luz tendría que ir de un espejo a otro. Sin embargo, con más de dos espejos no es posible asegurar la dirección que esperamos siga la luz. Entre mayor sea el número de espejos mayor son las configuraciones en las que se puede propagar el haz en una cavidad. Por lo tanto, necesitamos que el usuario nos indique la dirección en que viaja el modo. Para ejemplificar; supongamos que tenemos cuatro espejos, la luz puede seguir cuatro trayectorias distintas, como se muestra en la figura 21.

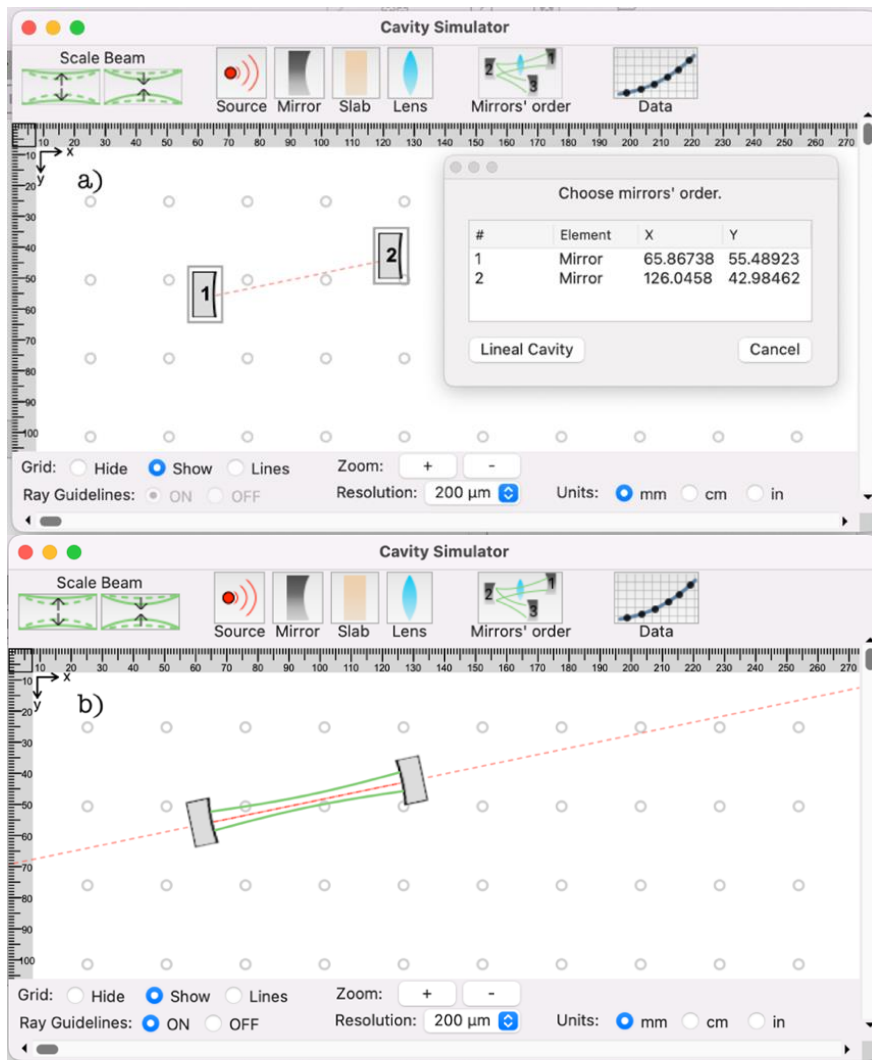


Figura 20 Simulación de cavidad óptica formada por dos espejos. En la figura superior a) se muestra la ventana secundaria (al presionar el botón "MirrorsOrder") junto con la selección de los espejos que formarán la cavidad. En la figura inferior b) se observa que la cavidad óptica es estable desplegando el haz láser (línea verde).

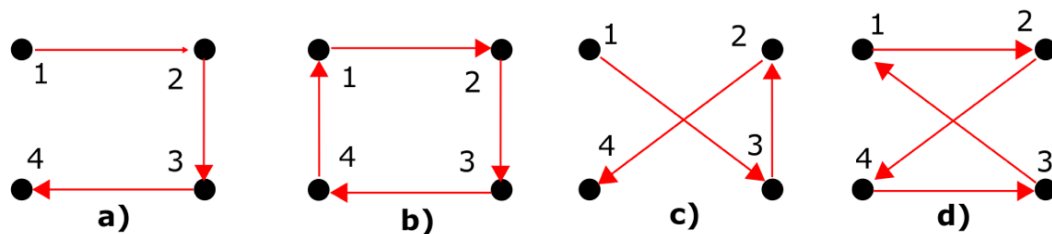


Figura 21 Posibles trayectorias de la luz con cuatro espejos. Se muestran las posibles trayectorias que un haz (flechas rojas) en una cavidad compuesta por cuatro espejos (puntos negros) puede tener.

Las posibles trayectorias deben de cumplir ciertas condiciones. Dado el problema físico, sabemos que no podemos tener un espejo con más de dos conexiones ya que esto violaría la ley de la reflexión. Es decir que, si un haz de luz incide sobre un espejo la luz se reflejará en una sola dirección. Esto significa que la

diferencia entre el número de espejos y las conexiones entre cada uno de ellos debe ser 1 o 0. En el caso de que la diferencia sea 1, para el caso de cuatro espejos, corresponden a la figura 21 a) y c), mientras que cuando la diferencia es 0, tenemos los otros dos posibles casos: la figura 21 b) y d). En el software se ha indicado dicha distinción colocando dos botones en la parte inferior de la ventana llamados “Ring Cavity” y “Lineal Cavity”, para cuando la diferencia es 0 y cuando es 1, respectivamente (Anexo E).

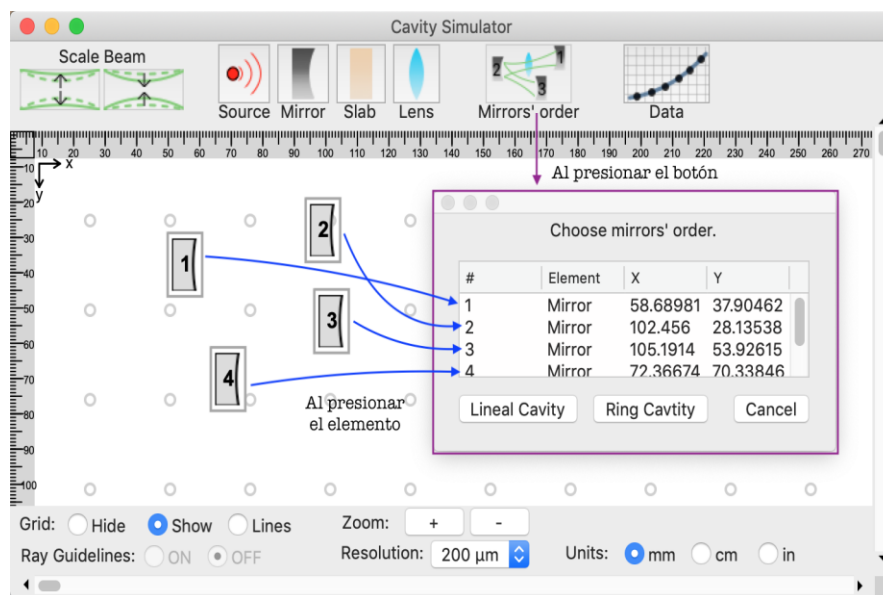


Figura 22 Cavity compuesta por cuatro espejos. Se muestra el orden de selección de los cuatro espejos que formarán la cavidad óptica. En la parte inferior de la ventana secundaria se observan los botones “Lineal Cavity” y “Ring Cavity” que indican las dos posibles configuraciones de la cavidad.

3.2.2 Diseño de cavidad óptica con elementos ópticos

Como se ha ido mencionando a lo largo de este escrito no sería realista tener solo una cavidad compuesta por dos espejos. Una vez que hemos construido nuestra cavidad podemos agregar elementos ópticos en la zona que comprenden los espejos. Elementos muy alejados de la cavidad no serán incluidos en los cálculos. Aunque, según la posición en que el elemento óptico se encuentre, no es tan sencillo saber si se considera o no parte de los cálculos. Por tal motivo se ha incluido un método que alinee y centre transversalmente los elementos ópticos si están cerca de la cavidad.

Los elementos ópticos son centrados y alineados respecto a la línea que une los centros geométricos de los espejos. Cada uno de los espejos tiene asociada una línea guía. En el software, estas líneas se visualizan como líneas rojas punteadas. Cuando un elemento óptico traslapa una línea guía, este es alineado y centrado respecto a la línea automáticamente (figura 23). Podemos agregar tantos elementos centrados y alineados en la cavidad como sean necesarios.

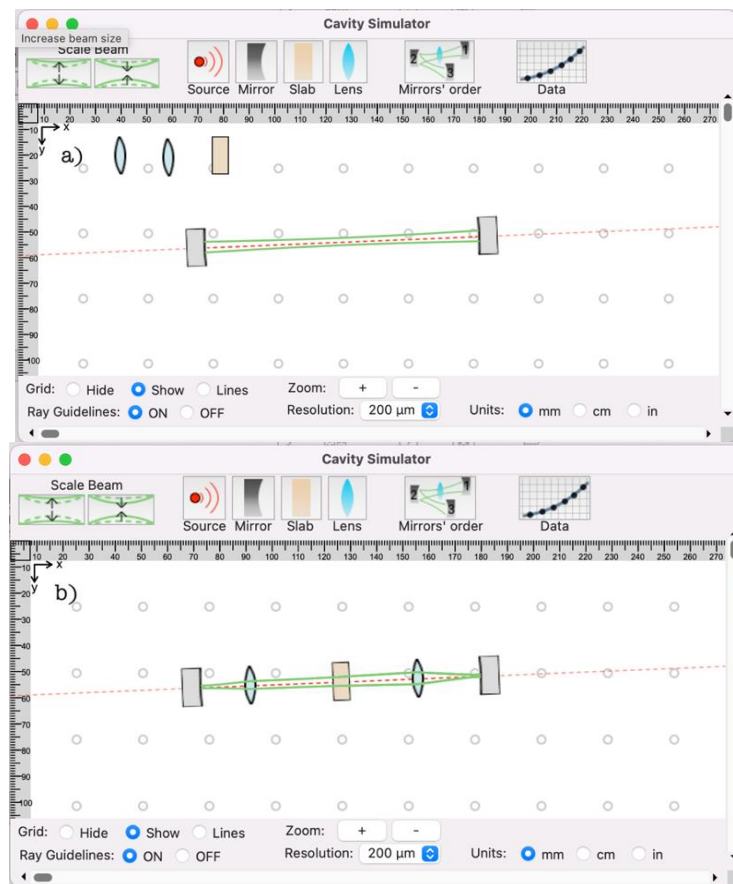


Figura 23 Simulación de una cavidad formada por dos espejos curvos. En la parte superior a) se muestra una cavidad formada por dos espejos curvos y tres elementos ópticos en el canvas alejados de la línea guía. En la parte inferior b) se muestra los mismos elementos ópticos centrados y alineados.

