

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el SECIHTI (Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE © 2025, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Doctorado en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control

Diseño de algoritmos de control para la emergencia de comportamientos colectivos en vehículos no tripulados

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

Presenta:

Carlos Francisco Montañez Molina

Ensenada, Baja California, México

2025

Tesis defendida por

Carlos Francisco Montañez Molina

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Javier Pliego Jiménez

Codirector de tesis

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Dr. Daniel Saucedo Carvajal

Dr. Adrian Arellano Delgado



Dra. María del Carmen Maya Sánchez

Coordinadora del Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Ana Denise Re Araujo

Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Carlos Francisco Montañez Molina como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Diseño de algoritmos de control para la emergencia de comportamientos colectivos en vehículos no tripulados

Resumen aprobado por:

Dr. Javier Pliego Jiménez

Codirector de tesis

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de tesis

En este trabajo se abordó el diseño de algoritmos de control, que permitan que grupos de agentes con dinámica de doble integrador y vehículos no tripulados repliquen los comportamientos colectivos de consenso, formación, banda y sincronización. Para llevar a cabo su diseño, se hace uso de la teoría de control no lineal y de grafos. Es importante destacar que los algoritmos propuestos, se diseñaron de tal manera que los miembros del grupo no requieran del conocimiento de la medición de velocidad de sus vecinos, ya que esta medición no siempre se encuentra disponible en un caso práctico. No obstante, dicha medición requiere ser conocida localmente, por lo que se ha hecho uso del observador de Luenberger y de un filtro de primer orden para estimarla y así resolver el problema. Para comprobar teóricamente que los objetivos de control se cumplen, se presentan pruebas de estabilidad. Para validar la teoría se realizaron pruebas numéricas y experimentales. Las pruebas numéricas se llevan a cabo empleando el software Matlab. Por otra parte, para realizar los experimentos se hace uso de dos tipos de robots, el primero es un robot móvil con tracción diferencial (robot Khepera III) y el segundo es un robot aéreo de cuatro motores de pequeña escala (robot Crazyflie).

Palabras clave: Comportamientos colectivos, control no lineal, grafos, mediciones de velocidad, Khepera III, Crazyflie

Abstract of the thesis presented by Carlos Francisco Montañez Molina as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Design of control algorithms for the emergence of collective behaviors in unmanned vehicles

Abstract approved by:

Dr. Javier Pliego Jiménez

Thesis Co-Director

Dr. César Cruz Hernández

Thesis Co-Director

In this work is addressed the design of control algorithms, that allow groups of agents with double integrator dynamic and unmanned vehicles to reproduce the collective behaviors of consensus, formation, flocking and synchronization. To carry out its design, it is made use of nonlinear control and graph theory, it is worth pointing out that proposed algorithms were designed to avoid the members of the group to require the use of velocity measurements of the neighbors agents, since in the practice this measurement is not always available. However, the proposed control locally requires the use of such measurement, to tackle this problem the Luenberger observer and a first order filter are used to estimate it. To theoretically demonstrate that the control objectives are achieved stability proof are shown. To validate the theory numerical and experimental tests have been realized. The numerical test are carried out in the software Matlab. On the other hand, To carry out the experiments two types of robots have been used, the first of them is a mobile robot with differential traction (Khepera III robot) and the second is an aerial robot of small scale of four motors (Crazyflie robot).

Keywords: Collective behaviors, nonlinear control, graph, velocity measurements, Khepera III, Crazyflie

Dedicatoria

Para mi mamá y hermano que siempre están para apoyarme.

Agradecimientos

En primera instancia quiero darles las gracias a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por el apoyo económico brindado durante estos cuatro años de estudio, ya que sin él no hubiera podido realizar mis estudios de doctorado, al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE) por haberme aceptado en su programa de posgrado y haber brindado las instalaciones adecuadas para poder cumplir con mis estudios. Al proyecto de investigación en Ciencia Básica entre instituciones “ Sincronización de sistemas complejos y algunas aplicaciones ”, Ref. A1-S-31628 por el apoyo económico otorgado.

A todos los profesores, maestros y doctores que han formado parte de mi preparación académica, ya que sin sus enseñanzas no hubiera obtenido mis objetivos.

A los miembros de mi comité de tesis al Dr. Adrian Arellano Delgado, al Dr. Daniel Saucedo Carvajal y al Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez por sus valiosas enseñanzas y comentarios que aportaron, para cumplir adecuadamente con el desarrollo de mi trabajo de tesis muchas gracias. Quiero especialmente agradecer al Dr. Javier Pliego Jiménez y al Dr. César Cruz Hernández mis directores de tesis por confiar en mí y permitirme trabajar con ellos desde la maestría, siempre les estaré agradecido.

A mis compañeros de maestría y de doctorado por los buenos y malos momentos, ya que de todo se aprende.

Al Dr. Javier Pliego, al Dr. César Cruz, Michel Montañez (mi hermano), Johnny Rubio, Rolando Díaz, Jairo Mendoza, Miguel Sidón, Dr. Adrian Arellano, Carlos Villalobos, Dr. Rigoberto Martínez, Antonio Burgueño, Alan López, Rubén González, Dr. Juan José Cetina, Diana Soto y Jesús Sevilla, por la ayuda y conocimientos que brindaron para poder llevar a cabo los experimentos con los drones, a Néstor Mendoza, Lizbeth Carrasco, René Valencia y Víctor Yee por las pláticas dentro del laboratorio, al Dr. Francisco Carranza, Iván González, Rossy Fuentes, Julieta Pacheco y Aurora Robles, muchas gracias por su disponibilidad y apoyo brindado dentro de la institución.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	xi
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Justificación	3
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo general	3
1.2.2. Objetivos específicos	4
1.3. Antecedentes	4
1.4. Estructura de la tesis	7
Capítulo 2. Preliminares	
2.1. Teoría de grafos	9
2.2. Comportamientos colectivos	12
2.3. Conclusiones del capítulo	15
Capítulo 3. Sistema con dinámica de doble integrador	
3.1. Modelo matemático del sistema con dinámica de doble integrador y diseño de los algoritmos de control	16
3.1.1. Algoritmo de control de consenso, formación y bandada empleando mediciones de velocidad	17
3.1.2. Algoritmo de control de consenso, formación y bandada sin mediciones de velocidad	22
3.1.3. Control de bandada con información parcial	24
3.1.4. Control de sincronización en velocidad	27
3.2. Resultados numéricos	30
3.2.1. Resultados comportamiento de consenso	32
3.2.2. Resultados comportamiento de formación	34
3.2.3. Resultados comportamiento de bandada usando el observador distribuido	36
3.2.4. Resultados comportamiento de sincronización	39
3.3. Conclusiones del capítulo	41
Capítulo 4. Robot móvil con tracción diferencial y diseño de los algoritmos de control	
4.1. Modelo matemático del robot móvil con tracción diferencial	42
4.1.1. Algoritmo de control para seguimiento de velocidad	43
4.2. Algoritmos de control para un grupo de robots de tracción diferencial	44

4.2.1.	Algoritmo para sincronización en velocidad	45
4.2.2.	Algoritmo de control de bandada	47
4.2.3.	Algoritmo de control de sincronización en velocidad con formación	52
4.3.	Resultados experimentales	54
4.3.1.	Resultados del algoritmo de sincronización en velocidad	55
4.3.2.	Resultados del algoritmo de bandada usando el observador distribuido	58
4.3.3.	Resultados del algoritmo de sincronización en velocidad con formación	62
4.4.	Conclusiones del capítulo	66
Capítulo 5. Robot aéreo cuadricóptero y diseño de los algoritmos de control		
5.1.	Modelo matemático del cuadricóptero	67
5.2.	Algoritmo de control de orientación	68
5.3.	Algoritmos de control para un grupo de cuadricópteros	71
5.3.1.	Algoritmo de control de consenso, formación y bandada	72
5.3.2.	Control de sincronización en velocidad para un grupo de cuadricópteros	74
5.4.	Resultados	75
5.4.1.	Resultados del algoritmo de formación	76
5.4.2.	Resultados del algoritmo de bandada	81
5.4.3.	Resultados del algoritmo de bandada usando el observador distribuido	85
5.4.4.	Resultados numéricos del algoritmo de sincronización	88
5.5.	Conclusiones del capítulo	92
Capítulo 6. Conclusiones		
6.1.	Conclusiones	93
6.2.	Contribuciones	93
6.3.	Trabajos derivados de la tesis	95
6.4.	Trabajo futuro	95
Literatura citada		97

Lista de figuras

Figura	Página
1. Comportamientos colectivos en (a) hormigas, (b) aves y (c) peces.	1
2. Aplicaciones al emular los comportamientos colectivos naturales con robots: (a) vigilancia, (b) mapeo, (c) carga de objetos, (d) riego de cultivos, (e) espectáculos visuales y (f) búsqueda.	2
3. Grafo no dirigido en (a) y Grafo dirigido en (b).	9
4. Camino que une a cada uno de los nodos, grafo conectado en (a) y fuertemente conectado en (b).	10
5. Subgrafo de un grafo no dirigido (a) y de un grafo dirigido (b).	10
6. Árbol de expansión de un grafo no dirigido (a) y de un grafo dirigido (b).	11
7. Comportamiento de consenso.	13
8. Comportamiento de formación.	13
9. Comportamiento de bandada.	14
10. Comportamiento de sincronización.	15
11. Grafo dirigido en anillo y su matriz Laplaciana.	30
12. Norma del error en velocidad de lo medido contra lo estimado.	32
13. Trayectoria generada por los agentes en el plano $x - y$	32
14. Evolución en el tiempo de la posición de los agentes usando el control de consenso.	33
15. Objetivo de control de consenso en posición: (a) eje x y (b) eje y	33
16. Medición de velocidad de cada agente comportamiento de consenso: (a) eje x y (b) eje y	34
17. Formación de los agentes en el plano $x - y$	35
18. Objetivo de control de formación en posición: (a) eje x y (b) eje y	35
19. Medición de velocidad de cada agente comportamiento de formación: (a) eje x y (b) eje y	36
20. Perfil de velocidad deseado estimado contra el perfil deseado: (a) eje x y (b) eje y	37
21. Trayectoria generada por los agentes al emplear \hat{v}^d	37
22. Evolución en el tiempo de la velocidad de los agentes al usar el control de bandada: (a) eje x y (b) eje y	38
23. Objetivo de control de bandada en posición: (a) eje x y (b) eje y	38
24. Trayectoria generada por los agentes en el plano $x - y$ al usar el control de sincronización en velocidad.	39
25. Distancia euclidiana entre agentes.	39
26. Evolución en el tiempo de la velocidad de los agentes: (a) eje x y (b) eje y	40
27. Objetivo de control en velocidad: (a) eje x y (b) eje y	40

Figura	Página
28. Esquema del robot móvil con tracción diferencial.	42
29. Esquema del experimento con robots móviles de tracción diferencial.	54
30. Grafo no dirigido topología anillo.	55
31. Mediciones de velocidad de cada robot: (a) eje x y (b) eje y	56
32. Objetivo de control en velocidad: (a) eje x y (b) eje y	56
33. Medición de la posición angular de cada robot.	57
34. Entrada de control para cada robot.	57
35. Trayectoria generada por los robots en el plano $x-y$	58
36. Velocidad estimada: (a) eje x y (b) eje y y errores de observabilidad: (c) eje x y (d) eje y	59
37. Trayectoria generada por los agentes al realizar el seguimiento del perfil v^d y formación deseada.	59
38. Evolución en el tiempo del objetivo de control de bandada en posición: (a) eje x y (b) eje y	60
39. Evolución en el tiempo de la medición de velocidad de cada agente: (a) eje x y (b) eje y	60
40. Posición angular de cada agente.	61
41. Entradas de control: (a) magnitud de la velocidad lineal y (b) velocidad angular.	61
42. Grafo dirigido topología anillo y su matriz Laplaciana.	62
43. Medición de la velocidad de cada robot móvil: (a) eje x y (b) eje y	62
44. Objetivo de control en velocidad: (a) eje x y (b) eje y , y norma de la variable $\dot{s}_{ij} = \dot{s}_i - \dot{s}_j$	63
45. Objetivo de control en posición: (a) eje x y (b) eje y , y norma de la variable $s_{ij} = s_i - s_j$	64
46. Posición angular empleando el algoritmo de sincronización en velocidad y formación.	64
47. Entradas de control empleando el algoritmo de sincronización en velocidad y formación: (a) magnitud de la velocidad lineal y (b) velocidad angular.	65
48. Trayectoria generada por los robots en el plano $x-y$ y formación.	65
49. Esquemático del cuadricóptero.	67
50. Esquema del objetivo de control.	68
51. Esquema del experimento con cuadricópteros.	75
52. Grafos topología anillo y sus matrices Laplacianas: (a) no dirigido y (b) dirigido.	76
53. Objetivo de control en posición algoritmo de formación: (a), (b) grafo no dirigido, y (c), (d) grafo dirigido.	78
54. Seguimiento de trayectoria en el eje z y valor absoluto del error \tilde{p}_{zi} : (a), (b) grafo no dirigido, y (c), (d) grafo dirigido.	78

