

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el SECIHTI (Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE © 2025, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Maestría en Ciencias en Oceanografía Física

Trayectorias directas que transportan sargazo en el Mar Caribe Occidental

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Nelly Grethel Gutiérrez González

Ensenada, Baja California, México

2025

Tesis defendida por

Nelly Grethel Gutiérrez González

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Julio Sheinbaum Pardo
Director de tesis

Dr. Luis Zavala Sansón

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Dr. Francisco Javier Beron-Vera

Dra. María Josefina Olascoaga Amuchastegui



Dra. María Tereza Cavazos Pérez
Coordinadora del Posgrado en Oceanografía Física

Dra. Ana Denise Re Araujo
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Nelly Grethel Gutiérrez González como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Oceanografía Física.

Trayectorias directas que transportan sargazo en el Mar Caribe Occidental

Resumen aprobado por:

Dr. Julio Sheinbaum Pardo
Director de tesis

Los problemas ocasionados por las recurrentes arribazones de sargazo a las costas del Caribe Mexicano generan la necesidad de gestionar y, en términos de lo que compete a este trabajo, anticipar los caminos que transportan sargazo desde el Mar Caribe hasta las costas. Se obtienen trayectorias de partículas de pseudo-sargazo en el Mar Caribe, utilizando datos horarios de reanálisis para vientos (ERA5) y diarios para corrientes (Glorys12). La configuración empleada como condición inicial son mallas diarias llenas con 8,700 partículas uniformemente distribuidas en cuadrículas con resolución de 0.12° . Se deja evolucionar a las partículas con datos correspondientes al año 2021 durante 15 días. Las trayectorias obtenidas se emplean para obtener matrices de transición de probabilidades a escala mensual, con las cuales es posible obtener las distribuciones más probables de sargazo a lo largo del año, dada una distribución inicial. Haciendo uso de la Teoría de Caminos de Transición, se obtienen ciertas cantidades estadísticas de interés, que revelan que las trayectorias más directas que transportan sargazo a las costas del Caribe Mexicano tienen su origen en el suroeste del Caribe occidental.

Palabras clave: Sargazo, Cadena de Markov, Caribe occidental

Abstract of the thesis presented by Nelly Grethel Gutiérrez González as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in .

Direct Trajectories Transporting Sargassum in the Western Caribbean Sea

Abstract approved by:

Dr. Julio Sheinbaum Pardo
Thesis Director

The problems caused by the recurrent arrivals of sargassum on the coasts of the Mexican Caribbean generate the need to manage and anticipate the paths that transport sargassum from the Caribbean Sea to the coasts. Trajectories of virtual sargassum particles in the western Caribbean Sea are obtained, using hourly reanalysis data for winds (ERA5) and daily data for currents (Glorys12). The initial configuration consists of daily grids filled with 8,700 particles uniformly distributed in grids with a resolution of 0.12° . The particles are allowed to evolve with data corresponding to the year 2021 for 15 days. The trajectories obtained are used to obtain probability transition matrices on a monthly scale, with which it is possible to obtain the most probable distributions of sargassum throughout the year, given an initial distribution. Using the Transition Path Theory, certain statistical quantities of interest are obtained, which reveal that the most direct paths that transport sargassum to the Mexican Caribbean coasts have their origin in the southwestern part of the western Caribbean.

Keywords: Sargassum, Markov chain, western Caribbean.

Dedicatoria

Al pueblo de México, pues a través de su beneplácito he podido financiar mi educación, porque nada he logrado sola.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE) y a la Secretaría de Ciencias, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), con un especial reconocimiento a todo el andamiaje humano que los hace posibles.

Al Dr. Julio Sheinbaum, director de esta tesis, por ser una guía amable y creativa. A mi comité, el Dr. Eugenio, el Dr. Javier, la Dra. Josefina y el Dr. Luis, por sus valiosos consejos y su constante disposición para brindarme apoyo.

A mis amigos, dentro y fuera de esta etapa académica: Maggie, Carlos, Dani, John, Constanza, Miri, Ernesto, Miyaki y Lucy, por su cariño y por sostenerme en los momentos más difíciles. Un agradecimiento especial a Francisco, por habernos encontrado y por crecer juntos.

A mis hermanos, Anel y David, quienes son una de mis principales motivaciones; a mi mamá, Julia, por su amor y ternura; a mi papá, Ernesto, por su constante apoyo. A mis abuelos, en especial a mi papá Pedro, por ser el mejor ejemplo del ser humano que quiero llegar a ser.

Al pueblo de México, porque una dedicatoria nunca será suficiente.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	vii
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Marco teórico	3
1.2. Antecedentes	7
1.3. Justificación	11
1.4. Pregunta científica	11
1.5. Objetivos	12
1.5.1. Objetivo general	12
1.5.2. Objetivos específicos	12
Capítulo 2. Metodología	
2.1. Región de estudio y su variabilidad	13
2.2. Matriz de Transición de Probabilidades	16
2.3. Distribuciones Invariantes	20
2.4. Teoría de Caminos de Transición	21
2.5. Trayectorias Virtuales	23
2.6. Diseño de experimentos	26
Capítulo 3. Resultados	
3.1. Variabilidad de corrientes y vientos del Caribe occidental en 2021	31
3.2. Evaluación de las Trayectorias Virtuales	33
3.3. Geografía Lagrangiana	36
3.4. Trayectorias Directas	43
Capítulo 4. Discusión	
Capítulo 5. Conclusiones	
Literatura citada	58

Lista de figuras

Figura	Página
1. (a) Cuencas de atracción, es decir, zonas donde las trayectorias tienen origen y terminan recurrentemente en el mar de los sargazos (azul), el golfo de México (verde) y el golfo de Guinea (rojo).(b) Distribución de trayectorias reactivas, donde los colores indican los bins con mayor densidad de trayectorias reactivas. En amarillo intenso se muestra dos rutas principales dónde tienen lugar los cuellos de botella de las transiciones. Figura tomada de Beron-Vera et al. (2022).	8
2. Densidad de trayectorias de 7 días del sargazo que potencialmente aterrizan en las costas del Caribe mexicano, construidas a partir de trayectorias que parten de las costas de Quintana Roo y retroceden 7 días. Cada fila está asociada a un mes, mientras que las columnas corresponden a diferentes factores de arrastre del viento. Figura tomada de Lara-Hernández et al. (2024).	9
3. Estructuras Coherentes lagrangianas Climatológicas (cLCS) en el oeste del mar Caribe para julio. Los colores indican la fuerza de atracción; rojo se asocia a las atracciones más fuertes de las parcelas cercanas y, por otro lado, blanco indica regiones aisladas. Cada panel se asocia al uso de solo corrientes, corrientes más 1 % de viento y corrientes más 2 % de viento en los paneles izquierdo, centro y derecho, respectivamente. Figura tomada de Allende-Arandía et al. (2023).	10
4. Las flechas azules muestran las corrientes oceánicas superficiales dominantes y las rojas los vientos dominantes en superficie en el Caribe occidental.	14
5. Parámetros geométricos de las elipses de variabilidad, donde a es el semieje mayor y b el semieje menor, definidos por los eigenvectores de la matriz de covarianza de las series de tiempo de velocidad en un punto. El ángulo de la elipse respecto a los ejes originales es θ . Figura tomada de Waterman & Lilly (2015).	16
6. Dominio de la cadena de Markov, donde los estados accesibles están definidos por una malla regular cuadrículada. (a) Es el caso con dominio cerrado y (b) abierto.	17
7. En ambas figuras se muestra un dominio cerrado de fluido donde toma lugar la cadena de Markov. En (a) se ejemplifica la geografía Lagrangiana y en (b) se observan dos zonas de interés, siendo A la salida, B el objetivo y las curvas en rojo son las trayectorias reactivas que van en dirección $A \rightarrow B$	21
8. Ambas imágenes muestran la distribución del Índice Alternativo de Algas Flotantes Acumulativo de 7 días (AFAI-7) para valores superiores a 0.0035, representados en color verde. El contorno azul delimita la región de interés considerada para la validación de la distribución de sargazo. La imagen (a) corresponde a la distribución del AFAI-7 del 24 de junio de 2021, mientras que la imagen (b) muestra la distribución siete días después. En (b) también se incluyen las posiciones finales de trayectorias virtuales simuladas con OpenDrift, cuyos puntos de origen corresponden a los marcadores verdes dentro del contorno azul en (a). Los colores indican distintos niveles de arrastre por el viento: naranja para 1 %, amarillo para 2 % y rojo para 3 %.	24
9. Trayectorias de 15 días de 8700 partículas que se inicializan el 01 de julio del 2021, sembradas en el mar Caribe occidental y advectadas por las corrientes y un factor de arrastre con el viento de 0.01. El color verde y azul son las posiciones iniciales y finales, respectivamente; mientras que las partículas que se han varado en las costas se resaltan en rojo.	27

10. (a) Autocorrelación y (b) su integral a lo largo del tiempo para trayectorias de longitud correspondientes a 15 días. Los colores rojo y amarillo corresponden a la descomposición del movimiento en componentes zonal y meridional, respectivamente. Las líneas horizontales azules en (b) corresponden a la integración de la autocorrelación hasta el primer cero e indican la escala Lagrangiana de tiempo para cada dirección. 29
11. En rojo y amarillo se muestran las elipses de variabilidad de velocidades de las corrientes oceánicas, el color se asigna dependiendo del ángulo de inclinación de la elipse: rojo para inclinaciones entre $(0, \pi/2]$ y amarillo entre $[-\pi/2, 0)$, midiendo el ángulo desde la horizontal y asociando valores positivos a ángulos barridos hacia el norte y positivos hacia el sur. En vectores azules se presentan las corrientes medias mensuales. 32
12. Los vectores azules corresponden a las velocidades del viento medias mensuales a 10 m. Las elipses de variabilidad pueden ser rojas o amarillas: el color se asigna dependiendo del ángulo de inclinación de la elipse, rojo para inclinaciones entre $(0, \pi/2]$ y amarillo entre $[-\pi/2, 0)$, midiendo el ángulo desde la horizontal y asociando valores positivos a ángulos barridos hacia el norte y positivos hacia el sur. 33
13. Mapas de distribución de sargazo el 30 de julio del 2021, donde el número de partículas por bin ρ ha sido normalizado por el valor más alto. Los colores rojos se asocian con mayor concentración de trazadores. La imagen de referencia, creada a partir de imágenes satelitales de AFAI, se muestra en (a). Las concentraciones experimentales con α igual a 0.01, 0.02 y 0.03 se muestran en (b), (c) y (d), respectivamente. 34
14. Mapas de distribución de sargazo correspondientes al 19 de agosto de 2021, en los que la cantidad de partículas por bin ρ se ha normalizado respecto al valor máximo. Las áreas en tonos rojos indican una mayor concentración de trazadores. La distribución de referencia, generada a partir de datos satelitales AFAI, se observa en (a). Por otro lado, las concentraciones obtenidas experimentalmente para valores de α de 0.01, 0.02 y 0.03 se presentan en (b), (c) y (d), respectivamente. 35
15. Distribuciones correspondientes a los eigenvectores normalizados (a) izquierdo y (b) derecho, asociado al segundo eigenvalor más alto en agosto del 2021 considerando un factor de arrastre con el viento del 1%. En rojo y azul se destacan regiones donde los valores máximos, en general, están asociados a atractores. Bajo el mapeo sucesivo de P las concentraciones rojo (b) terminan en rojo (a) y azul (b) en azul (a). El color negro corresponde a tierra y/o estados inaccesibles. 36
16. Distribuciones correspondientes a los eigenvectores normalizados (a) izquierdo y (b) derecho, asociado al segundo eigenvalor más alto y a octubre del 2021 considerando un factor de arrastre con el viento del 2%. En rojo y azul se destacan regiones donde los valores máximos, ya sean positivas o negativas, están asociados a atractores. Bajo el mapeo sucesivo de P las concentraciones rojo (b) terminan en rojo (a) y azul (b) en azul (a). El color negro corresponde a tierra y/o estados inaccesibles. 37
17. Distribuciones correspondientes a los eigenvectores normalizados (a) izquierdo y (b) derecho, asociado al segundo eigenvalor más alto y a mayo del 2021 considerando un factor de arrastre con el viento del 1%. En rojo y azul se destacan regiones donde los valores máximos, ya sean positivas o negativas, están asociados a atractores. Bajo el mapeo sucesivo de P las concentraciones rojo (b) terminan en rojo (a) y azul (b) en azul (a). El color negro corresponde a tierra y/o estados inaccesibles. 38

18. Distribuciones de probabilidad correspondientes a los eigenvectores normalizados: (a) y (c) para el lado izquierdo, y (b) y (d) para el lado derecho, asociadas al tercer y cuarto eigenvalor más alto en noviembre de 2021, considerando un factor de arrastre del 1 % debido al viento. Las regiones con las máximas probabilidades positivas están resaltadas en rojo, mientras que las negativas en azul. El color negro indica las zonas de tierra y/o áreas inaccesibles. 39
19. (a) Se muestran concentraciones iniciales de partículas denotadas por \vec{x} , donde cada color representa un conjunto cuya evolución se quiere distinguir. De (b) a (i) se presenta la advección correspondiente a la aplicación de la matriz de transición de probabilidades. . . 40
20. Conexiones en el Caribe occidental correspondientes a los meses de (a) mayo, (b) agosto, (c) octubre y (d) noviembre. Cada color resalta regiones donde las partículas suelen visitar u establecerse más tiempo. Los días de simulación se encuentran entre 65-100 días. . . . 41
21. Cada color corresponde a un conjunto de bins asociados a un marcador con el nombre de alguna playa o isla característica. 43
22. Trayectorias reactivas para cada mes de 2021, donde se ha fijado el factor de arrastre en 0 %. Los recuadros de contorno negro señalan la región de salida, mientras que la de llegada son las costas. Las flechas en azul son los flujos de trayectorias reactivas y los recuadros de colores cerca de las costas indican la tasa a la que llega sargazo dependiendo de su color; rojo indica mayor llegada y verde menor. 44
23. Trayectorias reactivas para cada mes de 2021, donde se ha fijado el factor de arrastre en 1 %. Los recuadros de contorno negro señalan la región de salida, mientras que la de llegada son las costas. Las flechas en azul son los flujos de trayectorias reactivas y los recuadros de colores cerca de las costas indican la tasa a la que llega sargazo dependiendo de su color; rojo indica mayor llegada y verde menor. 45
24. Trayectorias reactivas para cada mes de 2021, donde se ha fijado el factor de arrastre en 2 %. Los recuadros de contorno negro señalan la región de salida, mientras que la de llegada son las costas. Las flechas en azul son los flujos de trayectorias reactivas y los recuadros de colores cerca de las costas indican la tasa a la que llega sargazo dependiendo de su color; rojo indica mayor llegada y verde menor. 46
25. Trayectorias reactivas para cada mes de 2021, donde se ha fijado el factor de arrastre en 3 %. Los recuadros de contorno negro señalan la región de salida, mientras que la de llegada son las costas. Las flechas en azul son los flujos de trayectorias reactivas y los recuadros de colores cerca de las costas indican la tasa a la que llega sargazo dependiendo de su color; rojo indica mayor llegada y verde menor. 47
26. Mapa de tiempos con región objetivo correspondiente a la costa de México para el mes de abril y factores de arrastre con el viento de (a) 0 %, (b) 1 %, (c) 2 % y (d) 3 %. Los colores cálidos están asociados a cajas desde las cuales las transiciones son lentas, en este caso lento refiere a valores por encima de 150 días. Los colores fríos (azules) son bins de transición rápida, es decir, menores a 100 días. 49

27. Mapa de tiempos con región objetivo correspondiente a la costa de México para el mes de septiembre y factores de arrastre con el viento de (a) 0 %, (b) 1 %, (c) 2 % y (d) 3 %. Los colores cálidos están asociados a cajas desde las cuales las transiciones son lentas, en este caso lento refiere a valores por encima de 60 días. Los colores fríos (azules) son bins de transición rápida, es decir, menores a 40 días. 50

Capítulo 1. Introducción

El sargazo es un género de macroalgas cuyas especies pelágicas tienden a agruparse en lo que se conoce como balsas de sargazo, de color parduzco, que viven en la superficie del océano y pueden ocupar superficies muy extensas. Los morfotipos más abundantes en las balsas son *S. fluitans III*, *S. natans I* y *S. natans VIII* (Jouanno et al., 2021; García-Sánchez et al., 2020; Putman & Hu, 2022). Laffoley et al. (2011) describen el importante rol del sargazo como hábitat que protege y alimenta a una gran cantidad de especies; entre sus principales funciones está el ser refugio, sitio de alimentación y desove e incluso hasta transporte de larvas e individuos jóvenes de algunas de ellas.

El avistamiento más antiguo que se conoce de sargazo holopelágico se atribuye a Cristóbal Colón en 1492 (Laffoley et al., 2011) en la región que se conocería después como el Mar de los Sargazos (Atlántico oeste subtropical). Sin embargo, su presencia masiva en el Atlántico tropical y ecuatorial se remonta al nada lejano 2011, en el que grandes balsas de sargazo se distribuyeron principalmente en lo que se conoce como el Gran Cinturón de Sargazo del Atlántico (GASB por sus siglas en inglés Great Atlantic Sargassum Belt). Su reciente llegada a esta región ha sido motivo de debate; algunos sugieren que los afloramientos de sargazo debieron estar influenciados por flujos anómalos de nutrientes provenientes de las plumas de los ríos Amazonas, de los afloramientos de nutrientes provenientes del oeste de África en invierno o bien a su acción conjunta (Wang et al., 2019). Por su parte, Johns et al. (2020) sugieren otra explicación proponiendo que la llegada de sargazo al GASB se debió a su transporte desde el Mar de los Sargazos hasta el Atlántico tropical oriental producido por anomalías de los vientos contra Alisios, los cuales se intensificaron y sufrieron un desplazamiento hacia el sur en el invierno 2009-2010. Esto a su vez provocó anomalías en las corrientes oceánicas y derivó en la llegada de sargazo a las costas de África, donde los vientos y corrientes lo arrastraron al interior del Atlántico tropical incorporándolo a una zona con condiciones más favorables para su crecimiento. Dicha zona se conoce como la Región Norecuatorial de Recirculación (NERR por sus siglas en inglés North Equatorial Recirculation Region).

El sargazo es un hábitat natural necesario para muchos organismos. No obstante, su llegada masiva a las costas del mar Caribe representa un problema serio y multifactorial. Las arribaciones a las costas del mar Caribe se han registrado con cierta periodicidad desde la década de los 60 (Aldana, 2022), pero fue hasta 2011 que una cantidad anómala de sargazo arribó a las costas de Cuba, Barbados y las Antillas Menores. En el caso del Caribe Mexicano, grandes cantidades de sargazo han llegado a las costas con regularidad desde el 2014 hasta la fecha, siendo el 2015 y 2018 los años que destacan más por la gran cantidad de sargazo que inundó las costas (Aldana, 2022; Wang et al., 2019). La llegada de grandes cantidades de sargazo genera una serie de problemas que no se pueden ignorar, entre los

cuales destacan impactos negativos para el turismo y en consecuencia a la economía local y nacional (Aldana, 2022; Chávez et al., 2020). Por otra parte, en su proceso de descomposición, el sargazo produce contaminantes de forma directa (ácido sulfhídrico y amonio) e indirecta (arsénico y metales pesados) (Devault et al., 2021). Estos contaminantes afectan ecosistemas tanto terrestres como marinos, pues alteran la química del agua, elevan la temperatura en las zonas costeras y terminan por introducirse en la cadena trófica, lo cual también impacta a las personas. De manera más indirecta, la presencia de balsas de sargazo interfiere con la cantidad de luz solar que atraviesa la superficie del océano, afectando a los arrecifes (Van Tussenbroek et al., 2017).

Estos graves problemas hacen urgente gestionar el problema mediante la elaboración estrategias de respuesta capaces de mitigar los impactos de las arribaciones de sargazo. Entre los esfuerzos realizados se encuentran trabajos sobre el aprovechamiento del sargazo (López Miranda et al., 2021), estudios sobre impactos socioeconómicos y a ecosistemas, monitoreo y distribución del sargazo (Schling et al., 2022), entre otros. Por todo lo anterior es de gran importancia conocer, y si es posible, predecir el movimiento y comportamiento del sargazo para determinar y disminuir sus impactos nocivos.

Existen una gran cantidad de trabajos sobre el movimiento del sargazo. La advección, dispersión y distribución del sargazo es un problema amplio que puede estudiarse desde diferentes puntos de vista. Por mencionar algunos, Andrade-Canto et al. (2022) describen el arrastre de sargazo por remolinos como un mecanismo oceánico que facilita su transporte para posteriormente “romperse ” debido a la topografía e inundan las zonas costeras de centro América y la península de Yucatán. Jouanno et al. (2021) desarrollaron un modelo euleriano que incorpora fisiología, varamiento y transporte por corrientes, viento y parametrización del efecto de las olas, con el que hacen un ensamble de predicciones de 1-8 meses y obtienen distribuciones espaciales de sargazo y su evolución estacional e interanual en el Caribe y Atlántico, congruentes con observaciones, pero con algunos problemas por resolver. Allende-Arandía et al. (2023) por medio del cálculo de Estructuras lagrangianas Coherentes climatológicas encuentran rutas de atracción recurrentes y barreras para el transporte de material suspendido en el océano, según se modele la influencia del viento, las barreras de transporte se debilitan y la congregación de partículas se vuelve más recurrente en ciertas zonas (como las costas de Quintana Roo para el caso de un factor de arrastre con el viento “alto” de 2%). Beron-Vera & Miron (2020) emplearon una derivación de las ecuaciones de Maxey-Riley para describir al sargazo como una red de partículas inerciales conectadas elásticamente. Este modelo muestra que, bajo condiciones de vientos en calma, los remolinos ciclónicos y anticiclónicos son atractores para estas redes de sargazo. Si no se usa este modelo, los ciclones resultan “repeler” al sargazo, contrario a las observaciones. Lara-Hernández et al. (2024) exploraron la influencia

de múltiples factores sobre el transporte y las arribazones de sargazo en el Caribe mexicano, entre los que se destacan el arrastre por el viento, las distribuciones horizontales iniciales y la variabilidad mensual de vientos y corrientes. Como puede verse, los estudios relacionados con el sargazo son muy variados y extensos. En esta tesis centraremos la atención en la descripción estadística de trayectorias lagrangianas las cuales consideraremos están sujetas a perturbaciones aleatorias a pesar de que su movimiento será descrito por ecuaciones en principio deterministas. Esta suposición (aleatoriedad) atiende a la dificultad de representar procesos físicos no resueltos y el carácter caótico del transporte lagrangiano (del Castillo-Negrete & Morrison, 1993). Otras referencias importantes en las que se aplican metodologías estadísticas se mencionan más adelante.

El problema se puede abordar desde dos puntos de vista: el euleriano que utiliza campos de velocidad de corrientes, vientos y olas que mueven uno o más "trazadores", es decir, campos escalares que representan al sargazo en forma continua (como "una mancha"), por lo general utilizando métodos numéricos que discretizan ecuaciones de advección- difusión-reacción sobre mallas numéricas para determinar su evolución espacio-temporal. El otro método es el lagrangiano, el cual considera al sargazo como si fueran partículas que se mueven por campos de corrientes, vientos y olas, las cuales se interpolan a las posiciones de miles de partículas que representan al sargazo para modelar sus trayectorias. En este trabajo se emplea el punto de vista lagrangiano y además se aborda el problema desde un punto de vista estocástico, pues se toman las simulaciones de miles de trayectorias lagrangianas para calcular matrices de transición de probabilidad (Cadenas de Markov) y la Teoría de Caminos de Transición (TPT por sus siglas en inglés, Transition Path Theory). Con estos métodos se busca encontrar, en forma probabilista, las rutas más directas y productivas que, en principio, si el modelo es adecuado, sigue el sargazo para llegar a las costas del Caribe mexicano. La metodología, basada en métodos estocásticos y operadores de transición Markovianos, se describe en detalle más adelante.

1.1. Marco teórico

El seguimiento de partículas flotantes en la superficie del océano (boyas a la deriva) es uno de los principales instrumentos que facilitan los análisis lagrangianos, y pueden utilizarse para validar resultados de modelos numéricos que simulan trayectorias de partículas virtuales. En esta tesis utilizaremos simulaciones numéricas de partículas virtuales por razones que se irán explicando a continuación.

La ecuación que describe la evolución de las posiciones de objetos inmersos en un fluido es

$$\frac{d\vec{X}_n(t)}{dt} = \vec{V}_n, \quad (1)$$

donde \vec{X}_n y \vec{V}_n son los vectores de posición y velocidad correspondientes a la n -ésima partícula de pseudo-sargazo al tiempo t . Por simplicidad, en adelante omitiremos el subíndice n ; no obstante siempre deberá tenerse en cuenta que las estadísticas se extraen a partir de múltiples trayectorias. Aunque el sargazo puede hundirse y, por tanto, moverse en tres dimensiones, resulta razonable hacer la aproximación de movimiento bidimensional, ya que pasa la mayor parte de su vida flotando en la superficie y se distribuye mayormente horizontalmente que verticalmente. Sin embargo, es importante tener en cuenta que se trata de una simplificación y lo ideal sería tener un modelo tridimensional; el problema es que no se sabe mucho sobre la dinámica vertical del sargazo.

Para poder resolver satisfactoriamente las trayectorias se emplea la conexión que existe entre la descripción lagrangiana y la descripción euleriana para el campo de velocidades (Ottino, 1989)

$$\left(\frac{\partial \vec{X}(\vec{Q}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{Q}} = \vec{v}(\vec{x}, t), \quad (2)$$

donde $\vec{v}(\vec{x}, t)$ es el campo de velocidades eulerianas. Lo que nos dice la ecuación (2) es que la velocidad de la partícula que cruza un punto del espacio \vec{Q} a un tiempo t , corresponde a la velocidad euleriana en dicho punto $\vec{x} = \vec{X}(\vec{Q}, t)$; este mapeo suele ser llamado el *movimiento*, se asume que es invertible y diferenciable.

La ecuación (2) establece que la trayectoria del objeto en movimiento está completamente determinada por los campos de velocidades que actúan sobre él. Sin embargo, en el caso del sargazo, persisten varios problemas físicos sin resolver. Entre estos, destacan las escalas indeterminadas de las corrientes oceánicas y los vientos, cuya resolución es limitada, además se desconoce cuál es su influencia exacta en el movimiento del sargazo. Asimismo, existe un amplio desconocimiento sobre las variables biogeoquímicas y los procesos fisiológicos que condicionan el desarrollo y comportamiento de este organismo.

Si hay fluctuaciones a escalas no resueltas o ruido que perturban nuestro sistema físico (océano) de forma significativa, puede generarse un comportamiento azaroso. Entonces podemos interpretar esta dinámica como un *proceso estocástico* que suele ser modelado introduciendo elementos aleatorios en la ecuación de evolución de la trayectoria (o incluso en su velocidad). A continuación se presenta una manera generalizada de la ecuación de la trayectoria de una partícula como un proceso estocástico

$$\left(\frac{\partial \vec{X}(\vec{Q}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{Q}} = \vec{v}(\vec{x}, t) + \vec{\eta}(\vec{x}, t), \quad (3)$$

donde $\vec{\eta}(\vec{x}, t)$ son las fluctuaciones del sistema; notemos que la ecuación diferencial 3 es distinta a las deterministas. A todas las ecuaciones de esta forma se les conoce como ecuaciones diferenciales estocásticas, donde el término η puede tomar diferentes formas según el problema que se desee modelar. El proceso estocástico que se utiliza más comúnmente es el “proceso de Wiener”, que es análogo al ruido blanco, pero este último no es ni continuo ni diferenciable (Gardiner, 1985).