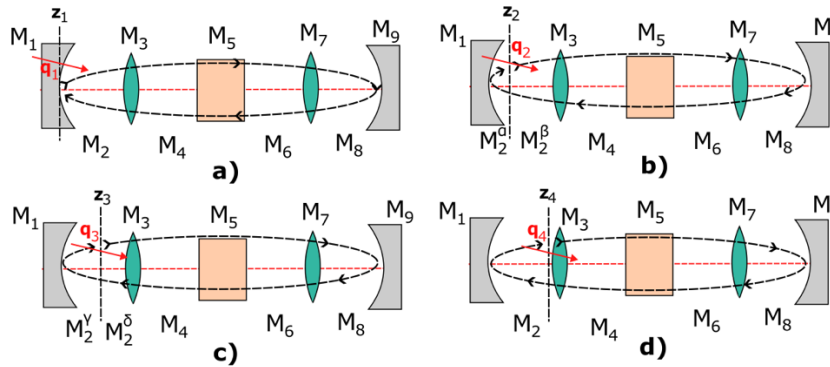
3.2.3 Algoritmo para el cálculo de la estabilidad

Desde el momento en que indicamos los espejos que conforman la cavidad óptica, el software inicia el cálculo de la estabilidad. De igual manera, cuando se coloca un nuevo elemento en la cavidad o se mueve de posición, la estabilidad se verá afectada, por tal motivo, tras ese evento, se recalcula la estabilidad de la cavidad.

Este proceso comprende la siguiente serie de pasos. En primer lugar, de acuerdo con la configuración de la cavidad que el usuario haya ingresado, se concatenan las matrices ABCD de los elementos en un viaje ida y vuelta por la cavidad. Estas matrices se multiplican para evaluar, de acuerdo con la ecuación 23, si la cavidad es estable. Si no lo es, el cálculo termina ahí. Por otro lado, si se determina que es estable, el siguiente paso consiste en calcular el semi ancho y radio de curvatura del haz láser, utilizando las ecuaciones 24 y 25, para tantos planos como la resolución permita dentro de la cavidad. Esto implica tomar

un plano contiguo, obtener las matrices ABCD desde dicho plano, calcular la estabilidad y obtener el semi ancho y radio de curvatura; y así sucesivamente para todos los planos; como se ilustra en la figura 24.

Figura 24 Cavity óptica con dos lentes y una placa dieléctrica. En la figura a) se muestra el parámetro q_1 , en la cara



frontal del espejo, obtenido de concatenar y multiplicar en reversa las matrices asociadas a todos los elementos ópticos de acuerdo con como aparecen en la trayectoria del lazo negro punteado. b) El parámetro q_2 para el plano contiguo tras concatenar las matrices en reversa en el orden en que el lazo negro punteado pasa por ellos y así sucesivamente como se ilustra en c) y d) para los planos siguientes.

De la figura 24, por cada plano distinto que tomemos dentro de la cavidad, alguna de las matrices, en especial la de los espacios libres, cambiarán, por lo que resultará en una matriz resultante en principio distinta. En el caso de la figura 24 b) y c), como se ha tomado un plano entre el espacio que hay del primer espejo y la lente, tendremos que separar el efecto de la matriz M_2 asociada a ese espacio libre. Conforme recorramos los planos a lo largo de la cavidad, y calculemos el viaje ida y vuelta para cada uno de ellos, veremos cómo el semi ancho y el radio de curvatura evoluciona (Figura 25).

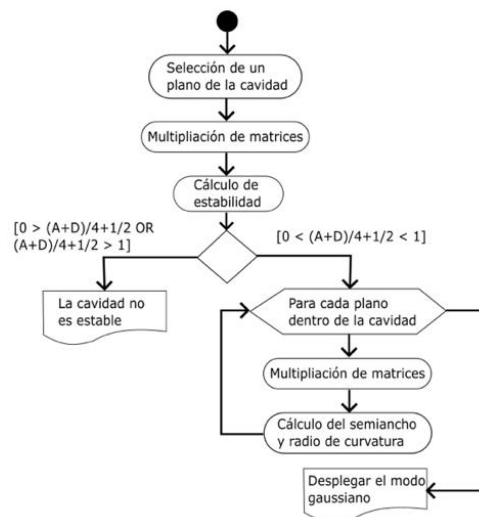


Figura 25 Diagrama de flujo del cálculo de estabilidad. Partimos calculando la estabilidad, si la condición de estabilidad se cumple se calculan el semi ancho y el radio de curvatura para todos los planos dentro de la cavidad para finalmente desplegar el modo gaussiano.

3.2.4 Algoritmo para la propagación de la fuente de bombeo

El algoritmo para propagar un modo superior o gaussiano a lo largo de la cavidad, proveniente fuera de ella, es muy similar al caso anterior. A lo largo de los planos entre todos los elementos, iniciando desde la posición donde se coloca la fuente, conociendo su semi ancho w_0 inicial (ingresado por el usuario) y suponiendo un frente de onda plano inicial, el algoritmo calcula la evolución del parámetro q utilizando la ecuación 20 para cuantos elementos existan en su trayectoria (figura 26).

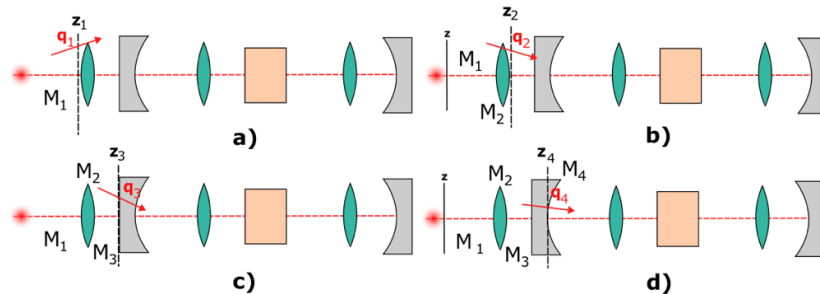


Figura 26 Fuente de bombeo fuera de una cavidad óptica. a) La luz proveniente de la fuente de bombeo llega con parámetro q_1 a la parte posterior del primer lente. b) Al pasar por la lente, aplicando la matriz M_2 asociada a la lente, se obtiene el nuevo parámetro del modo q_2 . c) Propagamos la luz hasta la cara posterior del primer espejo utilizando la matriz M_3 para obtener q_3 y en d) propagamos una vez más hasta la cara frontal del espejo obteniendo q_4 .

Se puede ingresar como fuente cualquier combinación lineal Hermite-Gaussiano en la simulación, lo cual se traduce a ingresar un factor M^2 . Si este factor es muy grande el semiancho puede llegar a ser más grande que las alturas de los elementos ópticos. Si esto sucede interrumpimos la propagación (Figura 27). Esto no quiere decir que cuando el ancho del haz es mayor que la altura del elemento ya no se propague, lo que sucede, físicamente hablando, es que ya no se recolecta toda la luz proveniente del modo. No sería congruente seguir propagando el ancho del modo que es menor a la altura del elemento pues las características del perfil transversal de dicha sección del modo sería otra a las ingresadas inicialmente.

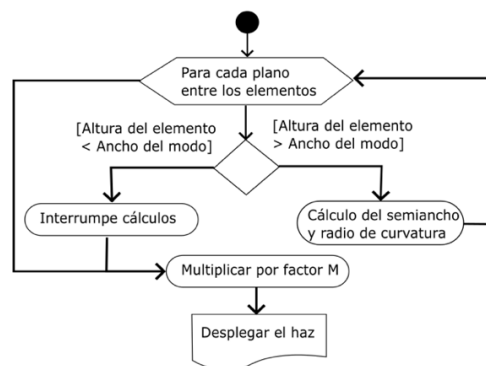


Figura 27 Diagrama de flujo del cálculo de propagación. Desde donde parte el modo y entre cada uno de los planos entre los elementos ópticos se calcula el semiancho y el radio de curvatura a lo largo de su trayectoria.

Capítulo 4. Arreglo experimental

Con el fin de usar el software desarrollado (Anexo F) se hizo un láser para asistir en su diseño experimental. El arreglo experimental (figura 28) consiste en enfocar luz que sale de una fibra óptica al medio de ganancia mediante una lente convergente con distancia focal de 60 mm. La luz acoplada a la fibra óptica proviene de un diodo pulsado a 808 nm. El medio de ganancia es un cristal de Nd:YAG con películas antirreflejantes a 808 nm y 1064 nm en la cara de entrada. La cara de salida está cortada al ángulo de Brewster.

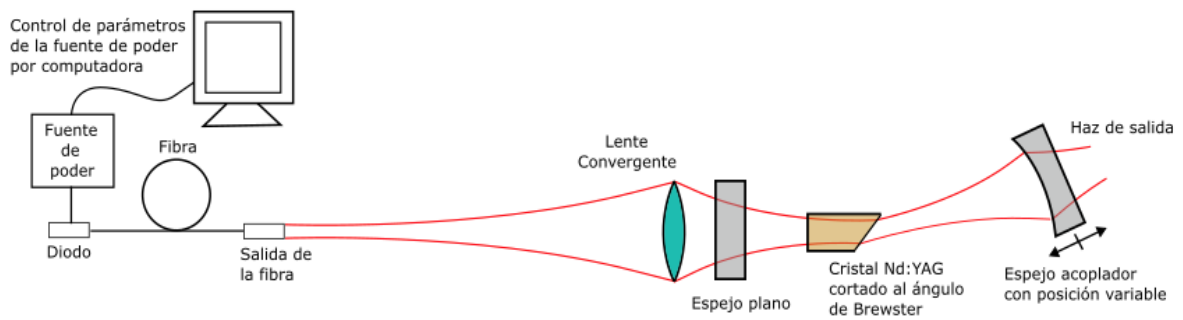


Figura 28 Esquema general del láser. La luz a la salida de la fibra, proveniente del diodo, es recolectada y enfocada con una lente convergente hacia un cristal de Nd:YAG cortado al ángulo de Brewster, el cual está dentro de una cavidad hecha por un espejo plano y un espejo curvo acoplador.

La luz proveniente del diodo está compuesta por una combinación lineal de los componentes paralelos y perpendiculares de polarización, polarización tipo p y s, respectivamente. Cuando luz con dichos componentes incide sobre una superficie cortada al ángulo de Brewster toda la luz pasa a través del material a excepción de un pequeño porcentaje de la polarización tipo s, que es reflejada. Dentro de una cavidad óptica, el paso continuo de luz polarizada por el cristal cortado al ángulo de Brewster, hará que pase polarización tipo p sin atenuarse y atenuará, con cada paso, la polarización tipo s, dando como resultado una amplificación de la polarización tipo p, y de manera complementaria, después de un gran número de viajes ida y vuelta, reduciendo las pérdidas por reflexión.

