

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el CONAHCYT (Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE © 2024, Todos los Derechos Reservados, CICESE

# Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



## Maestría en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control

---

### Control de robots aéreos de cuatro rotores de pequeña escala

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Jesús Ángel Sevilla Gálvez**

Ensenada, Baja California, México

2024

Tesis defendida por

**Jesús Ángel Sevilla Gálvez**

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Javier Pliego Jiménez

Codirector de tesis

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Dr. Juan José Cetina Denis

Dra. Paulina Segovia Olvera



Dra. María del Carmen Maya Sánchez

Coordinadora del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Ana Denise Re Araujo

Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Jesús Ángel Sevilla Gálvez como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

### **Control de robots aéreos de cuatro rotores de pequeña escala**

Resumen aprobado por:

Dr. Javier Pliego Jiménez

Codirector de tesis

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

En el presente trabajo se aborda el problema del diseño de las entradas de control para vehículos aéreos de pequeña escala, particularmente de cuatro rotores, como es la fuerza de empuje y los pares generados para que el robot siga una trayectoria deseada. Para resolver el problema se presentó un modelo matemático de 4 grados de libertad basado en el cuaternión unitario necesario para describir la orientación, dicho modelo fue fundamental para el diseño de las leyes de control, cabe destacar que el modelo presenta una estructura parecida a la de un robot manipulador sin fuerzas o pares gravitacionales. Para validar el modelo de orientación, se construyó un mecanismo parecido a un giroscopio con el fin de validar cada uno de los algoritmos de control propuestos. Se validó primero el problema de regulación y posteriormente el problema de seguimiento de trayectoria. Una vez validados ambos problemas de forma experimental y en vista que los algoritmos de control permiten el vuelo estable, se propuso una trayectoria lemniscata en un espacio tridimensional la cual también fue validada de forma experimental en tiempo real, donde se obtuvieron resultados satisfactorios para cada algoritmo propuesto.

**Palabras clave: control, cuadricóptero, robots aéreos, cuaternión, orientación, trayectorias**

Abstract of the thesis presented by Jesús Ángel Sevilla Gálvez as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and control.

### **Control of small-scale four-rotor aerial robots**

Abstract approved by:

PhD Javier Pliego Jiménez

Thesis Co-Director

PhD César Cruz Hernández

Thesis Co-Director

This thesis addresses the problem of designing the control inputs for small-scale aerial vehicles with four rotors to follow a desired trajectory. A mathematical model of 4 degrees of freedom based on the unit quaternion was presented to describe the orientation dynamics. The model was fundamental for the design of the control laws and the model presents a structure similar to a manipulator robot without forces or gravitational torques. For the attitude experiments, a gyroscope-like mechanism was built to validate each proposed algorithm. Experiments were first performed for the classical regulation problem and then trajectory tracking. Once both problems were validated experimentally and since the algorithms allowed stable flight, a lemniscate trajectory in a three-dimensional space was proposed, which was also validated experimentally in real time, where satisfactory results were obtained for each proposed algorithm.

**Keywords: control, quadrotor, aerial robots, quaternion, orientation, trajectories**

## **Dedicatoria**

**A mi padre, a mi madre**

**a mi hermano y a mi hermana.**

**A quienes le sirva este trabajo de guía.**

## Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE) por brindarme la oportunidad de continuar con mi desarrollo académico en la investigación.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCyT) por brindarme el apoyo para realizar mis estudios de maestría. No de becario: 1060036.

Al Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONHACyT) a través del proyecto de investigación en Ciencia Básica entre instituciones "Sincronización de sistemas complejos y algunas aplicaciones", Ref. A1-S-31628.

A mi padre y madre por su apoyo incondicional para seguir mi preparación en el área de investigación.

Al Dr. César Cruz Hernández y el Dr. Javier Pliego Jiménez por el apoyo que me dieron durante mis estudios de maestría principalmente cuando me encontraba en momentos difíciles de salud, además de las facilidades como el laboratorio, materiales y herramientas necesarias para el desarrollo del proyecto. También por haberme permitido trabajar en su grupo de investigación.

A mis miembros de comité al Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez, al Dr. Juan José Cetina Denis y la Dra. Paulina Segovia Olvera quienes me brindaron su valioso apoyo y comentarios durante el desarrollo de mi trabajo de investigación.

A la Dra. Carmen Sánchez Maya por su apoyo incondicional durante mis estudios de maestría y en mis momentos difíciles de salud, quién además siempre nos ayudo de la mejor manera posible.

También quiero agradecer al M.C Ricardo Francisco Núñez Pérez por sus buenos consejos durante formación y durante mi recuperación médica.

A mi amigo Alfredo y la señora Elsa quienes me recibieron en la ciudad de Ensenada cuando llegue por primera vez, además a todos mis compañeros de maestría en especial a Charlien y Oswaldo con quienes siempre mantuve muy buena comunicación.

A mis mejores amigos Fernando Lujan, Erick Pacheco, Brandon Garza y Carlos Villalobos con quienes siempre tuve buenos recuerdos durante la maestría.

A mi compañero de laboratorio Carlos Molina quién en conjunto con el Dr. Javier me ayudaban a resolver algunas dudas durante la implementación de este trabajo. Le agradezco mucho por la retroalimentación durante el desarrollo del proyecto. A Miguel Sidón por haber colaborado con herramientas necesarias para el proyecto.

También a mis otros compañeros de laboratorio o de grupo de investigación Lizbeth y Nestor con quienes he convivido dentro en el laboratorio e incluso en los juegos de mesa.

Al grupo de investigación que conforman el Laboratorio de Sincronización y Sistemas Complejos. También quiero agradecer a los doctores Rigoberto, Daniel y Miguel Murillo, Adrian Arellano, Rodrigo Méndez por sus enseñanzas durante los cursos brindados.

A los doctores Francisco Javier, Joaquín Álvarez, Jaime Sánchez, Miguel Arévalo, Roberto Conté, Apolinar Reynoso, Jassiel Rolando, Alejandro Márquez y Jonatán Peña quienes me brindaron su amistad durante mis estudios de maestría. También quiero agradecer a Diana Soto y la doctora Gabriela Mendez por su contribución a mi formación durante los seminarios.

A mis amigos de biblioteca de CICESE con quienes siempre mantuve muy buena comunicación, en especial a Johan Alejandro y al Lic. Daniel Oviedo quienes se encontraban siempre en biblioteca.

A Oscar Peña por ayudarme en las revisiones del documento en Latex, a Nadua Yamile por los talleres brindados durante el periodo y Elizabeth Avilés por la revisiones brindadas, también a todos aquellos colaboradores que he conocido en biblioteca.



# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	ix
Notacion .....	xii
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1. Contribuciones de este trabajo de tesis .....	1
1.2. Organización de la tesis .....	2
1.3. Antecedentes .....	2
1.4. Planteamiento del problema .....	8
1.5. Objetivo general .....	8
1.5.1. Objetivos específicos .....	8
<b>Capítulo 2. Preliminares</b>	
2.1. Descripción de orientación de un cuerpo rígido .....	9
2.1.1. Matriz de rotación .....	10
2.1.2. Matrices de rotación básicas .....	11
2.1.3. Matriz antisimétrica .....	13
2.2. Ángulos de Euler .....	14
2.3. Cuaternión unitario .....	16
2.3.1. La derivada del cuaternión .....	19
2.4. Trayectoria .....	21
2.5. Mecanismo para validación experimental .....	22
2.5.1. Plataforma de vuelo .....	24
2.6. Proceso de implementación de los algoritmos de control .....	24
2.6.1. Proceso de implementación en regulación y seguimiento de trayectoria .....	24
2.6.2. Proceso de control de orientación y posición en el entorno tridimensional .....	25
<b>Capítulo 3. Dinámica del cuadricóptero</b>	
3.1. Aerodinámica del cuadricóptero .....	27
3.1.1. Empuje total .....	28
3.1.2. Pares generados .....	28
3.1.3. Movimientos en el cuadricóptero .....	29
3.1.4. Modelo dinámico del cuadricóptero .....	31
3.1.4.1. Modelo de orientación .....	33
3.1.4.2. Modelo de traslación .....	33
<b>Capítulo 4. Algoritmos de control</b>	
4.1. Modelo alternativo de orientación .....	34

4.2.	Control de orientación . . . . .	37
4.2.1.	Control PD . . . . .	37
4.2.2.	Resultados experimentales del controlador PD . . . . .	40
4.2.3.	Resultados del segundo experimento del controlador PD . . . . .	43
4.3.	Control de seguimiento de trayectoria . . . . .	46
4.3.1.	Controlador PD con precompensación . . . . .	46
4.3.1.1.	Resultados experimentales del controlador PD con precompensación . . . . .	48
4.3.2.	Controlador par-calculado . . . . .	52
4.3.2.1.	Experimento par-calculado en seguimiento de trayectoria . . . . .	53
4.4.	Control de posición . . . . .	56
4.4.1.	Experimento de seguimiento de trayectorias en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$ controlador PDP . . . . .	58
4.4.2.	Experimento de seguimiento de trayectorias en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$ controlador CPC . . . . .	63
4.5.	Comparaciones entre ambos controladores . . . . .	68
4.5.1.	Comparaciones de seguimiento de trayectoria de ambos controladores . . . . .	68
4.5.2.	Comparaciones de seguimiento de posición en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$ de ambos controladores . . . . .	69

## Capítulo 5. Conclusiones

Literatura citada . . . . .	73
-----------------------------	----

# Lista de figuras

Figura	Página
1. Planteamiento del problema. . . . .	8
2. Marco de referencia $\Sigma_a$ . . . . .	9
3. Marco de referencia de $\Sigma_b$ respecto al marco $\Sigma_a$ . . . . .	10
4. Marco de referencia para encontrar un determinante. . . . .	11
5. Rotación sobre el eje $x$ . . . . .	12
6. Rotación sobre el eje $y$ . . . . .	12
7. Rotación sobre el eje $z$ . . . . .	12
8. Marco de referencia de los ángulos de Euler RPY. . . . .	15
9. Representación de un brazo de un 1 GDL. . . . .	19
10. Plataforma experimental de anillo completo de 3GDL. . . . .	23
11. Vehículo Aéreo (a) <i>Crazyflie 2.1</i> y (b) Radio Crazyradio. . . . .	24
12. Entorno de trabajo para regulación y seguimiento de trayectoria. . . . .	26
13. Entorno de trabajo tridimensional para seguimiento de posición y orientación. . . . .	26
14. Movimientos en el cuadricóptero en configuración +. . . . .	30
15. Diagrama de cuerpo libre del cuadricóptero. . . . .	32
16. Respuesta del controlador PD en ángulos de Euler en el primer experimento: (a) Ángulo sobre el eje $\phi$ , (b) Ángulo sobre el eje $\theta$ y (c) Ángulo sobre el eje $\psi$ . . . . .	41
17. Respuesta del controlador PD en Cuaternión unitario en el primer experimento: (a) Parte escalar $q_s$ , (b) Cuaternión unitario en $x \rightarrow q_x$ , (c) Cuaternión unitario en $y \rightarrow q_y$ y (d) Cuaternión unitario en $z \rightarrow q_z$ . . . . .	42
18. Norma del error $\ \tilde{\mathbf{q}}(t)\ $ del Cuaternión en el primer experimento. . . . .	42
19. Velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}(t)$ obtenidas del controlador PD en el primer experimento. . . . .	42
20. Norma del los pares $\ \boldsymbol{\tau}(t)\ $ del controlador PD en el primer experimento. . . . .	43
21. Respuesta del controlador PD en ángulos de Euler en el segundo experimento: (a) Ángulo sobre el eje $\phi$ , (b) Ángulo sobre el eje $\theta$ y (c) Ángulo sobre el eje $\psi$ . . . . .	44
22. Respuesta del controlador PD en Cuaternión unitario en el segundo experimento: (a) Parte escalar $q_s$ , (b) Cuaternión unitario en $x \rightarrow q_x$ , (c) Cuaternión unitario en $y \rightarrow q_y$ y (d) Cuaternión unitario en $z \rightarrow q_z$ . . . . .	44
23. Norma del error $\ \tilde{\mathbf{q}}(t)\ $ del Cuaternión en el segundo experimento. . . . .	45
24. Velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}(t)$ obtenidas del controlador PD en el segundo experimento. . . . .	45
25. Norma del los pares $\ \boldsymbol{\tau}(t)\ $ del controlador PD en el segundo experimento. . . . .	45

26.	Respuesta del controlador PD con precompensación en ángulos de Euler en seguimiento de trayectoria: (a) Seguimiento sobre el ángulo $\phi$ , (b) Seguimiento sobre el ángulo $\theta$ y (c) Seguimiento sobre el ángulo $\psi$ . . . . .	50
27.	Respuesta del controlador PD con precompensación en Cuaternión unitario en seguimiento de trayectoria: (a) Seguimiento parte escalar $q_s$ , (b) Seguimiento sobre el Cuaternión $x \rightarrow q_x$ , (c) Seguimiento sobre el Cuaternión $y \rightarrow q_y$ y (d) Seguimiento sobre el Cuaternión $z \rightarrow q_z$ . . . . .	51
28.	Velocidades angulares deseadas y medidas en controlador PD con precompensación en seguimiento de trayectoria: (a) Velocidad angular sobre el eje $x$ , (b) Velocidad angular sobre el eje $y$ y (c) Velocidad angular sobre el eje $z$ . . . . .	51
29.	Norma de los pares $\ \tau(t)\ $ en el controlador PD con precompensación en seguimiento de trayectoria. . . . .	52
30.	Respuesta del controlador par-calculado en ángulos de Euler en seguimiento de trayectoria: (a) Seguimiento sobre el ángulo $\phi$ , (b) Seguimiento sobre el ángulo $\theta$ y (c) Seguimiento sobre el ángulo $\psi$ . . . . .	53
31.	Respuesta del controlador par-calculado en cuaternión unitario en seguimiento de trayectoria: (a) Seguimiento parte escalar $q_s$ , (b) Seguimiento sobre el Cuaternión $x \rightarrow q_x$ , (c) Seguimiento sobre el Cuaternión $y \rightarrow q_y$ y (d) Seguimiento sobre el Cuaternión $z \rightarrow q_z$ . . . . .	54
32.	Velocidades angulares deseadas y medidas con el controlador par-calculado en seguimiento de trayectoria: (a) Velocidad angular sobre el eje $x$ , (b) Velocidad angular sobre el eje $y$ y (c) Velocidad angular sobre el eje $z$ . . . . .	55
33.	Norma de los pares $\ \tau(t)\ $ en el controlador par-calculado en seguimiento de trayectoria. . . . .	55
34.	Control de orientación en posición de PD con precompensación en ángulos: (a) Ángulo sobre el eje $\phi$ , (b) Ángulo sobre el eje $\theta$ y (c) Ángulo sobre el eje $\psi$ . . . . .	60
35.	Control de orientación en posición de PD con precompensación en Cuaternión unitario: (a) Parte escalar $q_s$ , (b) Cuaternión unitario en $x \rightarrow q_x$ , (c) Cuaternión unitario en $y \rightarrow q_y$ y (d) Cuaternión unitario en $z \rightarrow q_z$ . . . . .	61
36.	Control de posición del controlador PD con precompensación: (a) Coordenada sobre $x$ , (b) Coordenada sobre $y$ y (c) Coordenada sobre $z$ . . . . .	62
37.	Velocidades angulares deseadas y medidas en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$ en controlador PD con precompensación: (a) Velocidad angular sobre el eje $x$ , (b) Velocidad angular sobre el eje $y$ y (c) Velocidad angular sobre el eje $z$ . . . . .	62
38.	Norma de los pares $\ \tau(t)\ $ del controlador PD con precompensación. . . . .	63
39.	Seguimiento de orientación en posición del control par-calculado en ángulos de Euler: (a) Ángulo sobre el eje $\phi$ , (b) Ángulo sobre el eje $\theta$ y (c) Ángulo sobre el eje $\psi$ . . . . .	64
40.	Seguimiento de orientación en posición del control par-calculado en Cuaternión unitario: (a) Parte escalar $q_s$ , (b) Cuaternión unitario en $x \rightarrow q_x$ , (c) Cuaternión unitario en $y \rightarrow q_y$ y (d) Cuaternión unitario en $z \rightarrow q_z$ . . . . .	65

Figura	Página
41. Control de posición del controlador par-calculado: (a) Coordenada sobre $x$ , (b) Coordenada sobre $y$ y (c) Coordenada sobre $z$ . . . . .	66
42. Velocidades angulares deseadas y medidas en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$ en controlador par-calculado: (a) Velocidad angular sobre el eje $x$ , (b) Velocidad angular sobre el eje $y$ y (c) Velocidad angular sobre el eje $z$ . . . . .	67
43. Norma de los pares con el controlador par-calculado. . . . .	67
44. Comparación en seguimiento de trayectoria controlador PDP y CPC: (a) Ángulo sobre el eje $\phi$ , (b) Ángulo sobre el eje $\theta$ y (c) Ángulo sobre el eje $\psi$ . . . . .	68
45. Comparación seguimiento en posición de los controladores PDP y CPC: (a) Coordenada sobre $x$ , (b) Coordenada sobre $y$ y (c) Coordenada sobre $z$ . . . . .	69
46. Thrust empleado por el controlador PD con precompensación. . . . .	70
47. Thrust empleado por el controlador par-calculado. . . . .	70

## Notación

La notación a lo largo de este documento se muestra a continuación:

- $m \in \mathbb{R}$ : Masa total.
- $g \in \mathbb{R}$ : Constante de gravedad.
- $f \in \mathbb{R}$ : Fuerza de empuje total.
- $\phi \in \mathbb{R}$ : Ángulo sobre el eje  $x$ .
- $\theta \in \mathbb{R}$ : Ángulo sobre el eje  $y$ .
- $\psi \in \mathbb{R}$ : Ángulo sobre el eje  $z$ .
- $q_s \in \mathbb{R}$ : Parte escalar del Cuaternión unitario.
- $\mathbf{q}_v \in \mathbb{R}^3$ : Parte vectorial del Cuaternión unitario.
- $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^3$ : Pares generados por los rotores.
- $\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ : Vector de dirección sobre el eje  $z$ .
- $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^3$ : Vector de orientación en ángulos de Euler.
- $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$ : Vector de posición del centro de masa del vehículo aéreo.
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ : Vector de velocidad lineal del centro de masa del vehículo aéreo.
- $\mathbf{q} \in \mathbb{S}^3$ : Cuaternión unitario.
- $R \in SO(3)$ : Matriz de rotación.
- $R(\mathbf{q}) \in SO(3)$ : Matriz de rotación expresada en términos del Cuaternión unitario.
- $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^4$ : Derivada del temporal del Cuaternión unitario.
- $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{R}^4$ : Pares virtuales aplicados en el espacio del Cuaternión unitario.
- $J(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ : Jacobiano.
- $\dot{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ : Derivada temporal de la matriz de rotación.
- $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ : Matriz de inercia.
- $\|\cdot\|$ : Norma Euclidiana de un vector en  $\mathbb{R}^n$

# Capítulo 1. Introducción

---

Hoy en día el uso de vehículos aéreos no tripulados ha mejorado la calidad de vida de los seres humanos previniendo de posibles daños físicos, caracterizados por tener la capacidad de moverse por el aire y acceder a casi cualquier lugar sin necesidad de que exponer al operador, ya que solo requiere el vehículo un centro de mando para ser controlado remotamente, por lo que también pueden llegar a ser conocidos como sistemas aéreos piloteados remotamente.

Actualmente, existen una gran variedad de estos dispositivos en el mercado de empresas muy reconocidas, sin embargo, todas las marcas comerciales no permiten hacer modificaciones de Software o Hardware, por lo tanto se consideran como arquitecturas cerradas. Hoy en día muchos investigadores presentan retos a la hora de probar nuevos algoritmos de control. El principal interés dentro de la comunidad de robótica y control es la implementación de controladores para el diseño de trayectorias y esquemas de control para los denominados cuadricópteros principalmente porque son sistemas no lineales y subactuados.

En este trabajo de tesis partimos de las teorías clásicas conocidas y reportadas en la literatura. Nuestro enfoque es basado en el Cuaternión unitario principalmente porque su implementación en tiempo real es rápido y no presenta singularidades. A diferencia de otros enfoques, como es el uso de ángulos de Euler o con el uso de matriz de rotación, que hace que los cálculos sean cada vez más grandes, lo cual afecta la velocidad computacional.

## 1.1. Contribuciones de este trabajo de tesis

- Propuesta de algoritmos de control de orientación y posición para un vehículo aéreo.
- Propuesta de un modelo de 4 GDL para la orientación de un vehículo aéreo.
- Análisis comparativo entre los controladores.
- Diseño e implementación de un mecanismo de 3 GDL con estructura similar a un giroscopio.
- Validación experimental, los resultados de esta tesis se recogen en el artículo nombrado *Attitude stabilization controller for quadrotors based on the unit quaternion* por presentarse en el Congreso Nacional de Control Automático (CNCA 2024) de la Asociación Mexicana de Control Automático (AMCA) a realizarse del 8 al 11 de octubre de 2024 en el Palacio de Minería en la ciudad de México.

## 1.2. Organización de la tesis

El material contenido en este trabajo de tesis de maestría esta organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 2, se presenta una serie de herramientas necesarias para describir la orientación de cuerpo rígidos, la teoría para conocer a los cuaterniones, el diseño y construcción del mecanismo experimental, la plataforma de vuelo a utilizarse y el proceso de validación para cada algoritmo de control.

En el capítulo 3, se presenta la teoría básica de funcionamiento de un cuadricóptero, los movimientos que puede realizar y algunos de los modelos clásicos conocidos dentro de la literatura.

En el capítulo 4, se presenta el desarrollo del algoritmo alternativo de orientación basado en el Cuaternión unitario. Pruebas de estabilidad de cada algoritmo así como su validación de forma experimental.

En el capítulo 5, se mencionan las conclusiones del presente trabajo, limitaciones y trabajo a futuro.

## 1.3. Antecedentes

Los vehículos aéreos han sido un tema de gran relevancia en los últimos años, principalmente debido al avance tecnológico en los sistemas que componen un vehículo aéreo, como son los sistemas electro-mecánicos *MEMS*, los sistemas de comunicación, los sistemas embebidos, los sistemas computacionales, el desarrollo de baterías, etc. El desarrollo y control del cuadricóptero ha sido de un gran interés para los científicos, ya que es un tipo de vehículo aéreo no tripulado UAV con cuatro rotores con la capacidad de despegar y aterrizar en espacios limitados (Abdelhay & Zakriti, 2019). En los últimos años, han ganado popularidad en la comunidad científica debido a su maniobrabilidad y bajo costo. Se utilizan en aplicaciones científicas, civiles, militares, cartografía, búsqueda y rescate e incluso inspecciones de riesgo, etc. Aunque existe una variedad de tamaños, poseen una estructura simple dado que son rápidos de fabricar y económicos (Xuan-Mung & Hong, 2019; Bashi et al., 2017). Controlar este tipo de dispositivos, principalmente su posición y orientación, ha sido objeto de estudios durante años en diferentes esquemas de control y aplicaciones, principalmente basados en los ángulos de Euler (Castillo et al., 2004; Bouabdallah et al., 2005; Madani & Benallegue, ; Castillo et al., 2007; Nonami et al., 2009; Luukkonen, 2011; Mahony et al., 2012; Wang et al., 2016; Lee et al., 2017; Abdulkareem et al., 2022) presentan singularidades que provocan el conocido bloqueo de cardán, esto ocurre cuando dos ejes son paralelos y no es posible rotar de forma independiente sobre el tercer eje.



Con el paso de los años fueron mejorando las técnicas de control sobre cuadricópteros, sin embargo, muchos diseños se basaban en ángulos pequeños, desplazamientos cortos o simplemente el vuelo estacionario, algunos otros utilizan técnicas complejas, que son difíciles de implementar. Hoy en día los cuadricópteros requieren de movimientos complejos y rápidos. Una alternativa a los ángulos de Euler son los cuaterniones unitarios dado que no presentan singularidades y su implementación es más sencilla en comparación de las matrices de rotación.

Los cuaterniones fueron descubiertos por William Hamilton, estos poseen una parte real y tres partes imaginarias  $i$ ,  $j$  y  $k$  (Kuipers, 1999). Tienen numerosas aplicaciones principalmente en rotaciones tridimensionales aportando ventajas sobre métodos tradicionales, ya que solo requiere 4 valores a comparación de los 9 elementos de la matriz de rotación, lo que significa que es más robusto al error computacional (Salamin, 1979). El Cuaternión puede ser usado en los gráficos por computadora para interpolar rotaciones, por ejemplo, animaciones (Mukundan, 2012; Shoemake, 1985). Dado que el espacio de cuaterniones incluye el espacio vectorial tridimensional, se demuestra que las cantidades físicas relacionadas con rotaciones como el desplazamiento angular, la velocidad, la aceleración y el momento, son cuaterniones vectoriales y se derivan sus expresiones en el espacio de cuaterniones (Chou, 1992). El autor demuestra que estas ecuaciones diferenciales cinemáticas y dinámicas son invertibles al hecho que están descritas en espacio de cuaterniones. La combinación de la cinemática de parámetros de Euler y mecánica Hamiltoniana proporciona un modelo de dinámica de cuerpos rígidos adecuado para el uso en problemas fuertemente no lineales que involucran rotaciones arbitrarias grandes (Shivarama & Fahrenthold, 2004).

El cuaternión también ha tenido aplicaciones en robots manipuladores para modelar errores de orientación en el efector final, dado que simplifica el análisis de estabilidad de la dinámica del error de orientación (Yuan, 1988). El Cuaternión unitario se ha utilizado en problemas como el de regulación de la pose del efector final utilizando la técnica de modelado de energía introducida por Takegaki y Arimoto y una representación no mínima, basándose en controladores basados en el Jacobiano transpuesto resuelven el problema cuando se especifica la orientación sin requerir de la solución de la cinemática inversa ni el cálculo del Jacobiano inverso del robot (Kelly & García, 2002). Otros trabajos lo utilizan para obtener el modelo cinemático directo a partir de los parámetros de Denavit Hartenberg y proponen un controlador jerárquico del espacio de tareas, además de un algoritmo simple para resolver la cinemática del manipulador directamente (Campa et al., 2006).

El control de orientación en cuerpos rígidos tiene importantes aplicaciones desde aviones, helicópteros, naves espaciales, satélites e incluso robots con el uso de una representación mínima de la orientación (Wen

& Kreutz-Delgado, 1991). También puede aplicarse a vehículos de 6 GDL como los submarinos donde los parámetros de Euler se utilizan en la orientación de forma global aplicando un controlador PD no lineal con compensación de gravedad necesitando de la orientación y velocidades lineales y angulares (Fjellstad & Fossen, 1994b), para el seguimiento de posición y orientación usando el cuaternión unitario la convergencia global está probada (Fjellstad & Fossen, 1994a).

Otra aplicación del Cuaternión unitario al diseño de filtros como en (Lizarralde & Wen, 1996) que muestran que la retroalimentación de la velocidad angular puede reemplazarse por un filtro no lineal, eliminando así la necesidad de la medición directa de la velocidad angular. El diseño de los autores explota la pasividad inherente del sistema, ya que no necesita de un observador dinámico que reconstruya la velocidad. Los autores muestran simulaciones para respaldar los resultados teóricos. En (Thienel & Sanner, 2003) proponen un observador no lineal exponencialmente convergente con la identificación del sesgo giroscópico constante, el controlador no lineal es un controlador basado en pasividad y la entrada de control requiere uso de la estimación del sesgo giroscópico del observador no lineal, se demuestra a través para aplicaciones de naves espaciales, los autores proporcionan simulaciones de una nave para seguimiento de una orientación específica variante en el tiempo para respaldar sus afirmaciones.

Uno de los primeros trabajos en estudiar el problema de orientación mediante el Cuaternión unitario en cuadrópteros fue en (Tayebi & McGillvray, 2006) se proponen un esquema de control retroalimentado para la estabilización exponencial de orientación, los autores reportan dos controladores el primero se basa en la compensación de pares de Coriolis y giroscópicos con el uso de una estructura  $PD^2$  y la otra con el clásico controlador PD donde la acción proporcional está en términos del Cuaternión y la acción derivativa en términos de la velocidad angular proporcionando estabilidad asintótica, los autores reportaron experimentos.

En algunos trabajos también se propone una retroalimentación dinámica basada en cuaterniones para el problema de seguimiento de orientación sin medición de la velocidad, su enfoque se basa en introducir un sistema auxiliar basado en Cuaternión unitario, utilizándolo en la ley de control junto con el error de orientación (Tayebi, 2008). En su enfoque demuestran un esquema libre de velocidad que garantiza la estabilidad asintótica casi global, para el caso de regulación, es una retroalimentación pura de cuaterniones se muestran los resultados a través de simulaciones.

También se han implementado algoritmos simples para vuelo en un entorno no controlado equipado con sensores de bajo costo, como en (Stingu & Lewis, 2009). Muestran la implementación de controladores PD simples que garantizan la estabilidad de la plataforma en vuelo estacionario, además desarrollan un

modelo simplificando e identifican sus parámetros utilizados para diseñar un controlador proporcional para estabilizarlo mediante el Cuaternión unitario.

El problema de orientación se ha atacado proponiendo un algoritmo de control proporcional al cuadrado  $P^2$  no lineal implementado sin transformaciones, donde sus resultados fueron validados por simulaciones como en (Fresk & Nikolakopoulos, 2013).

El control de seguimiento de trayectorias para vehículos tipo VTOL mediante la técnica de backstepping filtrado por comandos implementada en (Zhao et al., 2013) hace uso de cuaterniones donde se representa la orientación del vehículo para garantizar el seguimiento de la orientación global sin singularidades. Dado que los cuaterniones no se pueden filtrar mediante un filtro de comandos basado en vectores, desarrollaron un filtro de cuaterniones de segundo orden para filtrar el Cuaternión y calcular su derivada que determina el vector de velocidad angular además presentaron sus resultados mediante simulaciones para mostrar el desempeño del controlador.

Bangura et al. (2014) presentan resultados de un controlador de orientación y seguimiento de trayectoria basado en cuaterniones jerárquicos. Utilizando el filtro complementario no lineal que estima la orientación, este no involucra ángulos de Euler ni matrices de rotación. Los resultados que demuestran para el seguimiento de trayectoria es preciso y la estabilidad exponencial local, la dinámica del error de orientación no es autónoma y casi global asintótica y localmente exponencial estable bajo la ley que proponen sus resultados se probaron mediante experimentos además de probar su controlador manualmente ofrecieron el código abierto del filtro complementario.