La solución del tipo de expresiones que se muestra en ?? no es la misma que para sistemas deterministas, se calcula en forma diferente, pues no se emplean integraciones tradicionales. Una forma de abordar estos problemas es buscando la función de distribución de probabilidad (PDF por sus siglas en inglés Probability Density Function) denotada por $Pr(\vec{x}, t)$, que representa la probabilidad de encontrar una partícula en una posición y tiempo \vec{x}, t y formalmente es la solución de la ecuación de Fokker-Planck para dicha distribución. La evolución en el tiempo de esta función también se puede obtener por métodos de Montecarlo haciendo muchas (miles) de simulaciones del movimiento de partículas. Conocer $Pr(\vec{x}, t)$ se vuelve una herramienta muy útil que sirve para obtener probabilidades y estadísticas de las variables aleatorias.

Los procesos estocásticos son capaces de representar la aleatoriedad presente en las variables del problema y su solución se expresa en términos de probabilidades. Un caso particularmente útil es el estacionario, el cual satisface que todas las funciones de distribución de probabilidad de dimensión finita permanecen sin cambio (no dependen del tiempo) cuando un grupo de puntos “se desplaza” a lo largo del tiempo, es decir, si

$$Pr(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau) = Pr(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (4)$$

donde $Pr()$ es la función de probabilidad conjunta, x_1, x_2, \dots, x_n son eventos o estados del sistema al tiempo t_1, t_2, \dots, t_n respectivamente (Scott, 2013). Cabe señalar que un proceso estacionario cumple con la relación (4) para cualquier n, t_1, t_2, \dots, t_n y τ . Lo más importante es recordar que en estos procesos las funciones de distribución de probabilidad no cambian en el tiempo.

Una propiedad muy útil de los procesos estacionarios es que obedecen el llamado *teorema ergódico*, el cual indica que el promedio sobre el ensamble de realizaciones o experimentos se puede calcular de forma

equivalente haciendo un promedio a lo largo del tiempo en una sola realización, es decir, la estadística no cambia sus propiedades en el tiempo. En la práctica y particularmente en el caso de observaciones resulta complicado llevar a cabo muchos experimentos, es mucho más fácil tomar registros largos de fenómenos. Para estos casos el teorema ergódico nos permite calcular promedios temporales de las cantidades de interés en un solo experimento en lugar de tener que calcular estadísticos de múltiples realizaciones que no existen.

Además de procesos estacionarios vamos a enfocarnos en un tipo particular de proceso estocástico llamado *proceso de Markov*, el cual es de los procesos más comunes que aparecen en sistemas físicos. Tiene la propiedad de que el estado futuro del sistema está determinado por el estado presente y no por cualquier otro estado del pasado. Esto podría parecer un requerimiento muy fuerte, pero suele ser satisfecho en forma aproximada por muchos sistemas físicos. Una definición más rigurosa de estos procesos es

$$Pr(x_n, t_n \mid x_1, \dots, x_{n-1}; t_1, \dots, t_{n-1}) = Pr(x_n, t_n \mid x_{n-1}; t_{n-1}), \quad (5)$$

donde el símbolo “|” denota probabilidad condicional. La expresión 5 nos dice que la probabilidad de encontrarse en x_n al tiempo t_n , dado que sé proviene de la sucesión de posiciones x_1, \dots, x_{n-1} en los tiempos t_1, \dots, t_{n-1} , está determinada por el evento inmediato anterior x_{n-1} al tiempo t_{n-1} .

Para empezar a hablar de qué método se puede emplear para hallar las funciones de probabilidad, comencemos con un hecho importante, que es la existencia de dos formulaciones para el tratamiento de problemas estocásticos: una para espacios de estados continuos y otra para espacios de estados discretos. La segunda opción suele ser la más utilizada dada la naturaleza discreta de los muestreos que se pueden hacer para sistemas físicos o bien que las soluciones numéricas en general también son discretas. Entonces, siempre que aquí se refiera a procesos de Markov estacionarios, se dará por entendido que se habla también de un sistema discreto, al cual llamaremos en adelante *Cadena de Markov*. Para encontrar como evoluciona en el tiempo una distribución inicial de probabilidad en un sistema estacionario se calcula una matriz P que se conoce como *Matriz de Transición de Probabilidades* y cuyas entradas P_{ij} se leen como la probabilidad de pasar del estado x_i al x_j en un paso de tiempo.

Hay diferentes avances en la materia de cadenas de Markov, que no necesariamente se limitan a hallar los caminos más probables o las distribuciones más probables. En particular, la Teoría de Caminos de Transición se vale de estas herramientas y crea un marco de trabajo en el que podemos hallar los caminos

que conectan más directamente dos zonas de interés en nuestro sistema. Esta teoría no se limita solo a calcular las rutas de conexión directa (denominadas reactivas) entre nuestras zonas; también calcula tiempos de llegada, frecuencia de llegada, flujos, etc. (Miron et al., 2021). Es en el uso de esta teoría en la que centramos nuestro interés y con la que obtendremos los resultados principales en esta tesis. Por ello mencionamos a continuación algunos de sus resultados más relevantes. Además, incluimos antecedentes de transporte de sargazo enfocados en la llegada a costas Mexicanas.

1.2. Antecedentes

El uso de TPT se remonta al estudio de reacciones químicas, es de ahí que las trayectorias reactivas reciben su nombre (Van Tussenbroek et al., 2017). No obstante, TPT puede ser utilizada para el tratamiento de múltiples problemas físicos que transiten entre un estado de origen (reactivo) y un estado objetivo (producto). Esta teoría se ha utilizado en diversos problemas en el océano, entre los cuales se encuentra el trabajo de Miron et al. (2021) en el que hallaron flujos de trayectorias directas desde la línea de costa de los continentes que terminan en las regiones de acumulación de basura a nivel global. En otros trabajos previos, los autores, utilizando matrices de transición de probabilidad (Miron et al., 2017, 2019a) encontraron una “geografía lagrangiana del golfo de México”, que separa el golfo en regiones “poco conectadas” entre sí e indica las características de la evolución de partículas lagrangianas en dicho sistema. También se han realizado cálculos para encontrar las trayectorias superficiales directas entre la Corriente Norte de Brasil y el Atlántico Norte ($26^{\circ}N$) (Drouin et al., 2022) y hasta la construcción de esquemas de predicción para la evolución de derrames de petróleo (Olascoaga & Beron-Vera, 2023). Dentro de esta variedad de problemas a los que se ha aplicado TPT el sargazo no es la excepción.

Beron-Vera et al. (2022), usando trayectorias de boyas superficiales sin sistema de arrastre y mediante el análisis de cadenas de Markov, encontraron que los efectos combinados de vientos, olas y corrientes superficiales son capaces de explicar la distribución acuñada por Wang et al. (2019) como el Gran Cinturón de Sargazo del Atlántico (GASB por sus siglas en inglés Great Atlantic Sargassum Belt). Otro hallazgo, consistente con lo reportado por Wang, es la distinción de tres cuencas independientes mostradas en la Figura 1 (a), asociadas con la agregación de sargazo: el Mar de los Sargazos (que resultó estar desconectada del Golfo de México), el Golfo de Guinea y el Golfo de México. Las regiones de las que se nutre esta última incluye el Atlántico ecuatorial, el Caribe y regiones ricas en nutrientes provenientes de las desembocaduras de los ríos Amazonas y Orinoco. Al aplicar TPT, se encontraron

dos rutas potenciales que van desde el sistema de afloramiento al frente de la costa de África: la primera toma lugar a lo largo del GASB y la segunda vía es más al sur pasando primero por el Golfo de Nueva Guinea, cruza el Atlántico y finalmente sigue a lo largo de América del Sur, como se observa en la Figura 1 (b). Sin embargo, esto no resuelve el debate sobre las causas que originaron el problema del sargazo en 2011 (Wang et al., 2019; Johns et al., 2020).

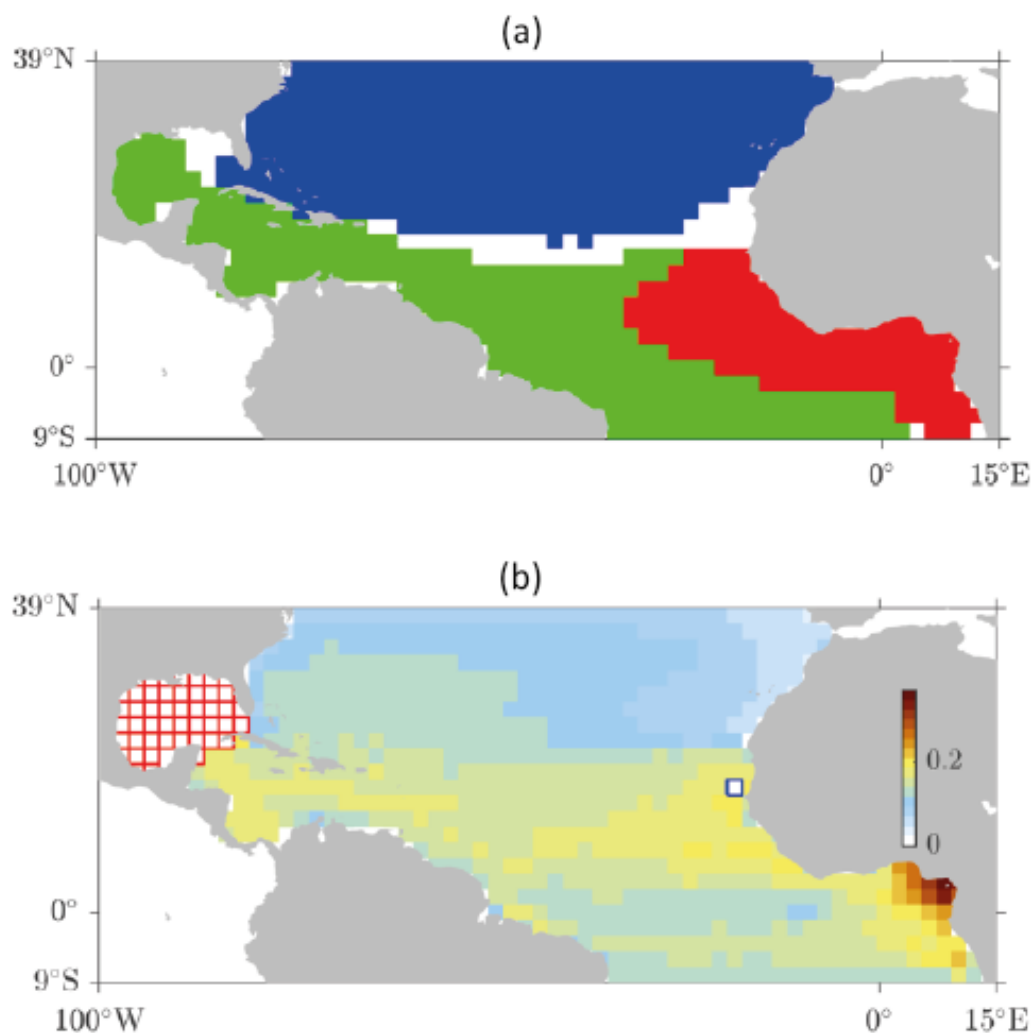


Figura 1. (a) Cuencas de atracción, es decir, zonas donde las trayectorias tienen origen y terminan recurrentemente en el mar de los sargazos (azul), el golfo de México (verde) y el golfo de Guinea (rojo). (b) Distribución de trayectorias reactivas, donde los colores indican los bins con mayor densidad de trayectorias reactivas. En amarillo intenso se muestra dos rutas principales dónde tienen lugar los cuellos de botella de las transiciones. Figura tomada de Beron-Vera et al. (2022).

La teoría de caminos de transición ha obtenido buenos resultados al describir las rutas de transporte de sargazo en el Atlántico. Sin embargo, el cálculo puede ser sensible a la distribución no homogénea de los derivadores superficiales. Utilizando trayectorias de boyas sin sistema de arrastre, Bonner et al. (2023) propusieron mejoras para calcular la matriz de transición y evitar sesgos o dependencias debidas a la distribución no homogénea de partículas y para lidiar con el caso en el que la escasez de datos

genera inestabilidades o variaciones grandes en las estimaciones de la duración total de las trayectorias de transición. En nuestro caso no tendremos este problema pues las trayectorias numéricas se calcularán a partir de una distribución homogénea y uniforme.

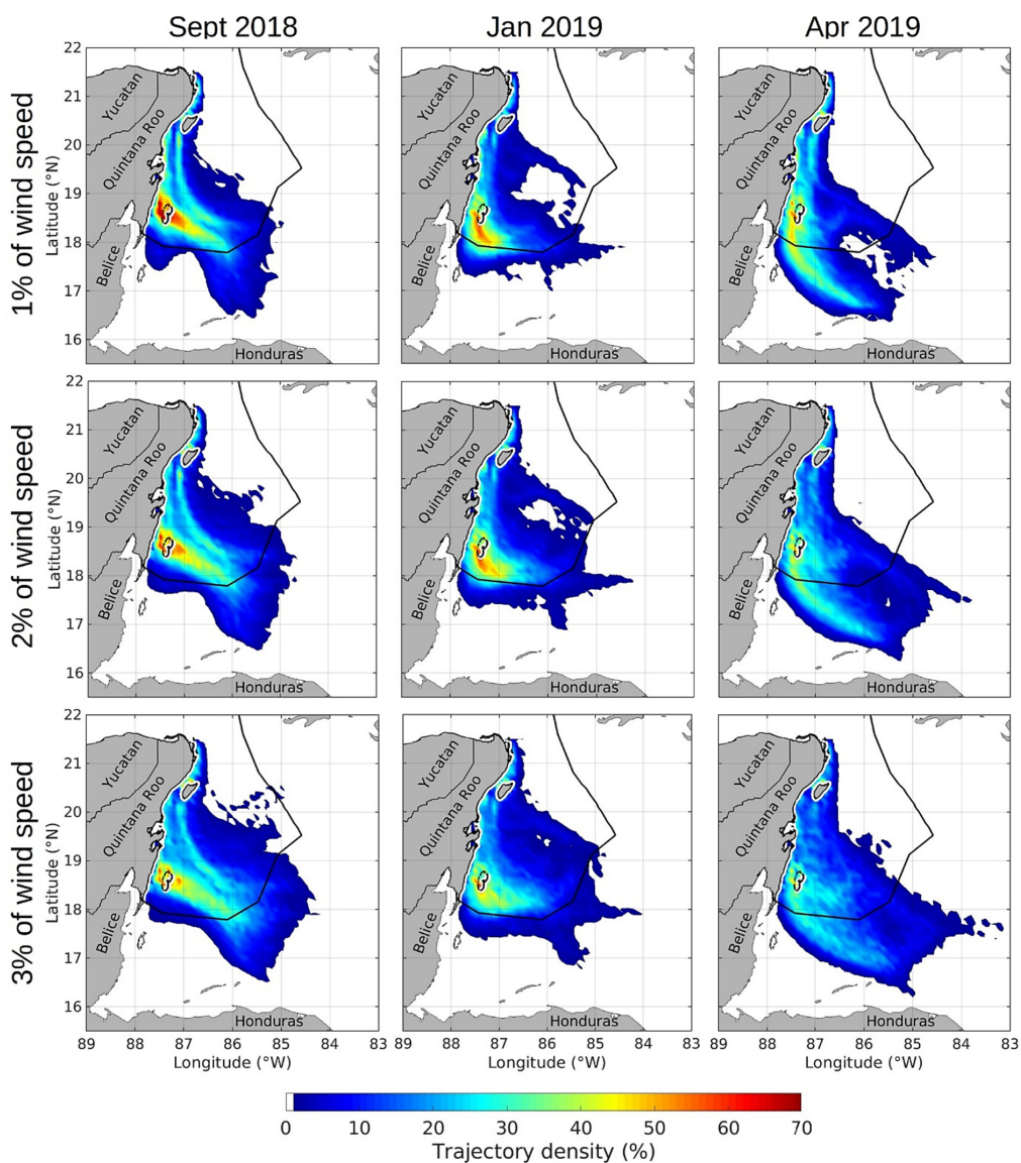


Figura 2. Densidad de trayectorias de 7 días del sargazo que potencialmente aterrizan en las costas del Caribe mexicano, construidas a partir de trayectorias que parten de las costas de Quintana Roo y retroceden 7 días. Cada fila está asociada a un mes, mientras que las columnas corresponden a diferentes factores de arrastre del viento. Figura tomada de Lara-Hernández et al. (2024).

Para resultados más regionales y focalizados en el arribo a las costas de Quintana Roo es conveniente resaltar algunos de los resultados de Allende-Arandía et al. (2023) y Lara-Hernández et al. (2024).

Cabe resaltar que ninguno de estos trabajos fue realizado con matrices de transición u otros métodos estocásticos.

En (Lara-Hernández et al., 2024) estiman la densidad de partículas que aterrizan en el Caribe mexicano haciendo experimentos numéricos con partículas virtuales que se liberaron en la costa de Quintana Roo y se estudia su evolución hacia atrás en el tiempo, retrocediendo durante 7 días, y variando el arrastre con el viento entre 1 %, 2 % y 3 %. Para obtener los resultados utilizaron corrientes superficiales de HYCOM (por sus siglas en inglés Hybrid Coordinate Ocean Model) global y vientos del reanálisis ERA5. Lo que encontraron en todos los casos y para los periodos: septiembre 2018, enero 2019 y abril 2019 fue que la región al sureste de banco chinchorro entre $18.25^{\circ}N$ y $18.75^{\circ}N$ es una fuente muy importante de sargazo que termina por extenderse a lo largo de las costas de Quintana Roo, como se observa en Figura 2.

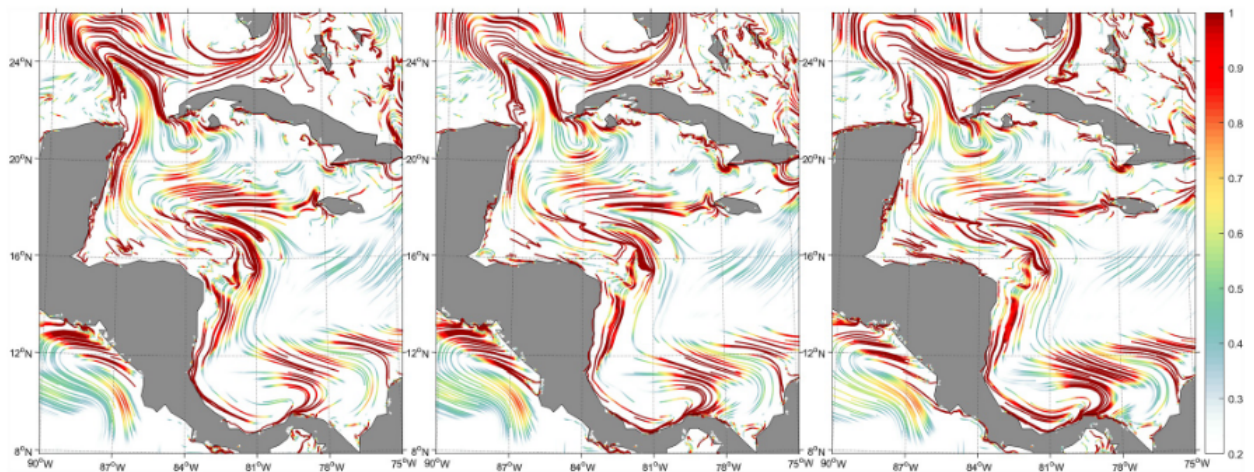


Figura 3. Estructuras Coherentes lagrangianas Climatológicas (cLCS) en el oeste del mar Caribe para julio. Los colores indican la fuerza de atracción; rojo se asocia a las atracciones más fuertes de las parcelas cercanas y, por otro lado, blanco indica regiones aisladas. Cada panel se asocia al uso de solo corrientes, corrientes más 1 % de viento y corrientes más 2 % de viento en los paneles izquierdo, centro y derecho, respectivamente. Figura tomada de Allende-Arandía et al. (2023).

Allende-Arandía et al. (2023) encontraron que la magnitud del viento es un factor significativo en la agregación espacial de partículas y también en el tiempo que les toma a estas transitar del Atlántico Ecuatorial al Caribe; esto se hizo considerando las características de las Estructuras lagrangianas Coherente (LCS por sus siglas en inglés Lagrangian Coherent Structures). Estas representan rutas persistentes de atracción y barreras de transporte. Con el aumento de la influencia del viento (entre 0 %, 1 % y 2 %) la confluencia de partículas en las costas del Caribe varía, siendo el factor de arrastre de 2 % el que más ocasiona el arribo de sargazo a las costas del Caribe mexicano. La barrera de transporte persistente de la Corriente de Yucatán se debilita cuando las LCS se calculan con un arrastre debido al viento mayor al 1 %, y se borra por completo cuando se calculan con 2 % de resistencia al viento, como se muestra en la Figura 3. En la misma figura también se hace notar cómo estas estructuras de transporte tienden a converger en su camino hacia México entre $84^{\circ}O$ y $86^{\circ}O$ a unos $18^{\circ}N$ (cuando la influencia del viento

es 2 %), esto parece ser consistente con lo reportado por Lara-Hernández et al. (2024).

El presente trabajo busca obtener información para la región del Caribe occidental empleando una metodología similar a la de Beron-Vera et al. (2022); Drouin et al. (2022); Miron et al. (2021, 2019a), pero utilizando resultados de modelos numéricos lagrangianos para calcular trayectorias virtuales de sargazo, cuyas posiciones en el tiempo pueden ser utilizadas para la construcción de matrices de transición. Con estos cálculos se espera revelar las regiones del Caribe occidental que funcionan como cuencas de atracción para el sargazo y hallar los caminos directos (trayectorias) que conducen al sargazo desde las zonas de entrada al Caribe occidental hasta las costas. Además de tratar de estimar cuáles son las zonas con mayor flujo de trayectorias y en cuánto tiempo se estima su llegada.

1.3. Justificación

El transporte de sargazo a gran escala es un problema en el que se ha avanzado significativamente en los últimos años. Sin embargo, para poder tomar acciones de limpieza, recolección o creación de barreras hace falta conocer las rutas de transporte de sargazo que conecta el océano con las costas de manera más directa y eficiente. Una zona de protección de mucho interés son las costas del Caribe Mexicano, es por eso que en este trabajo se presta particular atención a las regiones y rutas que se conecten directamente con las costas mexicanas del Caribe.

1.4. Pregunta científica

¿Cuáles son las trayectorias que transportan en forma directa y más eficiente el sargazo a las costas del Caribe occidental desde sus zonas de entrada y cuál es su relación con la circulación oceánica y con los vientos?

1.5. Objetivos

1.5.1. Objetivo general

Identificar el conjunto de trayectorias del sargazo que conectan de manera más directa las entradas del Caribe occidental con las costas de Quintana Roo, analizando las variaciones que se presentan bajo diferentes condiciones de arrastre por el viento durante cada mes del año 2021.

1.5.2. Objetivos específicos

- Validar trayectorias de partículas virtuales de sargazo con observaciones.
- Establecer las condiciones necesarias para el cálculo de matrices de transición mensuales y proceder a su obtención.
- Obtener conexiones entre zonas de entrada de sargazo al Caribe occidental y las zonas de arribo en las costas del Caribe mexicano.
- Calcular trayectorias reactivas y flujos, además de otros estadísticos entre las fuentes hipotéticas definidas con base en trayectorias observadas de sargazo y las Costas del Caribe occidental.

Capítulo 2. Metodología

Para el desarrollo de este trabajo acotamos nuestra región de interés al Caribe occidental entre $88^{\circ}O$ - $76^{\circ}O$ y $16^{\circ}N$ - $23^{\circ}N$. Hemos elegido esta región ya que tenemos particular interés en la llegada de sargazo a las costas de Quintana Roo; no obstante, no despreciaremos la información obtenida para las arribazones que tengan lugar en Cuba. Seleccionamos el año 2021 para la aplicación de esta metodología, pues fue un año con gran presencia de sargazo en el Caribe occidental (Hu et al., 2023); su llegada a las costas de Quintana Roo es comparable a la que se vivió en 2018, año histórico por el volumen de sargazo varado en las costas y presente en mar abierto (Hu, 2021). Al mismo tiempo, no consideramos períodos más largos por posibles limitaciones de cómputo y contemplamos este primer esfuerzo como una “prueba piloto” o de concepto para evaluar la eficacia de la metodología propuesta.

2.1. Región de estudio y su variabilidad

La región de estudio se encuentra bajo la influencia de remolinos de mesoescala que la atraviesan constantemente y corrientes semi-persistentes. La circulación dominante cerca de los $19^{\circ}N$ se caracteriza por la presencia de la corriente de Caimán, que fluye de este a oeste, y al llegar a las cercanías de la península de Yucatán, gira hacia el norte (una rama menos intensa también puede girar al sur) a lo largo del Caribe Mexicano donde adquiere el nombre de corriente de Yucatán. La corriente de Yucatán es una corriente de frontera oeste, intensa (cuyas velocidades máximas pueden exceder 3 m/s) y angosta, con dirección predominante paralela a la costa de la península de Yucatán (Cetina et al., 2006). En el caso del viento, los vientos dominantes en superficie son los Alisios que soplan de este a oeste y son persistentes casi todo el año con velocidades de entre 5 y 8 m/s, alcanzando velocidades máximas en verano e invierno de hasta 13 m/s (García Martínez, 2015). Los vientos tienen una variación estacional más marcada en su componente meridional además de verse afectados por huracanes y frentes fríos (Nortes). La circulación oceánica y atmosférica promedio se resume en el esquema mostrado en la Figura 4.

Los estudios estocásticos lagrangianos realizados en esta tesis consideran la evolución probabilista para cada mes del año 2021. Es muy importante tener en cuenta que en el análisis que presentaremos a continuación y en el resto de la tesis se calculan promedios mensuales y variabilidad durante cada mes (respecto a ese promedio) usando solo un año de datos, lo que implica que la variabilidad en este caso es limitada. Normalmente se hacen estos análisis considerando muchos años y/o múltiples realizaciones. Este un estudio inicial que deberá ser continuado considerando más datos y condiciones más realistas.

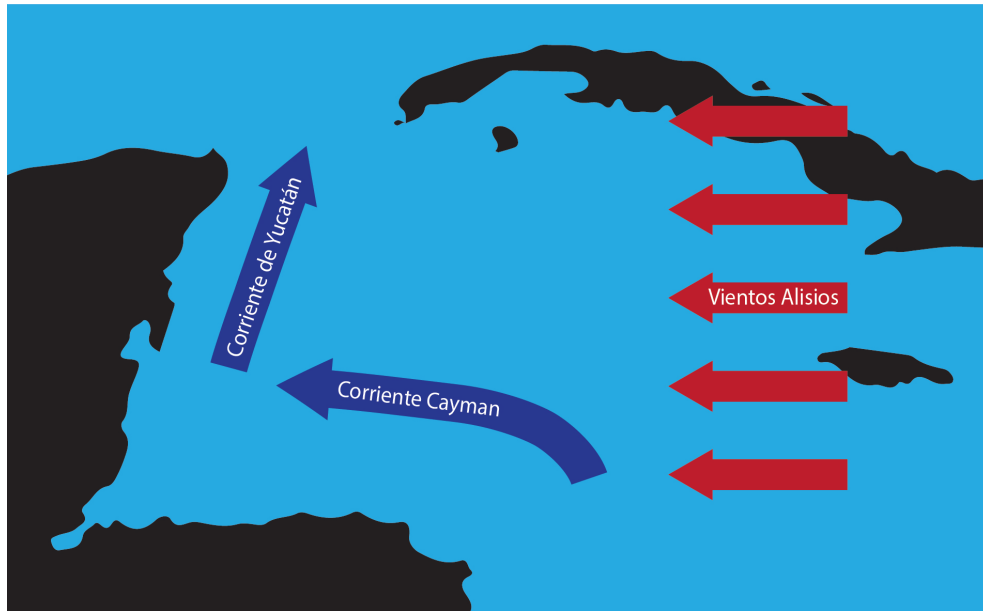


Figura 4. Las flechas azules muestran las corrientes oceánicas superficiales dominantes y las rojas los vientos dominantes en superficie en el Caribe occidental.