La cavidad utilizada en el arreglo la forman un espejo plano altamente reflejante a 1064 nm y con alta transmitancia a 808 nm y un espejo curvo acoplador de 200 mm de radio de curvatura con posición variable. La intención del arreglo experimental es producir luz láser proveniente del cristal a 1064 nm a la salida de la cavidad. A continuación, describiremos los experimentos y los resultados que nos permitieron construir el arreglo experimental.

4.1 Prueba de la navaja

Nuestro primer experimento consiste en calcular el factor M^2 y el semiancho de la luz a la salida de la fibra óptica para saber cómo evoluciona el semiancho al propagarse por el espacio libre. Para encontrar dichos valores utilizamos la prueba de la navaja.

La prueba de la navaja consiste en recolectar la luz proveniente de la salida de la fibra óptica con una lente convergente hacia un detector piroeléctrico, que nos permitirá medir la energía por pulso (Paschotta, s. f.). A diferentes planos respecto a la salida de la fibra óptica colocamos una navaja, lisa y afilada, que movemos transversalmente para bloquear la luz. Se tomaron siete planos distintos donde la navaja fue colocada, como se muestra en la figura 29 a). Para cada uno de los planos seleccionados se desplazó la navaja transversalmente en pasos de $254 \mu\text{m}$ hasta bloquear totalmente la luz (figura 29 b)).

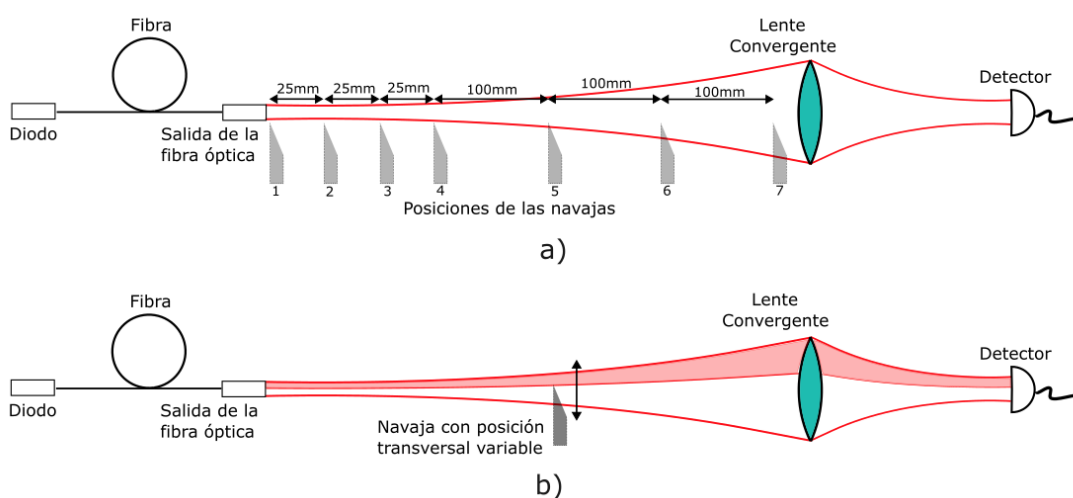


Figura 29 Diagrama de la prueba de la navaja. a) Se indican las distancias relativas de los siete planos donde se colocó una navaja. b) Se coloca una navaja en la trayectoria del haz y como al desplazar la navaja transversalmente altera la cantidad de luz medida por el detector (región roja sombreada).

La energía medida en el plano más cercano y alejado de la salida de la fibra óptica (posición 1 y 7 de la figura 29 a)) en función del recorrido de la navaja, se observan en la gráfica de la izquierda de la figura 30. Para el plano más cercano a la salida de la fibra observamos una caída abrupta de la energía, mientras que, en el plano más alejado, disminuye suavemente. Esto es esperado debido a la naturaleza difractiva de la luz, el ancho de la luz crece conforme se propaga (como indica la ecuación 27), lo cual exige trasladar la navaja mayor distancia para bloquear la luz totalmente.

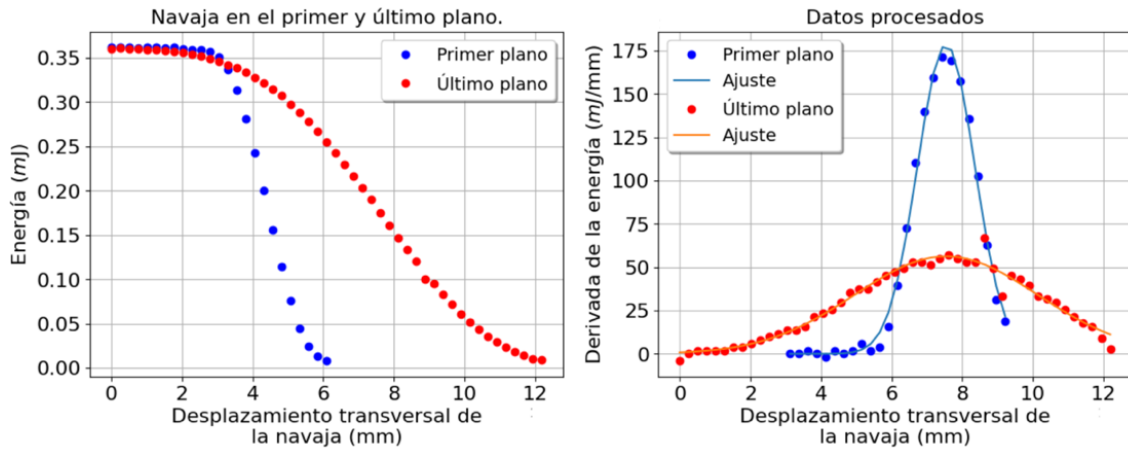


Figura 30 Gráficas de la energía contra el desplazamiento de la navaja (columna izquierda) y la derivada de la energía contra el desplazamiento de la navaja (columna derecha) en el primer y último plano.

El resultado de derivar la energía contra el desplazamiento de la navaja se observa en la gráfica de la derecha de la figura 30. Utilizando un ajuste gaussiano para cada conjunto de datos confirmamos que el ancho transversal de la luz aumenta conforme más alejados estemos de la salida de la fibra óptica. Para todos los planos donde se colocó la navaja se obtuvieron distribuciones gaussianas equivalentes. Utilizando los parámetros que ajustan la distribución gaussiana se estimó el semi ancho en cada uno de los planos, dando como resultado los datos en la gráfica de la figura 31.

Conociendo el semi ancho en cada uno de los planos se ajustó la ecuación 27 para calcular el semi ancho a la salida de la fibra óptica y el factor M^2 de la fuente, los cuales dieron como resultado 1.36 mm y 53, respectivamente.

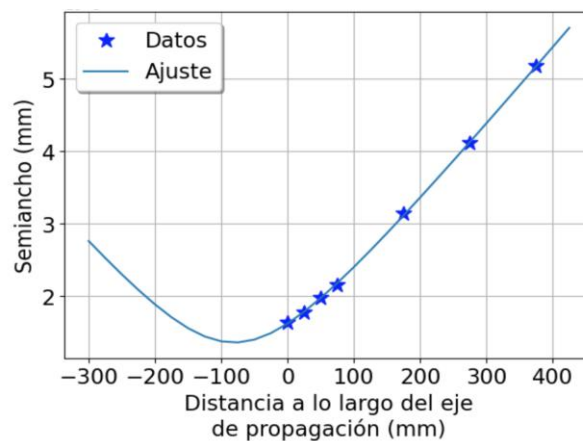


Figura 31 Datos del semi ancho de la luz proveniente de la salida de la fibra óptica. Se muestra el semi ancho de la luz proveniente de la salida de la fibra óptica en cada una de las siete posiciones donde se colocó la navaja. El ajuste se obtuvo con la ecuación 27.

4.2 Cavidad óptica

Nuestro siguiente paso consiste en colocar la cavidad conformada por los espejos. Un espejo plano y un espejo curvo acoplador de 200 mm de radio de curvatura. El espejo plano se coloca después de la lente convergente y el espejo curvo al otro extremo. A la salida de la cavidad se coloca un filtro con longitud de onda de corte a 1000 nm, y detrás, un detector de potencia, como se muestra en la figura 32. A diferencia del arreglo anterior, la emisión del diodo ha sido modificada a 880 nm para que coincida con la energía de absorción del cristal Nd:YAG y producir emisión estimulada a 1064 nm (Bai, 2020; Nan et al., 2009). El primer paso es encontrar la zona donde la luz proveniente del bombeo está más fuertemente enfocada. Conociendo la longitud de onda, el semi ancho a la salida de la fibra óptica y el factor M^2 de la fuente de bombeo junto a la distancia focal de la lente convergente es posible conocer la posición de la cintura utilizando el software. Esta zona es de interés porque, al colocar un medio activo en dicha posición, aseguramos que la mayor cantidad de energía proveniente de la fuente de bombeo sea inyectada al medio activo. Sin embargo, colocar el medio activo en la cintura no asegura la emisión láser, es necesario que la energía proveniente del haz de bombeo sea la suficiente para alcanzar la condición de inversión de población en el medio activo. Para esto será necesario variar la potencia del diodo (lo que equivale a variar la energía suministrada al medio activo) hasta detectar emisión láser. Luego, variando la posición del espejo acoplador, veremos si es posible maximizar la potencia de la emisión láser.

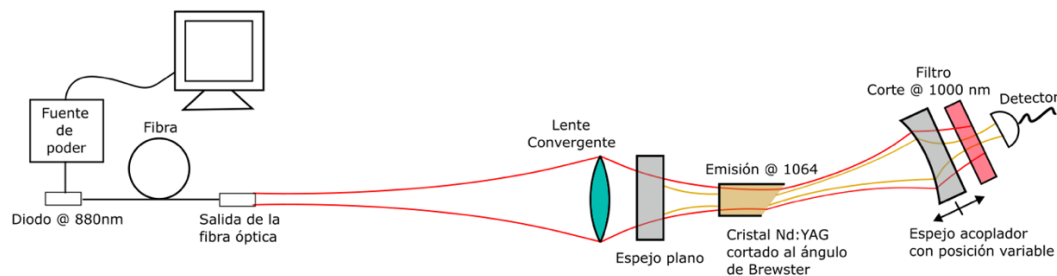


Figura 32 Esquema de la emisión láser. La luz pulsada de un diodo a 880 nm proveniente de una fibra óptica es recolectada por una lente convergente, pasando por el espejo plano hasta el espejo acoplador. En la cintura de la fuente de bombeo se coloca el medio activo: cristal de Nd:YAG produciendo emisión a 1064 nm, la cual es recolectada por un detector de potencia después de pasar por un filtro con longitud de onda de corte a 1000 nm, la cual evita el paso de luz cuya longitud de onda sea menor a 1000 nm y permite el paso de luz con longitud de onda mayor a 1000 nm.