Figura	Página
55. Velocidad estimada de cada cuadricóptero: (a), (b), (c) grafo no dirigido, y (d), (e), (f) grafo dirigido.	79
56. Mediciones del vector deseado z_d contra el vector z_b : (a), (b), (c) grafo no dirigido, y (d), (e), (f) grafo dirigido.	80
57. Fuerza de empuje de cada cuadricóptero algoritmo de formación: (a) grafo no dirigido y (b) grafo dirigido.	80
58. Formación y trayectoria generada por los cuadricópteros en el espacio tridimensional y en el plano: (a) grafo no dirigido y (b) grafo dirigido.	81
59. Objetivo de control en posición algoritmo de bandada: (a), (b) grafo no dirigido, y (c), (d) grafo dirigido.	82
60. Seguimiento de trayectoria en el eje z y valor absoluto del error \tilde{p}_{zi} : (a), (b) grafo no dirigido, y (c), (d) grafo dirigido.	83
61. Velocidad estimada de cada cuadricóptero: (a), (b), (c) grafo no dirigido, y (d), (e), (f) grafo dirigido.	83
62. Mediciones del vector deseado z_d contra el vector z_b : (a), (b), (c) grafo no dirigido, y (d), (e), (f) grafo dirigido.	84
63. Fuerza de empuje de cada cuadricóptero algoritmo de bandada: (a) grafo no dirigido y (b) grafo dirigido.	85
64. Trayectoria generada por los cuadricópteros al realizar el seguimiento del perfil de velocidad deseado y formación: (a), grafo no dirigido y (b) grafo dirigido.	85
65. Objetivo de control en posición algoritmo de bandada usando el observador distribuido.	86
66. Velocidad estimada contra la velocidad deseada en el plano: (a) eje x y (b) eje y	87
67. Mediciones del vector deseado z_d contra el vector z_b usando el observador distribuido.	87
68. Trayectoria generada por los cuadricópteros al realizar el seguimiento del perfil de velocidad deseado estimado y formación.	88
69. Trayectoria generada por los cuadricópteros.	90
70. Objetivo de control algoritmo de sincronización: (a) eje x y (b) eje y	90
71. (a) Seguimiento de trayectoria en el eje z y (b) valor absoluto del error de posición en z	91
72. Velocidad estimada de cada cuadricóptero: (a) eje x , (b) eje y y (c) eje z	91
73. Trayectoria de la orientación reducida de los robots en la simulación.	92

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Ganancias para los algoritmos de consenso, formación, bandada y sincronización y los obserbadores	31
2. Ganancias para el algoritmo de sincronización y observador	89

Capítulo 1. Introducción

En los últimos años grupos de investigadores e ingenieros en el área de control y robótica, se han enfocado en el estudio de los comportamientos colectivos de agrupación, exploración, movimiento coordinado y consenso, por mencionar algunos, observados en seres vivos, como hormigas (ver figura 1a) al evitar su desorientación (Wilson et al., 2018), en aves (ver Figura 1(b)) al realizar formaciones para recorrer largas distancias (Portugal et al., 2014) o en los peces (ver figura 1(c)) al agruparse en cardúmenes para protegerse de los depredadores (Pavlov y Kasumyan, 2000), con el objetivo de lograr que dichos comportamientos emerjan en grupos de robots (terrestres (Martínez, 2019), aéreos (Bandala et al., 2014) o acuáticos (Duarte et al., 2016)), para que estos puedan llevar a cabo tareas más complicadas, que un robot por si solo sería incapaz de realizar y en un menor tiempo, lo que implica reducción de energía y costos. Otra ventaja de lograr lo anterior es que robots de gran tamaño y de altos costos de mantenimiento podrían sustituirse por unos de menor tamaño que no sean tan complicados de mantener y que en conjunto pueden realizar la misma tarea que el de gran tamaño.

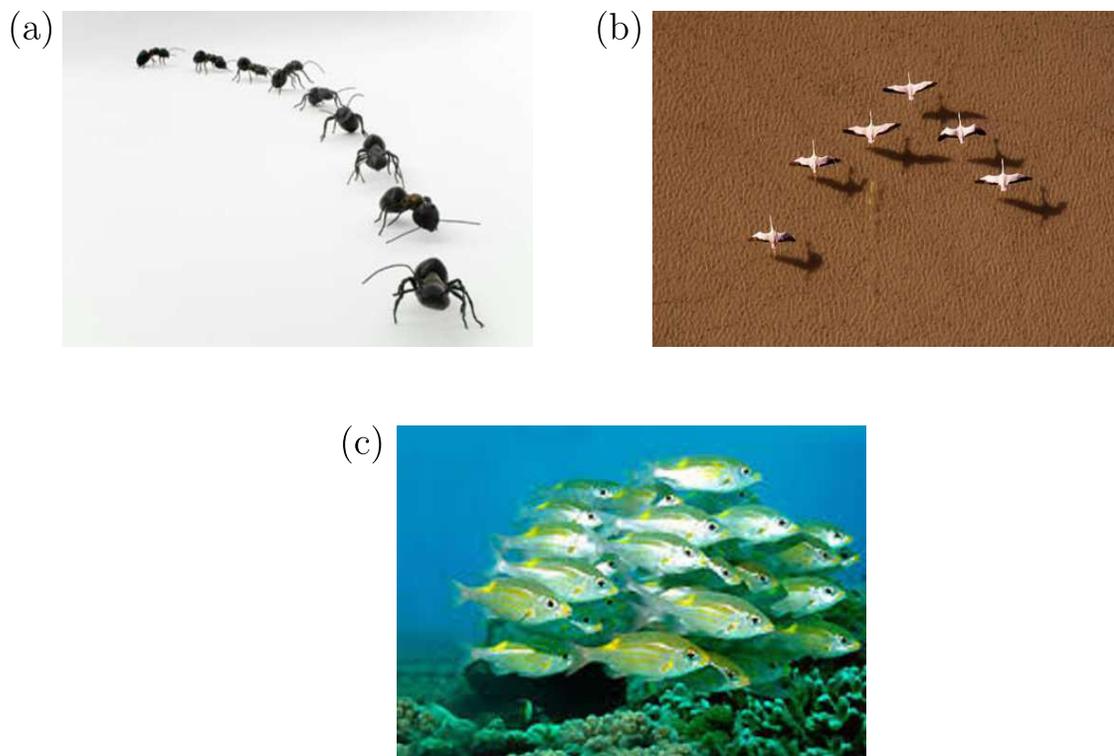


Figura 1. Comportamientos colectivos en (a) hormigas, (b) aves y (c) peces.

Por otra parte, obtener características como escalabilidad, confiabilidad y flexibilidad son deseadas al trabajar con grupos de robots, puesto que estas se encuentran muy presentes en los sistemas colectivos (Trianni y Campo, 2015).

Algunas de las aplicaciones que se pueden lograr al emular los comportamientos colectivos en grupos de robots son vigilancia Figura 2(a), mapeo de áreas Figura 2(b), tareas de carga Figura 2(c), riego de cultivos Figura 2(d), espectáculos aéreos Figura 2(e) y búsqueda Figura 2(f), por mencionar algunos.

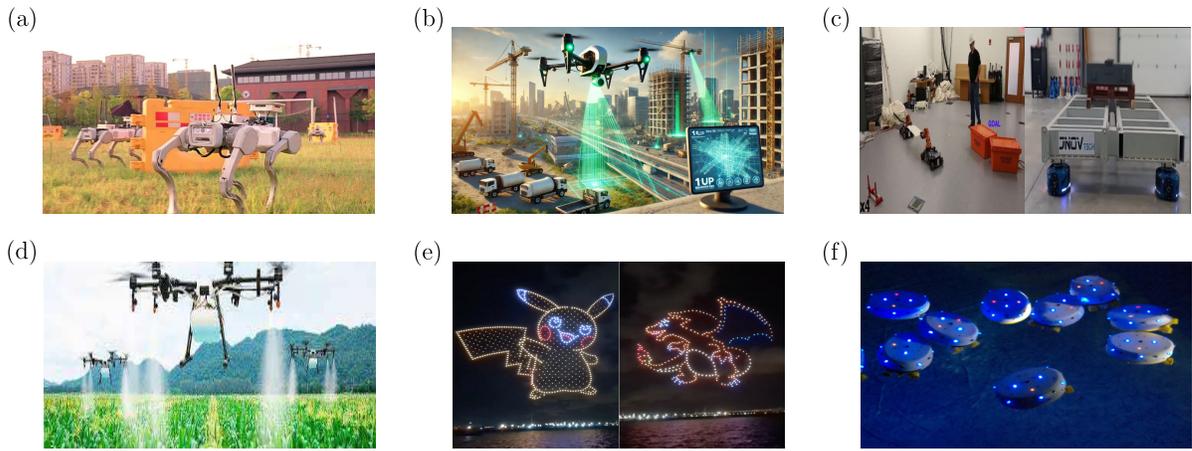


Figura 2. Aplicaciones al emular los comportamientos colectivos naturales con robots: (a) vigilancia, (b) mapeo, (c) carga de objetos, (d) riego de cultivos, (e) espectáculos visuales y (f) búsqueda.

En el presente trabajo se aborda el diseño de leyes de control que logren que los comportamientos colectivos de consenso, formación, bandada y sincronización emerjan en grupos de vehículos no tripulados, por lo tanto se recurre a la teoría de control no lineal y de grafos para su obtención. Cabe señalar que los algoritmos propuestos a diferencia de otros que se encuentran en la literatura, no requieren de las mediciones de velocidad de los miembros del grupo, lo cual es de utilidad, debido a que en la práctica esta medición no siempre se encuentra disponible, no obstante, dicha medición si es requerida localmente, para abordar este problema se hace uso de un observador de Luenberger y de un filtro de primer orden para su estimación.

Los vehículos no tripulados para los cuales se han diseñado los algoritmos de control son robots terrestres y aéreos, con la característica que ambos son subactuados, lo que los vuelve de gran interés para los investigadores e ingenieros en el área de control y de robótica, por los retos que conlleva obtener leyes de control para este tipo de sistemas. El primer vehículo es un robot móvil de tracción diferencial y el segundo es un robot aéreo de cuatro rotores (cuadricóptero). Para probar teóricamente que los controles propuestos cumplen con los objetivos establecidos se presentan pruebas de estabilidad. Además de lo anterior, en este trabajo se han realizado simulaciones y pruebas experimentales que permiten validar la teoría presentada, las simulaciones se obtienen haciendo uso del software Matlab, en el caso de las pruebas experimentales se hace uso de cuatro robot móviles llamados Khepera III y de tres cuadracópteros de pequeña escala conocidos como Crazyflie 2.1. La implementación de los algoritmos de control en el

caso de los Khepera III se hace utilizando el software Matlab, mientras que los lenguajes de programación Python y C son utilizados para la programación de los robots aéreos. Para obtener la posición de los robots se usa un sistema de captura de movimiento compuesto por seis cámaras, este sistema puede entregar mediciones tanto de posición como de orientación, en las secciones correspondientes se muestran los esquemas que representan los experimentos.