Para investigar y representar en forma concisa la variabilidad de las corrientes superficiales y los vientos durante el intervalo de tiempo de interés, nos basamos en Preisendorfer (1988) y Waterman & Lilly (2015) y calculamos las elipses de variabilidad mensuales de las corrientes y vientos sobre la región de interés. Para ello contamos con datos diarios del vector velocidad $\vec{v}(x, y; t) = (u(x, y; t), v(x, y; t))$ y datos horarios de viento sobre los puntos de una malla (campos eulerianos) obtenidos de los reanálisis GLORYS12 para corrientes oceánicas superficiales y del reanálisis atmosférico ERA5 para vientos a 10 m disponibles en <https://cds.climate.copernicus.eu/cdsapp#!/dataset/reanalysis-era5-single-levels?tab=overview> y <https://www.mercator-ocean.eu/en/ocean-science/glorys/> respectivamente.

Un reanálisis se refiere tanto a un método como a un conjunto de datos en el que se combinan observaciones con resultados de un modelo numérico, ya sea atmosférico u oceánico, mediante técnicas de asimilación de datos. Esta herramienta produce una estimación óptima del estado del sistema variando en tiempo espacio de forma consistente y se considera que son una fuente de datos confiables de campos oceánicos y atmosféricos (velocidades). Normalmente, un reanálisis contiene varias décadas de datos y cubre todo el globo terrestre. En particular, en este trabajo, se utilizan datos del reanálisis ERA5 para los vientos superficiales y el reanálisis GLORYS12 para el océano solo del año 2021. ERA5 proporciona estimaciones de una gran cantidad de datos atmosféricos cada hora, disponibles en cuadrículas regulares con resolución de $1/4^\circ$ (aproximadamente 30 km). GLORYS12 es un reanálisis que combina datos de satélite, boyas argos, temperaturas superficiales y otros asimilados con el modelo global MERCATOR.

Los resultados oceánicos globales están disponibles para cuadrículas regulares con resolución espacial de $1/12^\circ$ (aproximadamente 8 km) y temporal de un día.

La variabilidad temporal se analiza considerando las anomalías de la velocidad: $u' = u - \bar{u}$ y $v' = v - \bar{v}$, donde \bar{u} y \bar{v} son los promedios temporales de las velocidades (corrientes o vientos, según sea el caso) zonales y meridionales, respectivamente. Dado que se trata de vectores, su variabilidad tiene magnitud y dirección las cuales se definen analizando la matriz de covarianza

$$C \equiv \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'v'} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

donde la barra sobre los términos representa promedio temporal. Para visualizar con mayor claridad como se distribuye la variabilidad del campo de velocidad empleamos la descomposición en eigenvalores y eigenvectores de la matriz de covarianza:

$$C \equiv \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^T, \quad (7)$$

el superíndice T denota la transposición de la matriz. Esta descomposición define una elipse de varianza, donde las raíces de los eigenvalores de la matriz de covarianza son los semiejes mayor a y menor b de una elipse, mientras que la dirección de los eigenvectores se asocia con el ángulo de inclinación de la elipse θ , medido como el ángulo del semi-eje mayor con la horizontal x , como se muestra en la Figura 5. El dominio de θ se encuentra entre $[\pi/2, -\pi/2]$, siendo los valores negativos aquellos que se barren hacia el sur y los positivos hacia el norte. El grado de inclinación de las elipses, (dirección del eje mayor) nos indica la dirección de máxima variabilidad.

Las características de las fluctuaciones de la velocidad pueden ser obtenidas con estas elipses de varianza, pues revelan y cuantifican su grado de anisotropía y la dirección de mayor variabilidad, que depende de la forma de la elipse y la magnitud de sus ejes principales. Nosotros tenemos particular interés en conocer las variaciones mensuales que sufren los campos de velocidades. Para alcanzar este objetivo obtenemos la matriz de covarianza (y su descomposición) por punto de malla tanto para corrientes como para vientos. Los promedios mensuales y las anomalías de la velocidad los calculamos considerando el periodo entendido como “mensual” iniciado el primer día del mes hasta el día quince del mes próximo, esto lo hacemos por preservar el mismo intervalo de tiempo que el utilizado para la construcción de las matrices de transición de probabilidades, de lo cual hablaremos con más detalles más adelante. Esto

nos proporcionará las tendencias (promedio) mensual que prevalece en los vientos y corrientes a lo largo de cada mes del 2021, así como su variación a lo largo de cada periodo, es decir, en que dirección se presentan más o menos fluctuaciones. El análisis de la matriz Ecuación (8) que detalla Waterman & Lilly (2015) es de gran utilidad para obtener mucha más información sobre la variabilidad de las corrientes y vientos, pero nosotros nos restringiremos a analizar los resultados de lo descrito en este capítulo.

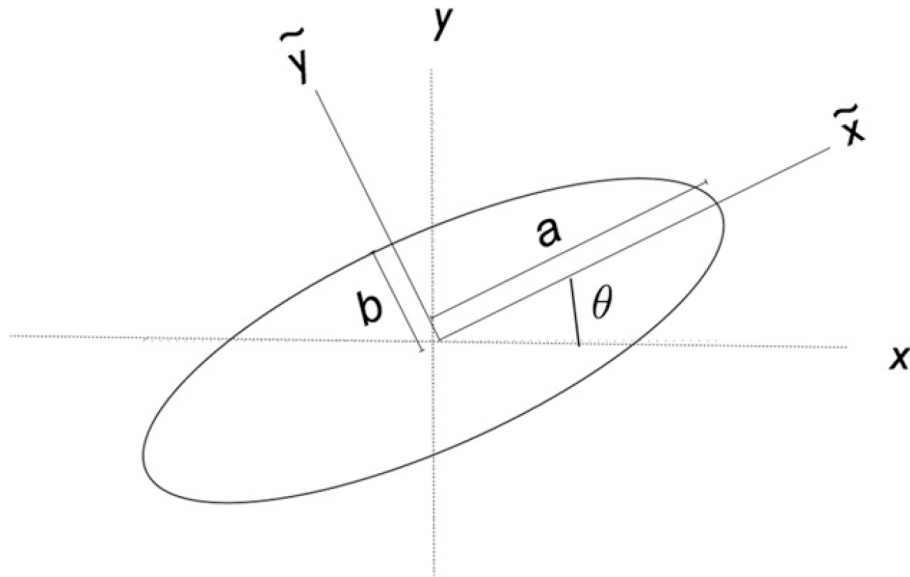


Figura 5. Parámetros geométricos de las elipses de variabilidad, donde a es el semieje mayor y b el semieje menor, definidos por los eigenvectores de la matriz de covarianza de las series de tiempo de velocidad en un punto. El ángulo de la elipse respecto a los ejes originales es θ . Figura tomada de Waterman & Lilly (2015).

2.2. Matriz de Transición de Probabilidades

Como mencionamos en el capítulo anterior, la metodología que seguiremos para nuestro análisis se basa en un enfoque lagrangiano que simula el movimiento y las trayectorias de miles de partículas virtuales de sargazo resolviendo ecuaciones diferenciales ordinarias en las que la deriva temporal de la posición de las partículas es igual a la velocidad que las mueve (Ecuación 2). Las ecuaciones pueden parecer sencillas; sin embargo, su resolución se complica por las condiciones de frontera (varamiento), la forma de las costas y las características del dominio que contiene fronteras abiertas.

Es conocido además, que incluso en flujos laminares dependientes del tiempo el movimiento lagrangiano es caótico (Aref, 1984). La variabilidad misma de las corrientes y vientos hace que las trayectorias de las partículas sean muy fluctuantes. Por lo anterior en lugar de hacer un análisis determinista del movimiento de miles de partículas, en esta tesis empleamos un enfoque estadístico y describimos la evolución espacio-

temporal de las partículas como la evolución de la probabilidad de encontrar una partícula en cierto lugar y a cierto tiempo además de otros estadísticos relevantes. Esto puede ser un problema muy complicado por lo que, en primera instancia, se hace la suposición de que las propiedades estadísticas del problema no cambian en el tiempo. Con ello se puede recurrir a una descripción tipo cadena de Markov del proceso. Para ello se considera que existe información de miles de trayectorias de partículas “de sargazo” (pseudo-sargazo o partículas virtuales de sargazo) en el dominio de interés. Dicho dominio se divide en regiones (por ejemplo una cuadrícula) y se considera una distribución inicial sobre dicha cuadrícula (de preferencia uniforme) y se calcula la probabilidad de que las partículas que inicialmente se encontraban en una caja se muevan hacia otra en un tiempo característico T .

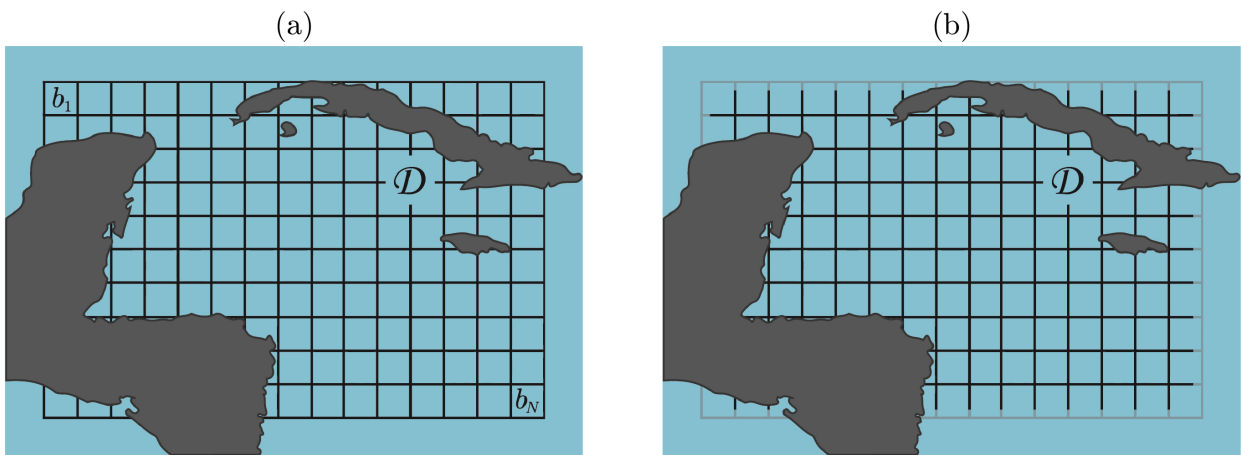


Figura 6. Dominio de la cadena de Markov, donde los estados accesibles están definidos por una malla regular cuadriculada. (a) Es el caso con dominio cerrado y (b) abierto.

Empecemos suponiendo que nos encontramos en una región cerrada en la que nos interesa conocer las distribuciones de partículas, como se muestra en la Figura 6 denotado por \mathcal{D} . Definimos a los estados accesibles como pequeñas regiones llamadas bins, que son cajas pertenecientes a una malla regular y denotados por b_1, \dots, b_N en la Figura 6. Lo que caracteriza la estocasticidad del problema es la transición de un caminante aleatorio (partícula de sargazo) que se encuentra en la caja b_j y se mueve a alguna de las cajas vecinas influenciada por las corrientes y vientos, pero con un cierto factor azaroso debido a las fluctuaciones provocadas por escalas no resueltas de turbulencia, olas o remolinos de pequeña escala, o simplemente porque el problema es caótico. Vale la pena mencionar que los métodos numéricos empleados para resolver las ecuaciones contienen, per se, un factor de ruido debido a la precisión finita del cálculo numérico, conocido como ruido numérico, por lo que no siempre es necesario agregar ruido aleatorio adicional al problema, como se hace en este trabajo.

El mapeo que nos indica la evolución de la distribución de probabilidad en el dominio espacio-temporal,

es decir, cuan probable es pasar de una distribución de partículas a otra en un paso de tiempo T es conocido como matriz de transición de probabilidades. La obtención de esta matriz suele ser una tarea nada trivial, pero afortunadamente existen métodos como el propuesto por Ulam (1960) que ayudan a obtener este mapeo en espacios discretos de manera sencilla. Matemáticamente se dice que la matriz se obtiene proyectando la densidad de probabilidad sobre un espacio vectorial de dimensión finita sobre una base discreta, conocida como proyección de Galerkin (Kovács & Tél, 1989; Koltai, 2011). En la práctica, esto se traduce en un cálculo relativamente sencillo en el que la información de la posición de las partículas en las cajas de un dominio se usa para calcular las entradas de la matriz de transición P calculando

$$P_{ij} = \frac{\text{no. de puntos en } b_j \text{ al tiempo } t \text{ que se mueven a } b_i \text{ al tiempo } t + T}{\text{no. de puntos en } b_i \text{ al tiempo } t}, \quad (8)$$

donde los subíndices en P_{ij} se leen como la probabilidad de visitar la j -ésima casilla en un paso de tiempo T (al tiempo $t + T$), dado que se proviene de la i -ésima casilla al tiempo t ; $b_i, b_j \in \{b_1, \dots, b_N\}$, es el conjunto de cajas o bins disjuntos que cubren el dominio.

Para el cálculo se utilizan todas las trayectorias disponibles considerando solo diferencias en tiempos, no su origen, y se estima una matriz de transición P con todos los casos disponibles. Se considera que dicha matriz no cambia en el tiempo y contiene la información de como tienden a ocurrir los cambios de posición de las partículas, correspondientes al periodo de los experimentos seleccionados para el cálculo. P tiene las propiedades de una matriz estocástica y entre sus características más destacables es que es positiva, es decir, todas sus entradas son iguales o mayores a cero y dependiendo de su construcción puede ser estocástica por filas o columnas (o por ambas), esto significa que la suma de cada una de sus filas o columnas es igual a 1. Con ello se garantiza la conservación de la probabilidad. No está de más mencionar que una matriz estocástica es de alguno de estos dos tipos y, por tanto, puede ser estocástica por filas o bien por columnas, si es por ambas se conoce como doble estocástica.

La manera en la que opera la matriz P se puede ver en la evolución de la probabilidad, que se obtiene de la siguiente relación

$$Pr(x_{t=(n+1)T} \in b_j) = \sum_{i=1}^N P_{ij} Pr(x_{t=nT} \in b_i). \quad (9)$$

Como se puede intuir la Ecuación 9 puede escribirse en forma vectorial, donde una distribución de probabilidad (vector fila o columna, según sea el caso) puede interpretarse como la concentración de un trazador o la densidad de partículas, suponiendo que el material no se pierde y partiendo de que el valor

máximo es 1, por lo que se puede entender el problema como la evolución probabilista de concentraciones, como lo hacen González Amador & Zavala Sansón (2023); Maximenko et al. (2012).

Además de suponer que nuestro proceso es Markoviano, también consideramos que es estacionario, lo que facilita la estadística del problema. Si se trabaja con un proceso estocástico estacionario, su estadística no depende del tiempo y la matriz de transición no depende del tiempo inicial t , solo depende del paso de tiempo T . Por otra parte, se pueden estudiar las propiedades asintóticas en el tiempo de la cadena de Markov (Miron et al., 2019a), que por ser estocástica (por filas en nuestro caso) se sabe que existe una distribución estacionaria. Si además se cumplen dos condiciones importantes: (1) la denominada como *irreductibilidad*, que indica que la probabilidad de visitar cualquier bin de la malla, independientemente de la condición inicial en la que se empieza, es diferente de cero y (2), la de *aperiodicidad* que exige que ningún estado del sistema sea revisitado cíclicamente; entonces una implicación poderosa es la unicidad de la distribución estacionaria, la cual se establecerá asintóticamente independientemente de la distribución probabilidad inicial con la que se empieza.

Cabe destacar que las condiciones de irreductibilidad y aperiodicidad se cumplen cuando el dominio del fluido es cerrado, lo cual no suele ser el caso. Esto se esquematiza en la Figura 6 y se entiende como la posibilidad de que las partículas abandonen el dominio de interés. En (Miron et al., 2021) se propone una solución a este problema, que consiste en aumentar la cadena de Markov con un estado bidireccional llamado *estado nirvana*, implementado en múltiples trabajos (Drouin et al., 2022; Beron-Vera et al., 2022; Olascoaga & Beron-Vera, 2023), el cual es un estado virtual que se agrega a la cadena para compensar los desequilibrios que provoquen las salidas de partículas. La matriz de transición es remplazada por

$$P \equiv \begin{pmatrix} P^D & p^{D \rightarrow w} \\ p^{D \leftarrow w} & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

donde P^D es la matriz de transición que se calcula a partir de las trayectorias dentro de D , $p^{D \rightarrow w}$ da el flujo de salida y $p^{D \leftarrow w}$ da el flujo de entrada a D .

En resumen, para calcular las transiciones probables de distribuciones de partículas basta con conocer las trayectorias en diferentes tiempos. Con ello se puede obtener la matriz de transición de probabilidades que es un operador que nos permite conocer la evolución de la probabilidad. Una vez que se tiene dicha matriz, la evolución de las distribuciones de probabilidad se reducen a la multiplicación de una matriz por un vector.

2.3. Distribuciones Invariantes

En el capítulo anterior se mencionó la existencia de distribuciones invariantes que se establecen a lo largo del tiempo, la cual permite realizar exploraciones interesantes de la cadena. Para hablar con mayor precisión, los sistemas que cumplen con ser irreducibles y aperiódicos tienen la propiedad de que el eigenvalor más grande de la matriz de probabilidad P es $\lambda = 1$ y tiene multiplicidad 1 (Norris, 1997). Su eigenvector derecho es $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$, es decir, $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$. Denotamos al eigenvector izquierdo correspondiente por $\vec{\pi}$, el cual es positivo por componentes y representa una distribución invariante, ya que $\vec{\pi}P = \vec{\pi}$. Se suele normalizar a $\vec{\pi}$ para que cumpla $\sum \pi_i = 1$ y pueda interpretarse como un vector de probabilidad.

Es posible identificar regiones del dominio que presentan poca conexión, en el sentido de que existen regiones en las que las partículas permanecen por periodos largos, sin salir a otras regiones. La manera en la que se pueden identificar dichas regiones, a las que nos referiremos como cuasi estacionarias, es inspeccionando los eigenvectores de P con $\lambda \approx 1$. La magnitud de los valores propios cuantifica el decaimiento de los vectores propios, siendo los valores más altos (pero cercanos a 1) los que decaen más lentamente (Miron et al., 2019a). Las distribuciones correspondientes a estos eigenvectores nos ayudan a encontrar máximos locales en los que las trayectorias se establecen a largo plazo.

Empleando los máximos locales antes mencionados es posible identificar dos tipos de cuencas de atracción (hacia adelante y hacia atrás) que se relacionan con los eigenvectores izquierdos y derechos de la matriz de transición. Las regiones donde el eigenvector izquierdo se maximiza indican un conjunto de atracción hacia adelante casi invariante, mostrando los sitios en los que terminarán recurrentemente las trayectorias. Cuando el eigenvector derecho se maximiza resalta cuencas de atracción hacia atrás casi invariantes, son regiones en las que comienzan trayectorias que convergen a la cuenca de atracción de llegada. Es con estas distribuciones de probabilidad estacionarias que es posible hallar la conexión o desconexión entre diferentes zonas del fluido.

Una manera de hallar las regiones conectadas y sus demarcaciones es inspeccionar los conjuntos de atracción, que siempre contiene una parte negativa y otra positiva. Estos conjuntos están asociados de manera que la parte negativa (positiva) en el atractor hacia atrás termina en la correspondiente distribución negativa (positiva) del atractor hacia adelante.

Entonces, las demarcaciones donde se maximizan los atractores (eigenvectores derechos) proporcionan un posible origen de las trayectorias que eventualmente terminaran en las cuencas de atracción (eigenvector

izquierdo). La manera de construir las conexiones entre estos conjuntos es evolucionando las zonas de “origen” con la matriz P . Al cabo de suficientes transiciones se podrá obtener que las partículas se han congregado en las cuencas de atracción. Las casillas visitadas durante estas transiciones revelan lo que se conoce como geografía Lagrangiana, que son las zonas del dominio en las que las partículas pueden pasar tiempos largos (Miron et al., 2017), esto se esquematiza en la Figura 7 (a).

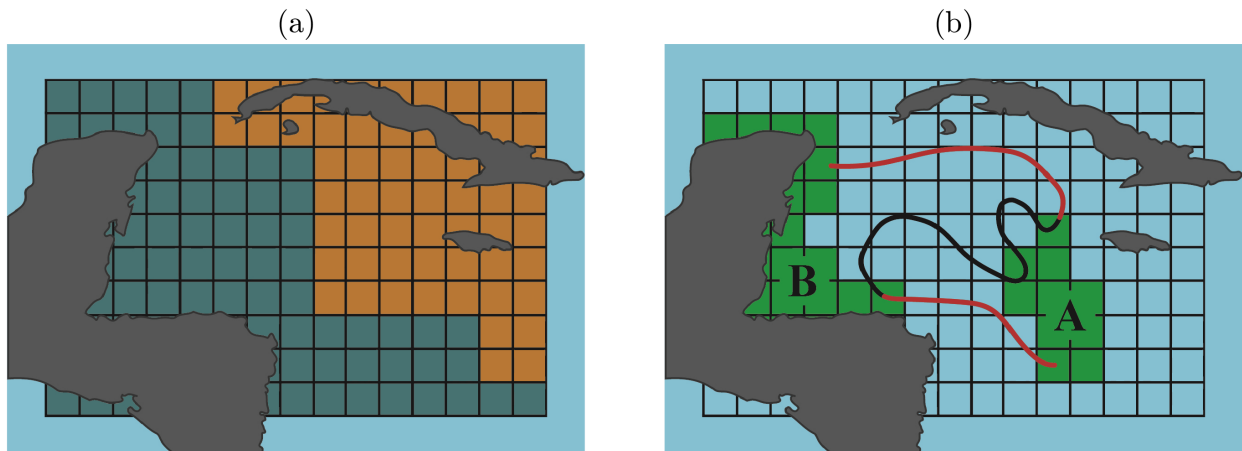


Figura 7. En ambas figuras se muestra un dominio cerrado de fluido donde toma lugar la cadena de Markov. En (a) se ejemplifica la geografía Lagrangiana y en (b) se observan dos zonas de interés, siendo A la salida, B el objetivo y las curvas en rojo son las trayectorias reactivas que van en dirección $A \rightarrow B$.

2.4. Teoría de Caminos de Transición

Conocer la geografía Lagrangiana resulta muy útil para determinar que a una partícula le resultara difícil o tardado llegar de una zona a otra. No obstante, esto no nos da información más específica de cómo ocurren las arribaciones a las costas. Para ello es deseable poder describir, si es que existe, el vínculo entre las costas y el resto del dominio del fluido. Para describir las rutas que conectan más directamente dos zonas de interés existen extensiones de las herramientas probabilísticas antes descritas, entre ellas la Teoría de Caminos de Transición (TPT) ya mencionada anteriormente en forma general. Dicha teoría se construyó precisamente para identificar, en forma estadística, a los conjuntos de trayectorias llamadas reactivas, que conectan directamente una zona fuente A y un sitio objetivo B en una cadena de Markov, como se muestra en la Figura 7 (b). Cabe mencionar que cuando decimos que conectan “directamente” nos referimos a que nos interesan las trayectorias que cumplan estrictamente en ir de A a B sin visitar A .

Describimos ahora los elementos con los que se construye TPT. Los principales objetos de TPT son

las probabilidades de ocurrencia (referidos en inglés como *committor probabilities*) hacia adelante q^+ y hacia atrás q^- , que indican la probabilidad de que una partícula en una caja cualquiera viaje al objetivo B y la probabilidad de que una partícula en un bin cualquiera provenga de la salida A , respectivamente. La utilidad de estas probabilidades de ocurrencia, junto con la distribución de probabilidad invariante π (que define la probabilidad $Pr(x_t \in b_i) = \pi_i$ que se establece asintóticamente), se encuentra en su implementación para expresar variables estadísticas del ensamble de trayectorias reactivas; a continuación se presentan estas variables.

1. Distribución de probabilidad reactiva

$$\pi_i^{AB} \equiv q_i^- \pi_i q_i^+, \quad (11)$$

se define como la probabilidad de que una trayectoria esté en un estado b_i durante su transición de A a B .

2. Flujo de probabilidad reactiva

$$f_{ij}^+ \equiv \max \{ f_{ij}^{AB} - f_{ij}^{BA}, 0 \}, \quad f_{ij}^{AB} = q_i^- \pi_i p_{ij} q_i^+, \quad (12)$$

da el flujo neto de trayectorias que pasan por b_i y b_j en un paso de tiempo en su camino de A a B .

3. La tasa de trayectorias que salen de A y entran a B

$$k^{AB} \equiv \sum_{i,j} f_{ij}^{AB}, \quad (13)$$

es la probabilidad por paso de tiempo de una trayectoria reactiva para entrar a B o salir de A

4. Duración de la transición de A a B

$$t^{AB} \equiv \frac{\sum_i \pi_i^{AB}}{k^{AB}/T}, \quad (14)$$

donde T es un paso de tiempo.

Si se normaliza, la distribución de probabilidad reactiva proporciona información sobre la densidad de trayectorias por bin. Esto nos revela (valores altos) los cuales son cuellos de botella por los que se dan las transiciones; los flujos de trayectorias reactivas nos indican las corrientes de transiciones reactivas más probables; la tasa de trayectorias indica con que frecuencia entran trayectorias a B y la duración

de transición calcula el tiempo promedio de transición (Vanden-Eijnden et al., 2010; Miron et al., 2021; Olascoaga & Beron-Vera, 2023).

Entonces, la teoría de caminos de transición nos da una manera de restringir la sucesión de posiciones dadas por la matriz de transición a aquellas que lleguen directamente a nuestra zona de interés y hayan salido de la región que se haya elegido como fuente. Para entender la multiplicidad de trayectorias reactivas empleamos los estadísticos descritos en las Ecuaciones 11 a 14.

2.5. Trayectorias Virtuales

En esta tesis se construyen trayectorias virtuales de sargazo que se utilizan con dos fines, el primero es para evaluar los rangos de factor de arrastre con el viento y su efectividad para emular las distribuciones de sargazo en mar abierto, la segunda es para diseñar experimentos que nos permitan realizar una estadística rigurosa y construcción adecuada de la matriz de transición de probabilidades, para poder aplicar lo descrito en las secciones 2.3 y 2.4.

En el caso del sargazo, que se distribuye mayormente en la superficie del océano y es arrastrado por las corrientes del océano y de los vientos superficiales, se emplea una configuración bidimensional/horizontal para obtener las trayectorias. Esto se expresa como

$$\vec{V}_{sargazo} = \vec{v}_{corriente} + \alpha \vec{v}_{viento}, \quad (15)$$

donde $\alpha \in [0.01, 0.03]$ se llama *factor de arrastre del viento* (windage en inglés) y su valor se fija dependiendo de la parametrización (Putman et al., 2020; Johns et al., 2020); $\vec{v}_{corriente}$ y \vec{v}_{viento} son campos eulerianos de velocidades.

Para obtener los recorridos de partículas de pseudo-sargazo utilizamos el software desarrollado en python *OpenDrift* que resuelve el movimiento de partículas inmersas en el océano y puede ser consultado en <https://opendrift.github.io/index.html>. En particular, para resolver las trayectorias asociadas a la Ecuación 15 es necesario proveer de posiciones iniciales, datos de los campos de corrientes y vientos, así como el tiempo de integración (o duración de la simulación) para resolver las posiciones a cada paso de tiempo; el esquema de integración empleado es Runge-Kutta de cuarto orden. Las posiciones y tiempos de simulación se seleccionan a conveniencia de este trabajo y para los campos de velocidades

se emplean datos de reanálisis. Los datos que no estén incluidos en las bases de datos se obtienen usando el método de interpolación lineal.