4.2.1 Localización de la cintura del haz de bombeo

La distancia desde la salida de la fibra óptica a la lente convergente es de 475 mm y el espejo plano está a 35 mm de la lente. Ingresando los elementos al software encontramos que la cintura del haz de bombeo

debe estar aproximadamente a 35 mm del espejo plano, como se muestra en la figura 33.

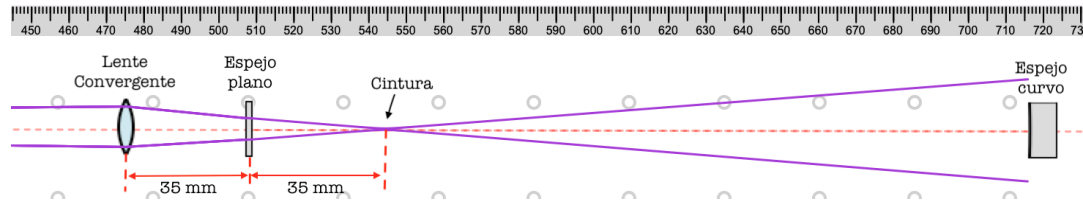


Figura 33 Simulación para la localización de la cintura de la fuente de bombeo. La simulación contiene una fuente de bombeo a 880 nm, $M^2=53$ y semi ancho inicial de 1.36 mm colocada a 475 mm detrás de una lente convergente con distancia focal de 60 mm. A 35 mm de la lente se coloca el espejo plano con grosor de 2 mm. La simulación nos indica que la cintura del haz de bombeo, donde la luz está más fuertemente enfocada, se encuentra aproximadamente a 70 mm de la lente. Se ha hecho un escalamiento para apreciar el haz de bombeo (línea morada), lo que ha causado que sea más grande que la altura del espejo curvo acoplador, pero no significa que salga de la cavidad.

El medio activo puede modelarse como una placa dieléctrica de longitud de 16.5 mm con un índice de refracción de 1.82 (Zelmon et al., 1998). Debido a que la luz proveniente de la fuente de bombeo pasará a través del cristal, su índice de refracción afectará ligeramente dónde encontraremos la cintura (Figura 34).

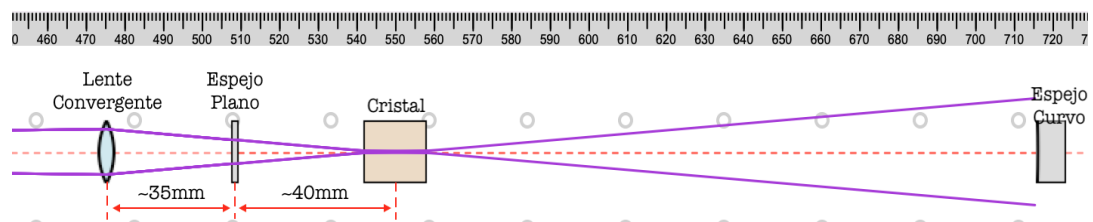


Figura 34 Simulación para la localización de la cintura de la fuente de bombeo al colocar el cristal. La simulación contiene una fuente de bombeo a 880 nm, $M^2=53$ y semi ancho de 1.36 mm colocada a 475 mm detrás de una lente convergente con distancia focal de 60 mm. A 35 mm de la lente se coloca el espejo plano con grosor de 2 mm. Alrededor de 40 mm del espejo plano se coloca el cristal, tal que coincida con la cintura del haz de bombeo (línea morada). Se ha hecho un escalamiento para apreciar el haz de bombeo (línea morada), lo que ha causado que sea más grande que la altura del espejo curvo acoplador, pero no significa que salga de la cavidad.

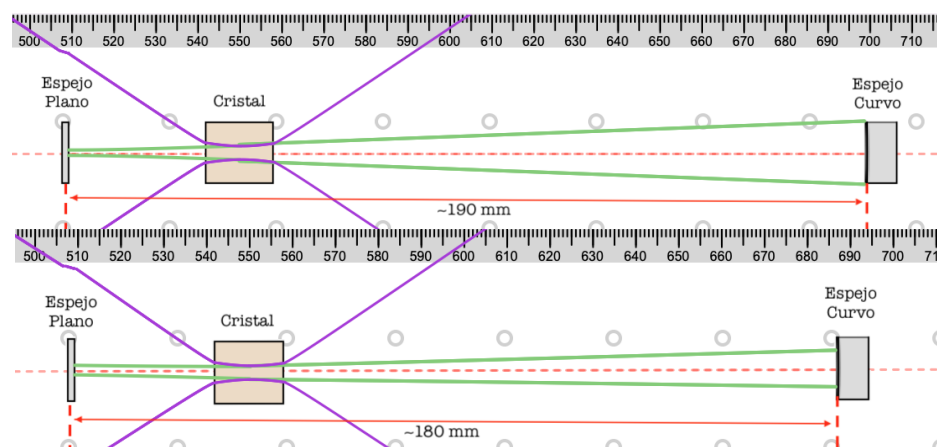


Figura 35 Simulación del traslape del haz de bombeo y la emisión láser del cristal. Se tiene una cavidad formada por un espejo plano y un espejo curvo, en su interior se coloca el cristal. En la figura superior a) se observa que el ancho del haz láser es mayor que el haz de bombeo en la parte central del cristal. En la figura inferior b) el traslape entre la emisión láser y el haz de bombeo es mayor.

La distancia entre el espejo plano y el espejo curvo debe ser menor al radio de curvatura del espejo curvo (200 mm). A distancias menores del radio de curvatura esperamos observar emisión láser, como se observa en la figura 35.

4.2.2 Emisión láser

Fijando la tasa de repetición del diodo pulsado en 10 Hz y para cuatro potencias del diodo distintas: 2.4W, 3.1W, 3.7W y 4.3W el siguiente experimento consistió en reducir la longitud de la cavidad, partiendo de una longitud aproximada de 200 mm, al mover en pasos de $254 \mu\text{m}$ el espejo curvo. Los resultados se muestran en la figura 36. Para todas las potencias de bombeo se observa un crecimiento en la potencia del láser hasta llegar a un máximo en la marca de 1 mm. Después de esto, especialmente para las potencias del diodo 3.7 W y 4.3 W, se observa una caída lenta de la potencia mientras reducimos la longitud de la cavidad.

En cuanto a la emisión láser se refiere el modelo matricial es binario, es decir, nos permite saber cuándo debería de obtenerse emisión láser y cuando no; lamentablemente el formalismo matricial, en si mismo, no nos da información de la cantidad de potencia del láser esperada. Sin embargo, sí nos da una noción de porqué ocurren cambios en las lecturas de la potencia del láser. Cuando reducimos la longitud de la cavidad afectamos a su vez el tamaño del semi ancho del láser que pasa por el cristal. Si la zona del medio activo que cubre la luz láser es menor a la zona de la luz de la fuente de bombeo que pasa por el cristal estaremos produciendo menor cantidad de emisión estimulada, decimos que su traslape es bajo. Si, en cambio, tenemos un gran traslape entonces estaremos aprovechando más energía de la fuente de bombeo para producir inversión de población, que a su vez es aprovechada, en gran medida, para producir emisión estimulada. En nuestra simulación, el grado de traslape es mayor conforme la longitud de la cavidad aumenta (Figura 35). De los datos de la figura 36, entonces, podemos inferir que el grado de traslape es máximo alrededor de la marca de 1 mm y después de esta marca el grado de traslape va disminuyendo lentamente.

Al ajustar los datos de la figura 36 con un a función spline encontramos el valor máximo de la potencia del láser para cada una de las potencias de bombeo 3.1W, 3.7W y 4.3W e incluso observamos que dicho punto máximo de potencia se recorre ligeramente conforme se aumenta la potencia de bombeo (figura 37). Esta ligera tendencia no podría ser explicado por el grado de traslape, ya que si fuera solo por esto esperaríamos los máximos de potencia láser en la misma posición del recorrido del espejo. La única

manera en que cambie es que tengamos otro elemento o que alguna de las propiedades de un elemento haya cambiado.

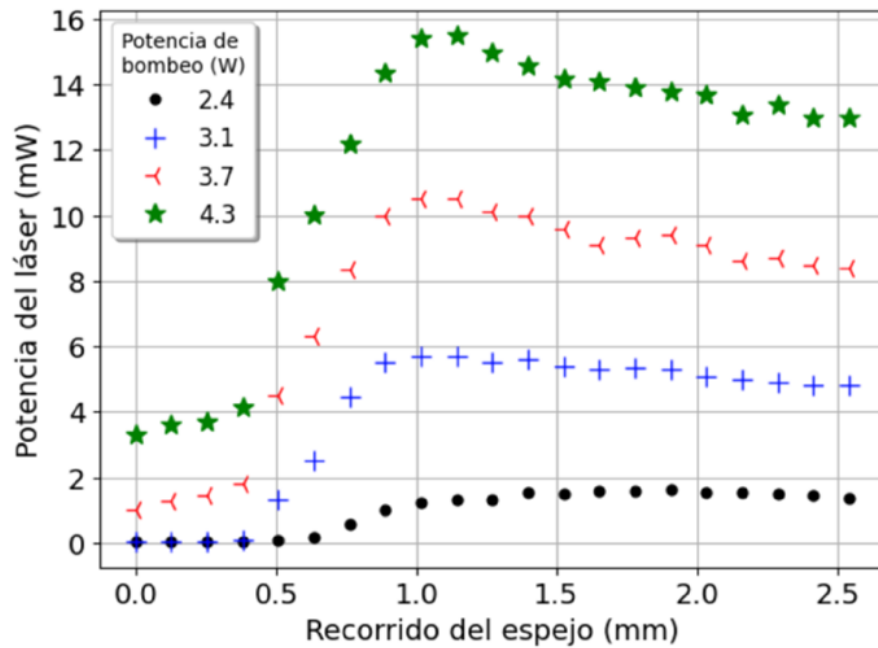


Figura 36 Gráfica de potencia del láser contra recorrido del espejo curvo. Se muestra la potencia medida del láser a 1064nm en función de la distancia recorrida por el espejo curvo acoplador al bombear con un diodo pulsado a una tasa de repetición de 10 Hz y potencias a 2.4W (negro), 3.1W (azul), 3.7W (rojo) y 4.3W (verde).