1.1. Justificación

La razón por la cual se desea llevar a cabo este trabajo de tesis, se debe a que grupos de robots (sistemas multi-agente) al replicar los comportamientos observados en seres vivos pueden realizar tareas más complejas o bien de manera más eficiente que un solo robot. Además, la mayoría de los controladores propuestos en la literatura para grupos de robot, están diseñados para sistemas donde los agentes presentan una dinámica de un solo o doble integrador ($\dot{x}_i = u_i$, $\ddot{x}_i = u_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$). Hasta cierto punto esto es comprensible, por lo simple que resulta diseñar controles para estos sistemas. Sin embargo, en dichos controles se asumen las mediciones completas del estado lo que en diversas situaciones prácticas no es posible. En vista de lo anterior en este trabajo se buscará dar solución a dicho problema. Cabe resaltar que los algoritmos de control propuestos, serán diseñados para vehículos no tripulados que presentan una dinámica no lineal, están sujetos a restricciones cinemáticas y en algunos casos son sistemas subactuados.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

El objetivo de esta tesis es diseñar algoritmos de control en grupos de robots terrestres (robots móviles de tracción diferencial) y vehículos aéreos (drones de cuatro rotores) para que logren emular los comportamientos de formación, consenso, sincronización y movimiento coordinado (bandada). Se considerarán dos casos: medición completa y medición parcial del estado del sistema.

1.2.2. Objetivos específicos

1. Diseñar algoritmos de consenso, formación, bandada y sincronización en sistemas de doble integrador.
2. Diseñar algoritmos de control para lograr formación, sincronización y movimiento coordinado en grupos de robots móviles con restricciones no holonómicas usando mediciones completas y parciales del vector de estado.
3. Diseñar algoritmos de consenso, formación, sincronización y movimiento coordinado para enjambres de robots aéreos de cuatro rotores utilizando mediciones totales y parciales del estado.
4. Validar los algoritmos de control propuestos mediante simulaciones numéricas y experimentos.

1.3. Antecedentes

El estado del arte referente al diseño de leyes de control, que permiten emular comportamientos colectivos en grupos de robots es muy extenso, por tal motivo, en este apartado solo se mencionan algunos de los documentos realizados en el grupo de trabajo, y algunos que se consideran de más relevancia encontrados en la literatura.

En el grupo de sincronización y sistemas complejos (CICESE-UABC) se han realizado diversos trabajos, en los cuales se ha hecho uso de la teoría de sistemas complejos y control no lineal para lograr replicar comportamientos colectivos tanto en robots móviles terrestres como aéreos, entre estos se encuentran los trabajos reportados en (Díaz, 2018; Montañez, 2020; Rubio, 2022). En los cuales, gracias a los algoritmos de control diseñados, se logró que un grupo de cuadricópteros realicen un vuelo en formación, que puede ser aplicado en tareas de búsqueda y vigilancia. En los trabajos de maestría y doctorado (Martínez, 2014, 2019), el autor ha propuesto leyes de control para lograr que grupos de robots móviles lleven a cabo diferentes comportamientos emergentes como: formación, sincronización, agregación, movimiento coordinado, y cita; para validar el funcionamiento de las leyes de control presentadas en (Martínez, 2019) el autor presenta resultados experimentales. Por otra parte, Martínez et al. (2018), propusieron algoritmos de control para generar comportamientos auto organizados como agregación, agrupación y cita sin requerir una topología de comunicación preestablecida entre los robots. La efectividad de los algoritmos se validó mediante resultados numéricos. Además, de los documentos antes mencionados

en las tesis de maestría (Vara, 2021; Villalobos, 2023), se han propuesto algoritmos que permiten que robots de tracción diferencial repliquen el comportamiento de sincronización, la diferencia entre estos dos trabajos no es solo el algoritmo de control, sino que Villalobos (2023) hace uso de un sistema caótico para obtener una comunicación segura, ya que la información es encriptada, para validar su propuesta presenta resultados experimentales.

En trabajos ajenos a la institución se pueden encontrar trabajos como, (Ren, 2008), donde el autor propone un algoritmo de control de consenso para cada uno de los siguientes casos de estudio, consenso con una entrada de control acotada, consenso sin mediciones relativas de velocidad, consenso con una velocidad de referencia disponible para cada agente del grupo y consenso con una entrada de control acotada y con acceso parcial a un estado de referencia del grupo, para su validación se muestran resultados numéricos. Dado que en la práctica el intercambio de información entre agentes no es instantáneo, el problema de consenso con retardos de tiempo en la comunicación se aborda en (Sun y Wang, 2009; Hu y Lin, 2010). Abdessameud y Tayebi (2013), proponen algoritmos de consenso que permiten abordar los casos en que los agentes estén sujetos a saturación de entrada y no se encuentre disponible la velocidad de los agentes para ser retroalimentada. El problema de consenso en sistemas con dinámica de doble integrador empleando redes heterogéneas es estudiado en (Goldin y Raisch, 2014), es importante mencionar que el algoritmo propuesto permite lograr consenso aún y cuando los grafos que transmiten la información de posición y velocidad sean diferentes y no se encuentren conectados. Desde el punto de vista experimental emular el comportamiento de consenso en el plano no es muy viable, debido a que los robots colisionarían al converger al mismo punto, en los trabajos (Joshi et al., 2016, 2019), se logra abordar el problema dando alturas diferentes a cada cuadricóptero o como sucede en (Rojo et al., 2019; Yang et al., 2020), donde se propone para dar solución al problema incluir en la entrada de control de consenso seguimiento de una trayectoria deseada.

El problema de formación se aborda en los siguientes trabajos. Abdessameud y Tayebi (2009), abordan el problema de formación empleando vehículos aéreos no tripulados, la ley de control propuesta se diseña de tal manera que los vehículos puedan realizar seguimiento de trayectoria mientras realizan una formación, para que se cumpla lo anterior el grafo empleado para la comunicación tiene que ser no dirigido y conectado. Un punto a destacar de este trabajo es que la ley de control propuesta permanece acotada superiormente sin importar la cantidad de información que se retroalimenta de cada vecino del grupo. Un algoritmo de control de formación para un grupo de robots móviles basado en consenso es presentado en el artículo (Listmann et al., 2009). Algoritmos de control que permiten que agentes modelados por sistemas con dinámica de doble integrador realicen formaciones son presentados en (Bazoula y Nemra,

2013; Han et al., 2016; Zhao y Zelazo, 2017; Chen et al., 2022). Bazoula y Nemra (2013), proponen un algoritmo de control que permite que los agentes del grupo adopten la forma del grafo que se está utilizando para la comunicación, cabe señalar que el algoritmo solo funciona con grafos dirigidos. En el caso de los trabajos (Han et al., 2016; Zhao y Zelazo, 2017), las formaciones son variantes en el tiempo, en el caso del primer trabajo para que el control propuesto cumpla con su objetivo, el grafo empleado para el intercambio de información tiene que ser dirigido, mientras que en (Zhao y Zelazo, 2017) el grafo tiene que ser no dirigido y conectado. En (Chen et al., 2023), el control propuesto permite que un grupo de robots móviles con restricciones no holonómicas emulen el comportamiento de formación, aún y cuando en el canal de comunicación exista ruido. En el trabajo (Díaz. et al., 2023), se ha diseñado la ley de control de formación haciendo uso de la técnica de control no lineal por modos deslizantes. En los trabajos (Yang et al., 2023; Zhang et al., 2023; Guo et al., 2023), los autores han logrado replicar el comportamiento de formación en un grupo de cuadricópteros.

En lo que respecta al comportamiento de bandada, Moshtagh et al. (2005), proponen leyes de control para lograr que un grupo de agentes no holonómicos en 2 y 3 dimensiones lleven a cabo el comportamiento de bandada aún y cuando las topologías de comunicación cambien con el tiempo. Por su parte Shi et al. (2009); Gao et al. (2017) logran replicar el comportamiento de bandada haciendo uso de la estrategia líder seguidor, para validar el funcionamiento de sus leyes de control presentan resultados numéricos. Ning et al. (2018) diseñan una ley de control de bandada, para sistemas con dinámica de doble integrador basada en reglas de interacción de pruebas de ángulo agudo, la entrada de control incluye un término que sirve para evitar colisiones entre los robots, no obstante, dicha ley requiere del conocimiento de la velocidad de los agentes vecinos, lo cual no es muy práctico. En contraste con los últimos tres trabajos mencionados en (Jian et al., 2018), el control que se propone no se diseñó usando sistemas lineales con dinámica de doble integrador, ya que se emplea el modelo dinámico del cuadricóptero. En el trabajo realizado por Saif et al. (2019), se ha replicado el comportamiento de banda en un grupo de vehículos de cuatro motores de manera experimental, los autores para reducir el error en estado estacionario causado por dinámicas no modeladas, proponen el uso de un término integral para abordar dicho problema. El comportamiento de bandada es tratado como un problema de optimización en (Cheng y Wang, 2020), el control que se propone se diseñó empleando funciones potenciales; para validar el funcionamiento se realizaron experimentos utilizando un grupo de robots de tracción diferencial. En (Khaledyan et al., 2020), se estudia el caso en el cual no todos los robots móviles tienen conocimiento de la velocidad deseada de bandada, debido a esto los autores proponen un observador distribuido que permite estimar dicha velocidad, no obstante, para que el observador tenga un buen funcionamiento el grafo empleado en la comunicación tiene que ser no dirigido y conectado.

El comportamiento de sincronización es abordado en los siguientes artículos. En (Sun et al., 2009; Liu et al., 2016), los algoritmos que se presentan permiten que un grupo de robots móviles realicen seguimiento de trayectorias mientras sincronizan sus movimientos. Un algoritmo de control basado en sincronización, para llevar a cabo la formación de cuadrícópteros se presenta en (Sumano et al., 2013). Una ley de control que logra que una flota de cuadrícópteros lleven a cabo un vuelo estacionario sincronizado es presentado en (Niemoczynski et al., 2014). En (Gutiérrez et al., 2017), el control de sincronización se diseñó para que un grupo de robots móviles mantengan una formación mientras realizan el seguimiento de la trayectoria de un líder virtual, con la finalidad de probar el desempeño de su algoritmo los autores utilizan diferentes grafos dirigidos en sus experimentos. En los trabajos realizados por Li et al. (2018, 2023); Guo et al. (2024), se logra emular el comportamiento de sincronización usando la estrategia líder seguidor en sistemas con dinámica de doble integrador (Li et al., 2018) y en cuadrícópteros (Li et al., 2023; Guo et al., 2024). Con el propósito de abordar el caso en el cual no todos los agentes del grupo conocen los estados del líder, se propone un observador distribuido. Feng et al. (2019), proporcionan condiciones suficientes y necesarias, que permiten que su control replique el comportamiento de sincronización en un grupo de agentes con dinámica de doble integrador. A diferencia de la mayoría de los trabajos antes citados, en Zhang et al. (2022), los autores hacen uso de un estado auxiliar que evita utilizar las mediciones de velocidad de los agentes vecinos al intercambiar información, para validar que el comportamiento bajo estudio es replicado, se presentan simulaciones. No obstante, aún y cuando se considera el caso en el cual el control logra que un grupo de robots móviles se sincronicen, en un caso real los robots colisionarían, porque las posiciones de los robots convergen al mismo valor.

1.4. Estructura de la tesis

Lo que resta de este trabajo se encuentra estructurado de la siguiente manera:

En el **Capítulo 2** se encuentra una breve introducción sobre la teoría de grafos y las definiciones de los comportamientos colectivos de consenso, formación, bandada y sincronización observados en la naturaleza.

En el **Capítulo 3** se presenta el modelo matemático del sistema con dinámica de doble integrador, los algoritmos de control propuestos para emular los comportamientos bajo estudio, las pruebas de estabilidad y los resultados numéricos.

En el **Capítulo 4** se presenta tanto el diseño de los algoritmos de control, que se proponen para emular los comportamientos de bandada, sincronización y formación en grupos de robots de tracción diferencial como pruebas de estabilidad y resultados experimentales.

En el **Capítulo 5** se presenta el modelo matemático del cuadricóptero, los algoritmos propuestos para emular los comportamientos bajo estudio, la ley de control que permite una correcta orientación del cuadricóptero, pruebas de estabilidad y resultados tanto numéricos como experimentales.

En el **Capítulo 6** se encuentran las conclusiones, las contribuciones del trabajo, los trabajos derivados y el trabajo futuro.

Capítulo 2. Preliminares

El presente capítulo se encuentra conformado por una breve introducción a la teoría de grafos y las definiciones correspondientes a los comportamientos colectivos naturales que se desean emular en este trabajo en vehículos no tripulados (robot de tracción diferencial y aéreos de cuatro motores). El lector interesado en profundizar en estos tópicos, puede consultar por ejemplo (Trudeau, 1993; Bollobás, 1998; Sumpter, 2010; Pais, 2012)

2.1. Teoría de grafos

Dado que en este trabajo se hace uso de grafos para realizar la comunicación entre agentes (robots), y de algunas de sus características y propiedades para realizar las pruebas de estabilidad, a continuación se presenta una pequeña introducción sobre la teoría de grafos.

