

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el SECIHTI (Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE © 2025, Todos los Derechos Reservados, CICESE

# Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



---

## Doctorado en Ciencias en Oceanografía Física

---

### Efecto del oleaje en la transferencia de momento entre el océano y la atmósfera

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias

Presenta:

**Carlos Eduardo Villarreal Olavarrieta**

Ensenada, Baja California, México

2025

Tesis defendida por

**Carlos Eduardo Villarreal Olavarrieta**

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. José Pedro Osuna Cañedo

Codirector de tesis

Dr. Francisco Javier Ocampo Torres

Codirector de tesis

Dr. Luis Zavala Sansón

Dr. Héctor García Nava

Dr. Federico Graef Ziehl

Dr. Enric Pallàs Sanz



Dra. María Tereza Cavazos Pérez  
Coordinadora del Posgrado en Oceanografía Física

Dra. Ana Denise Re Araujo  
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Carlos Eduardo Villarreal Olavarrieta como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Oceanografía Física.

## **Efecto del oleaje en la transferencia de momento entre el océano y la atmósfera**

Resumen aprobado por:

Dr. José Pedro Osuna Cañedo

Codirector de tesis

Dr. Francisco Javier Ocampo Torres

Codirector de tesis

Predecir correctamente el esfuerzo del viento es de suma importancia pues es indispensable incorporarlo en los modelos numéricos para el pronóstico del estado del tiempo y del clima, y su influencia es decisiva en los procesos de interacción entre el océano y la atmósfera. El esfuerzo del viento se estima principalmente por medio de parametrizaciones del coeficiente de arrastre, que típicamente consideran que la dirección del esfuerzo del viento es igual a la del viento, aunque en realidad no siempre es así. Durante condiciones de viento débil a moderado y en presencia de oleaje que se propaga fuera de su zona de generación (*swell*), estas parametrizaciones pueden generar un alto error en la estimación. En este estudio se estimó directamente el esfuerzo del viento a partir de las mediciones obtenidas de un anemómetro sónico con una tasa de muestreo de 100 Hz, instalado en una Boya Oceanográfica y de Meteorología Marina (BOMM). El estado del mar se caracterizó a través del espectro direccional del oleaje procesando la señal de un arreglo de seis alambres de capacitancia, los cuales midieron el nivel de la superficie libre con una tasa de muestreo de al menos 10 Hz. Las mediciones de velocidad del viento y nivel de la superficie libre fueron corregidas debido al movimiento de la BOMM utilizando una unidad de movimiento inercial, que registra la posición e inclinación de la BOMM con una tasa de muestreo de 100 Hz. Las componentes del esfuerzo del viento, la que es coherente con las olas y la que se asocia a la turbulencia, también fueron calculadas y analizadas. Se observó que durante condiciones de *swell* dominante que se propaga en la misma dirección que el viento, el esfuerzo del viento coherente con las olas tiene dirección opuesta al viento y al oleaje, la magnitud del esfuerzo del viento total es menor que en ausencia de *swell*. Durante condiciones de *swell* con viento en dirección opuesta, la capa límite de las olas se modifica y el *swell* produce un esfuerzo del viento coherente con las olas en la misma dirección que el viento, entonces la magnitud del esfuerzo del viento es mayor a la que se espera en ausencia de *swell*. La velocidad del viento, la celeridad de fase de las olas, la altura significativa de las olas, y la dirección del *swell* relativa a la dirección del viento son variables indispensables para estimar correctamente el esfuerzo del viento en condiciones de *swell* dominante. De las mediciones obtenidas con la BOMM se obtuvieron parametrizaciones empíricas para modelar cada una de las componentes del esfuerzo del viento.

**Palabras clave:** Esfuerzo del viento, Dirección del esfuerzo del viento, Swell, Capa límite del oleaje

Abstract of the thesis presented by Carlos Eduardo Villarreal Olavarrieta as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Physical Oceanography.

### **Effect of wind waves on the ocean-atmosphere momentum transfer**

Abstract approved by:

PhD José Pedro Osuna Cañedo

Thesis Co-Director

PhD Francisco J. Ocampo-Torres

Thesis Co-Director

Correctly estimating the wind stress is of the utmost importance in models for climate studies, weather forecasting, and ocean-atmosphere interaction. Wind stress is mainly estimated using parameterizations of the drag coefficient, which typically consider the direction of wind stress aligned with the wind. However, this is not always the case. During light to moderate wind conditions and in the presence of swell, these parameterizations may lead to high estimation errors. In this study, the wind stress was directly estimated from measurements obtained from a sonic anemometer with a sampling rate of 100 Hz installed on a spar buoy. The sea state was characterized by estimating the wave directional spectrum by processing the signal from an array of six wave-staffs sensing the free surface level at a sampling rate of at least 10 Hz. The error in the wind speed and free surface level measurements caused by the buoy's motion was corrected with data collected from an inertial motion unit, which records the position and inclination of the buoy with a sampling rate of 100 Hz. The wave-coherent and turbulent wind stress components were also estimated and analyzed. It was observed that during conditions of dominant swell traveling in the same direction as the wind, the wave-coherent wind stress travels in the opposite direction to the wind and waves, and the magnitude of the total wind stress is lower than in the absence of waves. During swell conditions traveling in the opposite direction to the wind, the wave boundary layer is modified, and the swell produces a wave-coherent wind stress in the same direction as the wind; the magnitude of the wind stress is more significant than expected in the absence of swell. Wave age, significant wave height, and swell direction relative to the wind are essential to correctly estimating the wind stress under swell-dominant conditions. A set of empirical parameterizations was obtained from the data collected with the buoy to model each wind stress component.

**Keywords:** Wind stress, Wind stress direction, Ocean swell, Wave boundary layer

## Dedicatoria

**A mis hijos Lía y Mikel.**

**Mi deseo más grande es que encuentren su  
pasión y luchen por sus sueños. Yo estaré  
siempre para compartir sus triunfos y  
fracasos, sus tristezas y alegrías.**

**A mi madre María Cristina**

**y a mi abuelo Jorge:**

**para que su ejemplo siempre viva  
en nuestro recuerdo.**

**Gracias por todo.**

## Agradecimientos

Agradezco a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) y al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) por los estímulos económicos recibidos durante la realización de este doctorado. Al CIGoM por las bases de datos utilizadas durante esta investigación.

A mis directores de tesis, los doctores Pedro Osuna y Paco Ocampo. A la doctora Tere Cavazos, coordinadora del posgrado. A los miembros de mi comité de tesis, los doctores Federico Graef, Héctor García Nava, Enric Pallàs, Luis Zavala. Y a Nicolás Rasclé, miembro de este comité durante el primer año de este trabajo. A todos los que forman o formaron parte del grupo de Oleaje. A los doctores Lucía Robles, Guillermo Díaz, Bernardo Esquivel y Diego Galván. A los Rodrigos: Alcaraz y Chiapas y a Tito Martínez Osuna, técnicos durante el desarrollo de la BOMM. A mis compañeros de doctorado Pancho Herrera y Laura Pérez-Sampablo. Y de manera muy especial a Rodney Mora, que compartió conmigo su conocimiento y tiempo al discutir y comparar resultados, por su amistad durante estos años en CICESE. A los exalumnos del Grupo de Oleaje de CICESE, cuyas investigaciones fueron antecedentes para hacer posible este trabajo: Héctor García Nava, Lucía Gutiérrez, Diego Larios y de manera muy especial a Daniel Santiago Peláez Zapata. A los doctores Néstor García Chan, Anatoly Filonov y María Barba del posgrado en Hidrometeorología de la Universidad de Guadalajara, por su apoyo y amistad.

A mi hermano Jorge, que me dio refugio y apoyo incondicional durante los momentos más difíciles, gracias infinitas. A mis hermanos Rodrigo, Víctor y Cristina por su amor de toda la vida, por su apoyo y de manera muy especial, por cuidar a mi mamá en sus últimos días. A Karina y Laura, que más que primas son mis hermanas, sé que están en mi equipo y yo en el suyo; ayer, hoy y siempre, las quiero. A Gaby Alonso, Ale López y Rosa Elena López de Rivera, estoy muy agradecido con la vida por tantos años de conversaciones, risas, abrazos, lágrimas, amistad y cariño. De igual forma a mis amigos Jorge Ochoa, Óscar Ferrer, Paola Montero, Irene Caselli, Rocío Monroy, Sayroli Ochoa y Dulce Llamas. A los hermanos Olavarrieta Palomo: Felipe, Fernando y Maricarmen. A mis tíos: Pepé, Felipe, Lety y Carmelita, que en mi infancia y adolescencia fueron padres adoptivos y ejemplo a seguir. A la M.C. Blanca Ivette Gutiérrez Hernández. A Alejandro Puente<sup>†</sup>, Sandra de la Torre y Claudia Meza por su hospitalidad y cariño en Ensenada. A Luz Elena, mamá de mis hijos. A Don Víctor, gracias papá.

# Tabla de contenido

	Página
Resumen en español .....	ii
Resumen en inglés .....	iii
Dedicatoria .....	iv
Agradecimientos .....	v
Lista de figuras .....	viii
Lista de tablas .....	x
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1. Antecedentes .....	1
1.2. Pregunta de investigación .....	8
1.3. Objetivos .....	8
1.3.1. Objetivo general .....	8
1.3.2. Objetivos específicos .....	8
<b>Capítulo 2. Metodología</b>	
2.1. Marco teórico para la estimación del flujo de momento entre el océano y la atmósfera y otras propiedades relacionadas .....	9
2.1.1. El esfuerzo del viento y sus componentes .....	9
2.1.2. El estado del mar .....	13
2.1.3. Velocidad del viento y esfuerzo del viento en un marco de referencia orientado con la dirección de propagación del oleaje .....	15
2.2. Sitios y equipo de medición .....	18
2.3. Procesamiento de datos y control de calidad .....	20
2.3.1. Control de calidad de rutina y criterio de estacionariedad .....	20
2.3.2. Estimación del estado del mar .....	23
2.3.3. Estimación del flujo de momento .....	27
<b>Capítulo 3. Resultados y discusión</b>	
3.1. Resultados .....	31
3.1.1. Análisis del coeficiente de arrastre .....	31
3.1.2. Análisis del esfuerzo del viento en un marco de referencia orientado al viento .....	33
3.1.3. Análisis de la dirección relativa del esfuerzo del viento en un marco de referencia orientado a la dirección de propagación del oleaje .....	36
3.1.4. Análisis y parametrización del esfuerzo del viento en un marco de referencia orientado en la dirección de propagación del oleaje .....	38
3.1.4.1. Descripción de la componente del esfuerzo del viento en la dirección de propagación del oleaje .....	42
3.1.4.2. Descripción de la componente del esfuerzo del viento perpendicular a la dirección de propagación del oleaje .....	44
3.2. Discusión .....	46
3.2.1. Sobre el modelo propuesto .....	46



3.2.2.	Sobre el mecanismo de transferencia de momento entre el océano y la atmósfera en presencia de <i>swell</i> y viento débil a moderado . . . . .	47
3.2.2.1.	Cuando el <i>swell</i> se propaga en la misma dirección que el viento . . . . .	48
3.2.2.2.	Cuando el <i>swell</i> se propaga en dirección contraria al viento . . . . .	49
3.2.3.	Estimación de la magnitud y dirección del esfuerzo del viento . . . . .	50

## Capítulo 4. Conclusiones

Literatura citada . . . . .	54
Nomenclatura . . . . .	61
Anexos . . . . .	73

### Anexo A. Corrección de las mediciones por el movimiento de la boya

A.1.	Ángulos de Euler, matrices de rotación y cuaterniones . . . . .	74
A.1.1.	Matrices de rotación . . . . .	75
A.1.2.	Cuaterniones . . . . .	78
A.2.	Estimación de la orientación de la BOMM en el marco de referencia terrestre por medio de giroscopios, acelerómetros y magnetómetros . . . . .	80
A.2.1.	Integración de la velocidad angular . . . . .	80
A.2.2.	Compensación de señal usando datos de magnetómetro y acelerómetro . . . . .	81
A.2.3.	Algoritmo para calcular la corrección asociada al movimiento . . . . .	83
A.3.	Corrección de movimiento y los distintos marcos de referencia inerciales utilizados en la BOMM . . . . .	84
A.3.1.	Algoritmo para calcular la corrección de las mediciones ante el efecto del movimiento de la BOMM . . . . .	88

### Anexo B. Análisis tiempo-frecuencia y el método WDM

B.1.	Onduleta de Morlet y el análisis tiempo-frecuencia . . . . .	91
B.2.	Método de obtención del espectro direccional por medio de onduletas (Método WDM) . . . . .	96
B.2.1.	WDM por promedio de dobles pares de alambres . . . . .	97
B.2.2.	WDM por regresión lineal . . . . .	99
B.2.3.	Construcción de los espectros direccionales usando WDM . . . . .	99
B.3.	Suavizado de los espectros . . . . .	102

# Lista de figuras

Figura	Página
1. Diagrama de la velocidad del viento normalizada en dos marcos de referencia: orientado en dirección del viento y orientado en la dirección de propagación del oleaje . . . . .	14
2. Diagrama del vector esfuerzo del viento representado dos marcos de referencia distintos: orientado en dirección del viento y orientado en la dirección de propagación del oleaje . .	17
3. Mapa de los sitios de medición . . . . .	19
4. Características de condiciones de viento y estado del mar durante las campañas de medición	21
5. Ejemplos de los espectros direccionales obtenidos con el método WDM; espectros de frecuencia omnidireccionales de los alambres de capacitancia; y ejemplos del control de calidad aplicado . . . . .	25
6. Ejemplo del procedimiento del suavizado de los espectros direccionales obtenidos por el método WDM . . . . .	26
7. Ejemplos de espectros direccionales de eventos con dos sistemas de olas de energía similar	27
8. Ejemplos de los espectros de frecuencias de las componentes de velocidad del viento y elevación de la superficie libre, coespectros de las componentes de velocidad del viento y componentes de velocidad del viento coherente con las olas y ojivas obtenidas durante el método de covarianza de las fluctuaciones de velocidad ( <i>eddy covariance</i> ) . . . . .	29
9. Coeficiente de arrastre $C_D$ y dirección relativa del esfuerzo del viento respecto al viento $\alpha$ vs. velocidad del viento $U_{10,N}$ . Se muestran en escala de color categorías de condiciones del mar: <i>wind sea</i> y <i>swell</i> en la misma dirección, dirección opuesta y en dirección perpendicular al viento . . . . .	32
10. Componentes del esfuerzo del viento $\tau_x$ y $\tau_y$ en un marco de referencia orientado en la dirección del viento vs. componentes del viento normalizado $\hat{U}_x$ y $\hat{U}_y$ en un marco de referencia orientado en la dirección de propagación de las olas . . . . .	34
11. Velocidad del viento relativa y normalizada con el oleaje en coordenadas polares en un marco de referencia orientado en la dirección de propagación de las olas. Con colores se muestra el valor absoluto de la dirección relativa entre esfuerzo del viento $ \alpha $ , el esfuerzo del viento turbulento $ \alpha' $ y el esfuerzo del viento coherente con las olas $ \tilde{\alpha} $ y el viento promedio . . . . .	37
12. Componentes del esfuerzo del viento en la dirección de propagación del oleaje $\tau_{\tilde{x}}$ y su fracción asociada a la turbulencia $\tau'_{\tilde{x}}$ y la que es coherente con las olas $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$ vs. componente del viento normalizado en la dirección de propagación del oleaje $\hat{U}_{\tilde{x}}$ (también llamada "inverso de la edad de la ola") . . . . .	39
13. Componentes del esfuerzo del viento perpendicular a la dirección de propagación del oleaje $\tau_{\tilde{y}}$ , su fracción asociada a la turbulencia $\tau'_{\tilde{y}}$ y la que es coherente con las olas $\tilde{\tau}_{\tilde{y}}$ vs. componente del viento normalizado perpendicular al oleaje $\hat{U}_{\tilde{y}}$ . En escala de color se muestra la altura significativa de las olas $H_s$ y líneas de ajuste obtenidas por medio de análisis de regresión múltiple . . . . .	40
14. Secuencia de rotación 1-2-3 para cambiar de marco de referencia usando los ángulos de Euler . . . . .	76

Figura	Página
15. Fotografía que muestra la BOMM y su marco de referencia orientado hacia la <i>theter</i> . . .	85
16. Marcos de referencia utilizados en la BOMM . . . . .	86
17. Marcos de referencia del velocímetro ADV Vector dependiendo de si es instalado a babor o a estribor de la BOMM . . . . .	87
18. Ejemplo de los espectros de los seis alambres de capacitancia antes y después de la corrección de las mediciones por el movimiento de la BOMM . . . . .	89
19. Esquema de la descomposición del dominio tiempo-frecuencia usando la transformada de Fourier, la transformada de Fourier de corta duración y la transformada de <i>wavelet</i> . . . .	92
20. Ejemplos de la forma de onduletas madre de Morlet al variar la frecuencia central $\omega_0$ y el ancho de la Gaussiana $\sigma$ . . . . .	94
21. Ejemplo del análisis de una señal por medio de la transformada de <i>wavelet</i> con distintos valores del ancho de la Gaussiana $\sigma$ para los mismos valores frecuencia central $f_0$ y las mismas escalas $a$ . . . . .	96
22. Funciones en el dominio tiempo-frecuencia obtenidas del método WDM: espectro de la transformada de <i>wavelet</i> , fase de la transformada de <i>wavelet</i> , amplitud o varianza de la superficie libre, dirección de las olas, magnitud del número de onda de las olas . . . . .	100

# Lista de tablas

Tabla	Página
1. Coeficientes de las parametrizaciones de las componentes del esfuerzo del viento obtenidos por análisis de regresión múltiple . . . . .	41
2. Coeficientes de las parametrizaciones del esfuerzo del viento turbulento obtenidos por análisis de regresión múltiple . . . . .	45

# Capítulo 1. Introducción

---

## 1.1. Antecedentes

El esfuerzo del viento  $\check{\tau}_{ij}$  es el esfuerzo de deformación o de cizalladura del aire dentro de la capa límite atmosférica (Kundu et al., 2016; Stull, 1988; Jones et al., 2001). La deformación del perfil vertical de la velocidad del viento ocurre debido a la fricción con el terreno o la superficie marina (en este trabajo nos enfocaremos únicamente en la segunda) y durante este proceso se intercambia momento entre la atmósfera y el océano. El esfuerzo del viento es un tensor cartesiano de segundo orden, sin embargo, en los procesos en la capa límite planetaria únicamente se consideran significantes dos de sus componentes:

$$\check{\tau}_{xz} = \mu_a \left( \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial x} \right) - \rho_a \langle uw \rangle \equiv \tau_x, \quad (1a)$$

$$\check{\tau}_{yz} = \mu_a \left( \frac{\partial \bar{U}_y}{\partial z} + \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial y} \right) - \rho_a \langle vw \rangle \equiv \tau_y, \quad (1b)$$

donde  $x$  y  $y$  son las componentes horizontales y  $z$  la componente vertical;  $\bar{U}_x$ ,  $\bar{U}_y$  y  $\bar{U}_z$  son el promedio de las tres componentes de velocidad del viento;  $u$ ,  $v$ , y  $w$  son las fluctuaciones instantáneas de velocidad de cada una de las componentes del viento,  $\rho_a$  es la densidad del aire,  $\mu_a$  es la viscosidad dinámica del aire y el operador  $\langle \rangle$  es el promedio del producto o covarianza. Por simplicidad, estas dos componentes del tensor del esfuerzo del viento suelen representarse con un vector bidimensional  $\boldsymbol{\tau} = \tau_x \hat{\mathbf{i}} + \tau_y \hat{\mathbf{j}}$ , cuyas componentes corresponden a las direcciones horizontales paralelas a la superficie, con unidades de fuerza sobre unidad de superficie tangencial. Una de las propiedades del esfuerzo del viento sobre la superficie del mar es que su magnitud  $|\boldsymbol{\tau}|$  es igual a la cantidad de momento que se transfiere entre la atmósfera y la superficie del océano. Se suele considerar, como explican Grachev et al. (2003), que si el esfuerzo del viento tiene la misma dirección que el viento, la transferencia de momento es desde la atmósfera hacia el océano; si el esfuerzo del viento tiene dirección contraria a la del viento, la transferencia del momento es desde el océano hacia la atmósfera, aunque esta afirmación no sea cierta para todos los casos..

Desde la década de 1950, se ha utilizado la ley del Muro (LDM) junto con la teoría de similitud de Monin-Obukhov (MOST, por sus siglas en inglés) para estimar el perfil vertical de la velocidad del viento sobre el océano, y con base a ello, modelar el clima, la circulación atmosférica y oceánica o estimar el estado del mar (Toba et al., 2001). Con base en la LDM se puede estimar el perfil vertical de la velocidad

del viento mediante el esfuerzo del viento, de forma que

$$\bar{U}_x(z) = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho_a}} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) = \frac{u_*}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (2)$$

donde  $\bar{U}_x$  es el promedio de la componente de la velocidad del viento en la dirección principal del viento a una altura  $z$ ,  $u_*$  es la velocidad de fricción,  $z_0$  es la altura virtual aerodinámica y  $\kappa$  es la constante de von Kármán. A partir de la magnitud del esfuerzo del viento  $|\tau|$  se define la velocidad de fricción  $u_*$  como:

$$u_* = \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho_a}}. \quad (3)$$

La magnitud del esfuerzo del viento  $|\tau|$  también se puede expresar de manera adimensional como el coeficiente de arrastre  $C_D$ , del que se hablará más adelante, y está definido como:

$$C_D = \frac{|\tau|}{\rho_a U_{10}^2}, \quad (4)$$

siendo  $U_{10}$  la rapidez del viento a 10 m de la superficie (altura usada como estándar para las mediciones meteorológicas). La altura virtual o rugosidad aerodinámica  $z_0$ , es la altura en la que la velocidad promedio del viento es igual a cero; aunque no es una medida directa de las olas o el estado del mar, suele asociarse a dichos parámetros (es pertinente comentar que en casos de flujo turbulento del viento sobre el terreno, la rugosidad aerodinámica no es una medida directa de la topografía, ni del tipo de vegetación, relieve urbano, construcciones presentes, etcétera). La rugosidad aerodinámica se suele utilizar como una expresión equivalente al esfuerzo del viento, ya que al conocer la velocidad del viento y el esfuerzo del viento (que se considera función de la velocidad del viento), se puede estimar  $z_0$  por medio de la LDM (ecuación 2), de modo que:

$$z_0 = (10 \text{ m}) \exp\left(-\kappa U_{10} \sqrt{\frac{\rho_a}{|\tau|}}\right) = (10 \text{ m}) \exp\left(\frac{-\kappa}{\sqrt{C_D}}\right) = (10 \text{ m}) \exp\left(\frac{-\kappa U_{10}}{u_*}\right). \quad (5)$$

Se debe enfatizar que aunque el esfuerzo del viento, el coeficiente de arrastre y la altura virtual aerodinámica no son la misma variable, se consideran análogas, ya que dados los valores de la magnitud del esfuerzo del viento y de la velocidad del viento a 10 m de altura, se puede pasar de un parámetro a otro usando las ecuaciones 4 y 5. Usualmente las parametrizaciones para estimar el esfuerzo del viento están expresadas en términos de  $C_D$  o  $z_0$  y son función de parámetros como la rapidez del viento, la velocidad de fricción, la pendiente de las olas o la edad de la ola (estas dos variables se definirán más adelante).

Aunque el uso de la LDM está ampliamente aceptado en meteorología y oceanografía, se ha discutido

ampliamente de la invalidez de la teoría LDM-MOST sobre el mar (ver Mahrt et al., 2003), debido a que la superficie del mar no es una superficie sólida rugosa, sino una superficie con movimiento que puede ser forzado por las mareas, corrientes superficiales y principalmente por el oleaje. El uso generalizado de la LDM se debe a que durante condiciones "típicas", el error de cálculo asociado al uso de la LDM se considera aceptable en la mayoría de las situaciones; sin embargo, durante condiciones de viento débil y en presencia de *swell*, dichos errores de cálculo pueden ser mayores (Edson et al., 2013; García-Nava et al., 2009; Potter, 2015). Además, al usar la LDM se considera que el flujo de momento ocurre desde la atmósfera hacia el océano y que  $\tau$  se encuentra alineado con viento. Sin embargo, durante condiciones de *swell*, Grachev & Fairall (2001) observaron eventos con flujo de momento del océano a la atmósfera cuando la dirección del esfuerzo del viento presentaba ligeras desviaciones respecto a la dirección del viento promedio, sin importar su magnitud (Geernaert, 1988; Friehe et al., 2001).

La parametrización del esfuerzo del viento más conocida es la propuesta por Charnock (1955):

$$z_0 = \varepsilon \frac{u_*^2}{g}, \quad (6a)$$

donde  $g$  es la aceleración asociada a la gravedad,  $\varepsilon$  es el coeficiente de Charnock que usualmente se estima mediante parametrizaciones que dependen de la edad de la ola ( $u_*/c_p$ ), como la de Toba & Koga (1986),

$$\varepsilon = K \left( \frac{u_*}{c_p} \right)^p, \quad (6b)$$

siendo  $c_p$  la celeridad de fase de las olas asociada al pico del espectro, mientras que  $K$  y  $p$  son parámetros empíricos. Al considerar que tanto  $u_*$  como  $z_0$  son distintas formas de expresar el esfuerzo del viento, existe una autocorrelación espuria en las parametrizaciones del coeficiente de arrastre  $C_D$  o la rugosidad aerodinámica  $z_0$  cuando se expresan en función de la velocidad de fricción  $u_*$ , así lo demuestran Mahrt et al. (2003). Ellos además, sugieren que la ecuación de Charnock (ecuación 6a) no se debe utilizar para condiciones de viento débil, debido a las diferencias que se generan al comparar con las mediciones obtenidas en el campo. Otras parametrizaciones que consideramos pertinente mencionar por su importancia y su uso habitual en modelos numéricos son: la de Large & Pond (1981),

$$C_D \times 10^3 = \begin{cases} 1.2 & 4 \text{ m s}^{-1} < U_{10,N} < 11 \text{ m s}^{-1} \\ 0.49 + 0.065U_{10,N} & 11 \text{ m s}^{-1} < U_{10,N} < 25 \text{ m s}^{-1} \end{cases}, \quad (7)$$

y la de Yelland & Taylor (1996),

$$C_D \times 10^3 = \begin{cases} 0.29 + \frac{3.1}{U_{10,N}} + \frac{7.7}{U_{10,N}^2} & 3 \text{ m s}^{-1} < U_{10,N} < 6 \text{ m s}^{-1} \\ 0.6 + 0.070U_{10,N} & 6 \text{ m s}^{-1} < U_{10,N} < 26 \text{ m s}^{-1} \end{cases}, \quad (8)$$

donde  $U_{10,N}$  es la rapidez del viento a 10 m de altura en condiciones neutrales de estabilidad atmosférica. Toba et al. (2001) y Zhao & Li (2019) ofrecen una revisión histórica detallada sobre parametrizaciones del esfuerzo del viento .

Las primeras mediciones del ángulo entre el esfuerzo del viento y la velocidad del viento fueron realizadas por Geernaert (1988). En ese trabajo se observó que el esfuerzo del viento se desviaba ligeramente a la derecha de la dirección del viento durante condiciones atmosféricas inestables, mientras que durante condiciones estables la desviación del esfuerzo del viento era ligeramente a la izquierda. Sin embargo, en un estudio posterior, Geernaert et al. (1993) determinó que la estabilidad atmosférica explica el comportamiento de la dirección relativa entre el esfuerzo del viento y el viento en sólo un tercio de las observaciones, mientras que bajo condiciones atmosféricas neutras, la dirección relativa está influenciada tanto por la dirección del viento como la del *swell*. En otro estudio, Rieder et al. (1994) obtuvieron una parametrización para estimar la dirección relativa del esfuerzo del viento respecto al viento promedio como función de la dirección relativa de propagación del oleaje respecto al viento a partir de mediciones realizadas en el lago Geneva, en Suiza. Li et al. (2018) analizaron la influencia del *swell* en la dirección relativa del esfuerzo del viento. También propusieron una versión modificada de la LDM, en donde se utiliza la velocidad relativa del viento con respecto a la celeridad de fase del oleaje, e introdujeron un coeficiente de arrastre modificado que considera el ángulo  $\alpha$  entre el esfuerzo del viento y el viento (que llamaremos “dirección relativa del esfuerzo del viento”):

$$C_{D,mod} = \frac{\text{sign}[\cos(\alpha)] \times |\boldsymbol{\tau}|}{\rho_a U_{10}^2}, \quad (9)$$

Li et al. (2018) únicamente observaron valores de  $C_{D,mod}$  negativos en 40% de los eventos donde el *swell* se propaga en la misma dirección que el viento, los cuales representan un 2% del total de sus observaciones. Es importante mencionar que la ecuación 9 presenta discontinuidades cuando  $\alpha = 90^\circ$  o  $\alpha = 270^\circ$ . Recientemente, Chen et al. (2020) propusieron una parametrización de  $\alpha$  en función del ángulo entre la dirección de propagación del oleaje asociado al pico del espectro y la dirección del viento,  $\theta_p$  (que por simplicidad llamaremos “dirección relativa del oleaje”), tal que

$$\alpha = -0.11\theta_p - 9.7, \quad (10)$$



donde tanto  $\alpha$  como  $\theta_p$  se expresan en grados. Según la ecuación 10, cuando la dirección de propagación del oleaje y el viento es la misma,  $\theta_p = 0$ , el esfuerzo del viento tendrá una dirección relativa de aproximadamente  $10^\circ$  a la derecha del viento y no depende de ninguna propiedad del oleaje salvo su dirección. Esta expresión se obtuvo de mediciones donde la celeridad de fase  $c_p$  era aproximadamente 10 m/s y se mantuvo relativamente constante, además de que el valor de  $\theta_p$  se mantuvo entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ ; haciendo la ecuación 10 válida únicamente para condiciones particulares.

A partir de las mediciones en el golfo de Tehuantepec durante el experimento INTOA, García-Nava et al. (2009) observaron que los valores del coeficiente de arrastre  $C_D$ , obtenidos de la ecuación de Charnock, presentaban un error relativamente pequeño con respecto a las observaciones durante eventos con viento de moderado a intenso; sin embargo, durante eventos con viento débil y *swell* que se propaga en dirección opuesta al viento, el coeficiente de arrastre fue mayor a lo esperado, que se atribuyen a las interacciones entre el viento y el *swell*. Se observaron valores de hasta el doble que el  $C_D$  estimado de la ecuación de Charnock y con alta variabilidad. En otro estudio realizado por Potter (2015), se reportaron diferencias considerables respecto a las estimaciones realizadas con la ecuación de Charnock, así como alta variabilidad en los casos en presencia de *swell*; sin embargo, a diferencia de los resultados de García-Nava et al., los valores de  $C_D$  fueron menores que lo esperado durante condiciones con presencia de *swell* que se propaga en la dirección del viento.

El aumento o disminución del valor del coeficiente de arrastre con base en las parametrizaciones de Charnock se debe a que en presencia de *swell* ocurre una transferencia de momento del océano a la atmósfera, como lo observó Grachev & Fairall (2001). Esto se debe a que durante eventos de viento débil y *swell* intenso, la velocidad de propagación del oleaje es mayor que la velocidad del viento, la superficie del mar mueve al aire en las inmediaciones de la superficie, con un movimiento pseudo-oscilatorio, en sincronía con el movimiento de la superficie libre. Grachev & Fairall definen así un viento inducido por el oleaje (*wave-driven wind*). Estas observaciones concuerdan con la teoría de capa límite del oleaje (Wave Boundary Layer Theory o WBL por sus siglas en inglés) desarrollada por Phillips (1977), donde el esfuerzo del viento puede contar con componente viscosa, componente turbulenta y componente coherente con las olas, tal que:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_{vis}(z) + \boldsymbol{\tau}'(z) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}(z), \quad (11)$$

donde  $\boldsymbol{\tau}$  es el vector esfuerzo del viento,  $\boldsymbol{\tau}_{vis}$  es el vector esfuerzo del viento asociado a la disipación viscosa,  $\boldsymbol{\tau}'$  es el vector esfuerzo del viento asociado a la turbulencia y  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$  es el vector de esfuerzo asociado a las olas, también conocido como esfuerzo del viento coherente con las olas (siendo esta la manera en que lo nombraremos en este trabajo). Para más información sobre la WBL, se recomienda la lectura de

Hristov & Ruiz-Plancarte (2014), Buckley & Veron (2016), Wu et al. (2017) y Zou et al. (2018).

La magnitud del esfuerzo del viento total  $\tau$ , se considera constante en la vertical debido a la ley de conservación del momento, mientras que sus componentes asociadas a la viscosidad, la turbulencia y la coherente con las olas pueden cambiar en función de la altura ya que cada una de ellas tiene un mecanismo de transferencia diferente. El esfuerzo del viento asociado a la disipación viscosa es únicamente importante muy cerca de la superficie y está relacionado a gradientes de velocidad bien estructurados en una capa muy pequeña sobre la interfase océano-atmósfera. El esfuerzo del viento coherente con las olas encuentra su valor máximo cerca de la superficie y disminuye con la altura sobre la superficie del océano, está asociado a cambios de velocidad del viento en sincronía con el movimiento de la superficie del mar, se cree que tiene un comportamiento oscilatorio similar al movimiento circular de las partículas de agua generado por el oleaje, de acuerdo con la teoría lineal del oleaje de Airy-Stokes (se recomienda leer la historia de la teoría lineal del oleaje en Craik 2004, 2005). El esfuerzo del viento asociado a la turbulencia es aquel generado por remolinos que cambian su velocidad y magnitud de manera aleatoria, es decir, el esfuerzo causado por el movimiento del aire que no se rige por la ley de viscosidad de Newton y tampoco se puede asociar con el movimiento de la superficie libre.

El flujo de momento del océano a la atmósfera, observado por Grachev & Fairall (2001) durante condiciones de viento débil y en presencia de *swell*, fue advertido al analizar el esfuerzo del viento en un marco de referencia orientado con la dirección del sistema de olas más energético, a diferencia de un marco de referencia orientado a la dirección del viento, como se hace comúnmente. Ellos notaron que el esfuerzo del viento coherente con las olas puede observarse en alturas de hasta 10 m durante condiciones de viento débil y *swell* intenso. Recomiendan evitar usar la velocidad de fricción  $u_*$  para estimar el coeficiente de arrastre  $C_D$ , adimensionalizar el esfuerzo del viento o calcular la edad de las olas. Por otro lado, también recomiendan no utilizar la LDM-MOST cuando se corrige la rapidez del viento por la estabilidad atmosférica sobre el océano.

Otro enfoque para analizar la dirección del esfuerzo del viento fue propuesto por Grachev et al. (2003), donde se adopta otro marco de referencia para el análisis. En lugar de representar el esfuerzo del viento con dos vectores unitarios, uno orientado al viento y el segundo perpendicular a la dirección del viento, se utiliza un sistema con un vector unitario orientado con el viento y el otro orientado con la dirección de propagación del oleaje. Con la teoría de WBL, Grachev et al. (2003) suponen que la componente del esfuerzo del viento en la dirección del viento es la suma de la componente del esfuerzo del viento asociado a la turbulencia y la porción del esfuerzo del viento coherente con las olas asociado al oleaje que se genera localmente en la región de observación (*wind sea*); mientras que la componente del esfuerzo

del viento alineada a la dirección de propagación de *swell*, está compuesta del esfuerzo coherente con las olas asociado al *swell*. Con base en su análisis se entiende que la magnitud resultante del esfuerzo del viento total depende de la dirección de propagación del oleaje relativa a la dirección del viento. Este nuevo enfoque con el que se representa el esfuerzo del viento con dos componentes, una alineada al viento y otra alineada al *swell*, fue novedoso y ha sido utilizado en trabajos tales como: Shabani et al. (2016), Flügge et al. (2019) y Zou et al. (2019). Sin embargo, no se utilizará el método de Grachev et al. (2003) en este trabajo, ya que en condiciones cuando la dirección del oleaje relativa al viento  $\theta_p$  es igual a cero o a  $180^\circ$ , los valores de las dos componentes, la alineada con la dirección del viento y la alineada con la dirección de propagación del *swell*, serán indefinidos.

Este trabajo analiza el esfuerzo del viento y sus componentes, la asociada a la turbulencia y la coherente con las olas (no se analiza el esfuerzo del viento asociado a la disipación viscosa porque únicamente puede estimarse muy cerca de la superficie). Partiendo del trabajo realizado por Grachev & Fairall (2001), el esfuerzo del viento se representa en un marco de referencia inercial orientado con la dirección de propagación del oleaje asociado al pico de energía espectral (que por simplicidad será llamada “dirección relativa del oleaje”). Además, se estima la componente del esfuerzo del viento perpendicular a la dirección de propagación de las olas, que no se ha estudiado en trabajos anteriores. Al utilizar un marco de referencia orientado con la dirección del oleaje, se puede analizar cómo afectan las características del oleaje (como su celeridad de fase, altura significativa o dirección), en la magnitud y dirección de la componente del esfuerzo del viento en la dirección de propagación las olas; y de manera independiente, analizar la componente del esfuerzo del viento perpendicular a la dirección de propagación del oleaje. Se debe tener en cuenta que la presencia de varios sistemas de olas presentes pueden interactuar simultáneamente con la atmósfera y modificar el esfuerzo del viento; por lo que primero se aborda el análisis de eventos con un solo sistema de olas, antes de analizar eventos donde existen dos o tres sistemas de olas con energía similar (condiciones mixtas de oleaje). La finalidad de este trabajo es encontrar expresiones matemáticas que ayuden a estimar de forma más precisa el esfuerzo del viento durante eventos de viento débil a moderado en presencia de *swell*. En este análisis, no se utiliza MOST en ningún momento, únicamente se observa el esfuerzo del viento estimado de mediciones como función de otras variables que describen el estado del mar y la velocidad del viento. Las mediciones del esfuerzo del viento se realizaron en una sola altura sobre la superficie del océano, por lo que en este estudio sólo se presentan ideas preliminares de cómo cambian el esfuerzo del viento y sus componentes, la asociada a la turbulencia y la coherente con las olas, ante diferentes valores de  $z$ .

## 1.2. Pregunta de investigación

¿Cuál es el efecto del oleaje en la transferencia de momento entre el océano y la atmósfera?

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo general

Cuantificar la importancia de variables que describen el oleaje, la estabilidad atmosférica y la velocidad del viento sobre el esfuerzo del viento y obtener parametrizaciones que mejoren las estimaciones de la transferencia de momento, a partir de la teoría de la capa límite del oleaje (WBL).

### 1.3.2. Objetivos específicos

- Determinar la componente del esfuerzo del viento coherente con las olas y estudiar su relación con variables que describen el oleaje y el viento durante eventos donde la mayor parte de la energía del oleaje está asociada a un solo sistema de olas, ya sea *wind sea* o *swell*.
- Parametrizar la componente del esfuerzo del viento asociada a la turbulencia usando variables que describen el viento y la estabilidad atmosférica, durante eventos con un sistema de olas.
- Estimar el esfuerzo del viento total durante eventos con condiciones de oleaje mixtas usando las parametrizaciones obtenidas en este trabajo.

## Capítulo 2. Metodología

---

En este capítulo se explica la metodología utilizada durante este trabajo y está dividido en tres secciones. La sección 2.1 explica el marco teórico utilizado para: la estimación del esfuerzo del viento (sección 2.1.1), la determinación del estado del mar (sección 2.1.2) y el marco de referencia utilizado durante el análisis del esfuerzo del viento y sus componentes (sección 2.1.3). En la sección 2.2 se hace una descripción de cómo se obtuvieron las bases de datos utilizadas en el análisis, se describen los sitios de medición y las condiciones atmosféricas y del océano durante las campañas, así como el equipo de medición utilizado. En la sección 2.3 se explica a detalle del proceso de análisis de los datos; el control de calidad y el criterio de estacionariedad de las series de tiempo de la velocidad del viento y elevación de la superficie libre (sección 2.3.1), cálculos y criterios de control de calidad utilizados para la caracterización del estado del mar (sección 2.3.2) y finalmente el proceso detallado para la obtención del esfuerzo del viento por medio del método de covarianza de las fluctuaciones turbulentas (*eddy covariance*, en la sección 2.3.3).