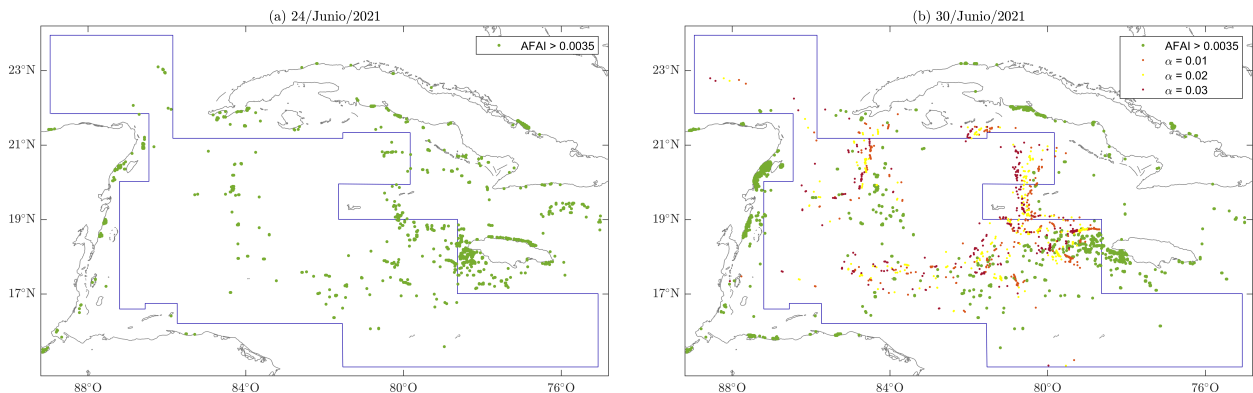


Figura 8. Ambas imágenes muestran la distribución del Índice Alternativo de Algas Flotantes Acumulativo de 7 días (AFAI-7) para valores superiores a 0.0035, representados en color verde. El contorno azul delimita la región de interés considerada para la validación de la distribución de sargazo. La imagen (a) corresponde a la distribución del AFAI-7 del 24 de junio de 2021, mientras que la imagen (b) muestra la distribución siete días después. En (b) también se incluyen las posiciones finales de trayectorias virtuales simuladas con OpenDrift, cuyos puntos de origen corresponden a los marcadores verdes dentro del contorno azul en (a). Los colores indican distintos niveles de arrastre por el viento: naranja para 1 %, amarillo para 2 % y rojo para 3 %.

Lo primero que debemos saber es qué tan realista es OpenDrift para modelar la distribución del sargazo en el mar Caribe. Para ello nos valemos de un sistema de detección de sargazo que emplea información espectral de Imágenes de Media Resolución (MODIS por sus siglas en inglés Moderate-Resolution Imaging Spectroradiometer) el cual examina la reflectancia de borde-rojo de la vegetación flotante (Hu et al., 2015), con un enfoque novedoso conocido como Índice Alternativo de Algas Flotantes (AFAI Alternative Floating Algae Index, por sus siglas en inglés) el cual provee imágenes diarias de la localización de matas de sargazo con una resolución espacial de 1 *km*. Su umbral se encuentran entre -8.77×10^{-4} y 4.41×10^{-2} asociados respectivamente a la cobertura mínima y máxima de sargazo por píxel, (Wang & Hu, 2016). Las detecciones de sargazo pueden verse afectadas por varios problemas pero principalmente la contaminación por nubes. Para compensar el enmascaramiento en imágenes diarias debido a nubes empleamos el índice acumulativo de 7 días, AFAI-7. Estos datos pueden ser consultados en <https://cwcgom.aoml.noaa.gov/cgom/OceanViewer/>. Otra complicación es la sobre estimación cerca de las costas, por lo que para resolver esto solo consideramos datos lejanos de las costas (de al menos 20 *km* de distancia). El dominio seleccionado se observa delimitado por el contorno azul en la Figura 8 (a) y (b). Debe recordarse que una imagen de AFAI-7, representa un compuesto de 7 días y no una fotografía instantánea de la distribución de sargazo.

Buscamos validar el modelo comparando los resultados de simulaciones de trayectorias mediante OpenDrift con observaciones satelitales. Estamos especialmente interesados en las posiciones finales de dichas

simulaciones, pues las comparaciones con imágenes satelitales se restringen a verificar que las distribuciones observadas y simuladas del sargazo son similares, ya que en realidad no disponemos de trayectorias reales que, por ejemplo, nos permitan ajustar el parámetro α en la ecuación 15. El hecho de que las imágenes sean “compuestas” de 7 días también dificulta las comparaciones, por lo que a fin de cuentas, lo que buscamos es solamente que haya cierta consistencia en las distribuciones de partículas observadas y modeladas.

Para llevar a cabo este análisis, utilizamos algunas imágenes satelitales como condiciones iniciales para sembrar partículas en el modelo y calcular sus posiciones a lo largo de un periodo de 7 días. Luego, comparamos las distribuciones finales con la imagen satelital correspondiente al último día de simulación. Es importante destacar que solo se consideran imágenes con baja nubosidad y valores de AFAI-7 mayores o iguales a 3.5×10^{-3} , que representan píxeles con una cobertura casi total de sargazo (1 *km*). Cada píxel que cumpla lo antes mencionado y se encuentre dentro del dominio azul de la Figura 8 se utiliza para sembrar una partícula.

Este proceso se repite para diferentes arrastres de viento, es decir, variando $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.02$ o $\alpha = 0.03$. Debido a la estacionalidad del sargazo en el mar Caribe (predominante en primavera y verano) y la frecuente presencia de nubes, contamos con un número limitado de casos. Encontramos un total de 4 periodos que corresponden al 01 de junio 2021 - 07 de junio 2021; 24 de junio 2021 - 30 de junio 2021; 28 de julio 2021 - 03 de agosto 2021 y 13 de agosto del 2021 - 19 de agosto del 2021. Los resultados de este análisis se presentan más adelante. Como ejemplo, en la Figura 8 (b) se muestran las posiciones finales obtenidas para el 24-30 de junio de 2021 con simulaciones del modelo y las identificadas en la imagen de satélite. La idea es tratar de cuantificar qué tan parecidas son las distribuciones observadas y modeladas.

Para ello construimos mapas de distribución de sargazo dividiendo la región dentro del contorno azul de la Figura 8 en cajas de $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ (aproximadamente 39 *km*), lo que da un número de 957 bins (cajas). Empezamos por contar el número de “partículas virtuales” presentes en cada bin y realizamos el mismo ejercicio de contar partículas por bin en la fecha correspondiente empleando imágenes satelitales. Dada la naturaleza de los experimentos de trayectorias virtuales, puede haber pérdida de partículas (si estas terminan fuera de la región), pero nunca puede haber más. En el caso de las estimaciones realizadas con AFAI-7 nos enfrentamos a la no conservación de partículas de forma casi segura; esto ocurre por el ingreso de nuevas matas de sargazo a la región de interés o bien por el crecimiento/muerte del mismo. Para dar una idea de dónde hay altas concentraciones de partículas y “sargazo” normalizamos los resultados por bin dividiendo entre el máximo número de puntos posible

$$\rho_i = \frac{\text{no. de puntos en el } i - \text{ésimo bin}}{\text{máximo no. de puntos en un bin}}, \quad (16)$$

De esta forma podemos obtener mapas en una escala común y comparar las porciones que se encuentran en cada bin. No es un cálculo típico de densidades/concentraciones, solo una forma de presentar zonas con mayor presencia de “material” de forma unificada. Los mapas serán obtenidos empleando la Figura 8 (b) y sus análogas para el 7 de junio, 03 de agosto y 13 de agosto del 2021. Los mapas se presentan más adelante, donde se han excluido (sin colorear) los bins sin presencia de sargazo para evitar que se confundan con regiones de baja concentración. Es importante señalar que los bins de esta sección no son los mismos que forman parte del espacio de estados de la cadena de Markov, estos últimos los denotamos por $\{b_1, \dots, b_N\}$, notación que no se ha utilizado en esta sección.

2.6. Diseño de experimentos

Para la construcción de nuestro principal elemento (la matriz de transición de probabilidades) debemos obtener trayectorias virtuales que cubran nuestra región de interés, el mar Caribe occidental, más específicamente la zona ubicada entre $89^\circ O$ a $75^\circ O$ y $15^\circ N$ a $24^\circ N$. Se debe tener un número considerable de trayectorias (en nuestro caso cerca de 9,000 por día) para realizar una estadística confiable, y para ello se siembran partículas diariamente todo el año 2021, las cuales son distribuidas homogéneamente en una cuadrícula con separaciones 0.12° (aproximadamente 18 km) y posteriormente se hacen evolucionar sus posiciones durante 15 días con el modelo OpenDrfit. Como ya lo hemos mencionado antes, nuestros experimentos están sujetos al factor de arrastre por el viento, consistente con las estimaciones encontradas en otros trabajos (Putman et al., 2020; Johns et al., 2020). Por ello se repiten las simulaciones para cada uno de los casos de arrastre por el viento en los que se emplea un factor de 1%, 2% y 3% respectivamente. En la Figura 9 se muestra uno de los experimentos realizados, con un factor de arrastre de 2%.

Otro elemento de suma importancia es el tiempo de transición T presente en la Ecuación 8. En un principio se podría pensar que este tiempo puede ser escogido sin ninguna restricción, pero en la realidad no siempre es así, se debe garantizar que el proceso que se está simulando en efecto carece de memoria. Para garantizar esto existen cantidades estadísticas que explican qué tan correlacionadas permanecen las posiciones de una partícula a medida que pasa el tiempo y en que momento se pierde esta relación,

para construir esta sección hemos obedecido principalmente Zavala Sanson (2021), pero también puede consultarse Ohlmann & Niiler (2005); Poulain & Niiler (1989). El estadístico que nos ayuda a resolver este problema es la función de autocorrelación de la velocidad de una partícula, que para procesos ergódicos y estacionarios se puede calcular como

$$R_{ii}(\tau) = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} V_i(t)V_i(t + \tau)dt, \quad (17)$$

donde V_i es una componente de la velocidad a lo largo de la trayectoria con $i = x \vee y$, T_p es el tiempo total de un proceso y τ son las diferencias o retrasos respecto a t .

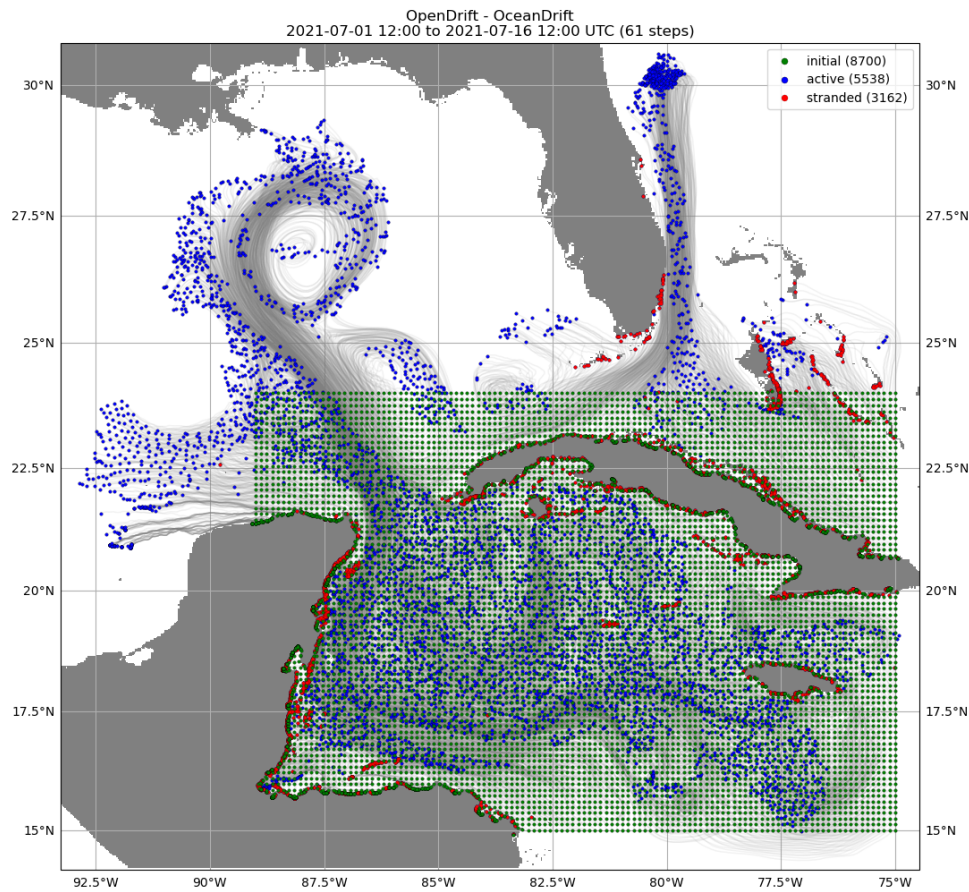


Figura 9. Trayectorias de 15 días de 8700 partículas que se inicializan el 01 de julio del 2021, sembradas en el mar Caribe occidental y advectadas por las corrientes y un factor de arrastre con el viento de 0.01. El color verde y azul son las posiciones iniciales y finales, respectivamente; mientras que las partículas que se han varado en las costas se resaltan en rojo.

En nuestro caso, por el número tan elevado de partículas y la presencia de patrones de circulación bien definidos y de largo plazo, requerimos un tratamiento ligeramente diferente. Entonces consideramos la

autocorrelación de las velocidades residuales para un conjunto de partículas

$$R_{ii}(\tau) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \left\langle \int_0^{T_p} \tilde{V}(t) \tilde{V}(t + \tau) dt \right\rangle, \quad (18)$$

notemos que esta autocorrelación es un promedio sobre las funciones de autocorrelación para cada partícula, es decir, $\langle * \rangle$ denota promedio sobre realizaciones y/o ensambles, y $\tilde{V} = V - \bar{V}_L$ es la velocidad residual y se utiliza para analizar los movimientos que permanecen después de eliminar los valores promedio \bar{V}_L . En nuestro caso, el subíndice L se refiere al promedio de la velocidad a lo largo de la trayectoria de cada partícula.

Utilizando la autocorrelación, es posible calcular la escala de tiempo promedio en la que el movimiento de una partícula deja de estar influenciado por su pasado. La escala que mide esta memoria se conoce como tiempo de decorrelación lagrangiana (tiempo lagrangiano) y se define como

$$T_i^L = \int_0^{\infty} R_{ii}(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Con esta escala es posible obtener una escala espacial lagrangiana, que en esencia explica la pérdida de correlación en un tiempo lagrangiano, solo que en distancia. Se define como

$$L_i^L = \left(\overline{V_i^2} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} R_{ii}(\tau) d\tau \quad (20)$$

donde el término delante de la integral es la desviación estándar, más explícitamente

$$\overline{V_i^2} = \frac{1}{T} \int_0^T V_i(t)^2 dt. \quad (21)$$

Para calcular las Ecuaciones 19 y 20 la integral de la correlación puede no converger, para eludir este problema se integra hasta el tiempo t_c en el cual la autocorrelación es igual a cero. En la práctica las Ecuaciones 20 y 21 se obtienen utilizando la velocidad residual y así lo hemos hecho nosotros.

Para nuestro caso, se obtuvieron las escalas de decorrelación lagrangianas considerando todas las series de tiempo diarias de 2021 de 15 días de duración y calculamos para cada caso de arrastre con el viento (1% \vee 2% \vee 3%). En la Figura 10 se presentan los resultados obtenidos para el caso $\alpha = 0.01$. En

(a) observamos que conforme se consideran mayores separaciones temporales las velocidades tienden a diferenciarse más. Por otra parte, en (b) obtuvimos que las partículas pierden correlación poco después de un día en ambas direcciones (zonal y meridional), siendo de 1.357 días para movimientos zonales y 1.292 días para los meridionales; la escala Lagrangiana de longitud obtuvo 20 km y 31 km aproximadamente para movimientos zonales y meridionales, respectivamente. El resultado fue similar para los casos $\alpha = 0.02$ y $\alpha = 0.03$, el promedio sobre las direcciones y para los tres casos es $T^L = 1.22$ días y $L^L = 28$ km. Resulta razonable considerar un paso de tiempo de 1.25 días para la construcción de matriz de transición de probabilidades. Por otra parte, para elegir el tamaño de la malla y, por tanto, las dimensiones de los estados accesibles hacemos uso de la escala Lagrangiana de longitud. Se seleccionaron cuadrados de $0.22^\circ \times 0.22^\circ$ (aproximadamente 34 km), lo cual nos deja con un número de estados accesibles de ~ 1000 . En realidad, estos cálculos proveen límites inferiores y podrían usarse tiempos mayores para estimar la matriz de transición. Notar que este tiempo no es el paso de tiempo utilizado para mover las partículas con el modelo OpenDrift sino el que se emplea para obtener la matriz de transición de probabilidad.

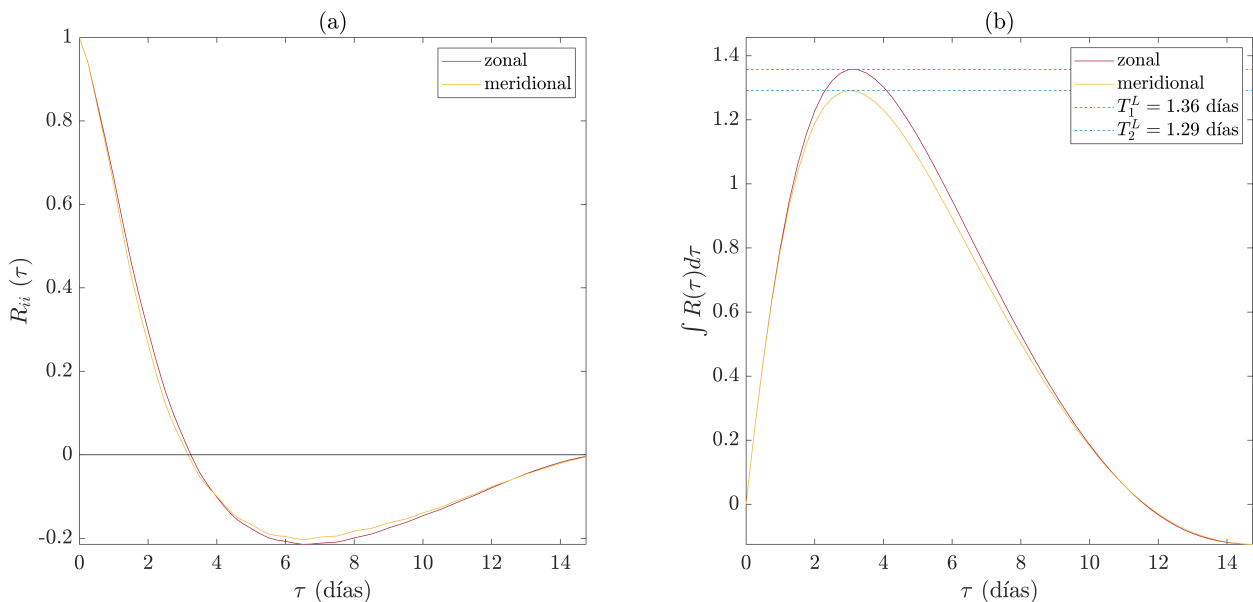


Figura 10. (a) Autocorrelación y (b) su integral a lo largo del tiempo para trayectorias de longitud correspondientes a 15 días. Los colores rojo y amarillo corresponden a la descomposición del movimiento en componentes zonal y meridional, respectivamente. Las líneas horizontales azules en (b) corresponden a la integración de la autocorrelación hasta el primer cero e indican la escala Lagrangiana de tiempo para cada dirección.

Para construir la matriz de transición de probabilidades y las variables estadísticas Ecuación 11 a 14 utilizamos una versión modificada de la aplicación TranSpill.m desarrollada por Berón y Olascoaga (Olascoaga & Beron-Vera, 2023) a quienes agradecemos haberla proporcionado y por su guía para utilizarla. Esta aplicación llama a su vez una función que calcula la matriz de probabilidades, vía el

método de Ulam. Las entradas que requiere este programa son: las regiones de salida (A u origen) y llegada (B u objetivo); los recortes de trayectorias de longitud correspondiente al paso de tiempo $T = 1.25$ días; el dominio de la cadena de Markov ($88^{\circ}O$ a $76^{\circ}O$ y $16^{\circ}N$ a $23^{\circ}N$). Notar que el espacio de estados es un grado de distancia menor que el dominio de sembrado de trayectorias descrito en la sección 2.6. Como estamos interesados en observar los cambios mensuales, se construyeron matrices correspondientes a cada mes del 2021 integrando trayectorias con el modelo Opendrift cada día del mes por 15 días. No está de más remarcar que independientemente del mes al que corresponda una matriz P , su tiempo de transición siempre será $T = 1.25$ días, el cual representa el 'tamaño de salto' de una transición, mientras que el mes de correspondencia indica que para la construcción de la matriz se emplearon las trayectorias de ese periodo y, por tanto, la matriz contiene probabilidades asociadas a los movimientos que ocurrieron durante ese periodo. Con la intención de mejorar la estadística, aumentando el número de realizaciones/experimentos, hemos extendido el periodo entendido como "mes" desde el primer día de cada mes hasta el quinceavo día del mes próximo.

Capítulo 3. Resultados

Antes de mostrar los cálculos realizados con TranSpill y obtener las matrices de transición de probabilidades, presentamos las elipses de variabilidad mensuales de vientos y corrientes. Proseguimos con la evaluación que se realizó de las trayectorias de pseudo-sargazo con OpenDrift para garantizar que el modelo tiene relación con las observaciones. Posteriormente, calcularemos los eigenvalores y eigenvectores de cada matriz de transición, así como las regiones en el espacio que se encuentran conectadas. Finalmente, obtendremos las trayectorias reactivas que conectan las costas del mar Caribe occidental con las fronteras sur y este del dominio por donde arriba el sargazo a la región.

3.1. Variabilidad de corrientes y vientos del Caribe occidental en 2021

Implementando la metodología descrita en la sección 2.1 se obtuvieron las elipses de variabilidad que se muestran junto con las velocidades medias en las Figuras 11 y 12 de corrientes y vientos, respectivamente. En ellas se muestran uno de cada quince puntos del total en el caso de las corrientes, mientras que para los vientos se muestra uno de cada seis. Se ha escogido esta densidad de puntos con la intención de que la variabilidad sea apreciable, pero se ha cuidado de escoger una porción que sea representativa de todos los datos.

Hablando de las corrientes superficiales, que se muestran en vectores azules en la Figura 11, se puede apreciar que las velocidades más intensas corresponden a la corriente de Yucatán que junto con la corriente Caimán son los flujos que permanecen a lo largo de todo el año. Esta última sufre variaciones de inclinación, un caso evidente es (i) septiembre, donde los vectores pierden bastante zonalidad entre $84^{\circ}O$ y $87^{\circ}O$. Los flujos de estas corrientes también parecen ser alimentados por la presencia de remolinos anticiclónicos grandes, como se ve en (d) abril, (e) mayo y (g) julio. En general se puede observar la presencia de remolinos a lo largo de todo el año; quizás el más representativo sea el ciclón de Honduras (o Belice) en el sur oeste de la región, este se aprecia con claridad en el mes de (k) noviembre. En términos de variabilidad se puede observar, en color rojo y amarillo, que en las corrientes dominantes (de Yucatán y Caimán) la máxima variabilidad tiende a orientarse casi en la misma dirección que las corrientes, esto también parece ocurrir con frecuencia en los remolinos. En invierno y finales de otoño podemos apreciar una disminución en la magnitud de las fluctuaciones, pero en general las fluctuaciones más bajas siempre se sitúan a lo largo de la costa caribeña de Cuba y al sur, cerca de las costas de Honduras.

Corrientes 2021

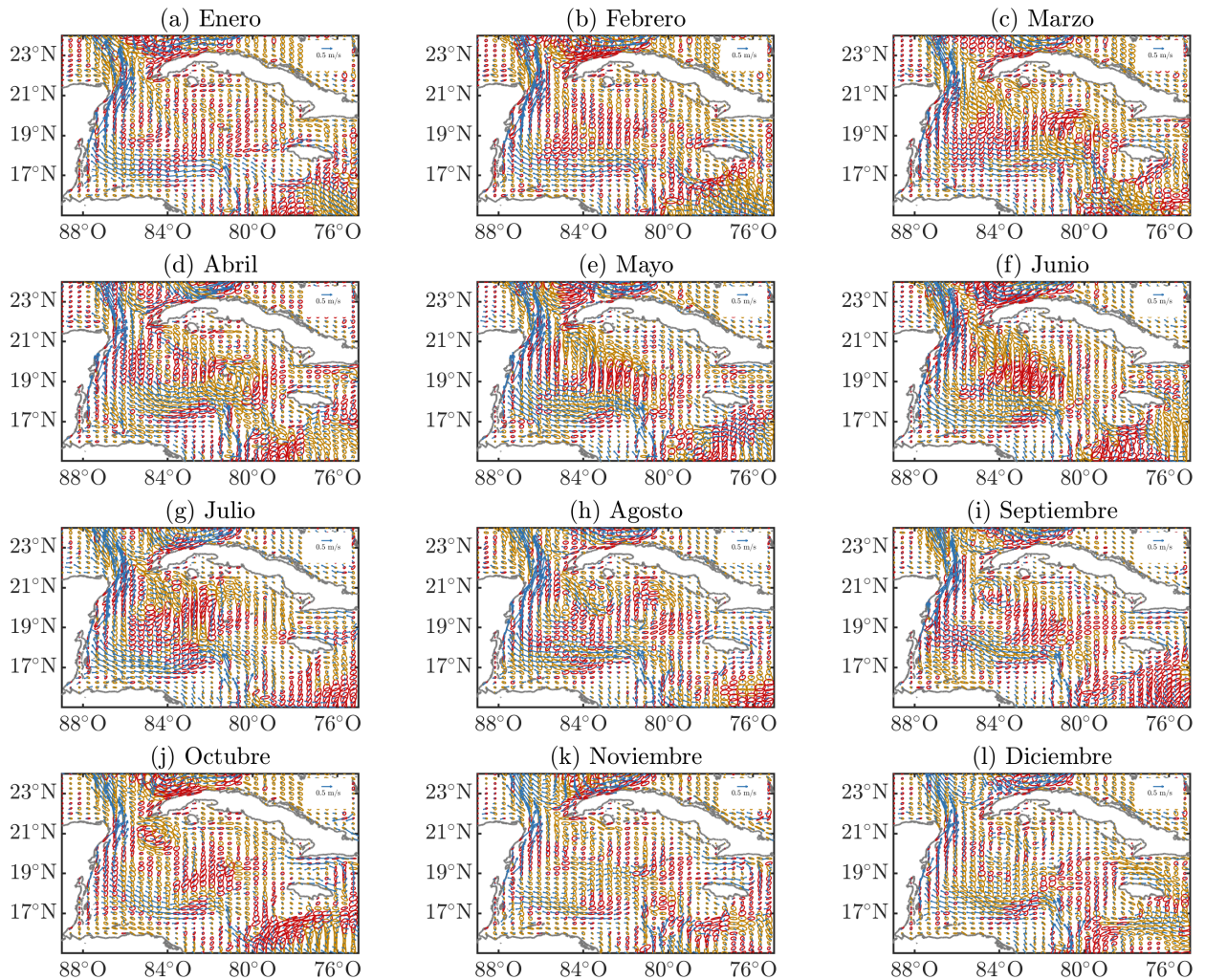


Figura 11. En rojo y amarillo se muestran las elipses de variabilidad de velocidades de las corrientes oceánicas, el color se asigna dependiendo del ángulo de inclinación de la elipse: rojo para inclinaciones entre $(0, \pi/2]$ y amarillo entre $[-\pi/2, 0)$, midiendo el ángulo desde la horizontal y asociando valores positivos a ángulos barridos hacia el norte y positivos hacia el sur. En vectores azules se presentan las corrientes medias mensuales.