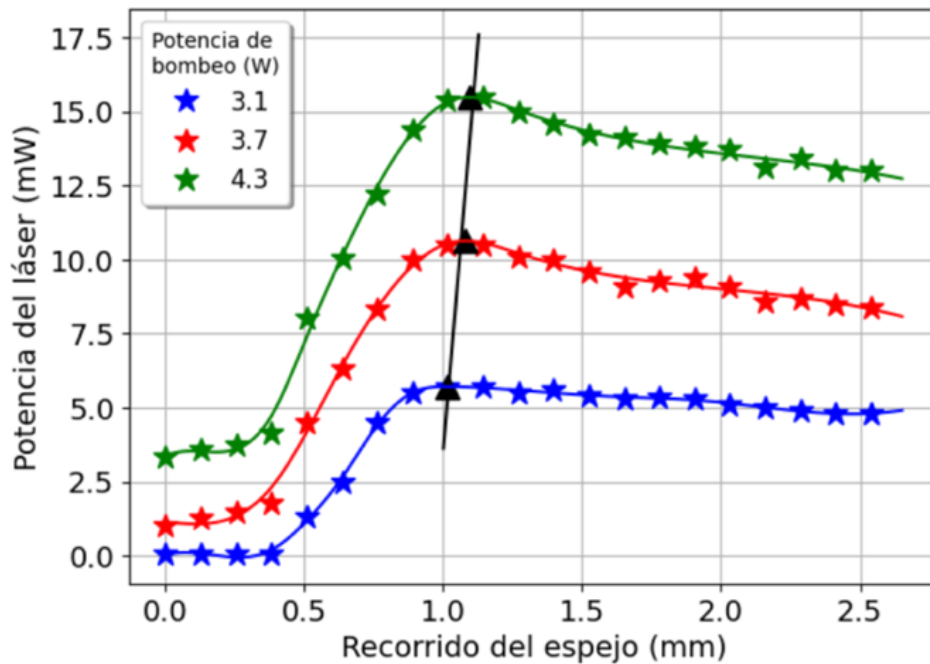


Figura 37 Gráfica de potencia del láser contra recorrido del espejo ajustados con una función spline. Se indica una ligera tendencia hacia la derecha de los máximos de la potencia del láser (triángulo negro) conforme aumenta la potencia de bombeo.

4.3 Lenseo térmico

Con la intención de conocer cómo es que el máximo de potencia láser cambia al aumentar la potencia de bombeo plantemos fijar la potencia de bombeo a 3.1W y aumentar la tasa de repetición del diodo, con la intención de suministrar más energía al cristal. Manteniendo el arreglo experimental mostrado en la figura 32, alargamos la longitud de la cavidad, trasladando el espejo curvo en pasos de $254\mu\text{m}$, desde una longitud inicial de 200 mm hasta no obtener lecturas de potencia láser para cada una de las siguientes tasas de repetición: 10 Hz, 20Hz, 30Hz, 40Hz, 50Hz, 60Hz y 70Hz. Los datos obtenidos de este experimento están en la gráfica de la figura 38.

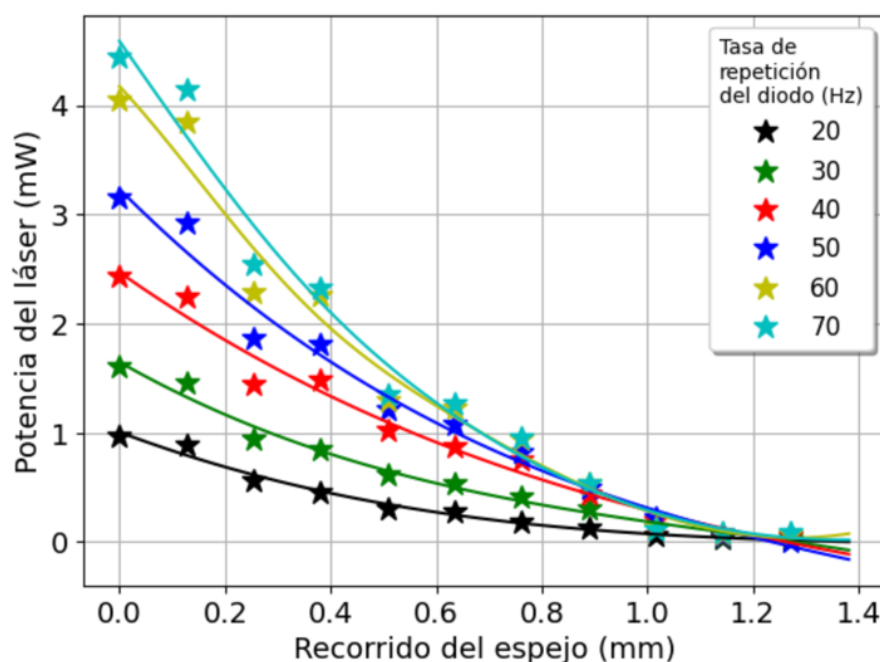


Figura 38 Potencia del láser contra recorrido del espejo. Lecturas de potencia de láser al variar la tasa de repetición del diodo pulsado a una potencia fija de 3.1W mientras se alarga la longitud de la cavidad.

Para cada tasa de repetición, las lecturas de la potencia del láser eran nulas cuando la longitud de la cavidad había aumentado aproximadamente 1.4 mm. Para saber con mejor precisión a que longitud la cavidad deja de ser estable, para cada tasa de repetición, se promedió la distancia recorrida para aquellas cuyas lecturas de potencia láser eran menores a 0.05 mW. La tasa de repetición contra el promedio de la distancia recorrida se observa en la gráfica de la figura 39. Encontramos una ligera tendencia lineal, indicando que conforme aumentamos la tasa de repetición aumentamos la longitud de la cavidad una decena de milímetro.

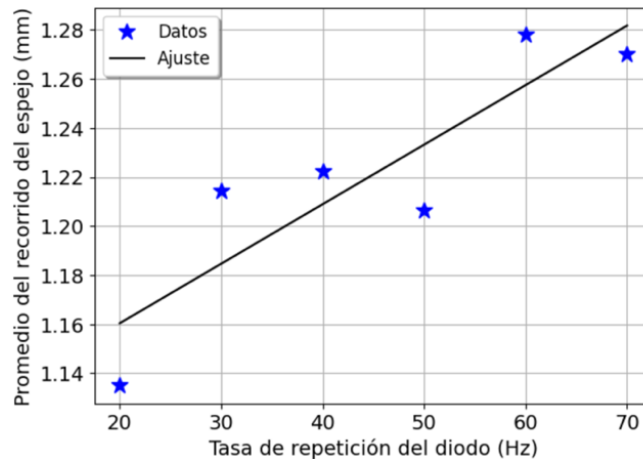


Figura 39 Distancia promedio recorrida por el espejo curvo contra frecuencia. Se muestran las posiciones promedio a la cual la potencia cayó a un valor menor a 0.05 W para cada una de las tasas de repetición.

El calor generado en el cristal debido a la absorción del haz de bombeo se distribuye radialmente (Koechner y Bass, 2003). El gradiente de calor genera cambios en el índice de refracción del cristal. En el centro del cristal el índice de refracción es máximo y decae cuadráticamente conforme nos alejamos del centro. Esto quiere decir que la luz que pasa por el centro del cristal tiene que recorrer una distancia óptica mayor a la luz que pasa por las orillas, produciendo un frente de onda esférico a la salida del cristal. Las lentes tienen este mismo efecto sobre la luz. Por tal motivo a este fenómeno se le conoce como leseo térmico (Figura 40). Este efecto puede explicar la razón del aumento de la longitud de la cavidad.

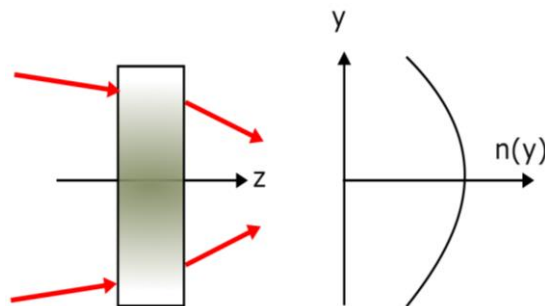


Figura 40 Sección de un medio activo y gráfica de su índice de refracción respecto a la dirección transversal. Los rayos incidentes cambian su dirección de propagación, enfocándolo, al pasar por un elemento cuyo índice de refracción varía cuadráticamente respecto a su centro (Siegman, 1986).

De manera ilustrativa, utilizando la misma cavidad en nuestra simulación, pero insertando una lente en la posición del cristal, observamos que si la distancia focal aumenta también lo hace la longitud sin perder la estabilidad sin perder la estabilidad, mientras que si se disminuye tendríamos que reducir la longitud de la cavidad. Para nuestra simulación hemos usado lentes con una diferencia de 1 mm en su distancia focal, colocadas justo en la región central donde se encontraba el cristal. Con solo esta diferencia podemos

observar que la estabilidad varia considerablemente (figura 41). De nuestros resultados podemos inferir que la distancia focal equivalente producida por el lenseo térmico es de alrededor de 33 mm.