### 2.1. Marco teórico para la estimación del flujo de momento entre el océano y la atmósfera y otras propiedades relacionadas

#### 2.1.1. El esfuerzo del viento y sus componentes

El vector velocidad del viento  $\mathbf{U}$  como función del tiempo  $t$  y la altura  $z$  puede descomponerse de la siguiente manera:

$$\mathbf{U}(z, t) = U_x(z, t)\hat{\mathbf{i}} + U_y(z, t)\hat{\mathbf{j}} + U_z(z, t)\hat{\mathbf{k}}, \quad (12)$$

donde  $U_x$  es la componente horizontal alineada a la dirección del viento,  $U_y$  es la componente horizontal perpendicular a la dirección del viento, y  $U_z$  es la componente vertical perpendicular a la dirección del viento. El marco de referencia inercial orientado al viento se define utilizando la regla de la mano derecha, donde  $\hat{\mathbf{i}}$  es positivo en la dirección del viento,  $\hat{\mathbf{j}}$  es positivo hacia la izquierda de la dirección del viento y  $\hat{\mathbf{k}}$  es positivo hacia arriba.

Cada una de las componentes del vector de la velocidad del viento, por ejemplo  $U_x$ , puede descomponerse en su promedio en un lapso de tiempo determinado  $\overline{U}_x$  y la fluctuación instantánea de esa componente de velocidad  $u$ . A su vez  $u$  se puede descomponer en su componente asociada a la

turbulencia  $u'$  y su componente coherente con las olas  $\tilde{u}$ :

$$\begin{aligned} U_x(z, t) &= \overline{U}_x(z) + u(z, t) \\ &= \overline{U}_x(z) + u'(z, t) + \tilde{u}(z, t) , \end{aligned} \quad (13a)$$

y de forma análoga para  $U_y$  y  $U_z$ , se define que,

$$\begin{aligned} U_y(z, t) &= \overline{U}_y(z) + v(z, t) \\ &= \overline{U}_y(z) + v'(z, t) + \tilde{v}(z, t) , \end{aligned} \quad (13b)$$

y

$$\begin{aligned} U_z(z, t) &= \overline{U}_z(z) + w(z, t) \\ &= \overline{U}_z(z) + w'(z, t) + \tilde{w}(z, t) . \end{aligned} \quad (13c)$$

Se considera que  $\overline{U}_y \approx 0$  debido a que se utiliza un marco de referencia orientado a la dirección del viento y  $\overline{U}_z \approx 0$  ya que  $\overline{U}_z \ll \overline{U}_x$ . Ahora, con base en la descomposición representada con la ecuación 13, despreciando el esfuerzo viscoso del viento y las interacciones no lineales entre las fluctuaciones de velocidad asociadas a la turbulencia ( $u'$ ,  $v'$  y  $w'$ ) y aquellas coherentes con las olas ( $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  y  $\tilde{w}$ ), se puede descomponer el vector esfuerzo del viento  $\boldsymbol{\tau}$  en su componente asociada a la turbulencia  $\boldsymbol{\tau}'$  y su componente coherente con las olas  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$ , tal que:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}'(z) + \tilde{\boldsymbol{\tau}}(z) . \quad (14)$$

Las ecuaciones 13a, 13b, 13c y 14 se derivan utilizando la WBT de Phillips (1977).

El esfuerzo del viento y sus componentes se pueden estimar calculando los llamados esfuerzos de Reynolds, que se obtienen al promediar el producto de cada una de las fluctuaciones de velocidad horizontales por la fluctuación de la velocidad vertical, de forma que:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_x \hat{\mathbf{i}} + \tau_y \hat{\mathbf{j}} = -\rho_a [\langle uw \rangle \hat{\mathbf{i}} + \langle vw \rangle \hat{\mathbf{j}}] , \quad (15a)$$

$$\boldsymbol{\tau}' = \tau'_x \hat{\mathbf{i}} + \tau'_y \hat{\mathbf{j}} = -\rho_a [\langle u'w' \rangle \hat{\mathbf{i}} + \langle v'w' \rangle \hat{\mathbf{j}}] , \quad (15b)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\tau}_x \hat{\mathbf{i}} + \tilde{\tau}_y \hat{\mathbf{j}} = -\rho_a [\langle \tilde{u}\tilde{w} \rangle \hat{\mathbf{i}} + \langle \tilde{v}\tilde{w} \rangle \hat{\mathbf{j}}] , \quad (15c)$$

donde el operador  $\langle \rangle$  representa el promedio del producto o covarianza ( $Co$ ) de dos componentes de las fluctuaciones de velocidad en un lapso de tiempo determinado. Ya que se han despreciado las interacciones no lineales entre las fluctuaciones de velocidad asociadas a la turbulencia y las coherentes con las olas,

las covarianzas  $\langle u'\tilde{w}\rangle$ ,  $\langle \tilde{u}w'\rangle$ ,  $\langle v'\tilde{w}\rangle$  y  $\langle \tilde{v}w'\rangle$  se consideran iguales a cero en las ecuaciones 15b y 15c. Las covarianzas de las fluctuaciones de velocidad se pueden estimar al integrar el coespectro de cada una de las componentes horizontales de las fluctuaciones de velocidad con la componente vertical:

$$\langle uw\rangle = \int_{\Delta f}^{f_N} Co_{uw} df, \quad (16a)$$

$$\langle vw\rangle = \int_{\Delta f}^{f_N} Co_{vw} df, \quad (16b)$$

donde  $df$  es el diferencial de frecuencia;  $f_N$  es la frecuencia de Nyquist (definida como un medio de la frecuencia de muestreo  $f_s$ ) y  $\Delta f$  es el tamaño del paso entre bandas de frecuencias, que depende de la duración de la serie de tiempo y del número de bandas de frecuencias promediadas durante el análisis de Fourier. Más información sobre el método de covarianza de las fluctuaciones de velocidad se puede obtener en Aubinet et al. (2012) y en Foken (2017). La dirección relativa del esfuerzo del viento respecto a la dirección del viento  $\alpha$ , que puede estimarse trigonométricamente por medio de las componentes del esfuerzo del viento:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\tau_y}{\tau_x}\right), \quad (17)$$

del mismo modo se puede estimar  $\alpha'$  y  $\tilde{\alpha}$ , que son la dirección relativa del esfuerzo del viento turbulento  $\tau'$  y la dirección relativa del esfuerzo coherente con las olas  $\tilde{\tau}$ , respectivamente.

El esfuerzo de Reynolds coherente con las olas puede estimarse por medio de la ecuación propuesta por Veron et al. (2008), la cual se explica con más detalle en Grare et al. (2013):

$$\langle \tilde{u}\tilde{w}\rangle = \int_{\Delta f}^{f_N} \sqrt{S_{\tilde{u}\tilde{u}}S_{\tilde{w}\tilde{w}}} \cos(\phi_{\eta u} - \phi_{\eta w}) df, \quad (18a)$$

donde  $S_{\tilde{u}\tilde{u}}$  y  $S_{\tilde{w}\tilde{w}}$  son los espectros de potencia de las componentes de la fluctuación de velocidad del viento coherente con las olas,  $\tilde{u}$  y  $\tilde{w}$ ; mientras que  $\phi_{\eta u}$  y  $\phi_{\eta w}$  son las diferencias de fase espectral entre las señales de la fluctuación de velocidad ( $u$  o  $w$  respectivamente) y la elevación de la superficie libre  $\eta$ . Estos espectros se estiman al multiplicar el correspondiente espectro de potencia de la fluctuación de velocidad  $S_{uu}$  o  $S_{ww}$  con la coherencia espectral entre la componente de la fluctuación de velocidad y la elevación de la superficie libre,  $\gamma_{\eta u}^2$  y  $\gamma_{\eta w}^2$ , respectivamente, con lo que se obtiene

$$S_{\tilde{u}\tilde{u}} = S_{uu}\gamma_{\eta u}^2, \quad (18b)$$

o para  $S_{\tilde{w}\tilde{w}}$  por medio de  $S_{ww}$  y  $\gamma_{\eta w}^2$ ,

$$S_{\tilde{w}\tilde{w}} = S_{ww}\gamma_{\eta w}^2, \quad (18c)$$

la coherencia espectral  $\gamma_{\eta u}^2$  se define de la siguiente manera:

$$\gamma_{\eta u}^2 = \frac{|S_{\eta u}|^2}{S_{\eta\eta}S_{uu}}, \quad (18d)$$

y la coherencia espectral  $\gamma_{\eta w}^2$  como,

$$\gamma_{\eta w}^2 = \frac{|S_{\eta w}|^2}{S_{\eta\eta}S_{ww}}, \quad (18e)$$

en donde  $S_{\eta u}$  y  $S_{\eta w}$  son los espectros cruzados entre la fluctuación de la componente de viento correspondiente y la señal de la superficie libre; y  $S_{\eta\eta}$  es el espectro de potencia del nivel de la superficie libre.

La diferencia de fase espectral  $\phi_{\eta u}$  es,

$$\phi_{\eta u} = \arctan\left(\frac{Q_{\eta u}}{Co_{\eta u}}\right), \quad (18f)$$

donde  $Co_{\eta u}$  y  $Q_{\eta u}$  son el coespectro cruzado  $Co_{\eta u} = \Re\{S_{\eta u}\}$  y la cuadratura espectral  $Q_{\eta u} = \Im\{S_{\eta u}\}$  de las señales de la fluctuación de la componente de velocidad y la elevación de la superficie libre, y de forma análoga,

$$\phi_{\eta w} = \arctan\left(\frac{Q_{\eta w}}{Co_{\eta w}}\right). \quad (18g)$$

De igual manera se estima  $\langle\tilde{v}\tilde{w}\rangle$  al sustituir  $S_{uu}$ ,  $S_{\eta u}$  y  $\phi_{\eta u}$  por  $S_{vv}$ ,  $S_{\eta v}$  y  $\phi_{\eta v}$  en las ecuaciones 18a, 18b, 18d y 18f.

El esfuerzo de Reynolds asociado a la turbulencia  $\langle u'w'\rangle$  se obtiene al calcular la diferencia entre el esfuerzo de Reynolds total  $\langle uw\rangle$ , calculado con la ecuación 16a, y el esfuerzo de Reynolds coherente con las olas  $\langle\tilde{u}\tilde{w}\rangle$ , calculado con la ecuación 18a, en tal forma que

$$\langle u'w'\rangle = \langle uw\rangle - \langle\tilde{u}\tilde{w}\rangle, \quad (19a)$$

y en el caso de  $\langle v'w'\rangle$ , tenemos que

$$\langle v'w'\rangle = \langle vw\rangle - \langle\tilde{v}\tilde{w}\rangle. \quad (19b)$$



### 2.1.2. El estado del mar

La altura significativa de las olas  $H_s$  es una característica representativa del estado de la superficie libre del mar y se puede estimar de la siguiente manera:

$$H_s = 4\sqrt{\sigma_\eta^2}, \quad (20)$$

donde  $\sigma_\eta^2$  es la varianza de la elevación de la superficie libre  $\eta$ . La frecuencia asociada al pico del espectro  $f_p$  y la dirección de propagación de las olas asociadas al pico del espectro  $\theta_p$ , se obtienen al identificar el máximo de energía del espectro direccional del oleaje en términos de la frecuencia  $S_{\eta\eta}(f, \theta)$ , definido en un marco de referencia inercial donde  $\theta = 0$  indica la dirección del viento. La celeridad de fase asociada al pico del espectro se estima como:

$$c_p = \frac{2\pi f_p}{k_p}. \quad (21)$$

donde  $k_p$  es el número de onda asociado al pico del espectro, y se obtiene de la relación de dispersión de acuerdo a la teoría lineal del oleaje:

$$(2\pi f_p)^2 = gk_p \tanh(k_p D), \quad (22)$$

donde  $D$  es la profundidad. La varianza de la elevación de la superficie libre se puede estimar por medio del espectro omnidireccional del oleaje en términos de la frecuencia  $S_{\eta\eta}(f)$ , tal que

$$\sigma_\eta^2 = \int S_{\eta\eta}(f) df. \quad (23)$$

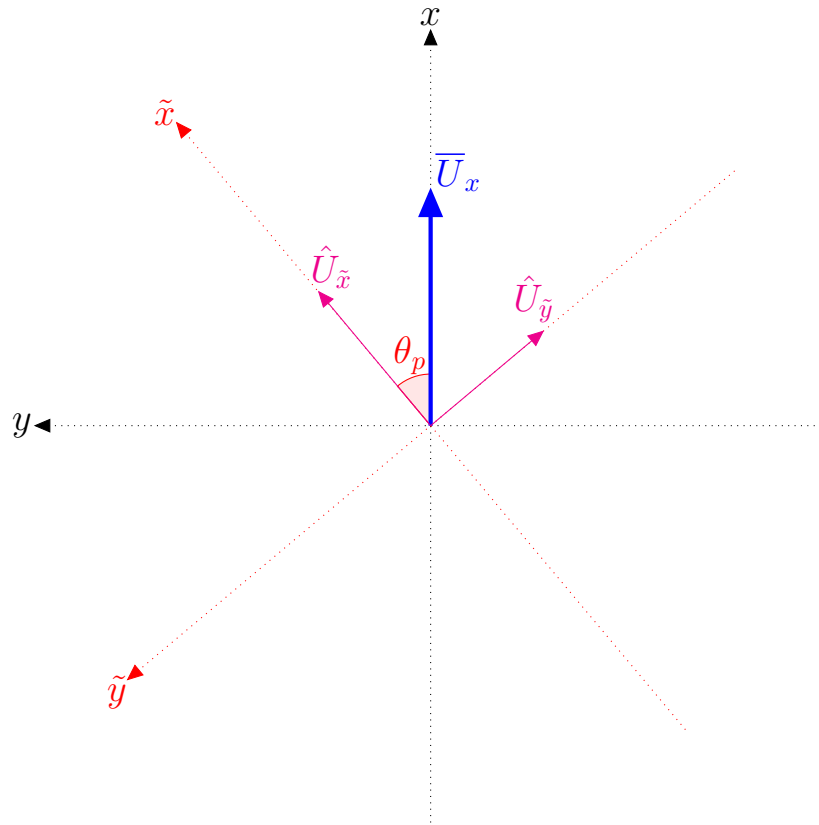
De contar con el espectro direccional del oleaje, ya sea en términos de la frecuencia  $S_{\eta\eta}(f, \theta)$  o en términos del número de onda  $K_{\eta\eta}(k, \theta)$ , el espectro omnidireccional se puede calcular fácilmente de la siguiente manera:

$$S_{\eta\eta}(f) = \int S_{\eta\eta}(f, \theta) d\theta, \quad (24)$$

o bien

$$S_{\eta\eta}(f) = \int K_{\eta\eta}(k, \theta) \frac{df}{dk} d\theta, \quad (25)$$

donde  $df/dk$  es el Jacobiano de transformación que relaciona las funciones  $S_{\eta\eta}$  y  $K_{\eta\eta}$  y se obtiene al



**Figura 1.** Velocidad del viento normalizada en un marco de referencia inercial orientado al viento (ejes en color negro), usado comúnmente en el análisis del esfuerzo del viento. Su eje  $x$  es la dirección del viento y  $y$  es la dirección perpendicular al viento. Al rotar los ejes  $x - y$  por medio de  $\theta_p$  se obtiene un marco de referencia orientado a la dirección del pico de energía del oleaje (ejes en color rojo) donde  $\tilde{x}$  es la dirección de propagación del oleaje y  $\tilde{y}$  es la dirección perpendicular a la propagación del oleaje.

derivar la relación de dispersión (ecuación 22, se recomienda revisar Young & Babanin, 2009):

$$\frac{df}{dk} = \frac{g}{8\pi^2 f} [\tanh(kD) + kD \operatorname{sech}^2(kD)] . \quad (26)$$

Los espectros direccionales  $S_{\eta\eta}$  y  $K_{\eta\eta}$  se estiman por medio del *wavelet directional method* (WDM) propuesto por Donelan et al. (1996), que se describe en la sección 2.3 y con mayor detalle en el Anexo B. Es importante mencionar que en este trabajo se adopta la definición planteada por Holthuijsen (2007) para representar el espectro direccional del oleaje, algo diferente al espectro direccional  $S_{\eta\eta}^*(f, \theta)$  propuesto por Phillips (1977). Esta definición del espectro direccional está planteada de modo que se cumple que  $\sigma_\eta^2 = \int \int S_{\eta\eta}^*(f, \theta) f \, d\theta df$ . Se menciona este detalle para evitar confusiones al comparar la metodología de cálculo de los espectros direccionales planteada en los trabajos de Donelan et al. (1996; 2015), en los que se obtiene  $S_{\eta\eta}^*(f, \theta)$ .

### 2.1.3. Velocidad del viento y esfuerzo del viento en un marco de referencia orientado con la dirección de propagación del oleaje

Para analizar el efecto del viento y el oleaje en el esfuerzo del viento y sus componentes, en este trabajo se utiliza la siguiente magnitud adimensional (Grachev & Fairall, 2001):

$$\hat{U}_{\bar{x}} = \frac{\bar{U}_x \cos(\theta_p)}{c_p}, \quad (27)$$

que es llamada por diferentes autores como el inverso de la edad de la ola. Sin embargo, se puede explicar como la componente de la velocidad del viento promedio en la dirección de propagación del oleaje normalizada con la celeridad de fase (que por simplicidad llamaremos “componente de la velocidad del viento normalizada en la dirección de propagación del oleaje”), como se ilustra en la Figura 1. Cuando el *wind sea* se encuentra saturado, la celeridad de fase es del mismo orden de magnitud que la rapidez del viento; si la celeridad de fase excede la componente de la velocidad del viento en la dirección de propagación del oleaje se considera que el oleaje no fue generado por el viento local y se clasifica como *swell*. Con base a este razonamiento, Hanson & Phillips (2001) consideran que durante condiciones de *wind sea* se cumple con la siguiente relación:

$$c_p \leq 1.4 \bar{U}_x \cos(\theta_p). \quad (28)$$

Así, la componente de la velocidad del viento normalizada en la dirección de propagación del oleaje tiene las siguientes características: en presencia de *wind sea*  $\hat{U}_{\bar{x}} \geq 0.7$ , mientras que cuando el *swell* es dominante y se propaga en la dirección del viento se tiene que  $0 < \hat{U}_{\bar{x}} < 0.7$ ; y en casos con *swell* dominante que se propaga en dirección opuesta al viento tenemos que  $-0.7 < \hat{U}_{\bar{x}} < 0$ . Cuando  $\hat{U}_{\bar{x}} \leq -0.7$ , se tienen condiciones de *wind sea* recientemente establecidas con *swell* remanente, como se trata un caso particular de condiciones mixtas, no se analizarán en este trabajo casos que cumplan con esta condición.

Este trabajo también analiza la componente de la velocidad del viento promedio normalizada en la dirección perpendicular a la dirección de propagación del oleaje (normalizada con la celeridad de fase, que por simplicidad llamaremos “componente de la velocidad del viento normalizada perpendicular a la dirección de propagación del oleaje”), que se define de la siguiente manera:

$$\hat{U}_{\bar{y}} = \frac{-\bar{U}_x \sin(\theta_p)}{c_p}, \quad (29)$$

de modo que si  $|\hat{U}_{\tilde{y}}| > |\hat{U}_{\tilde{x}}|$  y  $|\hat{U}_{\tilde{x}}| < 0.7$  tendremos condiciones de *swell* con viento cruzado, si  $\hat{U}_{\tilde{y}}$  es positivo el viento será a la izquierda de la propagación del oleaje. Recapitulando, las condiciones del mar de acuerdo con valores de  $\hat{U}_{\tilde{x}}$  y  $\hat{U}_{\tilde{y}}$ , corresponden a:

$$\hat{U}_{\tilde{x}} \geq 0.7 \quad \text{Wind Sea ,} \quad (30a)$$

$$0 < \hat{U}_{\tilde{x}} < 0.7 \quad \text{Swell con viento codireccional ,} \quad (30b)$$

$$-0.7 < \hat{U}_{\tilde{x}} < 0 \quad \text{Swell con viento contradireccional ,} \quad (30c)$$

$$|\hat{U}_{\tilde{y}}| > |\hat{U}_{\tilde{x}}| \text{ y } |\hat{U}_{\tilde{x}}| < 0.7 \quad \text{Swell con viento cruzado .} \quad (30d)$$

Los subíndices utilizados en la notación indican el marco de referencia. Los subíndices sin una tilde indican que el marco de referencia está orientado con la dirección del viento: el subíndice  $x$  indica la componente en la dirección del viento (alineada al viento), mientras que el subíndice  $y$  indica una dirección perpendicular a la dirección del viento. Una tilde sobre el subíndice indica que el marco de referencia utilizado está orientado con la dirección de propagación de las olas;  $\tilde{x}$  corresponde con la componente en la dirección de propagación de las olas, mientras que  $\tilde{y}$  representa la componente en la dirección perpendicular a la dirección de propagación de las olas.

El esfuerzo del viento y sus componentes turbulenta y coherente con las olas se pueden expresar por medio de vectores unitarios, uno en la dirección de propagación de las olas  $\tilde{\mathbf{i}}$  y otro perpendicular a la dirección de propagación de las olas  $\tilde{\mathbf{j}}$ , por medio de:

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{i}} + \tau_{\tilde{y}} \tilde{\mathbf{j}} , \quad (31a)$$

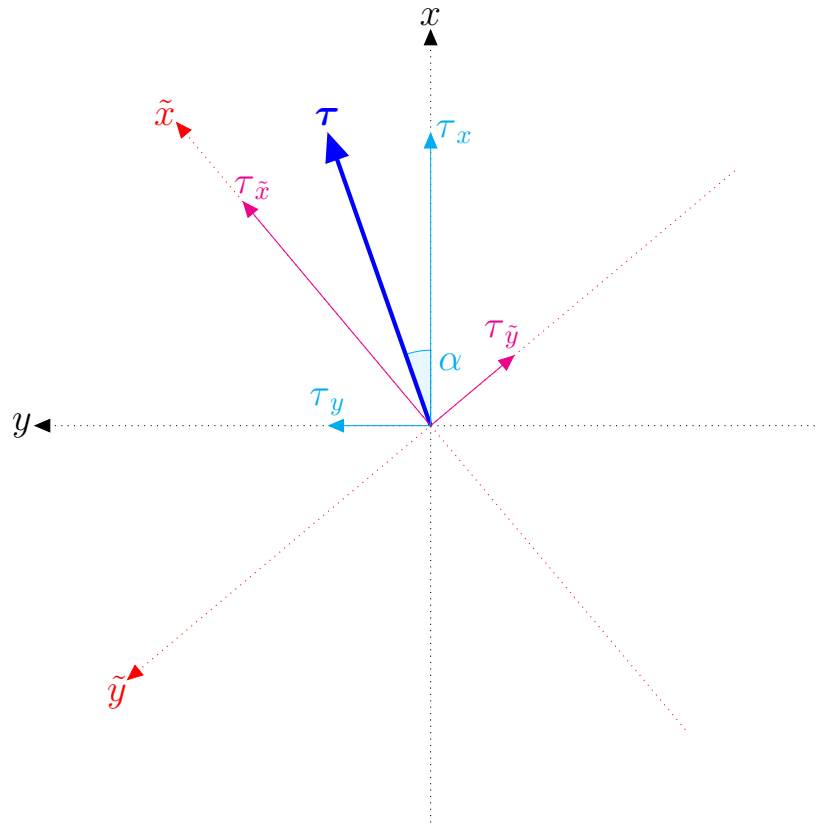
donde,

$$\tau_{\tilde{x}} = \tau_x \cos(\theta_p) + \tau_y \sin(\theta_p) , \quad (31b)$$

$$\tau_{\tilde{y}} = -\tau_x \sin(\theta_p) + \tau_y \cos(\theta_p) . \quad (31c)$$

De la misma forma se pueden descomponer  $\boldsymbol{\tau}' = \tau'_{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{i}} + \tau'_{\tilde{y}} \tilde{\mathbf{j}}$  y  $\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \tilde{\tau}_{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{i}} + \tilde{\tau}_{\tilde{y}} \tilde{\mathbf{j}}$ , como se muestra en la Figura 2. El esfuerzo del viento y sus componentes se pueden reexpresar en un marco de referencia orientado al viento, partiendo de las componentes en un marco de referencia orientado a las olas por medio de las siguientes ecuaciones:

$$\tau_x = \tau_{\tilde{x}} \cos(-\theta_p) + \tau_{\tilde{y}} \sin(-\theta_p) , \quad (32a)$$



**Figura 2.** El vector esfuerzo del viento puede expresarse en un marco de referencia orientado al viento, como se hace tradicionalmente (ejes en color negro). O como se propone en este trabajo, en un marco de referencia orientado al oleaje (ejes en color rojo).

$$\tau_y = -\tau_{\tilde{x}} \sin(-\theta_p) + \tau_{\tilde{y}} \cos(-\theta_p) . \quad (32b)$$

Por último, se pueden expresar las componentes  $\hat{U}_{\tilde{x}}$  y  $\hat{U}_{\tilde{y}}$  como un vector de la siguiente manera:

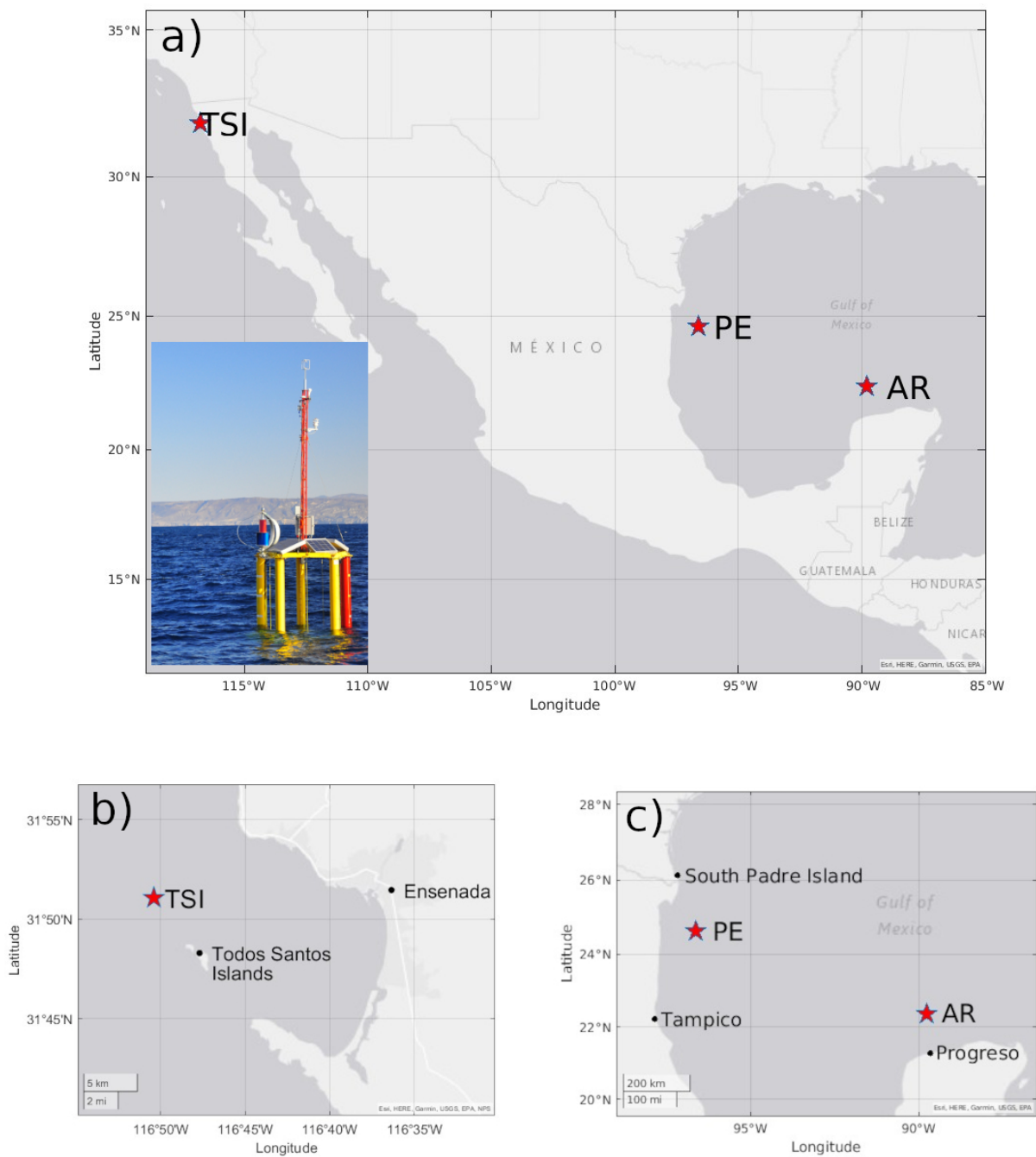
$$\hat{\mathbf{U}} = \hat{U}_{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{i}} + \hat{U}_{\tilde{y}} \tilde{\mathbf{j}} = \left[ \frac{\bar{U}_x \cos(\theta_p)}{c_p} \right] \tilde{\mathbf{i}} + \left[ \frac{-\bar{U}_x \sin(\theta_p)}{c_p} \right] \tilde{\mathbf{j}} , \quad (33)$$

en donde  $\hat{\mathbf{U}}$  es la velocidad del viento normalizada en un marco de referencia orientado a la dirección de propagación del oleaje. Es importante considerar que la dirección relativa del viento normalizado respecto al oleaje es igual a  $-\theta_p$ , ya que la dirección de  $\hat{\mathbf{U}}$  es igual a  $\arctan(\hat{U}_{\tilde{y}}/\hat{U}_{\tilde{x}})$  y al sustituir las ecuaciones 27 y 29 obtenemos,  $\arctan(-\sin(\theta_p)/\cos(\theta_p)) = -\theta_p$ .

## 2.2. Sitios y equipo de medición

Las bases de datos analizadas en este trabajo se obtuvieron como parte de las actividades de la Línea de Acción 1: Plataformas de Observación Oceanográfica del Proyecto 201441 del Fondo de Hidrocarburos de CONACYT/SENER (Herguera et al., 2023a; 2023b), administrado por el Consorcio de Investigación del golfo de México (CIGOM). Los tres sitios donde se realizaron mediciones se muestran en la Figura 3: uno en el norte del Pacífico mexicano y dos en el golfo de México. En el Pacífico, el sitio elegido se encuentra a 3 km al noroeste de las islas de Todos Santos (TSI), aproximadamente 21 km al oeste de la ciudad de Ensenada, Baja California, México (N 31° 49' 19.92"; W 116° 50' 10.68"); la profundidad del sitio es de 100 m; la campaña que se reporta se realizó del 3 de marzo al 19 de junio de 2018. Este sitio se caracteriza por la presencia constante de *swell* de periodo largo y *wind sea* poco desarrollado debido a la configuración de la costa, que tiene un *fetch* de corto. En el golfo de México, el primer sitio elegido se encuentra en la región del Escarpe de Perdido (PE), se localiza hacia el nor-noroeste, a 289 km del puerto de Tampico, Tamaulipas, México (N 24° 35' 55.1"; W 96° 37' 28.7"), donde la profundidad es de 824 m; la campaña se realizó desde el 11 de julio hasta el 31 de diciembre de 2018. Como segundo sitio de medición en el golfo de México, se eligió un sitio cerca del arrecife los Alacranes (AR), localizado a 120 km al norte de Progreso, Yucatán, México (N 22° 21' 32.70"; W 89° 37' 58.68"); la profundidad es de 53 m y la campaña se realizó desde el 24 de marzo de 2019 hasta el 31 de agosto de 2019. En los sitios en el golfo de México, PE y AR, se caracterizan por tener condiciones de *wind sea* con *swell* de periodo relativamente corto debido a que se trata de una cuenca semicerrada.

Las mediciones se realizaron utilizando tres Boyas Oceanográficas y de Meteorología Marina (BOMM), que se muestra en el recuadro de la Figura 3a; fueron construidas en el CICESE con inspiración en las boyas ASIS (Air Sea Interaction Spar, Graber et al., 2000). Este tipo de boyas ha sido utilizado con éxito en diversos experimentos (Ocampo-Torres et al., 2011). Cada boya está construida alrededor de una estructura de prisma pentagonal (llamada jaula) a la que se une un mástil (o torre de instrumentación atmosférica) y el pie (donde se instalan las baterías, el cilindro de electrónica y otros sensores). En el centro de la jaula y en cada una de sus caras se colocan en total seis alambres de capacitancia (Ocean Sensor Systems), que miden la elevación de la superficie libre con una tasa de muestreo de 20 Hz en la campaña PE y 10 Hz en TSI y AR. En lo alto del mástil de la boya, a 7 m de altura de la línea de flotación, se instaló un anemómetro sónico (Gill R3-100), que mide las tres componentes de la velocidad del viento con una tasa de muestreo de 100 Hz. Con una unidad de medición de movimiento inercial (IMU, por sus siglas en inglés, Subsea modelo Ekinox2-M), instalada en el cilindro de electrónica colocado en el pie de



**Figura 3.** Ubicación geográfica de los sitios de medición (a). En (b) se muestra el sitio de medición próximo a la Isla de Todos Santos (TSI). En (c) se muestran los sitios de medición dentro del golfo de México: el cercano al escape de Perdido (PE) y el próximo al arrecife Alacranes (AR). En el detalle en (a) se muestra la BOMM instalada en el sitio TSI.

la BOMM, se registraron las aceleraciones lineales y angulares para detectar los seis grados de libertad del movimiento de la estructura de la boya (Collins et al., 2014; Drennan et al., 2014), con una tasa de muestreo de 100 Hz; mientras que con un magnetómetro electrónico (Honeywell Magnetometer) se registró la orientación de la boya respecto al Norte con una tasa de muestreo de 5 Hz. En la BOMM se instalaron también sensores complementarios; una estación meteorológica (Gill Maximet GMX-600) en el mástil a 6 m de altura de la línea de flotación, y en el pie de la BOMM, a 7 m bajo la línea de flotación, un CTD (RBR Concerto) y un velocímetro sónico Doppler (Nortek Vector ADV). Más información sobre las BOMM se puede obtener en las fichas técnicas de cada campaña de medición (Grupo de Oleaje, 2019a,b,c).

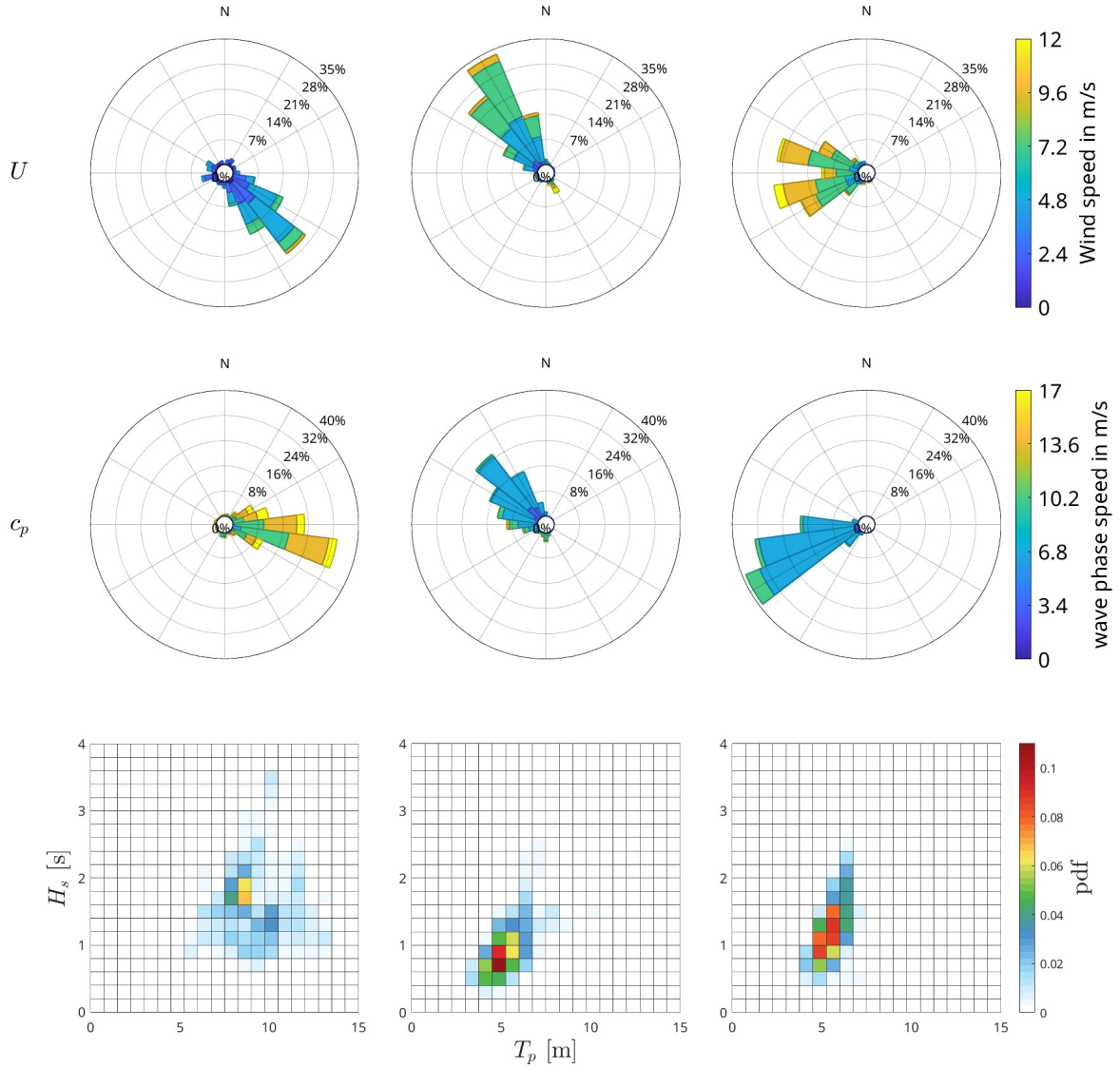
En la Figura 4 se muestran los histogramas de la frecuencia de ocurrencia de dirección e intensidad del viento en la primera fila desde arriba, en la segunda fila se muestra el histograma de frecuencia de la dirección de propagación de las olas y la celeridad de fase. En la tercera fila se muestra la función de densidad de probabilidad (PDF por sus siglas en inglés) conjunta del periodo asociado al pico espectral  $T_p$  con la altura significativa de las olas  $H_s$ . Cada columna en la Figura 4 corresponde a un sitio de medición con BOMM, donde la columna izquierda corresponden a las mediciones en ITS, la central a PE y la derecha a AR. Las condiciones de estabilidad atmosférica en los tres sitios fueron predominantemente inestables. El parámetro de estabilidad de Obukhov  $\zeta$  se mantuvo en el rango  $-1 < \zeta < 0$  en al menos el 90 % de los eventos en las tres campañas de medición, donde  $\zeta = z/L_{MOST}$ , siendo  $L_{MOST}$  la longitud de Obukhov (ver ecuación 40 en la sección 2.3.3).

## 2.3. Procesamiento de datos y control de calidad

### 2.3.1. Control de calidad de rutina y criterio de estacionariedad

Los datos fueron analizados usando intervalos de 30 minutos (ventanas) para estimar la velocidad promedio del viento, el esfuerzo del viento, la estabilidad atmosférica y el estado del mar. Al registro de cada variable medida por los distintos sensores se les aplicó un proceso de control de calidad de rutina (CCR). El intervalo de tiempo (ventana) se mueve a lo largo de la serie de tiempo en pasos de 2.5 minutos en los casos de las campañas PE y ALC y de un minuto en los de la campaña TSI, y se realizan los cálculos que se describen en esta sección, siempre y cuando los registros en cada ventana cumplan con los criterios del control de calidad. El paso de tiempo del desplazamiento de la ventana en la campaña





**Figura 4.** Características de las condiciones de viento y oleaje en los sitios TSI (columna izquierda), PE (columna central) y AR (columna derecha) durante eventos con un sistema dominante de oleaje. En la primera fila se muestra el histograma de frecuencia de la velocidad del viento  $U$ ; en la segunda fila se muestra el histograma de frecuencia de la celeridad de fase asociada al pico del espectro  $c_p$ , en la tercera fila se muestra la función de densidad de probabilidad (PDF) conjunta del periodo asociado al pico del espectro  $T_p$  y la altura significativa de las olas  $H_s$ . Las direcciones se muestran en la convención oceanográfica, es decir, dirección hacia donde sopla el viento o se propaga el oleaje.