La tendencia direccional de los vientos, como se muestra en la Figura 12, es de este a oeste a lo largo de todo el año. Podemos observar que en el periodo (j) octubre, (k) noviembre, (l) diciembre y (a) enero prevalece una componente al sur, esta direccionalidad se mantiene en el sureste de la región en (b) febrero y (c) marzo. Es noviembre el mes que cuenta con la mayor componente hacia el sur. Por su parte, de (d) abril a (f) junio hay una componente hacia el norte, aunque esta es menor en magnitud comparada con la que se presenta hacia el norte en invierno y finales de otoño. La magnitud de la velocidad es un factor que se mantiene bastante uniforme en el año, mientras que hay un cambio regional entre el océano y el continente donde se ve menguada, pero esta variación no resultará relevante en lo que sigue pues el sargazo es arrastrado en el mar. Con respecto a la variabilidad se puede mencionar que es casi uniforme en todos los puntos del dominio y a lo largo del año. Los cambios más dramáticos se presentan

en términos de magnitud de (a) enero a (c) marzo.

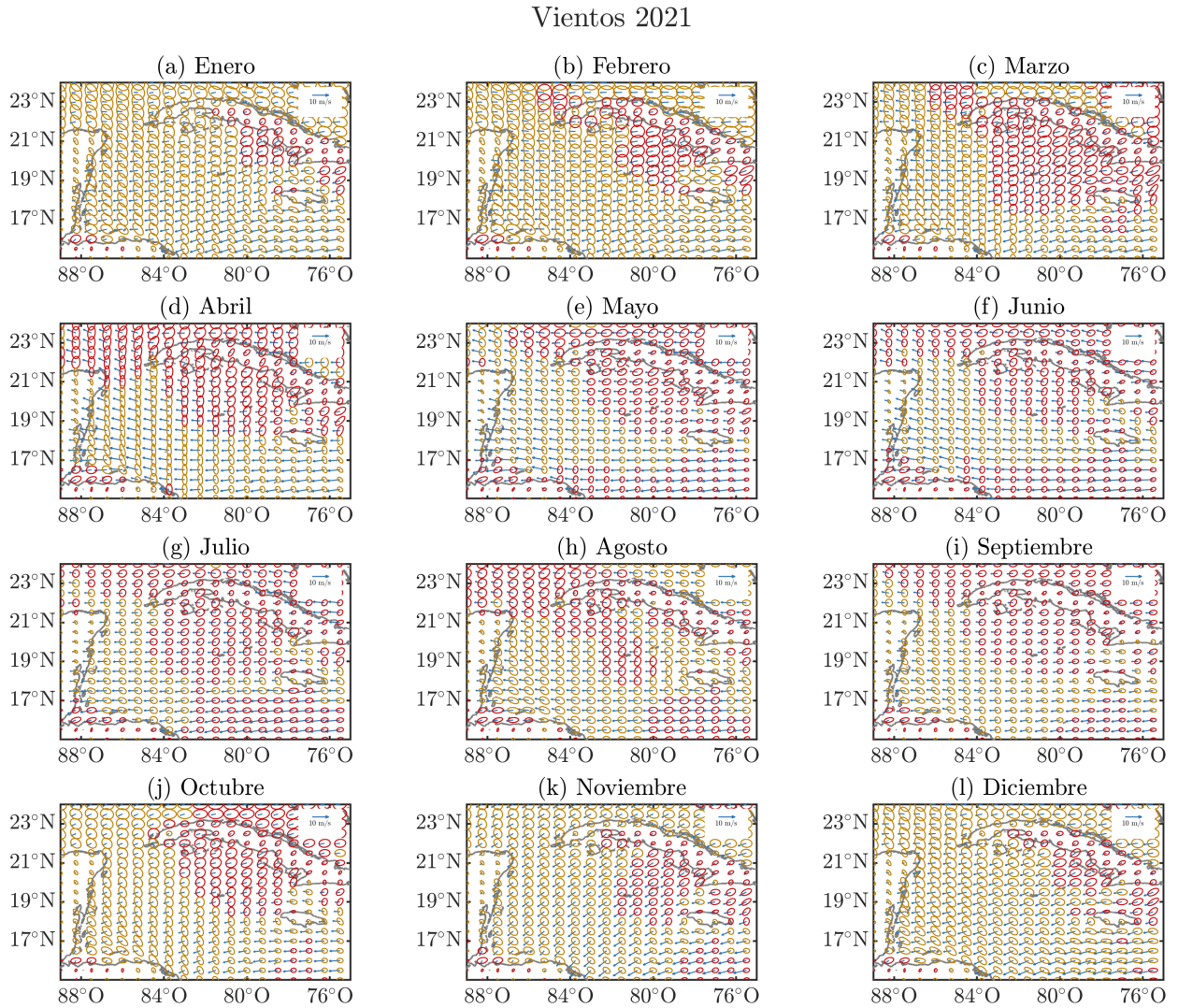


Figura 12. Los vectores azules corresponden a las velocidades del viento medias mensuales a 10 m. Las elipses de variabilidad pueden ser rojas o amarillas: el color se asigna dependiendo del ángulo de inclinación de la elipse, rojo para inclinaciones entre $(0, \pi/2]$ y amarillo entre $[-\pi/2, 0)$, midiendo el ángulo desde la horizontal y asociando valores positivos a ángulos barridos hacia el norte y positivos hacia el sur.

3.2. Evaluación de las Trayectorias Virtuales

Como ya se mencionó en la sección 2.5 encontramos 4 fechas útiles para realizar nuestra comparación de distribuciones de sargazo satelitales con las simulaciones de trayectorias obtenidas con ayuda de OpenDrift. Los resultados preservaron varias similitudes, por lo que a continuación se describen solo dos. El primer caso del que hablaremos es el 30 de junio del 2021, que corresponde al experimento cuya

condición inicial se observa en Figura 8 (a). Los mapas de distribución de trazadores correspondientes a la Figura 8 (b), se muestran por separado en la Figura 13. La imagen de referencia se puede observar en (a), mientras que las distribuciones virtuales de arrastre con el viento de 1 %, 2 % y 3 % se muestran en (b), (c) y (d), respectivamente. Empecemos mencionando que en todos los casos tienen un aspecto similar que se parece a la distribución de referencia; la configuración de la mayor parte de los bins en todos los casos pareciera dibujar un contorno semicircular que inicia al oeste de Jamaica y termina cerca de Cuba en el canal de Yucatán, la principal diferencia entre los diferentes arrastres con el viento es que este perfil semicircular sufre un corrimiento hacia el oeste conforme se aumenta α ; otra similitud es la alta concentración presente al oeste de Jamaica, de los tres factores de arrastre con el viento el que parece replicar esto de mejor manera es $\alpha = 0.02$.

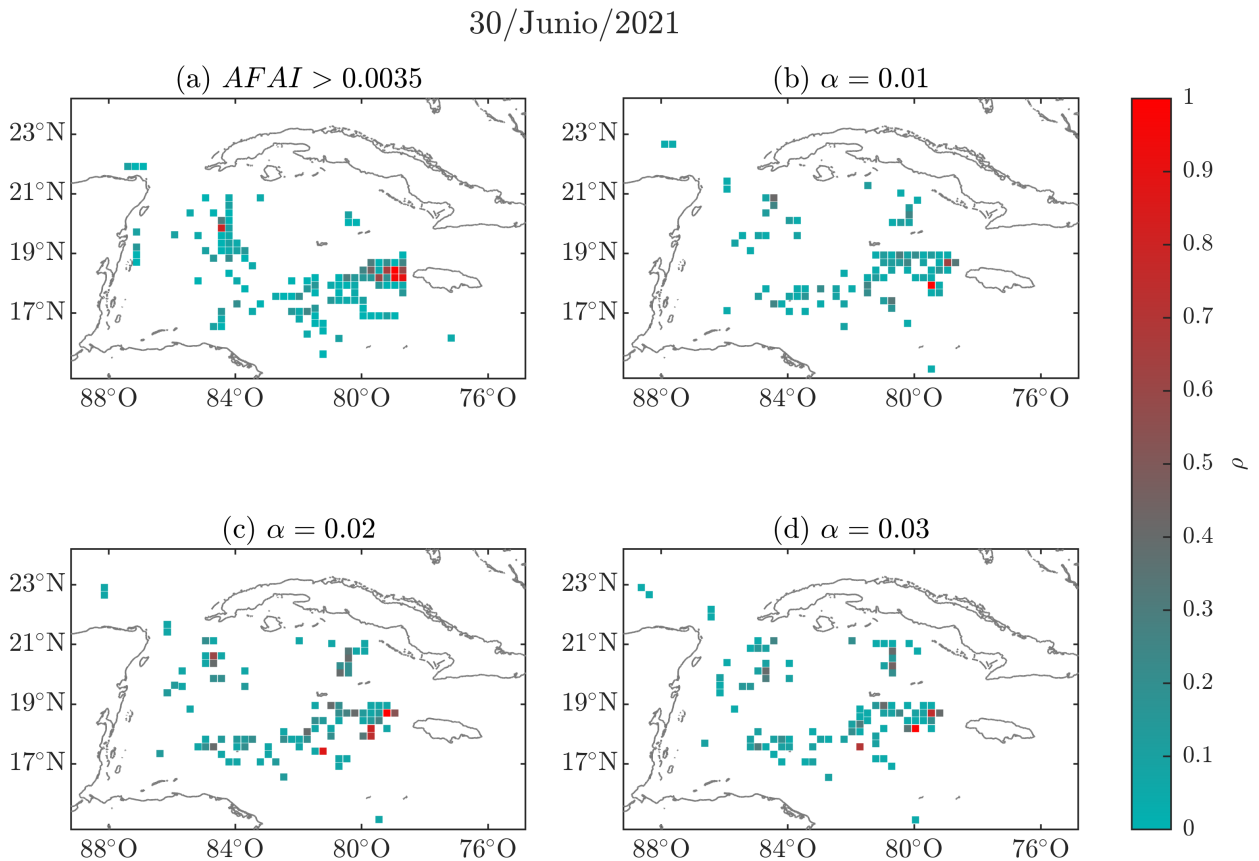


Figura 13. Mapas de distribución de sargazo el 30 de julio del 2021, donde el número de partículas por bin ρ ha sido normalizado por el valor más alto. Los colores rojos se asocian con mayor concentración de trazadores. La imagen de referencia, creada a partir de imágenes satelitales de AFAI, se muestra en (a). Las concentraciones experimentales con α igual a 0.01, 0.02 y 0.03 se muestran en (b), (c) y (d), respectivamente.

La distribución de referencia del 19 de agosto del 2021 se observa en la Figura 14, mientras que en el resto de incisos (b), (c) y (d) se muestran las distribuciones que ocasionan los arrastres con el viento de 1 %, 2 % y 3 %, respectivamente. En todas los casos podemos observar que la mayor concentración de

partículas se encuentra por debajo de los $19^{\circ}N$. En este caso las mayores concentraciones (color rojo) no se encuentran adyacentes, no obstante todos los experimentos fueron capaces de emularlas en regiones que si bien no son cien por ciento coincidentes, si son muy cercanas, la única excepción es el bin rojo más al sur de la región. Por otra parte, el perfil de las concentraciones dibuja una línea horizontal que va desde el sureste de la región hasta el oeste de jamaica, para después distribuirse mayormente de manera zonal.

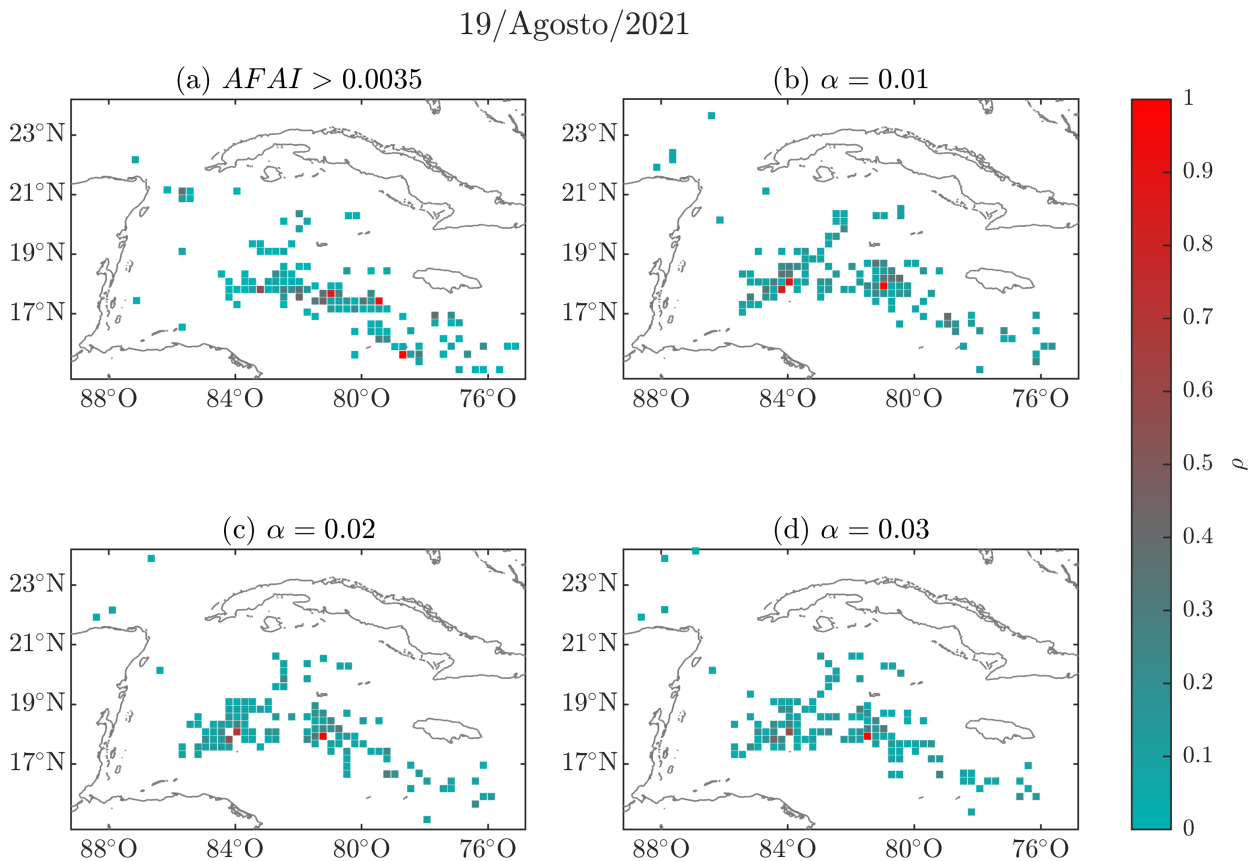


Figura 14. Mapas de distribución de sargazo correspondientes al 19 de agosto de 2021, en los que la cantidad de partículas por bin ρ se ha normalizado respecto al valor máximo. Las áreas en tonos rojos indican una mayor concentración de trazadores. La distribución de referencia, generada a partir de datos satelitales AFAI, se observa en (a). Por otro lado, las concentraciones obtenidas experimentalmente para valores de α de 0.01, 0.02 y 0.03 se presentan en (b), (c) y (d), respectivamente.

Lo obtenido para el resto de los casos (07 de junio, 03 de agosto) resultó similar, en el sentido de que los tres casos de arrastre con el viento generan perfiles de distribución similares. Se hicieron algunas pruebas sencillas para intentar comparar estos campos; no obstante, se debe realizar una validación con un proceso más exhaustivo. Sin embargo, sabemos que se han realizado pruebas que obtuvieron buenos resultados utilizando productos de reanálisis de MERCATOR de corrientes oceánicas (comunicación personal, Berenice García).

Después de comprobar que nuestro esquema de obtención de trayectorias es capaz de distribuir al sargazo razonablemente bien para todos los factores de arrastre con el viento. Calculamos un total de 48 matrices de transición de probabilidades. Cuatro para cada mes del año, que corresponden a variaciones del factor de arrastre con el viento de 0%, 1%, 2% o 3%. Seguimos lo que se describe en la Sección 2.6; se inicia con una malla regular de partículas que se dejan evolucionar 15 días; se extraen las posiciones con separación de 1.5 días de cada trayectoria; se alimenta con estas posiciones/transiciones el software TranSpill.m para obtener matrices de transición mensuales.

3.3. Geografía Lagrangiana

De las 48 matrices calculadas se pueden mencionar ciertas generalidades asociadas con sus eigenvalores más cercanos a 1 y los eigenvectores correspondientes que representan estructuras cuasi estacionarias (Miron et al., 2021). En general, los casos que poseen estructuras que decaen más lentamente (eigenvalores cercanos a 0.99) son aquellos en los que el factor de arrastre con el viento es menor; por su parte, las estructuras de rápido decaimiento tienden a presentarse en los casos con mayor influencia del viento, es decir, $\alpha = 0.03$. De entre todo el conjunto de eigenvectores calculados, se seleccionaron aquellos que cumplan con tener eigenvalores por encima de $\lambda \geq 0.96$. De este conjunto de casos se pudieron observar características comunes, por lo que se presentan los resultados de 4 meses que representan bien estas similitudes.

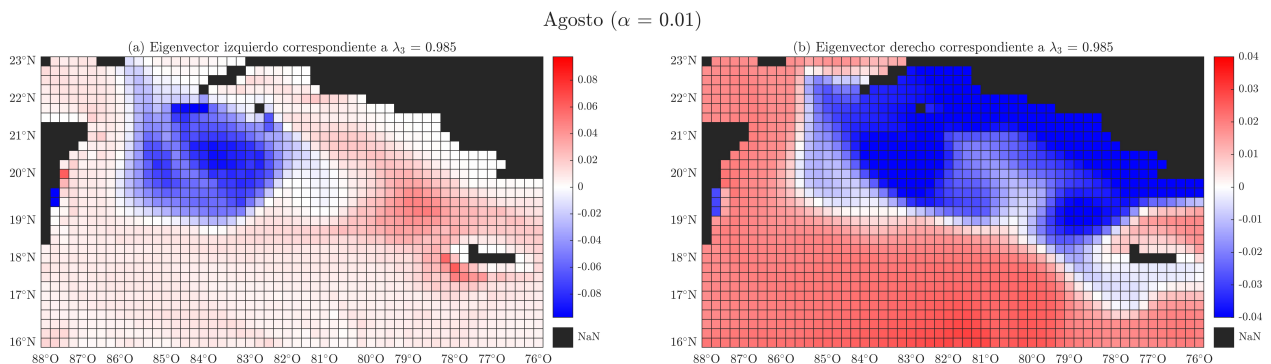


Figura 15. Distribuciones correspondientes a los eigenvectores normalizados (a) izquierdo y (b) derecho, asociado al segundo eigenvalor más alto en agosto del 2021 considerando un factor de arrastre con el viento del 1%. En rojo y azul se destacan regiones donde los valores máximos, en general, están asociados a atractores. Bajo el mapeo sucesivo de P las concentraciones rojo (b) terminan en rojo (a) y azul (b) en azul (a). El color negro corresponde a tierra y/o estados inaccesibles.

La idea principal es analizar las regiones de diferentes signos en los eigenvectores izquierdos y derechos, pues están interconectadas. Las zonas de diferente signo en los eigenvectores derechos (cuencas de

atracción) tenderán a las regiones del mismo signo en los eigenvectores izquierdos (atractores) (Miron et al., 2021). En general, independientemente de si las estructuras decaen de manera lenta o rápida, se identificaron patrones recurrentes en los eigenvectores, es decir, se observan manchas similares en ellos.

Por ejemplo, en varios eigenvectores izquierdos (atractores) se detectan estructuras de tipo circular que sugieren la presencia de un remolino en la entrada más al este del canal de Yucatán, esto se observa en las Figuras 15, 16, 17 y 18 panel (a). Esta estructura también es visible en las corrientes oceánicas superficiales promedio, como se muestran en la Figura 11. En algunos casos, el atractor circular puede llegar a presentar una especie de brazo que se extiende hacia el este sobre la costa de Cuba (entre $23^{\circ}N$ y $22^{\circ}N$), como se ejemplifica con el caso de noviembre en la Figura 18 (a). Este comportamiento se observó en múltiples experimentos. Además, se notó que el atractor azul tiende a maximizarse pegado a las costas de México (entre $19^{\circ}N$ y $20^{\circ}N$). Dada su lejanía y aparente difícil acceso para las cuencas de atracción (eigenvector derecho de color azul), creemos que podría encontrarse desconectado y que se trata de algún posible error de cómputo asociado a la cercanía con la costa, pero habría que evaluar si es realista o un error numérico.

Por otro lado, las cuencas de atracción (atractores hacia atrás en el tiempo) se presentan en la columna derecha de las Figuras 15, 16, 17 y 18. En general se observó una separación en dos regiones: norte y sur. Aunque estas regiones pueden adoptar diferentes formas, en general dividen la cuenca en dos partes de tamaño similar, frecuentemente incluyendo la estructura circular mencionada anteriormente. Un ejemplo de esto es agosto (Figura 15). La zona circular en la entrada del canal de Yucatán, presente en los atractores, parece estar más asociada a la región norte de las cuencas de atracción (azul con azul).

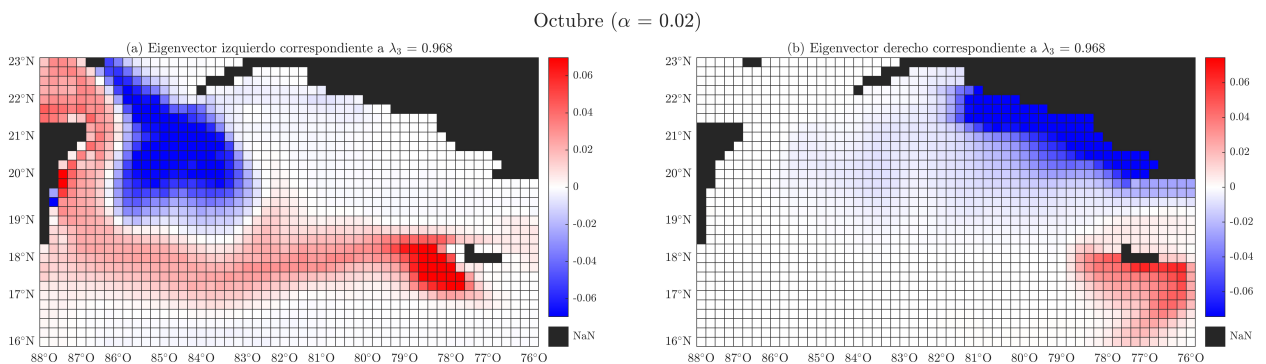


Figura 16. Distribuciones correspondientes a los eigenvectores normalizados (a) izquierdo y (b) derecho, asociado al segundo eigenvalor más alto y a octubre del 2021 considerando un factor de arrastre con el viento del 2%. En rojo y azul se destacan regiones donde los valores máximos, ya sean positivos o negativos, están asociados a atractores. Bajo el mapeo sucesivo de P las concentraciones rojo (b) terminan en rojo (a) y azul (b) en azul (a). El color negro corresponde a tierra y/o estados inaccesibles.

Los dos casos que mejor reflejan estas características comunes se muestran en las Figuras 15 y 16. En

agosto, con $\alpha = 0.01$, se observa claramente la región circular en el atractor (panel izquierdo), así como su origen en la zona cercana a las costas de Cuba (panel derecho). Este mes es un ejemplo representativo de lo que ocurre cuando el arrastre con el viento es pequeño. En este caso, el atractor (representado por el color rojo del eigenvector izquierdo) se distribuye de manera bastante uniforme en el dominio.

En cambio, en octubre con $\alpha = 0.02$, se distinguen dos estructuras con claridad. La primera es la zona azul entre Cuba y México, así como su correspondiente origen en las costas de Cuba, aunque menos extendido que el mostrado en la Figura 15. La segunda característica recurrente se encuentra en el atractor rojo Figura 16 (a), que se extiende desde la costa oeste de Jamaica hasta México, donde gira y contornea la costa. Su correspondiente atractor hacia atrás en el tiempo (cuenca de atracción), mostrado en rojo en (b), tiene los valores más altos al sur de Jamaica. Este caso ilustra cómo un mayor arrastre del viento puede provocar que las estructuras en los atractores tiendan a extenderse longitudinalmente, reflejando el efecto de los vientos Alisios y una posible asociación con la corriente de Caimán. A continuación describiremos dos casos que contienen elementos diferentes hasta lo ahora descrito.

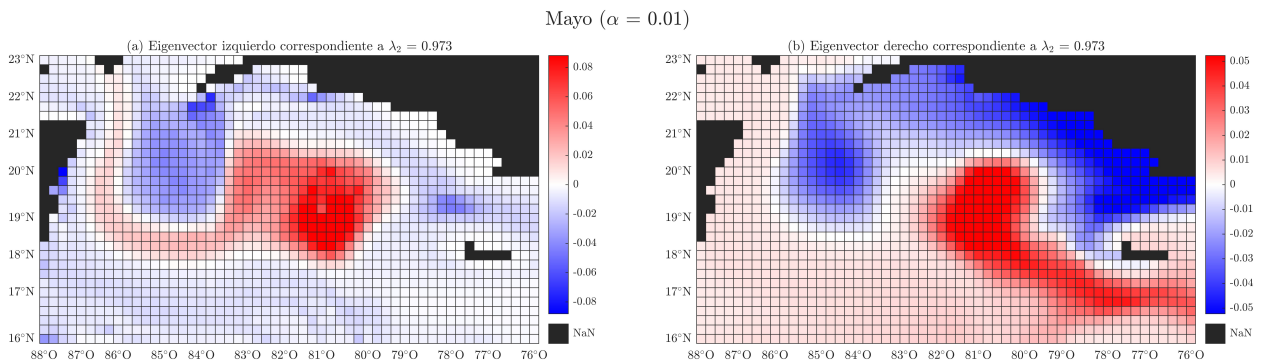


Figura 17. Distribuciones correspondientes a los eigenvectores normalizados (a) izquierdo y (b) derecho, asociado al segundo eigenvalor más alto y a mayo del 2021 considerando un factor de arrastre con el viento del 1%. En rojo y azul se destacan regiones donde los valores máximos, ya sean positivas o negativas, están asociados a atractores. Bajo el mapeo sucesivo de P las concentraciones rojo (b) terminan en rojo (a) y azul (b) en azul (a). El color negro corresponde a tierra y/o estados inaccesibles.

En la figura 17 se observan los eigenvectores derecho e izquierdo de mayo para arrastre de viento $\alpha = 0.01$, correspondientes al segundo eigenvalor más alto $\lambda = 0.973$. En (a) se pueden observar dos atractores semicirculares en rojo y azul y una buena parte del resto del dominio en color azul claro. Estos provienen a su vez de las regiones del mismo color mostradas en (b). Podemos observar que en el caso de ambas distribuciones hay una cierta conservación de la forma (entre (b) y (a)), es decir, parecieran mantenerse relativamente igual hacia adelante y atrás. La principal diferencia son las colas o estelas azules que parecen acompañarlos en (b) hacia el sureste, mientras que en (a) se aproximan hacia la corriente de Yucatán (rojo) y a la salida del dominio atravesando por el canal de Yucatán (azul). De

nuevo notar las zonas extensas con azul claro en (a) y confinadas (azul intenso) en (b) el origen.