Sea $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{E})$ un grafo, el cual se encuentra compuesto por el conjunto de nodos (robots o agentes) \mathcal{N} y conjunto de aristas $\mathcal{E} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$, estos a su vez pueden ser grafos no dirigidos (bidireccional) Figura 3(a) y dirigidos (unidireccional) Figura 3(b), la diferencia entre estos grafos es que en los grafos no dirigidos las aristas son pares no ordenados de \mathcal{N} , por lo que la información fluye en ambas direcciones.

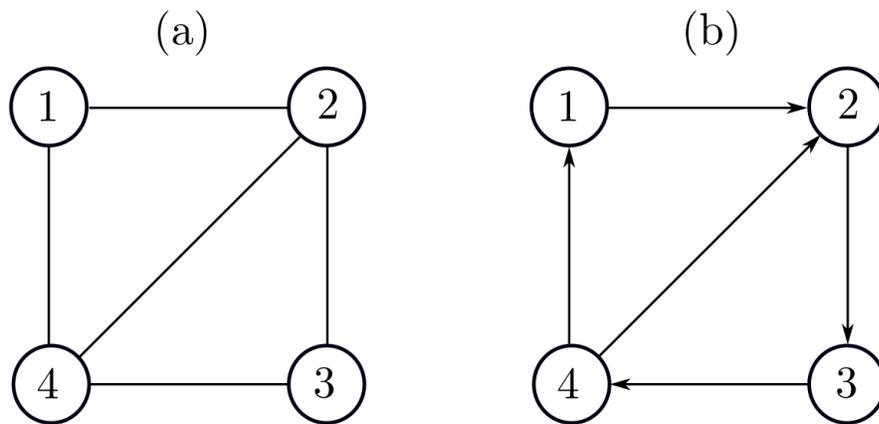


Figura 3. Grafo no dirigido en (a) y Grafo dirigido en (b).

Los grafos pueden presentar las siguientes características (Trudeau, 1993; Ren et al., 2007; Deo, 2017):

- Un grafo no dirigido es conectado si existe al menos un camino que une cada par de nodos distintos de un grafo (ver Figura 4(a)).

- Un grafo dirigido es fuertemente conectado si existe al menos un camino directo de cualquier nodo a cualquiera de los otros nodos del grafo (ver Figura 4(b)).

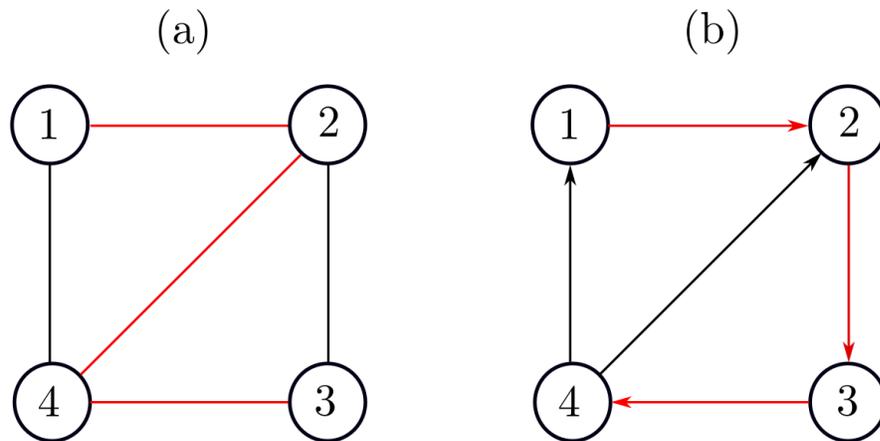


Figura 4. Camino que une a cada uno de los nodos, grafo conectado en (a) y fuertemente conectado en (b).

- Un subgrafo $\mathcal{G}_1 = (\mathcal{N}_1, \mathcal{E}_1)$ no es más que simplemente un grafo de \mathcal{G} , por lo tanto se dice que $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$ y que $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ (ver Figura 5).

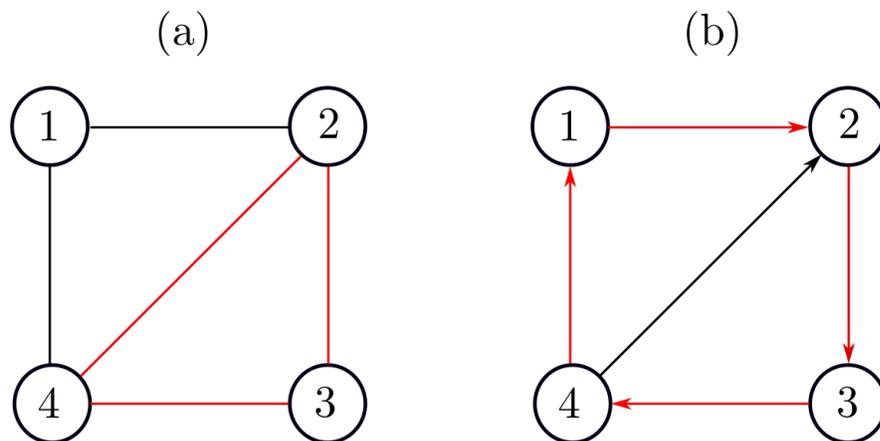


Figura 5. Subgrafo de un grafo no dirigido (a) y de un grafo dirigido (b).

- Un árbol de expansión es un subgrafo, ya sea de un grafo dirigido o no dirigido que contiene cada nodo del grafo (Bollobás, 1998), por lo tanto el subgrafo resultante, si se emplea un grafo no dirigido será un árbol no dirigido (ver Figura 4(a)), de lo contrario el árbol será dirigido (ver Figura 4(b)). En el caso de grafos dirigidos un árbol de expansión puede existir independientemente de si el grafo es fuertemente conectado o no (Ren et al., 2007; Deo, 2017), por el contrario en los grafos no dirigidos dicho subgrafo existe si y solo si el grafo es conectado (Ren et al., 2007).

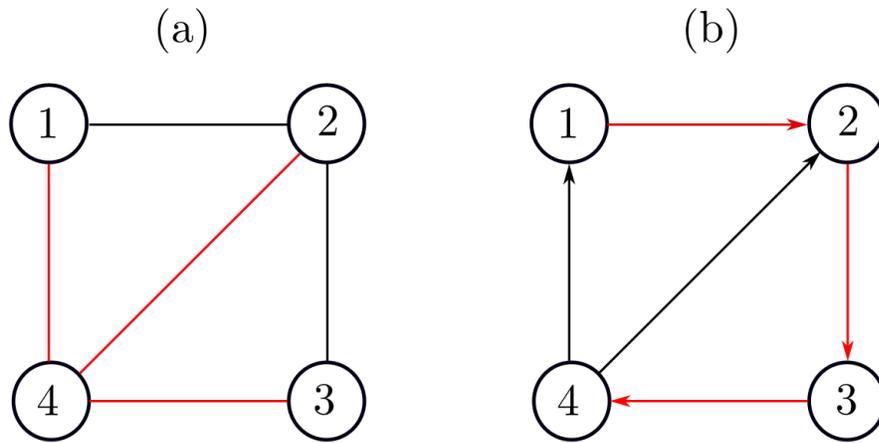


Figura 6. Árbol de expansión de un grafo no dirigido (a) y de un grafo dirigido (b).

De la teoría de grafos se sabe que un grafo puede ser representado por medio de matrices (Bollobás, 1998; Li, 2022) para facilitar su estudio matemáticamente, dichas matrices se describen a continuación.

- La matriz de adyacencia \mathbf{A} asociada a un grafo es una matriz de dimensión $N \times N$, donde N es el número de nodos. Para un grafo dirigido \mathbf{A} está dada por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ va en dirección a } i \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (1)$$

para un grafo no dirigido dicha matriz se encuentra definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \{i, j\} \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (2)$$

- La matriz de grado \mathbf{D} es una matriz diagonal de dimensiones $N \times N$. La matriz \mathbf{D} tanto para un grafo no dirigido como un dirigido está dada por

$$d_{ij} = \begin{cases} \sum_{i=1}^N d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (3)$$

donde d_i es el número de nodos que son adyacentes al nodo i .

- La matriz Laplaciana L de un grafo dirigido o no dirigido es una matriz de dimensiones $N \times N$ y se encuentra definida como

$$L = D - A. \quad (4)$$

La matriz Laplaciana tiene las siguientes propiedades:

- La matriz L asociada a un grafo no dirigido siempre es simétrica, en el caso de un grafo dirigido lo anterior no siempre se cumple.
- Los valores propios diferentes de 0 de la matriz Laplaciana de un grafo no dirigido son definidos positivos y reales, por lo que L es semidefinida positiva.
- Los valores propios diferentes de 0 de la matriz Laplaciana de un grafo dirigido tienen parte real positiva.
- El valor propio 0 de L tanto de un grafo no dirigido como de un dirigido tiene asociado el vector propio $\mathbf{1} \in \mathfrak{R}^N$ (vector compuesto de unos), siendo este el espacio nulo de L , por lo que es fácil mostrar que $L\mathbf{1} = \mathbf{0}$ (Ren et al., 2007).
- La matriz L en la cual el valor propio 0 tiene multiplicidad algebraica uno, permite conocer si el grafo empleado es conectado (caso grafos no dirigidos) o fuertemente conectado (caso grafos dirigidos).

2.2. Comportamientos colectivos

Los comportamientos colectivos se pueden considerar como un fenómeno que emerge cuando dos o más agentes (seres vivos, células o neuronas por mencionar algunos) interactúan entre sí y se producen patrones, que bajo una simple interpretación parecerían espontáneos, sin embargo, estos se producen por el medio que permite que exista una comunicación entre los objetos que conforman el grupo. En la literatura se puede encontrar el trabajo Pais (2012), en el cual se dice que un comportamiento colectivo es emergente cuando no puede entenderse simplemente como la suma de sus partes constituyentes. De acuerdo con Sumpter (2010), los comportamientos colectivos se pueden encontrar a nuestro alrededor y en nosotros mismos, ejemplos de estos son enjambres de abejas, las neuronas interactuando en el cerebro, las células formando nuevos tejidos en el cuerpo o incluso los átomos al formar estructuras. El comportamiento colectivo también se considera un aspecto importante de los fenómenos observados en átomos y moléculas, por ejemplo durante la magnetización (Vicsek, 2001).



Figura 7. Comportamiento de consenso.

Consenso. El comportamiento de consenso se presenta cuando todos los agentes de un grupo coinciden en el valor de una variable de interés (Ren y Beard, 2008; Kocarev, 2013). La real academia española define el consenso como el acuerdo adoptado por consentimiento entre todos los miembros de un grupo, para realizar una tarea, un ejemplo de este comportamiento es observado en la naturaleza cuando las aves llegan a un lugar específico para reproducirse Figura 7. Ya que el comportamiento de consenso consiste en lograr que todos los agentes del grupo lleguen a un acuerdo y converjan a un mismo punto. En este trabajo se propone como objetivo de control para lograr consenso

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_{ij}(t) = \mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t) = \mathbf{0} \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{0} \forall i, j \in \mathcal{N} \quad (5)$$

donde el término $\mathbf{p}_{ij} \in \mathcal{R}^n$ es la posición relativa entre el i -ésimo agente y el j -ésimo vecino y $\mathbf{v}_i(t)$ es la velocidad del i -ésimo agente, con $i = 1, \dots, N$.

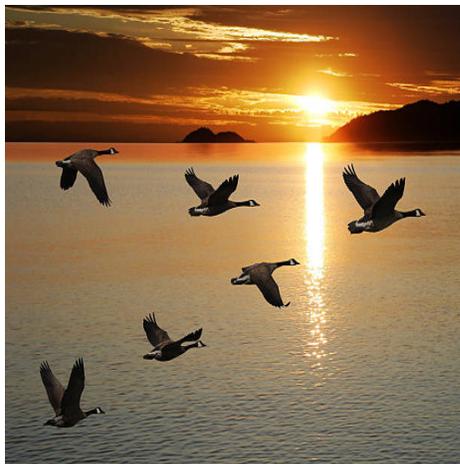


Figura 8. Comportamiento de formación.