TSI se seleccionó menor, esto para compensar la alta tasa de rechazo de ventanas en esa estación debido a la presencia de corrientes, que provocan movimientos repentinos y cambios en la orientación de la boya. En la sección 2.3.2 se explica por qué la orientación debe mantenerse constante y se describe el criterio de rechazo. Los valores anómalos (*outliers*) en las series de tiempo fueron eliminados, se identifica un *outlier* cuando la diferencia con la media móvil calculada con 25 mediciones consecutivas excede tres desviaciones estándar. Cuando ocurren menos que cinco mediciones consecutivas sin realizarse se estiman los valores faltantes por medio de una interpolación lineal y se rechazan las ventanas cuyas series de tiempo tienen huecos mayores a 5 mediciones. Se analizó el sesgo (*skewness*) y la curtosis de las series de tiempo, sus rangos deben estar entre [-1,1] y [3,5] respectivamente, de acuerdo a las recomendaciones hechas por Vickers & Mahrt (1997) para detectar posibles errores de medición o de escritura de los datos que puedan ocasionar errores en los métodos de *eddy covariance* o WDM. Además, si las series de tiempo aún presentan huecos (sin datos) o sus valores de sesgo y curtosis están fuera de rango, el conjunto de datos que corresponde a esa ventana en particular se eliminan.

Debido al movimiento de la boya, las mediciones de la elevación de la superficie libre, la velocidad del viento y la velocidad de las corrientes subsuperficiales se corrigen usando la metodología propuesta por Drennan et al. (1994) y Anctil et al. (1994), considerando los ángulos de Euler medidos por medio del IMU-Ekinox, que se explica a detalle en el anexo A. Las mediciones después de la corrección por el movimiento se expresan en un marco de referencia geográfico Este-Norte-Arriba (East-North-Up o ENU). Por ejemplo, la velocidad del viento se expresa como  $\mathbf{U} = U_E + U_N + U_U$ , donde  $U_E$  es la componente zonal,  $U_N$  es la componente meridional y  $U_U$  es la componente normal al elipsoide terrestre (positiva hacia arriba). Además del CCR descrito anteriormente, se eliminan los conjuntos de datos con condiciones anormales de velocidad del viento; cuando la velocidad vertical promedio  $\bar{U}_U > 5$  m/s o cuando la rapidez promedio del viento a 7 m de altura  $U_7 > 35$  m/s, donde,

$$U_7 = \sqrt{\bar{U}_E^2 + \bar{U}_N^2}, \quad (34)$$

siendo  $\bar{U}_E$  y  $\bar{U}_N$  las componentes zonal y meridional del promedio de la velocidad del viento. Como el método de covarianza de las fluctuaciones turbulentas (*eddy covariance*) requiere que las condiciones del viento sean estacionarias, se realiza la prueba de Vickers & Mahrt (1997):

$$RN_{U_E} = \frac{\delta U_E}{\bar{U}_E}, \quad (35a)$$

$$RN_{U_N} = \frac{\delta U_N}{\bar{U}_N}, \quad (35b)$$

$$RN_{U_U} = \frac{\delta U_U}{\bar{U}_U}, \quad (35c)$$

$$RN_{U_\tau} = \sqrt{\frac{(\delta U_E^2 + \delta U_N^2)}{\bar{U}_E^2 + \bar{U}_N^2}}, \quad (35d)$$

donde  $\delta U_E$ ,  $\delta U_N$  y  $\delta U_U$  representan el cambio en cada componente de velocidad durante cada ventana; se obtiene al multiplicar la aceleración media de cada componente de velocidad (estimada por regresión lineal) multiplicada por el tiempo de duración de la ventana. Los parámetros  $RN_E$ ,  $RN_N$  y  $RN_U$  son los cambios porcentuales en cada una de las componentes de velocidad del viento durante la ventana y  $RN_{U_\tau}$  es el cambio porcentual de la rapidez del viento la ventana. Las condiciones del viento se consideran no estacionarias si alguna de las componentes del cambio porcentual de la velocidad del viento:  $RN_{U_E}$ ,  $RN_{U_N}$  o  $RN_{U_\tau}$ , es mayor que 0.5 o cuando  $RN_{U_U}$  es mayor que 0.3, por lo que se rechaza el conjunto de datos que corresponde a la ventana.

### 2.3.2. Estimación del estado del mar

El método para la caracterización del estado del mar se describe a continuación. A partir del registro de la señal de cada alambre de capacitancia se obtiene el espectro de frecuencias omnidireccional (ecuación 23). Después de realizar la corrección por el movimiento (ver anexo A) y el CCR, se determina la frecuencia asociada al pico del espectro  $f_p$  y se estima la altura significativa de las olas  $H_s$  (ecuación 20). Como parte del control de calidad de los espectros de la señal de cada alambre de capacitancia se estima la pendiente de la caída espectral  $m$  en el rango de frecuencia  $4f_p \geq f \geq 1$  Hz, realizando el siguiente ajuste por medio de un análisis de regresión de potencias,  $S_{\eta\eta}(f) = e^b(2\pi f/f_p)^m$ , linealizando se obtiene:

$$\ln(S_{\eta\eta}(f)) = m \ln\left(\frac{2\pi f}{f_p}\right) + b. \quad (36)$$

Se considera que la señal de un alambre no satisface el control de calidad si el valor de la pendiente espectral  $m$  no se encuentra en el rango  $-5.5 < m < -2.8$  (esta suposición se hace después del análisis de Hwang (2020) de la región de caída espectral) o bien si la energía espectral máxima del alambre es 10% mayor o menor que la mediana estadística de energía espectral máxima obtenida de los seis alambres de capacitancia.

El espectro direccional del oleaje en cada ventana se estima utilizando el método direccional *Wavelet* (WDM por sus siglas en inglés) desarrollado por Donelan et al. (1996), que se explica a detalle en el anexo

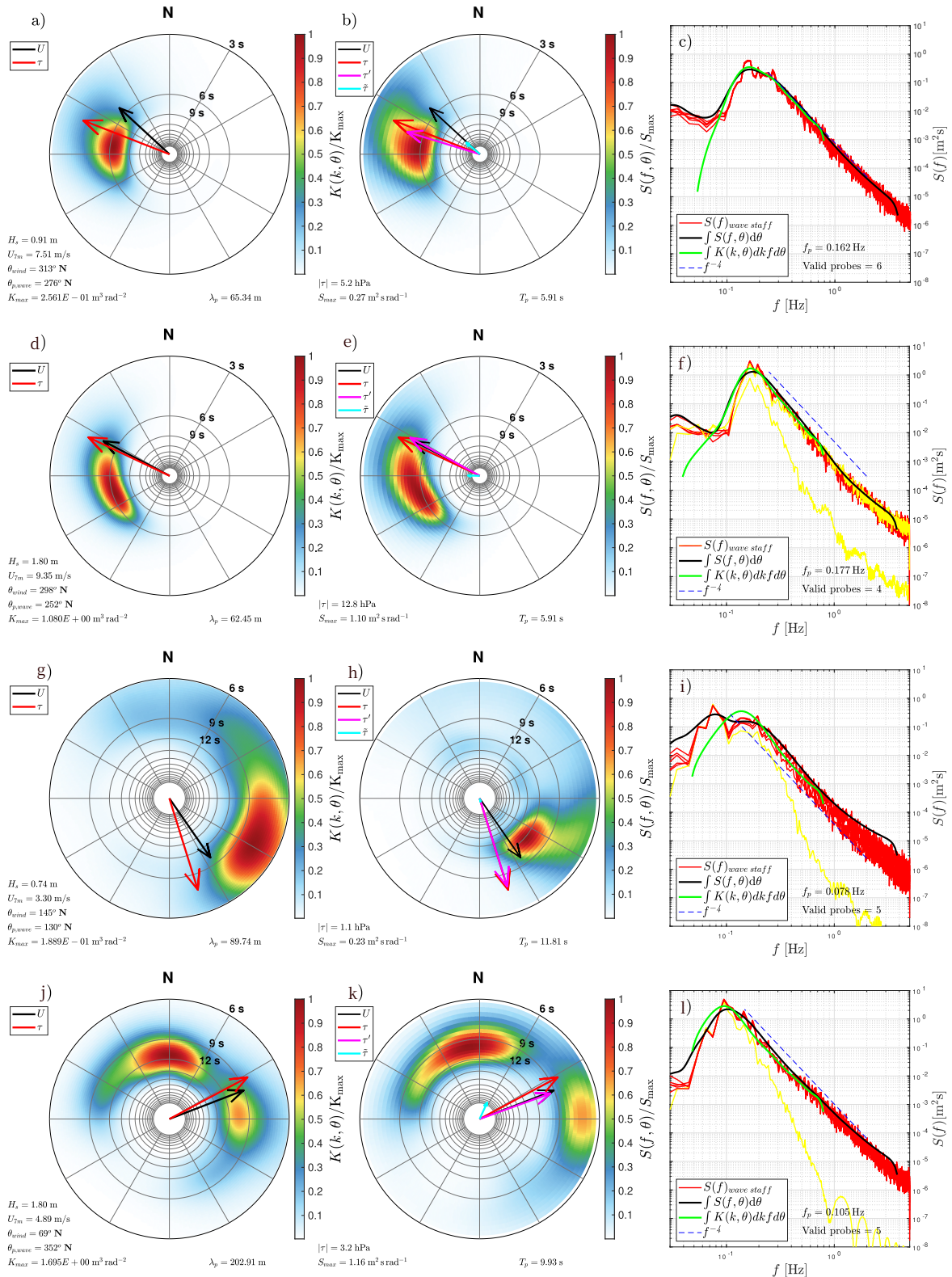
B. En la Figura 5 se muestran ejemplos de espectros direccionales del oleaje, en términos del número de onda  $K(k, \theta)$  (columna izquierda) y en términos de la frecuencia  $S(f, \theta)$  (columna central), así como espectros omnidireccionales (columna derecha) obtenidos directamente de la señal de cada uno de los alambres de capacitancia (líneas rojas y amarillas) y al integrar los espectros direccionales obtenidos por el método WDM usando las ecuaciones 24 (línea negra) y 25 (línea verde). Para comparar  $K(k, \theta)$  y  $S(f, \theta)$  fácilmente (columnas izquierda y central en la Figura 5), se gráfica  $K(k, \theta)$  transformando el rango del número de onda  $k$  a un rango de frecuencia  $f$  usando la razón de dispersión (ecuación 22).

Antes de aplicar el método WDM, se deben cumplir dos condiciones:

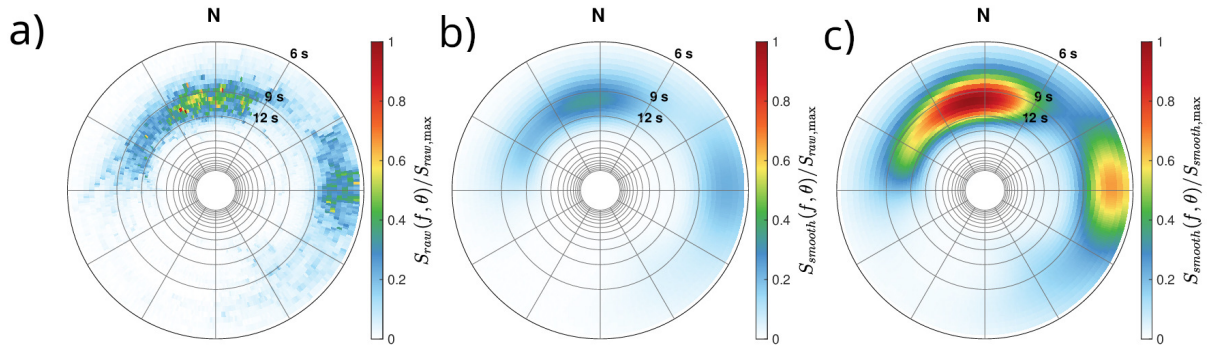
1. Contar con al menos el registro de la señal de cuatro alambres que cumplen con los criterios de control de calidad. Por ejemplo, en las Figuras 5f, i y l se muestran en color amarillo los espectros obtenidos de la señal de los alambres que no cumplieron con el control de calidad. También se muestra la línea de caída espectral de  $f^{-4}$  en la línea azul segmentada como referencia.
2. La orientación de la boya (ángulo de *yaw* o *heading*) debe permanecer relativamente constante, de forma que si el cambio de orientación, estimado mediante regresión lineal, es mayor a 8 grados el conjunto de datos que corresponde a esa ventana es rechazado.

Se procede a suavizar los espectros direccionales obtenidos mediante el método WDM con una convolución del espectro direccional y una función ventana Hamming 2D de 5 bandas de frecuencia por 13 grados. Esta operación se repite diez veces para garantizar un espectro suave (el procedimiento se describe con más detalle en el anexo B.3). En la Figura 6 se muestra el espectro de la Figura 5k tal como fue estimado por el método WDM (Figura 6a). Una vez suavizado, parte de la energía presente en los máximos locales del espectro se distribuye en los nodos continuos, por esto, el valor máximo de energía disminuye; en la Figura 6b se muestra el espectro suavizado normalizado con el valor máximo de energía del espectro original (antes del suavizado). Al normalizar con el valor máximo de energía del espectro suavizado se obtiene el espectro de la Figura 6c. La integral en dirección y frecuencia del espectro original y el espectro suavizado deben ser iguales.

Para determinados casos puede observarse que el máximo de energía espectral de  $K(k, \theta)$  y  $S(f, \theta)$  no están asociados al mismo valor de frecuencia (como puede observarse en la Figura 5g-i). Esto puede deberse al efecto Doppler de las olas que viajan sobre una corriente superficial, como explica Young et al. (1985); o también como indica Plant (2009), esas diferencias puede estar asociadas a la forma del espectro, donde al parecer para espectros más agudos el valor de  $k_p$  será más próximo a  $f_p$  según la relación de dispersión. Para eliminar el posible efecto de las corrientes superficiales o de la forma del espectro en el análisis del esfuerzo del viento, únicamente se analizan eventos donde el pico del



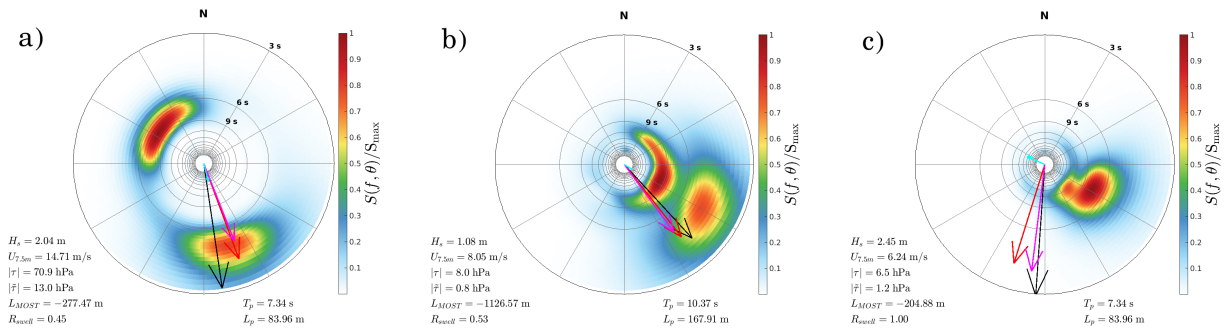
**Figura 5.** Espectros obtenidos al procesar distintos eventos (ventanas de 30 minutos); en cada fila se muestra un evento distinto. En las columnas izquierdas se muestran espectros direccionales en términos del número de onda  $K(k, \theta)$  y en las columnas centrales se muestran espectros direccionales en términos de la frecuencia  $S(f, \theta)$ . En la columna derecha se muestran los espectros de frecuencia de cada alambre de capacitancia en color rojo; si alguno de los alambres no pasa el control de calidad se colorea en amarillo; el espectro omnidireccional obtenido de  $S(f, \theta)$  se muestra en negro, mientras que el espectro omnidireccional obtenido de  $K(k, \theta)$  se muestra en verde.



**Figura 6.** Proceso de suavizado de los espectros. Espectro direccional obtenido del método WDM, espectro crudo, normalizado con su máximo de energía (a). Después de realizar el proceso de suavizado la energía se distribuye de manera más homogénea, definiendo los sistemas de olas, se muestra el espectro suavizado normalizado con el máximo de energía del espectro crudo (b). En (c) se muestra el espectro suavizado normalizado con su máximo de energía.

espectro  $K(k, \theta)$  y  $S(f, \theta)$  coincidan. Para ello se define el siguiente criterio, se estima el periodo  $T_{k_p}$  de las olas al identificar el número de onda asociado en el pico espectral de  $K(k, \theta)$  y se evalúa el periodo correspondiente usando la relación de dispersión (ecuación 22); si al compararlo con el periodo  $T_p$  asociado al pico espectral de  $S(f, \theta)$  se tiene una diferencia mayor a un segundo  $|T_{k_p} - T_p| > 1$ , se rechaza el conjunto de datos que corresponde a esa ventana en particular. Este criterio es adecuado para identificar diferencias en el pico del espectro entre  $S(f, \theta)$  y  $K(k, \theta)$  durante eventos con oleaje de largo periodo, es decir *wind sea* bien desarrollado o *swell*, e ignora eventos donde el pico del espectro está asociado a oleaje de corto periodo.

En este trabajo se analizaron eventos con un solo sistema de olas, ya que se debe determinar el mecanismo de transferencia de momento entre el océano y la atmósfera con un solo sistema de olas antes de poder analizar eventos con dos o más sistemas de olas de energía similar. Se descartan eventos con más de un sistema de olas presentes en el intervalo de ventana utilizando el método de identificación de sistemas en el espectro direccional por medio de la localización de cuencas invertidas (Hanson & Phillips, 2001). Los máximos locales se identifican y se suma la energía continua en cuatro sistemas de olas dominantes. Estos sistemas de olas se identificaron posteriormente como *wind sea* si se cumple con  $c_{p,i} < 1.3 U_7 \cos(\theta_{p,i})$  o como *swell* en caso contrario, donde  $c_{p,i}$  es la celeridad de fase estimada a partir de la energía máxima del sistema  $i$  y  $\theta_{p,i}$  es el ángulo relativo de la dirección de propagación de la energía máxima del sistema  $i$ . Finalmente, evaluando la energía de cada sistema se calcula la relación entre el *swell* y el *wind sea* y el porcentaje de energía de cada sistema respecto al total en el espectro. Si el sistema principal tiene menos que 75 % de la energía total o si el segundo sistema más energético tiene más que 20 % de la energía espectral total, se rechaza el conjunto de datos asociado a la ventana



**Figura 7.** Espectros direccionales de condiciones del mar con más de un sistema de olas presente. Eventos con *wind sea* y *swell* propagándose en direcciones opuestas (a), en la misma dirección (b). Evento con dos sistemas de *swell* propagándose en la misma dirección (c).

correspondiente, ya que existen dos sistemas de olas de energía similar. Este criterio se ilustra en las Figuras 5j-l, donde se muestra un evento con dos sistemas de olas presentes, lo cual no cumple con los criterios de selección. En la Figura 7 se muestran otros ejemplos de eventos donde se tienen más de un sistema de olas: *wind sea* y *swell* que se propagan en direcciones opuestas (Figura 7a), *wind sea* y *swell* que se propagan en la misma dirección (Figura 7b) y dos sistemas de *swell* que se propagan en la misma dirección (Figura 7c).

### 2.3.3. Estimación del flujo de momento

Antes de estimar el flujo de momento usando el método de *eddy covariance*, se aplica la corrección de la señal del viento con una doble rotación propuesta por Foken (2017). La primera rotación es para llevar las componentes del viento que están en un marco de referencia geográfico (Este-Norte-Arriba o ENU, ver Anexo A), a un marco de referencia en la dirección del viento (marco de referencia definido en la sección 2.1.1). La segunda rotación es para asegurar que el promedio de la componente vertical del viento  $\overline{U}_z$  sea mínima, ya que una posible inclinación del anemómetro sónico puede aumentar la magnitud promedio de la componente normal del viento  $\overline{U}_U$ . Para aplicar el método de corrección del viento con una doble rotación se requiere evaluar secuencialmente las siguientes ecuaciones:

$$\psi_{wind} = \text{atan}\left(\frac{\overline{U}_N}{\overline{U}_E}\right), \quad (37a)$$

$$U_{\hat{x}} = U_E \cos(\psi_{wind}) + U_N \sin(\psi_{wind}), \quad (37b)$$

$$U_y = -U_E \sin(\psi_{wind}) + U_N \cos(\psi_{wind}), \quad (37c)$$

$$\theta_{tilt} = \text{atan}\left(\frac{\overline{U}_U}{\overline{U}_{\hat{x}}}\right), \quad (37d)$$

$$U_x = U_{\hat{x}} \cos(\theta_{tilt}) - U_U \sin(\theta_{tilt}), \quad (37e)$$

$$U_z = U_{\bar{x}} \sin(\theta_{tilt}) + U_U \cos(\theta_{tilt}) , \quad (37f)$$

donde  $\psi_{wind}$  es el ángulo *yaw* o *heading* de la dirección del viento respecto al Este en sentido antihorario,  $\theta_{tilt}$  es el ángulo *roll* de inclinación media de la BOMM y  $U_{\bar{x}}$  es la componente de la velocidad del viento alineada a la dirección del viento antes de ser corregida por la inclinación de la boya y  $\bar{U}_{\bar{x}}$  es su promedio. Si se desea cotejar la dirección del viento  $\psi_{wind}$  con otros instrumentos o bases de datos, se puede expresar  $\psi_{wind}$  en la convención meteorológica, evaluando  $\psi_{wind}^{Met} = -(\psi_{wind} + 90^\circ)$ , donde el ángulo se mide en sentido horario desde el Norte hasta la dirección de donde viene el viento; o en la convención oceanográfica, por medio de  $\psi_{wind}^{Ocg} = 90^\circ - \psi_{wind}$ , donde el ángulo se mide en sentido horario desde el Norte hasta la dirección a donde se dirige el viento. Las fluctuaciones de las componentes de velocidad finalmente se obtienen con:

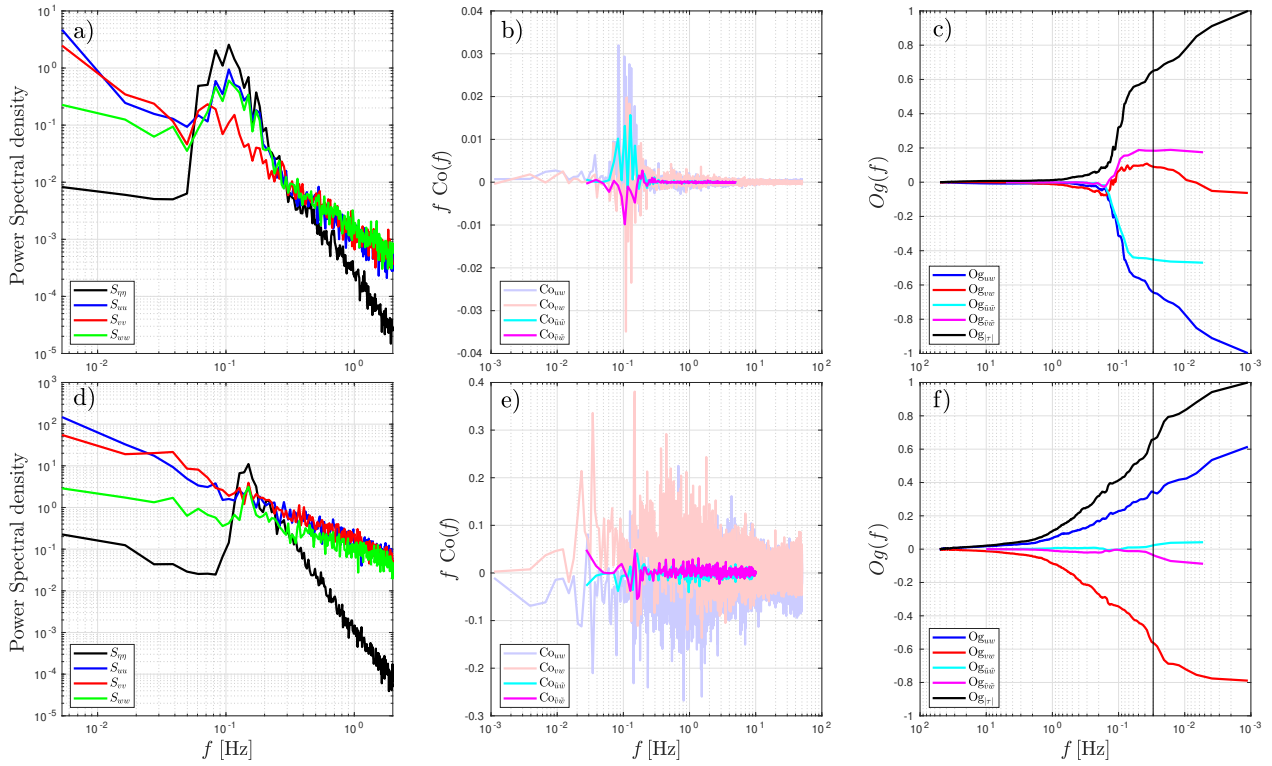
$$u = U_x - \bar{U}_x , \quad (38a)$$

$$v = U_y - \bar{U}_y , \quad (38b)$$

$$w = U_z - \bar{U}_z . \quad (38c)$$

Ahora se calcula el esfuerzo del viento utilizando el método de *eddy covariance* (se presenta la Figura 8 como auxiliar para visualizar este proceso). Las covarianzas se estimaron al integrar el coespectro (ecuación 16) de cada una de las componentes horizontales,  $u$  y  $v$ , con la vertical  $w$  (líneas azul y roja translúcida en las Figuras 8b y e). El esfuerzo del viento coherente con las olas se estima usando el método de Veron et al. (2008); en la Figura 8a se puede observar claramente que existe coherencia entre los espectros de potencia  $S_{\eta\eta}$ ,  $S_{uu}$  y  $S_{ww}$ , mientras que en la Figura 8d se observa una coherencia menor entre  $S_{\eta\eta}$ ,  $S_{vv}$  y  $S_{ww}$ . Para estimar los coespectros coherentes con las olas, las series de tiempo de las componente de velocidad del viento deben ser simultáneas y con el mismo intervalo de muestreo que las series de tiempo de la elevación de la superficie libre. Se deben remuestrear las series de tiempo del anemómetro sónico para igualar a la frecuencia de muestreo de los alambres de capacitancia, para ello se utilizó la función “*resample*” de MATLAB. La confiabilidad estadística de la coherencia espectral entre las componentes de velocidad del viento y la señal de la elevación de la superficie libre se mejora promediando 20 bandas de frecuencia, el resultado contiene lo equivalente a 40 grados de libertad (líneas cian y magenta en las Figuras 8 b y e). De acuerdo con Thompson (1979), al estimar la coherencia espectral con 40 grados de libertad de una señal de ruido blanco se obtiene un valor entre 0.114 y 0.146, dependiendo del nivel de confianza utilizado. Se determinó que con 40 grados de libertad se obtiene un buen balance entre la resolución y la exactitud de la estimación. Las ojivas de cada componente del esfuerzo del viento total y del esfuerzo del viento coherente con las olas se evaluaron usando la





**Figura 8.** Método de *eddy covariance* para dos casos, uno en cada fila. En la primera columna (a y d) se muestra el espectro de potencia de la señal de la elevación de la superficie libre y el espectro de potencia de cada una de las componentes de las fluctuaciones turbulentas del viento; se puede apreciar la coherencia entre  $S_{\eta\eta}$ ,  $S_{uu}$  y  $S_{ww}$  en (a). En la columna central (b y e) se muestran los coespectros de las componentes horizontales del viento con la componente vertical, y los espectros coherentes con las olas obtenidos por medio del método de Veron et al. (2008). En la columna derecha (c y f) se muestran las ojivas obtenidas al integrar los coespectros en (b) y (e).

metodología descrita por Aubinet et al. (2012). Con las ojivas se evalúa la calidad de la señal del anemómetro sónico, se identifica ruido en las bajas y altas frecuencias y se determina si el intervalo de tiempo utilizado en la ventana es lo suficientemente largo para capturar la contribución de los remolinos de frecuencia más baja en los flujos de momento:

$$Og_{uw}(f) = \int_{\infty}^f Co_{uw}(f)df . \quad (39)$$

En las Figuras 8c y 8f se observan las ojivas de cada componente del esfuerzo del viento (líneas azul y roja) y del esfuerzo del viento coherente con las olas (líneas cian y magenta), así como las de la magnitud del esfuerzo del viento total (línea negra). Un método interesante a explorar en el futuro es el de “optimización de ojivas”, propuesto por Sievers et al. (2015), donde con la finalidad de eliminar ruido en altas y bajas frecuencias (que puede observarse en las Figuras 8e y f) se estima el valor del esfuerzo del viento, ajustando por medio de un análisis de regresión no lineal la señal de las componentes de velocidad del viento a un coespectro idealizado.

La longitud de Monin-Obukov  $L_{MOST}$ , que es un indicador de la estabilidad atmosférica, que se estima de acuerdo al método explicado por Aubinet et al. (2012), donde:

$$L_{MOST} = -\frac{\bar{T}u_*^3}{\kappa g \langle wT' \rangle}, \quad (40)$$

siendo  $\bar{T}$  la temperatura promedio (en Kelvin) y  $\langle wT' \rangle$  es el esfuerzo de Reynolds de las fluctuaciones de temperatura  $T'$ . La velocidad de fricción  $u_*$  se estima por medio de los esfuerzos de Reynolds totales asociados a las componentes horizontales de las fluctuaciones de velocidad:

$$u_* = \left( \langle uw \rangle^2 + \langle vw \rangle^2 \right)^{1/4}, \quad (41)$$

Se puede aproximar la velocidad media del viento a 10 m de altura en condiciones atmosféricas neutrales  $U_{10,N}$ , usando la LDM-MOST:

$$U_{10,N} = U_7 + \frac{u_*}{\kappa} \left[ \ln\left(\frac{10}{7}\right) + \Psi_{MOST} \right], \quad (42)$$

donde el parámetro de corrección diabático para la transferencia de momento  $\Psi_{MOST}$ , se estima por medio de la parametrización propuesta por Paulson (1970), citada por Donelan (1990):

$$\Psi_{MOST} = \begin{cases} 2 \ln\left(\frac{1+X}{2}\right) + \ln\left(\frac{1+X^2}{2}\right) - 2 \operatorname{atan}(X) + \frac{\pi}{2} & \zeta < 0 \\ -5.4\zeta & \zeta > 0 \end{cases}, \quad (43)$$

donde  $\zeta$  es el parámetro de Obukhov y  $X = (1 - 17\zeta)^{1/4}$ .

## Capítulo 3. Resultados y discusión

---

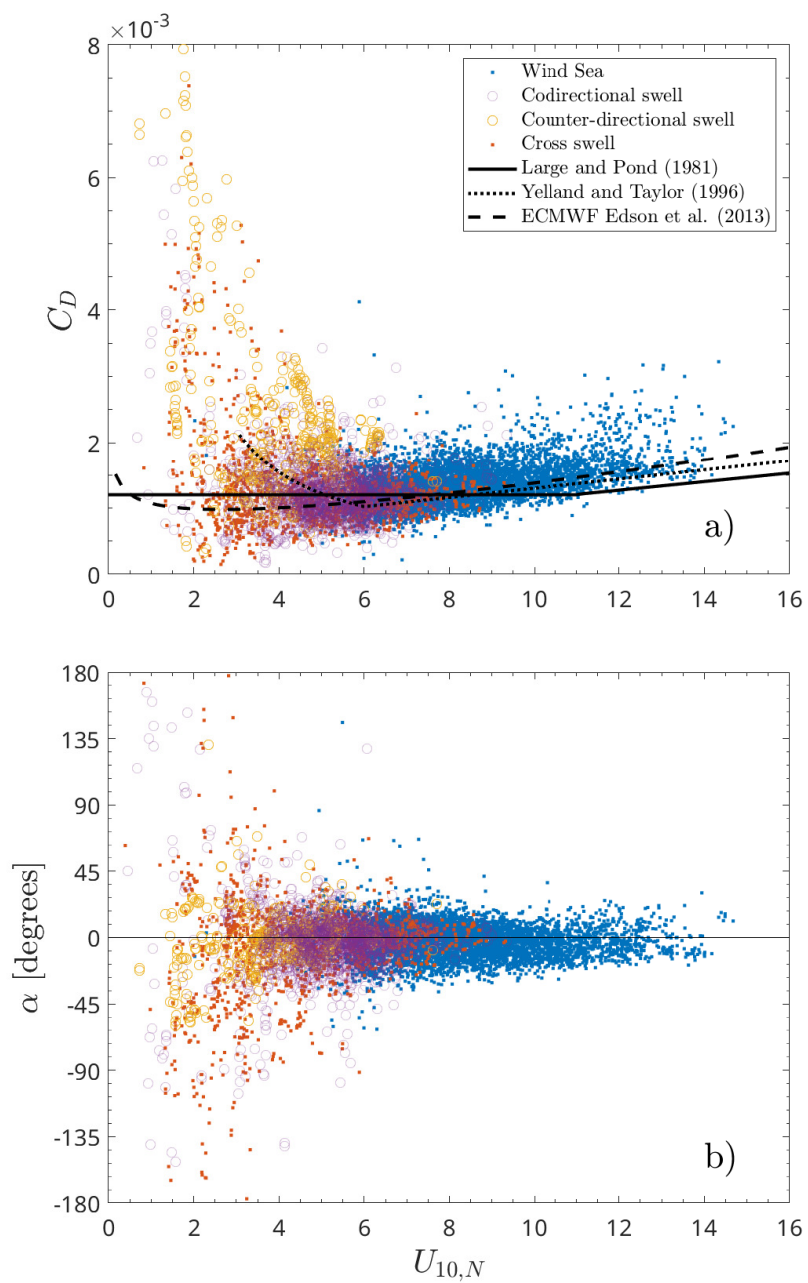
### 3.1. Resultados

Como se mencionó en el capítulo 1, el análisis y las parametrizaciones para estimar el esfuerzo del viento  $\tau$  usualmente se expresan en términos del coeficiente de arrastre  $C_D$  o la rugosidad aerodinámica  $z_0$ . La rugosidad aerodinámica no será analizada en este trabajo de manera independiente ya que se encuentra supeditada a la LDM, esto se hace con la única finalidad de observar la relación del esfuerzo del viento estimado por medio del método de *eddy covariance* con otros parámetros medidos durante las campañas. De este modo, se evita cualquier operador matemático que se pueda aplicar *a priori* al esfuerzo del viento para no sesgar el análisis del esfuerzo del viento y sus componentes.

#### 3.1.1. Análisis del coeficiente de arrastre

También se evita el usar  $C_D$  para parametrizar el esfuerzo del viento, ya que presenta inconvenientes. El primero de ellos es que usualmente se calcula a partir de la magnitud del esfuerzo del viento, lo cual elimina la posibilidad de analizar su dirección. Esta limitante se puede superar al modificar la definición estándar del coeficiente de arrastre, un ejemplo es la ecuación 9 propuesta por Li et al. (2018), donde el coeficiente de arrastre puede ser negativo (en dirección opuesta al viento) cuando  $90^\circ < \alpha < 270^\circ$ . Sin embargo, desde el punto de vista del autor de esta tesis, el mayor inconveniente del coeficiente de arrastre es que en su definición se encuentra el cuadrado de la velocidad del viento en denominador, lo que ocasiona que  $\lim_{U \rightarrow 0} C_D = \infty$ . Si el propósito del coeficiente de arrastre es tener una relación adimensional del esfuerzo del viento se podría sustituir la rapidez del viento  $U_{10}$ , por ejemplo, con la celeridad de fase  $c_p$ ; o buscando un número adimensional que incluya la gravedad  $g$ , la densidad  $\rho$  y la viscosidad del aire  $\mu_a$ , para obtener un parámetro sin discontinuidades.

De manera similar a otros estudios del esfuerzo del viento sobre la superficie del océano, por ejemplo: Large & Pond (1981), Yelland & Taylor (1996), Edson et al. (2013), García-Nava et al. (2009) y Potter (2015); en la Figura 9a se muestra la relación entre  $C_D$  y la velocidad del viento a 10 m de altura sobre la superficie, ajustada a condiciones de estabilidad atmosférica neutras  $U_{10,N}$ . Para facilitar la visualización de estos resultados, sólo se muestra el 20% de los datos observados durante las tres



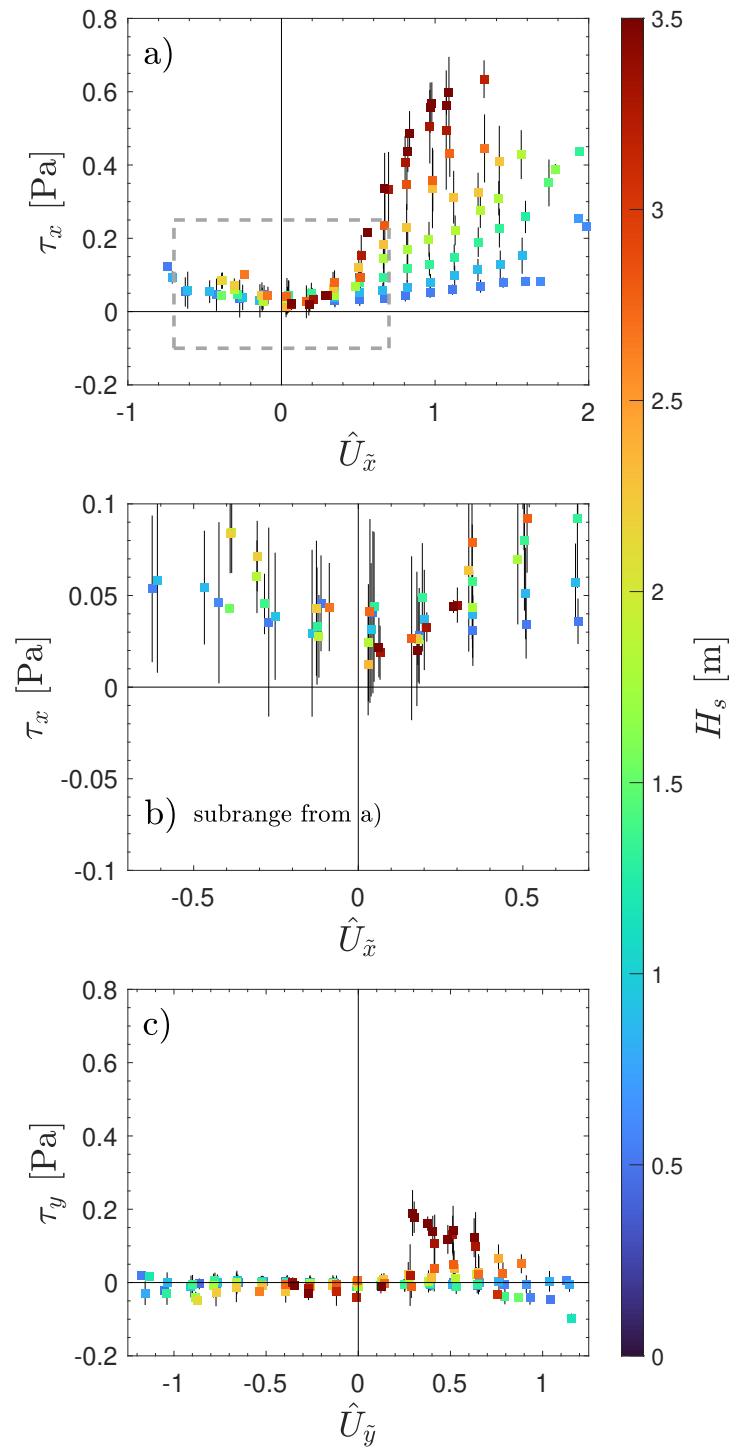
**Figura 9.** Coeficiente de arrastre  $C_D$  vs.  $U_{10,N}$  (a). Dirección relativa del esfuerzo del viento respecto al viento  $\alpha$  vs.  $U_{10}$  (b). La velocidad del viento se ajustó a condiciones neutrales de estabilidad. Se muestran en escala de colores eventos con condiciones de *wind sea* dominante y *swell* dominante propagándose ya sea en la misma dirección, en dirección opuesta o en dirección perpendicular al viento.

campañas, escogidos de forma aleatoria. La relación entre el coeficiente de arrastre y la velocidad es consistente con los trabajos antes mencionados. Se observa una clara relación del coeficiente de arrastre cuando la velocidad del viento es mayor que 7 m/s. En contraste, durante condiciones de viento débil a moderado, la relación entre el  $C_D$  y  $U_{10,N}$  es menos evidente y se observa gran variabilidad de  $C_D$  cuando  $U_{10,N} < 5$  m/s. Además, al clasificar el estado del mar usando el viento normalizado (ecuación 30), se pueden identificar varias condiciones de: *wind sea* (puntos azules), *swell* que se propaga en la misma dirección que el viento (círculos púrpuras), *swell* que se propaga en dirección opuesta a la del viento (círculos amarillos) y *swell* que se propaga en dirección perpendicular a la del viento (puntos naranjas). Es notable que en gran parte de los eventos durante condiciones de *swell* y viento en dirección opuesta, los valores de  $C_D$  son mayores que con condiciones de *swell* y viento en la misma dirección. Este fenómeno ha sido observado por Soloviev & Kudryavtsev (2010) en su estudio sobre variaciones de la velocidad del viento generadas por el *swell*.