Cariño et al. (2015) presentan el diseño e implementación de un esquema de control capaz de estabilizar globalmente un cuadricóptero. Primero proponen una ley de orientación y una ley de posición para estabilizar el vehículo en todos sus estados. Utilizando referencias de posición, calculan una trayectoria suave que el controlador de orientación debe seguir para que la posición del vehículo se estabilice. La ley de control que proponen puede analizarse y controlarse como un sistema lineal para validarlo, presentan simulaciones numéricas del modelo y la ley de control para estabilidad del sistema de lazo cerrado además, se presentaron pruebas experimentales para validar sus resultados.

Arellano-Muro et al. (2015) abordan el problema de seguimiento de trayectoria aplicando un algoritmo de control de bloques de modos deslizantes basado en el algoritmo de super twisting, utilizando retroalimentación de Cuaternión unitario. Las entradas de control se obtienen utilizando un diferenciador exacto de primer orden y mediante un observador en modo deslizante las fuerzas y momentos aerodinámicos para garantizar robustez frente a perturbaciones externas e incertidumbres del modelo. Presentan una

prueba de estabilidad asintótica del esquema de control propuesto para validar se muestran simulaciones.

Una de las grandes aplicaciones de herramientas computacionales han sido las redes neuronales como es en (Xian et al., 2014) donde se presenta un controlador de seguimiento de retroalimentación de salida robusta no lineal basado en cuaterniones para abordar el problema de seguimiento de altitud y orientación que está sujeto a incertidumbres estructurales y perturbaciones externas desconocidas. Introducen un conjunto de filtros no basados en modelo para proporcionar estimaciones de la velocidad angulares no medibles y la velocidad de traslación en dirección de altitud de cuadricóptero en caso de que no esté disponible la retroalimentación de velocidad. Se introducen redes neuronales para estimar las incertidumbres del modelado. Emplean un análisis de estabilidad basado en Lyapunov para demostrar un seguimiento asintótico semiglobal.

Colmenares-Vazquez et al. (2017) implementan cuaterniones intermediarios mediante la técnica de Backstepping con propiedades integrales para el diseño de un algoritmo de control para la navegación autónoma son seguimiento de trayectoria circular. El algoritmo elimina la preocupación por el fenómeno unwinding.

Dentro de las aplicaciones del Cuaternión unitario también se ha usado en robot aéreos híbridos, es decir robots voladores que integran brazos manipuladores fijos a su cuerpo como es en (Alvarez-Munoz et al., 2018) donde proponen una solución para la estabilización de un cuadricóptero que integra un robot manipulador de tres grados de libertad, en su trabajo consideran la estabilización de ambos subsistemas. El modelo matemático del sistema se basa en cuaterniones del modo que una ley de control de orientación consiste en una retroalimentación basada en cuaterniones estabilizando en una orientación deseada mientras el brazo se encuentra en movimiento. Proponen la dinámica traslacional que se simplifica para fines de diseño de control no lineal. Los controladores se basan en funciones de saturación cuya estabilidad se demuestra en el sentido de Lyapunov. Validan su propuesta de estrategia de control mediante resultados experimentales. Otro caso fue en (Mo et al., 2019) que consideran un robot manipulador aéreo de dos grados de libertad para que siga una referencia variable en el tiempo. Para el modelo de la dinámica de orientación, toman en cuenta las perturbaciones externas como el par generado por la fuerza de gravedad el manipulador. Dado que el par generado por la fuerza de gravedad del manipulador se puede parametrizar linealmente, por lo tanto, el problema de control de orientación del cuadricóptero se puede convertir en un problema de estabilización estándar y lo validan mediante simulaciones.

Islam et al. (2019) presentan un cuadricóptero basado en la orientación de cuaterniones mediante control predictivo de modelos MPC. Los autores comentan que MPC ofrece un excelente rendimiento en

aplicaciones industriales, el cuadricóptero puede ser otra plataforma de empleo. El problema consiste en el uso del cuaternión unitario para la orientación con el fin de evitar singularidades, dado que este enfoque no puede hacer uso de los ángulos de Euler hace uso de una función de costo mínimo que incluye error de orientación en cuaterniones. Presentan una función de costo para el MPC que como resultado asegura que el cuadricóptero tenga un vuelo suave y libre de singularidades que se ven afectadas por la incertidumbre del modelo, ellos validan su propuesta mediante la simulación de trayectorias.

Espíndola & Tang (2023) presentan un enfoque Lagrangiano para el seguimiento de orientación de cuerpo rígidos. La dinámica Lagrangiana que se describe el movimiento rígido rotacional en la esfera unitaria, explora la propiedad de conservación de energía que aplica en todo el grupo de cuaterniones unitarios esto permite abordar el problema de control de orientación completo donde la orientación permite abordar el problema de orientación completo donde puede evolucionar en todo el grupo de rotación y el diseño de controladores para el rastreo de cualquier orientación deseada. El seguimiento exponencial global en el grupo de cuaterniones se logra utilizando una función potencial simple, en este trabajo se incluyen simulaciones para ilustrar resultados teóricos.

Madeiras et al. (2024) diseñan y prueban experimentalmente una estrategia de control para seguimiento de trayectorias con prueba de estabilidad exponencial utilizando la teoría de transformaciones de Lyapunov. El controlador está formado por un bucle interno-externo a través de un término de interconexión del sistema de posición con el de orientación. Para el sistema de posición, se deriva de teorías del principio máximo de Pontryagin, la teoría de Lyapunov y el regulador cuadrático lineal (LQR) que garantiza la estabilidad de entrada a estado. El sistema de orientación se basa en la parametrización del error del cuaternión a través de una matriz de transformación de coordenadas no lineal seguida de una retroalimentación de entrada de estado. Bajo una transformación correcta, la teoría del LQR asegura una estabilidad casi exponencial y una optimabilidad de estado estable para los sistemas de bucle cerrado interconectados. Presentan resultados experimentales y de simulación ilustrando el rendimiento del sistema de seguimiento a bordo.

Si bien se han presentado una diversidad de trabajos con leyes de control diferentes incluyendo sus objetivos a resolver, en la mayoría de trabajos se hace uso del Cuaternión para resolver el problema de orientación y seguimiento de trayectoria, no todos los autores presentan experimentos que validen sus propuestas dado que son complejas o difíciles de implementar, para este trabajo de tesis se abordara el problema de orientación y seguimiento de trayectoria del cuadricóptero mediante el uso del Cuaternión unitario verificándolo a través de pruebas experimentales en un banco de pruebas y en un entorno tridimensional añadiendo el sistema de traslación en un cuadricóptero de código abierto.

## 1.4. Planteamiento del problema

El cuadricóptero es un vehículo que se puede desplazar en un ambiente tridimensional y es capaz de rotar en los tres ejes principales. Para su movimiento, el cuadricóptero tiene cuatro entradas de control, la fuerza de empuje total y los pares generados por los rotores denotados por  $f \in \mathbb{R}$  y  $\tau \in \mathbb{R}^3$  respectivamente. El problema de control a resolver en esta tesis de maestría consiste en diseñar las entradas de control  $f$  y  $\tau$  para que el robot siga una trayectoria deseada suave y al menos tres veces diferenciable, en un ambiente tridimensional. La figura 1 muestra de manera gráfica el planteamiento del problema.

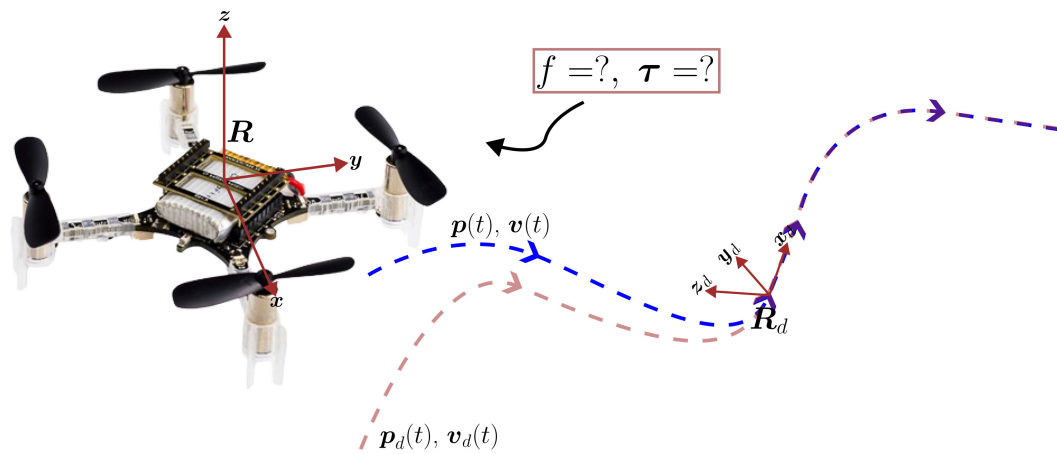


Figura 1. Planteamiento del problema.

## 1.5. Objetivo general

Diseñar leyes de control para el seguimiento de trayectorias en un ambiente tridimensional para un vehículo aéreo de pequeña escala de cuatro rotores.

### 1.5.1. Objetivos específicos

- Diseñar algoritmos de control para el seguimiento de posición y orientación del vehículo aéreo.
- Validar los algoritmos de control propuestos mediante simulaciones numéricas.
- Validar los algoritmos de control propuestos mediante pruebas experimentales.

## Capítulo 2. Preliminares

---

En este capítulo se presentan diferentes formas de describir la orientación de un cuerpo rígido en un espacio tridimensional. Para representar la posición y orientación de un cuerpo rígido, se debe fijar un marco de referencia en cada uno de los cuerpos para describir su relación, es decir, el primer marco de referencia debe estar posicionado en un punto fijo y el segundo debe estar unido en el centro de gravedad del cuerpo. A continuación se describen las herramientas matemáticas necesarias para describir la orientación de un cuerpo rígido en el espacio tridimensional.

### 2.1. Descripción de orientación de un cuerpo rígido

Un marco o sistema de referencia se utiliza para describir la orientación de un cuerpo y es representado mediante sus ejes coordenados como se muestra en la figura 2, es decir, sus tres vectores unitarios como los vectores en la ecuación (1) donde cada vector tiene una dirección, el marco de referencia o de coordenadas se puede representar en forma de matriz como la ecuación (2)

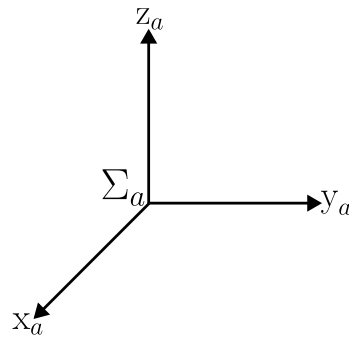


Figura 2. Marco de referencia  $\Sigma_a$ .

$$\mathbf{x}_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\Sigma_a = [\mathbf{x}_a \quad \mathbf{y}_a \quad \mathbf{z}_a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

### 2.1.1. Matriz de rotación

Una matriz de rotación describe la orientación de dos marcos de referencias  $\Sigma_a = \{\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a, \mathbf{z}_a\}$  y  $\Sigma_b = \{\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b, \mathbf{z}_b\}$ . Por ejemplo, la matriz de rotación que describe la relación del sistema  $\Sigma_b$  con respecto al sistema  $\Sigma_a$  se obtiene al proyectar los ejes del sistema  $\Sigma_b$  con los del  $\Sigma_a$ , haciendo el producto punto de la siguiente manera

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{x}_a & \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{x}_a & \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{y}_a & \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{y}_a & \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{y}_a \\ \mathbf{x}_b \cdot \mathbf{z}_a & \mathbf{y}_b \cdot \mathbf{z}_a & \mathbf{z}_b \cdot \mathbf{z}_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_b^a & y_b^a & z_b^a \end{bmatrix}. \quad (3)$$

El marco de referencia asociado a la matriz  $R$  se puede ver en la figura 3.

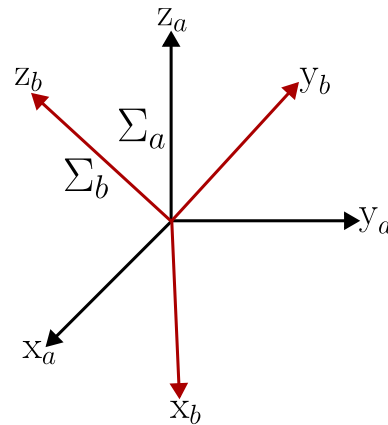


Figura 3. Marco de referencia de  $\Sigma_b$  respecto al marco  $\Sigma_a$ .

La matriz de rotación de  $3 \times 3$  pertenece al grupo Ortogonal Especial  $SO(3)$  y presenta las siguientes propiedades:

- La matriz de rotación es ortogonal, es decir,  $R^T R = R R^T = I$ .
- $R$  tiene 9 elementos,  $R = [r_1 \ r_2 \ r_3]$  y 6 restricciones  $r_i^T r_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, 3 \text{ restricciones} \\ 1 & \text{si } i = j, 3 \text{ restricciones.} \end{cases}$ ,  
Por lo tanto, la matriz  $R$  presenta solo 3 GDL (Grados de Libertad) para la orientación de un cuerpo.
- El determinante de una matriz de rotación satisface  $\det(R) = +1$ . El signo positivo se determina por el sistema dextrógiro, es decir, se sigue la regla de la mano como puede verse en la figura 4.



Para mostrar esta propiedad considere la siguiente matriz de rotación

$$R = [\mathbf{x} \quad \mathbf{y} \quad \mathbf{z}] = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

cuyo determinante está dado por

$$\begin{aligned} \det(R) &= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) \\ &= \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 = +1. \end{aligned} \quad (5)$$

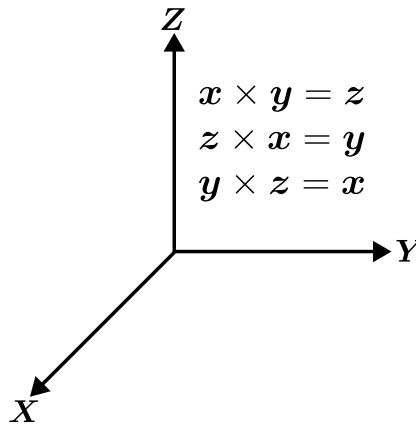


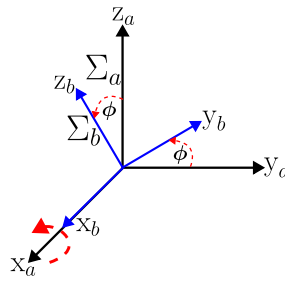
Figura 4. Marco de referencia para encontrar un determinante.

### 2.1.2. Matrices de rotación básicas

Para rotaciones espaciales existen tres rotaciones básicas, ambos comparten el mismo origen y para su análisis el marco de referencia  $\Sigma_b$  mantiene una orientación relativa al marco de referencia fijo  $\Sigma_a$ .

La matriz de rotación básica sobre el eje  $x$  (ver figura 5) un ángulo  $\phi$  está dada por

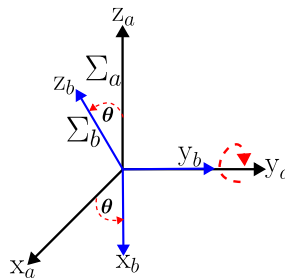
$$R_x = R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\text{sen } \phi \\ 0 & \text{sen } \phi & \cos \phi \end{bmatrix}. \quad (6)$$



**Figura 5.** Rotación sobre el eje  $x$ .

La matriz de rotación básica sobre el eje  $y$  (ver figura 6) un ángulo  $\theta$  está dada por

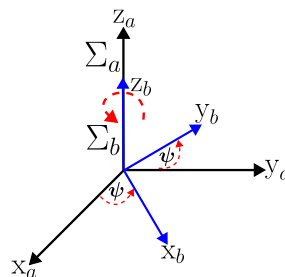
$$R_y = R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \text{sen } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (7)$$



**Figura 6.** Rotación sobre el eje  $y$ .

Finalmente, la matriz de rotación básica sobre el eje  $z$  (ver figura 7) un ángulo  $\psi$  está dada por

$$R_z = R_{z,\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$



**Figura 7.** Rotación sobre el eje  $z$ .

### 2.1.3. Matriz antisimétrica

Una matriz  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se dice que es antisimétrica si y solo si  $S^T + S = 0$ . Se denota al conjunto de las matrices antisimétricas como  $SO(3) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Sus componentes se forman por  $s_{ij} = 1, 2, 3$ , donde  $s_{ij} + s_{ji} = 0$  con  $i, j = 1, 2, 3$ . La diagonal de  $S$  son ceros y los términos  $s_{ij}$  satisfacen  $s_{ij} = -s_{ji}$  para  $i \neq j$ . El uso de la matriz antisimétrica es para simplificar muchos cálculos implicados. Solo contiene tres entradas independientes, por lo tanto, posee la siguiente forma

$$S(\cdot) = \begin{bmatrix} 0 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & 0 & -s_1 \\ -s_2 & s_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Por ejemplo, la matriz antisimétrica de la parte vectorial del cuaternión unitario  $\mathbf{q}_v = [q_x \ q_y \ q_z]^T$  se obtiene  $S(\mathbf{q}_v)$  como

$$S(\mathbf{q}_v) = \begin{bmatrix} 0 & -q_z & q_y \\ q_z & 0 & -q_x \\ -q_y & q_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Las propiedades de la matriz antisimétrica son:

1.- El operador  $S(\cdot)$  es lineal,

$$S(\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) = \alpha S(\mathbf{a}) + \beta S(\mathbf{b}), \quad (11)$$

para todo vector  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$  y con  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ .

2.- Para todo vector  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  se cumple

$$S(\mathbf{a})\mathbf{p} = \mathbf{a} \times \mathbf{p}, \quad (12)$$

donde  $\mathbf{a} \times \mathbf{p}$  es el producto cruz.

3.- Dada una matriz de rotación  $R \in SO(3)$  y  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , se satisface

$$RS(\mathbf{a})R^T = S(R\mathbf{a}). \quad (13)$$

Si  $\mathbf{a}$  y  $\mathbf{b}$  son vectores en  $\mathbb{R}^3$

$$R(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = R\mathbf{a} \times R\mathbf{b}, \quad (14)$$

la anterior ecuación no es verdad a menos que  $R$  sea una matriz de rotación. De las propiedades anteriores se llega a

$$RS(\mathbf{a})R^\top \mathbf{b} = R(\mathbf{a} \times R^\top \mathbf{b}) = S(R\mathbf{a})\mathbf{b}. \quad (15)$$

4.- Para una matriz antisimétrica  $S$  de  $n \times n$  y un vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  se cumple

$$\mathbf{x}^\top S\mathbf{x} = 0. \quad (16)$$

## 2.2. Ángulos de Euler

Es un método que especifica una matriz de rotación en términos de tres parámetros  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  independientes para especificar cualquier rotación. Son regidas por un orden específico y expresiones definidas por reglas de rotación. Para obtener las matrices de rotación respecto a cada ángulo se obtiene sustituyendo el ángulo en las matrices (6) para  $\phi$ , (7) para  $\theta$  y (8) para  $\psi$  para obtener:

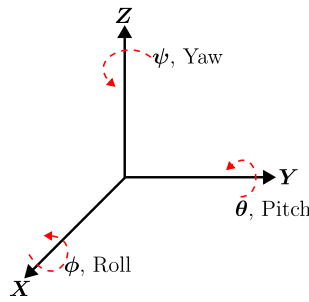
$$R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad R_{y,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_{z,\psi} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Una de las composiciones más conocidas es la **RPY** *roll-pitch-yaw* cuya matriz de rotación asociada está dada por

$$R = R_{z,\psi}R_{y,\theta}R_{x,\phi} = \begin{bmatrix} c_\psi c_\theta & -s_\psi c_\theta + c_\psi s_\theta s_\phi & s_\phi s_\psi + c_\phi s_\theta c_\psi \\ s_\psi c_\theta & c_\phi c_\psi + s_\phi s_\theta s_\psi & -c_\psi s_\phi + s_\psi s_\theta c_\phi \\ -s_\theta & c_\theta s_\phi & c_\theta c_\phi \end{bmatrix}, \quad (18)$$

donde  $c = \cos$ ,  $s = \sin$  La figura 8 muestra los ángulos *roll-pitch-yaw*. Otra combinación de ángulos de Euler muy utilizada en el campo de la robótica es **ZYZ** y su matriz de rotación está dada por:

$$R = R_{z,\psi}R_{y,\theta}R_{z,\phi} = \begin{bmatrix} c_\phi c_\psi c_\theta - s_\phi s_\psi & -c_\psi s_\phi - c_\phi c_\theta s_\psi & c_\phi s_\theta \\ c_\phi s_\psi + c_\psi c_\theta s_\phi & c_\phi c_\psi - c_\theta s_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta \\ -c_\psi s_\theta & s_\psi s_\theta & c_\theta \end{bmatrix}, \quad (19)$$



**Figura 8.** Marco de referencia de los ángulos de Euler RPY.

la composición es resultado de tres rotaciones consecutivas. Existen 12 combinaciones posibles como:

- $R_{xyz}, R_{xzy}, R_{xzx}, R_{yxxy}, R_{yzy}, R_{zxy}$
- $R_{xyx}, R_{zyz}, R_{yzx}, R_{yxz}, R_{zyx}, R_{zxx}$ .

Por otro lado también es posible encontrar el problema inverso el cual depende si existen condiciones como en el caso de la matriz de rotación (18) pueden ser encontrados, dada una matriz  $R$  como

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (20)$$

puede analizarse si la posición  $r_{31} = -s_\theta \neq \pm 1 \Rightarrow c_\theta \neq 0$  como:

$$\theta = \text{atan2}(-r_{31}, \sqrt{1 - r_{31}^2}) \quad (21)$$

$$\phi = \text{atan2}(r_{21}, r_{11}) \quad (22)$$

$$\psi = \text{atan2}(r_{32}, r_{33}) \quad (23)$$

En el caso de  $r_{31} = 1$  una solución es:

$$\theta = -\frac{\pi}{2}, \quad \phi + \psi = \text{atan2}(-r_{12}, r_{22}), \quad (24)$$

mientras que si  $r_{31} = -1$  es una posible solución es:

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \phi - \psi = \text{atan2}(r_{12}, r_{22}). \quad (25)$$

## 2.3. Cuaternión unitario

Los cuaterniones fueron establecidos por el matemático William Rowan Hamilton (1805 – 1865), generalizando los números complejos para poder aplicarlos a espacios tridimensionales, dado que poseen una parte real y dos imaginarias (Kuipers, 1999). Sin embargo, fue hasta 1843 donde se le ocurrió una nueva estructura algebraica conocida como el Cuaternión que requería de una parte real y tres partes imaginarias ( $i, j, k$ ), Hamilton se dio cuenta que sus unidades imaginarias deberían cumplir las siguientes condiciones

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \quad (26)$$

El cuaternión unitario está dado por

$$q_s + q_x i + q_y j + q_z k \quad (27)$$

donde  $q_s \in \mathbb{R}$  es la parte escalar y  $\mathbf{q}_v = [q_x \ q_y \ q_z]^\top \in \mathbb{R}^3$  representa la parte vectorial del cuaternión.

El cuaternión unitario está sujeto a la siguiente restricción

$$q_s^2 + \|\mathbf{q}_v\|^2 = 1.$$

En este trabajo se empleará la siguiente notación para el cuaternion

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_s \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^3, \quad (28)$$

donde  $\mathbb{S}^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 1\}$  es la esfera unitaria contenida en  $\mathbb{R}^4$ .

Las operaciones del cuaternión se muestran a continuación:

- Suma y resta

$$\mathbf{p} \pm \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_s \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} q_s \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_s \pm q_s \\ \mathbf{p}_v \pm \mathbf{q}_v \end{bmatrix}. \quad (29)$$

- Multiplicación

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_s \\ \mathbf{p}_v \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} q_s \\ \mathbf{q}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_s q_s - \mathbf{q}_v^\top \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \times \mathbf{q}_v + p_s \mathbf{q}_v + q_s \mathbf{p}_v \end{bmatrix}. \quad (30)$$

- Conjugado

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_s \\ -\mathbf{q}_v \end{bmatrix}. \quad (31)$$

- Norma: presenta equivalencias como:

$$\|\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^*\| \quad (32)$$

$$= \|\mathbf{q}^* \otimes \mathbf{q}\| \quad (33)$$

$$= q_s^2 + \mathbf{q}_v^\top \mathbf{q}_v. \quad (34)$$

$$(35)$$

- El inverso de un cuaternión satisface:

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (36)$$

- Inverso  $\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\|\mathbf{q}\|}$ .

- El cuaternión unitario satisface  $\|\mathbf{q}\| = 1$ , por lo tanto, se cumple  $\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^*$ .

La multiplicación de cuaterniones es análoga a la multiplicación de matrices en  $SO(3)$ . Dado un Cuaternión con la parte escalar 0 definido como  $\mathbf{q}_p = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{p} \end{bmatrix}^\top$  y un cuaternión unitario  $\mathbf{q}$  como en la ecuación (28), la siguiente operación

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_p \otimes \mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}_{pr} = \begin{bmatrix} 0 \\ (q_s^2 - \mathbf{q}_v^\top \mathbf{q}_v)\mathbf{p} + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^\top \mathbf{p} + q_s S(\mathbf{q}_v)\mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (37)$$

es equivalente a rotar el vector  $\mathbf{p}$  alrededor  $\mathbf{q}_v$  es decir,  $\mathbf{p}_r = R(\mathbf{q})\mathbf{p}$ . De la expresión anterior se observa que la matriz de rotación expresada en términos del cuaternión unitario dada por:

$$R(\mathbf{q}) = R(q_s, \mathbf{q}_v) = (q_s^2 - \mathbf{q}_v^\top \mathbf{q}_v)I + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^\top + 2q_s S(\mathbf{q}_v) \quad (38)$$

donde  $S(\mathbf{q}_v)$  es dada por la ecuación (10) se puede llegar a la siguiente expresión

$$R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 2(q_s^2 + q_x^2) - 1 & 2(q_x q_y - q_s q_z) & 2(q_x q_z + q_s q_y) \\ 2(q_x q_y + q_s q_z) & 2(q_s^2 + q_y^2) - 1 & 2(q_y q_z - q_s q_x) \\ 2(q_x q_z - q_s q_y) & 2(q_y q_z - q_s q_x) & 2(q_s^2 + q_z^2) - 1 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

El cuaternión unitario también puede ser expresado en los términos los parámetros de Rodrigues  $(\theta, \mathbf{n})$

como:

$$q_s = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \mathbf{q}_v = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \mathbf{n} \quad (40)$$

donde representa la misma matriz de rotación si  $(-\theta, -\mathbf{n})$ . Para resolver el problema inverso, es decir, encontrar el valor de cada cuaternión, para resolverlo podemos observar nuestra matriz de rotación (39) como se observa la matriz (20), posteriormente se aplican las siguientes ecuaciones:

$$q_1 = \frac{1}{2} \sqrt{r_{11} + r_{22} + r_{33} + 1}, \quad q_s \geq 0, \quad \theta \in [-\pi, \pi] \quad (41)$$

$$q_2 = \frac{1}{2} [\text{sign}(r_{32} - r_{23}) \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1}] \quad (42)$$

$$q_3 = \frac{1}{2} [\text{sign}(r_{13} - r_{31}) \sqrt{r_{22} - r_{11} - r_{33} + 1}] \quad (43)$$

$$q_4 = \frac{1}{2} [\text{sign}(r_{32} - r_{23}) \sqrt{r_{11} - r_{22} - r_{33} + 1}] \quad (44)$$

donde la convención de  $\text{sign}(x) = 1$  para  $x \geq 0$ ,  $\text{sign}(x) = -1$  para  $x < 0$  (Sciavicco & Siciliano, 2012).

La rotación de un marco de coordenadas alrededor de  $\mathbf{v} = [v_x \ v_y \ v_z]^\top \in \mathbb{R}^3$  donde  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 1$  y dado un ángulo  $\alpha$ , se puede expresar como un cuaternión como

$$\mathbf{q}(\alpha, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \\ \text{sen} \frac{\alpha}{2} \mathbf{v} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad (45)$$

Considere los siguientes cuaterniones unitarios

$$\mathbf{q}_x(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} \\ \text{sen} \frac{\phi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ 0 \\ \text{sen} \frac{\theta}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\psi}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \text{sen} \frac{\psi}{2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

donde  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  representan los ángulos de Euler. Entonces el cuaternión unitario se puede expresar como

$$\mathbf{q}_z(\psi) \otimes \mathbf{q}_y(\theta) \otimes \mathbf{q}_x(\phi) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right) - \text{sen}\left(\frac{\phi}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (47)$$

tomando en cuenta el rango de trabajo de los ángulos de Euler para  $\psi \in [-\pi, \pi]$ ,  $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\phi \in [-\pi, \pi]$



entonces las soluciones para los ángulos son:

$$\phi = \arctan 2 \left( \frac{2(q_0 q_1 + q_2 q_3)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)} \right) \quad (48)$$

$$\theta = \arcsin(2(q_0 q_2 - q_1 q_3)) \quad (49)$$

$$\psi = \arctan 2 \left( \frac{2(q_0 q_3 + q_1 q_2)}{1 - 2(q_2^2 + q_3^2)} \right) \quad (50)$$

### 2.3.1. La derivada del cuaternión

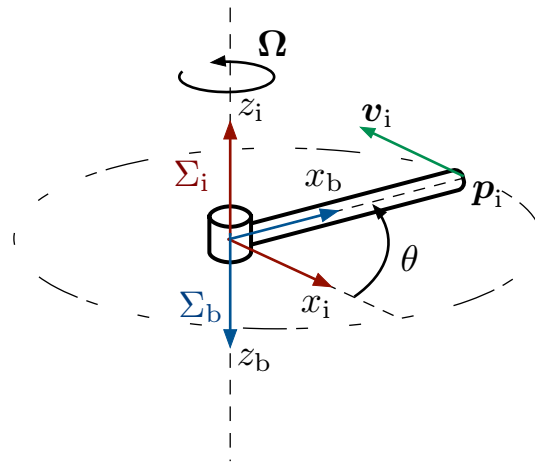


Figura 9. Representación de un brazo de un 1 GDL.