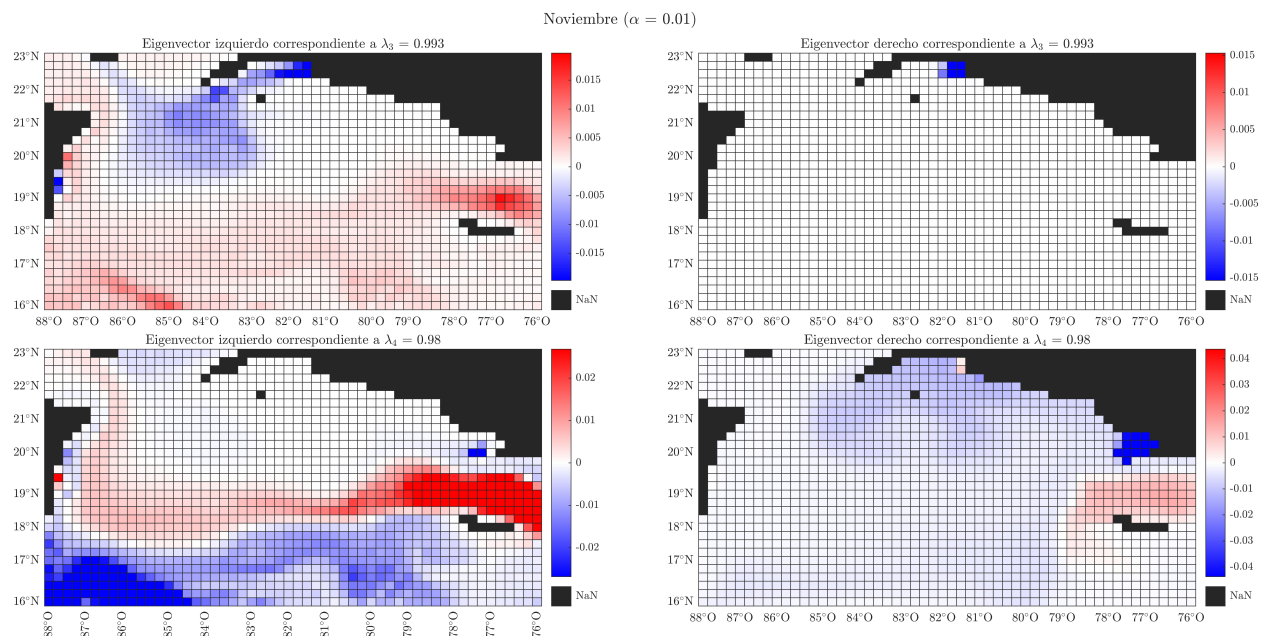


Figura 18. Distribuciones de probabilidad correspondientes a los eigenvectores normalizados: (a) y (c) para el lado izquierdo, y (b) y (d) para el lado derecho, asociadas al tercer y cuarto eigenvalor más alto en noviembre de 2021, considerando un factor de arrastre del 1% debido al viento. Las regiones con las máximas probabilidades positivas están resaltadas en rojo, mientras que las negativas en azul. El color negro indica las zonas de tierra y/o áreas inaccesibles.

El caso de noviembre con $\alpha = 0.01$ se muestra en la Figura 18. Notemos que es el único caso en el que hablaremos de estructuras presentes en dos eigenvectores, correspondientes al tercer y cuarto eigenvalor. En la mayoría de los casos los eigenvalores más altos preservaban las mismas estructuras o bien no mostraban estructura alguna, por lo que no valía la pena mostrar más de un par de eigenvectores; pero en este caso tenemos dos eigenvalores bastante altos que aunque contienen estructuras muy similares a las antes descritas, ahora decaen más lentamente y al encontrarse separadas, nos revelan lo que la conexión de este a oeste decae más rápido en comparación con la circular cerca del canal de Yucatán. Resulta difícil de ignorar la “ausencia” (si la hay solo que muy pequeña, del orden de 10^{-10}) de distribución roja en (b). Pruebas de advección de la distribución (b), indican la existencia de los atractores mostrados en (a). Creemos que el atractor al norte podría estar asociado con el reingreso de partículas (los estados nirvana) por la frontera este.

Con la intención de corroborar la información proporcionada por estos eigenvectores y mostrar las regiones donde permanecen las partículas por tiempos largos, sembramos partículas en los máximos (ya sean positivos o negativos) de las cuencas de atracción. El número de cajas con “valores máximos” varió en cada caso, dependiendo también del tamaño de la cuenca de atracción. Esto nos permite observar como estas concentraciones son redistribuidas a cada iteración con la matriz de transición de probabilidades. El

número de iteraciones que se consideraron está entre 65 y 100, un rango que excede el periodo mensual que representan las matrices, es decir, representa más de un mes de evolución para los trazadores. Sin embargo, el uso persistente de cada matriz se justifica porque los resultados analizados buscan revelar lo que ocurriría si estas condiciones estadísticas se mantuvieran de manera “permanente”. A partir de las posiciones visitadas por cada concentración, se construyeron las regiones donde las partículas tienden a establecerse, es decir, donde pasan la mayor parte del tiempo. Son estos sitios los que permiten generar la antes mencionada geografía lagrangiana.

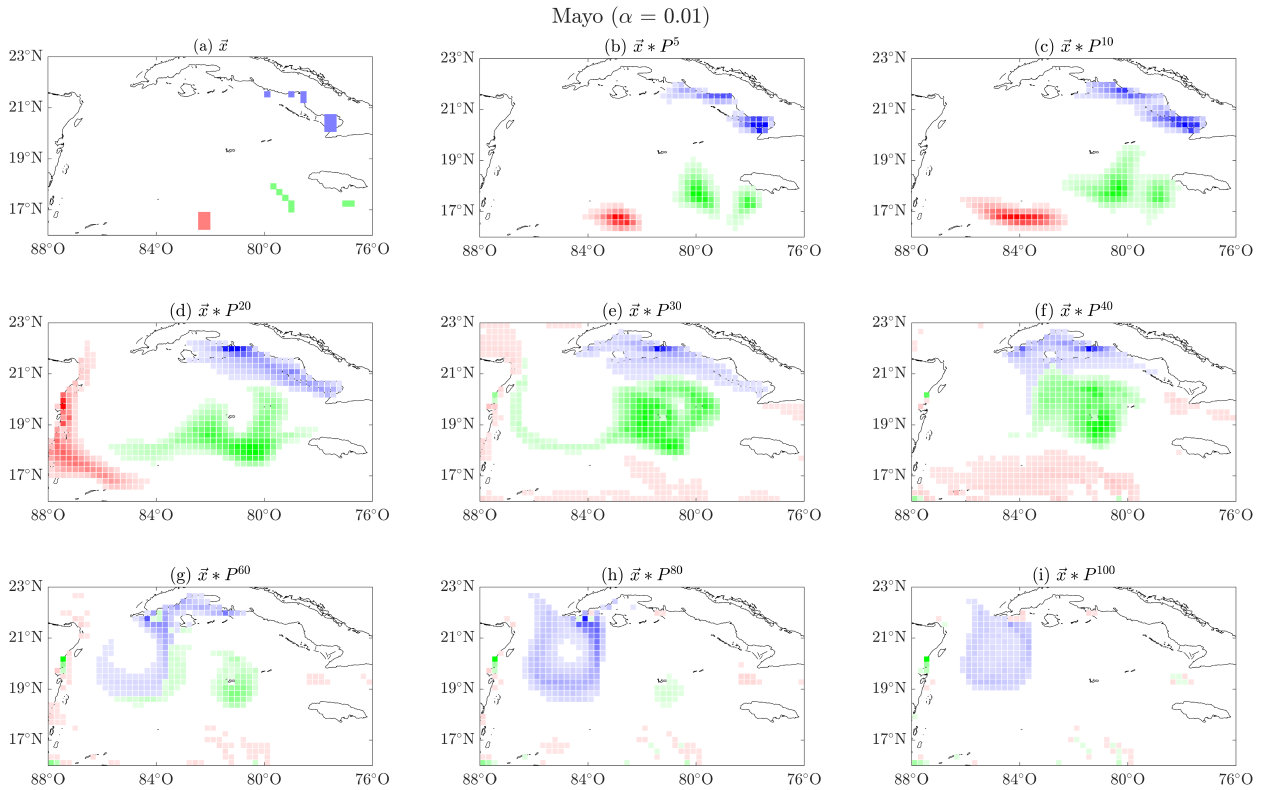


Figura 19. (a) Se muestran concentraciones iniciales de partículas denotadas por \vec{x} , donde cada color representa un conjunto cuya evolución se quiere distinguir. De (b) a (i) se presenta la advección correspondiente a la aplicación de la matriz de transición de probabilidades.

Para describir la construcción de la geografía lagrangiana, detallamos el proceso seguido para el mes de mayo. En la Figura 19 se presentan los desplazamientos que sufren las concentraciones iniciales de partículas, que se observa en (a). Aunque anteriormente se mencionó que un buen criterio para el sembrado de trazadores son los máximos de las cuencas de atracción, en la práctica encontramos que una buena porción del dominio quedaba prácticamente vacía. Por ello, decidimos introducir una tercera concentración inicial que no corresponde a ningún máximo, representada por los bins rojos. Este rectángulo se seleccionó en una zona donde el eigenvector derecho tiene valores bastante uniformes, es decir, queda fuera de los máximos que definen con claridad las cuencas de atracción.

Los desplazamientos presentados corresponden a (b) 5, (c) 10, (d) 20, (e) 30, (f) 40, (g) 60, (h) 80 y (i) 100 aplicaciones de la matriz de transición de probabilidades. Podemos observar cómo la distribución azul contornea la costa de Cuba para introducirse a un círculo que está pegado al canal de Yucatán. Notemos que de hecho es la concentración que avanza más lentamente. Por otra parte, la concentración verde también llega a un semicírculo al tiempo que una ramificación conduce hasta el canal de Yucatán, muy cerca de las costas de México (incluso llegando a tocarlas). Se puede observar que la concentración roja es la que avanza más rápidamente; introduciéndose a la corriente de Yucatán, atravesando el canal de Yucatán y finalmente saliendo del dominio en solo 30 iteraciones de P . La salida de partículas ocasiona su reingreso por las fronteras sur y este. Entonces las partículas que transitan por esta región no suelen permanecer ahí mucho tiempo, por el contrario, son expulsadas rápidamente del dominio.

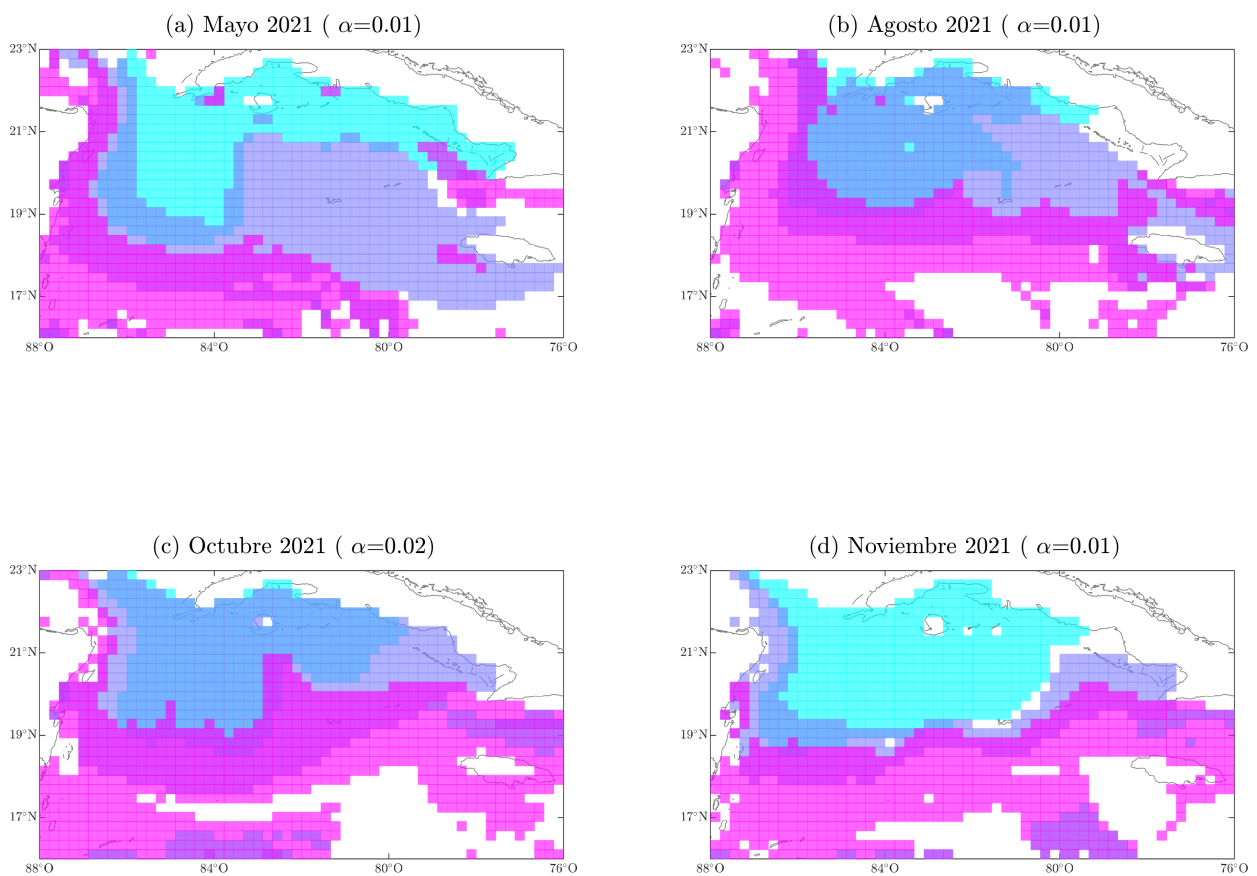


Figura 20. Conexiones en el Caribe occidental correspondientes a los meses de (a) mayo, (b) agosto, (c) octubre y (d) noviembre. Cada color resalta regiones donde las partículas suelen visitar u establecerse más tiempo. Los días de simulación se encuentran entre 65-100 días.

Toda esta información sobre las cajas visitadas en cada iteración nos permite identificar los caminos preferenciales que se siguen y las “fronteras” (que identificamos como zonas de transición poco probable) donde ocurren. El conjunto de posiciones visitadas por cada concentración (azul, verde o roja) es registrada y utilizada para construir y determinar los límites de cada conjunto de bins que se encuentra

“fuertemente” conectado. El resultado es lo que se conoce como geografía lagrangiana. Entonces las posiciones visitadas por cada conjunto se agrupan y se presentan en la Figura 20. Siguiendo el mismo enfoque descrito para el mes de mayo, en cada caso sembramos más de un par de concentraciones iniciales, cada una representada con un color distinto.

En la Figura 20 se observan los resultados obtenidos para los casos antes descritos. (a) En azul se observa como las partículas que comienzas o tienen salidas cercanas a la costa de Cuba tienden a mantenerse cerca del contorno de la costa sin ensancharse mucho o ingresar a secciones más centrales del Caribe occidental, llegando eventualmente al canal de Yucatán y permaneciendo en la estructura circular junto al canal de Yucatán. La conjugación de las posiciones visitadas puede desdibujar un poco el semicírculo en (b) y (d); mientras que en (a) y (c) se observa con claridad. En general, en rosa se muestra una región que se extiende zonalmente en el sur del dominio, al encontrarse con México se extiende al norte pegado a la costa, la única excepción de esto es (d) noviembre. Finalmente, en morado se distingue que las costas del norte de México también están conectadas con el sureste y el centro del dominio. En estos casos, las partículas tienden a permanecer en estas áreas sin adentrarse demasiado en la región azul, rodeándola en los paneles (a) mayo y (d) noviembre. Sin embargo, en los otros dos casos, (b) y (c), se observa una intersección casi completa entre estas regiones.

En el resto de meses ocurren cosas similares por lo que destacamos diferencias en los casos presentados. En (b) agosto la zona rosa esta mucho más extendida longitudinalmente a la vez que es más ancha. En el caso de las otras (azul y morado) regiones es notable que ninguna alcanza las costas de México. Nuevamente las costas de Cuba están íntimamente ligadas al semicírculo del canal de Yucatán, pero como muestra la región morada en (b) y (c), si las partículas empiezan al sur de Jamaica estas pueden cubrir mucho más espacio que aquellas que comiencen su trayecto cerca de la costa oeste de Cuba. (c) Octubre es el mes en el que la región rosa extiende más al norte, pero de hecho también se comprime bastante hacia la costa de México, a diferencia de (b) el norte de Jamaica eventualmente se extiende hacia el sur. La zona rosa en (d) es interesante, pues en las cercanías con México no logra subir por encima de los $20^{\circ}N$. Por otra parte, su región morada conecta la costa sur oriental de Cuba con las costas de México, por un estrecho bastante delgado. Por su parte, en azul se dibuja una región cargada hacia el oeste, que conecta con las costas de Cuba que se encuentran por encima de los $21^{\circ}N$ y se confina por encima de los $18^{\circ}N$.

3.4. Trayectorias Directas

A este punto empezaremos a hablar con mayor énfasis sobre las costas y las llegadas directas que ocurren a ellas a lo largo del año. En la Figura 21 se muestra la nomenclatura con la que identificaremos y referiremos conjuntos de bins de interés. Estos corresponden a los estados de la cadena de Markov que se interceptan con las líneas de costa.

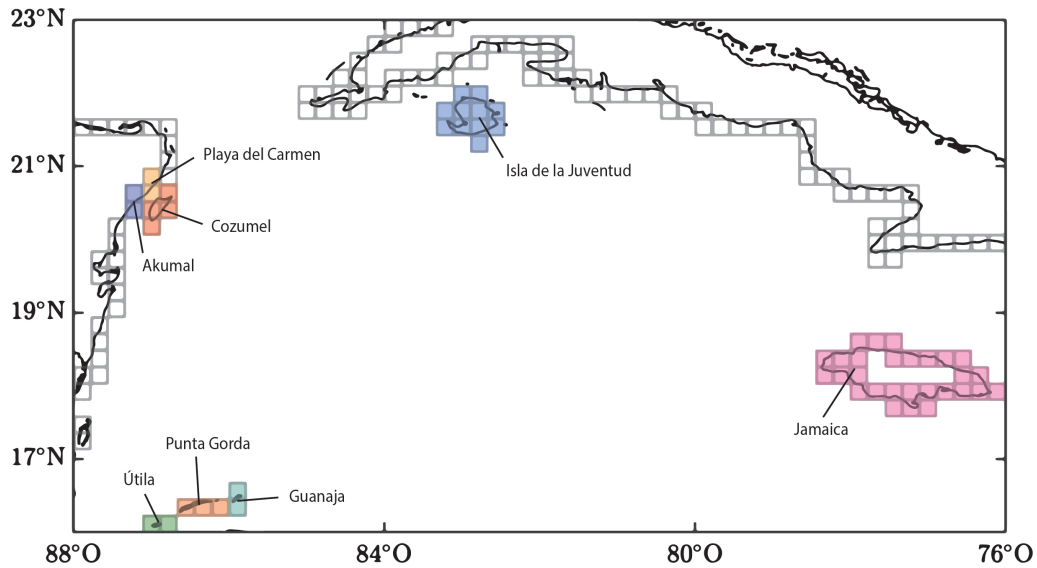


Figura 21. Cada color corresponde a un conjunto de bins asociados a un marcador con el nombre de alguna playa o isla característica.

Para obtener las trayectorias directas que transportan sargazo hasta las costas en la región de estudio seleccionamos como zona “fuente” la región del dominio por la que suele ingresar, que son sus fronteras sur y este, representadas en las Figuras 22, 23, 24 o 25 como cajas con contorno negro. No está de más aclarar que la zona de llegada u objetivo son todas las costas dentro del dominio. Las figuras antes referidas difieren entre sí por el factor de arrastre del viento considerado en cada simulación siendo 0 %, 1 %, 2 % y 3 %, respectivamente.

Como veremos a continuación, el resultado general, común a todos los casos, es que las trayectorias directas que llegan a las costas de México provienen del suroeste del Caribe y a medida que aumenta el arrastre del viento se ensancha esta zona con más trayectorias. Incluso con el arrastre de viento más fuerte 3 % no aparecen rutas que, por ejemplo, conecten la mitad norte de la costa del Caribe mexicano con las aguas directamente al este de la costa. Aunque mencionaremos características de los flujos durante los 12 meses del 2021 suponiendo que siempre habrá sargazo en los sitios fuente, sabemos que esto no es así, y que entre los meses de octubre a marzo generalmente hay poco sargazo en el Caribe occidental.

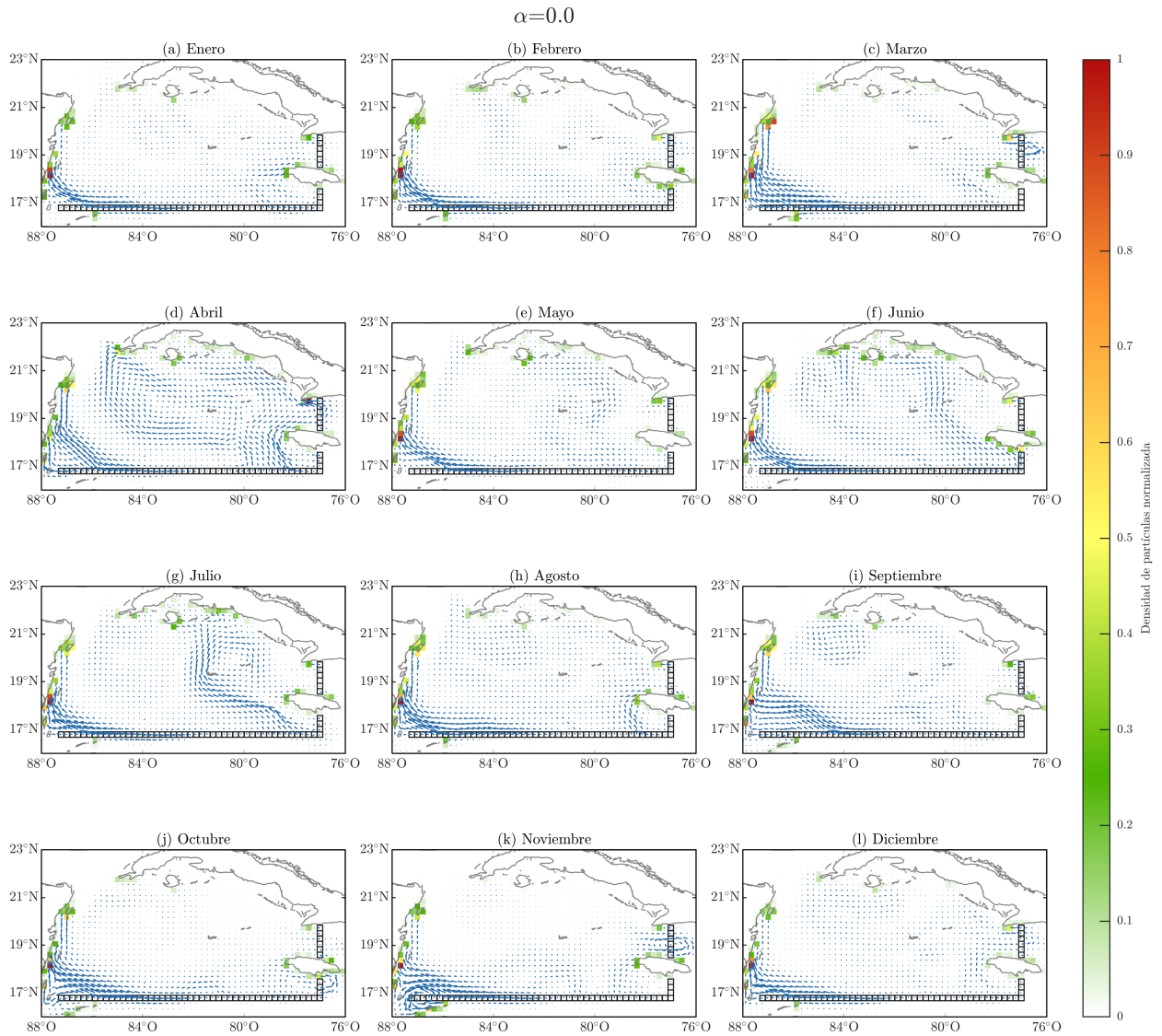


Figura 22. Trayectorias reactivas para cada mes de 2021, donde se ha fijado el factor de arrastre en 0%. Los recuadros de contorno negro señalan la región de salida, mientras que la de llegada son las costas. Las flechas en azul son los flujos de trayectorias reactivas y los recuadros de colores cerca de las costas indican la tasa a la que llega sargazo dependiendo de su color; rojo indica mayor llegada y verde menor.

Como se puede observar en la Figura 22, enfocándonos en los arribos a costas mexicanas, durante todos los meses los flujos de trayectorias tienen un origen común en vectores orientados zonalmente sobre la zona de salida a $17^{\circ}N$. En las cercanías con la costa de la península de Yucatán se separan para luego seguir al norte paralelas a la costa, siendo en abril y septiembre los flujos de mayor magnitud, que además se separan más al este (aproximadamente a $84^{\circ}O$). Un hecho interesante es que en ningún mes se observan arribos entre los $19^{\circ}N$ y $20^{\circ}N$ sobre la costa mexicana y en general la mayor acumulación se da siempre en el sur de México entre $17^{\circ}N$ y $19^{\circ}N$, el único mes en el que se intensifica la llegada en el norte y en particular en Cozumel es marzo. Por otra parte, cuando se desprecia la influencia del viento en el arrastre de partículas, es claro que existen caminos que conectan a Cuba con las zonas “fuente”,

particularmente la zona al sur de Jamaica durante todo el año. No obstante, son los meses de abril, junio y julio los que destacan por la intensidad de los flujos y por la mayor tasa de arribo, siendo las regiones de mayor llegada la Isla de la Juventud y el noroeste de Cuba.

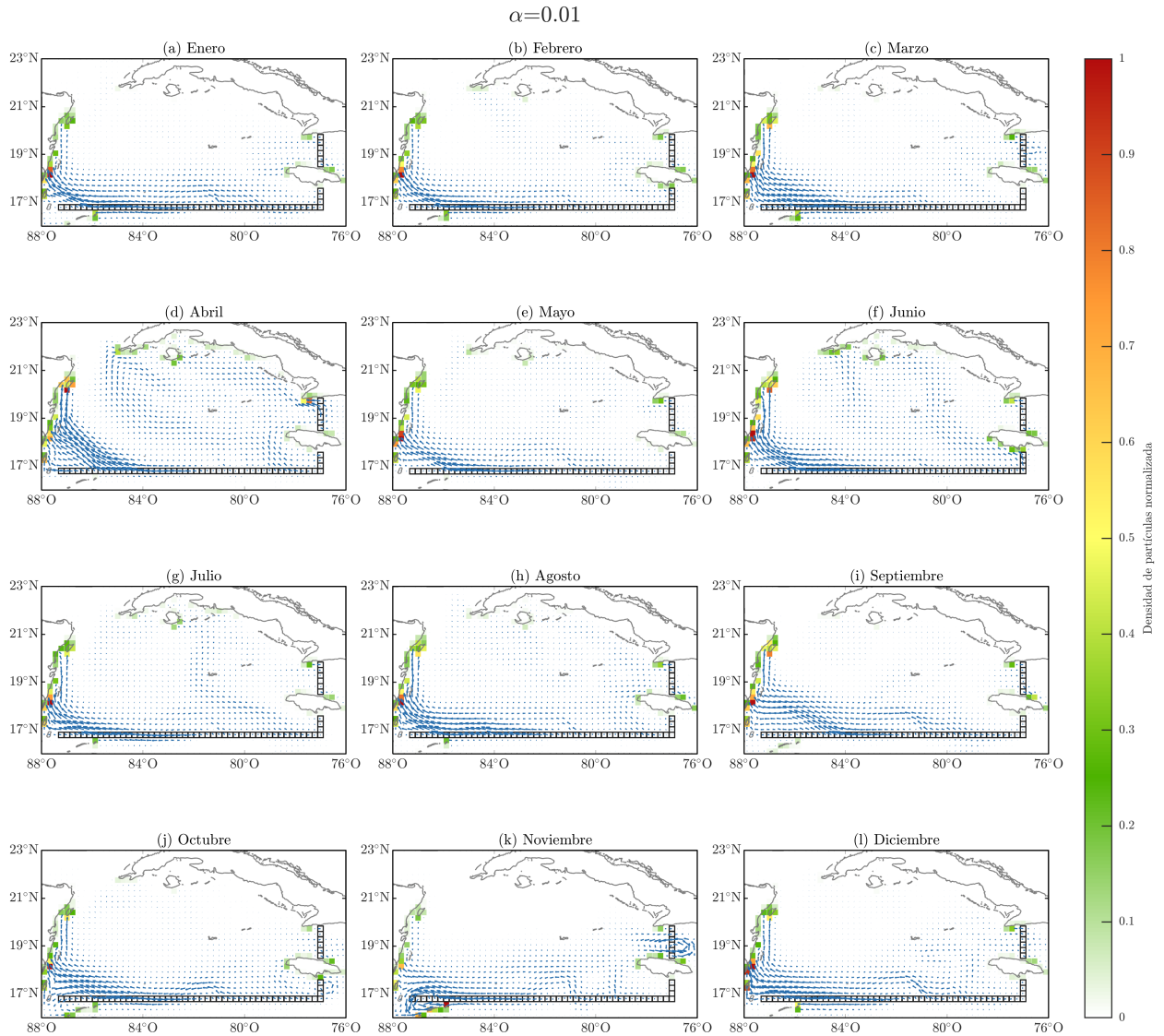


Figura 23. Trayectorias reactivas para cada mes de 2021, donde se ha fijado el factor de arrastre en 1%. Los recuadros de contorno negro señalan la región de salida, mientras que la de llegada son las costas. Las flechas en azul son los flujos de trayectorias reactivas y los recuadros de colores cerca de las costas indican la tasa a la que llega sargazo dependiendo de su color; rojo indica mayor llegada y verde menor.