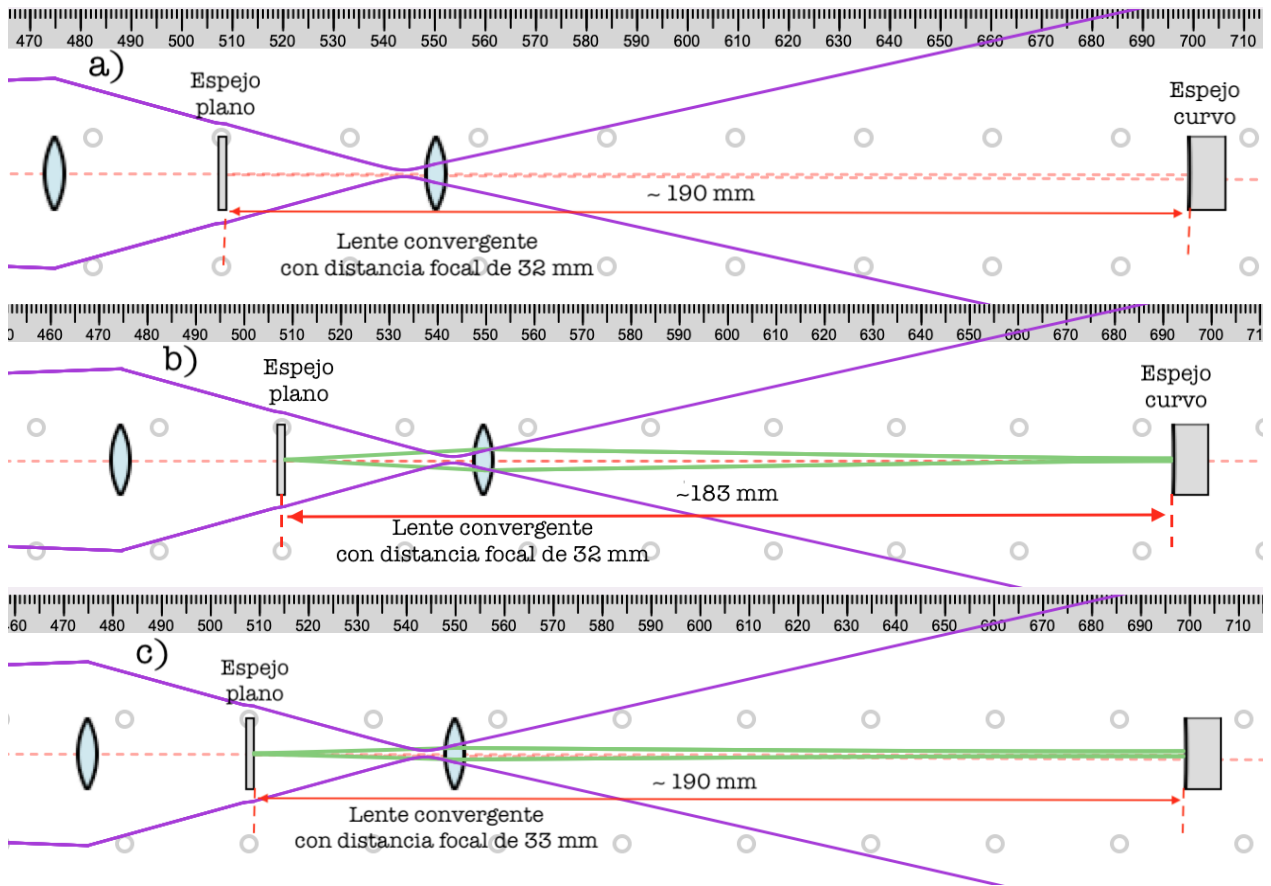


Figura 41 Cavity delimitada por dos espejos y una lente convergente. En la figura superior a) se muestra una lente convergente con distancia focal de 32 mm que no produce una cavidad estable cuando los espejos que forman la cavidad están a 190 mm entre sí. b) Se necesita reducir el tamaño de la cavidad para encontrar la estabilidad. c) Mientras que, si se ajusta la distancia focal a 33 mm, a una longitud de 190 mm, la cavidad es estable.

Capítulo 5. Conclusiones

Con Xojo es fácil diseñar interfaces gráficas, ya que contiene muchos controles nativos al sistema operativo y eventos predeterminados listos para ser codificados, tales como presionar, arrastrar y soltar. Estas características nos ahorran tiempo en el diseño de los elementos de la interfaz y los APIs de los eventos para enfocarnos principalmente en el funcionamiento del software. Esto incluyó principalmente la implementación de la lógica para colocar y manipular los elementos ópticos, indicar el tipo de cavidad óptica a formar y los cálculos de estabilidad y propagación de los haces láseres.

Aunque la interfaz y funcionalidad del software no es definitiva, es en una interfaz genérica y práctica. Un diseño más estético, intuitivo y que al mismo tiempo se ajuste a las necesidades de los usuarios sería una meta deseable. Dicho diseño necesita de una investigación enfocada en la experiencia de usuario. La investigación requeriría de seleccionar grupos potenciales de usuarios interesados en el software, tales como estudiantes, profesores o investigadores, que permita extraer métricas objetivas para mejorar la apariencia, usabilidad y rendimiento del software, por mencionar algunos (Sharp et al., 2019).

Además de ser un software estéticamente amigable, el software en su estado actual nos fue útil para el desarrollo experimental. Utilizando los resultados obtenidos en la simulación logramos construir una cavidad gráfica equivalente que nos guiaba, a su vez, en el diseño experimental. Con el primer arreglo experimental encontramos el valor del factor M^2 y el semi ancho de la fuente de bombeo a la salida de la fibra óptica. Con estos datos simulamos una fuente de bombeo con dichos parámetros, con la cual, en conjunto con una lente convergente y un espejo plano, identificamos la región donde la luz de la fuente de bombeo está más fuertemente enfocada. Esto nos permitió colocar el medio activo en dicha zona en el arreglo experimental.

Posteriormente se colocó el espejo curvo, formando la cavidad óptica. Al modificar la longitud de la cavidad se esperaba encontrar dos zonas relevantes. Una de ellas correspondiente a una zona no estable, donde no obtuviéramos lecturas de potencia del láser, y una segunda zona donde obtuviéramos lecturas de potencia láser y se mantuvieran estables mientras nos encontramos en la zona de estabilidad. Sin embargo, se observó que no existe un cambio abrupto de la potencia del láser cuando pasamos de la zona inestable a la estable. En cambio, lo que se observó es que a pesar de encontráramos en la zona estable de la cavidad óptica las lecturas de potencia láser fueron reduciéndose después de alcanzar un máximo en la potencia láser. Este resultado se puede explicar por el grado de traslape entre la fuente de bombeo y la

emisión láser del medio activo. Cuando el traslape es pequeño no podríamos esperar mucha potencia proveniente del cristal, ya que gran cantidad de la luz de la fuente de bombeo en el cristal no está siendo aprovechado para la amplificación, en cambio, si hacemos que el traslape aumente podemos obtener un pico en potencia láser. Resultados más detallados de la potencia láser necesitarían incluir el proceso de amplificación en el medio activo, lo que equivale a resolver las ecuaciones que rigen los procesos de interacción luz materia. Para cada material tendríamos ecuaciones, en principio diferentes, que describen los fenómenos de absorción, emisión estimulada y emisión espontánea. Un posible trabajo a futuro, que ampliaría el rango de uso del software, sería incluir dichas ecuaciones para simular la potencia láser.

Por otro lado, mencionamos que al procesar un poco más los datos de la potencia del láser de la figura 36 se encontró una ligera tendencia del máximo conforme aumentaba la potencia de la fuente de bombeo, lo cual investigamos y tratamos de responder con suponer que el medio activo era sensible a los cambios de temperatura producidos por la luz de la fuente de bombeo. Al aumentar la tasa de repetición del diodo asegurábamos que mayor cantidad de energía era suministrada al cristal provocando lenseo térmico. De los datos obtenidos observamos una ligera tendencia al lenseo, sin embargo, se necesitarían realizar nuevos experimentos para medir con mejor precisión el grado de lenseo térmico del cristal Nd:YAG. Como trabajo a futuro este fenómeno también lo podríamos codificar en el software modificando las matrices ABCD para que sean funciones de la temperatura.

Habrán algunos elementos ópticos que no experimenten efectos optotérmicos, lo cual es una oportunidad para extender y refinar el diseño de clases de los elementos ópticos. Crear clases especializadas nos permitiría a su vez incluir otros elementos ópticos comunes en un laboratorio de óptica que no fueron incluidos en esta versión, tales como prismas, rejillas de difracción, lentes gruesas, entre otros, con el fin de producir un software especializado en el diseño de cavidad ópticas. Incluso, podríamos ir un poco más lejos y diseñar cavidades ópticas conformadas no solo por espejos. Por ejemplo, en la figura 42 se muestra una cavidad tipo anillo con solo dos espejos, un prisma permite redireccionar la luz de vuelta a un espejo para formar la cavidad. Actualmente este tipo de cavidades no se pueden crear, el usuario tendría que crear una cavidad equivalente, como la que nosotros creamos en nuestro software; dado que en esta versión no se implementaron placas cortadas a un ángulo arbitrario, se tuvo que representar el experimento en la simulación con un arreglo equivalente.

Estos arreglos equivalentes, además, solo pueden ser diseñados con el software si se permite que los elementos ópticos estén centrados y alineados. Esto es una idealización, en la práctica no existen cavidades completamente alineadas. De hecho, hay algunos experimentos que necesitan tener elementos

desalineados. Desalinear los elementos en una versión posterior permitiría hacer más flexible el diseño de cavidades, nos permitiría explorar el grado de tolerancia de la estabilidad de la cavidad óptica para cada uno de los elementos que la conforman. Con lo cual podríamos dar no incluso la longitud de la cavidad y posición de los elementos para que la cavidad sea estable, si no también qué tanto se pueden mover u orientar respecto a su posición inicial sin afectar la estabilidad. Afortunadamente el efecto de desalinear un elemento puede ser estudiado con el formalismo de las matrices ABCD, lo cual puede ser una propuesta interesante para un trabajo posterior.

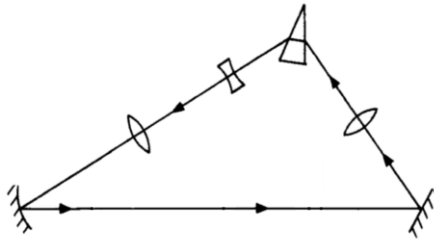


Figura 42 Cavidad óptica formada por dos espejos y un prisma. La cavidad, a pesar de estar conformada solo por dos espejos el prisma permite redireccionar la luz de vuelta a un espejo, formando una cavidad tipo anillo.

Respecto a las matrices ABCD. En nuestros cálculos hemos indicado que para calcular el efecto neto que tienen los elementos ópticos sobre la estabilidad de la cavidad, tenemos que concatenar y multiplicar en reversa las matrices asociadas a los elementos cada que se alteren las posiciones o propiedades de los elementos. Si bien es necesario calcular nuevamente la estabilidad, el algoritmo puede mejorarse. No es necesario iterar sobre el producto de las matrices, es posible calcular la matriz de ida y a partir de ella, sin tener que multiplicar nuevamente las matrices en el viaje de vuelta, calcular la matriz asociada al viaje de vuelta. Esto permitiría reducir el tiempo de ejecución, el cual puede llegar a ser un problema si el número de elementos ópticos aumenta considerablemente.

A pesar de haber utilizado el software para simular solo un experimento particular, nos han dado respuestas parciales a algunos problemas. Se encontró que una cavidad como la que se montó provee mucha información que el formalismo matricial por sí solo no es capaz de resolver completamente. Esto por un lado es una oportunidad para ampliar las funcionalidades del software y por otro lado para comprender los límites del formalismo.