En la Figura 9b se muestra el ángulo relativo del esfuerzo del viento respecto al viento  $\alpha$ , medido en grados, en función de la velocidad del viento. Cuando el viento es moderado a intenso ( $U_{10,N} > 10$  m/s), se observa una variabilidad de  $\alpha$  relativamente pequeña, tal que  $-20^\circ < \alpha < 20^\circ$ . Cuando la velocidad del viento es débil a moderada ( $U_{10,N} < 5$  m/s), la variabilidad de  $\alpha$  es mayor y en algunos casos se observan variaciones de  $\alpha$  tal que  $45^\circ < \alpha < 315^\circ$  cuando  $U_{10,N} \rightarrow 0$ . La variabilidad de  $\alpha$  parece tener un carácter aleatorio y corresponde indistintamente con variaciones a la derecha o a la izquierda de la dirección del viento. Chen et al. (2018) y Li et al. (2018) reportan casos similares. Además se observa que en gran parte de los casos donde el *swell* se propaga en dirección opuesta al viento, el esfuerzo del viento presenta menor variabilidad que en los casos cuando el *swell* que se propaga en la misma dirección o en dirección perpendicular al viento.

### 3.1.2. Análisis del esfuerzo del viento en un marco de referencia orientado al viento

De ahora en adelante se analizarán únicamente valores del esfuerzo del viento medido a 7 m de altura, sin utilizar la LDM o la MOST. Primero se presentan los datos en un marco de referencia orientado con la dirección del viento (ecuación 15a), como se muestra en la Figura 10. En la Figura 10a se muestra la componente del esfuerzo del viento en la dirección del viento  $\tau_x$  en función de la componente del viento normalizado en la dirección de propagación del oleaje  $\hat{U}_{\hat{x}}$  (también llamada inverso de la edad de la ola) y la altura significativa  $H_s$ . Se agruparon los datos promediando en intervalos de clase (*bin*



**Figura 10.** Resultados del esfuerzo del viento en un marco de referencia orientado en dirección del viento.

a) Componente del esfuerzo del viento en la dirección del viento  $\tau_x$  vs. la componente del viento normalizado en la dirección de propagación de las olas  $\hat{U}_{\tilde{x}}$  (también llamada inverso de la edad de las olas).

b) Acercamiento de (a) en el rango asociado a *swell* dominante.

c) Componente del esfuerzo del viento perpendicular a la dirección del viento  $\tau_y$  vs. la componente del viento normalizado perpendicular a la dirección de propagación de las olas  $\hat{U}_{\tilde{y}}$ .

En colores se muestra la altura significativa de las olas  $H_s$ . Los datos se muestran en promedios sobre intervalos de clase, las barras representan dos desviaciones estándar de cada clase.

averages) de la magnitud del viento normalizado (en rangos definidos cada 0.15 m/s) y de la altura significativa (cada 0.45 m). En la Figura 10c se muestra la componente del esfuerzo del viento en la dirección perpendicular al viento  $\tau_y$ , en función de la componente del viento normalizado perpendicular a la dirección de propagación del oleaje  $\hat{U}_y$  (nuevamente promediados en intervalos de clase) y la altura significativa  $H_s$ . En ambos casos, el valor de  $H_s$  se muestra en colores, las barras de error representan dos veces la desviación estándar de cada clase. La altura significativa de las olas fue elegida como segunda variable a analizar, en lugar de la pendiente de las olas  $H_s/\lambda_p$ , aunque es más comúnmente utilizada en los análisis del esfuerzo del viento, puesto que se observó una correlación espuria entre  $\hat{U}$  y  $H_s/\lambda_p$ . Esto se debe a que tanto  $c_p$  como  $\lambda_p$  se calculan por medio de la relación de dispersión (ecuación 22) y puede expresarse una variable como función de la otra. Además, Toba (1972; 1973) comenta que la altura significativa de las olas debe influir en la velocidad de fricción durante condiciones de *wind sea*.

En la Figura 10a se observa una clara relación entre  $\tau_x$  y  $\hat{U}_x$  durante condiciones donde el *wind sea* es dominante, es decir que  $\hat{U}_x > 0.7$ . Mientras que en condiciones donde el *swell* es dominante  $-0.7 < \hat{U}_x < 0.7$  (detalle en la Figura 10b), no se observa un efecto claro de  $H_s$  y  $\hat{U}_x$  sobre  $\tau_x$ . Al observar las barras de error cuando  $\hat{U}_x \rightarrow 0$ , es posible identificar un número de casos, que aunque son pocos no deben de descartarse, con  $\tau_x < 0$ ; lo que indica que para esos casos el flujo de momento se dirige del océano a la atmósfera. En la Figura 10b en el rango de  $-0.5 < \hat{U}_x < 0.3$ , se observa que los valores de  $\tau_x$  asociados al intervalo de clase no tienen una secuencia progresiva respecto a  $H_s$ , ya sea que aumente o disminuya su valor (como sí sucede en la región asociada al *wind sea* en la Figura 10a); lo cual sugiere que no existe una dependencia de  $\tau_x$  respecto a  $H_s$  en condiciones donde el *swell* es dominante. También se observan eventos inusuales donde  $\hat{U}_x < -0.7$ , lo cual indica condiciones de viento con una velocidad mucho mayor que la celeridad de fase de las olas dominantes propagándose en dirección opuesta al viento; estos casos pueden ser condiciones de viento recientemente establecidas asociadas a *wind sea* con alturas menores que las del sistema de *swell* remanente. Es importante mencionar que si no se utiliza el término  $\cos(\theta_p)$  para obtener la componente de  $U/c_p$  en la dirección del oleaje, es imposible diferenciar los eventos de *swell* en términos de su dirección relativa al viento, es decir, no es posible identificar si el *swell* se propaga en la misma dirección, en dirección opuesta o en dirección perpendicular al viento. Aunque este hecho puede resultar evidente, se considera importante mencionarlo, ya que aún existe debate sobre cuál definición de la edad de la ola es mejor para caracterizar el estado del mar,  $\bar{U}_x/c_p \cos(\theta_p)$  o  $\bar{U}_x/c_p$ , por ejemplo, el intercambio de opiniones realizado por Högström et al. (2011) y Hanley et al. (2011).

### 3.1.3. Análisis de la dirección relativa del esfuerzo del viento en un marco de referencia orientado a la dirección de propagación del oleaje

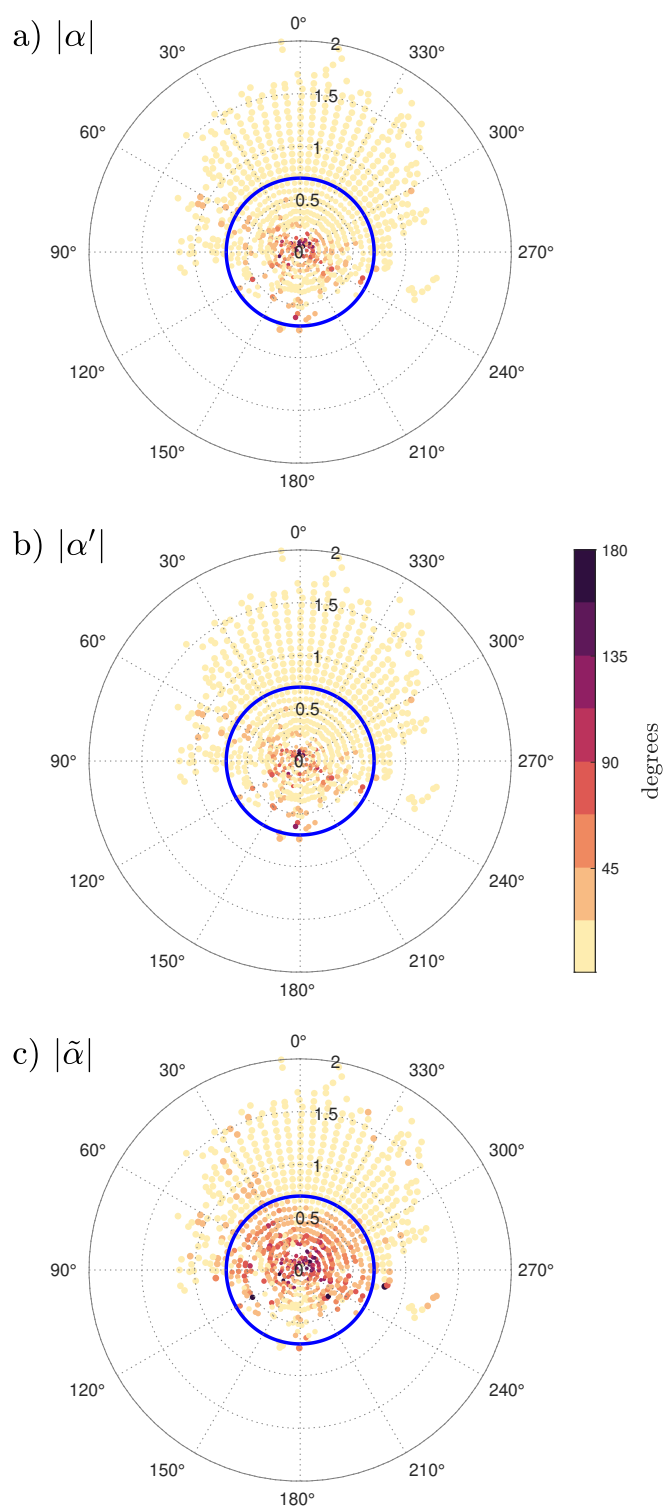
La componente del esfuerzo del viento en la dirección perpendicular al viento  $\tau_y$  se relaciona con el ángulo relativo del esfuerzo del viento respecto al viento  $\alpha$ . Se buscó alguna relación de  $\tau_y$  con distintas variables que describen el estado del mar o las condiciones atmosféricas, sin embargo, no se observó ninguna correlación significativa entre  $\tau_y$  y la dirección relativa de las olas  $\theta_p$ , o la componente en dirección de las olas del viento normalizado  $\hat{U}_{\hat{x}}$ , o la componente perpendicular a la dirección de las olas del viento normalizado  $\hat{U}_{\hat{y}}$  (que se muestra en la Figura 10c), o el parámetro de estabilidad atmosférica de Obukhov  $\zeta$ .

En la Figura 11 se presenta la velocidad del viento relativa y normalizada con respecto al oleaje  $\hat{U}$  (usando  $c_p$  y  $\theta_p$ , ver ecuación 33), en coordenadas polares, para estudiar la dirección del esfuerzo del viento  $\tau$  y la dirección de sus términos asociados a la turbulencia  $\tau'$  y coherente con las olas  $\tilde{\tau}$ . Para ello en escala de colores se muestra: el valor absoluto de la dirección relativa del esfuerzo del viento respecto al viento promedio  $|\alpha|$  en la Figura 11a, el valor absoluto de la dirección relativa del esfuerzo del viento turbulento respecto al viento promedio  $|\alpha'|$  en la Figura 11b y el valor absoluto de la dirección relativa entre el esfuerzo del viento coherente con las olas respecto al viento promedio  $|\tilde{\alpha}|$  en la Figura 11c. En estas figuras se muestran promedios en intervalos de clase de magnitud del viento (incrementos de 0.7 m/s) y dirección (en intervalos de 2 grados). Nótese que la coordenada radial representa la magnitud  $|\hat{U}| = U_7/c_p$  y la coordenada angular representa  $-\theta_p$  (de acuerdo con la ecuación 33). En las Figuras 11a, 11b y 11c, es fácil observar los cuatro casos del estado del mar:

1. cuando el *wind sea* es dominante ( $|\hat{U}| > 0.7$ ,  $-\theta_p \leq 60^\circ$  y  $-\theta_p \geq 300^\circ$ ),
2. cuando el *swell* se propaga en dirección del viento ( $|\hat{U}| < 0.7$ ,  $-\theta_p \leq 60^\circ$  y  $-\theta_p \geq 300^\circ$ ),
3. cuando el *swell* se propaga en dirección contraria al viento ( $|\hat{U}| < 0.7$ ,  $120^\circ \leq -\theta_p \leq 240^\circ$ ),
4. y cuando el *swell* se propaga en dirección perpendicular al viento ( $|\hat{U}| < 0.7$ ,  $60^\circ < -\theta_p < 120^\circ$  y  $240^\circ < -\theta_p < 300^\circ$ ).

En la Figura 11a, se observa fácilmente que  $|\alpha|$  es menor que  $20^\circ$  en casi todos los eventos observados, excepto cuando la celeridad de fase del *swell* es mayor que el viento observado (condiciones de *swell* dominante son los datos dentro del círculo con un radio igual a 0.7). Se observa que  $|\alpha|$  es mayor que  $45^\circ$  en algunos de los casos. Cuando se compara  $|\alpha'|$  con  $|\tilde{\alpha}|$  (Figuras 11b y 11c), es evidente que el esfuerzo del viento coherente con las olas  $\tilde{\tau}$  está asociado con los valores mayores de  $|\alpha|$ . El valor de  $|\tilde{\alpha}|$  es mayor que  $45^\circ$  en el rango asociado al *swell* y aumenta su valor conforme  $|\hat{U}| \rightarrow 0$ , esto es cierto para todos





**Figura 11.** Velocidad del viento relativa y normalizada con el oleaje  $\hat{U}$  en coordenadas polares en un marco de referencia orientado en la dirección de propagación de las olas. En escala de color se muestra el valor absoluto de la dirección relativa entre: a) el esfuerzo del viento  $|\alpha|$ , b) el esfuerzo del viento turbulento  $|\alpha'|$ , y c) el esfuerzo del viento coherente con las olas  $|\tilde{\alpha}|$  y el viento promedio. Dentro círculo azul se muestran los eventos donde el *swell* es dominante  $\hat{U} < 0.7$ .

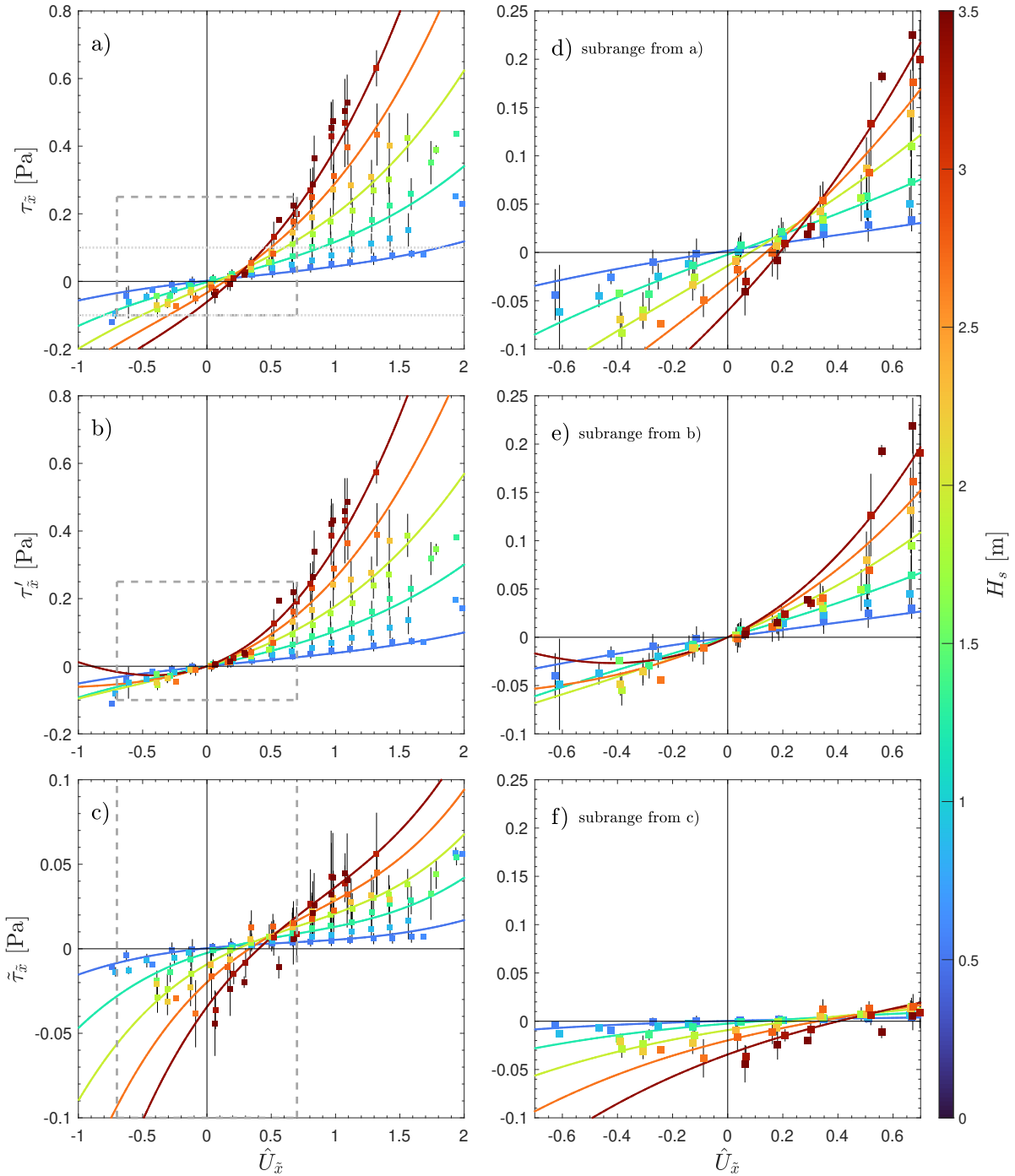
los valores donde  $0 < -\theta_p < 150^\circ$  y  $210^\circ < -\theta_p < 360^\circ$ . Mientras que en el rango asociado al *swell* dominante propagándose en dirección opuesta al viento,  $|\hat{U}| < 0.7$  y  $150^\circ < -\theta_p < 210^\circ$ , donde  $|\alpha|$  y  $|\tilde{\alpha}|$  siempre son menores que  $20^\circ$ . Así, aparentemente, el esfuerzo del viento coherente con las olas  $\tilde{\tau}$  durante condiciones de *swell* dominante tiende a tener una mayor desviación con la dirección del viento al compararlo con el esfuerzo del viento turbulento; el cambio en dirección tiende a  $180^\circ$  al disminuir  $|\hat{U}|$ , excepto durante condiciones cuando el *swell* se propaga en dirección opuesta al viento.

### 3.1.4. Análisis y parametrización del esfuerzo del viento en un marco de referencia orientado en la dirección de propagación del oleaje

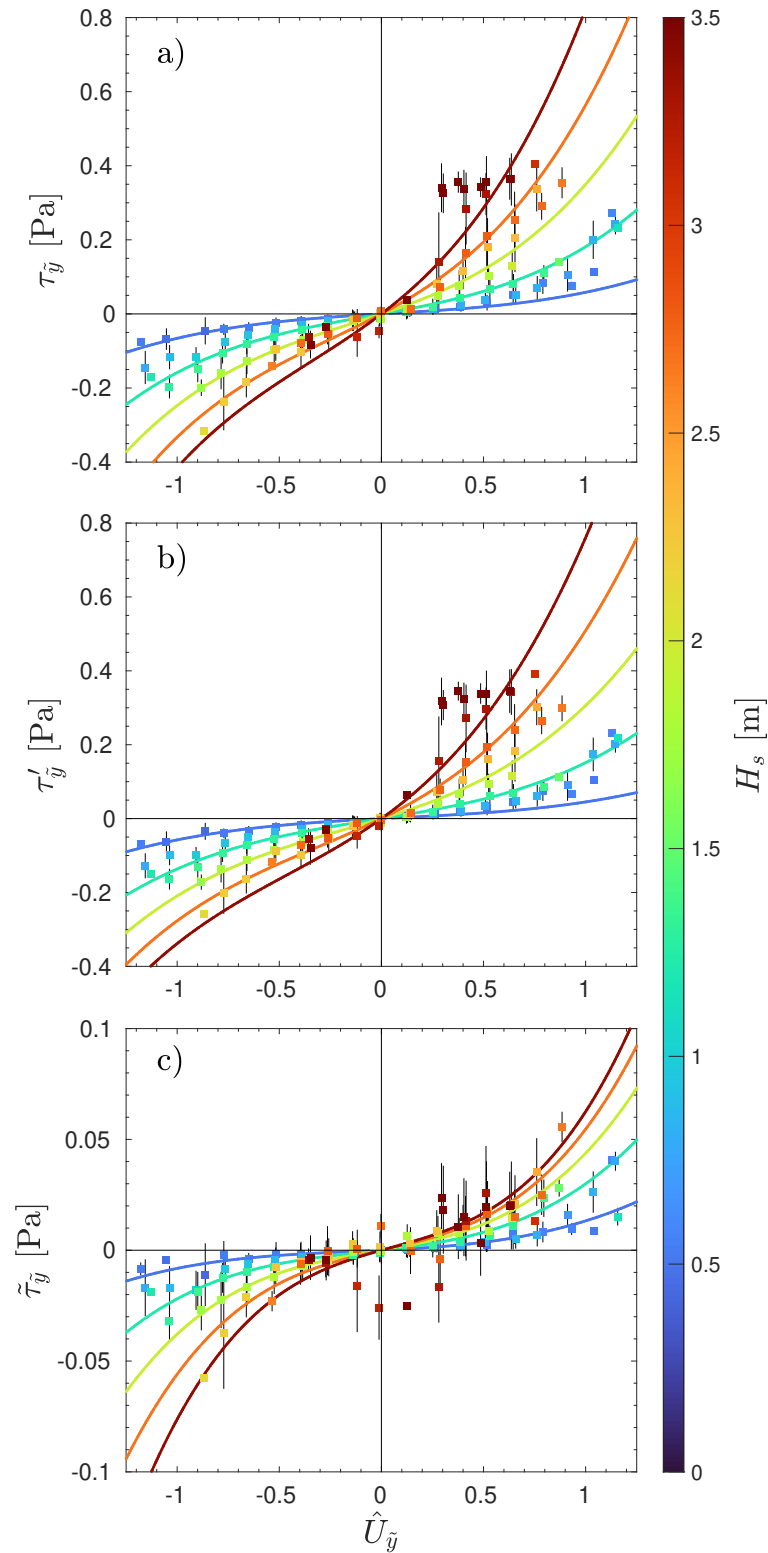
De ahora en adelante los términos que componen el esfuerzo del viento se analizan en un marco de referencia orientado con la dirección de propagación del oleaje (ecuaciones 31b y 31c), incluyendo esos términos asociados a la turbulencia y coherentes con las olas (que se obtienen por medio de las ecuaciones 15b y 15c); de este modo es posible aislar el efecto de las características del oleaje en una de las componentes del esfuerzo del viento. En las Figuras 12a, 12b y 12c, se presentan respectivamente las componentes del esfuerzo del viento en la dirección de propagación de las olas  $\tau_{\tilde{x}}$ , su parte asociada a la turbulencia  $\tau'_{\tilde{x}}$  y la que es coherente con las olas  $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$ . El esfuerzo del viento se grafica en función de la componente del viento normalizado en la dirección de propagación del oleaje  $\hat{U}_{\tilde{x}}$ , de forma similar al análisis realizado por Grachev & Fairall (2001). En las Figuras 12d, 12e y 12f se muestra un acercamiento al rango asociado a condiciones de *swell* dominante. La componente perpendicular a la dirección de propagación del oleaje del esfuerzo del viento  $\tau_{\tilde{y}}$ , su parte asociada a la turbulencia  $\tau'_{\tilde{y}}$  y la que es coherente con las olas  $\tilde{\tau}_{\tilde{y}}$  se muestran en las Figuras 13a, 13b y 13c en función de la componente del viento normalizado perpendicular a la dirección de propagación del oleaje  $\hat{U}_{\tilde{y}}$ . La altura significativa de las olas se muestra con la escala de colores. Los datos en las Figuras 12 y 13 también han sido promediados sobre intervalos de clase (intervalos de velocidad normalizada de 0.15 m/s y altura significativa de 0.45 m) y las barras de error representan dos desviaciones estándar en cada clase.

Se propone un modelo de tipo polinomial para representar la relación entre las componentes del esfuerzo del viento como función del viento normalizado y la altura significativa de las olas (Figuras 12 y 13). Después de probar diversos polinomios en función de  $\hat{U}_i$  y  $H_s$ , se determinó que el que describe mejor la relación del análisis es:

$$\tau_i = H_s \left( a_{10} + a_{11}\hat{U}_i + a_{12}\hat{U}_i^2 + a_{13}\hat{U}_i^3 \right) + H_s^2 \left( a_{20} + a_{21}\hat{U}_i + a_{22}\hat{U}_i^2 \right), \quad (44)$$



**Figura 12.** Componente del esfuerzo del viento en la dirección de propagación del oleaje  $\tau_{\tilde{x}}$  a), y su fracción asociada a la turbulencia  $\tau'_{\tilde{x}}$  b), y la que es coherente con las olas  $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$  c) vs. la componente del viento normalizado alineada a las olas  $\hat{U}_{\tilde{x}}$  (también “llamada inverso de la edad de las olas”), la altura significativa de las olas  $H_s$  se muestra en escala de colores y los datos se muestran en promedios sobre intervalos de clase. Las isolíneas con diferentes valores de altura significativa de las olas  $H_s$  se calculan por medio de la ecuación 44 con coeficientes de la Tabla 1. La columna derecha muestra detalles en el rango asociado a condiciones de *swell* dominante, el cual se delimita por la línea segmentada gris en cada una de las figuras en la columna izquierda. Nótese que c) se muestra en una escala diferente, las líneas punteadas en a) muestran el rango equivalente.



**Figura 13.** Componente esfuerzo del viento perpendicular a la dirección de propagación del oleaje  $\tau_{\perp}$  (a), y su fracción asociada a la turbulencia  $\tau'_{\perp}$  (b), y la que es coherente con las olas  $\tilde{\tau}_{\perp}$  (c) vs. la componente del viento normalizado perpendicular a las olas  $\hat{U}_{\perp}$ . La altura significativa de las olas  $H_s$  se muestra en escala de colores y los datos se muestran en promedios sobre intervalos de clase. Las isolíneas de altura significativa de las olas se calculan por medio de la ecuación 44 y los coeficientes en la Tabla 1. Nótese que (c) se muestra usando una escala diferente.

**Tabla 1.** Coeficientes obtenidos del análisis de regresión múltiple de la ecuación 44 utilizando los datos de la BOMM para cada componente del esfuerzo del viento. Se muestra el error asociado a cada coeficiente, así como el coeficiente de determinación ajustado  $R_{adj}^2$  y el RMSE de cada ajuste.

$f(\hat{U}_{\tilde{x}})$	$\tau_{\tilde{x}}$ (44a)	$\tau'_{\tilde{x}}$ (44b)	$\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$ (44c)
$R_{adj}^2$	0.890	0.883	0.649
RMSE	$2.345 \times 10^{-2}$	$2.148 \times 10^{-2}$	$5.881 \times 10^{-3}$
$a_{10}$	$(6.765 \pm 0.400) \times 10^{-3}$	-	$(2.555 \pm 0.149) \times 10^{-3}$
$a_{11}$	$(8.644 \pm 0.074) \times 10^{-2}$	$(8.574 \pm 0.111) \times 10^{-2}$	$(1.217 \pm 0.046) \times 10^{-2}$
$a_{12}$	$-(2.463 \pm 0.495) \times 10^{-2}$	$-(2.316 \pm 0.164) \times 10^{-2}$	$-(9.840 \pm 0.487) \times 10^{-3}$
$a_{13}$	$(1.567 \pm 0.075) \times 10^{-2}$	$(1.110 \pm 0.067) \times 10^{-2}$	$(5.756 \pm 0.188) \times 10^{-3}$
$a_{20}$	$-(7.098 \pm 0.192) \times 10^{-3}$	-	$-(3.729 \pm 0.080) \times 10^{-3}$
$a_{21}$	-	$-(1.361 \pm 0.054) \times 10^{-2}$	$(5.363 \pm 0.246) \times 10^{-3}$
$a_{22}$	$(1.640 \pm 0.024) \times 10^{-2}$	$(2.274 \pm 0.055) \times 10^{-2}$	$-(1.599 \pm 0.189) \times 10^{-3}$
$f(\hat{U}_{\tilde{y}})$	$\tau_{\tilde{y}}$ (44d)	$\tau'_{\tilde{y}}$ (44e)	$\tilde{\tau}_{\tilde{y}}$ (44f)
$R_{adj}^2$	0.827	0.823	0.533
RMSE	$2.418 \times 10^{-2}$	$2.223 \times 10^{-2}$	$4.975 \times 10^{-3}$
$a_{10}$	-	-	-
$a_{11}$	$(5.584 \pm 0.077) \times 10^{-2}$	$(4.700 \pm 0.071) \times 10^{-2}$	$(8.835 \pm 0.159) \times 10^{-3}$
$a_{12}$	$-(1.912 \pm 0.141) \times 10^{-2}$	$-(2.540 \pm 0.129) \times 10^{-2}$	$(6.279 \pm 0.290) \times 10^{-3}$
$a_{13}$	$(5.840 \pm 0.110) \times 10^{-2}$	$(4.561 \pm 0.101) \times 10^{-2}$	$(1.278 \pm 0.023) \times 10^{-2}$
$a_{20}$	-	-	-
$a_{21}$	$(1.995 \pm 0.034) \times 10^{-2}$	$(2.030 \pm 0.031) \times 10^{-2}$	$-(3.516 \pm 0.704) \times 10^{-4}$
$a_{22}$	$(2.330 \pm 0.067) \times 10^{-2}$	$(2.574 \pm 0.062) \times 10^{-2}$	$-(2.440 \pm 0.138) \times 10^{-3}$

donde  $\tilde{i}$  puede ser la componente en la dirección de propagación de las olas  $\tilde{x}$  o en la dirección perpendicular  $\tilde{y}$ . El modelo polinomial seleccionado tiene que ser al menos de tercer orden en función de la componente del viento normalizado correspondiente, con la finalidad de poder obtener valores negativos del esfuerzo del viento cuando la componente del viento normalizado  $\hat{U}_{\tilde{i}}$  sea negativa (como es posible en todos los casos mostrados en las Figuras 12 y 13). Además, la altura significativa de las olas  $H_s$  debe modificar el valor de la componente del esfuerzo del viento y se incorporan términos en el modelo que dependen de  $H_s^2$  para replicar la relación del esfuerzo del viento coherente con las olas en las Figuras 12c y 13c. En la Tabla 1 se muestran los coeficientes calculados por medio de análisis de regresión lineal múltiple para cada término del esfuerzo del viento. También se estima, por medio de análisis de varianza, el error estándar de cada coeficiente, el coeficiente de determinación ajustado  $R_{adj}^2$  y la raíz del error cuadrático medio (*root mean square error* o RMSE por sus siglas en inglés) para cada uno de los ajustes. Algunas de las ecuaciones en la Tabla 1 fueron simplificadas si el intervalo de confianza de algún coeficiente es menor que 95 %, en cuyos casos el coeficiente fue eliminado. Además, si al eliminar un coeficiente se obtiene un mejor  $R_{adj}^2$  o un RMSE menor o similar, entonces se elige el modelo más simple.

### 3.1.4.1. Descripción de la componente del esfuerzo del viento en la dirección de propagación del oleaje

Los resultados del esfuerzo del viento durante condiciones de *wind sea* ( $\hat{U}_{\bar{x}} > 0.7$ ) son muy similares en los dos marcos de referencia (comparar Figuras 10a y 12a); las diferencias que se distinguen pueden estar asociadas a condiciones de viento recientemente establecidas y sistemas de olas remanentes propagándose en una dirección distinta a la del viento. En esos casos las diferencias entre  $\tau_x$  y  $\tau_{\bar{x}}$  deben incorporarse en  $\tau_{\bar{y}}$  (Figura 13a). Además, en esos casos el esfuerzo del viento coherente con las olas  $\tilde{\tau}$  representa aproximadamente el 10% del esfuerzo del viento total de los casos observados. Por esa razón, los resultados de los ajustes polinomiales y los promedios con base en los intervalos de clase, asociados a las componentes del esfuerzo del viento total  $\tau_{\bar{x}}$  y turbulento  $\tau'_{\bar{x}}$  (ecuaciones 44a and 44b de la Tabla 1) en la dirección de propagación a las olas, que se muestran en las Figuras 12a y 12b, parecen casi idénticos en la región asociada al *wind sea*. Las diferencias entre estas componentes son más notables en el rango asociado a condiciones de *swell* dominante (Figuras 12d and 12e). Antes de explicar la naturaleza de estas diferencias, debemos enfocarnos en la componente del esfuerzo del viento turbulento en la dirección de propagación de las olas  $\tau'_{\bar{x}}$ , que siempre tiene la misma dirección que el viento: si  $\hat{U}_{\bar{x}} < 0$  entonces  $\tau'_{\bar{x}} < 0$ . El ajuste polinomial definido por la ecuación 44b se encuentra confinado al cuadrante I (donde  $\hat{U}_{\bar{x}} > 0$  y  $\tau'_{\bar{x}} > 0$ ) y III (donde  $\hat{U}_{\bar{x}} < 0$  y  $\tau'_{\bar{x}} < 0$ ). Creemos que la forma real de esta relación debe ser similar a una función simétrica impar (una función es simétrica impar es aquella que cumple la siguiente condición  $f(-x) = -f(x)$ , son ejemplos de funciones simétricas impares,  $x$ ,  $x^3$ ,  $\sin(x)$ ). Es decir, se esperaría que la magnitud de  $\tau'_{\bar{x}}$  fuera la misma sin importar la dirección de propagación del *swell*; la ecuación 44b no cumple con esa descripción. Aparentemente, el cambio en la concavidad del punto de inflexión depende de la altura significativa  $H_s$  (nótese el cuadrante III, en la Figura 12b); esto podría ser causado por la baja densidad de casos en condiciones de *swell* con viento en dirección opuesta y valores grandes de  $H_s$ .

La componente del esfuerzo del viento coherente con las olas en la dirección de propagación del oleaje  $\tilde{\tau}_{\bar{x}}$  tiene una peculiar relación con la componente del viento normalizado en dirección de las olas  $\hat{U}_{\bar{x}}$ , que puede observarse en la Figura 12c. Usando el ajuste polinomial descrito por la ecuación 44c, podemos analizar más fácilmente este comportamiento. Durante condiciones de *wind sea* ( $\hat{U}_{\bar{x}} > 0.7$ ),  $\tilde{\tau}_{\bar{x}}$  siempre tiene la misma dirección que el viento y las olas. Sin embargo, si  $\hat{U}_{\bar{x}}$  disminuye,  $\tilde{\tau}_{\bar{x}}$  puede cambiar de dirección durante condiciones con *swell* dominante y con el viento en la misma dirección ( $0 < \hat{U}_{\bar{x}} < 0.7$ ). El valor de  $\hat{U}_{\bar{x}}$  en que ocurre el cambio de dirección está definido por la raíz de la ecuación 44c. El valor

de la raíz depende significativamente de la altura significativa de las olas  $H_s$ ; el cambio de dirección de  $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$  corresponde con valores mayores de  $\hat{U}_{\tilde{x}}$  al aumentar  $H_s$ . Durante condiciones del mar donde el *swell* es dominante y la velocidad del viento tiene dirección opuesta ( $-0.7 < \hat{U}_{\tilde{x}} < 0$ ),  $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$  siempre tendrá una dirección contraria a las olas y su magnitud dependerá tanto del valor de  $\hat{U}_{\tilde{x}}$  como de  $H_s$ . Recapitulando, durante condiciones de *swell* con viento en la misma dirección, la componente  $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$  puede tener una dirección opuesta al oleaje y al viento si  $\hat{U}_{\tilde{x}}$  es lo suficientemente pequeña en relación al valor de  $H_s$ . En contraste, durante condiciones de *swell* dominante que se propaga en dirección opuesta al viento,  $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$  siempre tendrá la misma dirección que el viento.

El efecto del esfuerzo coherente  $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$  en el esfuerzo del viento total  $\tau_x$  es fácilmente visible en la Figura 12d; si las ecuaciones 44b y 44c se suman el resultado será similar a la ecuación 44a, como puede observarse al comparar las Figuras 12d, 12e, y 12f. Es de esperarse que al sumar las ecuaciones 44b y 44c, los coeficientes resultantes sean iguales a aquéllos en la ecuación 44a, sin embargo, éste no es el caso. Esto se debe a que se eliminaron los coeficientes  $a_{10}$  y  $a_{20}$  en la ecuación 44b, ya que  $\tau'_{\tilde{x}}$  debe ser igual a cero si no existe viento que lo genere. Cuando se eliminan coeficientes, el método de regresión por mínimos ajusta el valor de los otros coeficientes con la finalidad de minimizar los residuales. Además, del análisis de regresión múltiple para la ecuación 44b considerando  $a_{10}$  y  $a_{20}$  diferentes a cero, se obtiene que  $R_{adj}^2 = 0.884$  y  $RMSE = 2.143 \times 10^{-2}$ ; una diferencia despreciable en comparación a los valores reportados en la Tabla 1. Por otro lado, el RMSE de la componente del esfuerzo del viento total en la dirección de propagación del oleaje  $\tau_{\tilde{x}}$  en el rango de la velocidad normalizada asociada a condiciones de *swell* dominante, es decir, de la ecuación 44a cuando  $-0.7 < \hat{U}_{\tilde{x}} < 0.7$ , es  $1.712 \times 10^{-2}$  (como referencia,  $RMSE / \bar{\tau}_{\tilde{x}} = 0.522$ ), mientras que el RMSE al sumar las ecuaciones 44b y 44c es de  $1.724 \times 10^{-2}$ , una diferencia despreciable.

Cuando el *swell* se propaga en dirección opuesta al viento, las componentes en la dirección del oleaje del esfuerzo del viento turbulento  $\tau'_{\tilde{x}}$  y el coherente con las olas  $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$  tendrán la misma dirección y se obtendrá un esfuerzo del viento total  $\tau_{\tilde{x}}$  de mayor magnitud. Por otro lado, durante condiciones de *swell* que se propaga en la misma dirección que el viento, si  $\hat{U}_{\tilde{x}}$  es lo suficientemente pequeña y la altura significativa de las olas  $H_s$  lo suficientemente grande, la dirección del esfuerzo del viento coherente con las olas  $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$  tendrá dirección opuesta al esfuerzo del viento turbulento  $\tau'_{\tilde{x}}$ , lo que reduce el esfuerzo del viento total  $\tau_{\tilde{x}}$ .

### 3.1.4.2. Descripción de la componente del esfuerzo del viento perpendicular a la dirección de propagación del oleaje

Para concluir nuestro análisis, se discutirá sobre la componente del esfuerzo del viento total  $\tau_{\tilde{y}}$  y su fracción asociada a la turbulencia  $\tau'_{\tilde{y}}$  y la que es coherente con las olas  $\tilde{\tau}_{\tilde{y}}$  en la dirección perpendicular a la dirección de propagación del oleaje. Durante condiciones de *wind sea* bien establecidas, la magnitud de la componente del viento normalizado perpendicular a la dirección de las olas  $\hat{U}_{\tilde{y}}$  será mucho menor que  $\hat{U}_{\tilde{x}}$ , más no necesariamente despreciable, por ejemplo, si  $|\alpha| \approx 30^\circ$ . En condiciones donde el *swell* es dominante, el valor de  $\hat{U}_{\tilde{y}}$  puede ser similar o incluso mayor a  $\hat{U}_{\tilde{x}}$ , especialmente durante condiciones donde el *swell* se propaga en una dirección perpendicular al viento.