En el caso con $\alpha = 0.01$ (Figura 23), se aprecia una disminución sustancial de flujos que llegan a las costas de Cuba, convirtiéndose el extremo sureste de la costa (entre $19^{\circ}N$ - $20^{\circ}N$ y $77^{\circ}O$ - $78^{\circ}O$) la región que presenta mayores arribos. No perdamos de vista que esta es una región muy cercana a la fuente (sitio de salida), lo que deriva en este resultado. Abril, junio y julio se mantienen como los meses con mayores llegadas de todo el año. En México observamos una distribución mucho más uniforme a lo largo

de la costa, siendo la región entre $19^{\circ}N$ y $20^{\circ}N$ la menos visitada, con excepción de marzo y junio. Las llegadas a Cozumel se intensifican en abril, junio y septiembre, mientras que el norte se mantiene como un sitio muy recurrente de varamiento. El mes de noviembre es bastante particular, pues los flujos son conducidos al suroeste de la región y terminando en Guanaja, Punta Gorda y Utila

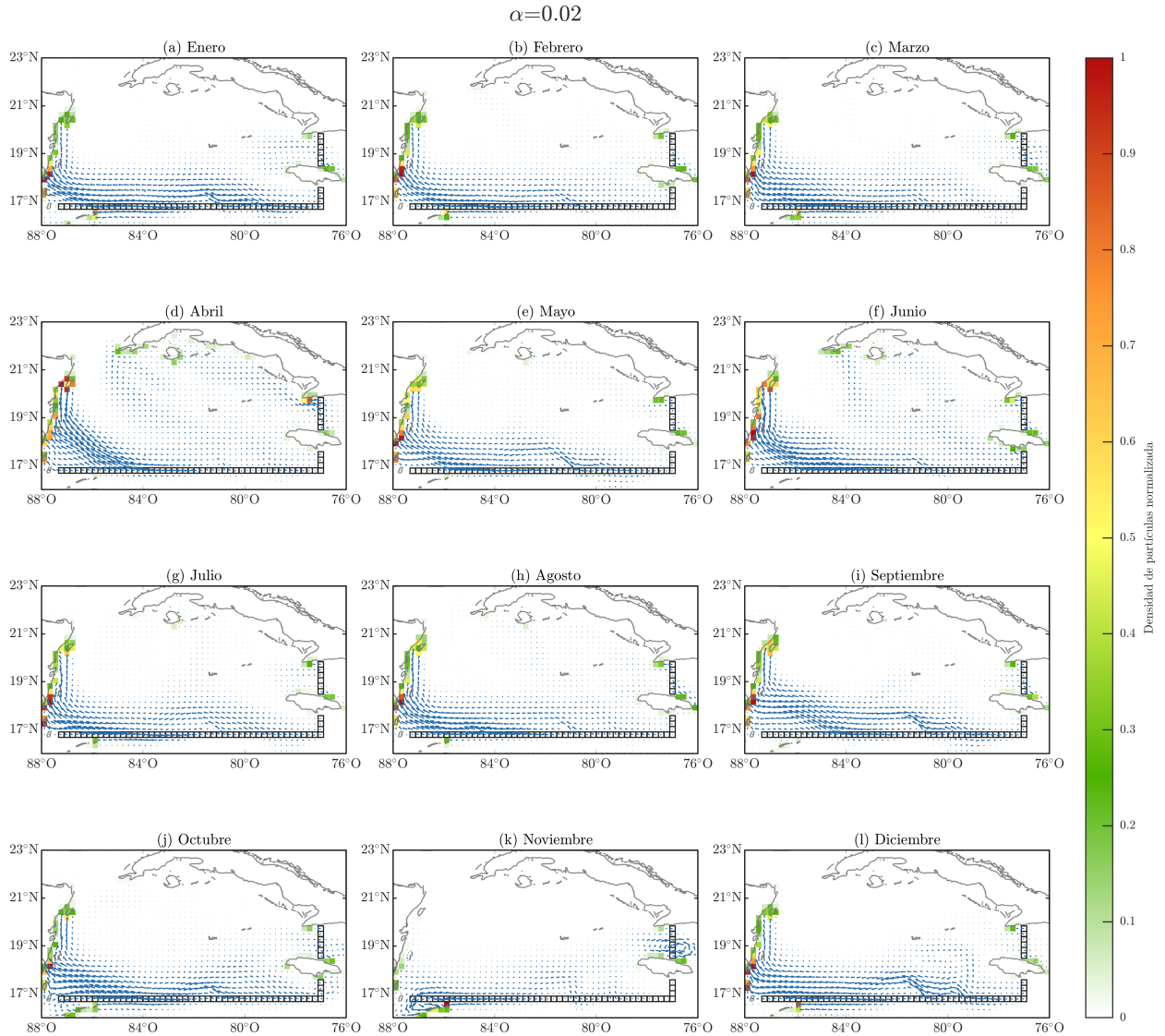


Figura 24. Trayectorias reactivas para cada mes de 2021, donde se ha fijado el factor de arrastre en 2%. Los recuadros de contorno negro señalan la región de salida, mientras que la de llegada son las costas. Las flechas en azul son los flujos de trayectorias reactivas y los recuadros de colores cerca de las costas indican la tasa a la que llega sargazo dependiendo de su color; rojo indica mayor llegada y verde menor.

La Figura 24, presenta los resultados obtenidos al aumentar el arrastre del viento a 2%. La mayor parte del año no aparecen flujos directos de sargazo a Cuba salvo en abril y junio. En las costas de México también se distinguen diferencias significativas con el caso anterior ($\alpha = 1\%$): para empezar, se incrementa la llegada a las costas frente a Cozumel (playa del Carmen y Akumal), siendo abril y junio

los meses con mayor recurrencia. Noviembre se destaca por ser el mes con una distribución de llegadas mucho menos extendida que el resto, los varamientos se presentan casi siempre en Guanaja. Septiembre fue el mes en el que se obtuvo una distribución más uniforme a lo largo de la costa. Los flujos de mayor magnitud que conducen hasta el Caribe mexicano de este a oeste en los meses de enero, mayo, junio, septiembre, octubre y diciembre empiezan en la región oriental, siguiendo una ruta casi paralela a la región fuente, mientras en el resto de meses emergen entre el centro de la región y el occidente. En general podemos apreciar que la región por la que atraviesan estos flujos sufre un ensanchamiento con respecto a lo que se observa en la Figura 23, con excepción de noviembre en el que, al contrario, se observa una compresión de la región de tránsito.

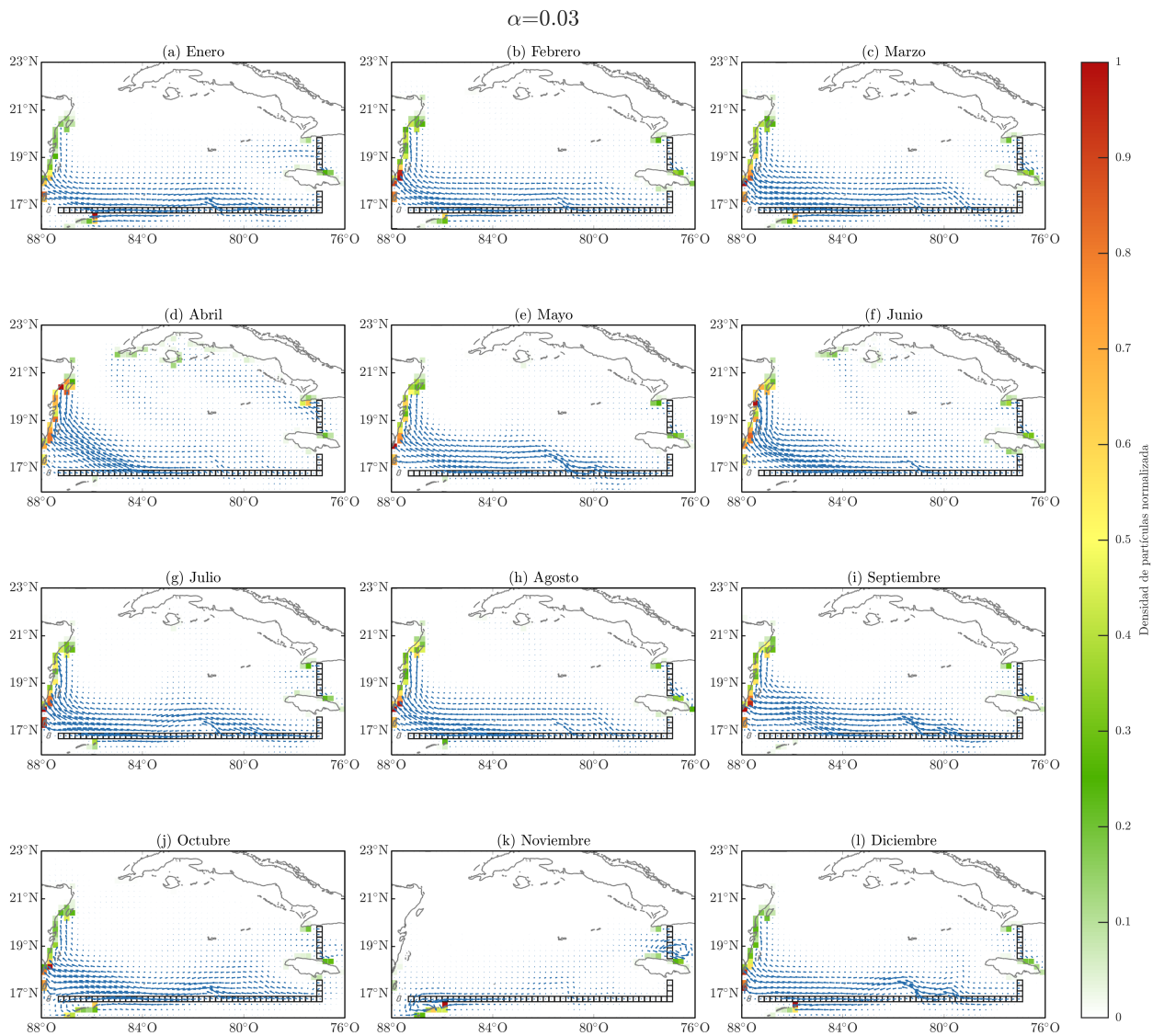


Figura 25. Trayectorias reactivas para cada mes de 2021, donde se ha fijado el factor de arrastre en 3%. Los recuadros de contorno negro señalan la región de salida, mientras que la de llegada son las costas. Las flechas en azul son los flujos de trayectorias reactivas y los recuadros de colores cerca de las costas indican la tasa a la que llega sargazo dependiendo de su color; rojo indica mayor llegada y verde menor.

En el caso del mayor arrastre con el viento $\alpha = 0.03$, Figura 25, toda la costa por debajo de los $21^\circ N$ recibe sargazo, con excepción de noviembre cuyos arribos desaparecen. Las descripciones que se realizan a continuación excluyen este mes. Los flujos de mayor magnitud empiezan siempre en la región occidental y además se ensancha bastante la región de tránsito cerca de México (por debajo de los $19^\circ N$). Los flujos a Cuba han desaparecido casi por completo, incluso en el sureste se han perdido muchas llegadas. Se mantienen los arribos en el norte de Cuba únicamente en abril y junio, pero se reduce mucho la probabilidad de tránsito. Estos mismos meses son los que exhiben las distribuciones más uniformes a lo largo de México, pero es innegable que en esta ocasión la tasa de llegada a las costas por debajo de los $21^\circ N$ se presenta en todos los meses. Un resultado interesante es que se pierden llegadas a Cozumel, con respecto a los casos recién descritos, en meses como mayo y diciembre, pero se intensifican en zonas más al sur. En las figuras anteriores la llegada de sargazo más al sur de Cozumel era bastante insignificante, pero en esta ocasión, al menos para mayo y septiembre esta se incrementó. Abril es el único mes en el que pareciera que los flujos de mayor probabilidad no provienen necesariamente de la salida occidental. En noviembre se observa bastante pérdida de trayectorias y una “compresión” de los flujos, que conducen principalmente a la isla de Guanaja. El origen de este comportamiento podrían ser los intensos vientos hacia el norte que se observan en la Figura 12 (k), el fuerte arrastre hacia el norte impide que las partículas lleguen a las costas sureñas.

En las figuras anteriores se ha excluido con intención el tiempo de transición pues al considerar desde las trayectorias más cortas a las más largas se pierde mucha información al promediar indiscriminadamente. Con la intención de preservar una buena resolución en el tiempo hemos realizados nuevos cálculos en los que seleccionamos como zona objetivo la costa de México, y como región de salida cada bin del dominio. Entonces, a cada bin se le asigna el tiempo promedio que le tomaría a una trayectoria reactiva alcanzar las costas de México. Estos mapas de tiempo se muestran en las Figuras 26 y 27 para los meses de abril y septiembre. Cabe mencionar que seguimos refiriéndonos a transiciones directas. Entonces, se promediará toda la multiplicidad de trayectorias directas que emanen de un bin y conecten directamente con algún punto de la costa de México. Se presentan los resultados de abril y septiembre pues se obtuvieron resultados similares para el resto de meses.

Notemos que en abril (Figura 26) las transiciones más tardadas exceden los 200 días, independientemente del factor de arrastre. Conforme se considera menor influencia del viento el número de bins con transiciones lentas aumenta y se mantiene bastante cerca de las costas de Cuba. En azul oscuro se destaca una zona bastante considerable en la que las transiciones se dan de manera rápida (50 días o menos), siendo mucho más rápida en los bins más cercanos a la costa de México.

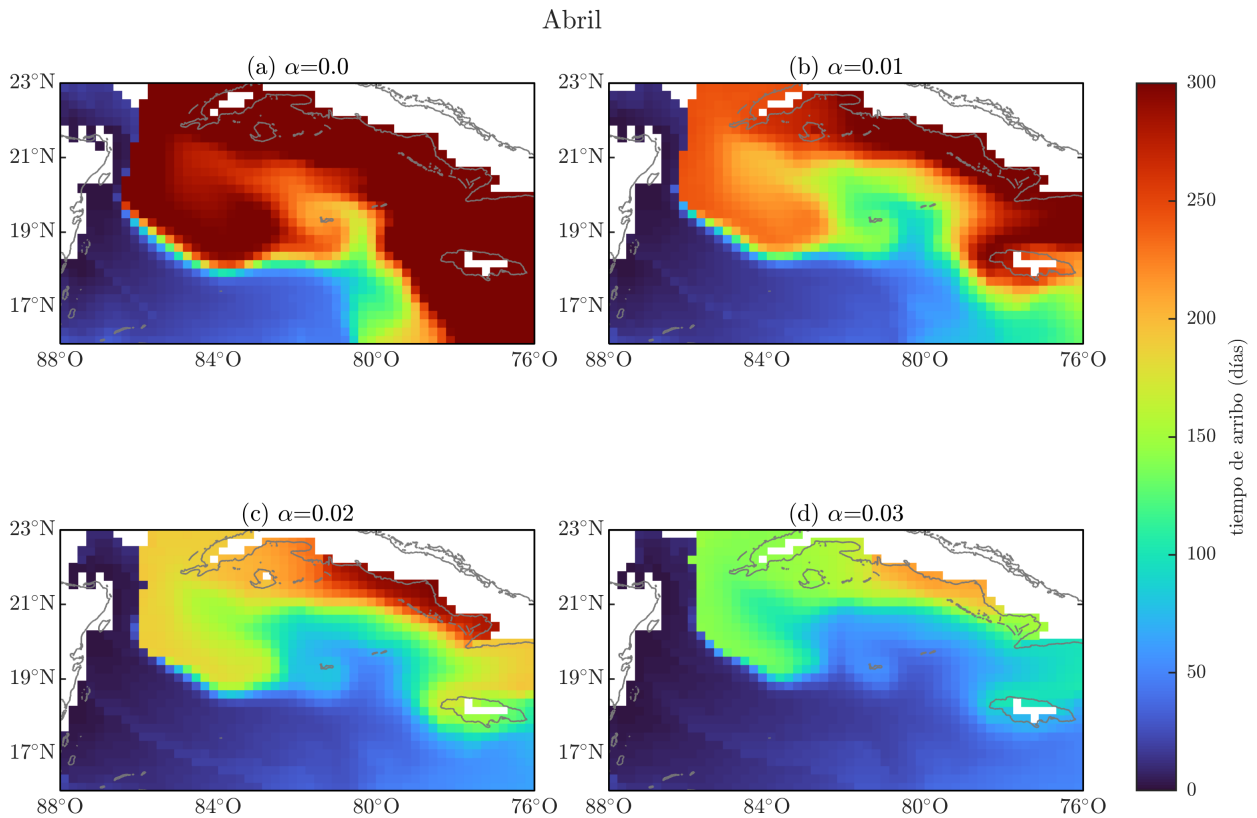


Figura 26. Mapa de tiempos con región objetivo correspondiente a la costa de México para el mes de abril y factores de arrastre con el viento de (a) 0%, (b) 1%, (c) 2% y (d) 3%. Los colores cálidos están asociados a cajas desde las cuales las transiciones son lentas, en este caso lento refiere a valores por encima de 150 días. Los colores fríos (azules) son bins de transición rápida, es decir, menores a 100 días.

El perfil que limita a la región de lenta transición en la Figura 26, se caracteriza por ir a lo largo de la costa de Cuba y llegar hasta Jamaica en el sur, mientras que en el canal de Yucatán se extiende en forma semicircular. Un mayor arrastre con el viento deriva en una reducción de esta macha que se comprime y reduce el tamaño del semicírculo a la vez que se comprime hacia Cuba y al norte de Jamaica, dejando una concavidad azul al centro de la región que se extiende principalmente longitudinalmente y en (d) logra acercarse bastante al sur de Cuba. También para los casos (c) y (d) todo el sur del dominio (por debajo de 17°N) se convierte en un área más rápida para las transiciones. No está de más mencionar que la escala de tiempo se ha seleccionado con un máximo de 300 días con base a (d) y para que los cambios en sus bins se aprecien. Sin embargo, en (a) la región alrededor de Jamaica y cerca de la costa este de Cuba se alcanzan los 500 días de duración, entonces un factor de arrastre con el viento correspondiente al 3% disminuye los tiempos de arribo máximo a menos de la mitad.

En general las transiciones en septiembre (Figura 27) son mucho más rápidas que en abril, siendo las más lentas de 350 días cuando $\alpha = 0.0$ y localizadas aproximadamente a 82°O sobre la costa de Cuba. La región rápida, color azul, tiene una extensión pequeña y no logra extenderse hasta las fronteras

este o sur de la región, pero si preserva una forma similar a abril (y el resto meses), donde se sufre un ensanchamiento principalmente hacia el norte; a la vez que el semicírculo en el canal de Yucatán disminuye retrocediendo hacia la costa de Cuba conforme aumenta α . En este caso también se aprecia una concavidad correspondiente a trayectorias reactivas de corta duración, solo que en esta ocasión se extiende mayormente latitudinalmente cuando $\alpha = 0.0 \vee 0.01$; cuando los arrastres son $0.02 \vee 0.03$ se arrastra hacia Cuba, por encima de $20^{\circ}N$.

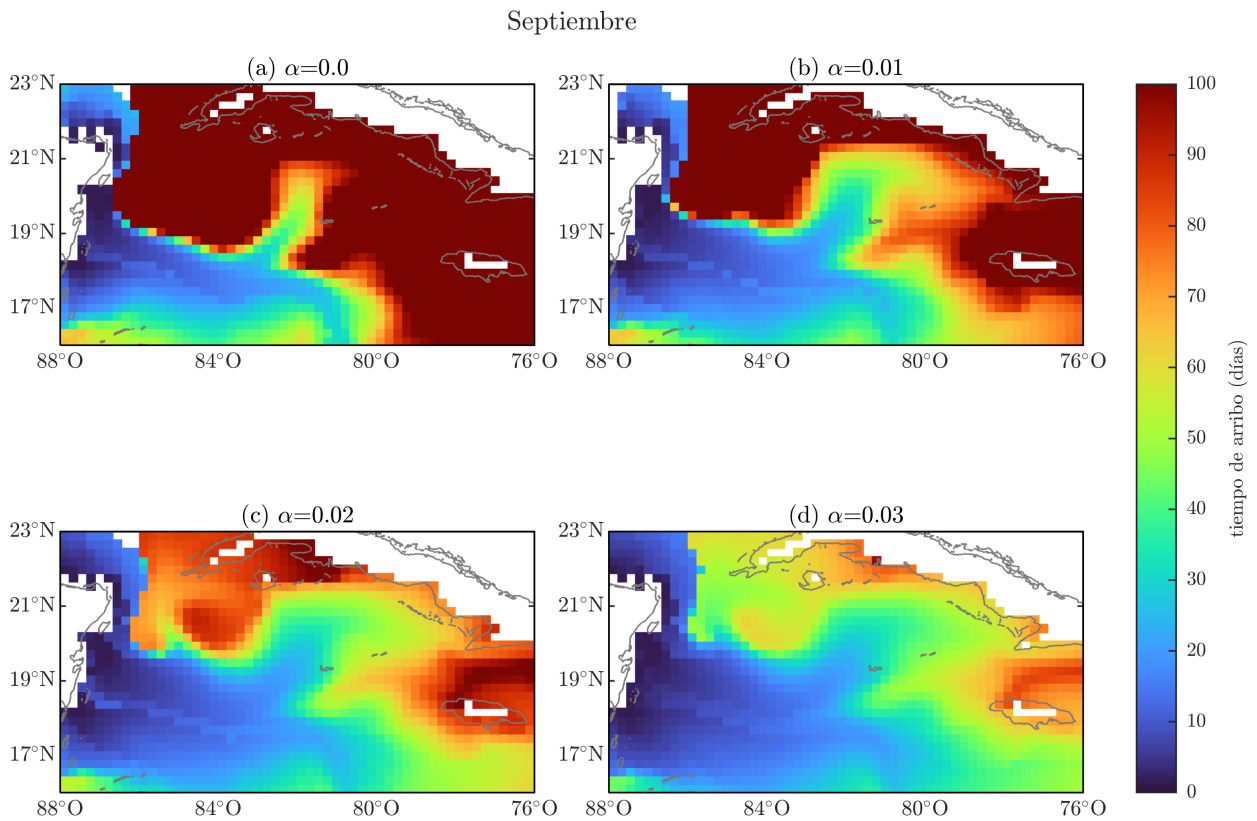


Figura 27. Mapa de tiempos con región objetivo correspondiente a la costa de México para el mes de septiembre y factores de arrastre con el viento de (a) 0 %, (b) 1 %, (c) 2 % y (d) 3 %. Los colores cálidos están asociados a cajas desde las cuales las transiciones son lentas, en este caso lento refiere a valores por encima de 60 días. Los colores fríos (azules) son bins de transición rápida, es decir, menores a 40 días.

Estas regiones azules de rápido acceso a las costas coinciden con los cuellos de botella de los flujos de trayectorias reactivas. Esta similitud se distingue por el ensanchamiento al norte respecto a un aumento en el factor de arrastre con el viento.

Capítulo 4. Discusión

La exploración realizada en la Sección 3.2 sugiere que la selección del rango de arrastre con el viento (entre 1 %, 2 % y 3 %) es en principio razonable en el sentido de que se simuló correctamente la distribución de sargazo en las pruebas realizadas; ya que, aunque de manera un poco limitada, nos fue posible distinguir un mejor desempeño de la simulación realizada con un arrastre del viento del 2 % al comparar con las observaciones. Sin embargo, la mejoría fue poco significativa, por lo que se consideró interesante seguir experimentando con los tres factores de arrastre seleccionados. Este rango de α , entre 1 % 3 %, es similar al intervalo óptimo mencionado por Putman et al. (2020) en donde resolvieron el arrastre de partículas utilizando velocidades de HYCOM y encontraron el rango óptimo comparando con datos de GPS colocados en matas de sargazo reales. Por otra parte, Berline et al. (2020) emplean detecciones satelitales (AFAI) para validar simulaciones Lagrangianas alimentando los campos de velocidades con el modelo PSY4V3R1 y vientos de ECMWF HRES, donde el factor de arrastre con el viento que mejor se ajustó a las observaciones a lo largo de varios meses fue 1 %. En cambio, Olascoaga et al. (2023) realizaron pruebas de laboratorio en las que se omitió el efecto del oleaje. Encontraron un α óptimo del 0.5 % (muy por debajo de los trabajos antes mencionados), esto sugiere el importante papel que desempeña la deriva de Stokes y la importancia de incluirla como un factor independiente en el arrastre del sargazo. Determinar cuál es el factor óptimo de arrastre por el viento puede depender de los campos de velocidad del mar y el aire que se utilicen, así como la resolución y características particulares de cada región. La validación realizada en nuestro caso tuvo como objetivo demostrar que las simulaciones realizadas tienen cierta similitud con la realidad, pero esto puede mejorarse utilizando más datos y más experimentos. Esta es una tarea más a realizar en el futuro.

Los análisis posteriores a la validación del modelo se realizaron considerando factores de arrastre con el viento iguales a 1 %, 2 %, 3 % y 0 %, este último para contrastar las posibles diferencias en ausencia de la influencia del viento. Es importante conectar los resultados estadísticos obtenidos en las secciones 3.3 y 3.4, con los patrones de vientos y corrientes promedio y sus elipses de variabilidad descritos en la sección 3.1 provenientes de los reanálisis (ERA5 y GLORYS12), empleados en el cálculo de trayectorias.

En general, la geometría lagrangiana obtenida a partir de las cuencas de atracción y sus atractores (eigenectores derechos e izquierdos; véase la sección ??) en los diferentes meses mostró que la zona oceánica pegada a la costa sur caribeña de Cuba presenta un flujo al oeste, que la conecta con el canal de Yucatán. Los remolinos que se presentaron en los meses de mayo a octubre, cerca del extremo oeste de Cuba y al este del canal de Yucatán, parecen ser responsables de la formación de la estructura circular a la entrada y al este del canal de Yucatán, que aparece en la geografía de varios de los atractores

(eigenvectores izquierdos). Los vientos alisios persistentes contribuyen a este movimiento hacia el oeste.