Literatura citada

- Agrawal, G. P., & Pattanayak, D. N. (1979). Gaussian beam propagation beyond the paraxial approximation. *Journal of the Optical Society of America*, 69(4), 575–578. <https://doi.org/10.1364/josa.69.000575>
- Bai, Y. (2020). Pumping wavelength related population inversion in Nd:doped laser. *AIP Advances*, 10(10), 105309. <https://doi.org/doi:10.1063/5.0006436>
- Bertolotti, M. (1964). Matrix representation of geometrical properties of laser cavities. *Il Nuovo Cimento*, 32(5), 1242–1257. <https://doi.org/10.1007/bf02726066>
- Boyd, G. D., & Gordon, J. P. (1961). Confocal Multimode Resonator for Millimeter Through Optical Wavelength Masers. *Bell System Technical Journal*, 40(2), 489–508. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1961.tb01626.x>
- Budd, T. (1991). *An Introduction to Object-Oriented Programming* (3er Ed.). Addison Wesley Longman.
- Carter, W. H. (1972). Electromagnetic Field of a Gaussian Beam with an Elliptical Cross Section. *Journal of the Optical Society of America*, 62(10), 1195–1201. <https://doi.org/10.1364/josa.62.001195>
- Einstein, A. (1917). On the quantum theory of radiation. *Physikalische Zeitschrift*, 18(121), 63–77.
- Ferg, S. (2006). *Event-Driven Programming: Introduction, Tutorial, History*. Consultado el 1 de agosto del 2024, de https://fsw01.bcc.cuny.edu/kerry.ojakian/TeachingPages/Old_Courses_UP/CSI32_Fall2019/Course_Materials/Ferg_event_driven_programming.pdf
- Fowler, M., & Scott, K. (1999). *UML gota a gota*. Addison Wesley Longman de México.
- Fox, A. G., & Li, T. (1961). Resonant Modes in a Maser Interferometer. *Bell System Technical Journal*, 40(2), 453–488. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1961.tb01625.x>
- Goubau, G., & Schwering, F. (1961). On the guided propagation of electromagnetic wave beams. *IRE Transactions on Antennas and Propagation*, 9(3), 248–256. <https://doi.org/10.1109/tap.1961.1144999>
- Koechner, W., & Bass, M. (2003). *Solid-State Lasers: A Graduate Text*. Springer.
- Kogelnik, H., & Li, T. (1966). Laser beams and resonators. *Proceedings of the IEEE*, 54(10), 1312–1329. <https://doi.org/10.1109/proc.1966.5119>
- Lax, M., Louisell, W. H., & McKnight, W. B. (1975). From Maxwell to paraxial wave optics. *Physical Review A*, 11(4), 1365–1370. <https://doi.org/10.1103/physreva.11.1365>
- Nan, Z., Xiao-Fu, Z., Qing-Lei, M., Bao-Shan, W., Da-Fu, C., Qin-Jun, P., Zu-Yan, X., Yu-Bai, P., & Xi-Qi, F. (2009). Comparison of Nd:YAG Ceramic Laser Pumped at 885 nm and 808 nm. *Chinese Physics Letters*, 26(5), 054211. <https://doi.org/10.1088/0256-307x/26/5/054211>
- Paschotta, R. (s.f.). Hermite-Gaussian Modes. *RP Photonics Encyclopedia*. Consultado el 10 de agosto del 2024, de https://www.rp-photonics.com/hermite_gaussian_modes.html

- Paschotta, R. (s.f.). Pyroelectric Detectors. *RP Photonics Encyclopedia*. Consultado el 1 de agosto del 2024, de https://www.rp-photonics.com/pyroelectric_detectors.html
- Saleh, B., & Teich, M. C. (2019). Resonator Optics. In *Fundamentals of Photonics* (3ra Ed., pp. 433–472). Wiley.
- Sharp, H., Preece, J., & Rogers, Y. (2019). *Interaction Design: Beyond human interaction* (5ta Ed.). Wiley.
- Shimoda, K. (1986). Electromagnetic Theory of Light. In *Introduction to Laser Physics* (2da Ed., Vol. 44, pp. 35–71). Springer.
- Siegman, A. (1986). *Lasers* (Revised). University Science Books.
- Smith, D. N. (1991). *Concepts of Object-Oriented Programming*. McGraw-Hill.
- Svelto, O. (2010). *Principles of Lasers* (5ta Ed.). Springer.
- Wilson, R. J. (1996). *Introduction to Graph Theory* (4ta Ed.). Prentice Hall. Consultado el 1 de agosto del 2024, de <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/wilsongraph.pdf>
- Xojo. (s.f.). *What is Xojo?* Consultado el 1 de agosto del 2024, de https://documentation.xojo.com/getting_started/introduction/what_is_xojo.html#getting-started-introduction-what-is-xojo-about-the-xojo-programming-language
- Zelmon, D. E., Small, D. L., & Page, R. (1998). Refractive-index measurements of undoped yttrium aluminum garnet from 0.4 to 50 μm . *Applied Optics*, 37(21), 4933–4935. <https://doi.org/10.1364/ao.37.004933>

Anexos

Anexo A. Propagación en el espacio libre del modo gaussiano partiendo de la ecuación de onda paraxial.

Se propone la siguiente amplitud compleja de campo escalar $\tilde{E}(x, y, z)$ para resolver la ecuación de onda paraxial (ecuación 3)

$$\tilde{E}(x, y, z) = A(z)e^{\frac{-ik(x^2+y^2)}{2q(z)}}, \quad (30)$$

donde $A(z)$ es la amplitud compleja. Sustituyendo la ecuación 30 en la ecuación 3 obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$-\frac{A(z)k^2}{q^2(z)}(x^2 + y^2) + \frac{A(z)k^2}{q^2(z)}(x^2 + y^2)\frac{\partial q(z)}{\partial z} + 2ik\frac{\partial A(z)}{\partial z} + 2ik\frac{A(z)}{q(z)} = 0. \quad (31)$$

Agrupando la parte real y resolviendo para el parámetro $q(z)$ obtenemos

$$q(z) = q_0 + z, \quad (32)$$

donde q_0 es el parámetro complejo inicial y z la distancia, esta ecuación nos describe la evolución del parámetro q a lo largo del espacio libre. Agrupando la parte imaginaria y resolviendo para la amplitud compleja $A(z)$ obtenemos

$$A(z) = A_0 \frac{q_0}{q(z)}, \quad (33)$$

donde A_0 es la amplitud compleja inicial. Evaluando la ecuación 30 en el plano $z = 0$ obtenemos

$$\tilde{E}(x, y, 0) = A_0 e^{\frac{-ik(x^2+y^2)}{2q_0}}. \quad (34)$$

La ecuación 34 nos indica que el campo eléctrico crece exponencialmente a lo largo de las coordenadas transversales x y y . Ya que físicamente no podemos esperar que el campo eléctrico crezca indefinidamente se agrega un signo negativo al exponente. Luego, sustituyendo q_0 , de la ecuación 6, podemos reescribir la ecuación 34 de la siguiente manera

$$\tilde{E}(x, y, 0) = A(0)e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_0^2}}. \quad (35)$$

Por conveniencia se suele definir el parámetro complejo $q(z)$ como

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - \frac{i\lambda}{\pi w^2(z)}. \quad (36)$$

Que al sustituir en la ecuación 30 podemos ver de manera más directa los componentes geométricos del haz gaussiano

$$\tilde{E}(x, y, z) = A(z)e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2q(z)}} = A(z)e^{-ik(x^2+y^2)/2R(z)}e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)}. \quad (37)$$

El primer exponente, según el signo del radio de curvatura $R(z)$, es una onda esférica divergente o convergente y el segundo exponente contiene la información del decaimiento gaussiano a lo largo de los planos transversales a su propagación.

Anexo B. Derivación de los modos de orden superior partiendo de la ecuación de onda paraxial.

En este apartado se describe cómo al proponer eigenfunciones permite extender la descripción de ondas que pueden existir en el espacio libre además del modo gaussiano. En coordenadas rectangulares la solución propuesta en el Anexo A para resolver la ecuación 3 puede extenderse para encontrar la familia de eigenfunciones que describen la amplitud compleja de un campo escalar en la aproximación paraxial de manera más general, las cuales llamaremos $\tilde{E}_{nm}(x, y, z)$. Dichas soluciones pueden escribirse como el producto de dos funciones en las direcciones transversales x y y

$$\tilde{E}_{nm}(x, y, z) = \tilde{E}_n(x, z) * \tilde{E}_m(y, z), \quad (38)$$

donde $\tilde{E}_n(x, y)$ y $\tilde{E}_m(y, z)$ tienen la misma forma matemática (Siegman, 1986). Sustituyendo en la ecuación de onda paraxial (ecuación 3) y tomando solo una coordenada transversal, por simplicidad, vemos que se cumple

$$\partial_x^2 \tilde{E}_n(x, z) - 2ik \partial_z \tilde{E}_n(x, z) = 0. \quad (39)$$

Se propone una solución más general a la propuesta en el Anexo A

$$\tilde{E}_n(x, y, z) = \tilde{A}(\tilde{q}(z)) h_n \left(\frac{x}{\tilde{p}(z)} \right) e^{-ik \frac{x^2}{2\tilde{q}(z)}}, \quad (40)$$

donde $\tilde{q}(z)$ es el parámetro complejo; $\tilde{A}(\tilde{q})$ y $h_n(x/\tilde{p})$ son funciones desconocidas. Mientras $\tilde{p}(z)$ es un factor de escalamiento dependiente de la distancia. Al sustituir la ecuación 40 en 39, suponiendo que $d\tilde{q}(z)/dz = 1$ y omitiendo la dependencia explícita de las funciones se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$h_n'' - 2ik \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} - \tilde{p}' \right) x h_n' - ik \frac{\tilde{p}^2}{\tilde{q}} \left(1 + \frac{2\tilde{q}}{A} \frac{d\tilde{A}}{d\tilde{q}} \right) h_n = 0, \quad (41)$$

donde h_n'' y h_n' es la segunda y primera derivada respecto a la coordenada transversal, respectivamente. Mientras que \tilde{p}' es la derivada respecto a la dirección de propagación z . Esta ecuación es muy similar a la ecuación diferencial de los polinomios de Hermite H_n dada por

$$H_n'' - \frac{2x}{\tilde{p}} H_n' + 2n H_n = 0, \quad (42)$$

cuya solución se suele expresar como la siguiente función generadora

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (43)$$

Las ecuaciones 41 y 42 se convierten en la misma ecuación si se encuentra solución para $\tilde{p}(z)$ y $A(\tilde{q})$.

Es decir, que se deben encontrar soluciones para las siguientes ecuaciones

$$2ik \left(\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} - \tilde{p}' \right) = \frac{2}{\tilde{p}}, \quad (44)$$

$$-ik \frac{\tilde{p}^2}{\tilde{q}} \left(1 + \frac{2\tilde{q}}{A} \frac{dA}{d\tilde{q}} \right) h_n = 2n. \quad (45)$$

Los polinomios de Hermite se obtienen si se supone que el factor de escalamiento $\tilde{p}(z)$ es real y es función del semi ancho del haz $w(z)$, $\tilde{p}(z) \equiv \sqrt{2}/w(z)$. Por lo tanto, bajo la anterior consideración y resolviendo las ecuaciones 44 y 45 con los parámetros adecuados obtenemos que las eigensoluciones son proporcionales a los polinomios de Hermite moduladas por una envolvente gaussiana (Siegman, 1986)

$$\tilde{E}_n(x, z) = \tilde{A}(\tilde{q}(z)) H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) e^{-\frac{ikx^2}{2\tilde{q}(z)}}. \quad (46)$$

Finalmente obtenemos una amplitud compleja $\tilde{E}_{nm}(x, y, z)$ dada por

$$\tilde{E}_{nm}(x, y, z) \propto H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) e^{-\frac{ik(x^2+y^2)}{2\tilde{q}(z)}}. \quad (47)$$

Cuando el orden de los polinomios de Hermite es de orden 0, tenemos que $H_0 = 1$, recuperando el perfil transversal gaussiano de la ecuación 37. Conforme aumenta el orden de n y m , y usando la función generadora dada por la ecuación 43, obtenemos los polinomios que modulan el perfil transversal, algunos de ellos mostrados en la figura 7.