En las Figuras 13a, 13b y 13c se muestra la componente del esfuerzo del viento total  $\tau_{\tilde{y}}$  y su fracción asociada a la turbulencia  $\tau'_{\tilde{y}}$  y la que es coherente con las olas  $\tilde{\tau}_{\tilde{y}}$ , respectivamente, en la dirección perpendicular a la dirección de propagación del oleaje. A cada una de las figuras se añaden isonías de la altura significativa  $H_s$  calculadas con las ecuaciones polinomiales 44d, 44e y 44f, respectivamente (coeficientes en Tabla 1). Llama la atención y sin embargo es de esperarse que  $\tau_{\tilde{y}}$  y sus fracciones  $\tau'_{\tilde{y}}$  y  $\tilde{\tau}_{\tilde{y}}$  se puedan representar con polinomios que asemejan a una función simétrica impar, confinada en los cuadrantes I y III, donde  $\tau_{\tilde{y}}$ ,  $\tau'_{\tilde{y}}$  y  $\tilde{\tau}_{\tilde{y}}$  tienden a cero cuando  $\hat{U}_{\tilde{y}} \rightarrow 0$ . Y aunque las ecuaciones 44d, 44e y 44f parezcan simétricas, lo cierto es que la magnitud de  $\tau_{\tilde{y}}$ ,  $\tau'_{\tilde{y}}$  y  $\tilde{\tau}_{\tilde{y}}$  tiende a ser mayor cuando la dirección relativa del oleaje es hacia la derecha respecto del viento, es decir, cuando  $\theta_p < 0$  (observar en las Figuras 13a, 13b y 13c donde las isonías tienen valores más altos cuando  $\hat{U}_{\tilde{y}} > 0$  en comparación a cuando  $\hat{U}_{\tilde{y}} < 0$ ). También, el ajuste polinomial de  $\tilde{\tau}_{\tilde{y}}$  (ecuación 44f) tiene un coeficiente de determinación ajustado  $R^2_{adj}$  mucho menor que el obtenido del análisis de regresión en las ecuaciones 44d y 44e y similar al de la ecuación 44c. Los residuales de la ecuación 44f pueden estar asociados a la metodología para obtener el esfuerzo coherente con las olas  $\tilde{\tau}$  (obtenidos por medio de las ecuaciones 18d y 18e). Además de errores asociados a la estimación del esfuerzo del viento al emplear el método de *eddy covariance*, que puede notarse en los valores promedio de clases asociadas a valores de  $H_s$  altos, por ejemplo cuando  $\hat{U}_{\tilde{y}} \approx 0$  en la Figura 13c, o cuando  $\hat{U}_{\tilde{y}} \approx 0.4$  en las Figuras 13a y 13b. Dichos errores corresponden a condiciones con la presencia de frentes atmosféricos, donde al parecer existe un error en la señal medida por el anemómetro sónico, asociado a fluctuaciones de velocidad del viento de alta frecuencia, las cuales fueron identificadas por medio de un análisis visual de los coespectros  $C_{o_{ww}}$  y  $C_{o_{vw}}$ , que tienen una forma similar a aquellos mostrados en la Figura 8e. El control de calidad utilizado no identifica de forma automática el ruido de alta frecuencia en las mediciones realizadas por



**Tabla 2.** Coeficientes obtenidos por medio de análisis de regresión múltiple de la ecuación 44 para el esfuerzo del viento turbulento como función de la magnitud del inverso de la edad de la ola o de las componentes correspondientes del viento normalizado, según sea el caso. Se muestra el error estándar calculado para cada coeficiente, así como el coeficiente de determinación ajustado  $R_{adj}^2$  y el RMSE de cada ajuste

	$ \tau'  (U/c_p) (44g)$	$\tau'_x(\hat{U}_{\hat{x}}) \cup \tau'_y(\hat{U}_{\hat{y}}) (44h)$
$R_{adj}^2$	0.890	0.893
RMSE	$2.3211 \times 10^{-2}$	$2.378 \times 10^{-2}$
$a_{10}$	-	-
$a_{11}$	$(6.156 \pm 0.151) \times 10^{-2}$	$(5.595 \pm 0.046) \times 10^{-2}$
$a_{12}$	$(1.782 \pm 0.234) \times 10^{-2}$	$-(1.192 \pm 0.474) \times 10^{-3}$
$a_{13}$	$-(7.718 \pm 0.947) \times 10^{-3}$	$(1.530 \pm 0.023) \times 10^{-2}$
$a_{20}$	-	-
$a_{21}$	$-(1.420 \pm 0.061) \times 10^{-2}$	$(1.561 \pm 0.027) \times 10^{-2}$
$a_{22}$	$(2.588 \pm 0.059) \times 10^{-2}$	$-(3.403 \pm 0.291) \times 10^{-3}$

el anemómetro sónico, lo que genera un error en el cálculo del esfuerzo del viento para estos casos. Posiblemente se puedan eliminar estos errores al utilizar el método de optimización de ojivas propuesto por Sievers et al. (2015).

Debido a que el esfuerzo del viento asociado a la turbulencia no considera las fluctuaciones de velocidad generadas por el oleaje (ver ecuación 18g), existe la posibilidad de que la turbulencia sea isotrópica y no exista una diferencia real entre las dos componentes del esfuerzo del viento turbulento  $\tau'_x$  y  $\tau'_y$ ; de ser así, la magnitud del esfuerzo del viento turbulento  $\tau'$  puede determinarse con solo una ecuación. Para probar dicha posibilidad, se realizó el análisis de regresión múltiple con dos nuevos polinomios, el primero donde se ajusta la magnitud del esfuerzo del viento turbulento  $|\tau'|$  utilizando el inverso de la edad de la ola  $U/c_p$ ; y en el segundo ajuste se utilizan tanto las componentes del esfuerzo del viento turbulento alineadas como las perpendiculares a la dirección del oleaje, y se analizan junto con sus correspondientes componentes del viento normalizado ( $\hat{U}_{\hat{x}}$  y  $\hat{U}_{\hat{y}}$ ), con la finalidad de obtener un solo ajuste polinomial. Los coeficientes obtenidos en ambos ajustes se muestran en la Tabla 2, ecuaciones 44g y 44h. El valor de los coeficientes de determinación ajustado  $R_{adj}^2$  y el valor del RMSE obtenidos del análisis de regresión para las ecuaciones 44b, 44e, 44g y 44h son del mismo orden de magnitud, esto puede significar que una sola ecuación podría bastar para modelar el esfuerzo del viento turbulento. Sin embargo, al observar los coeficientes de las ecuaciones 44b, 44e, 44g y 44h tenemos que los signos no son iguales y los valores de los mismos aún considerando el error estimado son muy diferentes, en algunos casos hasta un orden de magnitud; por lo que disminuye la probabilidad que  $\tau'_x$  y  $\tau'_y$  sean físicamente iguales. Los resultados observados no son concluyentes en este punto. Se discutirá sobre esto con mayor detalle en la sección 3.2.

Resumiendo, se observa que aparentemente la dirección del oleaje no influye en la componente del esfuerzo del viento perpendicular a la dirección de propagación de las olas  $\tau_{\hat{y}}$ . Usar un marco de referencia inercial orientado a las olas puede ser útil al estimar la magnitud y dirección del esfuerzo del viento  $\tau$  si se estiman sus componentes en la dirección de propagación del oleaje  $\tau_{\hat{x}}$  y perpendicular a la dirección de propagación del oleaje  $\tau_{\hat{y}}$  con ecuaciones independientes, particularmente durante condiciones donde el *swell* es dominante (valores altos de edad de la ola). La componente del esfuerzo del viento perpendicular a la dirección de las olas  $\tau_{\hat{y}}$  siempre tendrá la misma dirección que  $\hat{U}_{\hat{y}}$ . Sin embargo, dependiendo de la dirección de propagación del *swell* relativa a la dirección del viento  $\theta_p$  y el valor de la altura significativa  $H_s$ , la componente del esfuerzo del viento en la dirección de propagación de las olas  $\tau_{\hat{x}}$  puede modificar su dirección relativa respecto al viento  $\alpha$  y posiblemente aumentar o disminuir su magnitud en comparación a eventos sin la presencia de *swell*.

## 3.2. Discusión

### 3.2.1. Sobre el modelo propuesto

La dependencia exacta de  $\tau_{\hat{i}}$  en función de  $\hat{U}_{\hat{i}}$  y  $H_s$  sólo se puede obtener de un modelo analítico para el tensor del esfuerzo del viento  $\check{\tau}_{ij}$  que considere la física de la WBL. Sin embargo, del modelo probabilístico propuesto con la ecuación 44, es posible inferir algunas características del mecanismo físico de la transferencia de momento entre el océano y la atmósfera en presencia del oleaje. Su forma fue deducida a partir de los resultados mostrados en las Figuras 12 y 13 y analizando el comportamiento de las componentes del esfuerzo del viento en función del viento normalizado. Su implementación está parcialmente justificada por el uso previo de polinomios cúbicos, por ejemplo, en las parametrizaciones del coeficiente de arrastre  $C_D$  propuestas por Large & Pond (1981), ecuación 7, o por Guan & Xie (2004), que usan una ecuación lineal dependiente del viento, que al expresarse en términos del esfuerzo del viento se transforma en un polinomio cúbico con únicamente los términos  $U_{10,N}^3$  y  $U_{10,N}^2$ . En otros trabajos como los de Yelland & Taylor (1996), ecuación 8, se proponen parametrizaciones de  $C_D$  que son polinomios cúbicos con todos los términos. La parte novedosa de la ecuación 44 reside en la incorporación de términos que dependen de  $H_s$  y  $H_s^2$ . El uso de la altura significativa en nuestra parametrización está justificado de forma análoga por las parametrizaciones que utilizan la pendiente de las olas  $H_s/\lambda_p$ , como la de Zhao & Li (2019) o la de García-Nava et al. (2012). Se recomienda que el uso de  $H_s^2$  en la ecuación 44 se pruebe más exhaustivamente, aunque aparentemente este término es necesario

para modelar correctamente el esfuerzo del viento coherente con las olas durante condiciones de *swell* dominante.

Una posible explicación de la física de la ecuación 44 puede extenderse de la elaborada por Wanninkhof et al. (2009) para estimar la velocidad de transferencia de  $\text{CO}_2$  entre el océano y la atmósfera:  $k_{\text{CO}_2} = a + bU_{10} + cU_{10}^2 + dU_{10}^3$ . Wanninkhof et al. asocian a la constante  $a$  la transferencia de  $\text{CO}_2$  en ausencia de viento (absorción/desorción del  $\text{CO}_2$ ), los términos cuadráticos  $cU_{10}^2$  los relacionan a la transferencia de  $\text{CO}_2$  asociada al esfuerzo cortante del viento sobre la superficie del océano. El término cúbico  $dU_{10}^3$  se asocia a la disipación de energía cuando el viento es débil o moderado y a la formación de aerosoles cuando el viento es intenso. Así la transferencia de momento del océano a la atmósfera en ausencia de viento y generada por el oleaje se modela principalmente por los términos  $a_{10}H_s$  y  $a_{20}H_s^2$  en la ecuación 44; por ejemplo, cuando  $H_s > 0.95$  y  $\hat{U}_{\hat{x}} = 0$ , el término  $a_{20}H_s^2$  será mayor que  $a_{10}H_s$ , al ser  $a_{20}$  de signo negativo ocasiona que la dirección de  $\tau_{\hat{x}}$  sea contraria a la de propagación de las olas. Los términos cuadráticos:  $a_{12}H_s\hat{U}_1^2$  y  $a_{22}H_s^2\hat{U}_1^2$ , se asocian a la energía cinética y a la transferencia de momento causada por el viento; mientras que, el término cúbico  $a_{13}H_s\hat{U}_1^3$ , se asocia a la disipación de la energía turbulenta (Davidson, 2015; capítulo 3.2.2) y la formación de aerosoles.

### 3.2.2. Sobre el mecanismo de transferencia de momento entre el océano y la atmósfera en presencia de *swell* y viento débil a moderado

Cuando el *swell* interactúa con la atmósfera durante condiciones del mar donde los valores de altura significativa de las olas son grandes, existe un flujo de momento desde el océano hacia la atmósfera. Tal como fue explicado por Grachev et al. (2003), un valor negativo de la componente del esfuerzo del viento en la dirección del viento  $\tau_{\hat{x}}$  indica un flujo de momento "hacia arriba". Sin embargo, ese escenario es únicamente válido durante condiciones extremas, donde el esfuerzo del viento coherente con las olas excede el esfuerzo del viento turbulento y el *swell* se propaga en la dirección del viento. Otras situaciones donde se transfiere momento desde el océano a la atmósfera que fueron identificados en nuestros resultados, incluyen eventos cuando el esfuerzo del viento coherente con las olas reduce el esfuerzo del viento total durante condiciones de *swell* y viento en la misma dirección; o cuando el *swell* se propaga en dirección contraria al viento, y el esfuerzo coherente con las olas se suma al esfuerzo del viento turbulento generado, aumentando el esfuerzo del viento total.

### 3.2.2.1. Cuando el swell se propaga en la misma dirección que el viento

Como se mencionó anteriormente, durante condiciones de *swell* que se propaga en la dirección del viento, la componente del esfuerzo del viento coherente con las olas en la dirección de propagación del oleaje  $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$  puede tener una dirección contraria a la componente del esfuerzo del viento turbulento en la dirección de propagación del oleaje  $\tau'_{\tilde{x}}$  (que tiene la misma dirección que el *swell* y el viento), lo cual causa una disminución del esfuerzo del viento total (ver el cuadrante IV, donde  $\hat{U}_{\tilde{x}} > 0$  y  $\tau_{\tilde{x}} < 0$ , en las Figuras 12d, 12e y 12f). Un posible mecanismo para que ocurra este proceso puede inferirse del modelo para la generación de olas propuesto por Miles (1957), cuyo mecanismo físico se explica con detalle en Lighthill (1962). El modelo de Miles sugiere que en un flujo invíscido de aire que fluye sobre la superficie de una ola monocromática, existe una altura crítica  $z_c$  donde la velocidad media del viento es igual a la celeridad de fase de la ola de modo que  $U(z_c) = c_p$ . El aire fluye con un movimiento ondulatorio cerca y bajo la altura crítica  $z_c$ , creando zonas de alta presión en los valles y de baja presión en las crestas. Estos gradientes de presión inducen movimientos oscilatorios verticales del aire que generan vorticidad y transfieren momento desde la atmósfera hacia el océano. Además, debajo de  $z_c$ , la velocidad promedio del viento es menor que  $c_p$ , lo que debe modificar el perfil logarítmico de la velocidad del viento cerca y por debajo de  $z_c$ . Esta teoría es consistente con las observaciones de laboratorio realizadas por Buckley & Veron (2016) en un tanque de olas. También es consistente con dos estudios subsecuentes, Cao et al. (2020) y Cao & Shen (2021), donde se emplea un modelo tipo Large Eddy Simulation (LES), que resuelve una variante de las ecuaciones del modelo de Miles. Estos estudios demuestran que la velocidad vertical del viento coherente con las olas  $\tilde{w}$ , tiende a tener en niveles superiores a la altura crítica  $z_c$ , una dirección hacia abajo de las crestas a los valles de las olas (tiene un desfase de  $\pi/2$  relativo a la superficie libre); y en los niveles con altura menor que  $z_c$ , tiende a tener una dirección hacia abajo desde los valles hasta las crestas (está en fase con la superficie libre). La velocidad horizontal del viento coherente con las olas  $\tilde{u}$  cambia su fase de cero en la superficie del agua hasta  $\pi$  en lo alto de la capa límite de las olas (WBL). Cuando las olas presentan mayor desarrollo o mayor edad de la ola  $c_p/U$ , este desfase ocurre en alturas relativamente menores en comparación a la creada con olas más jóvenes. El campo de las componentes del viento coherente con las olas afecta directamente la magnitud y dirección del esfuerzo del viento total. El esfuerzo del viento coherente con las olas tendrá una transferencia de momento hacia abajo si las componentes vertical y horizontal del viento coherente con las olas tienen signos diferentes (transferencia de momento hacia arriba si tienen signos iguales).

Sin embargo, sea cual sea el mecanismo debajo de la altura crítica de las olas, se observa que en

casos de *swell* con viento débil en la misma dirección, la magnitud del esfuerzo del viento  $|\tau|$  puede ser menor que en condiciones con la misma intensidad del viento pero sin presencia de *swell*, algo ya observado por Potter (2015), debido a que el esfuerzo del viento turbulento y el coherente con las olas tienen direcciones opuestas. Estos resultados también son consistentes con los obtenidos por Sullivan et al. (2008) usando un modelo LES, durante eventos de *swell* que se propaga en la misma dirección que el viento (donde el inverso de la edad de la ola es igual a  $\hat{U}_{\tilde{x}} = 0.4$ ), se observa que el  $C_D$  es menor que el generado por el viento sobre una superficie plana. Otro resultado similar es el obtenido por Hanley & Belcher (2008) empleando un modelo numérico de Ekman, donde el esfuerzo del viento se reduce y cambia de dirección durante eventos con altos valores de edad de la ola. Por último, consideramos que en condiciones de *swell* con viento en la misma dirección son menos favorables para el crecimiento de oleaje local que los eventos con la misma intensidad del viento pero con ausencia de *swell*; esta hipótesis debe probarse en trabajos posteriores.

### 3.2.2.2. Cuando el *swell* se propaga en dirección contraria al viento

El último caso a discutir en este trabajo es cuando existen condiciones de *swell* dominante que se propaga en dirección contraria al viento. Como se ha reportado, las componentes del esfuerzo del viento turbulento  $\tau'_{\tilde{x}}$  y del esfuerzo del viento coherente con las olas en la dirección de propagación de las olas  $\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$ , siempre tienen la misma dirección cuando  $-0.7 < \hat{U}_{\tilde{x}} < 0$ ; lo que aumenta la magnitud del esfuerzo del viento total  $|\tau|$  y será de mayor magnitud que en condiciones de intensidad del viento similares pero con ausencia de *swell* (que se muestra en la Figura 9 y en el cuadrante III de las Figuras 12d, 12e y 12f). En estos casos, la altura crítica  $z_c$  asociada con las olas más largas no existe, la condición donde  $U(z_c) = c_p$  es imposible de cumplir, ya que ambas variables tienen signos (direcciones) diferentes. Cao et al. (2020) presentan un diagrama (Figura 14b en dicho trabajo) que explica claramente dichas condiciones; también explican que cuando el *swell* se propaga en dirección opuesta al viento no existe el cambio de fase de  $0$  a  $\pi$  en la componente horizontal del viento coherente con las olas, que sucede cuando el *swell* se propaga en la dirección del viento.

Nuestros resultados que muestran un aumento en el esfuerzo del viento son también consistentes con los obtenidos por Soloviev & Kudryavtsev (2010) durante una campaña de medición en el Mar Negro. Por otro lado, nuestros resultados concuerdan con los resultados del modelo LES obtenidos por Sullivan et al. (2008), donde explican que durante eventos con condiciones de *swell* dominante que

se propaga en dirección opuesta al viento, al usar la misma edad de la ola mencionada en el párrafo anterior, se obtienen valores del  $C_D$  mayores en comparación a los obtenidos sobre una superficie plana. Los resultados coinciden con los reportados por García-Nava et al. (2009) que se obtuvieron a partir de mediciones en el golfo de Tehuantepec. Al comparar nuestros resultados con aquellos mostrados por Grare et al. (2013), no es posible confirmar si sus observaciones concuerdan con las nuestras, ya que reportan valores negativos del esfuerzo del viento durante condiciones de *swell* dominante con vientos débiles, donde reportan que el *swell* se mantuvo en una dirección relativamente constante mientras el viento presentó un cambio repentino de dirección. Como la dirección relativa del *swell* respecto al viento no fue reportada, no es posible determinar si la propagación del *swell* es en la misma dirección o en dirección contraria al viento.

Se recomienda realizar experimentos de laboratorio donde se puedan medir los campos de viento o realizar simulaciones numéricas; por ejemplo con el modelo de Cao et al. (2020) en condiciones de *swell* que se propaga en la misma dirección, dirección opuesta, o dirección perpendicular respecto al viento, con valores altos de la edad de la ola, de modo que pueda ayudar a entender el comportamiento del campo de velocidades coherente con las olas dentro de la WBL. Se espera que durante condiciones de *swell* dominante con dirección opuesta al viento, el campo del viento se modifica por la transferencia de momento ocasionada por las olas más largas hacia el aire que se encuentra más cerca de la superficie (deducido por el aumento en el esfuerzo del viento total); dicha transferencia de momento debería generar condiciones más favorables para el crecimiento del oleaje local de periodo corto en dirección opuesta al sistema de olas dominante. Se sugiere que en un trabajo futuro, se lleven a cabo comparaciones entre espectros de eventos de *swell* dominante con viento en dirección opuesta, con eventos donde el *swell* y el viento tengan la misma dirección para confirmar esta hipótesis.

### 3.2.3. Estimación de la magnitud y dirección del esfuerzo del viento

Finalmente, el efecto del esfuerzo del viento coherente con las olas se encuentra confinado en una línea definida por la dirección de las olas y su influencia se ejerce hacia o en contra de la dirección de propagación de las olas dependiendo del valor  $\hat{U}_x$  y de  $H_s$ . Cuando se evalúa el esfuerzo del viento total, la componente del esfuerzo del viento turbulento debe ser considerada. Es importante investigar si existe alguna diferencia entre las componentes del esfuerzo del viento alineada y perpendicular a la dirección de las olas; en otras palabras, si existe alguna diferencia en las características de la turbulencia

al considerar la orientación de las olas cuando el aire fluye de forma paralela o perpendicular a los valles y crestas durante eventos de *swell* dominante. Los resultados de este trabajo resultan insuficientes para clarificar esta cuestión basándose en los resultados del análisis de regresión de las ecuaciones 44b, 44e, 44g y 44h; los coeficientes de determinación de dichas ecuaciones son casi iguales, mas los valores de los coeficientes de las ecuaciones son muy diferentes. Por esta razón no es posible definir entre las dos alternativas, si existe o no diferencia entre las ecuaciones que describen  $\tau'_x$  y  $\tau'_y$ . Si no existe diferencia entre ambas componentes, el esfuerzo del viento turbulento  $\tau'$  se puede modelar con una sola ecuación y su dirección debe ser la del viento. Si el primer caso es el correcto, la magnitud del esfuerzo del viento total  $|\tau|$  y su dirección relativa respecto al viento  $\alpha$ , se pueden estimar por medio de las ecuaciones 44a y 44d de la siguiente manera:

$$|\tau| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}, \quad (45a)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\tau_y}{\tau_x}\right) + \theta_p. \quad (45b)$$

En el segundo caso, se pueden utilizar ecuaciones similares a 44c y 44g, y la magnitud del esfuerzo del viento  $|\tau|$  y la dirección relativa  $\alpha$  pueden estimarse por medio de:

$$|\tau| = \sqrt{|\tau'|^2 + 2|\tau'|\tilde{\tau}_x \cos(\theta_p) + \tilde{\tau}_x^2}, \quad (46a)$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\tilde{\tau}_x \sin(\theta_p)}{|\tau'| + \tilde{\tau}_x \cos(\theta_p)}\right). \quad (46b)$$

El cambio de dirección del esfuerzo del viento causado por el *swell* es fácilmente visible en la ecuación 46b. Al compararse, se obtienen mejores resultados al utilizar las ecuaciones 45a y 45b que con las ecuaciones 46a y 46b. El RMSE de la magnitud del esfuerzo del viento calculado con 45a es  $4.947 \times 10^{-3}$  (como referencia,  $\text{RMSR} / |\bar{\tau}| = 0.120$ ), mientras que en condiciones donde el *swell* dominante es  $2.081 \times 10^{-2}$  ( $\text{RMSE} / |\bar{\tau}| = 0.377$ ); en comparación, el RMSE de la ecuación 46a es  $1.160 \times 10^{-1}$  ( $\text{RMSE} / |\bar{\tau}| = 0.276$ ) y  $4.157 \times 10^{-2}$  ( $\text{RMSE} / |\bar{\tau}| = 0.752$ ) en condiciones de *swell* dominante. Para la dirección relativa entre el esfuerzo del viento y el viento  $\alpha$ , a partir de la ecuación 45b se obtiene un RMSE igual a  $0.9^\circ$  en todas las observaciones y de  $21.2^\circ$  en el rango asociado a *swell* dominante; en comparación, el RMSE de los resultados que se obtienen con la ecuación 46b es  $6.3^\circ$  y  $22.8^\circ$ , respectivamente.

En comentarios finales a este trabajo, nos gustaría enfatizar la importancia del inverso de la edad de la ola  $\hat{U}_x$ , definido por la ecuación 27, así como la componente complementaria del viento normalizado perpendicular a la dirección de las olas  $\hat{U}_y$  durante condiciones de *swell* dominante. La correcta definición del inverso de la edad de la ola ( $\bar{U}_x \cos(\theta_p)/c_p$  o  $\bar{U}_x/c_p$ ) ha ocasionado debate anteriormente, como se

puede revisar en el intercambio de opiniones entre Höglström et al. (2011) y Hanley et al. (2011) con el fin de determinar cuál de las definiciones es correcta para analizar la interacción entre el viento y el oleaje en estudios del clima global. Los argumentos de ambas partes se enfocan en un ejemplo donde, en condiciones de *swell* dominante, con la dirección del viento perpendicular a la dirección de propagación de las olas, en ese caso el inverso de la edad de la ola definido como en la ecuación 27 tiende a cero por lo que se pierde toda medida de la intensidad del viento. Desde nuestro punto de vista, en ese caso en particular el inverso de la edad de la ola definido como  $\bar{U}/c_p$  es inadecuado ya que no toma en cuenta la dirección del viento respecto al *swell* y  $\bar{U}_x \cos(\theta_p)/c_p$  es incompleta pues no incorpora  $\hat{U}_{\tilde{y}}$ , que es importante para considerar la fracción de la velocidad del viento perpendicular al oleaje, comparándola con la celeridad de fase del *swell*. Como nuestras observaciones sugieren, aunque  $\bar{U}_x \cos(\theta_p)/c_p = 0$ , el valor de la componente del esfuerzo del viento en dirección del oleaje puede ser diferente de cero si el *swell* es suficientemente alto. El esfuerzo del viento total como vector debe de completarse al sumar la componente del esfuerzo del viento perpendicular la dirección de propagación de las olas  $\tau_{\tilde{y}}$  (ecuación 45a).

Finalmente, se enlistan algunas recomendaciones para investigaciones futuras. Se debe estudiar el esfuerzo del viento coherente con las olas  $\tilde{\tau}$  durante eventos con dos o más sistemas de olas presentes (casos con espectros bimodales o trimodales); para ello se tienen los casos registrados por las BOMM rechazados para el análisis del esfuerzo del viento en este trabajo. También se considera necesario estimar el esfuerzo del viento coherente con las olas en diferentes alturas  $z$  para determinar el cambio de  $\tau'$  y  $\tilde{\tau}$  en función de  $z$ , así como un análisis del esfuerzo del viento durante condiciones de *swell* dominante dentro del marco teórico de la altura crítica de las olas. Es importante estudiar el efecto de la velocidad relativa del viento (velocidad del viento menos la velocidad de la corriente) en la magnitud y dirección del esfuerzo del viento, ya que su presencia puede modificar el campo de olas y su celeridad de fase y, por lo tanto, el esfuerzo coherente con las olas  $\tilde{\tau}$  (más sobre este tema en Bye, 1985 o en Kara et al., 2007). Se recomienda realizar trabajos en laboratorio o mediante simulación computacional para estudiar los campos de velocidad de las componentes horizontal y vertical de la velocidad coherente con las olas durante condiciones de *swell* dominante en la misma dirección, en dirección contraria y en dirección perpendicular al viento. También se recomienda realizar mediciones en diferentes condiciones de estabilidad atmosférica.



## Capítulo 4. Conclusiones

---

Se midió la velocidad del viento y el estado del mar por medio de una Boya Oceanográfica y de Meteorología Marina (BOMM) en tres localidades de los mares mexicanos. A partir de los datos observados, se estimó el esfuerzo del viento y sus componentes turbulenta y coherente con las olas, y se realizó un análisis usando un marco de referencia orientado a la dirección asociada al pico espectral del oleaje. Durante condiciones de *wind sea*, el viento, el sistema de oleaje dominante, el esfuerzo del viento y sus componentes turbulenta y coherente con las olas tienen la misma dirección, como es bien conocido.

Cuando el *swell* es dominante y se propaga en la misma dirección del viento, si los valores de la edad de la ola y la altura significativa son lo suficientemente grandes, entonces el flujo de momento es del océano a la atmósfera (un flujo hacia arriba), con lo que cambia la dirección del esfuerzo del viento coherente con las olas en  $180^\circ$ , mientras que el viento, el *swell* y el esfuerzo del viento turbulento mantienen la misma dirección. La magnitud del esfuerzo del viento total se reducirá. En casos extremos, la dirección relativa del esfuerzo del viento puede cambiar, de estar orientado hacia la dirección del viento y de propagación de las olas, a tener una dirección opuesta.

Cuando el *swell* y el viento tienen direcciones opuestas, aún existe un flujo inverso de momento (del océano a la atmósfera), la dirección del esfuerzo del viento (como en el caso anterior) es contraria a la de la propagación de las olas y su magnitud depende de los valores del inverso de la edad de las olas y de la altura significativa. Sin embargo, en esta situación, el esfuerzo del viento coherente con las olas tiene la misma dirección que el viento y que el esfuerzo del viento turbulento, lo que causa un aumento en la magnitud del esfuerzo del viento total. En este trabajo se presentan parametrizaciones de las componentes del esfuerzo del viento para estimar la magnitud y dirección relativa al viento durante condiciones de *swell* dominante.

## Literatura citada

- Anctil, F., Donelan, M. A., Drennan, W. M., & Graber, H. C. (1994). Eddy-correlation measurements of air-sea fluxes from a discus buoy. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 11(4), 1144 – 1150. [https://doi.org/10.1175/1520-0426\(1994\)011<1144:ECMOAS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0426(1994)011<1144:ECMOAS>2.0.CO;2).
- Aubinet, M., Vesala, T., & Papale, D. (2012). *Eddy Covariance*. Springer.
- Buckley, M. & Veron, F. (2016). Structure of the airflow above surface waves. *Journal of Physical Oceanography*, 46(5), 1377 – 1397. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-15-0135.1>.
- Bye, J. A. (1985). Large-scale momentum exchange in the coupled atmosphere-ocean. In Nihoul, J., editor, *Coupled Ocean-Atmosphere Models*, volume 40 of *Elsevier Oceanography Series*, (pp. 51–61 ). Elsevier.
- Cao, T., Deng, B.-Q., & Shen, L. (2020). A simulation-based mechanistic study of turbulent wind blowing over opposing water waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 901, A27. <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.591>.
- Cao, T. & Shen, L. (2021). A numerical and theoretical study of wind over fast-propagating water waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 919, A38. <https://doi.org/10.1017/jfm.2021.416>.
- Charnock, H. (1955). Wind stress on a water surface. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 81(350), 639–640. <https://doi.org/10.1002/qj.49708135027>.
- Chen, S., Qiao, F., Huang, C. J., & Zhao, B. (2018). Deviation of wind stress from wind direction under low wind conditions. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 123(12), 9357–9368. <https://doi.org/10.1029/2018JC014137>.
- Chen, S., Qiao, F., Xue, Y., Chen, S., & Ma, H. (2020). Directional characteristic of wind stress vector under swell-dominated conditions. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 125(7), e2020JC016352. <https://doi.org/10.1029/2020JC016352>.
- Cohen, M. X. (2014). *Analyzing Neural Time Series Data*. The MIT Press.
- Collins, C. O., Lund, B., Ramos, R. J., Drennan, W. M., & Graber, H. C. (2014). Wave measurement intercomparison and platform evaluation during the ITOP (2010) Experiment. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 31(10), 2309 – 2329. <https://doi.org/10.1175/JTECH-D-13-00149.1>.
- Craik, A. D. (2004). The origins of water wave theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36(Volume 36, 2004), 1–28. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.36.050802.122118>.
- Craik, A. D. (2005). George gabriel stokes on water wave theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 37(Volume 37, 2005), 23–42. <https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.37.061903.175836>.
- Daubechies, I. (1990). The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, 36(5), 961–1005. <https://doi.org/10.1109/18.57199>.
- Davidson, P. A. (2015). *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*, (2a ed.). Oxford University Press.
- Deshpande, A. M. (2020). Rotation using Euler angles. <https://adipandas.github.io/posts/2020/02/euler-rotation/>.
- Diebel, J. (2006). Representing attitude: Euler angles, unit quaternions, and rotation vectors. [https://www.astro.rug.nl/software/kapteyn-beta/\\_downloads/attitude.pdf](https://www.astro.rug.nl/software/kapteyn-beta/_downloads/attitude.pdf).
- Donelan, M. (1990). Air-sea interaction. In *The Sea: Ocean Engineering Science*. John Wiley and Sons.

- Donelan, M., Babanin, A., Sanina, E., & Chalikov, D. (2015). A comparison of methods for estimating directional spectra of surface waves. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 120(7), 5040–5053. <https://doi.org/10.1002/2015JC010808>.
- Donelan, M. A., Drennan, W. M., & Magnusson, A. K. (1996). Nonstationary analysis of the directional properties of propagating waves. *Journal of Physical Oceanography*, 26(9), 1901 – 1914. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1996\)026<1901:NAOTDP>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1996)026<1901:NAOTDP>2.0.CO;2).
- Donelan, M. A. & Krogstad, H. E. (2005). Wavelet spectrum analysis and ocean wind waves. In Hauser, D., Kahma, K., Krogstad, H. E., Lehner, S., Monbaliu, J. A. J., & Wyatt, L., editors, *Measuring and Analysing the Directional Spectra of Ocean Waves - Working Group 3*, (pp. 71–80 ). EU Publications Office (OPOCE).
- Drennan, W., Kahma, K., & Donelan, M. (1999). On momentum flux and velocity spectra over waves. *Boundary-Layer Meteorol*, 92(3), 489–515. <https://doi.org/10.1023/A:1002054820455>.
- Drennan, W. M., Donelan, M. A., Madsen, N., Katsaros, K. B., Terray, E. A., & Flagg, C. N. (1994). Directional wave spectra from a swath ship at sea. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 11(4), 1109 – 1116. [https://doi.org/10.1175/1520-0426\(1994\)011<1109:DWSFAS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0426(1994)011<1109:DWSFAS>2.0.CO;2).
- Drennan, W. M., Graber, H. C., Collins, C. O., Herrera, A., Potter, H., Ramos, R. J., & Williams, N. J. (2014). Easi: An air–sea interaction buoy for high winds. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 31(6), 1397 – 1409. <https://doi.org/10.1175/JTECH-D-13-00201.1>.
- Edson, J. B., Jampana, V., Weller, R. A., Bigorre, S. P., Plueddemann, A. J., Fairall, C. W., Miller, S. D., Mahrt, L., Vickers, D., & Hersbach, H. (2013). On the exchange of momentum over the open ocean. *Journal of Physical Oceanography*, 43(8), 1589 – 1610. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-12-0173.1>.
- Fairall, C. W., Bradley, E. F., Rogers, D. P., Edson, J. B., & Young, G. S. (1996). Bulk parameterization of air-sea fluxes for tropical ocean-global atmosphere coupled-ocean atmosphere response experiment. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 101(C2), 3747–3764. <https://doi.org/10.1029/95JC03205>.
- Farge, M. (1992). Wavelet transforms and their applications to turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 24, 395–458. <https://doi.org/10.1146/annurev.fl.24.010192.002143>.
- Flügge, M., Bakhoday-Paskyabi, M., Reuder, J., & El Guernaoui, O. (2019). Wind stress in the coastal zone: Observations from a buoy in Southwestern Norway. *Atmosphere*, 10(9), 491. <https://doi.org/10.3390/atmos10090491>.
- Foken, T. (2017). *Micrometeorology*, (2a ed.). Springer.
- Friehe, C., Smith, J., Rieder, K., Huang, N., Giovanangeli, J., & Geernaert, G. (2001). Wind, stress and wave direction. In Jones, I. & Toba, Y., editors, *Wind Stress over the Ocean*, capítulo 12 (pp. 232–241 ). Cambridge University Press.
- Gabor, D. (1946). Theory of communication. *Journal of Institution of Electrical Engineers*, 93(3), 429–457.
- Galván-Pozos, D. E. (2020). Reporte técnico. Avances en el análisis de datos del Vector. Reporte técnico. Grupo de Oleaje del CICESE/CEMIE-Océano.
- García-Nava, H., Ocampo-Torres, F. J., & Hwang, P. A. (2012). On the parameterization of the drag coefficient in mixed seas. *Scientia Marina*, 76(S1), 177–186. <https://doi.org/10.3989/scimar.03615.19F>.

- García-Nava, H., Ocampo-Torres, F. J., Osuna, P., & Donelan, M. A. (2009). Wind stress in the presence of swell under moderate to strong wind conditions. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 114(C12008). <https://doi.org/10.1029/2009JC005389>.
- Geernaert, G. L. (1988). Measurements of the angle between the wind vector and wind stress vector in the surface layer over the North Sea. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 93(C7), 8215–8220. <https://doi.org/10.1029/JC093iC07p08215>.
- Geernaert, G. L., Hansen, F., Courtney, M., & Herbers, T. (1993). Directional attributes of the ocean surface wind stress vector. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 98(C9), 16571–16582. <https://doi.org/10.1029/93JC01439>.
- Graber, H. C., Terray, E. A., Donelan, M. A., Drennan, W. M., Leer, J. C. V., & Peters, D. B. (2000). Asis—a new air–sea interaction spar buoy: Design and performance at sea. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 17(5), 708 – 720. [https://doi.org/10.1175/1520-0426\(2000\)017<0708:AANASI>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0426(2000)017<0708:AANASI>2.0.CO;2).
- Grachev, A. A. & Fairall, C. W. (2001). Upward momentum transfer in the marine boundary layer. *Journal of Physical Oceanography*, 31(7), 1698 – 1711. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(2001\)031<1698:UMTITM>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(2001)031<1698:UMTITM>2.0.CO;2).
- Grachev, A. A., Fairall, C. W., Hare, J. E., Edson, J. B., & Miller, S. D. (2003). Wind stress vector over ocean waves. *Journal of Physical Oceanography*, 33(11), 2408 – 2429. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(2003\)033<2408:WSV00W>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(2003)033<2408:WSV00W>2.0.CO;2).
- Grare, L., Lenain, L., & Melville, W. K. (2013). Wave-coherent airflow and critical layers over ocean waves. *Journal of Physical Oceanography*, 43(10), 2156 – 2172. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-13-056.1>.
- Grupo de Oleaje (2019a). Ficha Técnica. Boya Oceanográfica y de Meteorología Marina, Isla Todos Santos BOMM2-ITS. Rev. 3.0. Grupo de Oleaje del CICESE/CEMIE-CIGOM.
- Grupo de Oleaje (2019b). Ficha Técnica. Boya Oceanográfica y de Meteorología Marina, Parque Nacional Arrecifes Alacranes BOMM3-ALC. Rev. 3.0. Grupo de Oleaje del CICESE/CEMIE-CIGOM.
- Grupo de Oleaje (2019c). Ficha Técnica. Boya Oceanográfica y de Meteorología Marina, zona de Perdido, Golfo de México BOMM1-PER. Rev. 2.0. Grupo de Oleaje del CICESE/CEMIE-CIGOM.
- Guan, C. & Xie, L. (2004). On the linear parameterization of drag coefficient over sea surface. *Journal of Physical Oceanography*, 34(12), 2847 – 2851. <https://doi.org/10.1175/JPO2664.1>.
- Hanley, K., Belcher, S., & Sullivan, P. (2011). Reply. *Journal of Physical Oceanography*, 41(9), 1814 – 1817. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-11-051.1>.
- Hanley, K. E. & Belcher, S. E. (2008). Wave-driven wind jets in the marine atmospheric boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 65(8), 2646 – 2660. <https://doi.org/10.1175/2007JAS2562.1>.
- Hanson, J. L. & Phillips, O. M. (2001). Automated analysis of ocean surface directional wave spectra. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 18(2), 277 – 293. [https://doi.org/10.1175/1520-0426\(2001\)018<0277:AA00SD>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0426(2001)018<0277:AA00SD>2.0.CO;2).
- Harris, D. L. (1966). The wave-driven wind. *Journal of Atmospheric Sciences*, 23(6), 688 – 693. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1966\)023<0688:TWDW>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1966)023<0688:TWDW>2.0.CO;2).