Formación. De acuerdo con (Breger et al., 2007; Chen y Huang, 2019), se puede concluir que este comportamiento consiste en lograr que todos los agentes del grupo alcancen una forma geométrica o patrón deseados, un ejemplo de esto se observa en las aves al volar largas distancias para emigrar Figura 8, el objetivo de control para replicar el comportamiento de formación se define como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_{ij}(t) - \boldsymbol{\delta}_{ij} = \mathbf{0} \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{0} \quad \forall i, j \in \mathcal{N}, \quad (6)$$

donde $\boldsymbol{\delta}_{ij} = \boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j \in \mathfrak{R}^n$ describe la geometría de la formación y $\boldsymbol{\delta}_i$ y $\boldsymbol{\delta}_j$ son constantes.

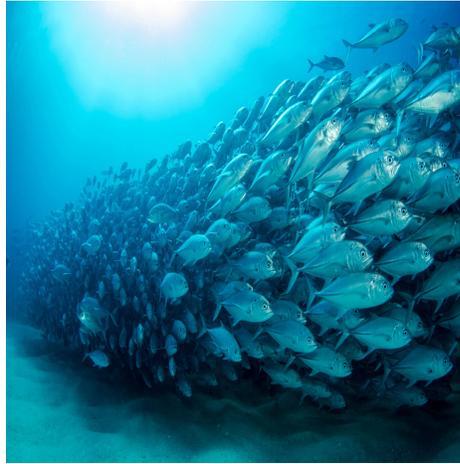


Figura 9. Comportamiento de bandada.

Bandada. De acuerdo a lo establecido por Reynolds (1998). El comportamiento de bandada se lleva a cabo cuando los miembros del grupo obedecen las siguientes reglas:

- Cohesión. Los agentes tienen que mantenerse agrupados para mantener una relación.
- Separación. Mantener una distancia para evitar colisiones.
- Alineación. Los agentes tienen que desplazarse con una misma dirección y velocidad.

Un ejemplo de este comportamiento emergente se observa en los peces cuando buscan protegerse de depredadores Figura 9. Para lograr replicar dicho comportamiento el objetivo de control se establece como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_{ij}(t) - \boldsymbol{\delta}_{ij} = \mathbf{0} \text{ y } \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}^d(t) \quad \forall i, j \in \mathcal{N}, \quad (7)$$

donde $\mathbf{v}^d \in \mathfrak{R}^n$ es la velocidad deseada del grupo y $\boldsymbol{\delta}_{ij} \in \mathfrak{R}^n$ es un vector abiertamente especificado pero diferente de cero.



Figura 10. Comportamiento de sincronización.

Sincronización. Este comportamiento emergente observado en luciérnagas al reproducirse (Buck, 1988), en osciladores biológicos como células marca pasos al generar una actividad rítmica correcta (Michaels et al., 1987) o en los seres humanos al aplaudir (Zoltán et al., 2000), por mencionar algunos ejemplos, se puede decir que se está llevando a cabo cuando todos los agentes de un grupo replican la misma acción al mismo tiempo (Duranton y Gaunet, 2016) (ver Figura 10), sin embargo, es importante mencionar que para que este comportamiento emerja tiene que existir algún tipo de acoplamiento, por ejemplo en los seres humanos este acoplamiento se presenta de manera visual o auditiva, lo anterior se resalta, dado que una coincidencia se puede confundir con el comportamiento en mención. Por otra parte, en este trabajo se supone de manera matemática que el comportamiento de sincronización se logra cuando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_{ij}(t) \triangleq \mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_j(t) = \mathbf{0} \quad \forall i, j \in \mathcal{N}. \quad (8)$$

2.3. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentaron las definiciones de los comportamientos colectivos abordados en este trabajo de tesis, así como los conceptos básicos y herramientas matemáticas necesarias para el desarrollo de los algoritmos de control presentados en los capítulos subsecuentes. Desde el punto de vista del autor, la teoría presentada en este capítulo es de mucha utilidad para que posibles lectores tengan un mayor entendimiento de la información presentada a lo largo de este trabajo de tesis.

Capítulo 3. Sistema con dinámica de doble integrador

En el presente capítulo se muestra tanto el modelo matemático del sistema lineal con dinámica de doble integrador y el algoritmo de control propuesto para emular los comportamientos colectivos de consenso, formación y bandada en un grupo de sistemas que presentan la dinámica antes mencionada.

Es importante mencionar que en este trabajo de tesis se decidió trabajar primero con un grupo de sistemas con dinámica de doble integrador, en lugar de directamente con un grupo de robots móviles de tracción diferencial y aéreos de cuatro rotores, ya que se asumió que sería relativamente más sencillo diseñar un algoritmo de control para emular los comportamientos bajo estudio en estos sistemas por su simplicidad.

3.1. Modelo matemático del sistema con dinámica de doble integrador y diseño de los algoritmos de control

Los sistemas con dinámica de doble integrador permiten describir de una manera simple el movimiento de un robot que se mueve en el plano ($n = 2$) o en un espacio tridimensional ($n = 3$). Aplicando la segunda ley de Newton y considerando la fricción despreciable las ecuaciones de movimiento de un robot con masa puntual unitaria están descritas por

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}} &= \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} &= \mathbf{u},\end{aligned}\tag{9}$$

donde $\mathbf{p}, \mathbf{v} \in \mathfrak{R}^n$ son la posición y velocidad respectivamente, y $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^n$ es la entrada de control.

Es importante mencionar que muchos sistemas no lineales pueden ser transformados a la forma de doble integrador descrita en (9), mediante la ley de control de retroalimentación exacta (Khalil, 2002).

Por ejemplo, considere la dinámica no lineal de un robot manipulador dada por (Kelly y Santibáñez, 2003; Arteaga et al., 2022)

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau},\tag{10}$$

la cual puede ser llevada a la forma de (9) mediante la entrada de control

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{H}(\mathbf{q})\mathbf{u} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}),$$

donde $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia definida positiva, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es la matriz de fuerzas centrífugas y de Coriolis, $\mathbf{g}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^n$ es un vector de fuerzas gravitacionales y $\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n$ es la posición y mediante el cambio de notación: $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ y $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$.

3.1.1. Algoritmo de control de consenso, formación y bandada empleando mediciones de velocidad

Considérese un grupo de N robots representados por el siguiente modelo lineal

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \mathbf{v}_i \\ \dot{\mathbf{v}}_i &= \mathbf{u}_i\end{aligned}\tag{11}$$

el cual presenta la estructura de un sistema en cascada, lo anterior es favorable, dado que facilita el diseño del algoritmo de control que se presenta en este trabajo. Las dimensiones de (11) $\in \mathfrak{R}^n$ con $i = 1, 2, \dots, N$.

A continuación se muestran los pasos a seguir para la obtención del algoritmo de control, que permite cumplir con los objetivos de control establecidos en el capítulo 2.

- El primer paso consiste en hacer uso de una entrada virtual $\boldsymbol{\vartheta}_i \in \mathfrak{R}^n$ para así obtener

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \boldsymbol{\vartheta}_i + \tilde{\mathbf{v}}_i\tag{12}$$

donde $\tilde{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i - \boldsymbol{\vartheta}_i \in \mathfrak{R}^n$ es el error de velocidad.

- En el segundo paso se obtiene la primer derivada con respecto al tiempo de $\tilde{\mathbf{v}}_i$ la cual está dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_i = \dot{\mathbf{v}}_i - \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i = \mathbf{u}_i - \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i,\tag{13}$$

para poder reescribir (11), como se muestra a continuación

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \boldsymbol{\vartheta}_i + \tilde{\mathbf{v}}_i\tag{14a}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_i = \mathbf{u}_i - \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i.\tag{14b}$$

- El tercer y último paso consiste en diseñar $\boldsymbol{\vartheta}_i$ y \mathbf{u}_i .

Para la obtención de ϑ_i se propone una nueva variable del error, la cual se ha definido como

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{p}_i - \mathbf{p}^d - \boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\varphi}_i, \quad (15)$$

donde $\mathbf{p}^d \in \mathfrak{R}^n$ es la posición deseada, $\boldsymbol{\delta}_i \in \mathfrak{R}^n$ es una constante, $\boldsymbol{\varphi}_i \in \mathfrak{R}^n$ es una variable auxiliar que evitara que se haga uso de las mediciones de velocidad de los agentes vecinos a la hora de realizar el intercambio de información, continuando con el diseño de la entrada virtual se desea que en lazo cerrado la derivada con respecto al tiempo de \mathbf{r}_i tenga la siguiente dinámica

$$\dot{\mathbf{r}}_i = -c \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{r}_{ij}, \quad (16)$$

donde $c > 0$ es una ganancia definida positiva, a_{ij} son los términos de la matriz de acoplamiento asociada a un grafo y $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij} - \boldsymbol{\varphi}_{ij}$, donde $\boldsymbol{\varphi}_{ij} \triangleq \boldsymbol{\varphi}_i - \boldsymbol{\varphi}_j$. Para lograr lo mostrado en (16), se deriva (15) y se propone la dinámica de $\boldsymbol{\varphi}_i$ como

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_i = -k_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_i + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{r}_{ij}, \quad (17)$$

donde $k_{\varphi_i} > 0$ es una ganancia definida positiva. Por otra parte, la entrada virtual se propone como

$$\boldsymbol{\vartheta}_i = -k_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_i + \mathbf{v}^d(t). \quad (18)$$

Para diseñar la entrada de control \mathbf{u}_i se parte de (14b). Dado que se desea conseguir que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{v}}_i(t) = \mathbf{0},$$

se propone

$$\mathbf{u}_i = \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i - \gamma_i \tilde{\mathbf{v}}_i, \quad (19)$$

donde $\gamma_i > 0$ es una ganancia definida positiva.

El algoritmo propuesto permite replicar el comportamiento de consenso (5) si se fija $\mathbf{v}^d(t) = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\delta}_j = \mathbf{0}$, para lograr formación (6) es necesario proponer $\mathbf{v}^d(t) = \mathbf{0}$ y dar valores a $\boldsymbol{\delta}_i$ y $\boldsymbol{\delta}_j$, para el caso de bandada (7) es necesario proponer un perfil de velocidad deseado $\mathbf{v}^d(t)$ y al igual que en el caso de formación es necesario proponer valores para $\boldsymbol{\delta}_i$, y $\boldsymbol{\delta}_j$ para que los robots mantengan una distancia deseada.

Antes de llevar a cabo la prueba de estabilidad considere las ecuaciones (14), (17)-(19), la primera derivada con respecto al tiempo de (15) y las propiedades del producto de Kronecker para obtener la dinámica en lazo cerrado del sistema, dicha dinámica está dada por

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = -(\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_n) \boldsymbol{\varphi} + c(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{r} \quad (20a)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = -c(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{v}} \quad (20b)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = -(\boldsymbol{\Gamma} \otimes \mathbf{I}_n) \tilde{\mathbf{v}}, \quad (20c)$$

donde $\boldsymbol{\varphi} = [\boldsymbol{\varphi}_1^\top \cdots \boldsymbol{\varphi}_N^\top]^\top$, $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1^\top \cdots \mathbf{r}_N^\top]^\top$, $\tilde{\mathbf{v}} = [\tilde{\mathbf{v}}_1^\top \cdots \tilde{\mathbf{v}}_N^\top]^\top \in \mathfrak{R}^{nN}$ son vectores apilados, $\mathbf{K} = \{k_{\varphi 1}, \dots, k_{\varphi N}\}$, $\boldsymbol{\Gamma} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ son matrices diagonales de ganancias definidas positivas y $\mathbf{I}_n \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es la matriz identidad.