Para obtener la derivada del cuaternión unitario y su relación con la velocidad angular del cuerpo, considere el brazo robótico de un grado de libertad mostrado en la figura 9. Se muestran respectivamente el sistema de referencia inercial  $\Sigma_i$  y el sistema de referencia fijo al cuerpo  $\Sigma_b$ . El brazo robótico gira alrededor del eje  $z_i$  con una velocidad angular  $\Omega = \dot{\theta} z_i$ . Sea  $p_i = R p_b$  la posición del brazo robótico expresado con respecto a  $\Sigma_i$ , donde  $R \in SO(3)$  es la matriz de rotación que relaciona los marcos de referencia  $\Sigma_i$ ,  $\Sigma_b$  y  $p_b$  es un vector constante expresado en  $\Sigma_b$ . A continuación se definen los cuaterniones  $q_{pi} = \begin{bmatrix} 0 & q_i^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$  y  $q_{pb} = \begin{bmatrix} 0 & q_b^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$ , los cuales se relacionan mediante las siguientes expresiones:

$$q_{pi} = q \otimes p_{pb} \otimes q^{-1}, \quad q_{pb} = q^{-1} \otimes q_{pi} \otimes q. \quad (51)$$

Tomando en cuenta la ecuación anterior y  $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ , la derivada temporal del cuaternión  $\mathbf{q}_{pi}$  esta dada por

$$\dot{\mathbf{q}}_{pi} = \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{p}_{pb} \otimes \mathbf{q}^{-1} + \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}_b \otimes \dot{\mathbf{q}}^{-1} \quad (52)$$

$$= \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q}_{pi} + \mathbf{q}_{pi} \otimes \mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}}^{-1} \quad (53)$$

donde  $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{v}_i^\top \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^4$ ,  $\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}_s & \dot{\mathbf{q}}_v^\top \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^4$  y  $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$  es la velocidad lineal del robot. Para continuar con el desarrollo se calculará el producto de Hamilton  $\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^{-1}$ ,

$$\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^\top \dot{\mathbf{q}} & \mathbf{d}^\top \end{bmatrix}^\top \quad (54)$$

donde  $\mathbf{d} = q_s \dot{\mathbf{q}}_v - \dot{q}_s \mathbf{q}_v + S(\mathbf{q}_v) \dot{\mathbf{q}}_v$ . Dado que  $\mathbf{q}$  es un cuaternión unitario se cumple que  $\mathbf{q}^\top \dot{\mathbf{q}} = 0$ .

Siguiendo un procedimiento similar, el producto de Hamilton  $\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^{-1}$  está dado por

$$\mathbf{q} \otimes \dot{\mathbf{q}}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^\top \dot{\mathbf{q}} & -\mathbf{d}^\top \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{d}^\top \end{bmatrix}^\top \quad (55)$$

Tomando en cuenta los resultados anteriores la derivada con respecto al tiempo del cuaternión  $\mathbf{q}_{pi}$  está dado por

$$\dot{\mathbf{q}}_{pi} = \begin{bmatrix} -\mathbf{d}^\top \mathbf{p}_i \\ S(\mathbf{d}) \mathbf{p}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{d}^\top \mathbf{p}_i \\ -S(\mathbf{p}_i) \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ S(2\mathbf{d}) \mathbf{p}_i \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Por lo tanto, la velocidad lineal  $\mathbf{v}_i$  se puede calcular como

$$\mathbf{v}_i = S(2\mathbf{d}) \mathbf{p}_i. \quad (57)$$

Por otro lado, de acuerdo con la mecánica clásica la velocidad lineal del brazo robótico está dada por

$$\mathbf{v}_i = S(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{p}_i. \quad (58)$$

donde  $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^3$  es la velocidad angular expresada en el sistema de referencia  $\Sigma_i$ . Al comparar las ecuaciones (57) y (58) se concluye  $\mathbf{d} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}$ . Tomando en cuenta el resultado anterior se tiene

$$\dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^{-1} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\Omega}^\top \end{bmatrix}^\top. \quad (59)$$

Ahora bien, tomando en cuenta que  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}} \otimes \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q}$ , las ecuaciones cinemáticas del cuaternión unitario

están dadas por

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_\Omega \otimes \mathbf{q} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\mathbf{q}_v^\top \boldsymbol{\Omega} \\ q_s I + S(\mathbf{q}_v) \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Sea  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  la velocidad angular expresada con respecto al sistema de referencia fijo al cuerpo  $\Sigma_b$ , entonces se tiene  $\boldsymbol{\Omega} = R\boldsymbol{\omega}$ , o de manera equivalente

$$\mathbf{q}_\Omega = \mathbf{q} \otimes \bar{\boldsymbol{\omega}} \otimes \mathbf{q}^{-1} \quad (61)$$

donde  $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\omega}^\top \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^4$ . Al usar las expresiones anteriores, una expresión equivalente a la ecuación cinemática (60) está dada por

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \mathbf{q} \otimes \bar{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) \boldsymbol{\omega} \quad (62)$$

donde el Jacobiano  $J(\mathbf{q})$  se define como

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{q}_v^\top \\ q_s I_3 + S(\mathbf{q}_v) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}. \quad (63)$$

Al utilizar la propiedad  $S(\mathbf{a})S(\mathbf{b}) = \mathbf{b}\mathbf{a}^\top - \mathbf{a}^\top\mathbf{b}I$  y recordando  $\mathbf{q}^\top\mathbf{q} = 1$ , es fácil mostrar que la matriz  $J(\mathbf{q})$  satisface

$$J^\top(\mathbf{q})J(\mathbf{q}) = I \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (64)$$

Al utilizar el resultado anterior la velocidad angular se puede expresar como:

$$\boldsymbol{\omega} = 2J^\top(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (65)$$

## 2.4. Trayectoria

En este trabajo de tesis definimos una trayectoria como una curva suave continuamente diferenciable a lo largo de un tiempo. Existe una diversidad de trayectorias dentro de la literatura como:

- Trayectorias punto a punto: evoluciona desde la posición inicial a la final, sin considerar el estado de las demás articulaciones. Se pueden encontrar movimiento eje a eje o de ejes simultáneos.
- Trayectorias coordinadas: se mueven simultáneamente, ralentizando las articulaciones rápidas, de forma que todos los ejes terminen igual en el menor tiempo posible.

- Trayectorias continuas: cada articulación sigue un movimiento aparente caótico con posibles cambios de dirección y velocidad y sin coordinación al resto de las articulaciones, solo el extremo final describirá la trayectoria.
- Trayectorias interpoladas: sucesión de puntos en el espacio por las que ha de pasar las articulaciones del robot en un instante determinado. Respeta las restricciones físicas y utiliza funciones polinómicas cuyo coeficiente se ajusta según las restricciones. Los interpoladores que se utilizan son lineales, cúbicos (splines), a tramos, etc.
- Trayectorias aprendidas: resultado de la interacción previamente guiada del robot para un proceso.

Se puede encontrar mas información en (Craig, 2006; Barrientos et al., 2007).

## 2.5. Mecanismo para validación experimental

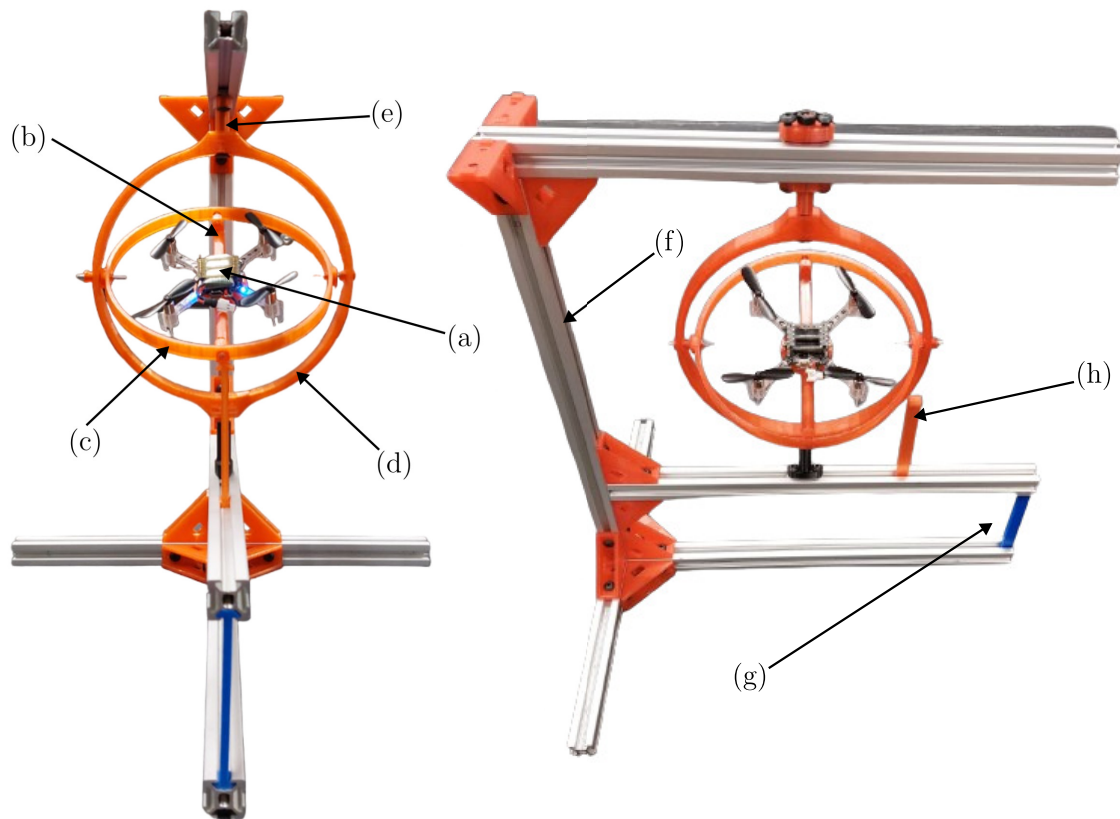
En esta sección se describe la plataforma experimental utilizada para validar los modelos matemáticos y algoritmos de control desarrollados en este trabajo de tesis. Para validar los algoritmos de control de orientación, se diseñó y construyó un mecanismo de 3GDL con una estructura similar a un giroscopio.

Las partes móviles del mecanismo se construyeron mediante la técnica de impresión 3D mientras que la estructura que da soporte al mecanismo se construyó con perfiles de aluminio. Su propósito principal es el de cubrir las necesidades de este trabajo de investigación, como el de proteger el vehículo aéreo ante colisiones e incluso accidentes. El robot se encuentra fijo en el centro del mecanismo como se observa en la figura 10 (a), sin embargo, solo puede ser usado para orientar y dar seguimiento de trayectoria sin la necesidad de flotar en el aire.

Las partes móviles del mecanismo son: eje principal donde se fija el robot, el cual puede rotar libremente 360 grados alrededor del eje  $x$  elemento (b) de la figura 10, un anillo secundario que rota alrededor del eje  $y$  y tiene un rango de movimiento de  $\pm 180$  grados elemento (c) en la figura 10 y un anillo principal que gira libremente alrededor del eje  $z$  con un rango de rotación de 360 grados elemento (d) en la figura 10 .

El eje principal está diseñado de tal manera que el robot se puede sujetar a dicha pieza con una orientación de 45 o 90 grados según se desee. El anillo principal puede girar sin problema con la ayuda de unos bujes

elemento (e) en la figura 10 que mantienen el eje alineado y además sirven como unión con la estructura de soporte.



**Figura 10.** Plataforma experimental de anillo completo de 3GDL.

La estructura principal elemento (f) en la figura 10 se encuentra fabricada en aluminio lo que hace que tenga rigidez y sea ligera capaz de moverse donde se desea, además se cuenta con dos soportes adicionales el primer elemento (g) figura 10 permite moverse en caso de se requiera nivelar la plataforma y el segundo elemento (h) figura 10 para que el robot pueda sostenerse de manera intencional una vez termine o inicie el experimento y este no se bloquee debido a su programación de no superar una inclinación de  $90^\circ$  sobre el ángulo  $\theta$  o Pitch.

Cabe destacar que el cuadricóptero tiene cuatro entradas de control, la primera es  $f$  la magnitud de la fuerza de empuje en la dirección del eje  $z$  en el sistema de referencia fijo al cuerpo, dado que originalmente es un vector y no hay ningún accionamiento sobre las coordenadas  $x, y$ , se considera como un escalar. Las otras tres restantes son los pares aplicados sobre los rotores, que como resultado generan movimientos en un espacio debido a la entrada de control y la variación en velocidad de los motores. Como salidas de control posee 6 grados de libertad 3 de orientación y de 3 de traslación que sirven para ubicarse en un espacio.

### 2.5.1. Plataforma de vuelo

El cuadricóptero *Crazyflie* que se muestra en la figura 11(a) fabricado por la compañía *Bitcraze*<sup>1</sup> es un vehículo aéreo tipo VTOL de bajo costo equipado con un microcontrolador STM32F40, un radio NRF51822 y un sensor inercial de 6GDL que permite la medición de la orientación y detección de movimiento a lo largo de sus tres ejes, este se compone de un acelerómetro y un giroscopio digitales de 16 bits y un sensor de presión BMP388. Además de ser una plataforma de código abierto, es posible hacer implementaciones aparte de las implementadas en el robot, el peso del robot es de 27 gramos. El *Firmware*<sup>2</sup> se puede encontrar de manera libre en GitHub, como algunas otras herramientas que se puedan requerir.



Figura 11. Vehículo Aéreo (a) *Crazyflie 2.1* y (b) Radio Crazyradio.

## 2.6. Proceso de implementación de los algoritmos de control

En esta sección se describe el equipo y programas utilizados para implementar los algoritmos de control. Principalmente, para programar, editar y compilar los algoritmos de control que se implementaron en los experimentos de regulación, seguimiento de trayectoria y el entorno tridimensional.

### 2.6.1. Proceso de implementación en regulación y seguimiento de trayectoria

El proceso de implementación se puede observar en el esquema de la figura 12. El proceso inicia cuando el control de orientación es programado en el chip integrado del robot usando lenguaje C figura 12

<sup>1</sup><https://www.bitcraze.io>

<sup>2</sup><https://github.com/bitcraze>

(a). Mediante un programa de *Python*<sup>3</sup> manipulado desde el editor *Visual Studio Code*<sup>4</sup> se envía la orientación y empuje deseados por medio de Crazyradio figura 11 (a) que se encuentra enlazado a la plataforma y es producido por el fabricante figura 12 (b). Una vez enviada la información y terminado el experimento se puede obtener una serie de mediciones que proporcionan los sensores integrados, la captura de información es resultado del trayecto o proceso por el robot cuando se encontraba en el experimento, al finalizar son recibidos nuevamente vía radio y mediante la computadora figura 12 (c). Una vez recibidos los datos, se empaquetan de modo que posteriormente serán interpretados por algún programa de cómputo (d). Los datos obtenidos empaquetados pueden ser interpretados y graficados para observar detalladamente los resultados del experimento figura 12 (e).

### 2.6.2. Proceso de control de orientación y posición en el entorno tridimensional

En este proceso, mostrado en la figura 13 se implementa el controlador de posición. El proceso inicia cuando el controlador de orientación ya se encuentra programado en el chip integrado y listo para volar figura 13 (a). Para controlar la posición, se requiere de un conjunto de 6 cámaras de alta velocidad y sincronizadas entre sí de la compañía *Optitrack*<sup>5</sup> que en conjunto con el software *Motive*<sup>6</sup>, la información es capturada y permite conocer la posición de un cuerpo rígido en un espacio tridimensional, esto se logra fijando marcadores reflectantes en el cuerpo rígido, este proceso ayuda a conocer su posición en tiempo real figura 13 (b). Posteriormente la computadora hace la captura de datos de la posición en un programa diseñado en Python y con ayuda de *ROS*<sup>7</sup> también conocido como el sistema operativo robótico, que es un conjunto de bibliotecas de software y herramientas para aplicaciones en robots se logra obtener comunicación y control total del robot figura 13 (c). Al finalizar el experimento son empaquetados todos los datos adquiridos por los sensores del robot como las señales adquiridas de las cámaras e incluso también es posible recopilar los datos procesados en el experimento resultado de operaciones de ambos sistemas para posteriormente puedan ser manipulados por algún programa de computado para generar las gráficas de posición y orientación.

En el presente capítulo se mostró una variedad de herramientas matemáticas necesarias para la orientación de cuerpos rígidos, así como el diseño del mecanismo experimental para la validación de los algoritmos de control. Necesarios para su posterior empleo una vez desarrollados los algoritmos de control.

---

<sup>3</sup><https://www.python.org/>

<sup>4</sup><https://code.visualstudio.com/>

<sup>5</sup><https://optitrack.com/>

<sup>6</sup><https://optitrack.com/software/motive/>

<sup>7</sup><https://www.ros.org/>

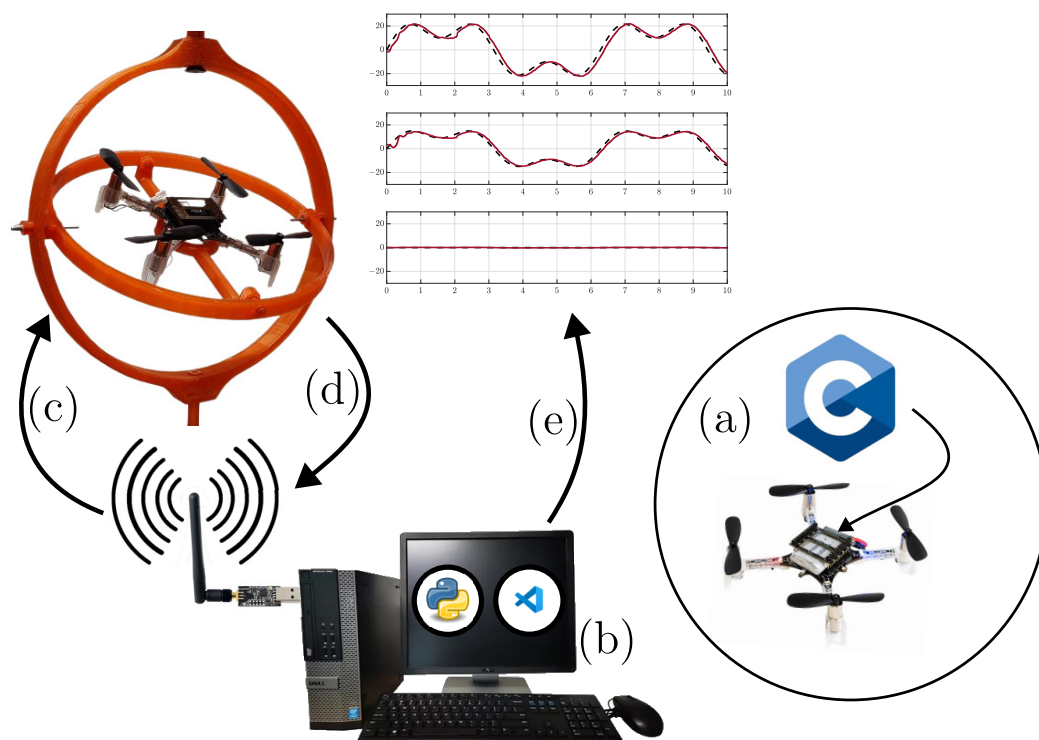


Figura 12. Entorno de trabajo para regulación y seguimiento de trayectoria.

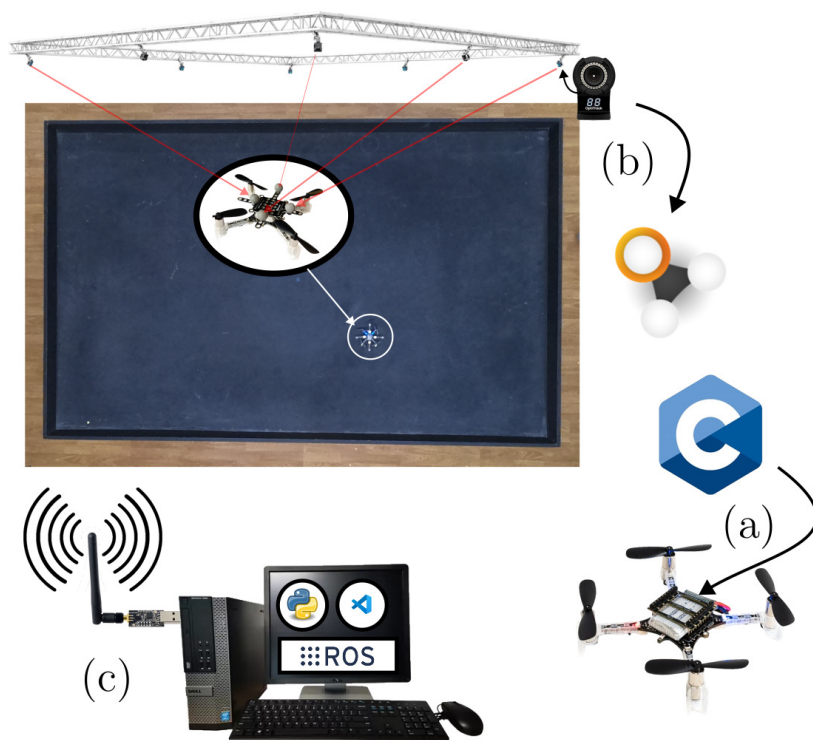


Figura 13. Entorno de trabajo tridimensional para seguimiento de posición y orientación.



## Capítulo 3. Dinámica del cuadricóptero

---

El cuadricóptero está formado por un cuerpo rígido con cuatro rotores ubicados exactamente a la misma distancia de su centro de masa. Su estructura de soporte presenta una variedad de configuraciones, sin embargo, la dirección de giro de los rotores importa, ya que tienen hélices de paso fijo. El cuadricóptero es un vehículo tipo *VTOL* del inglés vertical take-off and landing (Nonami et al., 2010), que significa despegue y aterrizaje vertical, es decir, estos robots aéreos no necesitan una pista para despegar o aterrizar.

### 3.1. Aerodinámica del cuadricóptero

El movimiento de cada una de las hélices produce una fuerza de empuje  $f_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) en dirección  $z_b$ . Esta fuerza tiene relación proporcional con la velocidad angular de los rotores. Dado que en un cuadricóptero dos hélices giran en sentido horario y dos en sentido antihorario algunos efectos giroscópicos y momentos aerodinámicos tienden a cancelarse. En estado estacionario, la fuerza de empuje se puede modelar como:

$$f_i = C_T \rho A_r^2 \omega_i^2, \quad (66)$$

donde  $C_T$  es el coeficiente de empuje,  $\rho$  es la densidad del aire,  $A_r$  es el área del disco del rotor,  $r_i$  es el radio,  $\omega_i$  es la velocidad angular del rotor. En la práctica un modelo simple es:

$$f_i = C_T \omega_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (67)$$

donde  $C_T > 0$  es una constante de proporcionalidad determinada a través de pruebas de empuje estático. Cada rotor genera una fuerza por lo que puede quedar expresada como en la ecuación anterior, ahora debido a que el cuadricóptero contiene cuatro rotores, si se encuentra suspendido en el aire, el empuje total  $f$  generado se puede calcular como:

$$f = \sum_{i=1}^4 f_i = \sum_{i=1}^4 C_T \omega_i^2. \quad (68)$$

El par de reacción debido a la fuerza de arrastre del rotor que actúa sobre el soporte, producto de la oposición del aire al movimiento provocado por los rotores puede ser modelado como:

$$\tau_i = C_Q \omega_i^2 \quad (69)$$

donde  $C_Q$  es el coeficiente de par y principalmente depende de la geometría en la hélice y la densidad de aire. Las constantes  $C_T$  y  $C_Q$  pueden ser calculadas de forma experimental y deben ser positivas (Mahony et al., 2012). El par  $\tau_i$  es perpendicular al plano de rotación de las hélices.

### 3.1.1. Empuje total

El empuje total expresado en el marco de referencia solo aparece en el eje  $z$  y en específico sobre la dirección  $z_b$  el cual esta unido al marco de referencia unido al centro de masa del cuadricóptero denotado por  $\Sigma_b = [\mathbf{x}_b \ \mathbf{y}_b \ \mathbf{z}_b]$ . Dado que solo la fuerza de empuje actúa sobre la dirección  $z_b$ , la fuerza total  $f$  esta dada por:

$$\mathbf{f} = f\mathbf{e}_3 = f \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}_b = \mathbf{e}_3 \quad (70)$$

donde  $\mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$  es un vector de dirección como se observa en la ecuación (70).

### 3.1.2. Pares generados

Los pares generados debido a las fuerzas aerodinámicas expresados respecto al marco de referencia fijo al cuadricóptero está dado por

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_x + \boldsymbol{\tau}_y + \boldsymbol{\tau}_z \quad (71)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}_j \in \mathbb{R}^3$  ( $j = \{x, y, z\}$ ) es el par generado por los rotores en el principales ejes de rotación. Dado que los rotores 1 y 3 giran en sentido  $z_b$  y los rotores 2 y 4 giran en sentido de  $-z_b$ . El par de reacción producido tiene dirección opuesta a la dirección de rotación de las hélices. Entonces, se obtiene que  $\tau_1$  y  $\tau_3$  actúan en dirección  $z_b$  mientras que  $\tau_2$  y  $\tau_4$  actúan en dirección  $-z_b$ . Los pares que actúan en el robot debido a las fuerzas y pares generados por los rotores están dados por:

$$\boldsymbol{\tau}_x = \ell\mathbf{y}_b \times f_2\mathbf{z}_b - \ell\mathbf{y}_b \times f_4\mathbf{z}_b \quad (72)$$

$$\boldsymbol{\tau}_y = \ell\mathbf{x}_b \times f_1\mathbf{z}_b - \ell\mathbf{x}_b \times f_3\mathbf{z}_b \quad (73)$$

$$\boldsymbol{\tau}_z = (-\tau_1 + \tau_2 - \tau_3 + \tau_4)\mathbf{z}_b \quad (74)$$

donde  $\ell$  es la distancia del centro de masa a cada uno de los rotores del cuadricóptero.

Tomando en cuenta las ecuaciones (68) y (69), los pares  $\tau_x$ ,  $\tau_y$  y  $\tau_z$  dados en (72)-(74) se pueden expresar como:

$$\tau_x = \ell \begin{bmatrix} f_2 - f_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \ell C_T \begin{bmatrix} \omega_2^2 - \omega_4^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\tau_y = \ell \begin{bmatrix} 0 \\ f_3 - f_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \ell C_T \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_3^2 - \omega_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$\tau_z = C_Q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2 + \omega_4^2 \end{bmatrix}. \quad (77)$$

De forma general se pueden agrupar las ecuaciones (75), (76), (77) en conjunto de matriz como

$$\begin{bmatrix} f \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_T & C_T & C_T & C_T \\ 0 & \ell C_T & 0 & -\ell C_T \\ -\ell C_T & 0 & \ell C_T & 0 \\ -C_Q & C_Q & -C_Q & C_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

La ecuación (78) describe la relación entre las velocidades angulares, fuerzas y pares que existen en el cuadricóptero. Dado que las fuerzas se encuentran expresadas en el marco de referencia  $\Sigma_b$  del cuadricóptero se requiere que estén respecto al marco inercial  $\Sigma_a$ , lo cual se reescribe como

$$\mathbf{f}_a = fRz_a, \quad \boldsymbol{\tau}_a = R\boldsymbol{\tau}. \quad (79)$$

### 3.1.3. Movimientos en el cuadricóptero

Los movimientos que el vehículo aéreo puede realizar dependen de la variación de la velocidad de los rotores. Sin embargo, dependerá la configuración física del propio cuadricóptero, es decir, como se encuentra ubicado el frente del robot si se localiza en forma de  $\times$  o  $+$ . Existen otras configuraciones, sin embargo, solo se explicará la configuración  $+$  como se puede observar en la figura 14.

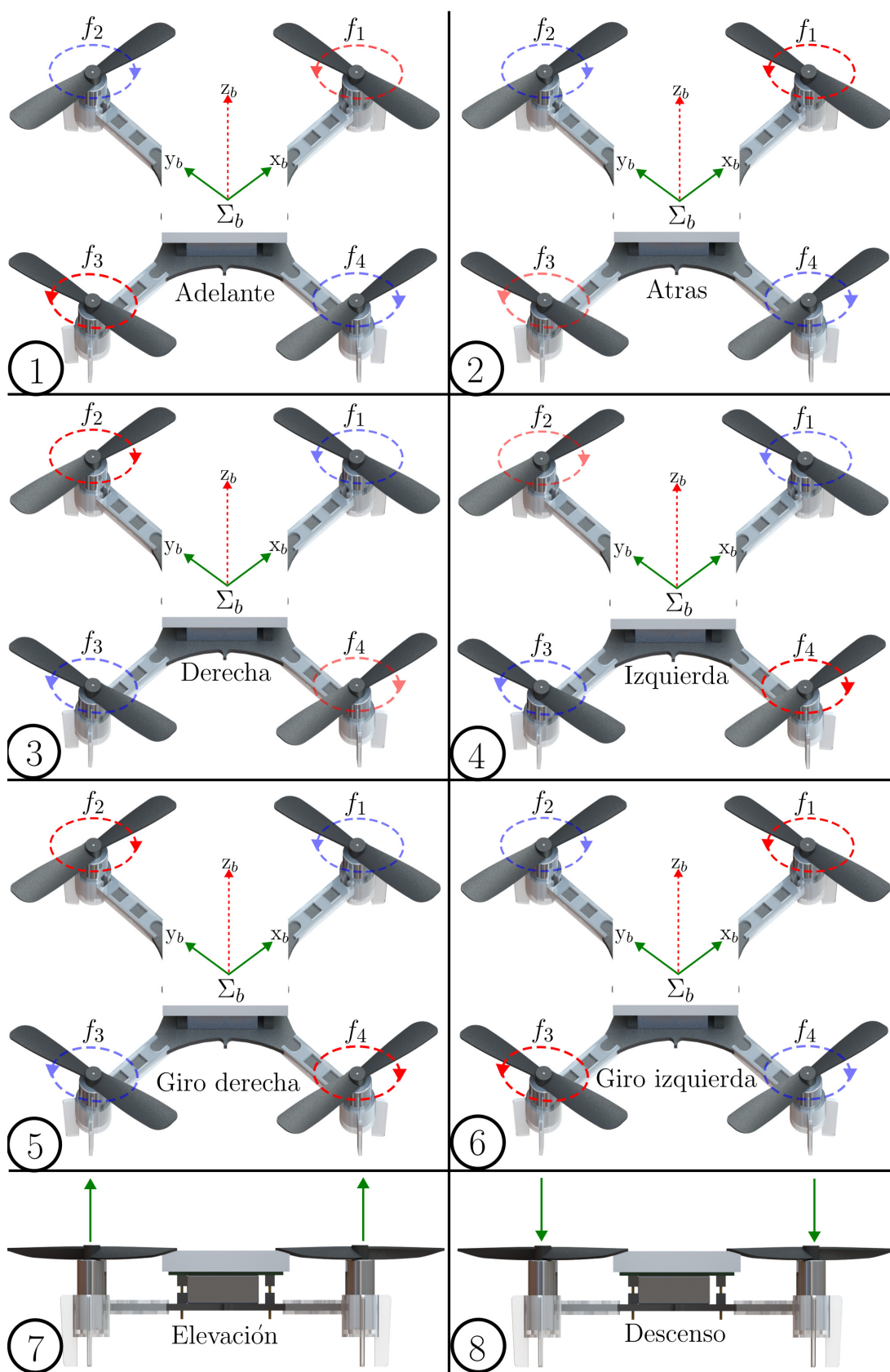


Figura 14. Movimientos en el cuadricóptero en configuración +.