- Hasselmann, S., Brüning, C., Hasselmann, K., & Heimbach, P. (1996). An improved algorithm for the retrieval of ocean wave spectra from synthetic aperture radar image spectra. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 101(C7), 6615–16629. <https://doi.org/10.1029/96JC00798>.
- Herguera, J. C., Peters, E. M., Sheinbaum, J., Pérez-Brunius, P., Herzka, S. Z., Licea-Navarro, A., Ocampo-Torres, F., Aguirre-Macedo, M. L., Vidal-Martínez, V. M., García-Nava, H., Salgado, T., Romero-Centeno, R., Zavala-Hidalgo, J., Pardo-López, L., & Gracia, A. (2023a). Ocean monitoring, observation network and modelling of the Gulf of Mexico by CIGOM. *Frontiers in Marine Science*, 10. <https://doi.org/10.3389/fmars.2023.1091372>.
- Herguera, J. C., Peters, E. M., Sheinbaum, J., Pérez-Brunius, P., Magar, V., Allis, S. E., Aguirre-Macedo, M. L., Vidal-Martinez, V. M., Enriquez, C., Tapia, I. M., Vidal, X. F., Salgado, T., Romero-Centeno, R., Zavala-Hidalgo, J., Martínez, A. U., & Carrillo, L. (2023b). Ocean monitoring and prediction network for the sustainable development of the Gulf of Mexico and the Caribbean. *Oceanography*. <https://doi.org/10.5670/oceanog.2023.s1.18>.
- Holthuijsen, L. H. (2007). *Waves in oceanic and coastal waters*. Cambridge University Press.
- Hristov, T. & Ruiz-Plancarte, J. (2014). Dynamic balances in a wavy boundary layer. *Journal of Physical Oceanography*, 44(12), 3185 – 3194. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-13-0209.1>.
- Hwang, P. A. (2020). Surface wave spectral properties of centimeter to decameter wavelengths: variable spectral slope and non-equilibrium spectrum. *Ocean Dynamics*, 70(9), 1267 – 1279. <https://doi.org/10.1007/s10236-020-01390-4>.
- Högström, U., Smedman, A.-S., Semedo, A., & Rutgersson, A. (2011). Comments on “A global climatology of wind–wave interaction”. *Journal of Physical Oceanography*, 41(9), 1811 – 1813. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-10-05015.1>.
- Janota, A., Šimák, V., Nemeč, D., & Hrbček, J. (2015). Improving the precision and speed of Euler angles computation from low-cost rotation sensor data. *Sensors*, 15, 7016–7039. <https://doi.org/10.3390/s150307016>.
- Jones, I., Volkov, Y., Toba, Y., Larsen, S., & Huang, N. (2001). Overview. In Jones, I. & Toba, Y., editors, *Wind Stress over the Ocean*, capítulo 2 (pp. 35–53 ). Cambridge University Press.
- Kara, A. B., Metzger, E. J., & Bourassa, M. A. (2007). Ocean current and wave effects on wind stress drag coefficient over the global ocean. *Geophysical Research Letters*, 34(1). <https://doi.org/10.1029/2006GL027849>.
- Kumar, P. & Foufoula-Georgiou, E. (1997). Wavelet analysis for geophysical applications. *Reviews of Geophysics*, 35(4), 385–412. <https://doi.org/10.1029/97RG00427>.
- Kundu, P. K., Cohen, I. M., & Dowling, D. R. (2016). *Fluid Mechanics*, (6ta ed.). Academic Press.
- Large, W. G. & Pond, S. (1981). Open ocean momentum flux measurements in moderate to strong winds. *Journal of Physical Oceanography*, 11(3), 324 – 336. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1981\)011<0324:OOMFMI>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1981)011<0324:OOMFMI>2.0.CO;2).
- Lau, K.-M. & Weng, H. (1995). Climate signal detection using wavelet transform: How to make a time series sing. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 76(12), 2391 – 2402. [https://doi.org/10.1175/1520-0477\(1995\)076<2391:CSDUWT>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0477(1995)076<2391:CSDUWT>2.0.CO;2).
- Li, Q., Bou-Zeid, E., Vercauteren, N., & Parlange, M. (2018). Signatures of air–wave interactions over a large lake. *Boundary-Layer Meteorol*, 167, 445–468. <https://doi.org/10.1007/s10546-017-0329-z>.

- Lighthill, M. J. (1962). Physical interpretation of the mathematical theory of wave generation by wind. *Journal of Fluid Mechanics*, 14(3), 385–398. <https://doi.org/10.1017/S0022112062001305>.
- Liu, P. C. (1994). Wavelet spectrum analysis and ocean wind waves. In Foufoula-Georgiou, E. & Kumar, P., editors, *Wavelets in Geophysics*, (pp. 151–166 ). Academic Press.
- Mahrt, L., Vickers, D., Frederickson, P., Davidson, K., & Smedman, A.-S. (2003). Sea-surface aerodynamic roughness. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 108(C6), 3171. <https://doi.org/10.1029/2002JC001383>.
- Mallat, S. (2007). *A wavelet tour of signal processing. The Sparse way*, (3a ed.). Academic Press.
- Miles, J. W. (1957). On the generation of surface waves by shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 3(2), 185–204. <https://doi.org/10.1017/S0022112057000567>.
- Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, E., & Giard, D. (1982). Wave propagation and sampling theory—part ii: Sampling theory and complex waves. *GEOPHYSICS*, 42(2), 222–236. <https://doi.org/10.1190/1.1441329>.
- Najmi, A.-H. & Sadowsky, J. (1997). The continuous wavelet transform and variable resolution time-frequency analysis. *John Hopkins APL Technical Digest*, 18(1), 134–140.
- Ocampo-Torres, F. J., García-Nava, H., Durazo, R., Osuna, P., Díaz Méndez, G. M., & Graber, H. C. (2011). The intOA experiment: A study of ocean-atmosphere interactions under moderate to strong offshore winds and opposing swell conditions in the Gulf of Tehuantepec, Mexico. *Boundary-Layer Meteorology*, 138(3), 433–451. <https://doi.org/10.1007/s10546-010-9561-5>.
- Paulson, C. A. (1970). The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 9(6), 857 – 861. [https://doi.org/10.1175/1520-0450\(1970\)009<0857:TMROWS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0450(1970)009<0857:TMROWS>2.0.CO;2).
- Peláez-Zapata, D. S. & Larios-Rodríguez, D. (2021a). Reporte técnico. Corrección de la elevación de la superficie libre y la velocidad del viento debido al movimiento de la BOMM. Grupo de Oleaje del CICESE/CIGOM.
- Peláez-Zapata, D. S. & Larios-Rodríguez, D. (2021b). Reporte técnico. Estimación del espectro direccional del oleaje usando el WDM (Wavelet Directional Method). Grupo de Oleaje del CICESE/CIGOM.
- Phillips, O. (1977). *The Dynamics of the Upper Ocean*, (2a ed.). Cambridge University Press.
- Plant, W. J. (2009). The ocean wave height variance spectrum: Wavenumber peak versus frequency peak. *Journal of Physical Oceanography*, 39(9), 2382 – 2383. <https://doi.org/10.1175/2009JP04268.1>.
- Portilla, J., Ocampo-Torres, F. J., & Monbaliu, J. (2009). Spectral partitioning and identification of wind sea and swell. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 26(1), 107 – 122. <https://doi.org/10.1175/2008JTECH0609.1>.
- Potter, H. (2015). Swell and the drag coefficient. *Ocean Dynamics*, 65, 375 – 384. <https://doi.org/10.1007/s10236-015-0811-4>.
- Rieder, K. F., Smith, J. A., & Weller, R. A. (1994). Observed directional characteristics of the wind, wind stress, and surface waves on the open ocean. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 99(C11), 22589–22596. <https://doi.org/10.1029/94JC02215>.

- Shabani, B., Babanin, A. V., & Baldock, T. E. (2016). Observations of the directional distribution of the wind energy input function over swell waves. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 121. <https://doi.org/10.1002/2015JC011225>.
- Sievers, J., Papakyriakou, T., Larsen, S. E., Jammet, M. M., Rysgaard, S., Sejr, M. K., & Sørensen, L. L. (2015). Estimating surface fluxes using eddy covariance and numerical ogive optimization. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 15(4), 2081–2103. <https://doi.org/10.5194/acp-15-2081-2015>.
- Sjöblom, A. & Smedman, A.-S. (2002). The turbulent kinetic energy budget in the marine atmospheric surface layer. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 107(C10), 3142. <https://doi.org/10.1029/2001JC001016>.
- Soloviev, Y. & Kudryavtsev, V. (2010). Wind-speed undulations over swell: Field experiment and interpretation. *Boundary-Layer Meteorol*, 136, 341–363. <https://doi.org/10.1007/s10546-010-9506-z>.
- Stull, R. B. (1988). *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers.
- Sullivan, P. P., Edson, J. B., Hristov, T., & McWilliams, J. C. (2008). Large-eddy simulations and observations of atmospheric marine boundary layers above nonequilibrium surface waves. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 65(4), 1225 – 1245. <https://doi.org/10.1175/2007JAS2427.1>.
- Thompson, R. O. R. Y. (1979). Coherence significance levels. *Journal of Atmospheric Sciences*, 36(10), 2020 – 2021. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1979\)036<2020:CSL>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1979)036<2020:CSL>2.0.CO;2).
- Thomson, R. E. & Emery, W. J. (2024). *Data analysis methods in Physical Oceanography*, (4ta ed.). Elsevier.
- Toba, Y. (1972). Local balance in the air-sea boundary processes, I. On the growth process of wind waves. *Journal of the Oceanographical Society of Japan*, 28, 109–120. <https://doi.org/10.1007/BF02109772>.
- Toba, Y. (1973). Local balance in the air-sea boundary processes, III. On the spectrum of wind waves. *Journal of the Oceanographical Society of Japan*, 29, 209–220. <https://doi.org/10.1007/BF02108528>.
- Toba, Y. & Koga, M. (1986). A parameter describing overall conditions of wave breaking, white capping, sea-spray production and wind stress. In Monahan, E. & MacNiocaill, G., editors, *Oceanic Whitecaps and their Role in Air-Sea Exchange Processes*, (pp. 37–47 ). D. Reidel Publishing Company.
- Toba, Y., Smith, S., & Ebchi, N. (2001). Historical drag expressions. In Jones, I. & Toba, Y., editors, *Wind Stress over the Ocean*, capítulo 2 (pp. 35–53 ). Cambridge University Press.
- Torrence, C. & Compo, G. P. (1998). A practical guide to wavelet analysis. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 79(1), 61–78. [https://doi.org/10.1175/1520-0477\(1998\)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0477(1998)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2).
- Valenti, R. G., Dryanovski, I., & Xiao, J. (2015). Keeping a good attitude: A quaternion-based orientation filter for imu and margs. *Sensors*, 15, 19302–19330. <https://doi.org/10.3390/s150819302>.
- Veron, F., Melville, W. K., & Lenain, L. (2008). Wave-coherent air–sea heat flux. *Journal of Physical Oceanography*, 38(4), 788 – 802. <https://doi.org/10.1175/2007JP03682.1>.
- Vickers, D. & Mahrt, L. (1997). Quality control and flux sampling problems for tower and aircraft data. *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, 14(3), 512 – 526. [https://doi.org/10.1175/1520-0426\(1997\)014<0512:QCAFSP>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0426(1997)014<0512:QCAFSP>2.0.CO;2).

- Vincent, C. L., Graber, H. C., & Collins, C. O. (2020). Effect of swell on wind stress for light to moderate winds. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 77(11), 3759 – 3768. <https://doi.org/10.1175/JAS-D-19-0338.1>.
- Wanninkhof, R., Asher, W. E., Ho, D. T., Sweeney, C., & McGillis, W. R. (2009). Advances in quantifying air-sea gas exchange and environmental forcing. *Annual Review of Marine Science*, 1(Volume 1, 2009), 213–244. <https://doi.org/10.1146/annurev.marine.010908.163742>.
- Woolf, D. K. (2005). Parametrization of gas transfer velocities and sea-state-dependent wave breaking. *Tellus B: Chemical and Physical Meteorology*, 57(2), 87–94. <https://doi.org/10.3402/tellusb.v57i2.16783>.
- Wu, L., Rutgersson, A., & Nilsson, E. (2017). Atmospheric boundary layer turbulence closure scheme for wind-following swell conditions. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 74(7), 2363 – 2382. <https://doi.org/10.1175/JAS-D-16-0308.1>.
- Yelland, M. & Taylor, P. K. (1996). Wind stress measurements from the open ocean. *Journal of Physical Oceanography*, 26(4), 541 – 558. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1996\)026<0541:WSMFTO>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1996)026<0541:WSMFTO>2.0.CO;2).
- Young, I. & Babanin, A. (2009). The form of the asymptotic depth-limited wind-wave spectrum: Part II — The wavenumber spectrum. *Coastal Engineering*, 56(5), 534–542. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2008.11.005>.
- Young, I. R., Rosenthal, W., & Ziemer, F. (1985). A three-dimensional analysis of marine radar images for the determination of ocean wave directionality and surface currents. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 90(C1), 1049–1059. <https://doi.org/10.1029/JC090iC01p01049>.
- Zhao, D. & Li, M. (2019). Dependence of wind stress across an air-sea interface on wave states. *J Oceanogr*, 75(3), 207–223. <https://doi.org/10.1007/s10872-018-0494-9>.
- Zou, Z., Li, S., Huang, J., Li, P., Song, J., Zhang, J. A., & Wan, Z. (2020). Atmospheric boundary layer turbulence in the presence of swell: Turbulent kinetic energy budget, Monin–Obukhov similarity theory, and inertial dissipation method. *Journal of Physical Oceanography*, 50(5), 1213 – 1225. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-19-0136.1>.
- Zou, Z., Song, J., Li, P., Huang, J., Zhang, J. A., Wan, Z., & Li, S. (2019). Effects of swell waves on atmospheric boundary layer turbulence: A low wind field study. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 124(8), 5671–5685. <https://doi.org/10.1029/2019JC015153>.
- Zou, Z., Zhao, D., Zhang, J. A., Li, S., Cheng, Y., Lv, H., & Ma, X. (2018). The influence of swell on the atmospheric boundary layer under nonneutral conditions. *Journal of Physical Oceanography*, 48(4), 925 – 936. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-17-0195.1>.



# Nomenclatura

## Símbolos romanos

$a_{10}$	Coeficiente de la ecuación 44, $[\text{kg s}^{-2} \text{m}^{-2}]$
$a_{11}$	Coeficiente de la ecuación 44, $[\text{kg s m}^{-3}]$
$a_{12}$	Coeficiente de la ecuación 44, $[\text{kg m}^{-4}]$
$a_{13}$	Coeficiente de la ecuación 44, $[\text{kg s m}^{-5}]$
$a_{20}$	Coeficiente de la ecuación 44, $[\text{kg s}^{-2} \text{m}^{-2}]$
$a_{21}$	Coeficiente de la ecuación 44, $[\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-4}]$
$a_{22}$	Coeficiente de la ecuación 44, $[\text{kg m}^{-5}]$
$C_D$	Coeficiente de arrastre, $[-]$
$Co_{\eta u}$	Coespectro entre $\eta$ y $u$ , $[\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}]$
$Co_{\eta v}$	Coespectro entre $\eta$ y $v$ , $[\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}]$
$Co_{\eta w}$	Coespectro entre $\eta$ y $w$ , $[\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}]$
$Co_{uw}$	Coespectro entre $u$ y $w$ , $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{Hz}^{-2}]$
$Co_{vw}$	Coespectro entre $v$ y $w$ , $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{Hz}^{-2}]$
$Co_{\tilde{u}\tilde{w}}$	Coespectro entre $\tilde{u}$ y $\tilde{w}$ , $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{Hz}^{-1}]$
$Co_{\tilde{v}\tilde{w}}$	Coespectro entre $\tilde{v}$ y $\tilde{w}$ , $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{Hz}^{-1}]$
$c_p$	Celeridad de fase asociada al pico del espectro, $[\text{m s}^{-1}]$
$c_{p,i}$	Celeridad de fase asociada al máximo relativo $i$ , $[\text{m s}^{-1}]$
$D$	Profundidad, $[\text{m}]$
$f$	Frecuencia, $[\text{Hz}]$
$f_N$	Frecuencia de Nyquist, $[\text{Hz}]$
$\Delta f$	Tamaño del paso entre bandas de frecuencia, $[\text{Hz}]$
$f_p$	Frecuencia asociada al pico del espectro, $[\text{Hz}]$

$g$	Aceleración asociada a la gravedad, [ $\text{m s}^{-2}$ ]
$H_s$	Altura significativa de las olas, [m]
$\hat{\mathbf{i}}$	Vector unitario en la dirección del viento, [–]
$\tilde{\mathbf{i}}$	Vector unitario en la dirección de propagación del oleaje, [–]
$\hat{\mathbf{j}}$	Vector unitario en la dirección perpendicular a la dirección del viento, [–]
$\tilde{\mathbf{j}}$	Vector unitario en la dirección perpendicular a la dirección de propagación del oleaje, [–]
$K$	Coficiente en la ecuación 6b de Toba y Koga, [–]
$K_{\eta\eta}(k, \theta)$	Espectro direccional del oleaje en términos del número de onda, [ $\text{m}^3 \text{ grados}^{-1}$ ]
$k$	Número de onda, [ $\text{m}^{-1}$ ]
$k_p$	Número de onda asociado al pico del espectro, [ $\text{m}^{-1}$ ]
$k_{\text{CO}_2}$	Velocidad de transferencia de masa del $\text{CO}_2$ (también llamado coeficiente de transferencia de masa), [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$L_{MOST}$	Longitud de Obukhov, [m]
$m$	Pendiente espectral, [–]
$Og_{uw}$	Ojiva de $Co_{uw}$ , [ $\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$ ]
$Og_{vw}$	Ojiva de $Co_{vw}$ , [ $\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$ ]
$Og_{\tilde{u}\tilde{w}}$	Ojiva de $Co_{\tilde{u}\tilde{w}}$ , [ $\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$ ]
$Og_{\tilde{v}\tilde{w}}$	Ojiva de $Co_{\tilde{v}\tilde{w}}$ , [ $\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$ ]
$p$	Coficiente en la ecuación 6b de Toba y Koga, [–]
$Q_{\eta u}$	Cuadratura espectral entre $\eta$ y $u$ , [ $\text{m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$ ]
$Q_{\eta v}$	Cuadratura espectral entre $\eta$ y $v$ , [ $\text{m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$ ]
$Q_{\eta w}$	Cuadratura espectral entre $\eta$ y $w$ , [ $\text{m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$ ]
$R_{adj}^2$	Coficiente de determinación ajustado, [–]
$RNU_7$	Cambio porcentual de la rapidez del viento en la ventana, [–]

- $RN_{U_E}$  Cambio porcentual de la componente zonal de la velocidad del viento en la ventana,  $[-]$
- $RN_{U_N}$  Cambio porcentual de la componente meridional de la velocidad del viento en la ventana,  $[-]$
- $RN_{U_V}$  Cambio porcentual de la componente normal de la velocidad del viento en la ventana,  $[-]$
- $S_{\eta\eta}(f)$  Espectro omnidireccional del oleaje en términos de la frecuencia,  $[\text{m}^2 \text{Hz}^{-1}]$
- $S_{\eta\eta}(f, \theta)$  Espectro direccional del oleaje en términos de la frecuencia,  $[\text{m}^2 \text{Hz}^{-1} \text{grados}^{-1}]$
- $S_{\eta\eta}^*(f, \theta)$  Espectro direccional del oleaje en términos de la frecuencia según Phillips,  $[\text{m}^2 \text{Hz}^{-2} \text{grados}^{-1}]$
- $S_{\eta u}$  Espectro cruzado de  $\eta$  y  $u$ ,  $[\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}]$
- $S_{\eta v}$  Espectro cruzado de  $\eta$  y  $v$ ,  $[\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}]$
- $S_{\eta w}$  Espectro cruzado de  $\eta$  y  $w$ ,  $[\text{m}^2 \text{s}^{-1} \text{Hz}^{-1}]$
- $S_{\eta\eta}$  Espectro de potencia de la elevación de la superficie libre  $\eta$ ,  $[\text{m}^2 \text{Hz}^{-1}]$
- $S_{uu}$  Espectro de potencia de  $u$ ,  $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{Hz}^{-1}]$
- $S_{vv}$  Espectro de potencia de  $v$ ,  $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{Hz}^{-1}]$
- $S_{ww}$  Espectro de potencia de  $w$ ,  $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{Hz}^{-1}]$
- $S_{\tilde{u}\tilde{u}}$  Espectro de potencia de  $\tilde{u}$ ,  $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{Hz}^{-1}]$
- $S_{\tilde{v}\tilde{v}}$  Espectro de potencia de  $\tilde{v}$ ,  $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{Hz}^{-1}]$
- $S_{\tilde{w}\tilde{w}}$  Espectro de potencia de  $\tilde{w}$ ,  $[\text{m}^2 \text{s}^{-2} \text{Hz}^{-1}]$
- $T'$  Fluctuación instantánea de la temperatura respecto a la temperatura promedio,  $[\text{K}]$
- $T_p$  Periodo asociado al pico espectral de  $S_{\eta\eta}(f, \theta)$ ,  $[\text{s}]$
- $T_{k_p}$  Periodo asociado al pico espectral de  $K_{\eta\eta}(k, \theta)$ ,  $[\text{s}]$
- $\bar{T}$  Temperatura promedio del aire,  $[\text{K}]$
- $t$  Tiempo,  $[\text{s}]$
- $U$  Velocidad del viento,  $[\text{m s}^{-1}]$
- $\hat{U}$  Velocidad del viento normalizada en un marco de referencia orientado a la dirección de propagación del oleaje,  $[-]$

$U_E$	Componente zonal de la velocidad del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$U_N$	Componente meridional de la velocidad del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$U_U$	Componente normal al elipsoide terrestre de la velocidad del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$U_x$	Componente horizontal de la velocidad del viento en la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$U_y$	Componente horizontal de la velocidad del viento perpendicular a la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$U_z$	Componente vertical de la velocidad del viento perpendicular a la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$U_{10,N}$	Rapidez promedio del viento a 10 metros de altura en condiciones normales de estabilidad atmosférica, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$U_{10}$	Rapidez promedio del viento a 10 metros de altura, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$U_7$	Rapidez promedio del viento a 7 metros de altura, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$U_{\hat{x}}$	Componente de la velocidad del viento en la dirección del viento antes de ser corregida por la inclinación de la boya, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\bar{U}_E$	Promedio de la componente zonal de la velocidad del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\bar{U}_N$	Promedio de la componente meridional de la velocidad del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\bar{U}_U$	Promedio de la componente normal al elipsoide terrestre de la velocidad del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\bar{U}_x$	Promedio de la componente horizontal de la velocidad del viento en la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\bar{U}_y$	Promedio de la componente horizontal de la velocidad del viento perpendicular a la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\bar{U}_z$	Promedio de la componente vertical de la velocidad del viento perpendicular a la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\bar{U}_{\hat{x}}$	Promedio de la componente de la velocidad del viento en la dirección del viento antes de ser corregida por la inclinación de la boya, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\hat{U}_{\hat{x}}$	Componente del viento normalizado en la dirección de propagación del oleaje (también conocida como inverso de la edad de la ola), [-]
$\hat{U}_{\hat{y}}$	Componente del viento normalizado perpendicular a la dirección de propagación del oleaje, [-]

$u_*$	Velocidad de fricción, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$u$	Componente horizontal de las fluctuaciones de velocidad del viento en la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$u'$	Componente horizontal de las fluctuaciones de velocidad del viento asociadas a la turbulencia en la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\tilde{u}$	Componente horizontal de las fluctuaciones de velocidad del viento coherentes con las olas en la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$v$	Componente horizontal de las fluctuaciones de velocidad del viento perpendicular a la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$v'$	Componente horizontal de las fluctuaciones de velocidad del viento asociadas a la turbulencia perpendicular a la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\tilde{v}$	Componente horizontal de las fluctuaciones de velocidad del viento coherentes con las olas perpendicular a la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$w$	Componente vertical de las fluctuaciones de velocidad del viento perpendicular a la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$w'$	Componente vertical de las fluctuaciones de velocidad del viento asociadas a la turbulencia perpendicular a la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\tilde{w}$	Componente vertical de las fluctuaciones de velocidad del viento coherentes con las olas perpendicular a la dirección del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$X$	Parámetro de la ecuación 43, [-]
$z$	Altura, [m]
$z_0$	Rugosidad aerodinámica (también conocida como altura virtual aerodinámica), [m]

### Símbolos griegos

$\alpha$	Dirección relativa del esfuerzo del viento respecto al viento, [grados]
----------	---

$\gamma_{\eta u}^2$	Coherencia espectral entre $\eta$ y $u$ , [—]
$\gamma_{\eta v}^2$	Coherencia espectral entre $\eta$ y $v$ , [—]
$\gamma_{\eta w}^2$	Coherencia espectral entre $\eta$ y $w$ , [—]
$\delta U_E$	Cambio de la componente zonal de la velocidad promedio del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\delta U_N$	Cambio de la componente meridional de la velocidad promedio del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\delta U_U$	Cambio de la componente normal de la velocidad promedio del viento, [ $\text{m s}^{-1}$ ]
$\varepsilon$	Coefficiente de Charnok, [—]
$\eta$	Elevación de la superficie libre, [m]
$\theta_{\text{tilt}}$	Ángulo roll de inclinación media de la BOMM durante el intervalo ventana, [grados]
$\theta$	Dirección relativa en el espectro direccional del oleaje, [grados]
$\theta_p$	Dirección relativa del oleaje respecto al viento, [grados]
$\theta_{p,i}$	Dirección relativa de propagación de la energía asociada al máximo relativo $i$ , [grados]
$\kappa$	Constante de von Kármán, [—]
$\mu_a$	Viscosidad dinámica del aire, [ $\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-1}$ ]
$\rho_a$	Densidad del aire, [ $\text{kg m}^{-3}$ ]
$\sigma_\eta^2$	Varianza estadística del nivel de la superficie libre, [ $\text{m}^2$ ]
$\check{\tau}_{ij}$	Tensor de esfuerzo del viento, [Pa]
$\tau$	Esfuerzo del viento, [Pa]
$\tau_{vis}$	Esfuerzo del viento asociado a la disipación viscosa, [Pa]
$\tau'$	Esfuerzo del viento asociado a la turbulencia, [Pa]
$\bar{\tau}$	Esfuerzo del viento coherente con las olas, [Pa]
$\bar{\tau}$	Promedio del esfuerzo del viento, [Pa]
$\tau_x$	Componente del esfuerzo del viento alineada al viento, [Pa]
$\tau_{\bar{x}}$	Componente del esfuerzo del viento en la dirección de propagación del oleaje, [Pa]

$\tau'_{\tilde{x}}$	Componente del esfuerzo del viento turbulento en la dirección de propagación del oleaje, [Pa]
$\tilde{\tau}_{\tilde{x}}$	Componente del esfuerzo del viento coherente con las olas en la dirección de propagación del oleaje, [Pa]
$\tau_y$	Componente del esfuerzo del viento perpendicular al viento, [Pa]
$\tau_{\tilde{y}}$	Componente del esfuerzo del viento perpendicular a la dirección de propagación del oleaje, [Pa]
$\tau'_{\tilde{y}}$	Componente del esfuerzo del viento turbulento perpendicular a la dirección de propagación del oleaje, [Pa]
$\tilde{\tau}_{\tilde{y}}$	Componente del esfuerzo del viento coherente con las olas perpendicular a la dirección de propagación del oleaje, [Pa]
$\bar{\tau}_{\tilde{x}}$	Promedio de la componente del esfuerzo del viento en la dirección de propagación del oleaje, [Pa]
$\Psi_{MOST}$	Parámetro de corrección diabático para la transferencia de momento, [—]
$\psi_{wind}$	Dirección del viento relativa al Este en sentido a antihorario, [grados]
$\psi_{wind}^{Met}$	Dirección del viento en la convención Meteorológica, [grados]
$\psi_{wind}^{Ocg}$	Dirección del viento en la convención Oceanográfica, [grados]
$\zeta$	Parámetro de estabilidad de Obukhov, [—]

### Subíndices

$x$	Componente en dirección del viento
$y$	Componente en dirección perpendicular horizontal a la dirección del viento
$z$	Componente en dirección perpendicular vertical a la dirección del viento
$\tilde{x}$	Componente en la dirección de propagación del oleaje
$\tilde{y}$	Componente en dirección perpendicular a la dirección de propagación del oleaje
$E$	Componente zonal
$N$	Componente meridional
$U$	Componente normal al elipsoide terrestre

### Símbolos exclusivos del Anexo A

$a$	Aceleración líneal
$B$	Campo de inducción magnética
$g$	Aceleración asociada a la gravedad
$i, j, k$	Cuaterniones básicos
$L$	Vector de posición de un sensor
$p$	Cuaternión
$q$	Cuaternión
$q^*$	Cuaternión conjugado
$q_v$	Vector de componentes imaginarias del cuaternión
${}^A_B q$	Cuaternión de rotación del MR $A$ al MR $B$
$q_0$	Componente real del cuaternión
$q_1, q_2$ y $q_3$	Componentes imaginarias del cuaternión
$R_B^A$	Matriz de rotación para pasar de un MR $A$ a un MR $B$
$R_{123}(\phi, \theta, \psi)$	Matriz de rotación en la secuencia 123
$R_x$	Matriz de rotación del eje $x$
$R_y$	Matriz de rotación del eje $y$
$R_z$	Matriz de rotación del eje $z$
$r_{23}$	Elemento de la matriz de rotación $R_{123}$
$v_v$	Vector de velocidad expresado como un cuaternión
${}^A v$	Vector de velocidad en el MR $A$
$\Delta t$	Tiempo de muestreo
$\dot{\theta}$	Velocidad angular de <i>pitch</i>
$\theta$	Ángulo <i>pitch</i>



$\theta_{acc}$	Ángulo <i>pitch</i> calculado usando aceleraciones axiales
$\dot{\phi}$	Velocidad angular de <i>roll</i>
$\phi$	Ángulo <i>roll</i>
$\phi_{acc}$	Ángulo <i>roll</i> calculado usando aceleraciones axiales
$\dot{\psi}$	Velocidad angular de <i>yaw</i>
$\psi$	Ángulo <i>yaw</i>
$\psi_{mag}$	Ángulo <i>yaw</i> calculado usando un magnetómetro
$\Omega$	Velocidad angular de la boya
$\omega_x$	Velocidad del IMU angular respecto al eje <i>x</i>
$\omega_y$	Velocidad del IMU angular respecto al eje <i>y</i>
$\omega_z$	Velocidad del IMU angular respecto al eje <i>z</i>

### **Símbolos exclusivos del Anexo B**

$A$	Amplitud de la elevación de la superficie libre
$a$	Parámetro de escala de la transformada de <i>wavelet</i>
$f_0$	Frecuencia central de la onduleta madre
$f_p$	Frecuencia discretizada
$f_s$	Frecuencia de muestreo
$H$	Función ventana Hamming
$J$	Vector de unos
$k$	Función del número de onda del oleaje en el dominio tiempo-frecuencia
$k_q$	Número de onda distretizado
$N_j$	Número de pasos al discretizar $t$
$N_l$	Número de bandas al discretizar $\theta$
$N_p$	Número de bandas al discretizar $f$

$N_q$	Número de bandas al discretizar $k$
$N_{ws}$	Número de alambres de capacitancia en el arreglo
$r_a$	Distancia al centro del arreglo del alambre $a$
$r_b$	Distancia al centro del arreglo del alambre $b$
$r_{ab}$	Distancia entre los alambres $a$ y $b$
$t_j$	Tiempo discretizado
$W$	Transformada de <i>wavelet</i>
$\mathbf{X}_{ab}$	Matriz de separación de los alambres
$\mathbf{x}_a$	Vector de posición del alambre $a$
$\mathbf{x}_b$	Vector de posición del alambre $b$
$[x_a, y_a]$	Coordenadas de posición del alambre $a$
$[x_b, y_b]$	Coordenadas de posición del alambre $b$
$\alpha_a$	Ángulo del alambre $a$
$\alpha_b$	Ángulo del alambre $b$
$\alpha_{ab}$	Ángulo entre los alambres $a$ y $b$
$\Delta\theta$	Tamaño del intervalo de la dirección del espectro direccional
$\Delta f_p$	Tamaño del intervalo de frecuencia del espectro direccional
$\Delta k_q$	Tamaño del intervalo del número de onda del espectro direccional
$\Delta t$	Tiempo de muestreo
$\eta$	Señal en el espacio temporal
$\hat{\eta}$	Señal en el espacio de frecuencias (transformada de Fourier de $\eta$ )
$\Theta$	Función de la dirección del número de onda del oleaje en el dominio tiempo-frecuencia
$\theta_l$	Dirección del espectro direccional de las olas discretizada
$\iota$	Número de octava

$\xi$	Número de voz dentro de la octava
$\sigma$	Parámetro de ancho de la Gaussiana
$\tau$	Parámetro de traslación de la transformada de <i>wavelet</i>
$\Upsilon$	Función ventana de suavizado en dos dimensiones
$\nu$	Total de voces en una octava
$\phi_{ab}$	Matriz de desfase de los alambres
$\phi_i$	Fase de la señal estimada con la transformada de wavelet del alambre $i$
$\phi_a$	Fase del alambre $a$
$\phi_b$	Fase del alambre $b$
$\phi_{ab}$	Diferencia de fase entre el alambre $a$ y el $b$
$\psi$	Onduleta de Morlet (onduleta madre)
$\psi^*$	Complejo conjugado de la onduleta de Morlet (onduleta madre)
$\hat{\psi}$	Transformada de Fourier de la onduleta de Morlet (onduleta madre)
$\omega$	Frecuencia angular
$\omega_0$	Frecuencia angular central

### **Acrónimos**

ADV	Velocímetro sónico Doppler (por sus siglas en inglés)
AR	Arrecife de Alacranes (por sus siglas en inglés)
ASIS	<i>Air Sea Interaction Spar</i> (por sus siglas en inglés)
BOMM	Boya Oceanográfica y de Meteorología Marina
CCR	Control de calidad de rutina
CTD	Medidor de conductividad, temperatura y profundidad (por sus siglas en inglés)
ENU	Marco de referencia geográfico Este-Norte-Arriba (por sus siglas en inglés)
IMU	Unidad de medición de movimiento inercial (por sus siglas en inglés)

LDM Ley del muro

MOST Teoría de similitud de Monin-Obukhov

MR Marco de referencia

NED Marco de referencia geográfico Norte-Este-Abajo (por sus siglas en inglés)

PDF Función de densidad de probabilidad (por sus siglas en inglés)

PE Escarpe de Perdido (por sus siglas en inglés)

RMSE Raíz del error cuadrático medio (por sus siglas en inglés)

STFT Transformada de Fourier de corta duración (por sus siglas en inglés)

TSI Islas de Todos Santos (por sus siglas en inglés)

WBL Teoría de la capa límite del oleaje (Wave Boundary Layer Theory)

WDM *Wavelet directional method*

# Anexos

## Anexo A. Corrección de las mediciones por el movimiento de la boya

---

Las mediciones de velocidad, aceleración y posición realizadas por los sensores instalados en una boya superficial estarán sujetas al movimiento del oleaje, el viento y las mareas, por mencionar algunos. Estas mediciones tienen un marco de referencia (MR) en movimiento y deben corregirse y transformarse a un MR global y relativamente inmóvil. De los seis grados de libertad de movimiento que tiene la boya, es la arfada (*heave* en inglés) el más importante, más sin embargo, los otros 5 grados: avance (*surge*), deriva (*sway*), cabeceo (*pitch*), alabeo (*roll*) y guiñada (*yaw*) también deben de ser tomados en cuenta.

A cada una de las BOMM utilizadas en este estudio se le ha instalado una unidad de medición inercial (IMU) para registrar los movimientos de la boya en un MR global, este sensor es el SBG Ekinox 2-M (al que se llamará en este anexo Ekinox o el *IMU* o *IMU-Ekinox* en itálicas). Los IMU son componentes electrónicos que incluyen las funciones de acelerómetro (que mide las tres componentes de la aceleración), giroscopio (mide velocidades angulares), y en algunos casos, magnetómetro (mide la intensidad del campo magnético terrestre). En el caso del Ekinox, éste cuenta con un acelerómetro y un giroscopio, con tasa de muestreo de 100 Hz. Las mediciones registradas por un IMU se referencian a un MR terrestre comúnmente llamado *NED* (North-East-Down), donde el eje  $x$  apunta al norte, el  $y$  al este y el  $z$  hacia abajo; el MR *NED* se debe de calibrar usando el campo magnético terrestre y la aceleración gravitacional (que se explica en la sección A.2.2). Otros instrumentos en la BOMM cuentan con IMU instalado en su electrónica, ellos son: el Nortek Vector (acelerómetro, giroscopio y magnetómetro, con tasa de muestreo de 64 Hz); el Nortek Signature 1000 (acelerómetro, giroscopio, y magnetómetro, con tasa de muestreo de 1 Hz); el Magnetómetro Honeywell (magnetómetro con tasa de muestreo de 5 Hz, instalado únicamente en las campañas AR y TSI); y la Maximet (Magnetómetro, tasa de muestreo de 1 Hz). Los instrumentos que tienen mayor tasa de muestreo y que serán utilizados para calcular la orientación de la BOMM serán el Ekinox, el Vector y el magnetómetro Honeywell en las campañas donde fue instalado, otros instrumentos serán utilizados para cotejar las mediciones. Este anexo es un complemento a los reportes realizados en CICESE por Galván-Pozos (2020) y Peláez-Zapata & Larios-Rodríguez (2021a).

### A.1. Ángulos de Euler, matrices de rotación y cuaterniones

Para entender como se obtiene la orientación de la BOMM de las mediciones del IMU primero se realizará una breve explicación de los ángulos de Euler, las matrices de rotación y los cuaterniones. Se

definen los ángulos de Euler (también llamados ángulos de Euler para navegación, ángulos de Cárden o ángulos de Tait-Bryan): *roll*, *pitch* y *yaw* como las desviaciones del MR local (en este caso el IMU en cuestión) con respecto a un MR global *NED*. Cuando los valores de los tres ángulos de Euler son cero, el MR del IMU está perfectamente alineado con el MR *NED* global. Si se conocen los ángulos, se puede rotar un vector de velocidad de un MR *NED*,  ${}^{NED}\mathbf{v}$  a uno *local* al multiplicarlo por su matriz de rotación:

$${}^{local}\mathbf{v} = R_{NED}^{loc} {}^{NED}\mathbf{v}, \quad (47)$$

donde  $R_{NED}^{loc}$  es la matriz de rotación para cambiar del MR *NED* al MR *local*. Para hacer el cambio inverso y pasar del MR *NED* al *local*, se multiplica por la matriz de rotación inversa:

$${}^{NED}\mathbf{v} = R_{loc}^{NED} {}^{local}\mathbf{v} = \left[ R_{NED}^{loc} \right]^{-1} {}^{local}\mathbf{v} = \left[ R_{NED}^{loc} \right]^T {}^{local}\mathbf{v}. \quad (48)$$

Como se puede observar en la ecuación anterior, la matriz de rotación inversa es igual a su transpuesta, esto es una de propiedad de las matrices de rotación.