El punto de equilibrio de (20) está dado por $(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{r}, \tilde{\mathbf{v}}) = (\mathbf{0}, \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{r}^*, \mathbf{0})$ para algún $\mathbf{r}^* \in \mathfrak{R}^n$, ya que $\mathbf{L}\mathbf{1}_n = \mathbf{0}$. Mediante el siguiente cambio de coordenadas (Nuño et al., 2011)

$$\mathbf{q} = (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{r}, \quad (21)$$

la estabilidad del punto de equilibrio será analizada, donde la matriz $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}^{N-1 \times N}$ está dada por

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 + (N-1)\chi & 1 - \chi & -\chi & \cdots & -\chi \\ -1 + (N-1)\chi & -\chi & 1 - \chi & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -\chi \\ -1 + (N-1)\chi & -\chi & \cdots & -\chi & 1 - \chi \end{bmatrix} \quad (22)$$

con

$$\chi = \frac{(N - \sqrt{N})}{N(N-1)}.$$

De acuerdo a (Scardovi et al., 2010), \mathbf{Q} presenta las siguientes propiedades

$$\mathbf{Q}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}, \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}_{N-1}, \mathbf{Q}^\top \mathbf{Q} = \mathbf{I}_N - \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^\top. \quad (23)$$

por lo que se infiere que

$$\mathbf{q} = (\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{r} = \mathbf{0} \implies \mathbf{r} = \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{r}^*. \quad (24)$$

Tomando en cuenta (21) y (23), la expresión (20) se puede escribir en forma compacta de la siguiente

manera

$$\dot{\xi} = A_\xi \xi, \quad (25)$$

donde $\xi = [\varphi^\top, \mathbf{q}^\top, \tilde{\mathbf{v}}^\top] \in \mathfrak{R}^{3nN-n}$ y

$$A_\xi = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_n & c(\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top \otimes \mathbf{I}_n) & \mathbf{O}_{nN} \\ \mathbf{O}_{n(N-1) \times nN} & -c(\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top \otimes \mathbf{I}_n) & \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_n \\ \mathbf{O}_{nN} & \mathbf{O}_{nN \times n(N-1)} & -\mathbf{\Gamma} \otimes \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \quad (26)$$

donde \mathbf{O} son matrices de ceros con las dimensiones apropiadas. De acuerdo a (Nuño et al., 2011), si \mathcal{G} es conectado los valores propios de la matriz Laplaciana reducida $\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top \in \mathfrak{R}^{N-1 \times N-1}$ son positivos, lo cual es cierto, ya que los valores propios de $\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top$ son iguales a los de \mathbf{L} , a excepción del valor propio $\lambda_1 = 0$. Gracias al resultado anterior, la matriz $-c(\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top \otimes \mathbf{I}_n)$ es Hurwitz y dado que las otras dos matrices de la diagonal de (26) son Hurwitz, y como (26) es una matriz triangular superior a bloques se puede verificar que dicha matriz también es Hurwitz, por lo tanto el punto de equilibrio $\xi = \mathbf{0}$ es globalmente exponencialmente estable.

En este trabajo se obtuvo un resultado importante, el cual consiste en calcular la posición a la cual los agentes convergen al emular el comportamiento de consenso, para realizar este estudio se aprovechó la estructura en cascada de (20) y por razones de simplicidad se considera el caso de $n = 1$. La solución de (20c) está dada por

$$\tilde{\mathbf{v}}(t) = e^{-\mathbf{\Gamma}t} \tilde{\mathbf{v}}(0) = e^{-\mathbf{\Gamma}t} (\mathbf{v}(0) + \mathbf{K}\varphi(0)) \quad (27)$$

al emplear (27) la solución de (20b) es

$$\mathbf{r}(t) = e^{-c\mathbf{L}t} \mathbf{r}(0) - e^{-c\mathbf{L}t} (c\mathbf{L} - \mathbf{\Gamma})^{-1} \tilde{\mathbf{v}}(0) + e^{-\mathbf{\Gamma}t} (c\mathbf{L} - \mathbf{\Gamma})^{-1} \tilde{\mathbf{v}}(0). \quad (28)$$

Dado que $\mathbf{\Gamma}$ es Hurwitz, el término $e^{-\mathbf{\Gamma}t} (c\mathbf{L} - \mathbf{\Gamma})^{-1} \tilde{\mathbf{v}}(0)$ no será considerado para el análisis, ya que este se desvanecerá cuando $t \rightarrow \infty$. A partir de aquí el análisis se realizará considerando que el grafo empleado para realizar la comunicación es no dirigido y conectado, entonces su matriz \mathbf{L} es simétrica, sus valores propios constituyen una base ortogonal y es diagonalizable, entonces la matriz exponencial $e^{-c\mathbf{L}t}$ puede ser escrita como

$$e^{-c\mathbf{L}t} = \frac{1}{N} \mathbf{1}_N \mathbf{1}_N^\top + e^{-c\lambda_2 t} \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^\top + \dots + e^{-c\lambda_N t} \mathbf{q}_N \mathbf{q}_N^\top \quad (29)$$

donde $\mathbf{q}_i \in \mathfrak{R}^N$ es el vector propio de \mathbf{L} asociado con el valor propio λ_i con $i \geq 2$. Sustituyendo (29)

en (28) y recordando que para un grafo conectado $\lambda_i > 0$ para todo $i \geq 2$ se tiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}(t) = \frac{1}{N} (\mathbf{1}_N^\top \mathbf{r}(0) - \mathbf{1}_N^\top (c\mathbf{L} - \mathbf{\Gamma})^{-1} \tilde{\mathbf{v}}(0)) \mathbf{1}_N = r^* \mathbf{1}_N, \quad (30)$$

del resultado anterior se infiere que

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{p}^* = \frac{1}{N} \mathbf{1}_N^\top (\mathbf{p}(0) - \boldsymbol{\varphi}(0) - (c\mathbf{L} - \mathbf{\Gamma})^{-1} (\mathbf{v}(0) + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}(0))). \quad (31)$$

ya que como se puede recordar para lograr consenso se estableció como uno de los objetivos de control que $\mathbf{p}_{ij}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$ o de igual forma que tanto $\mathbf{p}_i(t) \rightarrow \mathbf{p}^*$ como $\mathbf{p}_j(t) \rightarrow \mathbf{p}^*$ cuando $t \rightarrow \infty$. Además gracias a la prueba de estabilidad se sabe que $\boldsymbol{\varphi}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y que la convergencia de (24) a cero, implica que $\mathbf{r}(t) \rightarrow \mathbf{1}_N \otimes r^*$, entonces del análisis se concluye que para el caso de $n = 1$, $\mathbf{p}_i(t) = r_i(t) + \varphi_i(t) \rightarrow r^* = p^*$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Por último si se fija $\boldsymbol{\varphi}(0) = \mathbf{0}$, la ecuación (31) se reduce a

$$\mathbf{p}^* = \frac{1}{N} \mathbf{1}_N^\top (\mathbf{p}(0) - (c\mathbf{L} - \mathbf{\Gamma})^{-1} \mathbf{v}(0)). \quad (32)$$

Para el caso de un grafo dirigido el análisis es similar, la principal diferencia se tiene a la hora de obtener la matriz $e^{-c\mathbf{L}t}$, ya que \mathbf{L} no es necesariamente simétrica, para este caso la matriz $e^{-c\mathbf{L}t}$ está dada por

$$\begin{aligned} e^{-c\mathbf{L}t} &= \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & e^{\mathbf{J}t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \\ &= [\mathbf{1}_N \ \boldsymbol{\varrho}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{\varrho}_N] \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & e^{\mathbf{J}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}_1^\top \\ \vdots \\ \boldsymbol{\zeta}_N^\top \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

donde $\mathbf{J} \in \mathfrak{R}^{N-1 \times N-1}$ es la matriz de Jordan a bloques asociada a los valores propios diferentes de cero de $-c\mathbf{L}$, $\boldsymbol{\varrho}_i \in \mathfrak{R}^N$ es el vector propio o vector propio generalizado asociado al valor propio λ_i para todo $i \geq 2$, y $\boldsymbol{\zeta}_i^\top \in \mathfrak{R}^N$ es la i -ésima fila de \mathbf{P}^{-1} . El vector fila $\boldsymbol{\zeta}_1^\top$ satisface $\boldsymbol{\zeta}_1^\top \mathbf{L} = \mathbf{0}$ (Olfati-Saber et al., 2007), es decir $\boldsymbol{\zeta}_1^\top$ es un vector propio izquierdo de \mathbf{L} asociado a $\lambda_1 = 0$. Dado que el grafo es conectado $\lambda_i > 0$ para todo $i \geq 2$, esto implica que $e^{\mathbf{J}t} \rightarrow \mathbf{O}_{N-1}$ cuando $t \rightarrow \infty$. Por lo tanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\zeta}_1^\top (\mathbf{p}(0) - \boldsymbol{\varphi}(0) - (c\mathbf{L} - \mathbf{\Gamma})^{-1} (\mathbf{v}(0) + \mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}(0))) \mathbf{1}_N = r^* \mathbf{1}_N, \quad (34)$$

entonces del resultado anterior se infiere que

$$r^* = p^* = \zeta_1^\top (\mathbf{p}(0) - (c\mathbf{L} - \Gamma)^{-1} \mathbf{v}(0)) \quad (35)$$

siempre y cuando $\varphi(0) = \mathbf{0}$.

Para $n = 2$ se siguieron los mismos pasos que para el caso de $n = 1$ y se obtuvo que los valores de consenso para un grafo no dirigido con $\varphi(0) = \mathbf{0}$ son

$$p_x^* = \frac{1}{N} \mathbf{1}_N^\top (\mathbf{p}_x(0) - (c\mathbf{L} - \Gamma)^{-1} \mathbf{v}_x(0)) \quad (36a)$$

$$p_y^* = \frac{1}{N} \mathbf{1}_N^\top (\mathbf{p}_y(0) - (c\mathbf{L} - \Gamma)^{-1} \mathbf{v}_y(0)), \quad (36b)$$

para un grafo dirigido se tiene

$$p_x^* = \zeta_1^\top (\mathbf{p}_x(0) - (c\mathbf{L} - \Gamma)^{-1} \mathbf{v}_x(0)) \quad (37a)$$

$$p_y^* = \zeta_1^\top (\mathbf{p}_y(0) - (c\mathbf{L} - \Gamma)^{-1} \mathbf{v}_y(0)), \quad (37b)$$

donde $(\mathbf{p}_x(0), \mathbf{v}_x(0))$ y $(\mathbf{p}_y(0), \mathbf{v}_y(0))$ son condiciones iniciales de posición y velocidad en las coordenadas x y y respectivamente.

3.1.2. Algoritmo de control de consenso, formación y bandada sin mediciones de velocidad

En la práctica, no siempre es posible medir todos los estados del sistema, por lo tanto el controlador propuesto en la sección anterior es extendido para el caso en el cual no se tiene acceso a las mediciones de velocidad.

Considere el sistema en cascada (14) en lazo cerrado con la ley de control

$$\dot{\vartheta}_i = -k_{\varphi i} \varphi_i + \mathbf{v}^d(t) \quad (38a)$$

$$\dot{\varphi}_i = -k_{\varphi i} \varphi_i + c \sum_{j=1}^N a_{ij} r_{ij} \quad (38b)$$

$$\mathbf{u}_i = \dot{\vartheta}_i - \gamma_i (\hat{\mathbf{v}}_i - \vartheta_i) \quad (38c)$$

donde $\hat{\mathbf{v}}_i \in \mathfrak{R}^n$ es la velocidad estimada obtenida del observador de Luenberger

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_i + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{\Xi}_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{C}_i \hat{\mathbf{x}}_i) \quad (39)$$

donde $\hat{\mathbf{x}}_i = [\hat{\mathbf{p}}_i^\top \hat{\mathbf{v}}_i^\top]^\top \in \mathfrak{R}^{2n}$, $\hat{\mathbf{p}}_i \in \mathfrak{R}^n$ es la posición estimada, $\mathbf{y}_i = \mathbf{p}_i \in \mathfrak{R}^n$ es la salida del sistema, $\mathbf{\Xi}_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$ es la matriz de ganancia del observador y se elige de tal manera que $\mathbf{A}_i - \mathbf{\Xi}_i \mathbf{C}_i$ sea Hurwitz. Las matrices $\mathbf{A}_i \in \mathfrak{R}^{2n \times 2n}$, $\mathbf{B}_i \in \mathfrak{R}^{2n \times n}$ y $\mathbf{C}_i \in \mathfrak{R}^{n \times 2n}$ son definidas como

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{O}_n \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_n \end{bmatrix}.$$

Si el grafo que se está empleando para la comunicación es conectado, la ley de control (38) junto con el observador (39) logra emular los comportamientos colectivos de consenso, formación y bandada, bajo las consideraciones establecidas en el caso cuando las mediciones de velocidad son conocidas.