En este caso el rotor frontal viene numerado como  $f_1$  y por lo tanto el  $f_3$  será el rotor trasero, también observar que el eje  $x_b$  determina la dirección frontal. Los movimientos que el vehículo aéreo puede realizar al variar la velocidad angular de sus rotores se describen a continuación:

1. Adelante: resultante al disminuir la velocidad del rotor  $f_1$  y el aumentar la velocidad del rotor  $f_3$ . Los rotores restantes  $f_2$  y  $f_4$  permanecerán con velocidades constantes.
2. Atrás: resultante al disminuir la velocidad del rotor  $f_3$  y el aumentar la velocidad del rotor  $f_1$ . Los rotores restantes  $f_2$  y  $f_4$  permanecerán con velocidades constantes.
3. Derecha: resultante al disminuir la velocidad del rotor  $f_4$  y el aumentar la velocidad del rotor  $f_2$ . Los rotores restantes  $f_1$  y  $f_3$  permanecerán con velocidades constantes.
4. Izquierda: resultante al disminuir la velocidad del rotor  $f_2$  y el aumentar la velocidad del rotor  $f_4$ . Los rotores restantes  $f_1$  y  $f_3$  permanecerán con velocidades constantes.
5. Giro a la derecha: resultante al disminuir las velocidades de los rotores  $f_1$  y  $f_3$  permaneciendo constantes y el aumento de la velocidad en los rotores  $f_2$  y  $f_4$ .
6. Giro a la izquierda: resultante de la disminución de los rotores  $f_2$  y  $f_4$  permaneciendo constantes y el aumento de la velocidad en los rotores  $f_3$  y  $f_1$ .
7. Elevación: resultado del aumento gradual de la velocidad de los cuatro rotores  $f_1, f_2, f_3, f_4$ .
8. Descenso: resultado del decremento gradual de giro constante de los cuatro rotores  $f_1, f_2, f_3, f_4$ .

El funcionamiento del vehículo aéreo se distinguirá y dependerá de la configuración de giro en los rotores. En el caso del cuadricóptero dos rotores giran en dirección de las manecillas y los restantes en sentido opuesto, los efectos giroscópicos y los pares aerodinámicos tienen a cancelarse (Castillo et al., 2005). Sin embargo, es fácil identificar dado que el ángulo de ataque de la hélice coincide con el giro del rotor, si estos no coinciden no se elevará el cuadricóptero.

### 3.1.4. Modelo dinámico del cuadricóptero

Las ecuaciones que describen al cuadricóptero se pueden obtener por el empleo de diferentes formalismos, sin embargo se hará uso de las ecuaciones de Newton-Euler, basado en el balance de fuerzas y pares.

Este enfoque supone que el cuadricóptero es un cuerpo rígido y que su centro de masa coincide con el origen del sistema de referencia que se encuentra unido al cuerpo del mismo. Las ecuaciones de movimiento de un cuadricóptero presentan una estructura en cascada, dado que la dinámica de orientación es independiente de la traslación. Sin embargo la dirección de fuerza de empuje depende de la orientación del cuadricóptero. Esto permite el diseño de leyes de control de tipo jerárquico, es decir separar la dinámica de posición como un bucle externo y la dinámica de orientación como bucle interno (Zhao et al., 2015).

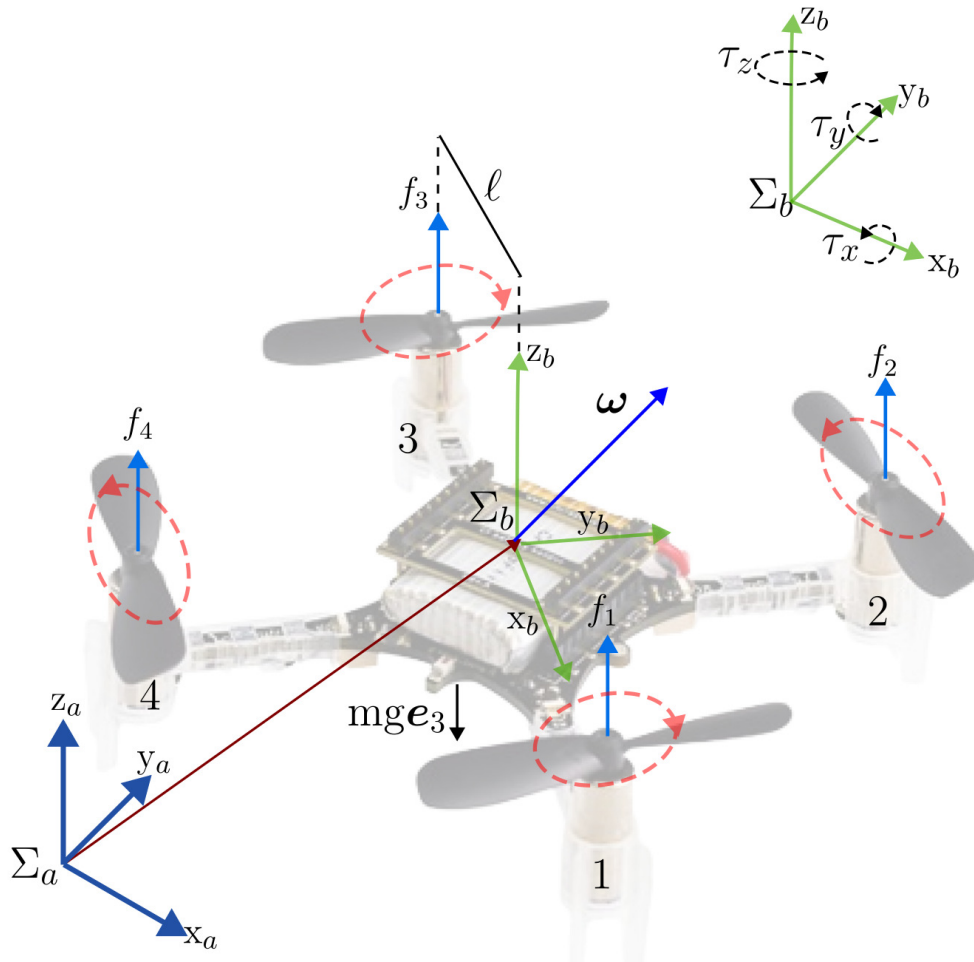


Figura 15. Diagrama de cuerpo libre del cuadricóptero.

Dado un sistema de referencia  $\Sigma_a = [x_a \ y_a \ z_a]$  inercial y un sistema de referencia  $\Sigma_b = [x_b \ y_b \ z_b]$  fijo en el centro de masa del cuadricóptero. Los sistemas de referencia  $\Sigma_a$  y  $\Sigma_b$  se relacionan mediante una matriz de rotación  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  la cual describe la relación de orientación del cuadricóptero. El vector  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$  representa la posición con respecto al sistema  $\Sigma_a$  y el vector  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$  es la velocidad lineal. El vector  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  representa la velocidad angular expresado respecto al sistema de referencia  $\Sigma_b$ .

### 3.1.4.1. Modelo de orientación

La ecuación cinemática de orientación está dada por

$$\dot{R} = RS(\omega) \quad (80)$$

donde  $\dot{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  representa la derivada temporal de la matriz de rotación donde  $S(\omega) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz antisimétrica y  $\omega \in \mathbb{R}^3$  es la velocidad angular expresada en  $\Sigma_b$ . La ecuación de movimiento del cuadricóptero se describe mediante la ecuación de Newton-Euler

$$M\dot{\omega} = S(M\omega)\omega + \tau \quad (81)$$

donde  $\tau \in \mathbb{R}^3$  es el par aplicado,  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es una matriz de inercia constante y simétrica positiva definida (Espindola & Tang, 2024).

### 3.1.4.2. Modelo de traslación

Las ecuaciones de movimiento de traslación del cuadricóptero están dadas por:

$$\dot{p} = v \quad (82)$$

$$m\dot{v} = fRe_3 - mge_3 \quad (83)$$

donde  $g$  es la constante de gravedad y  $m$  es la masa total del cuadricóptero. La entrada de control para la dinámica de traslación es el empuje total  $f = \sum_{i=1}^4 f_i$  generado por los rotores. El vector  $e_3 \in \mathbb{R}^3$  representa la dirección del eje  $z$  como  $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$  (Nonami et al., 2010; Abdessameud & Tayebi, 2013; Pliego-Jiménez, 2021).

En el presente capítulo se presentó los fundamentos básicos que engloban al cuadricóptero, además de su funcionamiento básico y algunos de los modelos clásicos encontrados dentro de la literatura. Los fundamentos son necesarios para conocer el funcionamiento del sistema y poder construir el modelo alternativo de orientación basado en el Cuaternión unitario.

## Capítulo 4. Algoritmos de control

---

En este capítulo se presentan los algoritmos de control de orientación y posición, así como su correspondiente análisis de estabilidad. Además se presenta un modelo matemático de 4 GDL para describir la orientación del robot basado en cuaterniones unitarios. Dicho modelo es fundamental para el diseño de las leyes de control y se considera como un aporte de este trabajo de investigación.

### 4.1. Modelo alternativo de orientación

La orientación del cuadricóptero se describe por una matriz de rotación  $R \in SO(3)$  que relaciona el marco de referencia  $\Sigma_b$  respecto al marco de referencia inercial  $\Sigma_a$ . Como se mostró en el Capítulo 2, una alternativa para describir la orientación del robot es el Cuaternión dado en la ecuación(28) donde  $q_s \in \mathbb{R}$  es la parte escalar y  $\mathbf{q}_v \in \mathbb{R}^3$  es la parte vectorial, además, el cuaternión unitario está contenido en la 3-esfera definida como  $\mathbb{S}^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 | \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = 1\}$ . La esfera unitaria cubre doblemente el grupo de rotación  $SO(3)$ , es decir,  $\mathbf{q}$  y  $-\mathbf{q}$  representan la misma orientación. La cinemática del cuaternión unitario viene dada por la ecuación (62) y el Jacobiano por la ecuación (63) donde  $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$  es la velocidad angular expresada en el marco  $\Sigma_b$ ,  $I_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  es la matriz identidad y el operador  $S(\mathbf{q}_v) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  dado en la ecuación (10) representando al operador de matriz antisimétrica de la parte vectorial del cuaternión  $\mathbf{q}_v$ . El Jacobiano dado en la ecuación (63) satisface que:

$$J^\top(\mathbf{x})\mathbf{x} = 0, \quad J^\top(\mathbf{q})J(\mathbf{q}) = I_3, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{q} \in \mathbb{S}^3. \quad (84)$$

Para el desarrollo del modelo alternativo de orientación se hace uso de las propiedades del Jacobiano presentadas en (63) se pueden consultar más propiedades en (Espíndola & Tang, 2023) y se hace uso de la velocidad angular definida en la ecuación (65). Se define un cuaternión auxiliar  $\bar{\boldsymbol{\omega}}$  como

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad (85)$$

y se define la matriz  $P(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  como:

$$P(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_s & -\mathbf{q}_v^\top \\ \mathbf{q}_v & q_s I_3 + S(\mathbf{q}_v) \end{bmatrix} \quad (86)$$



donde  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_s & \mathbf{q}_v \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{S}^3$ . Por calculo directo se puede comprobar que la matriz  $P(\mathbf{q})$  satisface:

$$P(\mathbf{q})P^\top(\mathbf{q}) = P^\top(\mathbf{q})P(\mathbf{q}) = I_4 \quad \det(P(\mathbf{q})) = 1, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{S}^3 \quad (87)$$

donde  $I_4$  es la matriz identidad de dimensión  $4 \times 4$ . La matriz  $P(\mathbf{q})$  es ortogonal y es de hecho una matriz de rotación, es decir,  $P(\mathbf{q}) \in SO(4) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{S}^3$ . Además, la estructura de la matriz  $P(\cdot)$  presenta propiedades interesantes como:

$$P(\mathbf{x}) + P(\mathbf{y}) = P(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad (88)$$

$$\frac{d}{dt}P(\mathbf{x}) = P(\dot{\mathbf{x}}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4. \quad (89)$$

Usando la definición  $\bar{\omega}$  y  $P(\mathbf{q})$  la cinemática del cuaternión unitario pueden ser expresadas como:

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}P(\mathbf{q})\bar{\omega} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\bar{\omega} = P^\top(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}. \quad (90)$$

Diferenciando la ecuación (90) respecto al tiempo se obtiene que

$$\frac{1}{2}\dot{\bar{\omega}} = P(\dot{\mathbf{q}})\ddot{\mathbf{q}} + P(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (91)$$

Ahora el primer elemento de la ecuación (91) esta dado por:

$$\mathbf{q}^\top \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^\top \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (92)$$

el cual corresponde a la segunda derivada temporal de la restricción  $\mathbf{q}^\top \mathbf{q} = 1$ . Ahora multiplicando la ecuación (91) por una matriz  $\bar{M}$  que es simétrica positiva definida y está definida

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \mu & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & M \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad \mu > 0, \quad (93)$$

dando lugar a la siguiente expresión

$$\frac{1}{2}\bar{M}\dot{\bar{\omega}} = \bar{M}P^\top(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \bar{M}P^\top(\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}. \quad (94)$$

Multiplicando la ecuación (94) y haciendo usa de la ecuación de Newton-Euler dada en (81) se obtiene el modelo dinámico basado en el cuaternión dado por:

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \tilde{\tau} \quad (95)$$

donde  $H(\mathbf{q}) = P(\mathbf{q})\bar{M}P^\top(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  es una matriz simétrica positiva definida,  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^4$  es un vector de aceleraciones,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [P(\mathbf{q})\bar{M}P^\top(\dot{\mathbf{q}}) - P(\mathbf{q})\bar{S}(M\boldsymbol{\omega})P^\top(\mathbf{q})] \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  el término  $\bar{S}(M\boldsymbol{\omega})$  que conforma a la matriz de Coriolis viene dada por

$$\bar{S}(M\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & S(M\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad (96)$$

la cual tiene la característica de ser una matriz antisimétrica. Los pares  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{R}^4$  son las entradas de par aplicado en las coordenadas del cuaternión unitario. De la definición de la matriz de inercia  $H(\mathbf{q})$  se deduce que  $P^\top(\mathbf{q})H(\mathbf{q}) = \bar{M}P^\top(\mathbf{q})$ , esta expresión implica que las matriz  $M$  son similares y por lo tanto tienen los mismos valores propios. Por lo tanto, si el parámetro  $\mu$  es seleccionado como  $\mu \leq \lambda_{\min}\{M\}$ , la matriz de inercia  $H(\mathbf{q})$  satisface:

$$\mu\|\mathbf{x}\|^2 \leq \mathbf{x}^\top H(\mathbf{q})\mathbf{x} \leq \bar{m}\|\mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \quad (97)$$

donde  $\bar{m} = \lambda_{\max}\{M\}$  es el valor propio mayor de la matriz  $M$ . Como la matriz  $\bar{S}(\cdot)$  es antisimétrica, se puede demostrar por cálculo directo que se cumple

$$\mathbf{x}^\top (\dot{H}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}))\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4, \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbb{S}^3. \quad (98)$$

Además también se cumple la siguiente igualdad

$$\dot{H}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}). \quad (99)$$

Para el modelo de la ecuación (95) los pares generalizados  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  y los pares aplicados  $\boldsymbol{\tau}$  se calculan mediante la ecuación:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{2}J(\mathbf{q})\boldsymbol{\tau}, \quad \boldsymbol{\tau} = 2J^\top(\mathbf{q})\tilde{\boldsymbol{\tau}}. \quad (100)$$

Finalmente el modelo de la ecuación (95) presenta la dinámica Lagrangiana de 4 GDL (Espíndola & Tang, 2023) y tiene una estructura similar a la de un robot manipulador sin fuerzas o pares gravitacionales

$$H(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}} \quad (101)$$

donde  $H(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  es la matriz de inercia,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  es la matriz centrífuga y de Coriolis,  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} \in \mathbb{R}^4$  son los pares virtuales aplicados,  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^4$  es la posición,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^4$  es la velocidad y  $\ddot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^4$  es la aceleración. Más propiedades del modelo general de un robot manipulador en (Kelly & Santibáñez, 2003).

## 4.2. Control de orientación

El problema de regulación que consiste en llevar el robot hacia una orientación deseada  $\mathbf{q}_d \in \mathbb{S}^3$ , independientemente de su orientación inicial  $\mathbf{q}(0) \in \mathbb{S}^3$ . La señal de error  $\tilde{\mathbf{q}}$  se define como la diferencia entre la orientación deseada y la orientación actual como  $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d - \mathbf{q}(t)$  y el error de velocidad se define como  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\mathbf{q}}(t)$ . Dado que  $\mathbf{q}_d$  es constante, se tiene  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\dot{\mathbf{q}}$ . El objetivo de control se cumple cuando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \tilde{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8. \quad (102)$$

### 4.2.1. Control PD

Para cumplir con el objetivo de control de regulación, se propone el controlador PD que se define como:

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} = K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}} \quad (103)$$

donde las matrices  $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  son conocidas como ganancias de posición y velocidad. Dado que solo requiere las mediciones de orientación  $\mathbf{q}$  y de velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$ , así como la especificación de la posición deseada  $\mathbf{q}_d$ , no es necesario especificar la velocidad ni la aceleración deseadas  $\dot{\mathbf{q}}_d$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_d$  (Kelly & Santibáñez, 2003). Tomando en cuenta (100), el controlador (103) en las coordenadas originales está dado por

$$\boldsymbol{\tau} = 2J^\top(\mathbf{q})(K_p \tilde{\mathbf{q}} - K_v \dot{\mathbf{q}}). \quad (104)$$

Ahora bien, si las ganancias se seleccionan como  $K_p = \frac{1}{2}k_p I_4$  y  $K_v = k_v I_4$  donde  $k_p$  y  $k_v$  son constantes positivas, la ecuación anterior puede escribirse como

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= k_p J^\top(\mathbf{q})(\mathbf{q}_d - \mathbf{q}) - 2k_v J^\top(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ &= k_p J^\top(\mathbf{q})\mathbf{q}_d - k_v \boldsymbol{\omega} \\ &= k_p \mathbf{e}_v - k_v \mathbf{q}\boldsymbol{\omega} \end{aligned} \quad (105)$$

donde se ha utilizado la propiedad de la matriz Jacobiana  $J^\top(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{0}$  y la cinemática del cuaternión  $\boldsymbol{\omega} = 2J^\top(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ . El vector  $\mathbf{e}_v \in \mathbb{R}^3$  es la parte vectorial del cuaternión unitario  $\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_s & \mathbf{e}_v^\top \end{bmatrix}^\top = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{q}_d$ . La ley de control (105) fue propuesta en (Wen & Kreutz-Delgado, 1991) y como puede verse es un caso

particular del control propuesto en este trabajo de tesis. La ley de control propuesta tiene la ventaja de que las ganancias son matrices, por lo que se tiene mayor grado de libertad para seleccionar sus valores.

Al sustituir la ley de control (103) en el modelo dinámico de 4 GDL (95) se obtiene la dinámica en lazo cerrado descrita por

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\mathbf{q}}} &= -\dot{\mathbf{q}} \\ H(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} &= K_q\tilde{\mathbf{q}} - K_v\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\end{aligned}\quad (106)$$

la cual tiene un punto de equilibrio en el origen.

Para analizar la estabilidad del controlador PD se propone la siguiente función escalar

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\top H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^\top K_p\tilde{\mathbf{q}} - \epsilon\tilde{\mathbf{q}}^\top H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (107)$$

donde  $\epsilon \in \mathbb{R}$  es una constante positiva. La función escalar se puede acotar inferiormente por las siguiente función

$$\mathcal{V} \geq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\epsilon\bar{m} \\ -\epsilon\bar{m} & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \quad (108)$$

donde se ha utilizado  $\lambda_{\max}\{H(\mathbf{q})\} = \bar{m}$  y  $\lambda_{\min}\{H(\mathbf{q})\} = \mu$ . Por otro lado, una cota superior está dada por

$$\mathcal{V} \leq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{\max}\{K_p\} & \epsilon\bar{m} \\ \epsilon\bar{m} & \bar{m} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}. \quad (109)$$

Si la constante  $\epsilon$  se elige tal que

$$\frac{\mu\lambda_{\min}\{K_p\}}{\bar{m}^2} > \epsilon^2, \quad \frac{\lambda_{\max}\{K_p\}}{\bar{m}} > \epsilon^2. \quad (110)$$

Entonces, la función escalar  $\mathcal{V}$  es positiva definida y radialmente no acotada y por tanto es una función candidata para analizar la estabilidad del origen de la dinámica en lazo cerrado (106). La derivada de la función candidata de Lyapunov evaluada en (106) está dada por

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}} &= \dot{\mathbf{q}}^\top (K_p\tilde{\mathbf{q}} - K_v\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}) - \dot{\mathbf{q}}^\top K_p\tilde{\mathbf{q}} + \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^\top \dot{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \\ &\quad + \epsilon\dot{\mathbf{q}}^\top H(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \epsilon\tilde{\mathbf{q}}^\top (K_p\tilde{\mathbf{q}} - K_v\dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}) - \epsilon\tilde{\mathbf{q}}^\top \dot{H}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}.\end{aligned}\quad (111)$$

Al utilizar las propiedad de antisimétrica de la matriz  $\dot{H}(\mathbf{q}) - 2C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , la igualdad  $\dot{H}(\mathbf{q}) = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + C^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  y la desigualdad  $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq \|\mathbf{q}\| + \|\mathbf{q}_d\| \leq 2$  se obtiene

$$\dot{\mathcal{V}} \leq - \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^T Q \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \quad (112)$$

donde adicionalmente se usó la propiedad  $\|C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}\| \leq k_c \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$  para algún  $k_c > 0$  (Kelly & Santibáñez, 2003). La matriz  $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  está dada por

$$Q = \begin{bmatrix} \epsilon \lambda_{\min}\{K_p\} & -\frac{1}{2}\epsilon \lambda_{\max}\{K_v\} \\ -\frac{1}{2}\epsilon \lambda_{\max}\{K_v\} & \lambda_{\min}\{K_v\} - \epsilon(\bar{m} + 2k_c) \end{bmatrix}. \quad (113)$$

Si la constante  $\epsilon$  adicionalmente satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{\lambda_{\min}\{K_p\}\lambda_{\min}\{K_v\}}{\lambda_{\max}\{K_v\}^2 + \lambda_{\min}\{K_p\}(\bar{m} + 2k_c)} > \epsilon > 0. \quad (114)$$

Entonces, la matriz  $Q$  es positiva definida y una cota superior de la derivada de la función candidata de Lyapunov está dada por

$$\dot{\mathcal{V}} \leq -\lambda_{\min}\{Q\}(\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \|\dot{\mathbf{q}}\|^2). \quad (115)$$

Dado que la derivada de  $\mathcal{V}$  es una función negativa definida se puede concluir por el método directo de Lyapunov que el punto  $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^T & \dot{\mathbf{q}}^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}^T$  es asintóticamente estable, por lo que se cumple el objetivo de control.

Finalmente, combinado el resultado anterior con la desigualdad (109) se obtiene

$$\dot{\mathcal{V}} \leq -\frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{\lambda_{\max}\{A\}}\mathcal{V}. \quad (116)$$

El resultado anterior implica que el punto de equilibrio no solo es asintóticamente estable sino que es exponencialmente estable. La estabilidad exponencial es una propiedad deseable en un sistema dinámico ya que presenta cierta robustez ante una clase de perturbaciones (Khalil, 2002). En este sentido, el controlador PD propuesto en este trabajo de tesis es una mejora al controlador reportado en (Wen & Kreutz-Delgado, 1991) donde los autores solo muestran estabilidad asintótica. Es importante mencionar que el modelo alternativo de 4 GDL es una parte fundamental en la demostración de estabilidad.

### 4.2.2. Resultados experimentales del controlador PD

Para validar el modelo de 4GDL y el desempeño del controlador PD se realizaron dos experimentos en la plataforma experimental presentada en el Capítulo 2. El primer experimento consiste en mover al vehículo aéreo desde su posición inicial bajo las siguientes condiciones:

$$\boldsymbol{\eta}(0) = [48.0536 \quad -85.0495 \quad -46.6169]^\top [\text{º}], \quad \boldsymbol{\omega} \approx \mathbf{0}[\text{rad/s}]. \quad (117)$$

donde  $\boldsymbol{\eta} = [\phi \quad \theta \quad \psi]^\top$  son los ángulos de Euler, hacia la posición deseada

$$\mathbf{q}_d = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^\top \implies \boldsymbol{\eta}_d = \mathbf{0} \quad (118)$$

donde  $\boldsymbol{\eta}_d = [\phi_d \quad \theta_d \quad \psi_d]^\top$  son los ángulos de Euler deseados.

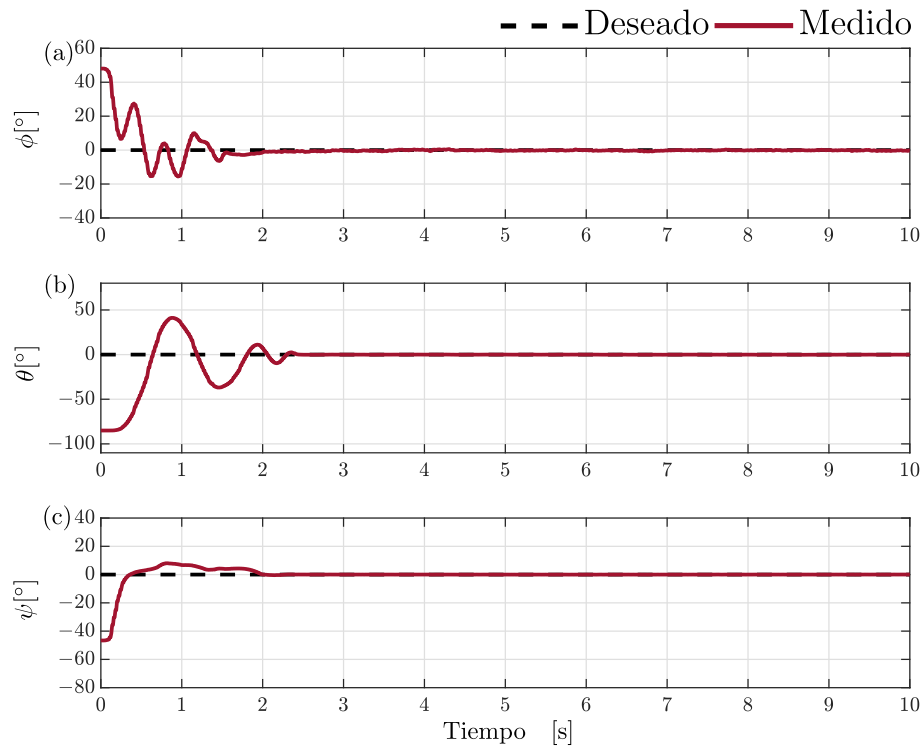
En el primer experimento las ganancias del controlador PD se eligieron de la siguiente manera

$$K_p = \text{diag} (0.025 \quad 0.0228 \quad 0.039 \quad 0.0165) \quad (119)$$

$$K_v = \text{diag} (0.0005 \quad 0.0065 \quad 0.01 \quad 0.004). \quad (120)$$

En todo el documento de esta tesis se hace uso de los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$  para denotar a los ejes *Roll-Pitch-Yaw*. La evolución temporal de la orientación del robot en términos de los ángulos de Euler se muestra en la figura 16. Puede observarse las condiciones de inicio ecuación (117) donde la respuesta para el ángulo  $\psi$  figura 16 (c) es más suave a comparación de los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  esto debido a que regresa a su punto deseado en un solo giro. A diferencia del ángulo  $\theta$  figura 16 (b) la respuesta es más oscilatoria porque su inclinación es mayor a  $\psi$  y  $\phi$ , sin embargo, se debe a los movimientos que produce cuando intenta estabilizarse en  $\theta = 0$  y esto como resultado produce movimientos de alabeo en  $\phi$  figura 16 lo que hace la inclinación vuelva a cambiar su orientación, cuando los tres ángulos llegan a su convergencia estos llegan a cero en aproximadamente 2 segundos.