Estos remolinos varían en intensidad, posición, dirección y tamaño a lo largo del año y no siempre se trata de un mismo remolino, aunque su ubicación sea cercana al canal de Yucatán, como se muestra en la Figura 11. En particular, durante agosto (panel h) se ve la presencia clara de un anticiclón que coincide con la estructura circular que aparece en el atractor de ese mes, Figura 15. Notar que este anticiclón está contenido dentro de un giro anticiclónico más grande y que al lado derecho del remolino anticiclónico se encuentra uno ciclónico un poco más pequeño. En los siguientes meses el remolino anticiclónico “desaparece” mientras que el ciclónico parece desplazarse al oeste/noroeste durante septiembre y octubre (paneles (i) y (j)). Sin embargo, notemos que la estructura del atractor de octubre Figura 16 es diferente a la de agosto, y parece estar relacionada con el giro anticiclónico más grande del mar de Caimán y no presenta claramente al eddy circular “más constreñido” encontrado en agosto. Durante noviembre se presenta una estructura (remolino) anticiclónico pegado al extremo occidental de Cuba que nuevamente parece relacionarse con la estructura de los atractores Figura 18.

La morfología del Caribe occidental, con el canal de Yucatán como principal salida del flujo junto con los patrones de corrientes y vientos característicos de la región, hacen que la costa de la península de Yucatán y zona aledaña oceánica sean lugares donde es de esperarse llegue el sargazo con facilidad. Sin embargo, y en concordancia con otros resultados, la geografía lagrangiana sugiere que la entrada de sargazo a la costa de Yucatán es más bien por el sur que por el este, Figura 20 en rosa. El sargazo que pudiera entrar por la parte más central del Caribe (entre Jamaica y debajo de Cuba) parece llenar el Caribe y luego salir por el canal de Yucatán (como se observa en azul y morado en la misma figura); incluso con arrastre fuerte del viento, resulta difícil romper la barrera impuesta por la corriente de Yucatán al sargazo que viene del este, y la mayor entrada a las costas mexicanas se produce por el sur, para ser transportado por la corriente pegada a la costa y ser empujada por el viento para quedar varado en la costa. Es interesante observar que esta entrada por el sur es la más relevante incluso cuando no hay viento (este hecho se infiere de la Figura 22), pero en ese caso no hay tantos varamientos en la costa: el sargazo se va al norte con la corriente de Yucatán. Esto es consistente con lo reportado por Lara-Hernández et al. (2024) que encontraron que la mayor parte del sargazo que llega a las costas de Quintana Roo proviene de la región sur del Caribe y con la barrera de transporte reportada por Allende-Arandía et al. (2023) que encontraron que la corriente de Yucatán impide el paso de sargazo hacia la costa. Esto último puede verse en la separación existente en los atractores con valores diferentes junto a la costa de Yucatán y justo al este en la zona más oceánica, indicando que son regiones no tan conectadas entre sí.

El efecto del viento facilita el intercambio de partículas entre zonas que podrían ser consideradas de difícil

acceso debido a la presencia de corrientes intensas que juegan el papel de barreras de transporte al intentar cruzarlas. En otras palabras, una mayor influencia del viento favorece la conectividad lagrangiana. Esto es congruente con el rompimiento de estructuras coherentes lagrangianas reportado por Allende-Arandía et al. (2023). No obstante, no se debe perder de vista que nuestro análisis se limita exclusivamente a 2021 y que los resultados aquí presentados están sujetos a las particularidades de la circulación oceánica y atmosférica durante ese año. Para determinar si los resultados obtenidos se presentarán en forma persistente o serán muy diferentes en otros años debido a la gran variabilidad causada por remolinos y vientos variables en el Caribe, debemos extender nuestros cálculos para en el futuro considerar muchos más años y obtener una estadística más robusta. Sin embargo, varios aspectos característicos de la circulación oceánica y meteorológica (corrientes, remolinos, vientos) están presentes en este año y es de esperar tengan un efecto similar en otros años, aunque se ubiquen en posiciones diferentes.

La “geografía lagrangiana” que hemos estado discutiendo hasta ahora es consistente con el análisis realizado posteriormente usando la teoría de “camino de transición” (TPT). Considerando primero los resultados sin la influencia directa del viento ($\alpha = 0$, Figura 22), se encontró que las trayectorias directas provenientes de la frontera sur, aunque conducen mayormente a México, también lo hacen hacia Cuba y con particular intensidad en algunos meses (abril a julio). Las partículas provenientes del este llegan más a Cuba y parecen apenas llegar cerca de las costas mexicanas. En particular para los meses de abril a septiembre con flujos y tasas de llegada similares. La parte sur de la cuenca es la vía de entrada principal hacia la zona de Yucatán, pero lo más destacable en este caso es que los varamientos sobre la costa aumentan a medida que aumenta el arrastre del viento (como se observa en las Figuras 23, 24 y 25): sin el arrastre directo del viento las partículas son transportadas por las corrientes de Caimán y Yucatán, pero no hay tantos arribos a la costa.

Los caminos de transición con arrastres del viento del 1 %, 2 % y 3 % tienen, hasta cierto punto, patrones de trayectorias reactivas similares en lo general. Las principales diferencias son: (1) que conforme aumenta el arrastre del viento, se produce una disminución de caminos hacia Cuba y (2) el ensanchamiento de los flujos de este a oeste hasta México ubicados principalmente por debajo de los $19^\circ N$. En cuanto a las tasas de llegada, la diferencia más notoria es el aumento y mayor uniformidad de la distribución de sargazo que arriba y se vara en las costas de México conforme aumenta el factor de arrastre α . Puede decirse que no hay cambios cualitativos en los patrones de flujo al aumentar el arrastre del viento. Sin embargo, es notorio el caso de noviembre con el máximo arrastre de vientos ($\alpha = 3\%$) en el que los flujos hacia Yucatán de la parte sur de la cuenca desaparecen. Esto parece ser producto de que en este mes hay un componente norte del viento más marcado 12 que en los otros meses, y al incrementarse el

arrastre del viento se dificulta la llegada de sargazo a las costas de México.

Los meses de abril a julio Figura 11 (d)-(g) son meses con mayores arribos a Cuba. Abril a junio son meses en los que el viento tiene una componente mayor hacia el norte Figura 12 (d)-(j), lo que podría contribuir a ello y a la mayor agregación que ocurre en el norte de México. Por otra parte, en octubre es notable el ensanchamiento de la zona de transporte en la parte sur (con factor de arrastre de viento máximo) y como mencionamos antes, la desaparición en noviembre de esta conexión con la costa mexicana Figura 25 (k) y aumento en los arribos a la costa de Honduras. Todo esto parece deberse a los efectos de la dirección del viento y del fuerte arrastre durante este mes.

El resultado importante y común en todos los experimentos es la presencia de esta fuerte conexión de las costas mexicanas del Caribe con el camino zonal del sur que se separa hacia el norte y se liga con la corriente de Yucatán y parece ser la mayor fuente y origen de sargazo para México. El viento generalmente contribuye a intensificar este camino (salvo noviembre) e incrementar los varamientos en la costa. Estos resultados y la región de fuerte transporte de sargazo coincide con lo encontrado por Lara-Hernández et al. (2024) para septiembre de 2018, enero y abril del 2019, lo que a su vez es consistente con las barreras climatológicas de transporte reportadas por Allende-Arandía et al. (2023).

El siguiente resultado a discutir son los mapas de tiempo (Figuras 26 y 26) que estiman el tiempo promedio que le toma a una trayectoria directa alcanzar las costas de México. Lo que se observó es que el arrastre con el viento es capaz de disminuir los tiempos de transición hasta en un 20 % (en el caso de $\alpha = 0.03$). Un aumento en α se manifiesta el ensanchamiento de la región de rápido acceso (en azul) hasta la costa. La región de rápido acceso coincide con los cuellos de botella de los flujos, es decir, las zonas donde los flujos de trayectorias se intensifican, Figuras 22-25. A la vez que es consistente con las conexiones mostradas en la Figura 20. El aumento del factor de arrastre tiene una influencia notable en la exención de la zona de llegadas “rápidas” a México, comprobando nuevamente la capacidad del viento para “romper” la barrera natural que es la corriente de Yucatán. Este resultado vuelve a ser consistente con el arrastre hacia atrás que empleó Lara-Hernández et al. (2024), que fue de tiempo corto de 10 días, este es el mismo orden de tiempo que obtenemos nosotros. En nuestro caso se pierde bastante resolución temporal debido al dominio tan extenso. Se podrían realizar experimentos más enfocados a regiones cercanas a la costa, por ejemplo aquellas con mayores tasas de llegada (esto sin necesidad de obtener nuevas matrices).

Los resultados descritos nos permitieron reunir suficiente evidencia del posible origen del sargazo (al menos de las trayectorias que lo transportan más directamente) que llega a las costas de México. Esta

zona se encuentra al sur oeste del dominio, debajo de los $18^{\circ}N$. Es una zona de rápido tránsito, donde se concentran una gran cantidad de flujos reactivos que además está fuertemente conectada a lo largo del año. Además, los resultados son consistentes con lo reportado en trabajos que emplean metodologías completamente diferentes. Para seguir mejorando lo aquí reportado resultaría conveniente poder refinar más los resultados obtenidos. En el caso específico del tiempo, en lugar de considerar toda la extensión de la costa, se puede realizar un análisis para cada bin y en particular aquellos que demostraron ser zonas de varamiento frecuente. En un caso diametralmente opuesto, para entender mejor la proveniencia del sargazo y como ocurren las transiciones lagrangianas a mayor escala, resultaría útil poder extender el dominio a todo el Caribe, esto podría mostrarnos la existencia de conexiones más estables. También se podrían realizar cambios en la cadena de Markov como en (Olascoaga & Beron-Vera, 2023) en donde implementan TPT con cadenas de Markov no estacionarias para construir un esquema de predicción de derrames de petróleo.

Capítulo 5. Conclusiones

Este trabajo proporciona una visión general del transporte de sargazo a lo largo del año 2021 en el Caribe occidental. Se destaca la importancia de utilizar a las corrientes oceánicas y el arrastre del viento para simular el movimiento del sargazo. A través de un análisis estadístico empleando múltiples trayectorias de partículas virtuales de sargazo se construyeron matrices de transición de probabilidades mensuales utilizando corrientes del reanálisis GLORYS y vientos del reanálisis atmosférico ERA5, pues son considerados productos muy realistas del estado oceánico y atmosférico de la región de estudio, aunque con relativa baja resolución espacial y temporal (ver Capítulo 1). El análisis de eigenvectores y eigenvalores de estas matrices revela regiones que exhiben fuertes conexiones y aquellas con mayor dificultad de intercambio de partículas (Capítulo 3). Por otra parte, se aplicó la teoría de caminos de transición (Capítulos 3 y 4) para identificar las rutas más directas que sigue el sargazo desde las zonas de entrada al Caribe occidental hasta las costas de la península de Yucatán y Cuba. La evolución de distribuciones de partículas vista como una sucesión de eventos en una cadena de Markov y la implementación de TPT permite identificar los sitios donde suelen arribar frecuentemente las partículas y determinar regiones de alto tránsito que además conducen más directamente hasta las costas.

Con el análisis de eigenvectores/eigenvalores se identificaron dos conexiones recurrentes: por un lado, las partículas al este de la corriente Yucatán que tienden a tener dificultades en alcanzar la costa y entre más cercanas se encuentren a Cuba son más propensas a ser capturadas y permanecer tiempos largos en los remolinos que se encuentran en la entrada del canal de Yucatán cercanos a Cuba. Por el otro, la corriente en el sur del dominio (Caribe occidental) que identificamos como parte de la corriente de Caimán, y la corriente misma de Yucatán, mostraron ser la vía de conexión principal de transporte de sargazo hacia las costas del Caribe mexicano. Los resultados obtenidos son consistentes con los de (Lara-Hernández et al., 2024) y (Allende-Arandía et al., 2023). En nuestro caso, se extiende la relevancia estadística de estos resultados al menos para el año 2021.

La obtención de trayectorias directas nos reveló que el origen común del pseudo sargazo que arriba a las costas de México se encuentra al sur, aproximadamente por debajo de los $18^{\circ}N$, independientemente de la época del año (con excepción de noviembre) y del factor de arrastre con el viento implementado. Los aumentos en influencia del viento derivaron en una mayor uniformidad en la llegada de sargazo a lo largo de la costa, así como en el ensanchamiento del cuello de botella por el que atraviesan los flujos de mayor probabilidad y menor duración.

La idea en esta tesis fue hacer una prueba piloto de estas metodologías, iniciando por tratar de entender

aspectos básicos de la teoría y aplicarla a un problema relevante, aunque hasta cierto punto limitado al haberse aplicado solo a un año de datos. A futuro deben considerarse más datos (los reanálisis tienen 20 o más años de datos) para tener una mejor representación de la variabilidad en la región. Es de esperarse que los resultados no cambien en forma cualitativa, pero ciertamente sí puede esperarse mucha más variabilidad

Por otro lado, al igual que en el caso de derrames de petróleo (Olascoaga & Beron-Vera, 2023), esta metodología podría servir de base para un sistema de predicción de arribazones de sargazo basado, por ejemplo, en observaciones con radares sin necesidad de tener modelos de pronóstico. Esto podría aplicarse para realizar análisis más enfocados en las regiones cercanas a la costa. Al mismo tiempo sería interesante extender el dominio, tanto espacial como temporalmente, a todo el Caribe para entender mejor la proveniencia del sargazo y las transiciones lagrangianas a mayor escala.

Una cuestión importante es la relacionada con la resolución de la información si se quieren determinar diferencias de arribazones a nivel muy local para regiones de interés ecológico o turístico. Al mismo tiempo es importante reconocer que en el problema del sargazo, además de aspectos físicos que hay que tomar en cuenta (e.g efectos inerciales, ecuaciones de Maxey-Riley Beron-Vera & Miron (2020)) existen aspectos biogeoquímicos y fisiológicos muy importantes y poco estudiados, que influyen la dinámica del sargazo. La incorporación de estos temas en la modelación estadística como la presentada en esta tesis es un problema abierto. La identificación de los sitios de origen que más contribuyen al arribo del sargazo a la costa y de sus vías principales de transporte puede servir para diseñar estrategias efectivas para la gestión y tal vez hasta la implementación de barreras capaces de atrapar y evitar los impactos del sargazo en las costas.

Literatura citada

- Aldana, D. (2022). México ante el sargazo. *Revista de la Academia Mexicana de Ciencias*, 4(71), https://www.revistaciencia.amc.edu.mx/images/revista/71_4/PDF/71--4_SARGAZO_RED.pdf.
- Allende-Arandía, M. E., Duran, R., Sanvicente-Añorve, L., & Appendini, C. M. (2023). Lagrangian Characterization of Surface Transport From the Equatorial Atlantic to the Caribbean Sea Using Climatological Lagrangian Coherent Structures and Self-Organizing Maps. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 128(7). <https://doi.org/10.1029/2023JC019894>.
- Andrade-Canto, F., Beron-Vera, F. J., Goni, G. J., Karrasch, D., Olascoaga, M. J., & Trinanes, J. (2022). Carriers of Sargassum and mechanism for coastal inundation in the Caribbean Sea. *Physics of Fluids*, 34(1). <https://doi.org/10.1063/5.0079055>.
- Aref, H. (1984). Stirring by chaotic advection. *Journal of Fluid Mechanics*, 143, 1–21. <https://doi.org/10.1017/S0022112084001233>.
- Berline, L., Ody, A., Jouanno, J., Chevalier, C., André, J.-M., Thibaut, T., & Ménard, F. (2020). Hindcasting the 2017 dispersal of Sargassum algae in the Tropical North Atlantic. *Marine Pollution Bulletin*, 158, 111431. <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2020.111431>.
- Beron-Vera, F. J. & Miron, P. (2020). A minimal Maxey–Riley model for the drift of Sargassum rafts. *Journal of Fluid Mechanics*, 904, A8. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.666>.
- Beron-Vera, F. J., Olascoaga, M. J., Putman, N. F., Triñanes, J., Goni, G., & Lumpkin, R. (2022). Dynamical geography and transition paths of Sargassum in the tropical Atlantic. *AIP advances*, 12(10). <https://doi.org/10.1063/5.0117623>.
- Bonner, G., Beron-Vera, F., & Olascoaga, M. (2023). Improving the stability of temporal statistics in transition path theory with sparse data. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 33(6). <https://doi.org/10.1063/5.0144706>.
- Cetina, P., Candela, J., Sheinbaum, J., Ochoa, J., & Badan, A. (2006). Circulation along the Mexican Caribbean coast. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 111(C8). <https://doi.org/10.1029/2005JC003056>.
- Chávez, V., Uribe-Martínez, A., Cuevas, E., Rodríguez-Martínez, R. E., Van Tussenbroek, B. I., Francisco, V., Estévez, M., Celis, L. B., Monroy-Velázquez, L. V., Leal-Bautista, R., et al. (2020). Massive Influx of pelagic Sargassum spp. on the Coasts of the Mexican Caribbean 2014–2020: Challenges and Opportunities. *Water*, 12(10), 2908. <https://doi.org/10.3390/w12102908>.
- del Castillo-Negrete, D. & Morrison, P. J. (1993). Chaotic transport by Rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 5(4), 948–965. <https://doi.org/10.1063/1.858639>.
- Devault, D. A., Pierre, R., Marfaing, H., Dolique, F., & Lopez, P.-J. (2021). Sargassum contamination and consequences for downstream uses: a review. *Journal of Applied Phycology*, 33, 567–602. <https://doi.org/10.1007/s10811-020-02250-w>.
- Drouin, K. L., Lozier, M. S., Beron-Vera, F. J., Miron, P., & Olascoaga, M. J. (2022). Surface Pathways Connecting the South and North Atlantic Oceans. *Geophysical research letters*, 49(1), e2021GL096646. <https://doi.org/10.1029/2021GL096646>.
- García Martínez, I. (2015). *Variabilidad océano-atmósfera asociada a la sequía intraestival en el reanálisis CFSR* [Tesis de Maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California]. Repositorio Institucional <https://biblioteca.cicese.mx/catalogo/tesis/ficha.php?id=24059>.

- García-Sánchez, M., Graham, C., Vera, E., Escalante-Mancera, E., Álvarez-Filip, L., & van Tussenbroek, B. I. (2020). Temporal changes in the composition and biomass of beached pelagic *Sargassum* species in the Mexican Caribbean. *Aquatic Botany*, *167*, 103275. <https://doi.org/10.1016/j.aquabot.2020.103275>.
- Gardiner, C. W. (1985). *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (2da ed.). Springer.
- González Amador, M. F. & Zavala Sansón, L. (2023). Surface dispersion of coastal discharges in north america towards the great pacific garbage patch. *Marine Pollution Bulletin*, *191*, 114961. <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2023.114961>.
- Hu, C. (2021). Outlook of 2021 *Sargassum* blooms in the Caribbean Sea and Gulf of Mexico [Reporte, University of South Florida]. https://optics.marine.usf.edu/projects/SaWS/pdf/Sargassum_outlook_2021_bulletin01_USF.pdf.
- Hu, C., Feng, L., Hardy, R. F., & Hochberg, E. J. (2015). Spectral and spatial requirements of remote measurements of pelagic *Sargassum* macroalgae. *Remote Sensing of Environment*, *167*, 229–246. <https://doi.org/10.1016/j.rse.2015.05.022>.
- Hu, C., Zhang, S., Barnes, B. B., Xie, Y., Wang, M., Cannizzaro, J. P., & English, D. C. (2023). Mapping and quantifying pelagic *sargassum* in the atlantic ocean using multi-band medium-resolution satellite data and deep learning. *Remote Sensing of Environment*, *289*, 113515. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.rse.2023.113515>.
- Johns, E. M., Lumpkin, R., Putman, N. F., Smith, R. H., Muller-Karger, F. E., T. Rueda-Roa, D., Hu, C., Wang, M., Brooks, M. T., Gramer, L. J., & Werner, F. E. (2020). The establishment of a pelagic *Sargassum* population in the tropical Atlantic: Biological consequences of a basin-scale long distance dispersal event. *Progress in Oceanography*, *182*, 102269. <https://doi.org/10.1016/j.pocean.2020.102269>.
- Jouanno, J., Benschila, R., Berline, L., Soulié, A., Radenac, M.-H., Morvan, G., Diaz, F., Sheinbaum, J., Chevalier, C., Thibaut, T., Changeux, T., Menard, F., Berthet, S., Aumont, O., Ethé, C., Nabat, P., & Mallet, M. (2021). A NEMO-based model of *Sargassum* distribution in the tropical Atlantic: description of the model and sensitivity analysis (NEMO-Sarg1. 0). *Geoscientific Model Development*, *14*(6), 4069–4086. <https://doi.org/10.5194/gmd-14-4069-2021,2021>.
- Koltai, P. (2011). *Efficient approximation methods for the global long-term behavior of dynamical systems: theory, algorithms and examples*. Logos Verlag Berlin GmbH.
- Kovács, Z. & Tél, T. (1989). Scaling in multifractals: Discretization of an eigenvalue problem. *Physical Review A*, *40*(8), 4641. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.40.4641>.
- Laffoley, D., Roe, H. S. J., Angel, M. V., Ardron, J., Bates, N. R., Boyd, I. L., Brooke, S., Buck, K. N., Carlson, C. A., Causey, B., Conte, M. H., Christiansen, S., Cleary, J., Donnelly, J., Earle, S. A., Edwards, R., Gjerde, K. M., Giovannoni, S. J., ... , & Vats, V. (2011). The protection and management of the Sargasso Sea: The golden floating rainforest of the Atlantic Ocean. Summary Science and Supporting Evidence Case [Reporte, Sargasso Sea Alliance]. https://www.researchgate.net/publication/260360290_The_protection_and_management_of_the_Sargasso_Sea_The_golden_floating_rainforest_of_the_Atlantic_Ocean.
- Lara-Hernández, J., Enriquez, C., Zavala-Hidalgo, J., Cuevas, E., van Tussenbroek, B., & Uribe-Martínez, A. (2024). *Sargassum* transport towards Mexican Caribbean shores: Numerical modeling for research and forecasting. *Journal of Marine Systems*, *241*. <https://doi.org/10.1016/j.jmarsys.2023.103923>.

- López Miranda, J. L., Celis, L. B., Estévez, M., Chávez, V., van Tussenbroek, B. I., Uribe-Martínez, A., Cuevas, E., Rosillo Pantoja, I., Masia, L., Cauich-Kantun, C., et al. (2021). Commercial potential of pelagic Sargassum spp. in Mexico. *Frontiers in Marine Science*, 8, 768470. <https://doi.org/10.3389/fmars.2021.768470>.
- Maximenko, N., Hafner, J., & Niiler, P. (2012). Pathways of marine debris derived from trajectories of Lagrangian drifters. *Marine pollution bulletin*, 65(1-3), 51–62. <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2011.04.016>.
- Miron, P., Beron-Vera, F. J., Helfmann, L., & Koltai, P. (2021). Transition paths of marine debris and the stability of the garbage patches. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 31(3). <https://doi.org/10.1063/5.0030535>.
- Miron, P., Beron-Vera, F. J., Olascoaga, M. J., Froyland, G., Pérez-Brunius, P., & Sheinbaum, J. (2019a). Lagrangian geography of the Deep Gulf of Mexico. *Journal of physical oceanography*, 49(1), 269–290. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-18-0073.1>.
- Miron, P., Beron-Vera, F. J., Olascoaga, M. J., & Koltai, P. (2019b). Markov-chain-inspired search for MH370. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 29(4). <https://doi.org/10.1063/1.5092132>.
- Miron, P., Beron-Vera, F. J., Olascoaga, M. J., Sheinbaum, J., Pérez-Brunius, P., & Froyland, G. (2017). Lagrangian dynamical geography of the Gulf of Mexico. *Scientific reports*, 7(1), 7021. <https://doi.org/10.1038/s41598-017-07177-w>.
- Norris, J. R. (1997). *Markov Chains*. University of Cambridge.
- Ohlmann, J. C. & Niiler, P. P. (2005). Circulation over the continental shelf in the northern gulf of Mexico. *Progress in Oceanography*, 64(1), 45–81. <https://doi.org/10.1016/j.pocean.2005.02.001>.
- Olascoaga, M. & Beron-Vera, F. (2023). Exploring the use of Transition Path Theory in building an oil spill prediction scheme. *Frontiers in Marine Science*, 9. <https://doi.org/10.3389/fmars.2022.1041005>.
- Olascoaga, M. J., Beron-Vera, F. J., Beyea, R. T., Bonner, G., Castellucci, M., Goni, G. J., Guigand, C., & Putman, N. F. (2023). Physics-informed laboratory estimation of sargassum windage. *Physics of Fluids*, 35(11), 111702. <https://doi.org/10.1063/5.0175179>.
- Ottino, J. M. (1989). *The kinematics of mixing: stretching, chaos, and transport*. University of Cambridge.
- Poulain, P.-M. & Niiler, P. P. (1989). Statistical analysis of the surface circulation in the California current system using satellite-tracked drifters. *Journal of Physical Oceanography*, 19(10), 1588–1603. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1989\)019<1588:SAOTSC>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1989)019<1588:SAOTSC>2.0.CO;2).
- Preisendorfer, R. (1988). *Principal Component Analysis in Meteorology and Oceanography*. Elsevier.
- Putman, N. F. & Hu, C. (2022). Sinking Sargassum. *Geophysical research letters*, 49(17). <https://doi.org/10.1029/2022GL100189>.
- Putman, N. F., Lumpkin, R., Olascoaga, M. J., Trinanés, J., & Goni, G. J. (2020). Improving transport predictions of pelagic Sargassum. *Journal of Experimental Marine Biology and Ecology*, 529, 151398. <https://doi.org/10.1016/j.jembe.2020.151398>.

- Schling, M., Compeán, R. G., Pazos, N., Bailey, A., Arkema, K., & Ruckelshaus, M. (2022). The economic impact of sargassum: Evidence from the mexican coast. <https://doi.org/10.18235/0004470>.
- Scott, M. (2013). Applied stochastic processes. *University of Waterloo*.
- Ulam, S. M. (1960). A collection of mathematical problems. In *A Collection of Mathematical Problems*, volume 8, (pp. 70–76). Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics.
- Van Tussenbroek, B. I., Arana, H. A. H., Rodríguez-Martínez, R. E., Espinoza-Avalos, J., Canizales-Flores, H. M., González-Godoy, C. E., Barba-Santos, M. G., Vega-Zepeda, A., & Collado-Vides, L. (2017). Severe impacts of brown tides caused by *Sargassum* spp. on near-shore Caribbean seagrass communities. *Marine pollution bulletin*, 122(1-2), 272–281. <https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2017.06.057>.
- Vanden-Eijnden, E. et al. (2006). Towards a theory of transition paths. *Journal of statistical physics*, 123(3), 503–523. <https://doi.org/10.1007/s10955-005-9003-9>.
- Vanden-Eijnden, E. et al. (2010). Transition-path theory and path-finding algorithms for the study of rare events. *Annual review of physical chemistry*, 61, 391–420. <https://doi.org/10.1146/annurev.physchem.040808.090412>.
- Wang, M. & Hu, C. (2016). Mapping and quantifying Sargassum distribution and coverage in the Central West Atlantic using MODIS observations. *Remote sensing of environment*, 183, 350–367. <https://doi.org/10.1016/j.rse.2016.04.019>.
- Wang, M., Hu, C., Barnes, B. B., Mitchum, G., Lapointe, B., & Montoya, J. P. (2019). The great Atlantic sargassum belt. *Science*, 365(6448), 83–87. <https://doi.org/10.1126/science.aaw7912>.
- Waterman, S. & Lilly, J. M. (2015). Geometric decomposition of eddy feedbacks in barotropic systems. *Journal of Physical Oceanography*, 45(4), 1009–1024. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-14-0177.1>.
- Zavala Sanson, L. (2021). Apuntes de Ocenografía Física Dispersión y Difusión en el Océano. *Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California*. Archivo PDF.