Tomando en cuenta (14), (38), (39) y la derivada del error de observación $\tilde{\mathbf{x}}_i \triangleq \mathbf{x}_i - \hat{\mathbf{x}}_i$ la dinámica en lazo cerrado es la siguiente

$$\dot{\varphi}_i = -k_{\varphi i} \varphi_i + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{r}_{ij} \quad (40a)$$

$$\mathbf{r}_i = c \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{r}_{ij} + \tilde{\mathbf{v}}_i \quad (40b)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_i = -\gamma_i \tilde{\mathbf{v}}_i + \mathbf{E}_i \tilde{\mathbf{x}}_i \quad (40c)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i = (\mathbf{A}_i - \mathbf{\Xi}_i \mathbf{C}_i) \tilde{\mathbf{x}}_i \quad (40d)$$

donde $\mathbf{E}_i = [\mathbf{O}_n \ \gamma_i \mathbf{I}_n] \in \mathfrak{R}^{n \times 2n}$. Para llevar a cabo la prueba de estabilidad se emplean (21) y (23) para obtener

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{A}_\eta \boldsymbol{\eta} \quad (41)$$

donde $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\varphi}^\top \ \mathbf{q}^\top \ \tilde{\mathbf{v}}^\top \ \tilde{\mathbf{x}}^\top] \in \mathfrak{R}^{5nN-n}$ con $\tilde{\mathbf{x}} = [\tilde{\mathbf{x}}_1^\top \ \cdots \ \tilde{\mathbf{x}}_N^\top] \in \mathfrak{R}^{2nN}$ y

$$\mathbf{A}_\eta = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_n & c(\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top \otimes \mathbf{I}_n) & \mathbf{O}_{nN} & \mathbf{O}_{nN \times 2nN} \\ \mathbf{O}_{n(N-1) \times nN} & -c(\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top \otimes \mathbf{I}_n) & \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_{n(N-1) \times 2nN} \\ \mathbf{O}_{nN} & \mathbf{O}_{nN \times n(N-1)} & -\boldsymbol{\Gamma} \otimes \mathbf{I}_n & -\mathbf{E} \\ \mathbf{O}_{2nN \times nN} & \mathbf{O}_{2nN \times n(N-1)} & \mathbf{O}_{2nN \times nN} & \mathbf{A}_o \end{bmatrix} \quad (42)$$

con $\mathbf{A}_o = \text{blockdiag}\{\mathbf{A}_1 - \mathbf{\Xi}_1 \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{A}_N - \mathbf{\Xi}_N \mathbf{C}_n\} \in \mathfrak{R}^{2nN \times 2nN}$ y

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \cdots & \mathbf{O}_{n \times 2nN} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_{n \times 2nN} & \cdots & \mathbf{E}_N \end{bmatrix}.$$

Ya que \mathbf{A}_η es una matriz triangular superior a bloques y cada matriz de la diagonal es Hurwitz, se puede verificar que \mathbf{A}_η es Hurwitz. Entonces, se concluye que el origen de (41) es globalmente exponencialmente estable.

Para este caso de estudio, también se realizó el análisis para conocer los valores de consenso, no obstante por simplicidad solo se muestran las ecuaciones para calcular los valores en las coordenadas x y y respectivamente, dichas expresiones son

$$p_x^* = \frac{\mathbf{1}_N^\top \Lambda_0 (\mathbf{p}_x(0) + \mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{v}_x(0) - \mathbf{E} \mathbf{A}_o^{-1} \tilde{\mathbf{x}}(0)))}{N c^{N-1} \prod_{i=2}^N \lambda_i} \quad (43a)$$

$$p_y^* = \frac{\mathbf{1}_N^\top \Lambda_0 (\mathbf{p}_y(0) + \mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{v}_y(0) - \mathbf{E} \mathbf{A}_o^{-1} \tilde{\mathbf{x}}(0)))}{N c^{N-1} \prod_{i=2}^N \lambda_i} \quad (43b)$$

donde las matrices Λ_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$ pueden ser obtenidas usando el algoritmo de Faddeev-Leverrier (Furuta et al., 1988), para mayor información de como obtener (43) se puede consultar (Montañez et al., 2022).

3.1.3. Control de bandada con información parcial

Para el diseño de los algoritmos de control (17)-(18) y (38a), se asumió que todos los robots conocen el perfil de velocidad deseado $\mathbf{v}^d(t)$, no obstante, en la naturaleza esto no sucede, en este trabajo se aborda el problema cuando solo unos agentes tienen acceso a $\mathbf{v}^d(t)$.

Sea $\mathcal{N}^d \subset \mathcal{N}$ el subconjunto que contiene todos los robots que conocen $\mathbf{v}^d(t)$. Dado que al menos un robot conoce $\mathbf{v}^d(t)$, es posible estimar $\mathbf{v}^d(t)$ para el robot $i \notin \mathcal{N}^d$ usando la información de sus vecinos.

Suponiendo que el grafo \mathcal{G} puede ser no dirigido o dirigido y que a su vez sea conectados o fuertemente conectados. Además, asumiendo que $\mathbf{v}^d(t)$ es una función continua acotada y satisface que $\dot{\mathbf{v}}^d(t) \rightarrow \mathbf{0}$

cuando $t \rightarrow \infty$. Entonces, el observador distribuido

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}_i^d = -\mu \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \hat{\mathbf{v}}_{ij}^d + b_i (\hat{\mathbf{v}}_i^d - \mathbf{v}^d(t)) \right) \quad (44)$$

donde $\mu > 0$ es una ganancia, $\hat{\mathbf{v}}_i^d(t) \in \mathfrak{R}^n$ es una estimación del perfil de velocidad deseado, $\hat{\mathbf{v}}_{ij}^d = \hat{\mathbf{v}}_i^d - \hat{\mathbf{v}}_j^d$ y

$$b_i = \begin{cases} 1, & \text{if } i \in \mathcal{N}^d \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

garantizan que $\hat{\mathbf{v}}_i^d(t) \rightarrow \mathbf{v}^d(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Para comprobar que $\hat{\mathbf{v}}_i^d(t) \rightarrow \mathbf{v}^d(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ primero se define $\bar{\mathbf{v}}_i^d \triangleq \hat{\mathbf{v}}_i^d - \mathbf{v}^d(t)$ como el error de estimación de banda, donde su derivada con respecto al tiempo está dada por

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}}_i^d = -\mu \left(\sum_{j=1}^N a_{ij} \bar{\mathbf{v}}_{ij}^d + b_i \bar{\mathbf{v}}_i^d \right) - \dot{\mathbf{v}}^d(t) \quad (45)$$

donde se usa $\hat{\mathbf{v}}_i^d - \hat{\mathbf{v}}_j^d = \bar{\mathbf{v}}_i^d - \bar{\mathbf{v}}_j^d$. Ahora usando el producto de Kronecker, (45) se vuelve

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{v}}}^d &= -\mu(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{v}}^d - \mu(\bar{\mathbf{D}} \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{v}}^d - \mathbf{1}_N \otimes \dot{\mathbf{v}}^d(t) \\ &= -\mu(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n) \bar{\mathbf{v}}^d - \mathbf{1}_N \otimes \dot{\mathbf{v}}^d(t) \end{aligned} \quad (46)$$

donde $\bar{\mathbf{v}}^d = [(\bar{\mathbf{v}}_1^d)^\top \dots (\bar{\mathbf{v}}_N^d)^\top]^\top \in \mathfrak{R}^{nN}$, $\bar{\mathbf{D}} = \text{diag}\{b_1, \dots, b_N\} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ y $\mathbf{F} = \mathbf{L} + \bar{\mathbf{D}} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$. Dado que \mathcal{G} es conectado (no dirigido) o fuertemente conectado (dirigido) por suposición, los valores propios de \mathbf{F} son estrictamente positivos (ver (Hong et al., 2006) para más información). Esto implica que la matriz $-\mu(\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n)$ es Hurwitz. Por consiguiente, si $\dot{\mathbf{v}}^d(t) = \mathbf{0}$, el sistema (46) tiene un punto de equilibrio exponencialmente estable en el origen.

El sistema (46) puede ser analizado como un sistema lineal estable con $\dot{\mathbf{v}}^d(t)$ como entrada de control continua acotada que converge asintóticamente a cero (Hale, 2009). Por lo tanto, se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{v}}^d(t) = \mathbf{0}.$$

y se confirma que $\hat{\mathbf{v}}_i^d(t) \rightarrow \mathbf{v}^d(t)$.

Ahora la ley de control de bandada puede ser escrita como

$$\boldsymbol{\vartheta}_i = \hat{\boldsymbol{v}}_i^d(t) - k_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_i \quad (47a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_i = -k_{\varphi} \boldsymbol{\varphi}_i + c \sum_{j=1}^N a_{ij} (\boldsymbol{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij} - \boldsymbol{\varphi}_{ij}), \quad \boldsymbol{\varphi}_i(0) = \boldsymbol{\varphi}_{i0} \in \mathfrak{R}^n \quad (47b)$$

$$\boldsymbol{u}_i = \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i - \gamma_i (\hat{\boldsymbol{v}}_i - \boldsymbol{\vartheta}_i) \quad (47c)$$

donde $\hat{\boldsymbol{v}}_i \in \mathfrak{R}^n$ y $\hat{\boldsymbol{v}}_i^d \in \mathfrak{R}^n$ son obtenidas de (39) y (44) respectivamente.

La dinámica del sistema en lazo cerrado está dada por

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_i = -k_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_i + c \sum_{j=1}^N a_{ij} \boldsymbol{r}_{ij} \quad (48a)$$

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i = -c \sum_{j=1}^N a_{ij} \boldsymbol{r}_{ij} + \tilde{\boldsymbol{v}}_i + \bar{\boldsymbol{v}}_i^d \quad (48b)$$

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{v}}}_i = -\gamma_i \tilde{\boldsymbol{v}}_i + E_i \tilde{\boldsymbol{x}}_i \quad (48c)$$

$$\dot{\bar{\boldsymbol{v}}}_i^d = -\mu \left(\sum_{j=1}^N (a_{ij} + b_i) \bar{\boldsymbol{v}}_{ij}^d \right) - \dot{\boldsymbol{v}}^d(t) \quad (48d)$$

donde $\boldsymbol{r}_i \triangleq \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}^d(t) - \boldsymbol{\delta}_{ij} - \boldsymbol{\varphi}_{ij}$ para todo $i, j \in \mathcal{N}$, $\boldsymbol{p}^d(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}^d(\tau) d\tau$. Usando el cambio de coordenadas (21) y sus propiedades (23), (48) puede ser escrita como

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{A}_\sigma \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{B}_\sigma \dot{\boldsymbol{v}}^d(t) \quad (49)$$

donde $\boldsymbol{\sigma} = \left[\boldsymbol{\varphi}^\top \quad \boldsymbol{q}^\top \quad \tilde{\boldsymbol{v}}^\top \quad \tilde{\boldsymbol{x}}^\top \quad (\bar{\boldsymbol{v}}^d)^\top \right]^\top \in \mathfrak{R}^{6nN-n}$ y

$$\boldsymbol{A}_\sigma = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{K} \otimes \boldsymbol{I}_n & c(\boldsymbol{L}\boldsymbol{Q}^\top \otimes \boldsymbol{I}_n) & \boldsymbol{O}_{nN} & \boldsymbol{O}_{nN \times 2nN} & \boldsymbol{O}_{nN} \\ \boldsymbol{O}_{n(N-1) \times nN} & -c(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{L}\boldsymbol{Q}^\top \otimes \boldsymbol{I}_n) & \boldsymbol{Q} \otimes \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{O}_{n(N-1) \times 2nN} & \boldsymbol{Q} \otimes \boldsymbol{I}_n \\ \boldsymbol{O}_{nN} & \boldsymbol{O}_{nN \times n(N-1)} & -\boldsymbol{\Gamma} \otimes \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}_{nN} \\ \boldsymbol{O}_{2nN \times nN} & \boldsymbol{O}_{2nN \times n(N-1)} & \boldsymbol{O}_{2nN \times nN} & \boldsymbol{A}_o & \boldsymbol{O}_{2nN \times nN} \\ \boldsymbol{O}_{nN} & \boldsymbol{O}_{nN \times n(N-1)} & \boldsymbol{O}_{nN} & \boldsymbol{O}_{nN \times 2nN} & -\mu(\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n) \end{bmatrix}$$

y

$$\boldsymbol{B}_\sigma = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O}_{nN} & \boldsymbol{O}_{nN \times n(N-1)} & \boldsymbol{O}_{nN} & \boldsymbol{O}_{nN \times 2nN} & \boldsymbol{I}_n \end{bmatrix}^\top.$$

Se puede verificar que A_σ es Hurwitz. Por lo tanto, (49) es un sistema lineal estable con entrada $\dot{v}^d(t)$ que converge a cero.