De igual forma es posible ver el resultado de controlador visto como Cuaternión unitario figura 17, la equivalencia de cada ángulo se puede observar. Para  $\phi$  se relaciona con  $q_x$ , figura 17(b), para  $\theta$  se relaciona con  $q_y$  figura 17 (c) y para  $\psi$  se relaciona con  $q_z$  figura 17 (d). En ambos casos, puede observarse que se cumple el objetivo de control dado para el Cuaternión unitario deseado ecuación (118) se cumple principalmente porque  $q_s(t) \rightarrow 1$  y  $\mathbf{q}_v(t) \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

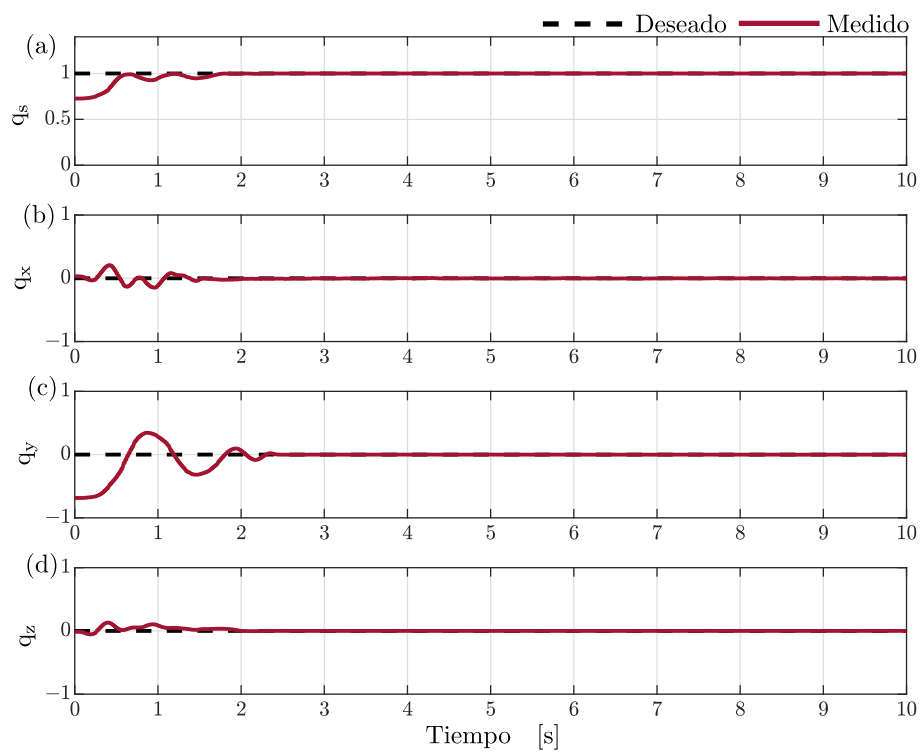


**Figura 16.** Respuesta del controlador PD en ángulos de Euler en el primer experimento: (a) Ángulo sobre el eje  $\phi$ , (b) Ángulo sobre el eje  $\theta$  y (c) Ángulo sobre el eje  $\psi$ .

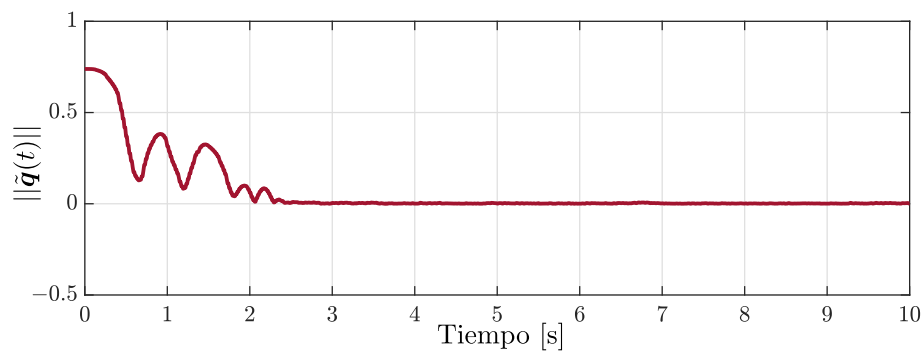
Otra forma de comprobar que el objetivo de control se cumplió es observando la gráfica de la norma del error del Cuaternión unitario mostrada en la figura 18 la cual converge exponencialmente a cero.

Por otro lado podemos observar las velocidades angulares en la figura 19 donde se puede observar que también convergen a cero, sin embargo se puede notar que una señal es más ruidosa y esto se debe a que en el experimento sobre el eje  $x$  se presentaron vibraciones las cuales pueden ser producto de varios factores propios de elementos del vehículo como hélices, motores, etc., no se encontraban en muy buen estado, o bien, dinámicas no modeladas. Sin embargo, se cumplió de manera satisfactoria el objetivo de control.

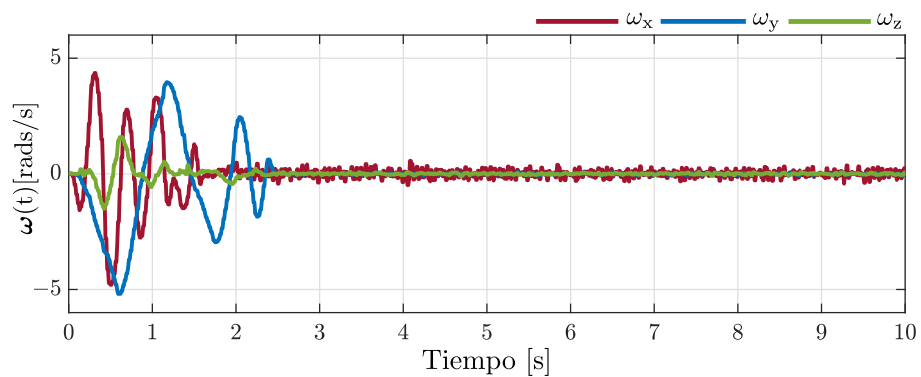
Finalmente, el experimento puede analizarse un poco más a detalle si se observa  $\|\tau\|$  señal generada por la ley de control, la cual se muestra en la figura 20. Se puede notar la presencia de pequeñas oscilaciones como se comentó anteriormente, sin embargo, de igual forma se cumplió el objetivo de control.



**Figura 17.** Respuesta del controlador PD en Cuaternión unitario en el primer experimento: (a) Parte escalar  $q_s$ , (b) Cuaternión unitario en  $x \rightarrow q_x$ , (c) Cuaternión unitario en  $y \rightarrow q_y$  y (d) Cuaternión unitario en  $z \rightarrow q_z$ .



**Figura 18.** Norma del error  $\|\tilde{q}(t)\|$  del Cuaternión en el primer experimento.



**Figura 19.** Velocidades angulares  $\omega(t)$  obtenidas del controlador PD en el primer experimento.



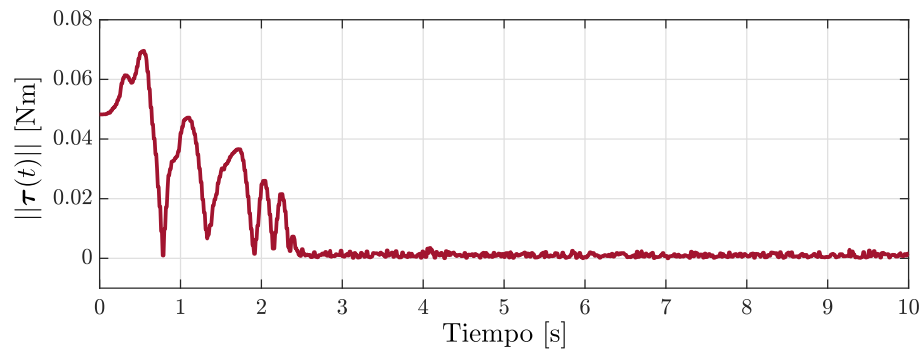


Figura 20. Norma del los pares  $\|\tau(t)\|$  del controlador PD en el primer experimento.

### 4.2.3. Resultados del segundo experimento del controlador PD

Para el segundo experimento se propuso la siguiente orientación deseada

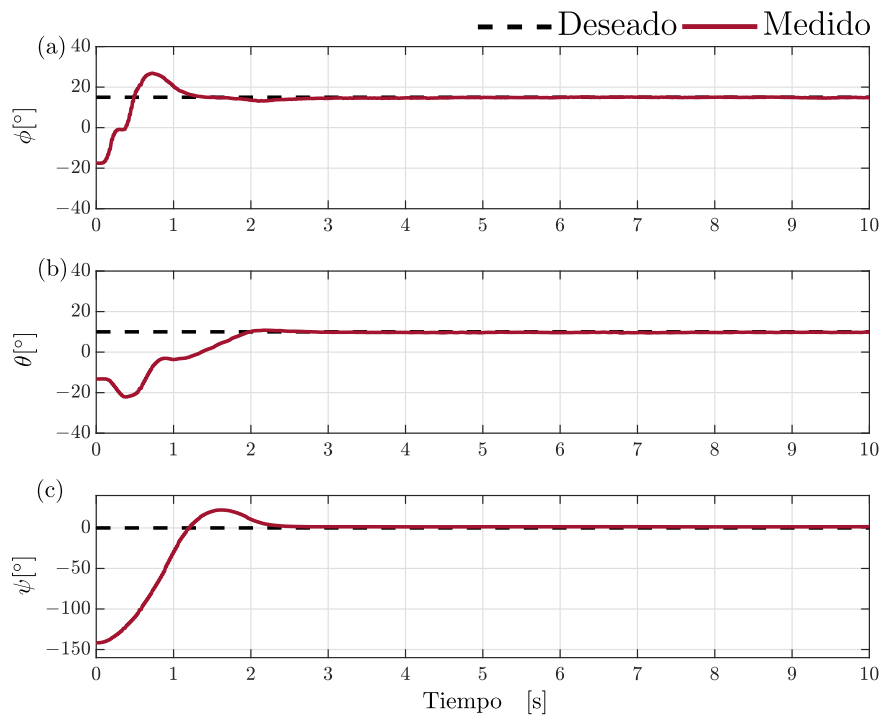
$$\mathbf{q}_d = [0.9877 \quad 0.1300 \quad 0.0864 \quad -0.0114]^\top \implies \boldsymbol{\eta}_d = [15 \quad 10 \quad 0]^\top [^\circ]. \quad (121)$$

En este experimento el robot parte del reposo,  $\boldsymbol{\omega}(0) = \mathbf{0}$  [rad/s] con la siguiente orientación inicial

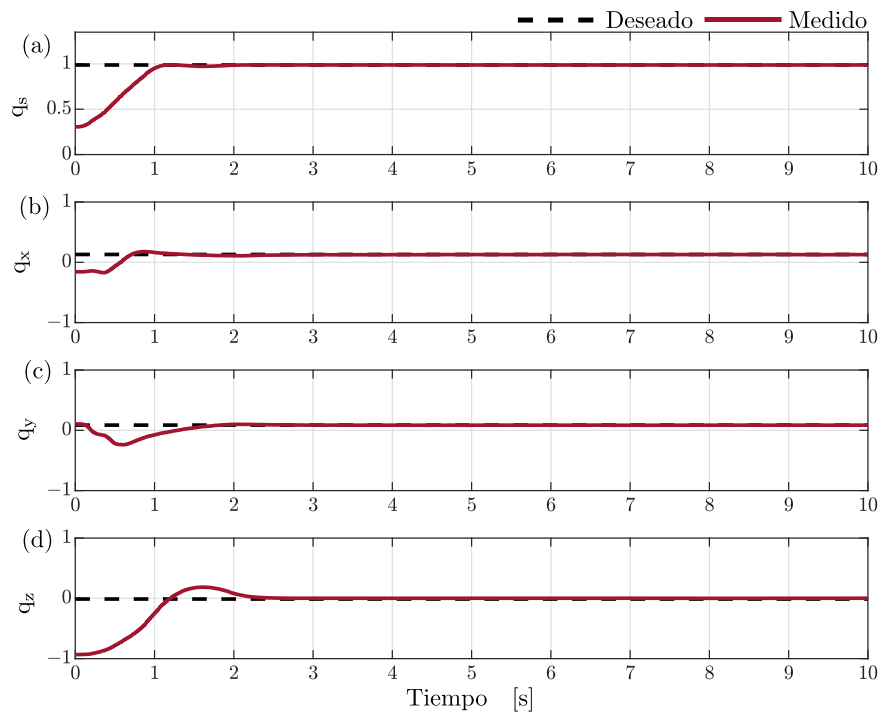
$$\boldsymbol{\eta}(0) = [-17.5334 \quad -13.2614 \quad -141.6468]^\top [^\circ] \quad (122)$$

Se utilizaron las mismas ganancias que en el experimento anterior. Nótese que en este experimento el error inicial en el eje  $z$  es relativamente grande. Puede observarse las condiciones de inicio ecuación (122) donde la respuesta para el ángulo  $\psi$  figura 21 (c) es suave dado que es resultado de un giro en dirección a  $\psi = 0$ , puede notarse que hubo un incremento, sin embargo, fue muy mínimo debido a  $\theta$  figura 21 (b) se encontraba inclinado girando en conjunto con  $\psi$  y la respuesta rápida de  $\phi$  figura 21 (a) no permitieron que tuvieran una respuesta oscilante, dado que tanto el ángulo  $\theta$  y  $\phi$  se encontraban muy cerca de su objetivo. Como resultado se obtuvo un respuesta rápida y no oscilante permitiendo que  $\phi = 15$  y  $\theta = 10$  cumplieran su objetivo.

De igual forma es posible observar la respuesta del controlador por medio del cuaternión unitario figura 22 que muestra la equivalencia de cada ángulo que puede observarse para el ángulo  $\phi$  representado por  $q_x$  figura 22 (b),  $\theta$  representado por  $q_y$  figura 22 (c) y  $\psi$  representado por  $q_z$  figura 22 (d). En ambos casos es posible observarse que se cumplió el objetivo de control, sin embargo, dado que dos ángulos  $\phi$  y  $\theta$  son diferentes a 0 en el caso de  $q_s$  figura 22 (a) es un valor menor a 1.

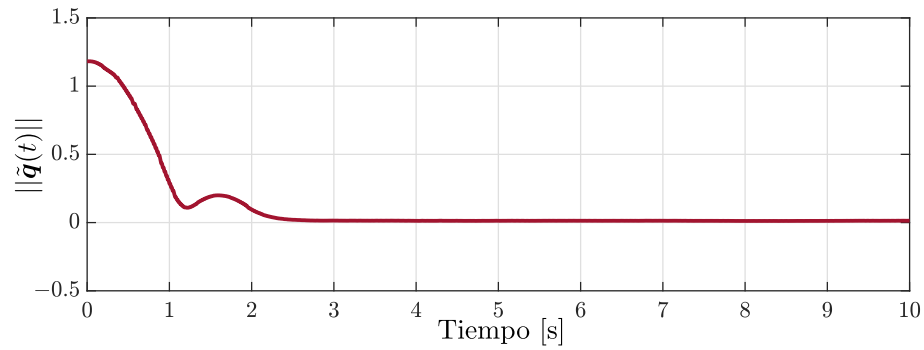


**Figura 21.** Respuesta del controlador PD en ángulos de Euler en el segundo experimento: (a) Ángulo sobre el eje  $\phi$ , (b) Ángulo sobre el eje  $\theta$  y (c) Ángulo sobre el eje  $\psi$ .

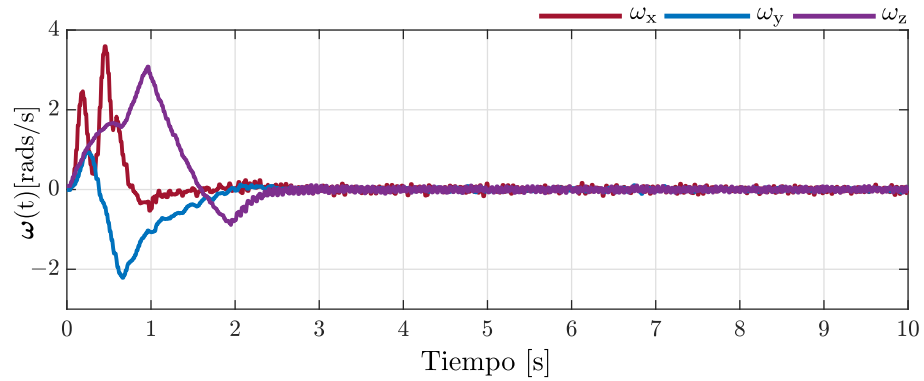


**Figura 22.** Respuesta del controlador PD en Cuaternión unitario en el segundo experimento: (a) Parte escalar  $q_s$ , (b) Cuaternión unitario en  $x \rightarrow q_x$ , (c) Cuaternión unitario en  $y \rightarrow q_y$  y (d) Cuaternión unitario en  $z \rightarrow q_z$ .

Otra forma de comprobar la respuesta del controlador es por medio de la norma del error del cuaternión unitario figura 23, que nos permite observar que converge rápidamente a cero sin presencia de oscilaciones, como en el caso anterior de regulación a cero.

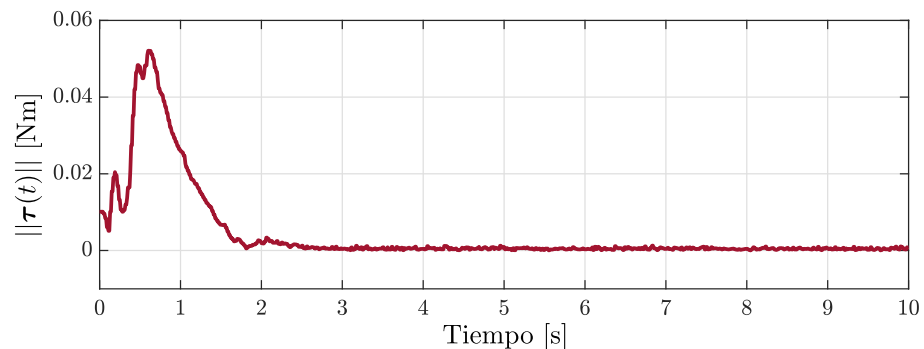


**Figura 23.** Norma del error  $\|\tilde{\mathbf{q}}(t)\|$  del Cuaternión en el segundo experimento.



**Figura 24.** Velocidades angulares  $\omega(t)$  obtenidas del controlador PD en el segundo experimento.

En la figura 24 podemos observar el comportamiento de las velocidades angulares presentadas en cada eje. Se presenta una respuesta rápida y no hay presencia de oscilaciones, sin embargo, en la figura 24 línea roja representa la velocidad angular sobre  $\omega_x$  se nota la presencia de cambios de velocidad debidas a la estabilización general de los ejes para llegar a su orientación deseada. En los ejes  $\omega_y$  figura 24 línea de color azul y en el eje  $\omega_z$  figura 24 línea de color morado se obtiene una respuesta rápida y uniforme. Después de 2.2 segundos el objetivo de control se cumple y la velocidad pasa a ser constante.



**Figura 25.** Norma de los pares  $\|\tau(t)\|$  del controlador PD en el segundo experimento.

En la figura 25 se observa la norma de los pares  $\|\tau(t)\|$  el tiempo y la magnitud que le llevo llegar al a su objetivo de control, se puede observar una rápida acción de control y además no se observa ruido.

### 4.3. Control de seguimiento de trayectoria

El problema de control de seguimiento de trayectoria consiste en determinar una función vectorial  $\tau$  de tal forma que la orientación y velocidad angular del robot siga con exactitud la orientación y velocidades deseadas variantes en el tiempo. El objetivo de control se cumple cuando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^8 \quad (123)$$

el término  $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}_d(t) - \dot{\mathbf{q}}(t)$  es el error de velocidad. Los algoritmos de seguimiento de trayectoria incluyen la dinámica completa de la estructura matemática del controlador en la mayoría de los casos.

#### 4.3.1. Controlador PD con precompensación

Dado que el modelo de orientación de 4 GDL tiene una estructura similar a la de un robot manipulador, para cumplir con el objetivo de seguimiento de trayectorias se propone el control PD con precompensación dado por

$$\tilde{\tau} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + H(\mathbf{q}_d) \ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \dot{\mathbf{q}}_d \quad (124)$$

donde  $K_p, K_v \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  son matrices positivas definidas,  $\mathbf{q}_d \in \mathbb{S}^3$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{R}^4$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_d \in \mathbb{R}^4$  son, respectivamente, la orientación, velocidad y aceleración deseadas, las cuales se asumen continuamente diferenciales. El término de precompensación en el controlador es consecuencia del hecho de que la ley de control usa la dinámica del robot evaluada en la trayectoria deseado. El controlador PD con precompensación es muy práctico a la hora de implementarse para trabajar en tiempo real (Kelly & Santibáñez, 2003).

Al sustituir la ley de control (124) en el modelo de 4 GDL se obtiene

$$H(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = K_p \tilde{\mathbf{q}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + H(\mathbf{q}_d) \ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \dot{\mathbf{q}}_d - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (125)$$

Tomando en cuenta las siguientes relaciones

$$C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) \dot{\mathbf{q}}_d - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + (C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d) - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})) \dot{\mathbf{q}}_d \quad (126)$$

$$H(\mathbf{q}) \ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = H(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}_d - H(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}}. \quad (127)$$

La dinámica en lazo cerrado se puede expresar de la siguiente manera

$$H(\mathbf{q})\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} = -K_p\tilde{\mathbf{q}} - K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \mathbf{h}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) \quad (128)$$

donde  $\mathbf{h}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}) = (H(\mathbf{q}_d) - H(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}))\ddot{\mathbf{q}}_d + (C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d - C(\mathbf{q}_d - \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}_d - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}))\dot{\mathbf{q}}_d$  se conoce como dinámica residual (Kelly & Santibáñez, 2003). El término  $\mathbf{h}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$  satisface  $\mathbf{h}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$  y puede ser acotado como sigue (Kelly & Santibáñez, 2003)

$$\|\mathbf{h}(t, \tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}})\| \leq k_1\|\tilde{\mathbf{q}}\| + k_2\|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \quad (129)$$

donde  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  son constantes positivas. De acuerdo con (Kelly et al., 2005), si la ganancia  $K_p$  es suficientemente grande, el origen  $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}}^\top & \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \end{bmatrix}^\top$  es el único punto de equilibrio de la ecuación en lazo cerrado descrita por (128).

Para analizar la estabilidad del controlador por precompensación considere la función escalar inspirada en el trabajo reportado en (Kelly et al., 2005)

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} K_p & \epsilon H(\mathbf{q}) \\ \epsilon H(\mathbf{q}) & H(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{q}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{bmatrix}, \quad \epsilon > 0 \quad (130)$$

la cual satisface

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} & -\epsilon\bar{m} \\ -\epsilon\bar{m} & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix} \leq \mathcal{W} \leq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{\max}\{K_p\} & \epsilon\bar{m} \\ \epsilon\bar{m} & \bar{m} \end{bmatrix}}_{A'} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\tilde{\mathbf{q}}}\| \end{bmatrix}. \quad (131)$$

Si la constante  $\epsilon$  se elige tal que

$$\frac{\mu\lambda_{\min}\{K_p\}}{\bar{m}^2} > \epsilon^2, \quad \frac{\lambda_{\max}\{K_p\}}{\bar{m}} > \epsilon^2. \quad (132)$$

Entonces, la función  $\mathcal{W}$  es positiva definida y radialmente no acotada, por lo que califica como una función candidata de Lyapunov. Usando las propiedades del modelo de 4 GDL, la derivada de  $\mathcal{W}$  a lo largo de (128) está dada por

$$\dot{\mathcal{W}} = -\epsilon\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top K_p\tilde{\mathbf{q}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \epsilon\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top H(\mathbf{q})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \epsilon\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top K_v\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \epsilon\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top C^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\tilde{\mathbf{q}}} - \dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{h} - \epsilon\dot{\tilde{\mathbf{q}}}^\top \mathbf{h}. \quad (133)$$

Tomando en cuenta  $\|\tilde{\mathbf{q}}\| \leq 2$  y las siguientes desigualdades

$$\|C(\mathbf{q}, \mathbf{x})\mathbf{y}\| \leq k_c \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^4 \quad (134)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^\top C^\top(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \leq k_c \alpha \|\tilde{\mathbf{q}}\| \|\dot{\mathbf{q}}\| + 2k_c \|\dot{\mathbf{q}}\|^2 \quad (135)$$

donde  $\alpha = \|\dot{\mathbf{q}}_d(t)\|_\infty$ , la función  $\dot{\mathcal{W}}$  satisface

$$\dot{\mathcal{W}} \leq -\epsilon \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{K_p\} - k_1 & -\frac{1}{2}(c_1 + \epsilon^{-1}k_1) \\ -\frac{1}{2}(c_1 + \epsilon^{-1}k_1) & \epsilon^{-1}(\lambda_{\min}\{K_v\} - k_2) - c_2 \end{bmatrix}}_{Q'} \begin{bmatrix} \|\tilde{\mathbf{q}}\| \\ \|\dot{\mathbf{q}}\| \end{bmatrix} \quad (136)$$

donde

$$c_1 = \lambda_{\max}\{K_p\} + k_c \alpha + k_2, \quad c_2 = \bar{m} + k_c.$$

De acuerdo con el análisis presentado en (Kelly et al., 2005), la matriz  $Q'$  es positiva definida si las ganancias del controlador satisfacen

$$\lambda_{\min}\{K_p\} > \frac{(2\epsilon c_1 + k_1)^2}{4\epsilon(\lambda_{\min}\{K_v\} - k_2 - \epsilon c_2)} + k_1 \quad (137)$$

$$\lambda_{\min}\{K_v\} > k_2 + \epsilon c_2. \quad (138)$$

Tomando en cuenta el análisis anterior se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{W}} &\leq -\epsilon \lambda_{\min}\{Q'\} (\|\tilde{\mathbf{q}}\|^2 + \|\dot{\mathbf{q}}\|^2) \\ &\leq -2\epsilon \frac{\lambda_{\min}\{Q'\}}{\lambda_{\max}\{A'\}} \mathcal{W}. \end{aligned} \quad (139)$$

El resultado anterior muestra que si las ganancias del controlador se eligen apropiadamente, el origen del sistema en lazo cerrado es exponencialmente estable.

#### 4.3.1.1. Resultados experimentales del controlador PD con precompensación

A diferencia del controlador PD, el controlador PD con precompensación requiere conocer los parámetros del modelo para calcular el término  $H(\mathbf{q}_d)\ddot{\mathbf{q}}_d + C(\mathbf{q}_d, \dot{\mathbf{q}}_d)\dot{\mathbf{q}}_d$ . Para calcular las matrices de inercia y Coriolis

se requiere conocer la matriz de inercia  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , la cual es constante y está dada por Förster (5 08)

$$M \approx \begin{bmatrix} 16.57 & 0.83 & 0.72 \\ 0.83 & 16.65 & 1.80 \\ 0.72 & 1.80 & 29.26 \end{bmatrix} \times 10^{-6} [\text{Kgm}^2].$$

Para evaluar el desempeño del controlador se eligió la siguiente trayectoria deseada variante en el tiempo descrita en términos de los ángulos de Euler

$$\boldsymbol{\eta}_d(t) = \begin{bmatrix} \phi_d(t) \\ \theta_d(t) \\ \psi_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (20 \text{ sen}(t) + 10 \text{ sen}(3t)) \\ (15 \text{ sen}(t) + 6 \text{ sen}(3t)) \\ 0 \end{bmatrix} [^\circ]. \quad (140)$$

En términos del cuaternión deseado se tiene

$$\mathbf{q}_d(t) = \begin{bmatrix} \cos(\psi_d) \\ 0 \\ 0 \\ \text{sen}(\psi_d) \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos(\theta_d) \\ 0 \\ \text{sen}(\psi_d) \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos(\phi_d) \\ \text{sen}(\psi_d) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (141)$$

Las condiciones iniciales de experimento fueron

$$\boldsymbol{\eta}(0) = [0.0455 \quad -0.0111 \quad -0.0012]^\top [^\circ] \quad (142)$$

$$\boldsymbol{\omega}(0) \approx \mathbf{0} [\text{rad/s}]. \quad (143)$$

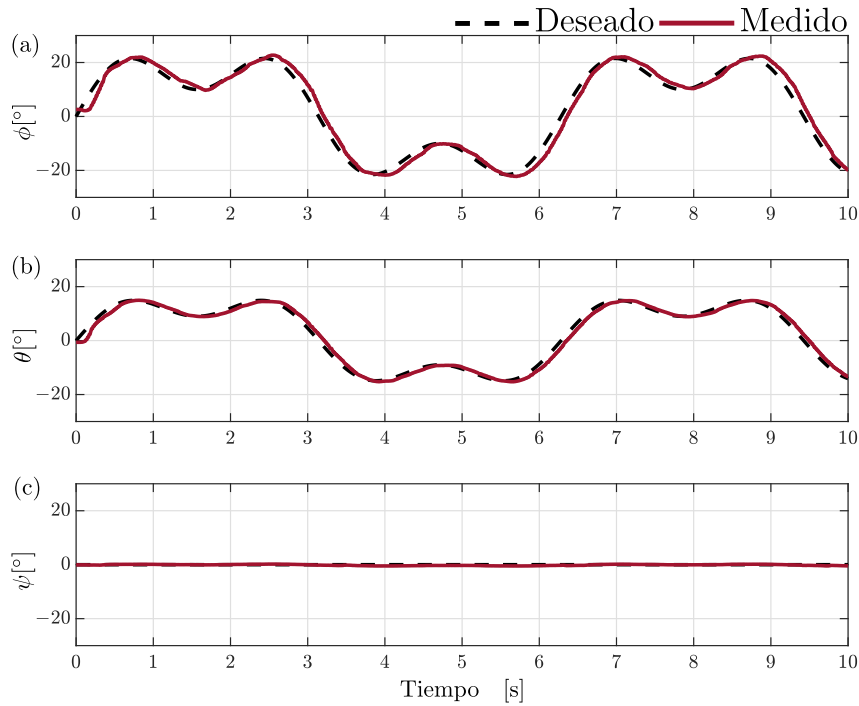
Las ganancias del controlador se seleccionaron como:

$$K_p = \text{diag} \left( 0.0096 \quad 0.02316 \quad 0.0375 \quad 0.0000001 \right) \quad (144)$$

$$K_v = \text{diag} \left( 0.0008 \quad 0.0015 \quad 0.0020 \quad 0.00050 \right). \quad (145)$$

Una vez terminado el experimento, se obtuvieron los resultados de la figura 26, la línea continua de color rojo indica la trayectoria medida por el robot y la línea punteada en color negro es la trayectoria deseada es decir, nuestro objetivo de seguimiento de trayectoria. La dificultad de este experimento radica en que el robot no debe realizar giro sobre el eje  $\psi$  como se puede observar en la figura 26 (c), se debe mantener

en  $\psi = 0$ , dado que el robot no se encuentra flotando en el aire este solo realiza movimientos sobre los ejes  $\phi(t)$  y  $\theta(t)$ . Como se puede apreciar la respuesta de  $\phi$  figura 26 (a) se obtiene un buen seguimiento sin embargo se presentan leves desfases posiblemente producidos por perturbaciones causadas por el viento o incertidumbres en los parámetros del robot, a diferencia de  $\theta(t)$  figura 26 (b) el seguimiento es más constante y preciso a comparación de  $\phi$ .