Anexo C. Propagación de modo gaussiano a través de elementos ópticos paraxiales.

Una manera de observar el efecto que tiene un elemento óptico sobre el parámetro q es a partir del principio de Huygens. Este principio sostiene que cualquier punto de un frente de onda se puede considerar como una fuente de ondas esféricas. Las fuentes esféricas producen frentes de ondas esféricos. A cualquier punto de estos frentes de onda esféricos se les puede asignar un rayo. El análisis parte de comparar el recorrido entre dos rayos paraxiales de un frente de onda al pasar a través de un elemento óptico, como se muestra esquemáticamente en la figura 43.

El campo resultante $v(x')$, después de pasar por el elemento óptico, se calcula, sin pérdida de generalidad, a lo largo de la coordenada transversal x a partir de

$$v(x') = e^{-ikL} \int K(x', x)u(x)dx, \quad (48)$$

donde el factor constante contiene la diferencia de fase producida por pasar a través del sistema ABCD de ancho L y $K(x', x)$ el kernel. De la figura 43 podemos relacionar las coordenadas transversales y angulares asociadas al punto Q y S, (x, θ) y (x', θ') , respectivamente, invocando la óptica matricial a través de

$$x' = Ax + B\theta, \quad (49)$$

$$\theta' = Cx + D\theta. \quad (50)$$

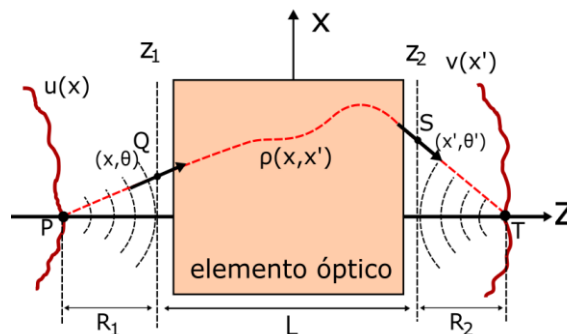


Figura 43 Camino que sigue un rayo al pasar por un elemento óptico. Un rayo proveniente de un punto P del frente de onda $u(x)$ incidiendo a una altura x e inclinación θ respecto al eje z pasa por un elemento óptico de ancho L siguiendo una trayectoria dada por $\rho(x, x')$ emergiendo en un punto S del frente de onda $v(x')$ a una altura x' e inclinación θ' .

Con un poco de álgebra y sabiendo que las matrices ABCD tienen determinante igual a 1; las coordenadas angulares θ y θ' en el plano z_1 y z_2 , respectivamente, se escriben

$$\theta = \frac{x' - Ax}{B}, \quad (51)$$

$$\theta' = \frac{Dx' - x}{B}. \quad (52)$$

El rayo incidente, proveniente del punto P localizado a una distancia R_1 detrás del plano z_1 , se modela como una onda esférica. De igual manera, el rayo después de pasar por el sistema ABCD se modela como una onda esférica con centro localizado en el punto T a una distancia R_2 después del plano z_2 . Estas distancias pueden relacionarse con las coordenadas angulares y transversales de la siguiente manera

$$\frac{R_1}{n_1} = \frac{x}{\theta} = \frac{Bx}{x' - Ax'} \quad (53)$$

$$\frac{R_2}{n_2} = \frac{x'}{\theta'} = \frac{Bx'}{Dx' - x}. \quad (54)$$

Por otro lado, de acuerdo con el principio de Fermat, para que no exista un desfase, necesitamos que la trayectoria que sigue un rayo por los puntos P, Q, S y T en ese orden y el camino que unen los puntos P y T sean iguales. Igualando los caminos ópticos obtenemos

$$n_1 R_1 + L - n_2 R_2 = n_1 (R_1^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} + \rho(x, x') - n_2 (R_2^2 + x'^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (55)$$

donde n_1 el índice de refracción antes del plano z_1 , n_2 el índice de refracción después del plano z_2 y $\rho(x, x')$ es el camino óptico dentro del sistema ABCD, también llamada función eikonal. Esta función en principio puede tener una forma muy complicada, todo depende de la complejidad del sistema óptico que constituye el sistema ABCD. Sustituyendo las ecuaciones 53 y 54 en la ecuación 55 y despejando la función eikonal

$$\rho(x, x') = L - \frac{n_1 x^2}{2R_1} + \frac{n_2 x'^2}{2R_2} = L + \frac{1}{2B} (Ax^2 - 2x'x + Dx'^2). \quad (56)$$

Lo cual nos permite escribir $v(x')$ como función de las entradas de la matriz ABCD característica del sistema. Re-escribimos la integral de Huygens (ecuación 48) sustituyendo el kernel correspondiente

$$v(x') = e^{-ikL} \sqrt{\frac{i}{B\lambda_0}} \int e^{-\frac{i\pi}{\lambda_0 B} (Ax^2 - 2x'x + Dx'^2)} u(x) dx. \quad (57)$$

Donde el factor de escalamiento constante antes de la integral se agrega para conservar la energía. Considerando una onda incidente gaussiana con longitud de onda λ_1 y parámetro complejo q_1

$$u(x, y, z) = A(z) e^{\frac{-i\pi(x^2+y^2)}{q_1\lambda_1}}, \quad (58)$$

dado que es una función separable, podemos tomar solo la parte transversal en x y sin pérdida de generalidad sustituir en la ecuación 57

$$v(x') = e^{-ikL} \sqrt{\frac{i}{B\lambda_0}} e^{-\frac{i\pi D x'^2}{\lambda_0}} \int e^{-i\pi(\frac{A}{\lambda_0 B} + \frac{1}{q_1\lambda_1})x^2} e^{\frac{2i\pi}{\lambda_0 B} x' x} dx. \quad (59)$$

El integrando corresponde a una integral gaussiana conocida, la cual tiene solución exacta cuando se integra a lo largo de todo el eje x . Integrando en todo el eje x tenemos que el campo de salida es

$$v(x') = e^{-ikL} e^{-\frac{i\pi D x'^2}{\lambda_0 B}} \sqrt{\frac{1}{A + \frac{B\lambda_0}{q_1\lambda_1}}} e^{\frac{i\pi\lambda_1 q_1 x'^2}{\lambda_0 B(Aq_1\lambda_1 + B\lambda_0)}}. \quad (60)$$

Desarrollando el exponente

$$v(x') = e^{-ikL} e^{-\frac{i\pi D x'^2}{\lambda_0 B}} \sqrt{\frac{1}{A + \frac{B\lambda_0}{q_1\lambda_1}}} e^{-\frac{i\pi x'^2}{\lambda_0} \left(\frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_0} q_1 C + D}{\frac{\lambda_1}{\lambda_0} q_1 A + B} \right)}. \quad (61)$$

Dado que la onda incidente y resultante tras pasar por el sistema ABCD no cambia entonces $\lambda_0 = \lambda_1$, con lo cual, reduciendo la ecuación anterior y reordenando los términos del exponente el campo resultante es

$$v(x') = e^{-ikL} e^{-\frac{i\pi D x'^2}{\lambda_0 B}} \sqrt{\frac{1}{A + \frac{B\lambda_0}{q_1\lambda_1}}} e^{-\frac{i\pi x'^2}{\lambda_0} \left(\frac{1}{Aq_1 + B} \right)}, \quad (62)$$

de la cual observamos que el campo resultante tiene forma gaussiana, y naturalmente definimos el parámetro complejo q_2 como

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}. \quad (63)$$

Con esta relación obtenemos el radio de curvatura y el semi ancho del haz gaussiano después de pasar por el elemento óptico. La ecuación 63 se conoce como Ley ABCD para haces gaussianos.

Anexo D. Condición de estabilidad.

La condición de estabilidad parte de la exigencia de que el haz láser después de un viaje y vuelta por la cavidad debe de tener el mismo perfil transversal, es decir, que se reproduzca a sí mismo. Usando la ley ABCD para haces gaussianos la auto reproducibilidad se escribe

$$q_1 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}. \quad (64)$$

Reorganizando términos obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado

$$Cq_1^2 + (D - A)q_1 - B = 0, \quad (65)$$

cuya solución

$$q_1 = \frac{-(D - A) \pm \sqrt{(D - A)^2 + 4BC}}{2C}, \quad (66)$$

existe sólo cuando el radicando es menor a cero, ya que el parámetro q debe ser complejo. Entonces

$$(D - A)^2 + 4BC < 0. \quad (67)$$

Las matrices ABCD cumplen con $AD - BC = 1$, sustituyendo este resultado en la ecuación anterior y reorganizando términos

$$(D + A)^2 < 4, \quad (68)$$

aplicando la raíz en ambos lados de la desigualdad encontramos que el radicando debe cumplir

$$-1 < \frac{D + A}{2} < 1. \quad (69)$$

Re expresando de manera más conveniente, evitando los valores negativos

$$0 < \frac{D + A}{4} + \frac{1}{2} < 1. \quad (70)$$

Anexo E. Cavidad como grafo.

Para el diseño de las cavidades nos preguntamos cuántas configuraciones existen en función del número de espejos. Pensemos en los espejos como vértices de un grafo G . Debido a la ley de reflexión, cada arista (la dirección de la luz) conecta dos vértices (espejos) diferentes y, a su vez, no existen aristas que conecten el mismo par de vértices. A estos grafos les llamamos simples (Wilson, 1996). A su vez, una cavidad formada por n espejos, cumple que la diferencia entre el número de vértices $|V(G)|$ y el número de aristas $|E(G)|$ es menor o igual a 1. En otras palabras, si se siguen las aristas del grafo se forma un camino sin vértices repetidos.

Para ejemplificar, consideremos una cavidad con n espejos tal que $|V(G)| - |E(G)| = 0$. Partiendo del vértice v_i , pasamos a unirlo con otro vértice v_j . Siguiendo este patrón el siguiente vértice al cual podríamos unir el vértice v_j sería v_k tal que $k \neq i \neq j$. Y así sucesivamente con el resto de los vértices. El único camino que podríamos formar con n vértices tal que $|V(G)| = |E(G)|$ es $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_k \rightarrow \dots \rightarrow v_m \rightarrow v_n \rightarrow v_i$, el cual se conoce como un grafo simple cíclico de orden n , denotado como C_n . De manera análoga, si $|V(G)| - |E(G)| = 1$ entonces tenemos una arista menos que los vértices, lo cual se traduce en un camino equivalente al anterior sin la última unión: $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_k \rightarrow \dots \rightarrow v_m \rightarrow v_n$. El cual es un grafo de camino de orden n denotado por P_n . Si bien se puede argumentar que se puede cambiar el camino recorriendo el subíndice de los vértices o etiquetarlos de manera diferente, se puede demostrar que estos son isomorfos a los grafos C_n o P_n (Wilson, 1996).

Anexo F. Repositorio del software.

<https://github.com/yramirez-ll/cavity-simulator>