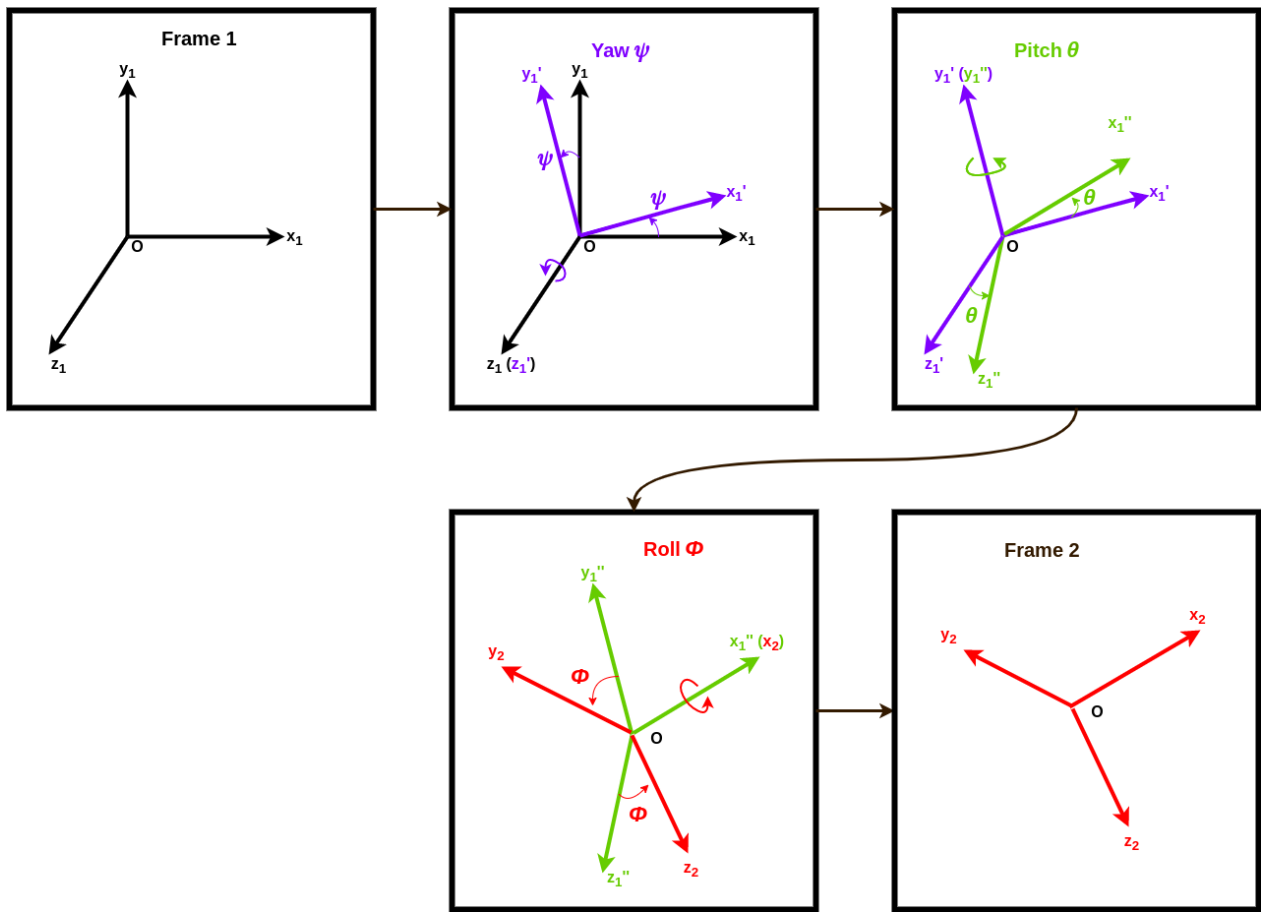
### A.1.1. Matrices de rotación

En la convención matemática los ángulos aumentan su valor cuando el giro es en sentido antihorario. Partiendo de este principio, se puede rotar el marco de referencia de un vector en sentido antihorario usando las siguientes matrices de rotación; cada una de ellas rota uno de los ejes del MR, modificando el plano formado por los otros dos ejes ortogonales. De modo que para rotar el MR con respecto al eje *x* (plano *yz*) se utiliza

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (49)$$

donde  $\phi$  es el ángulo *roll*. Para rotar el MR con respecto al eje *y* (plano *xz*) se usa

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (50)$$



**Figura 14.** Secuencia de rotación 1-2-3 para cambiar de marco de referencia usando los ángulos de Euler: *roll*  $\phi$ , *pitch*  $\theta$  y *yaw*  $\psi$ . Imagen tomada de Deshpande (2020).

donde  $\theta$  es el ángulo *pitch*. Y finalmente, para rotar el MR con respecto al eje  $z$  (plano  $xy$ ) la matriz de rotación se define

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

donde  $\psi$  es el ángulo *yaw*.

Se puede describir completamente la rotación de un cuerpo en el espacio realizando tres rotaciones secuenciales de dos o tres de sus ejes, la más común de ellas es la desarrollada por Gerolamo Cardano,



llamada secuencia 1-2-3 (Figura 14), donde la matriz general de rotación es:

$$R_{123}(\phi, \theta, \psi) = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & c_\theta s_\psi & -s_\theta \\ s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & s_\phi c_\theta \\ c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}; \quad (52)$$

donde  $c$  y  $s$  denotan ya sea el coseno o el seno del ángulo correspondiente. Y de los valores de la matriz de rotación en la secuencia 1-2-3 (ecuación 52), se pueden calcular los ángulos de Euler por medio de las siguientes expresiones:

$$\phi = \arctan2\left(\frac{r_{23}}{r_{33}}\right), \quad (53)$$

$$\theta = -\arcsin(r_{13}), \quad (54)$$

$$\psi = \arctan2\left(\frac{r_{12}}{r_{11}}\right), \quad (55)$$

Conviene destacar que la secuencia de las rotaciones es importante y los valores de los ángulos obtenidos no son intercambiables, por ejemplo la secuencia 3-2-1, definida como  $R_{321} = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$ , donde  $R_{321} \neq R_{123}$  y los ángulos de Euler no son correspondientes al usar una o la otra. Otro ejemplo es la secuencia de rotación 3-1-3, donde  $R_{313} = R_x(\psi')R_y(\theta')R_x(\phi')$ , llamada también como secuencia clásica de Euler o convención- $x$ . La secuencia de rotación 3-1-3 es utilizada comúnmente en astrofísica para describir la rotación de cuerpos celestes, donde a los ángulos  $\psi'$ ,  $\theta'$  y  $\phi'$  se les denominan: ángulo de rotación, ángulo de nutación y ángulo de precesión, respectivamente. Por último, los ángulos de Euler y las matrices de rotación tienen la desventaja de que, dependiendo los valores de los ángulos se pueden presentar singularidades (se pierde un grado de libertad), fenómeno conocido como “bloqueo del cardán” (*gimbal lock*). Para la secuencia 1-2-3, el “bloqueo del cardán” ocurre cuando el valor del ángulo pitch es igual a  $90^\circ$ , mientras que, para la secuencia 3-1-3 ocurre cuando el ángulo de nutación es igual a cero. Con el fin de resolver el problema de las singularidades en los ángulos de Euler se idearon los cuaterniones, que además ofrecen otras ventajas como precisión y velocidad en el cómputo de la orientación, de los cuales se hablará en la siguiente sección. Para más información sobre las secuencias de rotación se recomienda leer Diebel (2006).

### A.1.2. Cuaterniones

Los cuaterniones son análogos a los números complejos, pero en lugar de tener un número imaginario se tienen 3:  $i$ ,  $j$  y  $k$ . Estos números imaginarios, llamados cuaterniones básicos, siguen la multiplicación de Cayley,  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ . Así, el cuaternión  $\mathbf{q}$  se puede expresar como  $\mathbf{q} = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$  o por practicidad expresarlo como un vector de cuatro dimensiones:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}, \quad (56)$$

Cabe resaltar que los cuaterniones son vectores unitarios, tal que  $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1$ . La multiplicación de dos cuaterniones está definida por la siguiente operación

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 p_0 - \mathbf{q}_v^T \cdot \mathbf{p}_v \\ q_0 \mathbf{p}_v + p_0 \mathbf{q}_v - \mathbf{q}_v \times \mathbf{p}_v \end{bmatrix}, \quad (57)$$

donde  $\mathbf{q}_v$  es el vector de la parte imaginaria del cuaternión tal que:

$$\mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (58)$$

También se puede definir el cuaternión conjugado donde se multiplican por  $-1$  las tres componentes imaginarias, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Si se desea rotar un vector  $\vec{v}$  por medio de cuaterniones de un MR  $A$  a uno  $B$  usando el cuaternión de rotación  ${}^B_A \mathbf{q}$ , se realiza la siguiente operación:

$${}^B \mathbf{v}_q = {}^B_A \mathbf{q} \otimes {}^A \mathbf{v}_q \otimes {}^B_A \mathbf{q}^* \quad (60)$$

donde  ${}^A\mathbf{v}_q$  es el vector que se desea rotar expresado en cuatro dimensiones, de modo que sea posible la multiplicación de cuaterniones, tal que

$$\mathbf{v}_q = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Sin embargo, se puede utilizar una matriz de rotación calculada con las componentes de los cuaterniones:

$${}^B\mathbf{v} = R(\mathbf{q}) {}^A\mathbf{v}, \quad (62)$$

donde

$$R(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

Finalmente, se muestran las ecuaciones para convertir los ángulos de Euler en la secuencia 1-2-3 al cuaternión correspondiente:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{\phi/2} c_{\theta/2} c_{\psi/2} + s_{\phi/2} s_{\theta/2} s_{\psi/2} \\ -c_{\phi/2} s_{\theta/2} s_{\psi/2} + s_{\phi/2} c_{\theta/2} c_{\psi/2} \\ c_{\phi/2} s_{\theta/2} c_{\psi/2} + s_{\phi/2} c_{\theta/2} s_{\psi/2} \\ c_{\phi/2} c_{\theta/2} s_{\psi/2} - s_{\phi/2} s_{\theta/2} c_{\psi/2} \end{bmatrix}, \quad (64)$$

y para convertir el cuaternión a ángulos de Euler usando:

$$\phi = \arctan2\left(\frac{2(q_2q_3 + q_0q_1)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}\right), \quad (65)$$

$$\theta = -\arcsin(2(q_1q_3 - q_0q_2)), \quad (66)$$

$$\psi = \arctan2\left(\frac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}\right), \quad (67)$$

no está de más enfatizar que para otras secuencias de rotación las ecuaciones 64 a 67 serán diferentes.

Nuevamente, referirse a Diebel (2006) para más información.

## A.2. Estimación de la orientación de la BOMM en el marco de referencia terrestre por medio de giroscopios, acelerómetros y magnetómetros

Para estimar los ángulos de Euler y/o los cuaterniones usando un giroscopio se parte de las componentes de la velocidad angular registradas por el mismo, en cada uno de los ejes coordenados a las que denominaremos  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  y  $\omega_z$ , referidas al MR del *IMU*. Al integrar en el tiempo la velocidad angular, se obtienen los ángulos de Euler en el tiempo correspondiente. En el trabajo de Janota et al. (2015) se muestran tres métodos para realizar esta integración: actualizando la matrices de rotación en cada paso del tiempo; integrando numéricamente la velocidad angular para obtener directamente los ángulos de Euler; y finalmente, el método de recalculer los cuaterniones en cada iteración en el tiempo. A continuación se describen los dos últimos métodos, descartando el primero al ser más complicado de programar. La precisión de estos métodos difiere enormemente y depende de la tasa de muestreo del giroscopio. Janota et al. (2015) hace un análisis del error de los tres métodos y concluye que con una tasa de muestreo de 100 Hz, el error en el método de integración de los ángulos de Euler puede ser mayor a  $180^\circ$ , mientras que en el método de actualización de cuaterniones es aproximadamente de  $0.1^\circ$ . A continuación se describe el método de integración usando ángulos de Euler y otro método basado en cuaterniones.

### A.2.1. Integración de la velocidad angular

Para integrar los ángulos de Euler, según el método propuesto por Janota et al. (2015), primero se convierten las velocidades angulares en el sistema de referencia local a uno global:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin \phi \sin \theta}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi \sin \theta}{\cos \theta} \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad (68)$$

donde  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  y  $\dot{\psi}$  son las velocidades angulares en un MR *NED*. Las velocidades angulares en el MR *NED* se integran en cada paso del tiempo, con el método de integración de Euler o la regla del trapecio se realiza la integración numérica de cada uno de los ángulos. Las ecuaciones para el *roll* son:

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \dot{\phi}_i \Delta t, \quad (69a)$$

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \left( \dot{\phi}_{i+1} + \dot{\phi}_i \right) \frac{\Delta t}{2}, \quad (69b)$$

donde  $i$  es el número de iteración en el tiempo y  $\Delta t$  es el tiempo de muestreo.

Para realizar la integración de la velocidad angular registrada por el giroscopio por medio de cuaterniones, se sigue el método propuesto por Valenti et al. (2015). En él, una vez calculado el cuaternión  $\mathbf{q}_i$  en el tiempo  $i$ , se expresa el cuaternión conjugado de la velocidad angular medida por en IMU de la siguiente manera:

$$\omega_{\mathbf{q},i}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{x,i} \\ -\omega_{y,i} \\ -\omega_{z,i} \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Se puede apreciar que esta expresión se basa en las ecuaciones 59 y 61. Después se realiza la siguiente operación análoga a la regla de integración de Euler para calcular el cuaternión en el siguiente paso del tiempo  $\mathbf{q}_{gyro,i+1}$ :

$$\hat{\mathbf{q}}_{gyro,i+1} = \mathbf{q}_i - \frac{\Delta t}{2} \omega_{\mathbf{q},i}^* \otimes \mathbf{q}_i. \quad (71)$$

Es posible que en esta operación el cuaternión  $\hat{\mathbf{q}}_{gyro,i+1}$  no sea unitario, por lo que es necesario realizar una normalización:

$$\mathbf{q}_{gyro,i+1} = \frac{\hat{\mathbf{q}}_{gyro,i+1}}{\|\hat{\mathbf{q}}_{gyro,i+1}\|}. \quad (72)$$

### A.2.2. Compensación de señal usando datos de magnetómetro y acelerómetro

Si las mediciones obtenidas por un giroscopio estuvieran exentas de errores se podría obtener la orientación de la BOMM únicamente con las ecuaciones mostradas en la sección A.2.1; sin embargo, los giroscopios son ruidosos y sensibles a vibraciones, lo que lleva a un error tipo “bola de nieve” que va creciendo a lo largo del tiempo, a este fenómeno se le denomina como “divergencia de integración”. Para minimizar este fenómeno se necesitan mediciones realizadas por otros sensores, dígame un acelerómetro y alguno de estos dos: un magnetómetro o un arreglo de antenas de Sistema de Posicionamiento Global (GPS).

Por medio del acelerómetro se estiman los ángulos *roll*  $\phi$  y *pitch*  $\theta$ , al comparar las desviaciones de la

gravedad en los planos  $xz$  y  $yz$  de MR del *IMU* respecto con el MR *NED*, donde el vector de la gravedad está alineado al eje  $z$ . Los ángulos de inclinación del plano horizontal se calculan de la siguiente manera:

$$\phi_{acc} = \arctan\left(\frac{-a_y}{-a_z}\right), \quad (73)$$

$$\theta_{acc} = \arctan\left(\frac{a_x}{\sqrt{a_y^2 + a_z^2}}\right), \quad (74)$$

donde  $\phi_{acc}$  y  $\theta_{acc}$  son el *roll* y el *pitch* calculados usando las mediciones registradas por el acelerómetro, siendo  $a_x$ ,  $a_y$  y  $a_z$  las aceleraciones lineares en cada uno de los ejes coordenados del MR *IMU*. El ángulo *yaw* calculado con el magnetómetro  $\psi_{mag}$ , se estima por medio de las mediciones de las componentes de la inducción magnética  $\mathbf{B}_x$  y  $\mathbf{B}_y$ :

$$\psi_{mag} = \arctan\left(\frac{-\mathbf{B}_y}{\mathbf{B}_x}\right) + \delta_m, \quad (75)$$

donde  $\delta_m$  es la declinación magnética. En nuestro caso,  $\psi_{mag}$  es un dato ya calculado por el magnetómetro.

Con los tres ángulos de Euler calculados con el acelerómetro y el magnetómetro se pueden transformar por medio de la ecuación 64 a un cuaternión  $\mathbf{q}_K$ . Este cuaternión se debe ponderar con el obtenido de las ecuaciones 71 y 72, usando el parámetro  $K$ , que tendrá el valor de cero si el cálculo de la orientación de la BOMM depende únicamente del giroscopio. En la práctica, este valor será mucho menor de uno,  $K \ll 1$  de modo que

$$\hat{\mathbf{q}}_{i+1} = (1 - K)\mathbf{q}_{gyro,i+1} + K\mathbf{q}_{K,i+1}. \quad (76)$$

Esta ponderación no elimina el ruido en las mediciones del giroscopio, más bien evita la divergencia por integración en periodos largos de tiempo causada por desviaciones de los valores reales de los ángulos (*offset* de los valores reales), tal como lo afirma Janota et al. (2015). Finalmente, se debe normalizar el cuaternión  $\hat{\mathbf{q}}_{i+1}$  antes de pasar al cálculo del siguiente paso de tiempo:

$$\mathbf{q}_{i+1} = \frac{\hat{\mathbf{q}}_{i+1}}{\|\hat{\mathbf{q}}_{i+1}\|}, \quad (77)$$

siendo  $\mathbf{q}_{i+1}$  el cuaternión normalizado ponderando las señales del giroscopio, acelerómetro y magnetómetro en el siguiente instante de tiempo. Un método distinto, descrito por Peláez-Zapata & Larios-Rodríguez (2021a), puede ser utilizado para estimar la orientación de la BOMM.

### A.2.3. Algoritmo para calcular la corrección asociada al movimiento

A continuación se muestra el algoritmo de cálculo de la orientación de la BOMM usando el Ekinox como sensor de movimiento principal y ya sea el magnetómetro o el IMU en el Vector como sensor de apoyo para el ángulo *yaw* de la BOMM.

1. Calcular  $\mathbf{q}_K$  para todos los valores de  $i$ .
  - 1.1 Usando los valores de aceleración lineal del Ekinox se calculan  $\phi_{acc}$  y  $\theta_{acc}$  usando las ecuaciones 73 y 74.
  - 1.2 Se calcula el valor del ángulo  $\psi_{mag}$  en cualquiera de los dos casos.
    - Si se cuenta con magnetómetro Honeywell,  $\psi_{mag}$  ya está calculado.
    - Si se utiliza el Vector como referencia para calcular  $\psi_{mag}$ , se utiliza la ecuación 55. Tener en cuenta que el MR del IMU en el Vector se debe de rotar  $180^\circ \pm 18^\circ$  para alinear el MR del IMU-Vector al MR IMU-Ekinox (ver sección A.3 ecuación 84).
  - 1.3 Realizar una interpolación para igualar la frecuencia de muestreo de  $\psi_{mag}$  a la de  $\phi_{acc}$  y la de  $\theta_{acc}$ .
  - 1.4 Transformar  $\phi_{acc}$ ,  $\theta_{acc}$  y  $\psi_{mag}$  a  $\mathbf{q}_K$  para todo  $i$  usando la ecuación 64.
2. Ciclo iterativo para el cálculo de  $\hat{\mathbf{q}}_{i+1}$ .
  - 2.1 Para la primera iteración  $i = 1$ ,  $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_{K,1}$ .
  - 2.2 Se calcula  $\omega_{\mathbf{q},i}^*$  con la ecuación 70.
  - 2.3 Se calcula  $\mathbf{q}_{gyro,i+1}$  con las ecuaciones 71 y 72.
  - 2.4 Se compensan los valores de  $\mathbf{q}_{gyro,i+1}$  y  $\mathbf{q}_{K,i+1}$  usando las ecuaciones 76 y 77 para obtener  $\mathbf{q}_{i+1}$ .
  - 2.5 Si  $\mathbf{q}_{i+1}$  es un valor no válido (NaN) entonces  $\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_{K,i+1}$ .
  - 2.6 Se continúa a la siguiente iteración hasta que  $i = N$ , donde  $N$  es el número total de datos en la serie de tiempo.
3. Los cuaterniones calculados se convierten a ángulos de Euler por medio de las ecuaciones 65, 66 y 67.

### A.3. Corrección de movimiento y los distintos marcos de referencia inerciales utilizados en la BOMM

Recapitulando conceptos de la sección A.1, al conocer la matriz de rotación  $R_{NED}^{IMU}$ , calculada ya sea con los ángulos de Euler (ecuación 52) o con cuaterniones (ecuación 63), se puede transformar un vector  $\mathbf{v}$  del MR del *IMU* al MR *NED*

$${}^{NED}\mathbf{v} = [R_{NED}^{IMU}]^T {}^{IMU}\mathbf{v} = R_{IMU}^{NED} {}^{IMU}\mathbf{v}, \quad (78)$$

y seremos redundantes al definir  $R_{IMU}^{NED}$ , que es la transpuesta de  $R_{NED}^{IMU}$ :

$$R_{IMU}^{NED} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix}. \quad (79)$$

A diferencia de la Aeronáutica y Robótica, donde el MR utilizado es el *NED* (y es el MR de los IMUs comerciales), en Geofísica el marco de referencia más utilizado es el llamado *ENU* (East-North-Up); donde el eje  $x$  apunta hacia el este, el eje  $y$  apunta hacia norte y el eje  $z$  hacia arriba. Para transformar los vectores que están en el MR *NED* al *ENU* se multiplican por la matriz de rotación correspondiente:

$${}^{ENU}\mathbf{v} = R_{NED}^{ENU} {}^{NED}\mathbf{v}, \quad (80)$$

donde la matriz de transformación puede calcularse por medio de la ecuación 52, rotando primero 90 grados el eje  $z$  y luego 180 grados el eje  $x$ :

$$R_{NED}^{ENU} = R_{123}(180^\circ, 0, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Ahora, ya hemos hablado de que los IMUs usan un MR similar al *NED* cuya desviación de las coordenadas geográficas está dada por la matriz de rotación  $R_{IMU}^{NED}$ . Aunque no existe un único MR en la BOMM, cada sensor instalado en esa boya tiene su MR intrínseco, que depende de la orientación en la instalación, las especificaciones del fabricante y/o su configuración. Para poder referenciar estos distintos MR se definió un MR propio a la estructura de la BOMM (al que llamaremos MR *BOMM* en itálicas). Dicho MR sigue la regla de la mano derecha, en el cual el eje  $x$  en el MR *BOMM* apunta hacia la

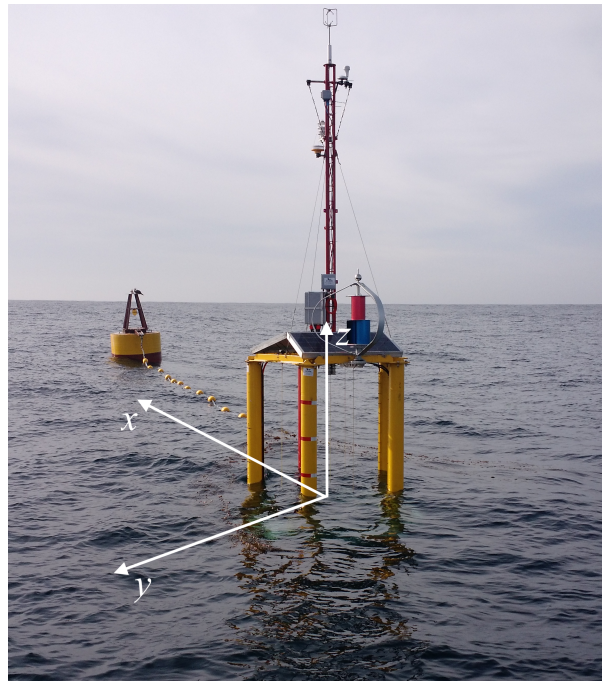


boya de anclaje (*theter*) y el eje  $z$  hacia arriba, alineado al mástil de la BOMM (como se muestra en la Figura 15). La mayoría de los sensores en la boya se orientaron cuidando que el eje  $x$  de su MR apunte hacia la *theter* de modo que sea sencillo definir la matriz de rotación para transformar cualquier variable dinámica en el MR del sensor al MR de la BOMM. Por ejemplo, el Ekinox está instalado de tal manera que los ejes  $x$  y  $y$  del MR *IMU* coinciden con el MR BOMM, pero los ejes  $z$  apuntan en direcciones opuestas (Figura 16).

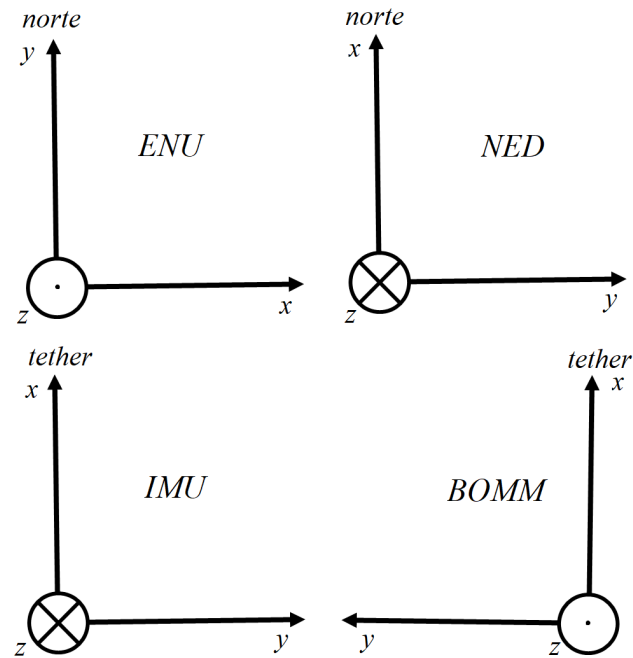
Para transformar la señal de un vector medido por un *sensor* cualquiera en la boya se realiza la siguiente operación: sea  $\mathbf{v}$  el vector en el MR del *sensor* que se desea transformar al MR *ENU*, se debe transformar secuencialmente de un MR a otro usando una serie de multiplicaciones de matrices de rotación, tal como:

$${}^{ENU}\mathbf{v} = R_{NED}^{ENU} R_{IMU}^{NED} R_{BOMM}^{IMU} R_{sensor}^{BOMM} {}^{sensor}\mathbf{v}. \quad (82)$$

En la Figura 16 se presentan un diagrama de los MR globales *ENU* (izquierda arriba) y *NED* (derecha arriba), los cuales están orientados al norte. También se muestran diagramas de los marcos de referencia del *IMU-Ekinox* (izquierda abajo) y de referencia de la BOMM (derecha abajo), cuyos ejes  $x$  están orientados hacia la *theter*. Para transformar los vectores del MR de la BOMM al *IMU* se utiliza la



**Figura 15.** Fotografía que muestra la BOMM y su marco de referencia orientado hacia la *theter*. Imagen tomada de Grupo de Oleaje (2019a,b,c).

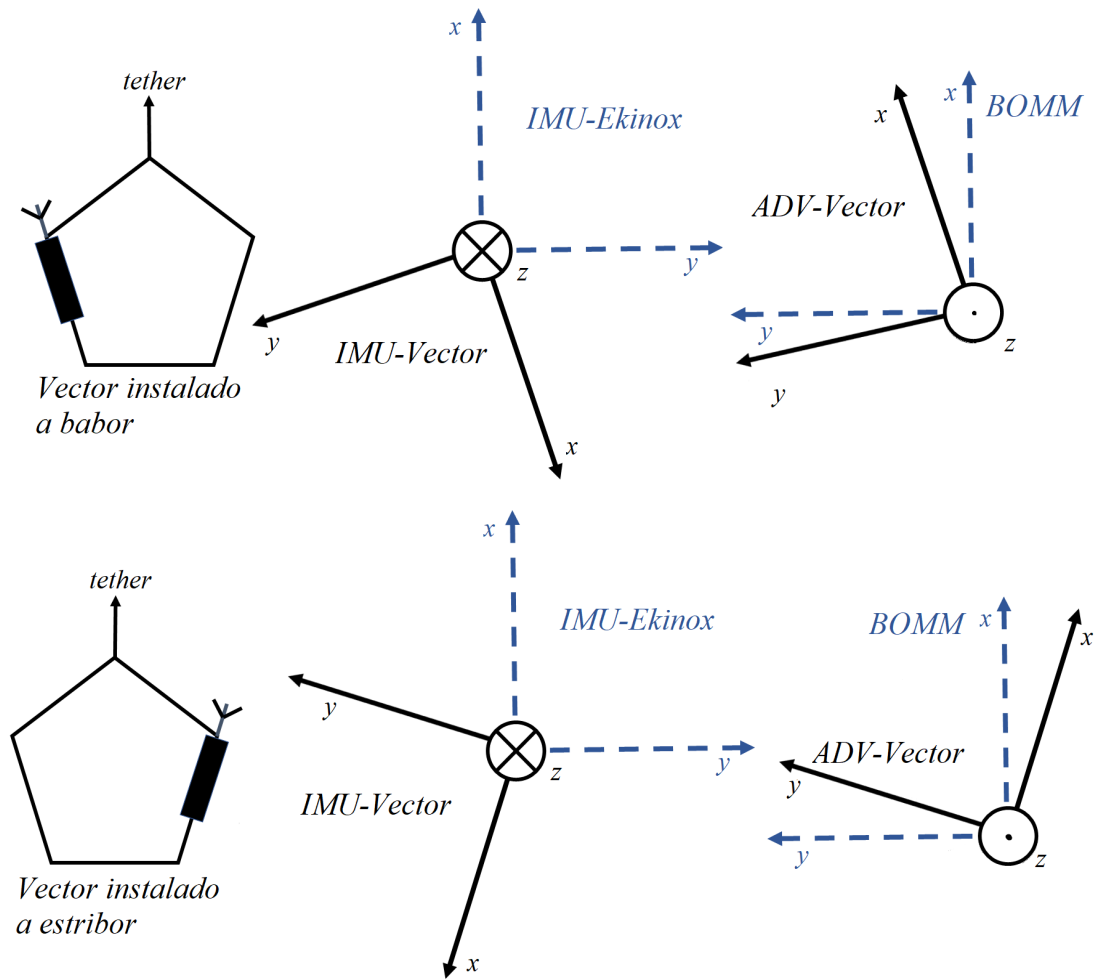


**Figura 16.** Marcos de referencia utilizados en la BOMM. *ENU* (izquierda arriba), *NED* (derecha arriba) orientados al norte geográfico, *IMU* (izquierda abajo) y *BOMM* (derecha arriba), con el eje  $x$  orientado a la *tether*.

siguiente matriz de rotación:

$$R_{BOMM}^{IMU} = R_{123}(180^\circ, 0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (83)$$

El ADV Nortek Vector, según las especificaciones del fabricante, está diseñado con dos MR independientes. Uno es el del IMU instalado en la placa electrónica del Vector (al que llamaremos MR *IMU-Vector* en itálicas) y el otro es el MR con el que están referenciadas las mediciones hechas por la sensores acústicos en el cabezal del ADV (que llamaremos MR *ADV* en itálicas). El MR *IMU-Vector* se define con el eje  $z$  apuntando hacia abajo y el eje  $x$  es colineal al centro del cilindro, y apunta en la dirección opuesta al cabezal de sensores acústicos (ver columna central en la Figura 17). Según el manual del fabricante, el MR *ADV* es distinto según como se oriente el cabezal del Vector. Cuando se orienta horizontalmente (como fue el caso), el eje  $z$  se alinea al sensor acústico principal (*beam 1* según el manual, marcado con una cinta negra), procurando que este último apunte hacia arriba. El eje  $x$  está alineado al centro del cilindro de electrónica en la dirección que apuntan los sensores acústicos, el eje  $y$  se define siguiendo la regla de la mano derecha (ver columna derecha en la Figura 17). El Vector no se instaló orientado a la *tether*, sino que tiene una desviación de  $18^\circ$  ocasionados por la geometría



**Figura 17.** MR del ADV Vector en la BOMM, en la parte superior se muestra cuando la instalación es a babor, en la parte inferior se muestra cuando la instalación es a estribor. En la columna izquierda se muestran vistas cenitales de la boya. En la columna del centro se muestran los MR *IMU-Vector* (negro) y *IMU-Ekinox* (azul). En la columna derecha se muestran los MR del ADV (negro) y la *BOMM* (azul).

pentagonal de la base donde fue montado (ver columna izquierda en la Figura 17). La matriz de rotación para transformar de *IMU-Vector* a *IMU-Ekinox* depende de si el Vector fue instalado a estribor o a babor de la boya:

$$R_{IMU-Vector}^{IMU-Ekinox} = \begin{cases} R_{123}(0, 0, 198^\circ) & \text{Vector instalado a babor} \\ R_{123}(0, 0, 162^\circ) & \text{Vector instalado a estribor} \end{cases}, \quad (84)$$

y para transformar de MR *ADV* al MR *BOMM*

$$R_{ADV}^{BOMM} = \begin{cases} R_{123}(0, 0, 342^\circ) & \text{Vector instalado a babor} \\ R_{123}(0, 0, 18^\circ) & \text{Vector instalado a estribor} \end{cases}. \quad (85)$$

Finalmente, el anemómetro sónico Gill R3-100 instalado en el mástil de la BOMM puede tener, según

su configuración, alguno de estos dos MR. En el primero, el eje  $x$  está orientado a la marca de “norte” en la base del anemómetro, y siguiendo la regla de la mano derecha, el eje  $z$  apunta hacia arriba siguiendo el mástil del anemómetro. El segundo es girando 30 grados en sentido antihorario el eje  $z$  desde la marca de “norte”, alineando el eje  $x$  al primero de los sensores acústicos en el anemómetro. En ambos casos, el eje  $z$  apunta hacia arriba siguiendo la regla de la mano derecha. Las mediciones de anemómetro pueden obtenerse en un MR o el otro depende de la configuración del equipo durante la campaña de mediciones:

$$R_{R3-100}^{BOMM} = \begin{cases} R_{123}(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ) & \text{MR anemómetro alineado a marca de norte} \\ R_{123}(0^\circ, 0^\circ, -30^\circ) & \text{MR anemómetro alineado a los sensores} \end{cases} . \quad (86)$$

Es recomendable corroborar la configuración del MR del anemómetro sónico, cotejando sus mediciones de dirección del viento de las obtenidas de la estación meteorológica Maximet.

### A.3.1. Algoritmo para calcular la corrección de las mediciones ante el efecto del movimiento de la BOMM

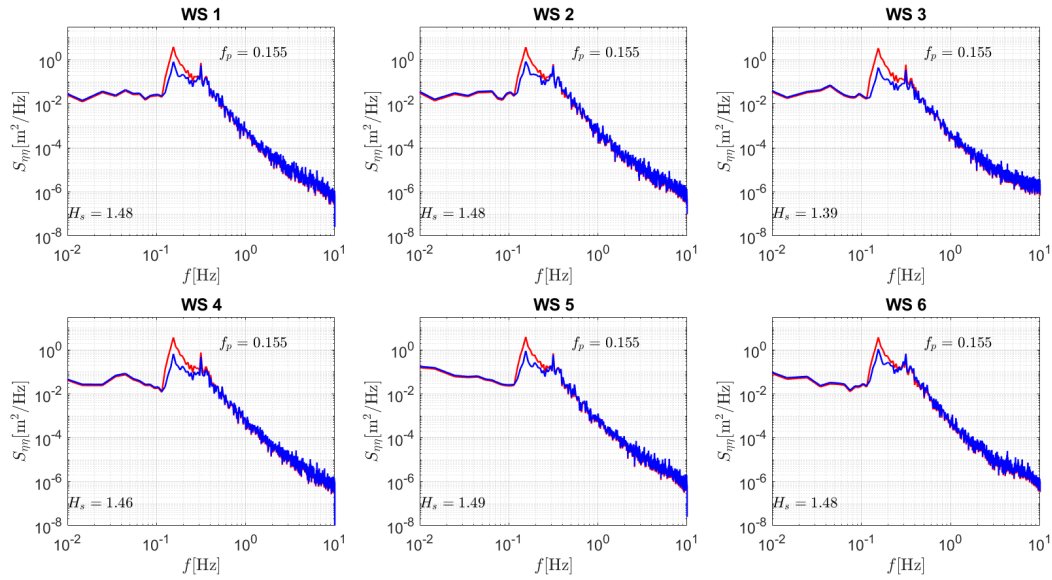
Todas las transformaciones de las que se ha hablado hasta el momento únicamente contemplan rotaciones por cambio de MR. Sin embargo, además de dichos cambios, los vectores medidos están sujetos a aceleraciones axiales y radiales debidas al movimiento de la boya. Para realizar la corrección por el movimiento, primero se debe transformar el vector que se desea corregir al MR del  $IMU$ :

$${}^{IMU}\mathbf{v} = R_{BOMM}^{IMU} R_{sensor}^{BOMM} {}^{sensor}\mathbf{v} , \quad (87)$$

y en seguida realizar la corrección de movimiento de movimiento utilizando el método descrito en Anctil et al. (1994), donde el vector de velocidad en el MR  $IMU$   ${}^{IMU}\mathbf{u}$ , se transforma al vector de velocidad en el MR global  ${}^{ENU}\mathbf{u}$  por medio de la siguiente ecuación:

$${}^{NED}\mathbf{u} = R_{IMU}^{NED} {}^{IMU}\mathbf{u} + R_{IMU}^{NED} \int ({}^{IMU}\mathbf{a} + {}^{IMU}\mathbf{g}) dt + \boldsymbol{\Omega} \times R_{IMU}^{NED} {}^{IMU}\mathbf{L} , \quad (88)$$

donde  ${}^{IMU}\mathbf{L}$  es el vector de posición del sensor en cuestión en el MR del  $IMU$ .  ${}^{IMU}\mathbf{a}$  es la aceleración lineal que se obtiene del acelerómetro. La aceleración de la gravedad en el MR  $IMU$   ${}^{IMU}\mathbf{g}$ , se obtiene al multiplicar la matriz de rotación  $R_{NED}^{IMU}$  (ecuación 52) por la gravedad en MR  $NED$   ${}^{NED}\mathbf{g} = [0, 0, 9.81]^T$ . Finalmente,  $\boldsymbol{\Omega}$  es la velocidad angular de la boya en un MR global ( $NED$  en este caso), se calcula multiplicando la matriz de tasas de cambio de los ángulos de Euler y el vector de la primeras derivadas



**Figura 18.** Espectros de la señal de seis alambres de capacitancia (WS1, ..., WS6) en el mismo periodo de tiempo. La línea azul es antes de la corrección de movimiento, la línea roja es el espectro de la señal corregida. Datos de PE del 16/Oct/2018 a las 00:30 hrs

de cada ángulo de Euler:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} c_{\theta}c_{\psi} & -s_{\psi} & 0 \\ c_{\theta}s_{\psi} & c_{\psi} & 0 \\ -s_{\theta} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}s_{\psi} + \dot{\phi}c_{\theta}c_{\psi} \\ \dot{\theta}c_{\psi} + \dot{\phi}c_{\theta}s_{\psi} \\ \dot{\psi} - \dot{\phi}s_{\theta} \end{bmatrix}. \quad (89)$$

El primer término de la ecuación 88 representa el cambio de MR; el segundo, la corrección para compensar el movimiento del MR local causado por las aceleraciones lineales; y el tercero, la compensación asociada al movimiento del MR local por rotación.

Para transformar un vector de posición en el MR local  ${}^{IMU}\mathbf{x}$  al MR global  ${}^{NED}\mathbf{x}$ , se realiza un método similar al anterior, esta vez descrito por Drennan et al. (1994)

$${}^{NED}\mathbf{x} = R_{IMU}^{NED} {}^{IMU}\mathbf{x} + R_{IMU}^{NED} \int \int ({}^{IMU}\mathbf{a} + {}^{IMU}\mathbf{g}) dt dt + \int \mathbf{\Omega} \times R_{IMU}^{NED} {}^{IMU}\mathbf{L} dt. \quad (90)$$

Después de realizar la corrección de movimiento se debe de transformar la variable o vector en cuestión del MR  $NED$  al  $ENU$  usando la ecuación 80. Se puede observar el efecto de la corrección de movimiento en el espectro de la señal de los alambres de capacitancia en la Figura 18, donde el movimiento *heave* de la boya funciona como un filtro que amortigua la señal de las olas, especialmente para las olas con periodo más largo; se puede observar que el valor máximo de densidad espectral aumenta después de

la corrección por el movimiento (línea roja) que en comparación al espectro de los alambres sin ninguna corrección (línea azul). Un posible trabajo futuro es desarrollar las ecuaciones 88 y 90 en términos de cuaterniones, con la finalidad de mejorar la corrección por el movimiento de la boya.

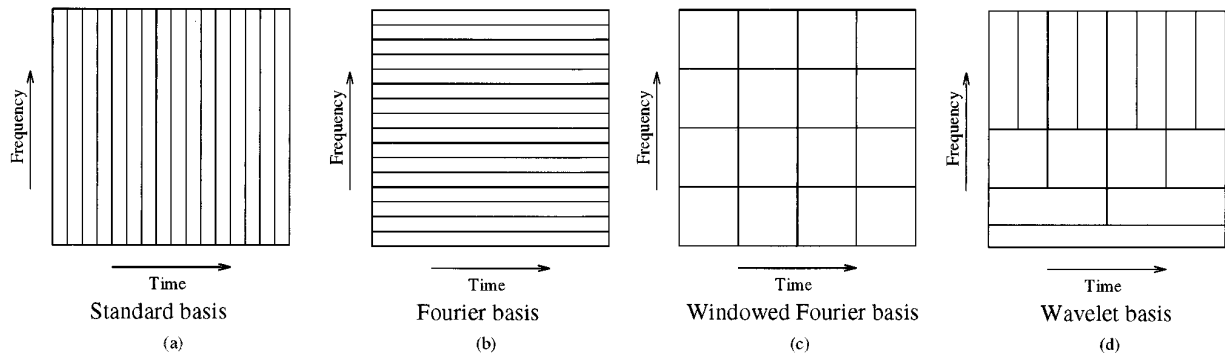
## Anexo B. Análisis tiempo-frecuencia y el método WDM

---

Como se describe en el capítulo 2, los espectros direccionales de las olas en cada ventana de tiempo se estiman por medio del método WDM propuesto por Donelan et al. (1996). En este Anexo se explica con cierto detalle la metodología, en especial la naturaleza del análisis tiempo-frecuencia que se realiza por medio de onduletas (*wavelets*) y se hace énfasis en aspectos del método que se sugiere considerar en trabajo futuro. Este anexo debe considerarse como un complemento al reporte realizado en CICESE por Peláez-Zapata & Larios-Rodríguez (2021b).