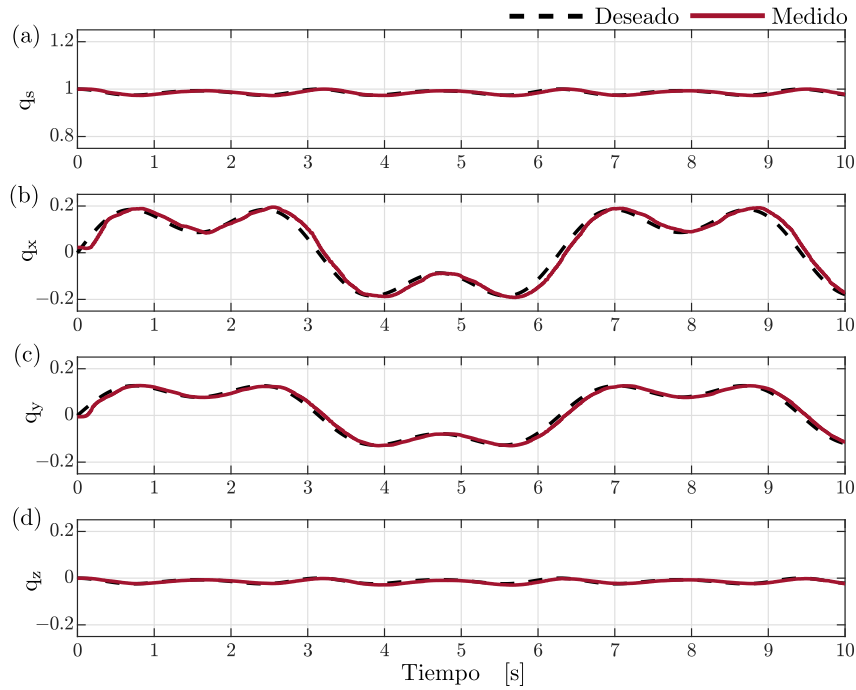
**Figura 26.** Respuesta del controlador PD con precompensación en ángulos de Euler en seguimiento de trayectoria: (a) Seguimiento sobre el ángulo  $\phi$ , (b) Seguimiento sobre el ángulo  $\theta$  y (c) Seguimiento sobre el ángulo  $\psi$ .

Por otro lado, también es posible observar la respuesta del controlador en términos del Cuaternión unitario. En la figura 27 (a) se observa la respuesta de la parte escalar del cuaternión unitario  $q_s(t)$ , como existe esa variación debida al comportamiento de los ejes  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , puede notarse que el valor de  $q_s$  oscila alrededor de 1). Por otro lado, también se puede observar una similitud en el perfil de la trayectoria de la parte vectorial de cuaternión  $q_v$  con respecto a las trayectorias en los ángulos de Euler. Aunque en el experimento no se aplicó ninguna perturbación intencional cabe destacar que el controlador responde si durante el experimento intencionalmente se cambia de orientación. Cabe destacar que los movimientos realizados por  $\phi$  y  $\theta$  tienen diferente amplitud como se puede observar en la trayectoria deseada.

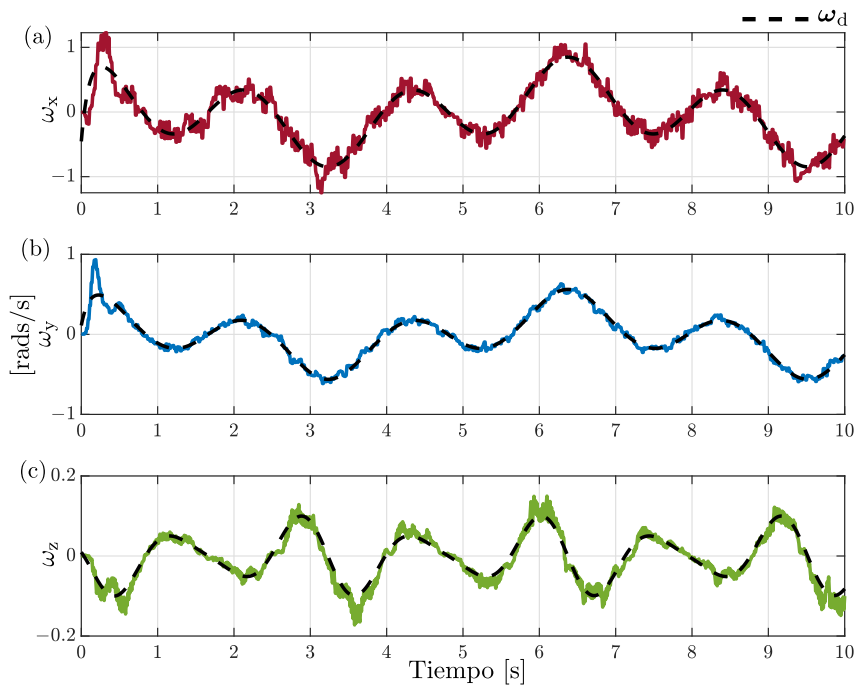
En la figura 28 se puede observar las velocidades angulares correspondientes a cada eje. Se presento un excelente seguimiento dado sobre cada eje, la línea negra punteada representa la velocidad angular deseada  $\omega_d$  en cada uno de los ejes. Sin embargo, cabe destacar que en  $\omega_x$  figura 28 (a) y  $\omega_y$  figura 28



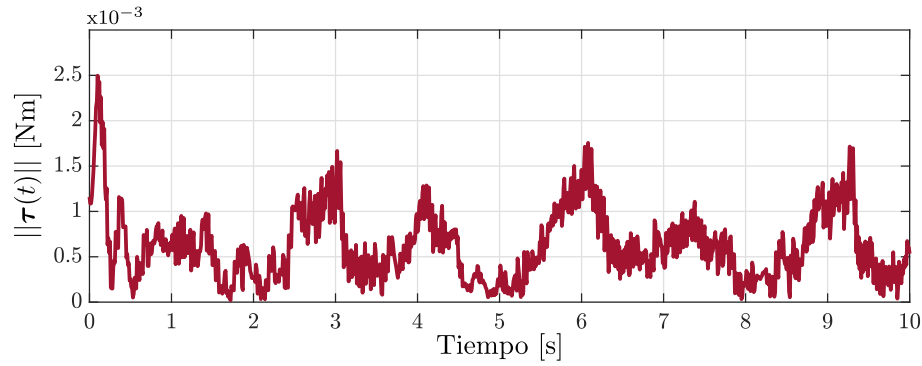
(b) se presenta un ligero desfase producto del inicio del experimento al instante se converge a  $\omega_d$ , en  $\omega_z$  figura 28 (c) no se observan variantes notorias dado que solo hace giro pequeños sobre su eje.



**Figura 27.** Respuesta del controlador PD con precompensación en Cuaternión unitario en seguimiento de trayectoria: (a) Seguimiento parte escalar  $q_s$ , (b) Seguimiento sobre el Cuaternión  $x \rightarrow q_x$ , (c) Seguimiento sobre el Cuaternión  $y \rightarrow q_y$  y (d) Seguimiento sobre el Cuaternión  $z \rightarrow q_z$ .



**Figura 28.** Velocidades angulares deseadas y medidas en controlador PD con precompensación en seguimiento de trayectoria: (a) Velocidad angular sobre el eje  $x$ , (b) Velocidad angular sobre el eje  $y$  y (c) Velocidad angular sobre el eje  $z$ .



**Figura 29.** Norma de los pares  $\|\tau(t)\|$  en el controlador PD con precompensación en seguimiento de trayectoria.

En la figura 29 se puede observar la norma de los pares  $\|\tau(t)\|$  como se comporta la magnitud de la señal durante su evolución en el tiempo del experimento.

#### 4.3.2. Controlador par-calculado

El modelo dinámico de un robot es generalmente no lineal en términos de las variables de estado  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$ , por lo que el controlador par calculado es no lineal en las variables de estado. El controlador par-calculado se define como

$$\tilde{\tau} = H(\mathbf{q}) \left[ \ddot{\mathbf{q}}_d + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}} \right] + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (146)$$

Este controlador fue de las primeras estructuras de control de movimiento basadas en el modelo ya que hace uso explícito de las matrices  $H(\mathbf{q})$ ,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ . La trayectoria deseada  $\mathbf{q}_d$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_d$  y  $\ddot{\mathbf{q}}_d$  así como la medición de la posición  $\mathbf{q}(t)$  y de la velocidad  $\dot{\mathbf{q}}$  se emplean para la acción de control (Kelly & Santibáñez, 2003).

La dinámica en lazo cerrado obtenida con el control par-calculado está dada por

$$\ddot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_v \dot{\tilde{\mathbf{q}}} + K_p \tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad (147)$$

la cual es un sistema lineal invariante en el tiempo. Si las ganancias  $K_p$  y  $K_v$  se eligen como matrices diagonales, la ecuación en lazo cerrado está formada por 4 ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$\ddot{\tilde{q}}_i + k_{vi} \dot{\tilde{q}}_i + k_{pi} \tilde{q}_i = 0, \quad i = 1, \dots, 4$$

cuya solución  $\tilde{q}(t)$  converge exponencialmente a cero para cualquier  $k_{vi} > 0$ ,  $k_{pi} > 0$ .

#### 4.3.2.1. Experimento par-calculado en seguimiento de trayectoria

El experimento consiste en validar la ley de control propuesta en la ecuación (146). Las ganancias del controlador se seleccionaron como:

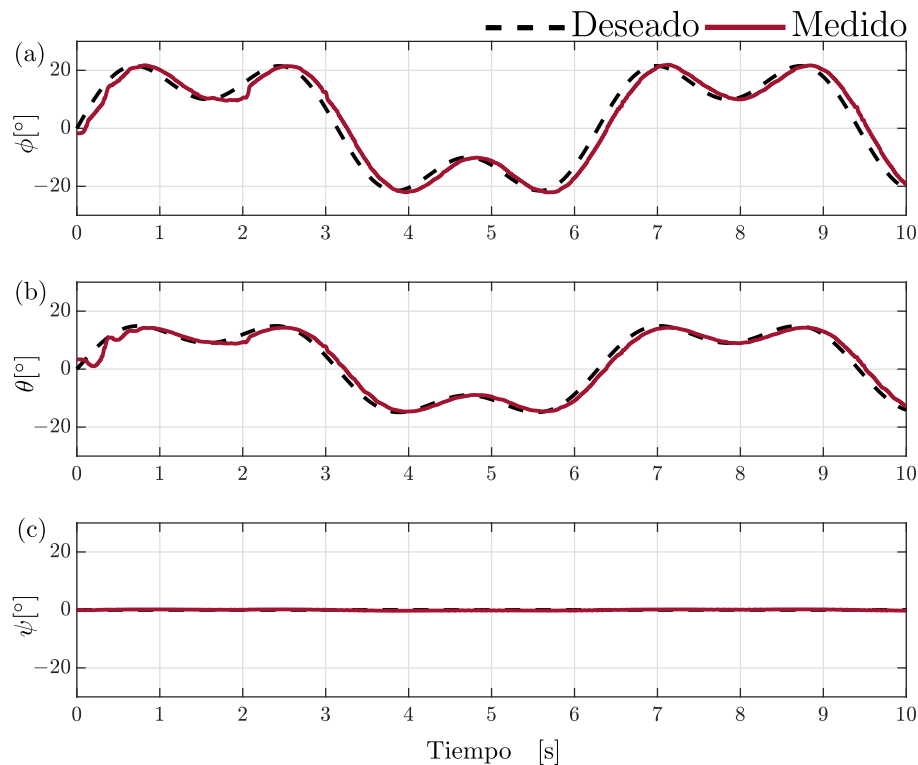
$$K_p = \text{diag} \left( 500 \quad 850 \quad 2350 \quad 480 \right) \quad (148)$$

$$K_v = \text{diag} \left( 100 \quad 80 \quad 160 \quad 300 \right) \quad (149)$$

Inicialmente el robot se encuentra orientado bajo las siguientes condiciones:

$$\eta(0) = \left[ -1.7191 \quad 3.3497 \quad -0.0205 \right]^T \text{ [}^\circ\text{]} \quad (150)$$

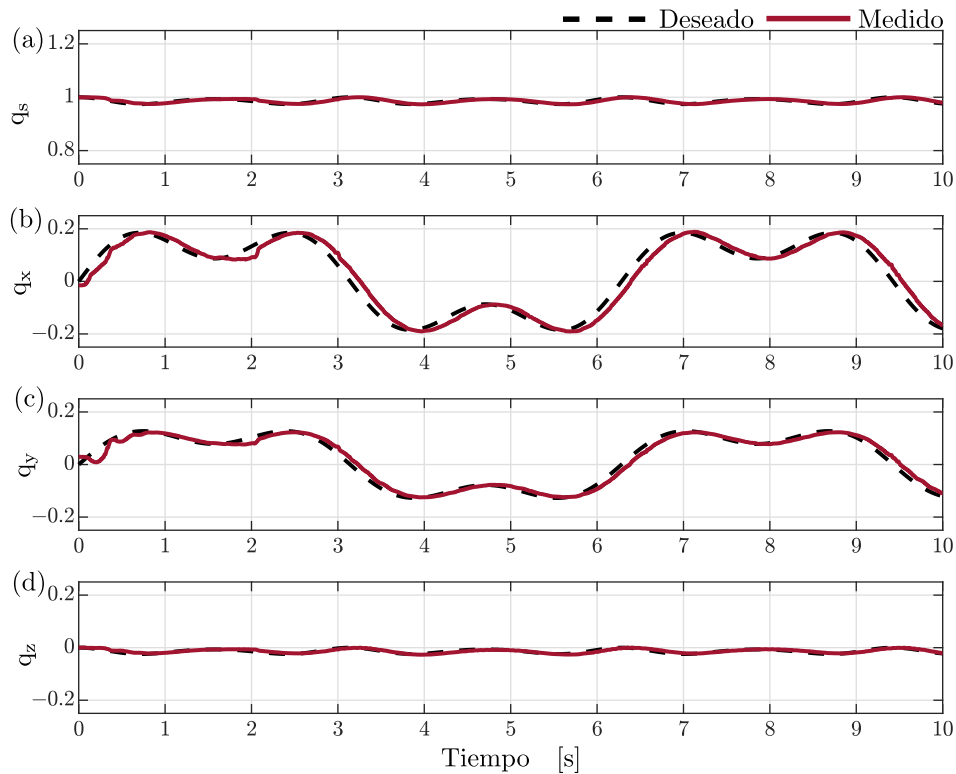
$$\omega(0) \approx 0 \text{ [rads/s]}. \quad (151)$$



**Figura 30.** Respuesta del controlador par-calculado en ángulos de Euler en seguimiento de trayectoria: (a) Seguimiento sobre el ángulo  $\phi$ , (b) Seguimiento sobre el ángulo  $\theta$  y (c) Seguimiento sobre el ángulo  $\psi$ .

El objetivo de control en este experimento es llevar al robot a través de una orientación deseada dada por los ángulos  $\phi$ ,  $\theta$  y  $\psi$ , es decir se encontrar un movimiento constante producido por los rotores

siguiendo una trayectoria predefinida en la ecuación (140) para evaluar el desempeño del controlador. Una vez terminado el experimento, se obtuvieron los resultados de la figura 30. De igual manera que el experimento anterior del controlador PD con precompensación, la dificultad de este experimento radica en que el robot no debe realizar giro sobre el eje  $\psi$  como se observa en la figura 30 (c), se debe mantener en  $\psi = 0$ . Como se puede observar en la figura 30 (a) se obtiene un seguimiento con un desfase, sin embargo el desfase es totalmente simétrico y o presenta perturbaciones a partir del 3 segundo, esto implica que en caso de una perturbación totalmente aplicada el controlador tendrá la capacidad total de regresar a su trayectoria. La respuesta sobre el eje  $\theta$  figura 30 (b) es mejor a comparación de la presentada sobre el eje  $\phi$ , cabe destacar que la amplitud de la señal sobre  $\theta$  es menor a comparación de la presentada sobre  $\phi$ .



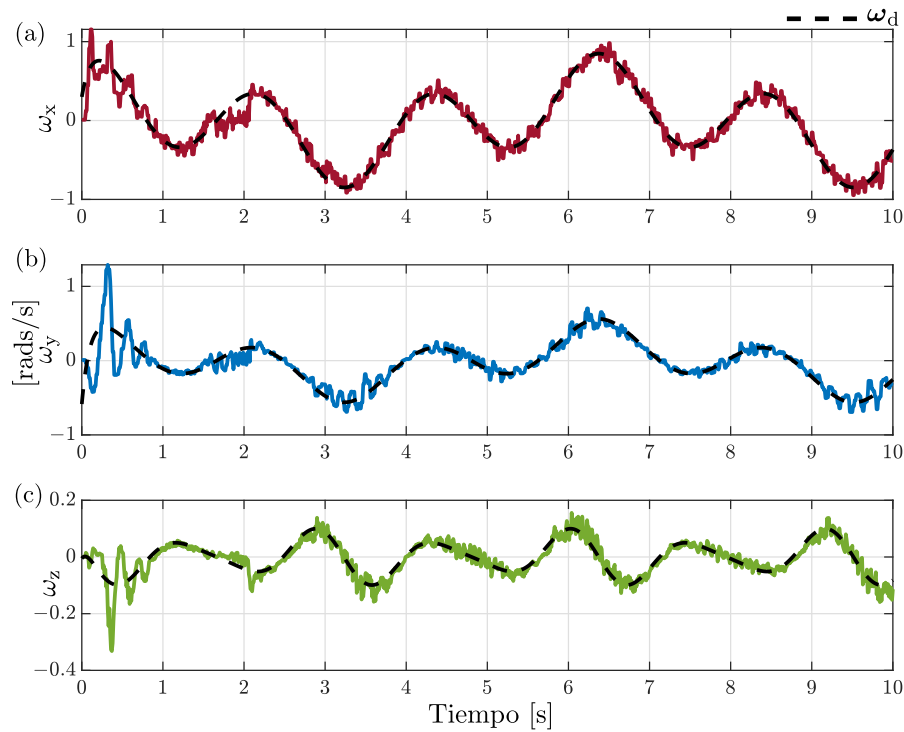
**Figura 31.** Respuesta del controlador par-calculado en cuaternión unitario en seguimiento de trayectoria: (a) Seguimiento parte escalar  $q_s$ , (b) Seguimiento sobre el Cuaternión  $x \rightarrow q_x$ , (c) Seguimiento sobre el Cuaternión  $y \rightarrow q_y$  y (d) Seguimiento sobre el Cuaternión  $z \rightarrow q_z$ .

También es posible observar su comportamiento mediante cuaternión unitario figura 31, donde se logra observar que también puede visualizarse la perturbación no intencional durante los segundos 1.8 y 2.2, sin embargo cumple su objetivo.

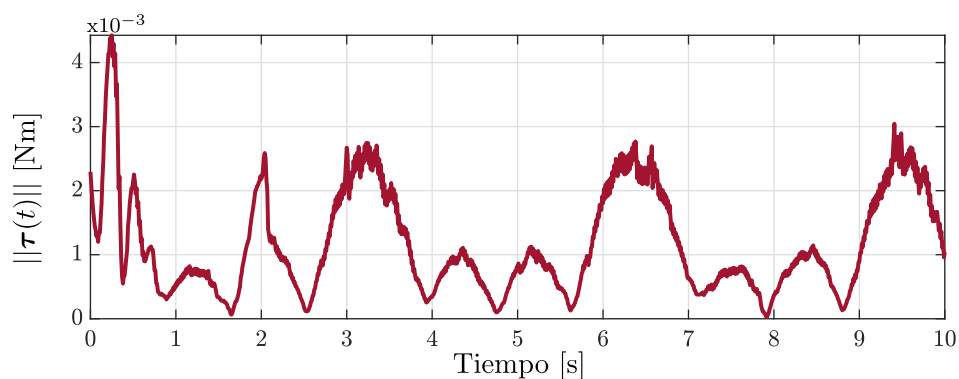
En la figura 32 se puede observar la respuesta de las velocidades angulares, la línea punteada negra representa la velocidad deseada sobre cada eje. Se puede observar que al inicio del experimento sobre los

tres ejes figura 32 (a)(b)(c) se presenta una respuesta agresiva, sin embargo el controlador fue capaz de regresar a la trayectoria. También se puede observar una breve perturbación durante aproximadamente los segundos 1.5 y 2 figura 32 (a) lo que significa que el controlador tendrá la capacidad de regresar nuevamente en caso de perturbaciones que ese presentaran durante el experimento.

Por otro lado se puede observar el comportamiento y evolución de la magnitud de la norma de los pares figura 33, se puede notar una serie de señales de mayor magnitud y estas son producto de los movimientos que se realizan sobre los ejes, dado que se encontraba fijo en la plataforma de pruebas.



**Figura 32.** Velocidades angulares deseadas y medidas con el controlador par-calculado en seguimiento de trayectoria: (a) Velocidad angular sobre el eje  $x$ , (b) Velocidad angular sobre el eje  $y$  y (c) Velocidad angular sobre el eje  $z$ .



**Figura 33.** Norma de los pares  $\|\tau(t)\|$  en el controlador par-calculado en seguimiento de trayectoria.

## 4.4. Control de posición

Cómo se mencionó en los Preliminares el robot aéreo se compone de dos subsistemas: orientación y posición. En esta sección se aborda el problema de seguimiento de trayectorias en el ambiente tridimensional para el subsistema de posición. Dada una trayectoria deseada  $\mathbf{p}_d(t) \in \mathbb{R}^3$  la cual se asume al menos tres veces diferenciable y la velocidad deseada  $\mathbf{v}_d = \dot{\mathbf{p}}_d(t) \in \mathbb{R}^3$  se busca que el la posición del robot  $\mathbf{p}(t)$  y su velocidad  $\mathbf{v}(t)$  sin el perfil de trayectoria deseado, es decir, se debe cumplir el siguiente objetivo de control

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_d(t) - \mathbf{p}(t) = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_d(t) - \mathbf{v}(t) = \mathbf{0}.$$

Para diseñar la ley de control de posición, el error de posición se define como

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_d(t) - \mathbf{p}, \quad (152)$$

el error de velocidad se define como

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_d(t) - \mathbf{v}. \quad (153)$$

Adicional para los propósitos del control se define la siguiente velocidad lineal de referencia  $\mathbf{v}_r$  y un estado auxiliar  $\mathbf{s}_p$  como:

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_d(t) + \Gamma_p \tilde{\mathbf{p}} \quad (154)$$

$$\mathbf{s}_p = \mathbf{v}_r - \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} + \Gamma_p \tilde{\mathbf{p}} \quad (155)$$

donde  $\Gamma_p$  es una ganancia positiva. El subsistema de posición es subactuado, es decir, se tienen mas variables a controlar que entradas de control. Para superar este problema se introduce una entrada virtual  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  definida como

$$\mathbf{u} = f R_d(\mathbf{q}_d) \mathbf{e}_3 \quad (156)$$

donde  $R_d \in SO(3)$  es la matriz de rotación deseada basada en cuaterniones.

Tomando en cuenta  $\|R_d(\mathbf{q}_d) \mathbf{e}_3\|^2 = \mathbf{e}_3^\top R_d^\top R_d \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^\top \mathbf{e}_3 = 1$ , la fuerza de empuje se puede calcular como

$$f = \|\mathbf{u}\|. \quad (157)$$

Por su parte el cuaternión deseado  $\mathbf{q}_d$  se calcula de acuerdo al algoritmo reportado en (Pliego-Jiménez,

2021). Teniendo en cuenta las ecuaciones (152), (153), (154), la ecuación de movimiento (155) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{v}} = -\Gamma_p \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{s}_p \quad (158)$$

$$m\dot{\mathbf{s}}_p = m(\dot{\mathbf{v}}_r + g\mathbf{e}_3) - \mathbf{u} - f(R - R_d)\mathbf{e}_3 \quad (159)$$

donde  $\dot{\mathbf{v}}_r = \dot{\mathbf{v}}_d(t) + \Gamma_p \tilde{\mathbf{v}}$  y  $f(R - R_d)\mathbf{e}_3$  es un término de interconexión entre los subsistemas de posición y orientación. Ahora el objetivo de la ley de control es el diseño de una ley virtual de entrada  $\mathbf{u}$  tal que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{s}_p(t) = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{0} \quad (160)$$

Para cumplir con el objetivo de control se propone la siguiente ley de control

$$\mathbf{u} = \Gamma_v \mathbf{s}_p + \alpha_p \tilde{\mathbf{p}} + m(\dot{\mathbf{v}}_r + g\mathbf{e}_3) \quad (161)$$

donde  $\Gamma_v \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y  $\alpha_p \in \mathbb{R}$  son ganancias positivas y constantes.

Las ecuaciones que gobiernan la dinámica en lazo cerrado del subsistema de posición están dadas por:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}} &= -\Gamma_p \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{s}_p \\ m\dot{\mathbf{s}}_p &= -\alpha_p \tilde{\mathbf{p}} - \Gamma_v \mathbf{s}_p - f(R - R_d)\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (162)$$

Dado que los controladores de orientación presentados en la sección anteriores garantizan que el error de orientación converge exponencialmente a cero, el término de interconexión puede considerarse como una perturbación que desvanece con el tiempo, es decir,  $f(R(t) - R_d(t))\mathbf{e}_3 \rightarrow \mathbf{0}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Para analizar la estabilidad del subsistema de posición se supondrá que la ley de control de orientación garantiza que los errores de orientación converjen más rápido a cero que los errores de posición (Antonelli et al., 2018; Lopez-Sanchez et al., 2023), decir,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_d \implies f(R(t) - R_d(t))\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ . Considere la función candidata de Lyapunov

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\alpha\|\tilde{\mathbf{p}}\|^2 + \frac{1}{2}m\|\mathbf{s}_p\|^2 \quad (163)$$

la cual trivialmente satisface

$$d_1(\|\tilde{\mathbf{p}}\|^2 + \|\mathbf{s}_p\|^2) \leq \mathcal{U} \leq d_2(\|\tilde{\mathbf{p}}\|^2 + \|\mathbf{s}_p\|^2) \quad (164)$$

donde  $d_1 = \frac{1}{2} \min\{\alpha, m\}$  y  $d_2 = \frac{1}{2} \max\{\alpha, m\}$ .

La derivada de  $\mathcal{U}$  a lo largo (162) con  $f(R(t) - R_d(t))\mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$  satisface

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{U}} &= -\alpha \tilde{\mathbf{p}}^\top \Gamma_p \tilde{\mathbf{p}} - \mathbf{s}_p^\top \Gamma_v \mathbf{s}_p \\ &\leq -\alpha \lambda_{\min}\{\Gamma_p\} \|\tilde{\mathbf{p}}\|^2 - \lambda_{\min}\{\Gamma_v\} \|\mathbf{s}_p\|^2 \\ &\leq -d_3 (\|\tilde{\mathbf{p}}\|^2 + \|\mathbf{s}_p\|^2) \\ &\leq -\frac{d_3}{d_2} \mathcal{U} \end{aligned} \tag{165}$$

donde  $d_3 = \min\{\alpha \lambda_p, \lambda_v\}$ . Dado que  $\dot{\mathcal{U}}$  es negativa definida las variables en lazo cerrado  $\tilde{\mathbf{p}}(t)$  y  $\mathbf{s}_p(t)$  están acotados. La desigualdad anterior también implica que el punto de equilibrio  $(\tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{s}_p) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$  es exponencialmente estable. El error de velocidad se puede expresar como  $\tilde{\mathbf{v}} = -\Gamma_p \tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{s}_p$ , dado que el lado derecho de la expresión anterior converge exponencialmente a cero, se puede concluir que el error de velocidad angular también converge exponencialmente a cero y por tanto se cumple con el objetivo de control. Para trabajar de una manera más corta, se hará uso de las siglas *PDP* haciendo referencia al controlador PD con precompensación y las siglas *CPC* haciendo referencia al controlador par-calculado.

#### 4.4.1. Experimento de seguimiento de trayectorias en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$ controlador PDP

Ahora el experimento consiste en la unión de los dos sistemas juntos el de orientación que se encuentra programado dentro del robot y el de traslación que se programa de manera externa y el cual hace uso del espacio tridimensional mencionado con anterioridad.

Para evaluar el desempeño del control de posición, se eligió la siguiente trayectoria deseada

$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} a_x \sin(\varpi_1 t) & a_y \sin(\varpi_2 t) & 0.35(1 - e^{-\varphi t}) + 0.02 \end{bmatrix}^\top \text{ [m]} \tag{166}$$

donde  $a_x = 0.4$ ,  $a_y = 0.6$ ,  $\varpi_1 = \pi/2$ ,  $\varpi_2 = \pi/4$  y  $\varphi = 0.75$ . La trayectoria deseada es una función continuamente diferenciable y corresponde a la curva Lemniscata en el plano  $xy$  mientras que en el eje  $z$  la trayectoria se mueve de forma suave desde la altura de 0.02 [m] a una altura de 0.35 [m].

En el primer experimento de seguimiento de trayectorias de posición y orientación se utilizó para el



subsistema de orientación el control PD con precompensación con las siguientes ganancias

$$K_p = \text{diag} \left( 0.025 \quad 0.0228 \quad 0.036 \quad 0.0165 \right) \quad (167)$$

$$K_v = \text{diag} \left( 0.004 \quad 0.0035 \quad 0.006 \quad 0.0003 \right). \quad (168)$$

Las ganancias del control de posición se eligieron de la siguiente manera

$$\Gamma_p = \text{diag} \left( 0.9930 \quad 0.6955 \quad 4.875 \right) \quad (169)$$

$$\Gamma_v = \text{diag} \left( 0.09945 \quad 0.109845 \quad 0.24 \right) \quad (170)$$

$$\alpha = 0.0001. \quad (171)$$

Los parámetros del robot son:

$$g = 9.81 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (172)$$

$$m = 0.0324[\text{Kg}]. \quad (173)$$

Inicialmente el robot se encuentra orientado y posicionado bajo las siguientes condiciones iniciales:

$$\boldsymbol{\eta}(0) = \left[ -0.0009 \quad -0.0028 \quad -0.0017 \right]^T \quad (174)$$

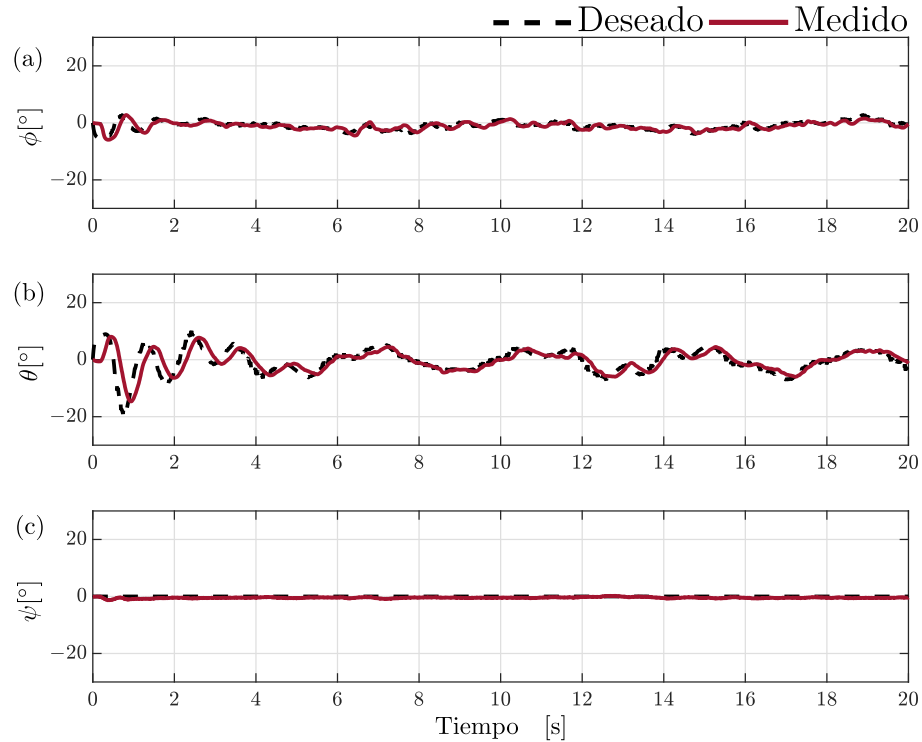
$$\boldsymbol{\omega}(0) = \mathbf{0}[\text{rad/s}] \quad (175)$$

$$\boldsymbol{p}(0) = \left[ 0.2780 \quad 0.3530 \quad 0.0240 \right]^T [m] \quad (176)$$

$$\boldsymbol{v}(0) = \mathbf{0}[\text{m/s}]. \quad (177)$$

Se puede observar en la figura 34 la respuesta del controlador en ángulos, la línea de color negro punteada son los ángulos deseados y la línea continua de color rojo son los ángulos obtenidos o medidos. Puede observarse en la figura 34 (a) el comportamiento del ángulo  $\phi(t)$  donde se observa muy claramente el seguimiento del ángulo deseado y del obtenido. Nótese que presenta al inicio un transitorio menor, esto es porque no tiene la dirección de frente del robot como es en el caso del ángulo  $\theta(t)$  figura 34(b). El transitorio que se muestra al inicio del experimento se debe al error inicial de posición en el eje  $y$  figura 34 (c). En el caso del ángulo  $\psi$  mostrado en la figura 34 (d) no se observa un transitorio y la trayectoria permanece casi constante, dado que cumple el objetivo de regulación como se observa en el inicio del experimento este se ve afectado por los movimientos naturales que requiere el robot para

seguir la trayectoria deseada, sin embargo, este eje no se encuentra girando y por lo tanto siempre debe ser  $\psi = 0$ .

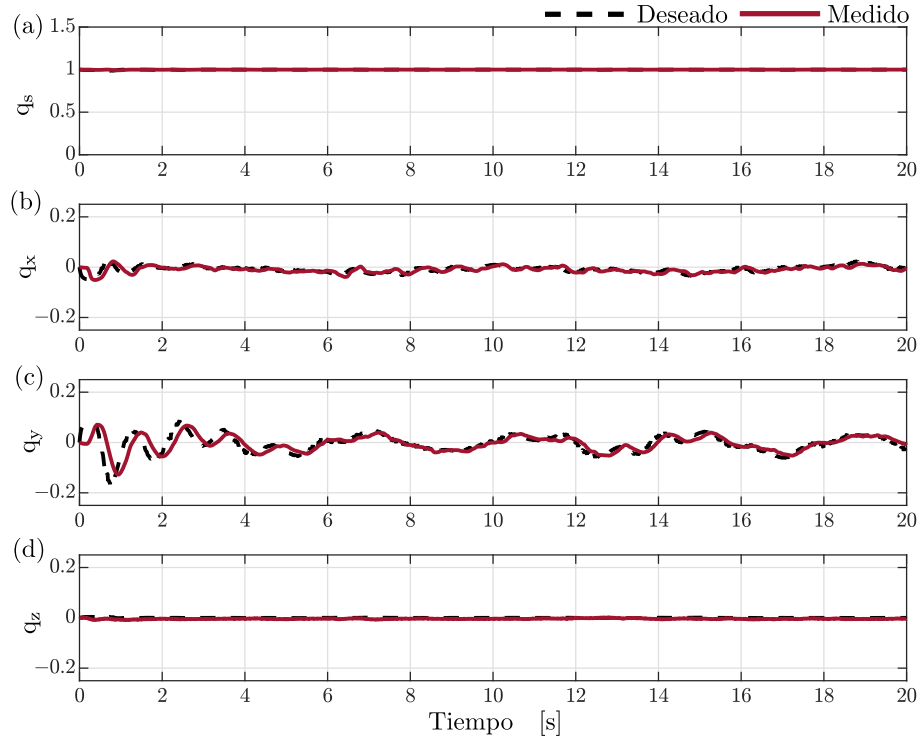


**Figura 34.** Control de orientación en posición de PD con precompensación en ángulos: (a) Ángulo sobre el eje  $\phi$ , (b) Ángulo sobre el eje  $\theta$  y (c) Ángulo sobre el eje  $\psi$ .

De la misma manera podemos observar la gráfica del cuaternión unitario figura 35, para el caso de  $q_s$  figura 35 (a) son variaciones muy pequeñas casi imperceptibles a simple vista,  $q_x$  figura 35 (b) equivalente a  $\phi$  se observa un comportamiento idéntico, para  $q_y$  figura 35 (c) equivalente a  $\theta$  y finalmente para  $q_z$  figura 35 (d) de igual forma es 0 como ocurre en  $\psi$ .

Para el caso de posición el robot hará el seguimiento de trayectoria de lemniscata, el cual viene dado por la ecuación (166). Se puede observar que el seguimiento mostrado de color rojo en  $p_x$  figura 36 (a) se muestra al inicio un transitorio hasta que la posición del robot converge a la trayectoria deseada en aproximadamente 6 segundos. Este transitorio se debe a que cuando inicia el vuelo del robot se encontraba en una posición diferente a la posición inicial deseada. Además del transitorio, se pueden observar pequeñas diferencias al momento de dar vuelta o incluso una ráfaga de viento hizo que se moviera de su posición pero este regreso. Un comportamiento similar se observó en la coordenada  $p_y$  mostrada en la figura 36(b). Se puede verificar que el robot inició en una posición diferente y esa es la razón por la que existe un transitorio al inicio como también se puede observar en el ángulo  $\theta$ , además se puede apreciar un mejor seguimiento de trayectoria a diferencia de  $p_x$ . Es importante hacer notar que la

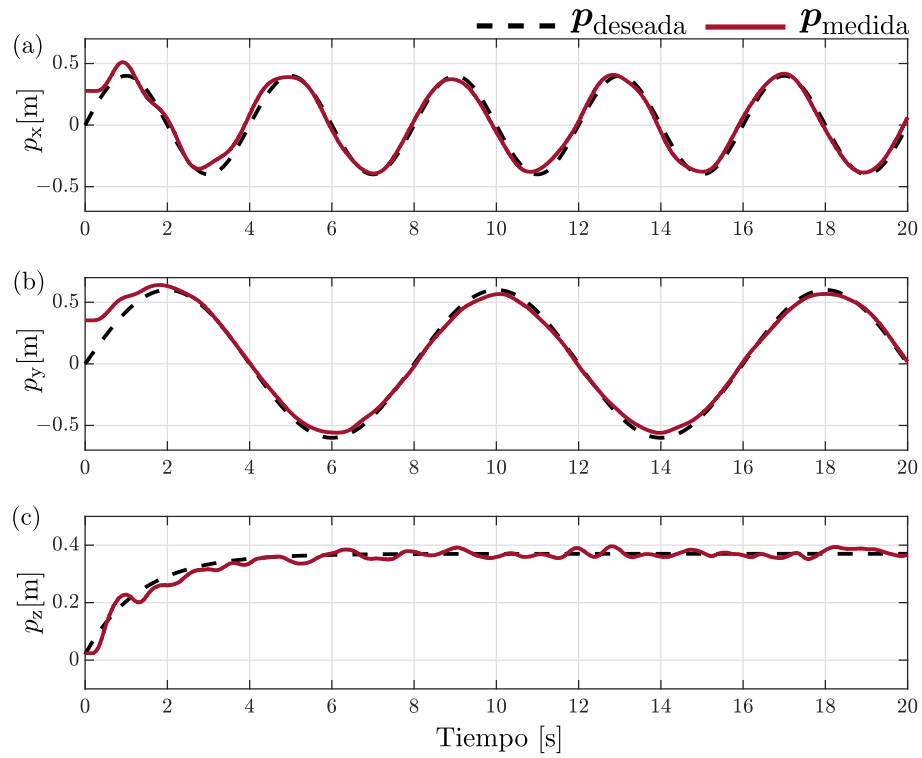
frecuencia de la trayectoria deseada en la coordenada  $x$  es mayor que en la coordenada  $y$ . En el caso de  $p_z$  figura 36 (c) este representa la altura y su objetivo es llegar a los 35 cm de altura como podemos observar se logra al altura deseada, sin embargo, se observan un serie de oscilaciones que se presentaron mientras se encontraba volando el robot.



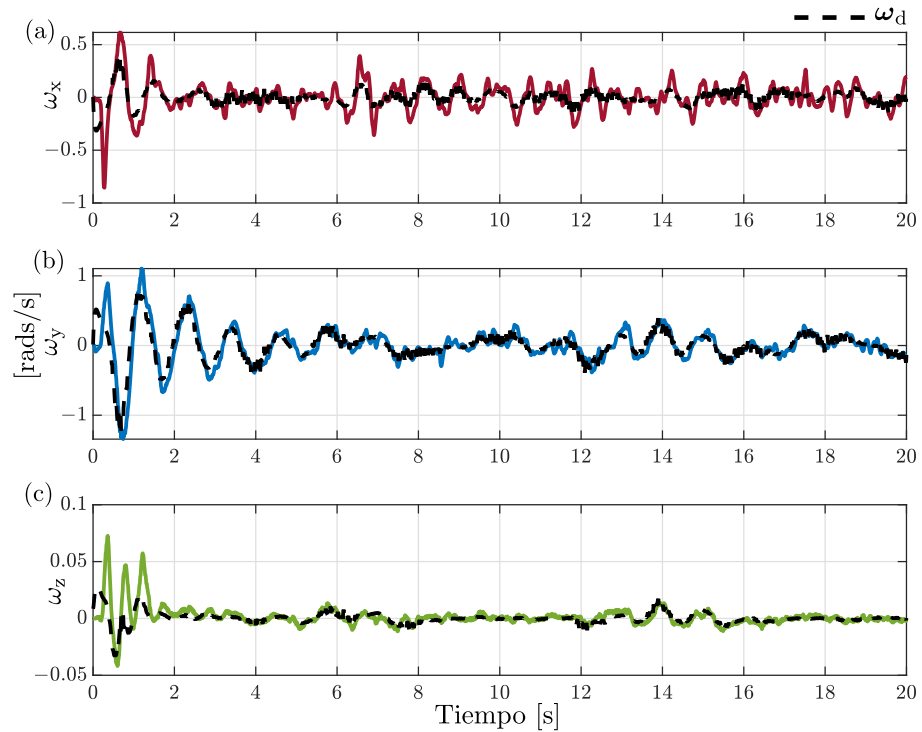
**Figura 35.** Control de orientación en posición de PD con precompensación en Cuaternión unitario: (a) Parte escalar  $q_s$ , (b) Cuaternión unitario en  $x \rightarrow q_x$ , (c) Cuaternión unitario en  $y \rightarrow q_y$  y (d) Cuaternión unitario en  $z \rightarrow q_z$ .

En la figura 37 se pueden observar la evolución en el tiempo de las velocidades angulares de cada eje. La línea punteada negra es la referencia de cada velocidad angular deseada. Cabe destacar que se observa un excelente seguimiento, sin embargo es posible notar la presencia de pequeños picos en  $\omega_x$  figura 37 (a) estos debidos a los movimientos que por naturaleza se presentan a la hora del seguimiento de trayectoria deseada, a diferencia de  $\omega_y$  figura 37 (a) la respuesta mejor a diferencia de  $\omega_x$  lo que nos lleva a pensar que también radica debido a las perturbaciones naturales que se presentan mientras se encuentra volando. A diferencia de  $\omega_z$  figura 37 (c) la señal obtenida es muy pequeña sin embargo se hace el seguimiento correctamente aunque se observe la presencia de ruido en la señal.

La evolución de la magnitud en la norma de los pares figura 38, se puede observar que al inicio comenzó con casi tres veces el valor de la magnitud final, sin embargo, aproximadamente después de 1.5 segundos la magnitud permanece casi constante.



**Figura 36.** Control de posición del controlador PD con precompensación: (a) Coordenada sobre  $x$ , (b) Coordenada sobre  $y$  y (c) Coordenada sobre  $z$ .



**Figura 37.** Velocidades angulares deseadas y medidas en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{S}^3$  en controlador PD con precompensación: (a) Velocidad angular sobre el eje  $x$ , (b) Velocidad angular sobre el eje  $y$  y (c) Velocidad angular sobre el eje  $z$ .

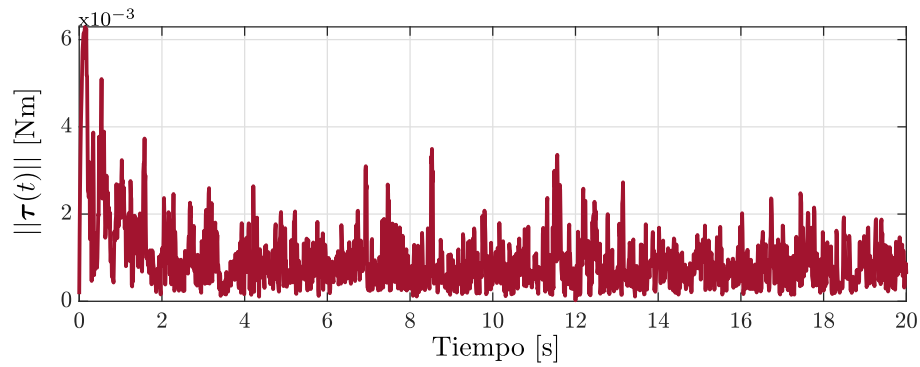


Figura 38. Norma de los pares  $\|\tau(t)\|$  del controlador PD con precompensación.

#### 4.4.2. Experimento de seguimiento de trayectorias en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$ controlador CPC

De igual forma que el en controlador PD con precompensación ahora el experimento consiste en la unión de los dos sistemas juntos el de orientación que se encuentra programado dentro del robot y el de traslación que se programa de manera externa y el cual hace uso del espacio tridimensional. Se hace evaluar el desempeño del control de posición se uso de trayectoria deseada antes mencionada en la ecuación (166), donde  $a_x = 0.4$ ,  $a_y = 0.6$ ,  $\varpi_1 = \pi/2$ ,  $\varpi_2 = \pi/4$  y  $\varphi = 0.75$ . La trayectoria deseada es una función continuamente diferenciable y corresponde a la curva Lemniscata en el plano  $xy$  mientras que en el eje  $z$  la trayectoria se mueve de forma suave desde la altura de 0.02 [m] a una altura de 0.35 [m].

Para el sistema subsistema de orientación para el controlador par-calculado se eligieron las siguientes ganancias:

$$K_p = \text{diag} \left( 300 \quad 900 \quad 900 \quad 900 \right) \quad (178)$$

$$K_v = \text{diag} \left( 300 \quad 60 \quad 60 \quad 60 \right) \quad (179)$$

Las ganancias del control de posición se eligieron de la siguiente manera:

$$\Gamma_p = \text{diag} \left( 1.8999 \quad 1.6995 \quad 9.785 \right) \quad (180)$$

$$\Gamma_v = \text{diag} \left( 0.09845 \quad 0.09845 \quad 0.220 \right) \quad (181)$$

$$\alpha = 0.0001 \quad (182)$$

Los parámetros del robot son:

$$g = 9.81 \left[ \frac{m}{s^2} \right] \quad (183)$$

$$m = 0.0324 [Kg]. \quad (184)$$

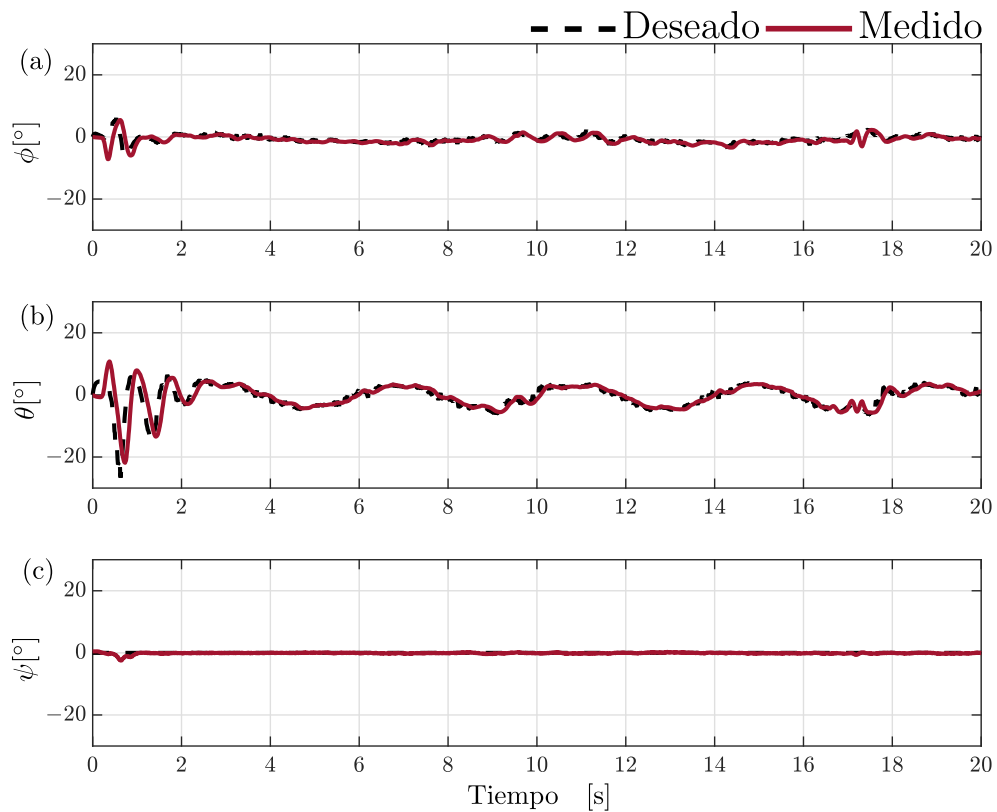
Inicialmente el robot se encuentra orientado y posicionado bajo las siguientes condiciones iniciales:

$$\boldsymbol{\eta}(0) = [-0.0008 \quad -0.0030 \quad 0.0084]^T \quad (185)$$

$$\boldsymbol{\omega}(0) = \mathbf{0} [\text{rad/s}] \quad (186)$$

$$\boldsymbol{p}(0) = [0.3700 \quad 0.5000 \quad 0.0230]^T [m] \quad (187)$$

$$\boldsymbol{v}(0) = \mathbf{0} [m/s]. \quad (188)$$

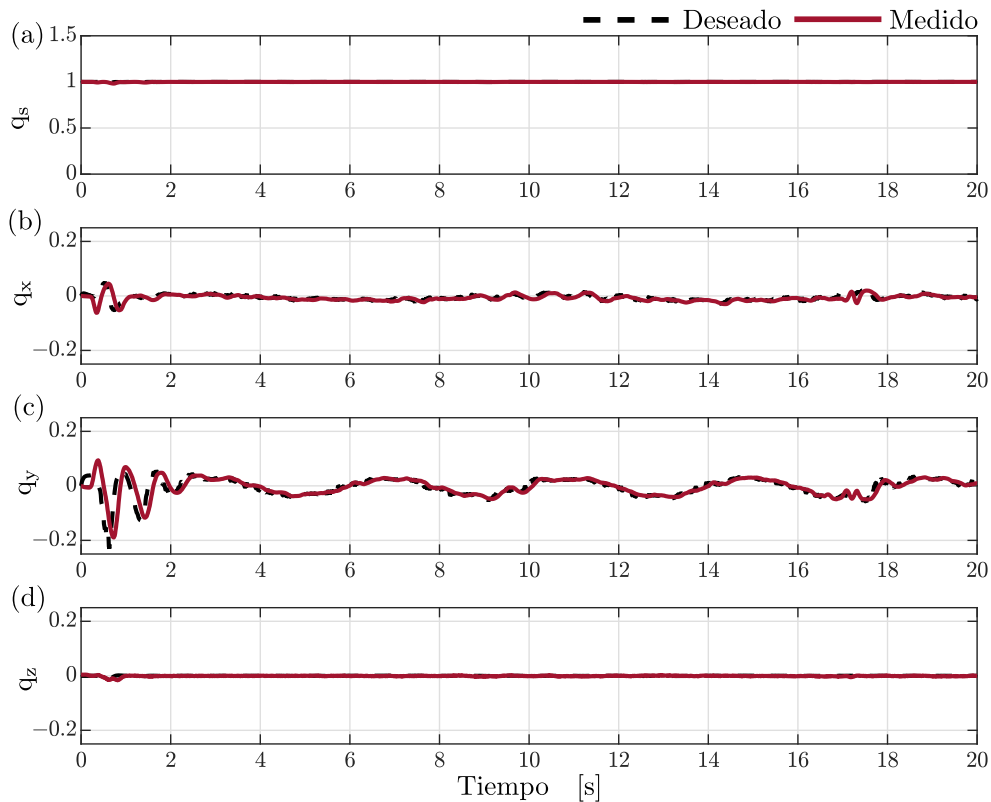


**Figura 39.** Seguimiento de orientación en posición del control par-calculado en ángulos de Euler: (a) Ángulo sobre el eje  $\phi$ , (b) Ángulo sobre el eje  $\theta$  y (c) Ángulo sobre el eje  $\psi$ .

Se puede observar en la figura 39 la respuesta del controlador en ángulos, la línea de color negro punteada son los ángulos deseados y la línea continua de color rojo son los ángulos obtenidos o medidos. Puede observarse en la figura39 (a) el comportamiento  $\phi(t)$  donde se observa muy claramente el seguimiento

del ángulo deseado y el medido, nótese que presenta un transitorio menor dado que no se encuentra en la frente del robot a diferencia del ángulo  $\theta(t)$  figura 39 (b) se observa durante los primeros dos segundos un desfase, este fue causado debido a que se presenta un error inicial de posición y el controlador regresa a la trayectoria deseada, posteriormente se observa un seguimiento correcto. En el caso del ángulo  $\psi(t)$  y mostrado en la figura 39 (c) no se observa un transitorio y permanece casi constante, dado que cumple el objetivo de regulación, sin embargo, es posible que sea afectado por los movimientos naturales que requiere el robot para seguir la trayectoria deseada por lo tanto este eje siempre debe de ser  $\psi = 0$ .

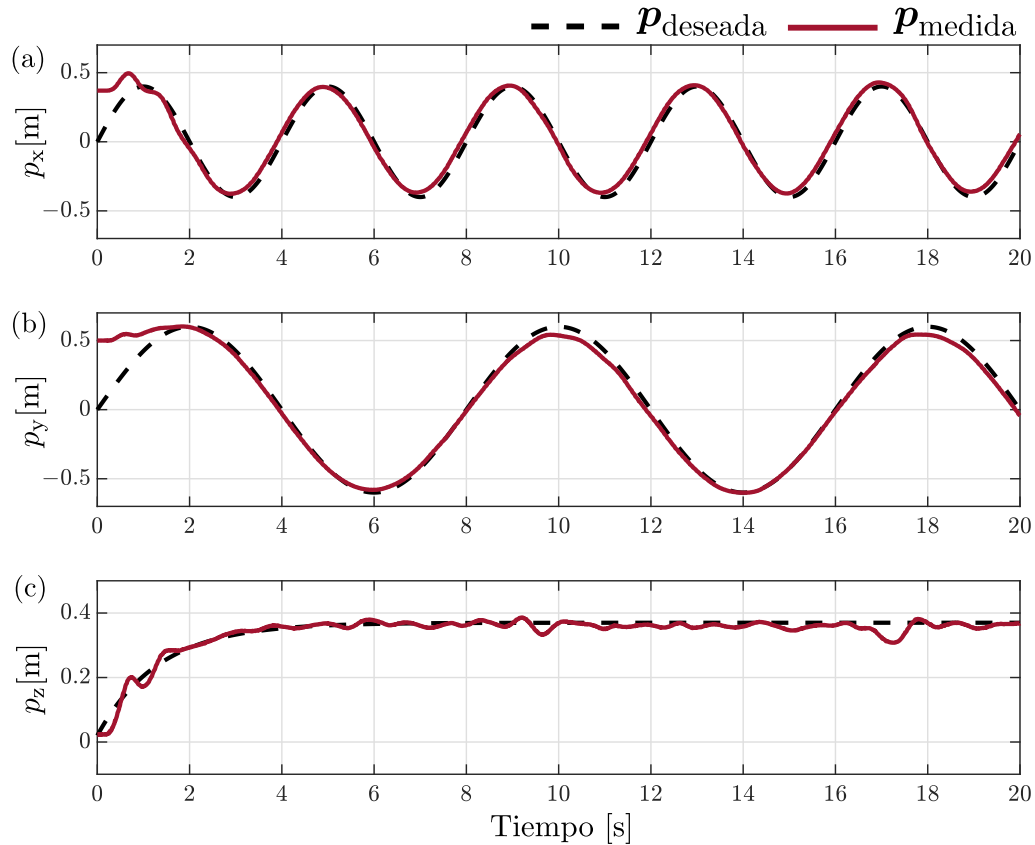
De la misma manera podemos observar la gráfica del cuaternión unitario figura 40 para el caso de  $q_s$  figura 40 (a) son variaciones muy pequeñas casi imperceptibles a simple vista, se observa un comportamiento muy idéntico para  $q_x$  equivalente a  $\phi$  y  $q_y$  equivalente a  $\theta$  cabe destacar que también es posible observar el desfase que ocurre debido al error de posición sobre  $\theta$ . Para  $q_z = 0$  como ocurre en  $\psi$ .



**Figura 40.** Seguimiento de orientación en posición del control par-calculado en Cuaternión unitario: (a) Parte escalar  $q_s$ , (b) Cuaternión unitario en  $x \rightarrow q_x$ , (c) Cuaternión unitario en  $y \rightarrow q_y$  y (d) Cuaternión unitario en  $z \rightarrow q_z$ .

Para el caso de posición el robot hará el seguimiento mostrado en la ecuación (166). Se puede observar que el seguimiento mostrado de color rojo en  $p_x$  figura 41 (a) se muestra un transitorio hasta que la posición converge a la trayectoria deseada en aproximadamente 3 segundos. Esto se debe a que cuando inicia el vuelo del robot se encontraba en una posición diferente a la inicial deseada. Se puede observar

una buena respuesta una vez el robot alcanzo la altura deseada. Un comportamiento similar ocurrió sobre la coordenada  $p_y$  figura 41 (b) sin embargo que durante los segundos 10 y 18 la señal no alcanzo la trayectoria debida a los decaimientos de energía proporcionados por la batería. Algo similar que se observe en la coordenada  $p_y$  se puede observa en la altura  $p_z$  figura 41 (c) cumplió su objetivo de llegar a los 35 cm de altura como podemos observar se logra la altura deseada, sin embargo se observan una seria de oscilaciones menores y es importantes observar que antes del segundo 10 y el 18 se observo una perdida de altura cuando se encontraba volando el robot.

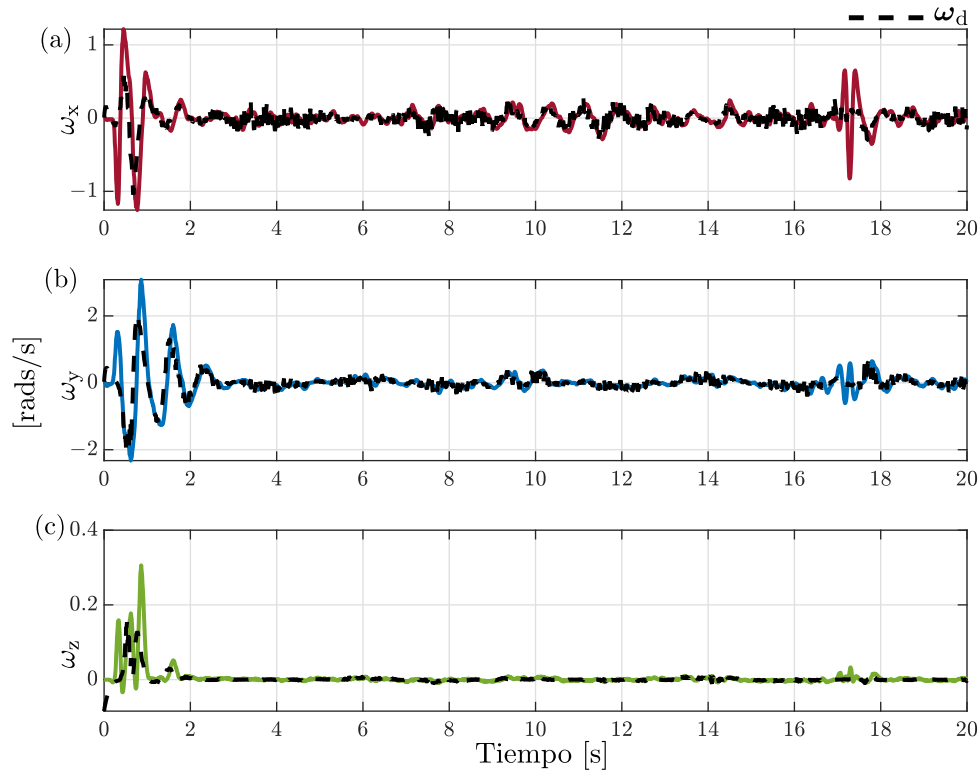


**Figura 41.** Control de posición del controlador par-calculado: (a) Coordenada sobre  $x$ , (b) Coordenada sobre  $y$  y (c) Coordenada sobre  $z$ .