### B.1. Onduleta de Morlet y el análisis tiempo-frecuencia

Las onduletas son entes matemáticos de reciente creación, aunque sus antecedentes se remontan a la creación de la transformada de Haar, también llamada onduleta de Haar, en 1910. Fue en la década de 1980 cuando se empezaron a utilizar nuevas definiciones de onduletas en el análisis tiempo-frecuencia (Mallat, 2007). La onduleta de Morlet (Morlet et al., 1982), también llamada onduleta de Gabor o de Grossman-Morlet, fue definida originalmente por Gabor (1946). En el análisis tradicional de Fourier, una señal dada  $\eta(t)$  se transforma en una función que depende de las componentes de frecuencia  $\hat{\eta}(f)$  y es imposible determinar las variaciones del espectro en dichas frecuencias en función del tiempo, se pierde la resolución temporal aunque se obtiene una buena resolución en frecuencia; se transforma un plano con únicamente resolución temporal mostrado en la Figura 19a, a uno con sólo resolución en el espacio de las frecuencias que se muestra en la Figura 19b. En el análisis de tiempo-frecuencia más simple, la señal a analizar se divide en segmentos secuenciales de igual duración temporal, cada uno de ellos se multiplica por una función ventana y después se utiliza la transformada de Fourier. Al realizar este proceso podemos observar cómo varía el espectro de frecuencias a lo largo del tiempo (se gana resolución temporal) a costa de una pérdida de resolución en frecuencia (se dejan de observar las frecuencias más bajas); a este método se le conoce como transformada de Fourier de tiempo reducido (*Short time Fourier transform* o STFT), y en la Figura 19c se puede observar cómo se establece la resolución tiempo-frecuencia. La realización de una transformada de *wavelet* (transformada con onduletas) se basa en una función creada a partir de la dilatación y translación temporal; la dilatación de la onduleta madre puede producir funciones de corta duración temporal con alta resolución en frecuencia o funciones de larga duración temporal con baja resolución en frecuencia. La onduleta madre de Morlet  $\psi$  se define como el producto de la función de Euler  $e^{ix}$  y una función Gaussiana  $e^{-x^2}$ . Las onduletas de Morlet funcionan como filtros de frecuencia con un ancho de banda específico de duración temporal específica (Najmi & Sadowsky, 1997); cada onduleta madre utilizada en la transformada de *wavelet* tiene su resolución tiempo-frecuencia específica,



**Figura 19.** Esquema de la descomposición del dominio tiempo-frecuencia usando diferentes bases: a) serie de tiempo, b) transformada de Fourier, c) transformada de Fourier de corta duración (STFT) y d) transformada de *wavelet*. Imagen tomada de Kumar & Foufoula-Georgiou (1997).

como se observa en la Figura 19d.

Uno de los trabajos en geofísica en el que se explica el uso de las onduletas es el de Torrence & Compo (1998), aunque también se recomienda consultar trabajos tales como Mallat (2007) o Farge (1992). Sin embargo, se ha decidido formular la transformada de *wavelet* y la onduleta de Morlet con la notación utilizada por Liu (1994), ya que es la más parecida a la utilizada en el código de MATLAB para calcular la transformada de *wavelet* desarrollado por Chapron, que se incluye en el método WDM en MATLAB presentado en Donelan et al. (1996). La transformada de *wavelet*  $W$  se define como la convolución de la señal  $\eta$  con la onduleta madre  $\psi$ :

$$W(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t) \psi^* \left( \frac{t - \tau}{a} \right) dt, \quad (91)$$

donde  $\eta(t)$  es la señal en el dominio del tiempo (misma que se va a transformar) y  $\psi^*$  es el complejo conjugado de la onduleta madre  $\psi$ , que se define en función del tiempo  $t$  y de los parámetros de traslación  $\tau$  y escala  $a$ . El parámetro de escala (también llamado de dilatación) es el que controla la frecuencia que filtra cada una de las onduletas en la transformada de *wavelet*, también controla la relación entre resolución tiempo-frecuencia. La onduleta de Morlet se define de la siguiente manera:

$$\psi(t) = e^{i\omega_0 t} e^{-t^2/2}, \quad (92)$$

cuya transformada de Fourier es:

$$\hat{\psi}(\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2}. \quad (93)$$

La frecuencia angular central  $\omega_0$  se define como  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , siendo  $f_0$  la frecuencia donde se localiza la respuesta máxima captada por la onduleta madre, también llamada de frecuencia central. Se elige un valor



de  $\omega_0 > 5$  de modo que se cumpla la condición de admisibilidad de la onduleta, que estipula que  $\hat{\psi}(0) \neq 0$ . En el trabajo de Liu (1994) se utiliza el valor  $\omega_0 = \sqrt{2/\ln(2)} \approx 5.3364$  de acuerdo con el trabajo de Daubechies (1990), aunque el valor utilizado en el código de Chapron es  $\omega_0 = \sqrt[4]{2\pi/\ln(2)} \approx 5.3899$ . Usando las propiedades de la transformada inversa de Fourier, se puede evaluar la convolución entre  $\eta$  y  $\psi^*$  de la siguiente manera para obtener la transformada de *wavelet*:

$$W(a, \tau) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\eta}(\omega) \hat{\psi}^*(a\omega) e^{i\tau\omega} d\omega . \quad (94)$$

El dominio del parámetro de escala suele definirse como una serie de octavas con voces (fracciones de octava), de la siguiente manera:

$$a = 2^{\iota + \frac{\xi - 1}{v}} , \quad (95)$$

donde  $\iota$  es el número de octava, pudiendo tener valores de cualquier entero real habiendo un total de  $I$  octavas;  $\xi$  es el número de voz dentro de la octava y  $v$  es el total de voces en la octava  $\xi$ ;  $v$  puede tener valores de cualquier entero positivo. La onduleta en el espacio de Fourier  $\hat{\psi}(a\omega)$  tiene su valor máximo cuando  $a = \omega_0/\omega = f_0/f$ . De esta manera, la transformada de *wavelet* (ecuaciones 91 y 95), se puede expresar en función del parámetro de escala  $a$  o en función de la frecuencia asociada a  $a$  donde  $f = f_0/a$ . En las Figuras 20a-b se muestra la forma de las onduletas de Morlet con valores  $\omega_0 = 6, 8$  y  $10$ ; en la columna izquierda se muestran las partes real e imaginaria de la ondulenta en el espacio temporal, mientras que en la columna derecha se muestra la transformada de Fourier de la onduleta madre en el espacio de frecuencias. Se observa cómo el máximo de la onduleta en el espacio de Fourier está en  $\omega_0$ .

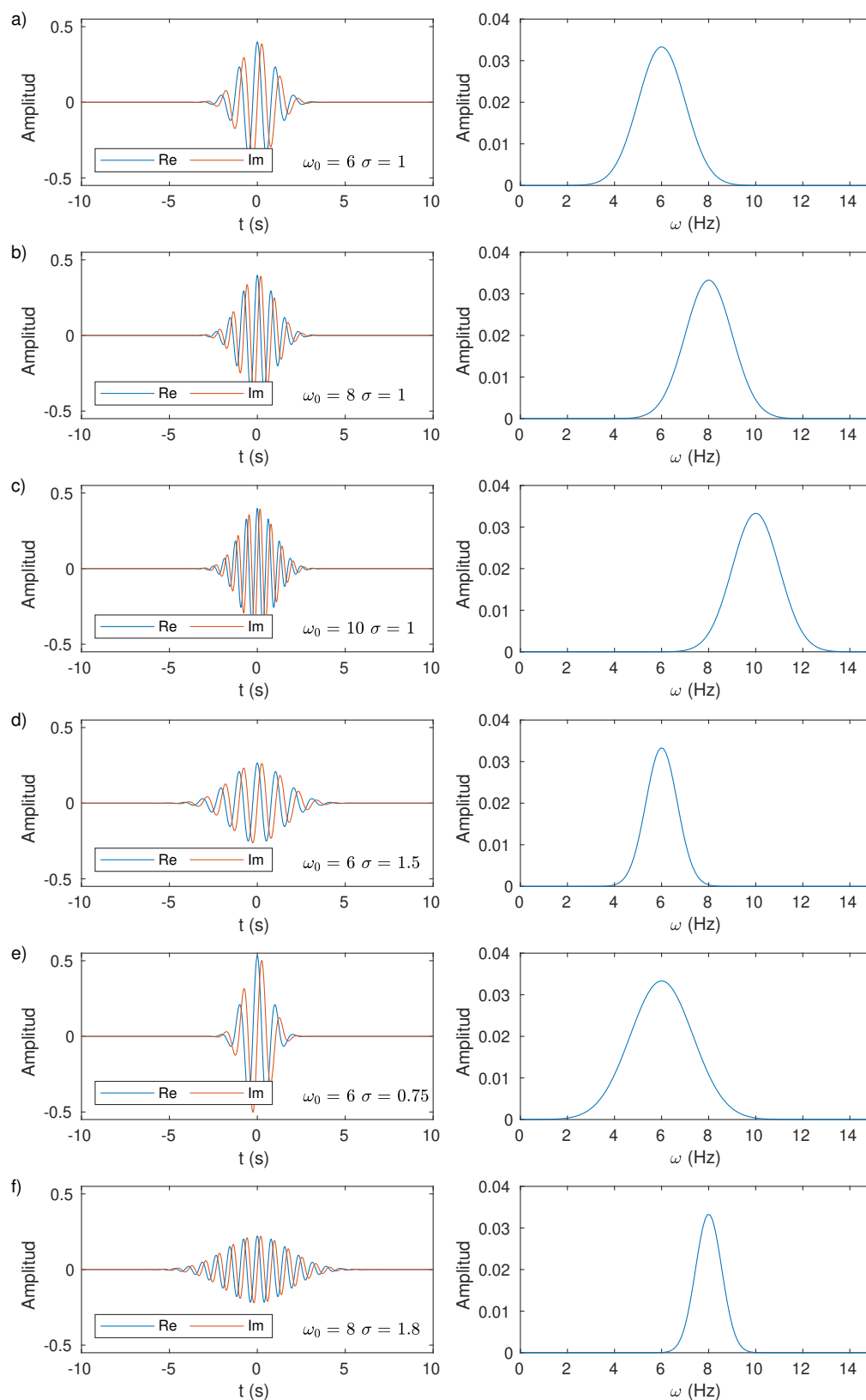
En trabajos como el de Najmi & Sadowsky (1997) y Cohen (2014) se añade a la definición de la onduleta madre el parámetro denominado ancho de la Gaussiana  $\sigma$  (análogo a la desviación estándar en una función Gaussiana), de esta forma la onduleta de Morlet, que incluye el parámetro  $\sigma$ , se define según Najmi & Sadowsky (1997) de la siguiente manera:

$$\psi(t) = [\exp(-i2\pi f_0 t) - \exp(-2\pi^2 f_0^2 \sigma^2)] \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) . \quad (96)$$

Esta definición cumple con la condición de aceptabilidad de la onduleta para todo  $f$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|}{|f|} df < \infty . \quad (97)$$

Esto significa que en  $\lim_{f \rightarrow 0} \hat{\psi}(f) = 0$ . Cuando  $2\pi f_0 > 5$ , el segundo término de la ecuación es despreciable



**Figura 20.** Onduletas madre de Morlet en el espacio temporal (columna izquierda) y en el espacio de frecuencia (columna derecha), para distintos valores de frecuencia central  $\omega_0$  y ancho de la Gaussiana  $\sigma$ .

con lo que se obtiene en una expresión similar a la ecuación 92, donde  $\sigma = 1$ . El parámetro  $\sigma$  modifica la escala de la onduleta de forma similar al parámetro  $a$  y Cohen (2014) la define como la razón del número de ciclos de la onduleta en el espacio temporal entre la frecuencia angular tal que  $\sigma = \text{ciclos}/2\pi f_0$ , y se añade con la finalidad de modificar la resolución tiempo-frecuencia que se obtiene en la transformada de *wavelet*. La transformada de Fourier de la ecuación 96 es:

$$\hat{\psi}(f) = \sqrt{2\pi}\sigma a \left\{ \exp \left[ -2\pi^2\sigma^2 (f - f_0)^2 \right] - \exp(-2\pi^2\sigma^2 f^2) \exp(-2\pi^2\sigma^2 f_0^2) \right\}. \quad (98)$$

Al igual que en la ecuación 96, el segundo término de la ecuación 98 es despreciable cuando  $2\pi f_0 > 5$ . Si se sustituye 96 en 91, se tiene una señal discreta  $\eta(n)$  y el tiempo se define como  $t = n\Delta t$ , donde  $\Delta t$  es el intervalo de muestreo (y a su vez  $\Delta t \approx dt$ ), se obtiene que:

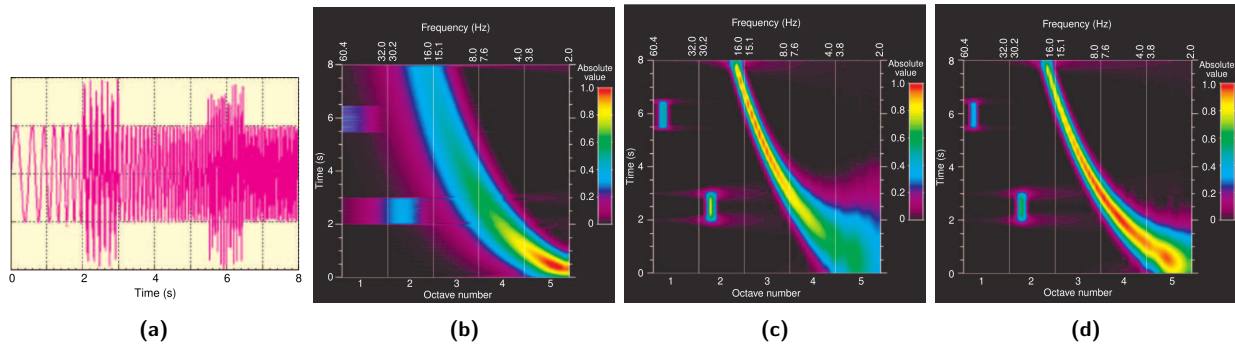
$$W(a, \tau) = \frac{\Delta t}{\sigma\sqrt{2\pi}a} \sum_{n=1}^{\infty} \eta(n) \exp \left[ -\frac{(n\Delta t - \tau)^2}{2a^2\sigma^2} \right] \exp \left[ -i2\pi f_0 \frac{n\Delta t - \tau}{a} \right]. \quad (99)$$

Si se define la frecuencia de muestreo como  $f_s = 1/\Delta t$ , el parámetro de traslación como  $\tau = j\Delta t$  y la escala se define como en la ecuación 95, se puede estimar la transformada de *wavelet* continua de una señal discreta y evaluarla sin necesidad de la transformada inversa de Fourier:

$$W(k, j) = \frac{1}{\sigma f_s \sqrt{\pi 2^{(1+\iota+\frac{\xi-1}{v})}}} \sum_{n=1}^{\infty} \eta(n) \exp \left[ -\frac{(n-j)^2}{2^{(1+\iota+\frac{\xi-1}{v})} f_s^2 \sigma^2} \right] \exp \left[ \frac{-i\pi f_0 (n-j)}{2^{(\iota+\frac{\xi-1}{v}-1)} f_s} \right], \quad (100)$$

siendo  $k$  el número de escala, habiendo un total de  $I(v-1)$  escalas.

En las Figuras 20d-f se muestran las onduletas de Morlet con  $\sigma \neq 1$  y se puede observar cómo cambia la forma de la onduleta en el espacio temporal al compararlas con las onduletas cuando  $\sigma = 1$  (Figuras 20a-c), mientras que en el espacio de Fourier la respuesta máxima de la onduleta sigue localizada en  $\omega_0$ ; sin embargo, la curva puede ser más o menos ancha, disminuyendo o aumentando la resolución en frecuencias. Un ejemplo de las ventajas de utilizar el parámetro  $\sigma$  al construir las onduletas madre se muestra en la Figura 21 (tomada de Najmi & Sadowsky, 1997); se muestra la transformada de *wavelet* de la señal (Figura 21a) con  $\sigma = 1$  (Figura 21b) y  $\sigma = 7.5$  (Figura 21c). Se ve claramente, que en el primer caso se tiene mejor resolución en las frecuencias bajas y en el segundo existe mejor resolución en las frecuencias altas. Sin embargo, como explican Najmi & Sadowsky (1997) y Cohen (2014), es posible variar el valor de  $\sigma$  en función de  $a$  para tener buena resolución de frecuencias en todas las escalas (o en el espacio temporal si es lo que se desea), como se muestra en el ejemplo de la Figura 21d, cuando  $\sigma = 10$  en la octava más pequeña y  $\sigma = 3.5$  en la octava más grande. Es posible que se pueda obtener



**Figura 21.** Análisis de la señal en (a) por medio de la transformada de *wavelet*. En (b) se utilizó  $\sigma = 1$ , mientras que en (c) se utilizó  $\sigma = 7.5$ . En (d) el valor de  $\sigma$  decrece exponencialmente de 10, para octava más pequeña, hasta 3.5 para la octava más grande. Imagen tomada de Najmi & Sadowsky (1997)

una mejora en el método WDM al explorar valores de  $\sigma \neq 1$ , ya sean con valor constante o variable. El uso de un algoritmo de optimización podría ayudar a optimizar  $\sigma$  y  $a$ , usando un gran número de espectros sintéticos con aquéllos obtenidos al procesar la señal de la superficie con el método WDM.

## B.2. Método de obtención del espectro direccional por medio de onduletas (Método WDM)

Una vez que se han calculado las transformadas de *wavelet* de la señal de los seis alambres de capacitancia instalados en la BOMM, se puede estimar el espectro direccional del oleaje usando el *wavelet directional method* (WDM) propuesto por Donelan et al. (1996, 2015).

En el método WDM, el oleaje se considera la sumatoria de una serie de olas monocromáticas al igual que en el análisis de Fourier, cada una de ellas con frecuencia, número de onda y dirección intrínsecas; sin embargo, a diferencia del análisis de Fourier, la intensidad de la señal asociada a cada una de las olas monocromáticas puede variar a lo largo del tiempo. Usando la transformada de *wavelet* se encuentra la frecuencia asociada a esas olas monocromáticas y como cambia la intensidad de la señal a lo largo del tiempo. Sin embargo, para poder determinar el número de onda y la dirección de cada ola monocromática se debe de medir en distintos puntos de la superficie simultáneamente; al hacer esto, existe una diferencia en el instante de tiempo cuando son registrados los máximos y mínimos de la señal de la elevación de la superficie libre por los alambres de capacitancia, que se traduce a un desfase en la señal del oleaje. Así, el desfase de la señal entre los alambres  $a$  y  $b$  del el arreglo se puede estimar de la siguiente manera:

$$\phi_{ab}(f, t) = \mathbf{k}(f, t) \cdot \mathbf{x}_a - \mathbf{k}(f, t) \cdot \mathbf{x}_b = (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{k}(f, t), \quad (101)$$

donde  $\phi_{ab}(f, t)$  es la diferencia de fase de la señal de los alambres  $a$  y  $b$ . La posición de los alambres  $a$  y  $b$  en el arreglo está dada por los vectores  $\mathbf{x}_a$  y  $\mathbf{x}_b$  respectivamente, donde el origen de los mismos está en el centro del arreglo de alambres. Finalmente,  $\mathbf{k}(f, t)$  es el vector número de onda cuya magnitud  $|\mathbf{k}|(f, t)$  y dirección  $\Theta(f, t)$  son función de la frecuencia intrínseca de la ola monocromática  $f$  y del tiempo  $t$ ; es conveniente mencionar que el vector número de onda  $\mathbf{k}(f, t)$  también puede expresarse en sus componentes cartesianas  $k_x(f, t)$  y  $k_y(f, t)$ . De aquí en adelante se muestran las ecuaciones para el WDM discretizadas en el espacio tiempo-frecuencia, de modo que se tienen  $N_p$  bandas de frecuencia  $f_p$  y una resolución temporal de  $N_j$  intervalos de tiempo  $t_j$ . La diferencia de fase  $\phi_{ab}(f_p, t_j)$  entre los alambres  $a$  y  $b$  se estima de la siguiente manera:

$$\phi_{ab}(f_p, t_j) = \phi_a(f_p, t_j) - \phi_b(f_p, t_j), \quad (102)$$

donde  $\phi_a(f_p, t_j)$  y  $\phi_b(f_p, t_j)$  es la fase de la transformada de *wavelet* de la señal de los alambres  $a$  y  $b$  respectivamente; donde para el alambre  $i$ , la fase de su transformada de *wavelet*  $W_i(f_p, t_j)$  está dada por

$$\phi_i(f_p, t_j) = \text{atan} \left( \frac{\Im(W_i(f_p, t_j))}{\Re(W_i(f_p, t_j))} \right). \quad (103)$$

Se han planteado dos métodos para la solución para la ecuación 101, el primero de ellos se describe en Donelan et al. (1996), al que en este trabajo llamaremos “WDM por promedio de dobles pares de alambres”, y fue el método utilizado en este trabajo para obtener los espectros direccionales, se describe en la sección B.2.1. El segundo método fue propuesto por primera vez en Donelan & Krogstad (2005), y le llamamos “WDM por regresión lineal”, y se describe brevemente en la sección B.2.2, ya que fue el método utilizado por Peláez-Zapata & Larios-Rodríguez (2021b) al programar el código en Python para el WDM.

### B.2.1. WDM por promedio de dobles pares de alambres

De los vectores de posición  $\mathbf{x}_a = [x_a; y_a]$  y  $\mathbf{x}_b = [x_b; y_b]$  se puede estimar la distancia  $r_{ab}$  entre los alambres  $a$  y  $b$ :

$$r_{ab} = r_a - r_b, \quad (104)$$

y el ángulo relativo  $\alpha_{ab}$  entre ellos es

$$\alpha_{ab} = \alpha_a - \alpha_b. \quad (105)$$

Donde para un alambre  $i$  su distancia desde el centro del arreglo esta dada por

$$r_i = \sqrt{(x_i)^2 + (y_i)^2}, \quad (106)$$

y el ángulo de posición del alambre  $i$  relativo al eje  $x$  del marco de referencia del arreglo es

$$\alpha_i = \text{atan}\left(\frac{y_i}{x_i}\right). \quad (107)$$

Sustituyendo 104 y 105 en 101 se obtiene:

$$\phi_{ab}(f_p, t_j) = |\mathbf{k}(f_p, t_j)| r_{ab} \cos(\Theta(f_p, t_j) - \alpha_{ab}). \quad (108)$$

Como en la ecuación 108 se tienen dos incógnitas, se calcula el número de onda usando dos pares de alambres  $ab$  y  $cd$ ; se debe cuidar que el ángulo relativo entre los dos pares de alambres  $\alpha_{ab} - \alpha_{cd}$  sea aproximadamente  $90^\circ$  o  $270^\circ$ . De esta manera se estima la magnitud del vector número de onda  $|\mathbf{k}(f_p, t_j)|$  en el dominio tiempo-frecuencia de la siguiente manera:

$$|\mathbf{k}(f_p, t_j)| = \frac{\frac{\phi_{ab}}{r_{ab}} \sin(\alpha_{cd}) - \frac{\phi_{cd}}{r_{cd}} \sin(\alpha_{ab})}{\sin(\alpha_{cd} - \alpha_{ab}) \cos(\Theta(f, k))}, \quad (109)$$

y la función del ángulo del vector número de onda  $\Theta(f_p, t_j)$  en el dominio tiempo-frecuencia se obtiene con

$$\Theta(f_p, t_j) = \text{atan}\left(\frac{\Gamma(f_p, t_j) \cos(\alpha_{cd}) - \cos(\alpha_{ab})}{\sin(\alpha_{ab}) - \Gamma(f_p, t_j) \sin(\alpha_{cd})}\right), \quad (110)$$

donde

$$\Gamma(f_p, t_j) = \left(\frac{\phi_{ab}(f_p, t_j)}{\phi_{cd}(f_p, t_j)}\right) \left(\frac{r_{cd}}{r_{ab}}\right). \quad (111)$$

Como se puede observar, únicamente se necesitan dos pares de alambres para obtener  $|\mathbf{k}(f_p, t_j)|$  y  $\Theta(f_p, t_j)$ . Como se tienen seis alambres, se pueden formar 105 combinaciones de dos pares, de las cuales, según la configuración del arreglo de alambres usado en las BOMM, 35 combinaciones entre dos pares cumplen con la condición de ser aproximadamente perpendiculares. Se estima  $|\mathbf{k}(f_p, t_j)|$  y  $\Theta(f_p, t_j)$  para distintas combinaciones válidas y se promedian, de ahí el nombre de “por promedio de dobles pares”.

### B.2.2. WDM por regresión lineal

En el método por regresión lineal para resolver la ecuación 101 se hacen las siguientes consideraciones. Como las transformadas de wavelet para la señal registrada por los alambres tienen una resolución de  $N_p$  bandas de frecuencia  $f_p$  y una resolución temporal de  $N_j$  intervalos de tiempo  $t_j$ , se puede escribir  $\phi_{ab}$  una función matricial con tres dimensiones  $\phi_{ab}(f_p, t_j)$ . Como en un arreglo de 6 alambres existen 15 pares de alambres posibles, el tamaño de la función matricial  $\phi_{ab}(f_p, t_j)$  será de  $15 \times N_p \times N_j$ . También se puede crear una matriz de separación entre alambres  $\mathbf{X}_{ab}$ , formada con todas las posibles combinaciones de distancia entre pares de alambres de capacitancia,  $(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b)$ . El tamaño de la matriz  $\mathbf{X}_{ab}$  es  $15 \times 2$ ; mientras que la función del número de onda en el espacio tiempo-frecuencia  $\mathbf{k}(f_p, t_j)$  tiene un tamaño igual a  $N_p \times N_j \times 2$ . Al sustituir en la ecuación 101 las matrices  $\mathbf{X}_{ab}$  y  $\phi_{ab}(f_p, t_j)$  y resolver para  $\mathbf{k}(f_p, t_j)$  se obtiene

$$\mathbf{k}(f_p, t_j) = (\mathbf{X}_{ab}^T \mathbf{X}_{ab})^{-1} (\mathbf{X}_{ab}^T \phi_{ab}(f_p, t_j)) , \quad (112)$$

que es la ecuación en notación vectorial del método de regresión lineal múltiple por mínimos cuadrados (leer sección 3.12.3 de Thomson & Emery , 2024). Es necesario comentar que, para simplificar el algoritmo de solución la ecuación 112, se puede resolver de forma iterativa un nodo  $(f_p, t_j)$  a la vez.

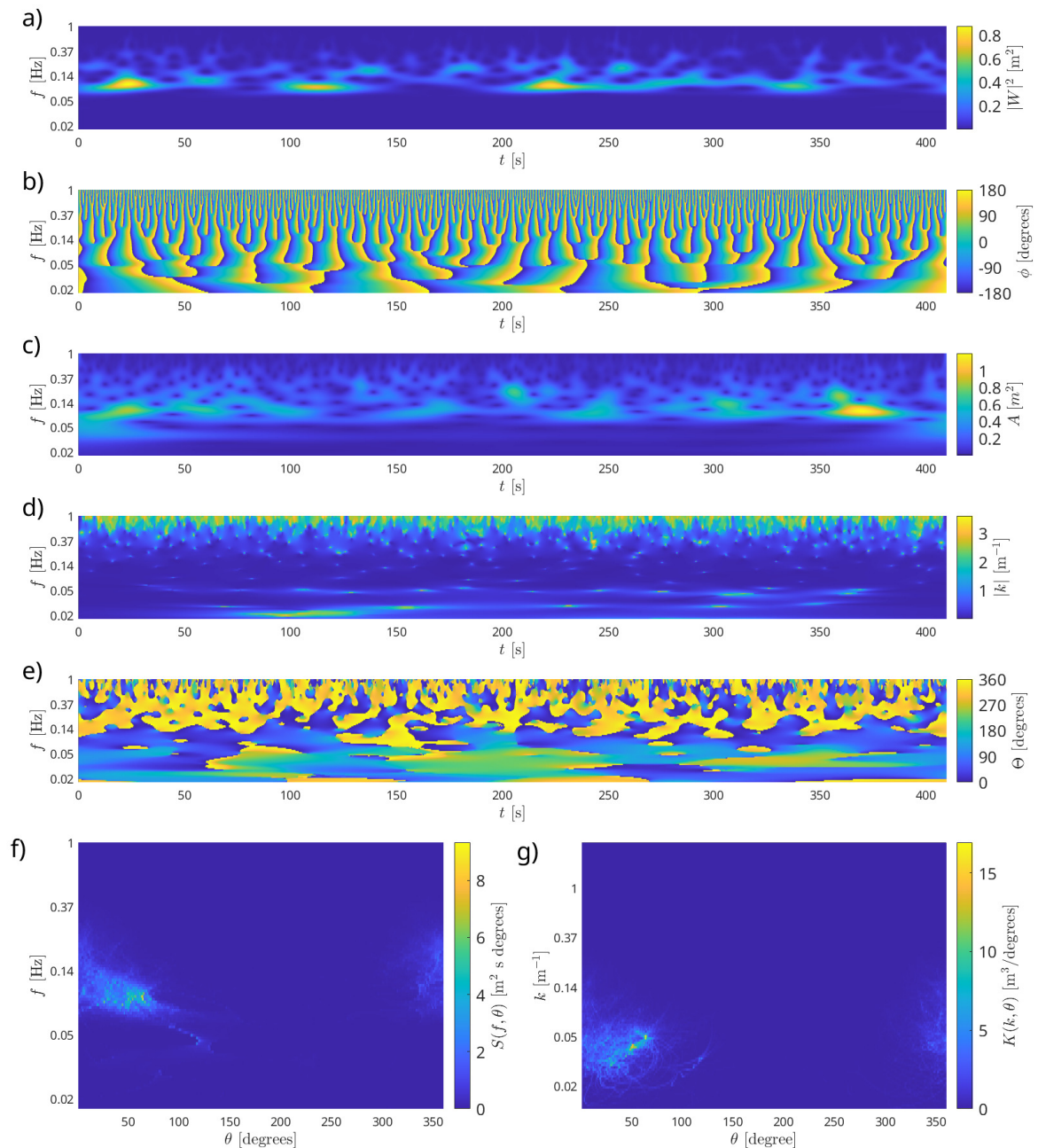
### B.2.3. Construcción de los espectros direccionales usando WDM

Una vez que se tienen las funciones en el espacio tiempo-frecuencia de la magnitud  $|\mathbf{k}(f_p, t_j)|$  y dirección del número de onda  $\Theta(f_p, t_j)$  es necesario, para poder construir los espectros direccionales, conocer la función de la amplitud del oleaje  $A$  (varianza), que se obtiene al promediar los espectros de potencia de la transformada de *wavelet*  $|W_i(f_p, t_j)|^2$  de cada alambre:

$$A(f_p, t_j) = \frac{1}{N_{ws}} \sum_{i=1}^{N_{ws}} |W_i(f_p, t_j)|^2 , \quad (113)$$

donde  $i$  es el número de alambre y  $N_{ws}$  el número total de alambres en el arreglo.

Por último, se deben construir los espectros direccionales ya sea en términos de la frecuencia  $S(f_p, \theta_l)$  o en términos del número de onda  $K(k_q, \theta_l)$  a partir de las funciones  $A(f_p, t_j)$ ,  $|\mathbf{k}(f_p, t_j)|$  y  $\Theta(f_p, t_j)$



**Figura 22.** Funciones en el dominio tiempo-frecuencia obtenidas del método WDM.  
a) Espectro de la transformada de *wavelet* de la señal del alambre central  $|W_1(f,t)|^2$ .  
b) Fase de la transformada de *wavelet* del alambre central  $\phi_1(f,t)$ .  
c) Amplitud o varianza de la superficie libre  $A(f,t)$ .  
d) Dirección de las olas  $\Theta(f,t)$ .  
e) Número de onda de las olas  $k(f,t)$ .  
f) Espectro direccional en términos de la frecuencia  $S(f,\theta)$ .  
g) Espectro direccional en términos del número de onda  $K(k,\theta)$ .  
Datos de TSI del 15/Mar/2018 a las 16:06 hrs.



que se obtuvieron con el método WDM; a este proceso comúnmente se le llama *binning* o categorizado. Para ilustrar mejor este proceso, se muestran en la Figura 22 las diferentes funciones obtenidas durante el proceso de implementación del WDM para una ventana de datos de la campaña TSI del 15/Mar/2018 a las 16:06 hrs. Se puede observar el espectro de potencia de la transformada de *wavelet*  $|W_1(f_p, t_j)|^2$  del alambre central del arreglo estimada con la ecuación 94 (Figura 22a) y su fase  $\phi_1(f_p, t_j)$  estimada por medio de la ecuación 103 (Figura 22b). También se muestran las funciones de amplitud  $A(f_p, t_j)$  estimada con la ecuación 113 (Figura 22c), de magnitud  $|k|(f_p, t_j)$  y la dirección  $\Theta(f_p, t_j)$  del vector número de onda, estimados con las ecuaciones 109 y 110 respectivamente (Figuras 22e y 22e). Y los espectros direccionales en términos de la frecuencia  $S(f_p, \theta_l)$  (Figura 22f) y en términos del número de onda  $K(k_q, \theta_l)$  (Figura 22g) antes de suavizarlos.

Para el espectro direccional en términos de la frecuencia  $S(f_p, \theta_l)$  se construye un dominio de direcciones  $\theta_l$  con una resolución angular igual a  $\Delta\theta = \theta_{l+1} - \theta_l$ ; después se identifican los valores de  $f_p$  y  $t_j$  en  $\Theta(f_p, t_j)$  para cada valor de  $\theta_l$  (Figura 22d) donde  $\theta_l - \Delta\theta/2 < \Theta(f_p, t_j) < \theta_l + \Delta\theta/2$ ; para ese conjunto de  $(f_p, t_j)$ . Para cada valor de  $\theta_l$  se evalúa  $A(f_p, t_j)|_{\theta_l}$  (Figura 22c) y se suman para todos los valores de  $t_j$  en cada valor de  $f_p$ , obteniendo como resultado  $S(f_p, \theta_l)\Delta\theta\Delta f_p$ . Al dividir el resultado que se obtuvo en el categorizado por  $\Delta\theta$  y  $\Delta f_p$  se obtiene  $S(f_p, \theta_l)$ , que se muestra en la Figura 22f. Hay que recordar que las bandas de frecuencia en  $f_p$  están definidas por las escalas  $a$  utilizadas en la transformada de *wavelet* (ecuación 95) y están separadas de forma logarítmica; el paso de frecuencia discretizada está dado por  $\Delta f_p = f_{p+1} - f_p$ . Para ilustrar mejor este procedimiento se añade el código de Matlab correspondiente.

```

1 % A_WDM (ecuacion 112), Theta_WDM (ecuacion 109)
2 % f se define en base a las escalas utilizadas en la transformada de wavelet (
   ecuacion 94) y con ella se calcula d_f
3 theta = 0:d_theta:360; % Se define d_theta previamente
4 for p = 1:length(f)
5     for l = 2:length(theta)
6         ID_theta = find(Theta_WDM(:,p) > theta(l-1) & Theta_WDM(:,p) <= theta(l));
7         if ~isempty(ID_theta)
8             S(l-1,p) = sum(A_WDM(ID_theta,p));
9         end
10    end
11 end
12 S = transpose((S./(d_f))/(d_theta*pi/180));

```

Si se desea obtener  $K(k_q, \theta_l)$  se requiere un paso adicional antes de hacer la sumatoria de la amplitud

$A(f_p, t_j)$ . Además de un categorizado por la dirección  $\theta_l$ , se debe realizar un categorizado por el número de onda  $k_q$ . Del conjunto de puntos  $(f_p, t_j)$  que se obtuvieron en el categorizado de la dirección  $\theta_l$  en  $|\mathbf{k}(f_p, t_j)|_{\theta_l}$  (Figura 22e), se hace un subconjunto que cumple con la condición  $k_q - \Delta k_q/2 < |\mathbf{k}(f_p, t_j)|_{\theta_l} < k_q + \Delta k_q/2$ . Se evalúa  $A(f_p, t_j)|_{k_q \in \theta_l}$  en los puntos de  $k_q$  dentro de  $\theta_l$  y para después sumar la amplitud en el dominio del tiempo y la frecuencia, donde se obtiene  $K(k_q, \theta_l) \Delta k_q \Delta \theta$ . Al dividir el resultado anterior por  $\Delta \theta$  y  $\Delta k_q$  se obtiene  $K(k_q, \theta_l)$ , que se muestra en la Figura 22g. Previamente, se debe definir un rango de bandas de número de onda  $k_q$ , para el cual se recomienda que sus valores se encuentren separados de forma logarítmica y de los cuales se calcula  $\Delta k_q = k_{q+1} - k_q$ . Una vez más se añade el código de MATLAB correspondiente:

```

1 % A_WDM (ecuacion 112), Theta_WDM (ecuacion 109) y norm_k_WDM (ecuacion 108)
2 dlnk = (log(k2)-log(k1))/(N_k-1); % k se define con un rango [k1:k2] con N_k nodos
3 k = exp(log(k1)+(0:N_k-1)*dlnk); % separados logarítmicamente
4 d_k = k.*dlnk;
5 theta = 0:d_theta:360; % Se define d_theta previamente
6 for l = 2:length(theta)
7     ID_theta = find(Theta_WDM > theta(l-1) & Theta_WDM <= theta(l));
8     if ~isempty(ID_theta)
9         for q = 1:N_k
10            ID_k = find(norm_k_WDM(ID_theta) >= k(q)-d_k(q)/2 & ...
11                       norm_k_WDM(ID_theta) < k(q)+d_k(q)/2);
12            if ~isempty(ID_k)
13                K(l-1,q) = K(l-1,q) + sum(A_WDM(ID_theta(ID_k)));
14            end
15        end
16    end
17 end
18 K = transpose((K./(d_k))/(d_theta*pi/180));

```

### B.3. Suavizado de los espectros

La metodología para el suavizado de los espectros direccionales es la siguiente: se realiza una convolución discreta de dos variables bidimensionales, la primera es el espectro direccional en términos de la frecuencia  $S(f_p, \theta_l)$  y la segunda es la ventana de suavizado  $\Upsilon(k, l)$  que debe normalizarse, de modo que:

$$S(f_p, \theta_l)_{smooth} = S(f_p, \theta_l)_{raw} * \left[ \frac{1}{\sum_l \sum_k \Upsilon(k, l)} \Upsilon(k, l) \right], \quad (114)$$

donde  $\Upsilon(k, l)$  se construye por medio de un vector de elementos de la función ventana Hamming, multiplicada por un vector de unos  $J_{1,13} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ , tal que

$$\Upsilon(k, l) = \begin{bmatrix} H(1, 5) \\ H(2, 5) \\ H(3, 5) \\ H(4, 5) \\ H(5, 5) \end{bmatrix} \cdot J_{1,13}, \quad (115)$$

donde cada uno de los elementos del vector de elementos de la función ventana Hamming se calcula de la siguiente manera

$$H(n, N) = 0.54 - 0.46 \cos\left(2\pi \frac{n}{N}\right). \quad (116)$$

Se añade el código de MATLAB correspondiente

```

1 % La variable E es el espectro direccional en terminos de la frecuencia donde la
   % resolución en la dirección es de un grado
2 smooth_window_E = hamming(5)*ones(1,13); % Se crea la ventana de suavizado
3 smooth_window_E = smooth_window_E./sum(sum(smooth_window_E)); % Se normaliza la
   % ventana de suavizado
4 S_smooth2 = [E E(:,1:60)]; % Se crea un arreglo extendido de E, repitiendo las
   % columnas de 1 a 60 grados para evitar discontinuidades en 0 grados
5 for fi =1:10 % Se suaviza el espectro 10 veces
6     S_smooth2 = conv2(S_smooth2,smooth_window_E); % Se realiza la convolucion en 2D
7     S_smooth2 = S_smooth2(3:end-2,7:end-6); % Se eliminan filas y columnas extras
   % producto de la convolucion
8 end
9 E = [S_smooth2(:,361:389) S_smooth2(:,30:360)]; % Se reescribe E

```