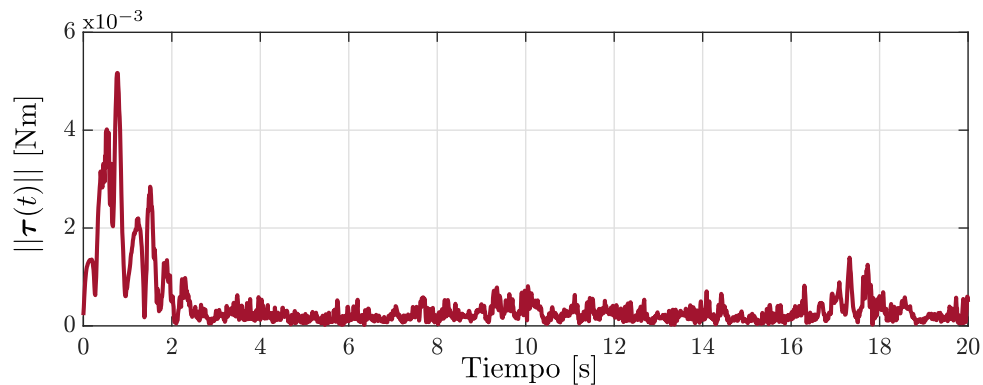
En la figura 42 se puede observar la respuesta de las velocidades angulares del controlador par-calculado, donde la línea punteada de color negro corresponde a cada una de las velocidades angulares deseadas. Se puede observar que en  $\omega_x$  figura 42 (a) se observa un transitorio y este se debió a la corrección del error de posición de la ya mencionada anteriormente. De igual forma se puede observar el comportamiento de la velocidad angular en  $\omega_y$  figura 42 (b) el transitorio del inicio. En  $\omega_z$  se observa un transitorio pequeño debido a los movimientos generados para su estabilización del robot figura 42 (c). También es posible visualizar una perturbación considerable durante los segundos 16 al 18 y este puede visualizarse por los decaimientos de energía proporcionados por la batería.



El comportamiento y evolución de la magnitud de la norma de los pares  $\|\tau\|$  figura 43 el el experimento se puede notar que en los primeros dos segundos se observa una respuesta rápida, la magnitud en general del comportamiento en el tiempo de  $\|\tau\|$  es pequeña sin embargo se puede notar los tres eventos que se presentaron en el experimento. El primero durante los primeros dos segundos que corresponde al error de posición, el segundo y tercero que son debidos al decaimiento de energía es en los segundos 9 – 10 y 17 – 18 sucesivamente.



**Figura 42.** Velocidades angulares deseadas y medidas en  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{S}^3$  en controlador par-calculado: (a) Velocidad angular sobre el eje  $x$ , (b) Velocidad angular sobre el eje  $y$  y (c) Velocidad angular sobre el eje  $z$ .

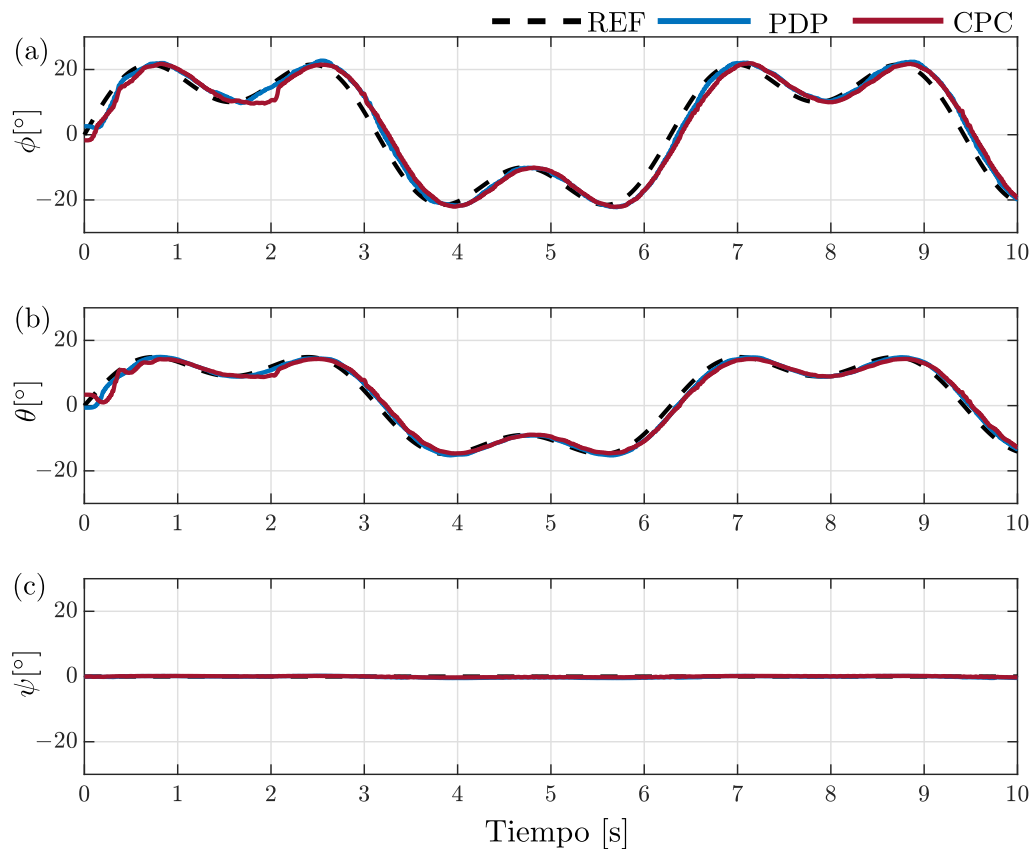


**Figura 43.** Norma de los pares con el controlador par-calculado.

## 4.5. Comparaciones entre ambos controladores

Si bien hay que aclarar que no es posible hacer una comparación directa ya que ambos controladores no poseen los mismos parámetros. Sin embargo si podemos observar como se comportaron los controladores ante el mismo objetivo de control. Los resultados presentados son debidos a los parámetros y condiciones realizados.

### 4.5.1. Comparaciones de seguimiento de trayectoria de ambos controladores



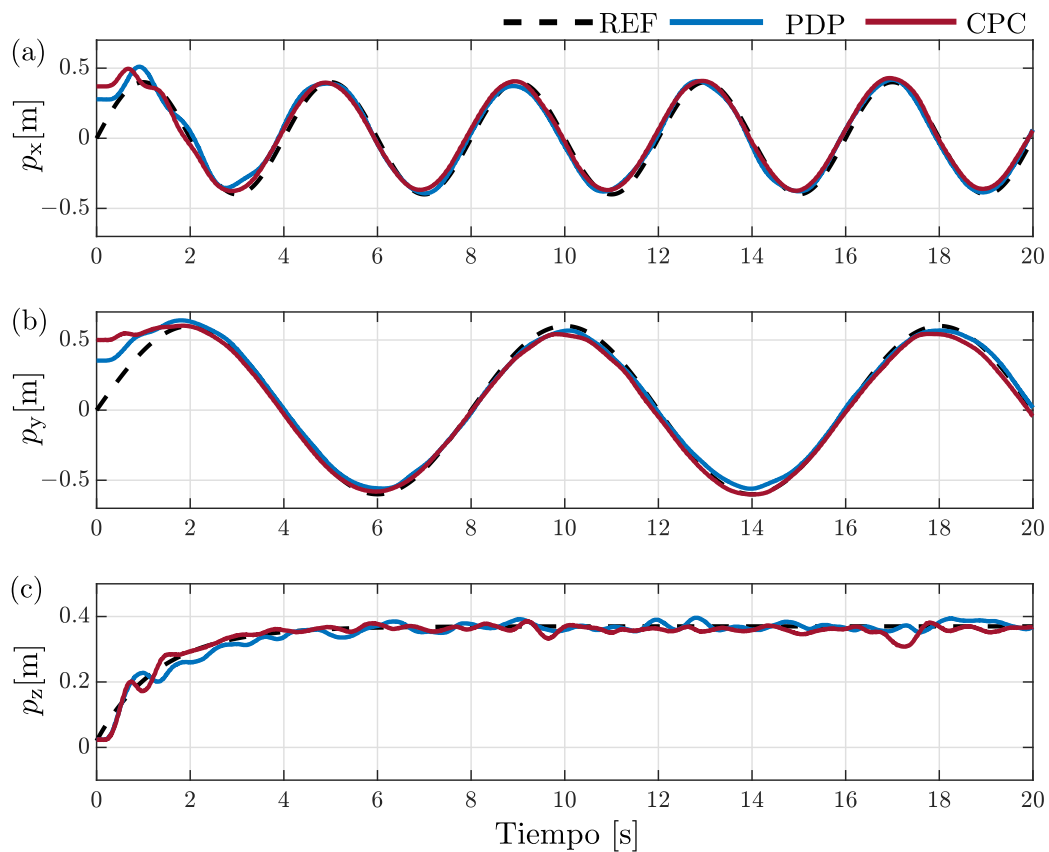
**Figura 44.** Comparación en seguimiento de trayectoria controlador PDP y CPC: (a) Ángulo sobre el eje  $\phi$ , (b) Ángulo sobre el eje  $\theta$  y (c) Ángulo sobre el eje  $\psi$ .

En la figura 44 se puede observar la evolución temporal de respuesta del control PD con precompensación y control par-calculado. Inicialmente la referencia o trayectoria deseada se puede visualizar como la línea de color negro punteada, para el control PD con precompensación es el azul y para el control par-calculado es representado por el color rojo. Sobre el ángulo  $\phi$  figura 44 (a) se puede apreciar que ambos controladores van muy precisos, sin embargo, se logra apreciar un desfase simétrico que ocurre en ambos

controladores, sin embargo después de un corto tiempo convergen a su trayectoria deseada. En  $\theta$  figura 44 (b) se aprecia un mejor seguimiento en la trayectoria a comparación de  $\phi$ . También se logra observar que en  $\psi$  figura 44 (c) se cumple el objetivo de control  $\psi = 0$  presentado anteriormente.

Cabe destacar que ambos experimentos se realizaron sobre la misma plataforma de pruebas e iniciaron en aproximadamente la misma orientación. En este experimento se observo mejor seguimiento por parte del controlador PD con precompensación a diferencia del controlador par-calculado. La trayectoria o referencia de posición se representa mediante la línea negra punteada, el controlador PD con precompensación por la línea de color azul y el controlador par-calculado representado mediante la línea de color rojo.

#### 4.5.2. Comparaciones de seguimiento de posición en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$ de ambos controladores

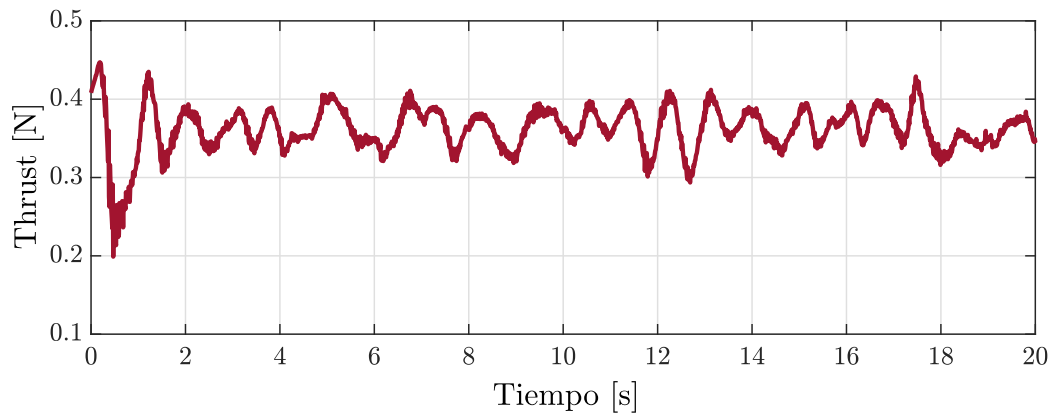


**Figura 45.** Comparación seguimiento en posición de los controladores PDP y CPC: (a) Coordenada sobre  $x$ , (b) Coordenada sobre  $y$  y (c) Coordenada sobre  $z$ .

En la figura 45 se puede observar el seguimiento de la trayectoria en posición del robot con ambos controladores. Se puede observar en la coordenada  $p_x$  figura 45 (a) ambos controladores convergen

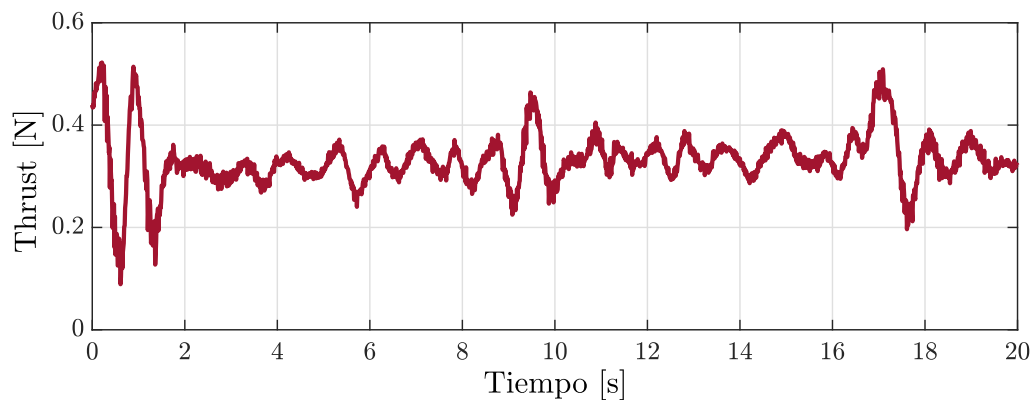
aproximadamente a los 4 segundos. Se logra observar que el controlador PDP se encuentra más cerca de la línea de referencia, sin embargo, es posible notar pequeños desfases cuando el robot se encuentra haciendo giros. En la figura 45 (b) se logra observar un seguimiento de trayectoria, sin embargo, durante los segundos 13 – 15 se logra observar un desfase por parte del controlador PDP después vuelve a converger a la trayectoria deseada. También se logra observar durante los segundos 9 – 11 y 17 – 19 que la señal por parte del CPC decae, comentado anteriormente que se ve afectado por la batería. En la figura 45 (c) se logra observar que ambos controladores cumplen el objetivo de control.

Cabe destacar en la figura 45 (c) se logra observar que el PDP línea azul, le llevo más tiempo en converger a la altura deseada, el trayecto fue más oscilante a comparación que el CPC que en esta prueba se observa que converge más rápido y menos oscilante, sin embargo, se presentaron dos decaimientos de energía.



**Figura 46.** Thrust empleado por el controlador PD con precompensación.

Si analizamos el comportamiento evolutivo de la señal de thrust figura 47 del controlador PD con precompensación, se logra observar que es constante y sin embargo se nota que hubo la presencia de muchos movimientos a la hora del experimento dado que la señal cambia de tamaño.



**Figura 47.** Thrust empleado por el controlador par-calculado.

El comportamiento evolutivo de la señal de thrust figura 47 del controlador par-calculado se observa que es más pequeña, sin embargo, se nota la presencia de los cambios que existieron durante el experimento, por ejemplo, se hace notar los transitorios en los segundos 1 – 2 debido al error de posición y los transitorios durante los segundos 8 – 10 y 16 – 18 debido al decaimiento de energía en la batería.

En el presente capítulo se desarrolló el modelo alternativo de orientación basado en el cuaternión unitario así como su matemática que lo involucra, se presentan los análisis correspondientes a cada algoritmo de control propuesto también se presenta cada uno de los experimentos propuestos y validados a través del mecanismo experimental y el entorno tridimensional controlado.

## Capítulo 5. Conclusiones

---

En esta tesis de maestría se obtuvieron los siguientes resultados:

Se obtuvo un modelo alternativo de orientación basado en el Cuaternión unitario.

Se diseñó y fabricó un mecanismo experimental para la prueba de los algoritmos de control.

Se validó el desempeño del algoritmo de control propuesto para el caso de regulación con el clásico PD, quien mostró muy buen desempeño en respuesta, sin embargo, dependerá de la aplicación.

Se validó el desempeño de los algoritmos de control propuestos para el seguimiento de trayectoria, se hizo uso de los controladores PD con precompensación y par-calculado. Al término del experimento, se concluyó que ambos son eficientes y presentan un desempeño muy idéntico. Sin embargo, el controlador PD con precompensación demostró mejor desempeño en el banco de pruebas a comparación del par-calculado.

Se validó el desempeño de cada algoritmo de control en un ambiente tridimensional bajo una trayectoria deseada. Al término se concluyó que ambos son eficientes y presentan un desempeño muy idéntico. Sin embargo, el controlador par-calculado demostró mejor desempeño

### Limitaciones

Si bien el cuaternión unitario está libre de singularidades no fue posible que el robot hiciera trayectorias agresivas y giros de  $360^\circ$  dado que su programación restringe las inclinaciones superiores a  $+90^\circ$  desactivando los rotores por seguridad y generando un bloqueo. Por otro lado también se encontró que las baterías utilizadas en los experimentos variaban los resultados, es decir cuando la batería se encontraba totalmente cargada o vacía mostraba resultados diferentes, por lo tanto no era fácil replicar el experimento con otra batería y se tenía que esperar a cargar nuevamente la batería para replicar el experimento. Las actualizaciones recientes en Software y Hardware vuelven obsoleta la implementación, dado que pierden compatibilidad los programas utilizados, uno de los más notorios fue en el uso de Linux, ROS y Python.

### Trabajo a futuro

Validación del modelo alternativo de orientación bajo otros esquemas de control.

Validación experimental mediante trayectorias agresivas y giros de  $360^\circ$ .

Hacer un modelo de orientación más completo para comparar si existe una diferencia.

## Literatura citada

- Abdelhay, S. & Zakriti, A. (2019). Modeling of a quadcopter trajectory tracking system using pid controller. volume 32, 564–571. Elsevier BV. <https://doi.org/10.1016/j.promfg.2019.02.253>.
- Abdessameud, A. & Tayebi, A. (2013). *Motion Coordination for VTOL Unmanned Aerial Vehicles: Attitude Synchronisation and Formation Control*. Springer London.
- Abdulkareem, A., Idowu, A. A., Oguntosin, V., & Popoola, O. M. (2022). Modeling and nonlinear control of a quadcopter for stabilization and trajectory tracking. *SSRN Electronic Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.4036208>.
- Alvarez-Munoz, J., Marchand, N., Guerrero-Castellanos, J. F., Tellez-Guzman, J. J., Escareno, J., & Rakotondrabe, M. (2018). Rotorcraft with a 3dof rigid manipulator: Quaternion-based modeling and real-time control tolerant to multi-body couplings. *International Journal of Automation and Computing*, 15(5), 547–558. <https://doi.org/10.1007/s11633-018-1145-8>.
- Antonelli, G., Cataldi, E., Arrichiello, F., Robuffo Giordano, P., Chiaverini, S., & Franchi, A. (2018). Adaptive trajectory tracking for quadrotor mavs in presence of parameter uncertainties and external disturbances. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 26(1), 248–254. <https://doi.org/10.1109/tcst.2017.2650679>.
- Arellano-Muro, C. A., Castillo-Toledo, B., Loukianov, A. G., Luque-Vega, L. F., & Gonzalez-Jimenez, L. E. (2015). Quaternion-based trajectory tracking robust control for a quadrotor. In *2015 10th System of Systems Engineering Conference (SoSE)*, 386–391. IEEE. <https://doi.org/10.1109/sysose.2015.7151938>.
- Bangura, M., Mahony, R., Lim, H., & Kim, H. J. (2014). An open-source implementation of a unit quaternion based attitude and trajectory tracking for quadrotors. 02-04-December-2014. [https://openresearch-repository.anu.edu.au/bitstream/1885/154085/2/01\\_Bangura\\_An\\_open-source\\_implementation\\_2014.pdf](https://openresearch-repository.anu.edu.au/bitstream/1885/154085/2/01_Bangura_An_open-source_implementation_2014.pdf).
- Barrientos, A. et al. (2007). *Fundamentos de robótica*. Biblioteca Hernán Malo González.
- Bashi, O. I., Hasan, W. Z. W., Azis, N., Shafie, S., & Wagatsuma, H. (2017). Unmanned aerial vehicle quadcopter: A review. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, 14. <https://doi.org/10.1166/jctn.2017.7049>.
- Baturone, A. O. (2005). *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo.
- Bouabdallah, S., Murrieri, P., & Siegwart, R. (2005). Towards autonomous indoor micro vtol. *Autonomous Robots*, 18. <https://doi.org/10.1007/s10514-005-0724-z>.
- Campa, R., Camarillo, K., & Arias, L. (2006). Kinematic modeling and control of robot manipulators via unit quaternions: Application to a spherical wrist. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. <https://doi.org/10.1109/cdc.2006.377155>.
- Cariño, J., Abaunza, H., & Castillo, P. (2015). Quadrotor quaternion control. In *2015 International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*, 825–831. <https://doi.org/10.1109/ICUAS.2015.7152367>.
- Castillo, P., Dzul, A., & Lozano, R. (2004). Real-time stabilization and tracking of a four-rotor mini rotorcraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12. <https://doi.org/10.1109/TCST.2004.825052>.

- Castillo, P., García, P., Lozano, R., & Albertos, P. (2007). Modelado y estabilización de un helicóptero con cuatro rotores. *RIAI - Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial*, 4. [https://doi.org/10.1016/S1697-7912\(07\)70191-7](https://doi.org/10.1016/S1697-7912(07)70191-7).
- Castillo, P., Lozano, R., & Dzul, A. E. (2005). *Modelling and control of mini-flying machines*. Springer Science & Business Media.
- Chou, J. C. (1992). Quaternion kinematic and dynamic differential equations. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 8. <https://doi.org/10.1109/70.127239>.
- Colmenares-Vazquez, J., Marchand, N., Castillo, P., & Gomez-Balderas, J. E. (2017). An intermediary quaternion-based control for trajectory following using a quadrotor. In *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, volume 2017-September. <https://doi.org/10.1109/IRoS.2017.8206491>.
- Craig, J. J. (2006). *Introduction to robotics*. Pearson Educacion.
- Espindola, E. & Tang, Y. (2024). Attitude tracking for rigid bodies using vector and biased gyro measurements. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 69. <https://doi.org/10.1109/TAC.2023.3319460>.
- Espíndola, E. & Tang, Y. (2023). A four-dof lagrangian approach to attitude tracking. *Automatica*, 151. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2023.110880>.
- Fjellstad, O. E. & Fossen, T. I. (1994a). Position and attitude tracking of auv's: A quaternion feedback approach. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 19. <https://doi.org/10.1109/48.338387>.
- Fjellstad, O. E. & Fossen, T. I. (1994b). Quaternion feedback regulation of underwater vehicles. In *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications*, volume 2. <https://doi.org/10.1109/cca.1994.381209>.
- Fresk, E. & Nikolakopoulos, G. (2013). Full quaternion based attitude control for a quadrotor. In *2013 European Control Conference, ECC 2013*, 3864–3869. IEEE. <https://doi.org/10.23919/ecc.2013.6669617>.
- Förster, J. (2015-08). System identification of the crazyflie 2.0 nano quadcopter. [Bachelor Thesis, ETH Zurich], Zurich.
- Islam, M., Okasha, M., & Sulaeman, E. (2019). A model predictive control (mpc) approach on unit quaternion orientation based quadrotor for trajectory tracking. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17. <https://doi.org/10.1007/s12555-018-0860-9>.
- Kelly, R. & García, E. (2002). On transpose jacobian-based regulators using unit quaternions: An energy shaping approach. 15. <https://doi.org/10.3182/20020721-6-es-1901.00875>.
- Kelly, R. & Santibáñez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Automática robótica. Pearson Educación-Prentice Hall,.
- Kelly, R., Santibáñez, V., & Loría, A. (2005). *Control of robot manipulators in joint space*, volume 693. Springer-Verlag.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*, (3a ed.). Prentice-Hall.
- Kuipers, J. B. (1999). *Quaternions and Rotation Sequences*. Princeton University Press, Princeton.



- Lee, K. U., Choi, Y. H., & Park, J. B. (2017). Backstepping based formation control of quadrotors with the state transformation technique. *Applied Sciences*, 7(11), 1170. <https://doi.org/10.3390/ap7111170>.
- Lizarralde, F. & Wen, J. T. (1996). Attitude control without angular velocity measurement: A passivity approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41. <https://doi.org/10.1109/9.486654>.
- Lopez-Sanchez, I., Pérez-Alcocer, R., & Moreno-Valenzuela, J. (2023). Trajectory tracking double two-loop adaptive neural network control for a quadrotor. *Journal of the Franklin Institute*, 360(5), 3770–3799. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2023.01.029>.
- Luukkonen, T. (2011). Modelling and control of quadcopter. *Independent research project in applied mathematics, Espoo*, 22(22). [https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11\\_public.pdf](https://sal.aalto.fi/publications/pdf-files/eluu11_public.pdf).
- Madani, T. & Benallegue, A. Control of a quadrotor mini-helicopter via full state backstepping technique. In *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE. <https://doi.org/10.1109/cdc.2006.377548>.
- Madeiras, J., Cardeira, C., & Oliveira, P. (2024). Position and attitude tracking controllers using lyapunov transformations for quadrotors. *Journal of Intelligent amp; Robotic Systems*, 110(1). <https://doi.org/10.1007/s10846-023-02016-9>.
- Mahony, R., Kumar, V., & Corke, P. (2012). Multirotor aerial vehicles: Modeling, estimation, and control of quadrotor. *IEEE Robotics amp; Automation Magazine*, 19(3). <https://doi.org/10.1109/mra.2012.2206474>.
- Mo, R., Cai, H., & Dai, S.-L. (2019). Unit quaternion based attitude control of an aerial manipulator. *IFAC-PapersOnLine*, 52(24), 190–194. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2019.12.405>.
- Mukundan, R. (2012). *Advanced methods in computer graphics: with examples in OpenGL*, volume 9781447123408. Springer Science & Business Media.
- Nonami, K., Kendoul, F., Suzuki, S., Wang, W., & Nakazawa, D. (2009). Guidance and nonlinear control system for autonomous flight of minirotorcraft unmanned aerial vehicles. *Journal of Field Robotics*, 27(3), 311–334. <https://doi.org/10.1002/rob.20327>.
- Nonami, K., Kendoul, F., Suzuki, S., Wang, W., & Nakazawa, D. (2010). *Autonomous flying robots: unmanned aerial vehicles and micro aerial vehicles*. Springer Science & Business Media.
- Pliago-Jiménez, J. (2021). Quaternion-based adaptive control for trajectory tracking of quadrotor unmanned aerial vehicles. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 35(5), 628–641. <https://doi.org/10.1002/acs.3218>.
- Salamin, E. (1979). Application of quaternions to computation with rotations. Working Paper, Stanford AI Lab.
- Sciavicco, L. & Siciliano, B. (2012). *Modelling and control of robot manipulators*. Springer Science & Business Media.
- Shivarama, R. & Fahrenthold, E. P. (2004). Hamilton's equations with euler parameters for rigid body dynamics modeling. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 126(1), 124–130. <https://doi.org/10.1115/1.1649977>.

- Shoemake, K. (1985). Animating rotation with quaternion curves. In *Proceedings of the 12th annual conference on Computer graphics and interactive techniques - SIGGRAPH '85*, SIGGRAPH '85, 245–254. ACM Press. <https://doi.org/10.1145/325334.325242>.
- Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2020). *Robot modeling and control*. John Wiley & Sons.
- Stingu, E. & Lewis, F. (2009). Design and implementation of a structured flight controller for a 6dof quadrotor using quaternions. In *2009 17th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 1233–1238. IEEE. <https://doi.org/10.1109/med.2009.5164715>.
- Tayebi, A. (2008). Unit quaternion-based output feedback for the attitude tracking problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(6), 1516–1520. <https://doi.org/10.1109/tac.2008.927789>.
- Tayebi, A. & McGilvray, S. (2006). Attitude stabilization of a vtol quadrotor aircraft. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14(3), 562–571. <https://doi.org/10.1109/tcst.2006.872519>.
- Thienel, J. & Sanner, R. M. (2003). A coupled nonlinear spacecraft attitude controller and observer with an unknown constant gyro bias and gyro noise. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48. <https://doi.org/10.1109/TAC.2003.819289>.
- Wang, P., Man, Z., Cao, Z., Zheng, J., & Zhao, Y. (2016). Dynamics modelling and linear control of quadcopter. In *2016 International Conference on Advanced Mechatronic Systems (ICAMechS)*. IEEE. <https://doi.org/10.1109/icamechs.2016.7813499>.
- Wen, J.-Y. & Kreutz-Delgado, K. (1991). The attitude control problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(10), 1148–1162. <https://doi.org/10.1109/9.90228>.
- Xian, B., Diao, C., Zhao, B., & Zhang, Y. (2014). Nonlinear robust output feedback tracking control of a quadrotor uav using quaternion representation. *Nonlinear Dynamics*, 79(4), 2735–2752. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1843-x>.
- Xuan-Mung, N. & Hong, S.-K. (2019). Improved altitude control algorithm for quadcopter unmanned aerial vehicles. *Applied Sciences*, 9(10), 2122. <https://doi.org/10.3390/app9102122>.
- Yuan, J. (1988). Closed-loop manipulator control using quaternion feedback. *IEEE Journal on Robotics and Automation*, 4(4), 434–440. <https://doi.org/10.1109/56.809>.
- Zhao, B., Xian, B., Zhang, Y., & Zhang, X. (2015). Nonlinear robust adaptive tracking control of a quadrotor uav via immersion and invariance methodology. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(5), 2891–2902. <https://doi.org/10.1109/tie.2014.2364982>.
- Zhao, S., Dong, W., & Farrell, J. A. (2013). Quaternion-based trajectory tracking control of vtol-uavs using command filtered backstepping. In *2013 American Control Conference*. IEEE. <https://doi.org/10.1109/acc.2013.6579970>.