3.1.4. Control de sincronización en velocidad

Para la obtención del algoritmo de control que permite que un grupo de agentes descritos por (11) logren sincronización en velocidad, se propone como medición del error $e_i = v_i - \eta_i - s_i$, donde $\eta_i \in \mathfrak{R}^n$ y $s_i \in \mathfrak{R}^n$ son variables auxiliares cuya dinámica tiene que ser diseñada adecuadamente para lograr el objetivo buscado.

Para obtener la dinámica de η_i es necesario derivar con respecto al tiempo e_i , dicha expresión está dada por

$$\dot{e}_i = u_i - \dot{\eta}_i - \dot{s}_i, \quad (50)$$

donde \dot{v}_i ha sido remplazada por la entrada de control u_i . De la ecuación (50) se puede apreciar que la dinámica de η_i se puede proponer como

$$\dot{\eta}_i = -\alpha_i \eta_i - \dot{s}_i + \beta_i e_i, \quad (51)$$

donde α_i y β_i son ganancias definidas positivas. Dado que se ha definido la dinámica de η_i , se propone la entrada de control u_i como

$$u_i = -\alpha_i \eta_i. \quad (52)$$

Por otra parte, la dinámica de s_i se encuentra dada por la conocida ley para lograr consenso (Saber y Murray, 2003; Ren y Atkins, 2005) o sincronización (Wang y Chen, 2002; Carli y Zampieri, 2014),

$$\dot{s}_i = -c_s \sum_{j=1}^N a_{ij} s_{ij}, \quad (53)$$

donde $c_s > 0$ es la ganancia de acoplamiento. Se dice que (53) logra consenso o sincronización asintóticamente cuando (Ren et al., 2005; Munz et al., 2011)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_{ij}(t) = s_i(t) - s_j(t) = \mathbf{0}. \quad (54)$$

La ecuación (53) en su forma general se encuentra representada por

$$\dot{\mathbf{s}} = -c_s(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_n)\mathbf{s}, \quad (55)$$

donde \mathbf{L} es la matriz Laplaciana asociada a un grafo no dirigido, y conectado y $\mathbf{s} \in \mathfrak{R}^{nN}$, recordando que $\mathbf{L}\mathbf{1}_n = \mathbf{0}$, la ecuación (55) tiene como único punto de equilibrio $\mathbf{s} = \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{s}^*$, donde $\mathbf{s}^* \in \mathfrak{R}^n$. La información anterior se menciona dado que será de utilidad más adelante para desmostar el valor al cual convergerá la velocidad de cada agente del grupo.

Suponiendo que tanto (51) como (52) logran que $(\mathbf{e}_i(t), \boldsymbol{\eta}_i(t)) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ cuando $t \rightarrow \infty$, al rescribir la medición del error como se muestra a continuación

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i + \boldsymbol{\eta}_i + \mathbf{s}_i$$

es fácil demostrar que el objetivo de control se cumple en el sentido de (8), ya que cuando $t \rightarrow \infty$ tanto $\mathbf{v}_i(t) = \mathbf{s}_i(t)$ como $\mathbf{v}_j(t) = \mathbf{s}_j(t)$ convergerán a \mathbf{s}^* . Para simplificar los cálculos que permiten obtener el valor al cual converge \mathbf{s}^* , se considera el caso en cual la dimensión del sistema pertenece a \mathfrak{R} , por lo tanto, el punto de equilibrio $\mathbf{s} = \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{s}^*$ se remplazara por $\mathbf{s} = \mathbf{s}^*\mathbf{1}_N$ y la ecuación (55) se simplifica como se muestra a continuación

$$\dot{\mathbf{s}} = -c_s\mathbf{L}\mathbf{s}, \quad (56)$$

considerando lo anterior se procede a obtener la solución de (56), la cual se encuentra representada por

$$\mathbf{s}(t) = e^{-c_s\mathbf{L}t}\mathbf{s}(0), \quad (57)$$

dado que se está considerando el caso en el cual el grafo es no dirigido la matriz exponencial $e^{-c_s\mathbf{L}t}$ está dada por (29), recordando que $\lambda_i > 0$ para todo $i \geq 2$, al remplazar (29) en (57) y al realizar ciertas operaciones se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}(t) = \mathbf{s}(t) = \frac{1}{N}\mathbf{1}_N^\top \mathbf{s}(0)\mathbf{1}_N = \mathbf{s}^*\mathbf{1}_N, \quad (58)$$

del resultado anterior es fácil mostrar que \mathbf{s}^* se puede calcular a partir de

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{s}^* = \frac{1}{N}\mathbf{1}_N^\top \mathbf{s}(0), \quad (59)$$

donde \mathbf{v}^* es la velocidad a la que se converge cuando $t \rightarrow \infty$. Extendiendo el resultado anterior para el caso de \mathfrak{R}^2 las ecuaciones que permiten calcular el punto al que convergen las velocidades tanto en el

eje x como y están dadas por

$$v_x^* = \frac{1}{N} \mathbf{1}_N^\top \mathbf{s}_x(0) \quad (60a)$$

$$v_y^* = \frac{1}{N} \mathbf{1}_N^\top \mathbf{s}_y(0), \quad (60b)$$

por motivos de simplicidad se omite la prueba para el caso en el cual se emplea un grafo dirigido, no obstante con la información presentada, se considera que es fácil realizar la prueba si se desea conocer la velocidad de sincronización a la que se converge usando grafos dirigidos.

Para probar la estabilidad del sistema, primero considérense las ecuaciones (50), (51), y (52), para así obtener la dinámica en lazo cerrado del i -ésimo agente, dicha dinámica está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{e}_i \\ \dot{\eta}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\beta_i \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_n \\ \beta_i \mathbf{I}_n & -\alpha_i \mathbf{I}_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{ei}} \begin{bmatrix} e_i \\ \eta_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{O}_n \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \dot{s}_i, \quad (61)$$

como se puede ver (61) es un sistema lineal, donde \mathbf{A}_{ei} es una matriz triangular inferior, debido a que las matrices en su diagonal son Hurwitz para cualquier valor positivo de α_i y β_i , entonces \mathbf{A}_{ei} también es Hurwitz, por otra lado, \dot{s}_i se puede considerar como una entrada de control que se desvanece conforme $t \rightarrow \infty$ dado que $s(t) \rightarrow \mathbf{1}_N s^*$. Lo anterior puede ser validado considerando un cambio de coordenadas similar al mostrado en (21) tanto para (55) como para (56), para simplificar los cálculos el cambio de coordenadas se aplica a (56), dando como resultado

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}\mathbf{s} = \mathbf{0} \implies \mathbf{s} = \mathbf{1}_N s^* \quad (62)$$

donde al considerar la primer derivada con respecto al tiempo de (62) y las propiedades mostradas en (23), se obtiene

$$\dot{\mathbf{q}} = -c_s \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top \mathbf{q}, \quad (63)$$

la cual tiene únicamente valores propios no positivos, ya que $-\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top$ es Hurwitz, lo anterior garantiza que $\mathbf{q}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ dado que $s(t) \rightarrow \mathbf{1}_N s^*$ cuando $t \rightarrow \infty$, por lo tanto \dot{s}_i se desvanecerá, provocando que la estabilidad del sistema en lazo cerrado sea exponencialmente estable, recordando que \mathbf{A}_{ei} es Hurwitz. Es importante resaltar que este análisis solo es válido cuando la matriz Laplaciana pertenece a grafos no dirigidos conectados y grafos dirigidos que tengan un árbol de expansión.

El algoritmo de control (51)-(53) como se puede observar requiere de la medición de velocidad, para

abordar este problema se propone hacer uso de (39), por lo que la medición del error ahora se define como $e_i = \hat{v}_i - \eta_i - s_i$, bajo esta consideración, la dinámica en lazo cerrado se encuentra dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\eta}_i \\ \dot{e}_i \\ \dot{\tilde{x}}_i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\alpha_i \mathbf{I}_n & \beta_i \mathbf{I}_n & -\bar{\mathbf{E}}_{n \times 2n} \\ \mathbf{O}_n & -\beta_i \mathbf{I}_n & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_{2n \times n} & \mathbf{O}_{2n \times n} & \bar{\mathbf{A}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{oi}} \begin{bmatrix} \eta_i \\ e_i \\ \tilde{x}_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{O}_n \\ \mathbf{O}_{2n \times n} \end{bmatrix} \dot{s}_i, \quad (64)$$

donde $\bar{\mathbf{E}} = [\mathbf{O}_n \ \beta_i \mathbf{I}_n]$ y $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_i - \Xi_i \mathbf{C}_i$. Como se puede ver \mathbf{A}_{oi} es una matriz diagonal superior a bloques, donde cada matriz en su diagonal es Hurwitz eligiendo adecuadamente las ganancias α_i , β_i y Ξ_i , teniendo en cuenta esto se asume que \mathbf{A}_{oi} también es Hurwitz. Considerando el resultado anterior y dado que se ha probado que \dot{s}_i se desvanece, se concluye que el sistema (64) es exponencialmente estable, esto a su vez implica que el comportamiento de sincronización es logrado en el sentido de (8).

Al hacer uso del observador de Luenberger se observó mediante varias simulaciones que después del tiempo transitorio, la distancia que mantienen los agentes del grupo depende de la condición inicial de $\hat{p}_i(t)$, siempre y cuando las condiciones iniciales dadas a $s_i(0)$ sean iguales para cada agente, por ejemplo $s_i(0) = [0.5 \ 0.5]^\top$ o $s_i(0) = [0 \ 0.3]^\top$ con $i = 1, \dots, N$, para validar lo dicho anteriormente se empleó la ecuación conocida como distancia euclidiana representada por

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (65)$$

en la sección de resultados dicha afirmación se presenta gráficamente.

3.2. Resultados numéricos

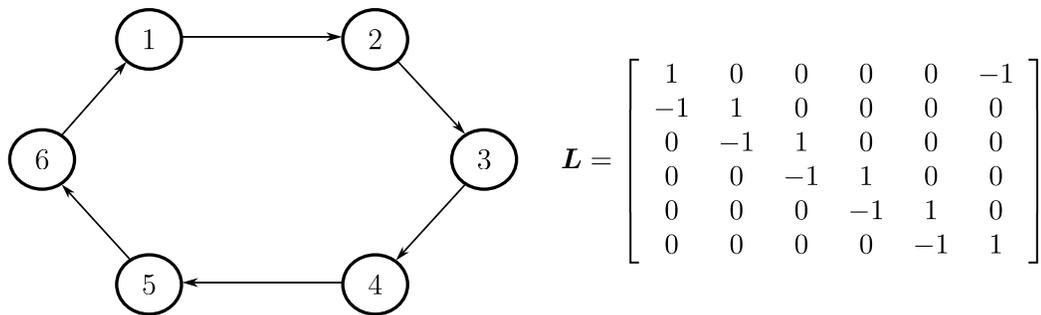


Figura 11. Grafo dirigido en anillo y su matriz Laplaciana.

Los resultados que permiten validar los algoritmos de control propuestos en este capítulo son numéricos, para evitar que la información sea demasiada repetitiva, los resultados que se muestran corresponden solo al caso en el cual las mediciones de velocidad son estimadas y el grafo para establecer la comunicación es dirigido, como se podrá notar este caso es el más desafiante, ya que en casos prácticos no siempre se tiene acceso a las mediciones de velocidad y los equipos pueden estar limitados en cuanto a la cantidad de información que pueden transmitir o recibir sobre todo cuando son de bajo costo.

Tabla 1. Ganancias para los algoritmos de consenso, formación, bandada y sincronización y los observadores

Algoritmos de control y observadores	Ganancias
Control de consenso, formación y bandada	$\mathbf{K} = \mathbf{\Gamma} = 5\mathbf{I}_{12}, c = 2$
Control de sincronización	$\alpha_i = \beta_i = c_s = 1$
Observador de Luenberger y distribuido	$\mathbf{\Xi} = [6\mathbf{I}_{12} \ 5\mathbf{I}_{12}]^\top, \mu = 20$

Para realizar las simulaciones se ha hecho uso del software Matlab, aunque los algoritmos son diseñados para N agentes y para \mathfrak{R}^n , solo seis agentes han sido empleados y la dimensión del sistema corresponde a \mathfrak{R}^2 , el grafo utilizado se muestra en la Figura 11. Las condiciones iniciales utilizadas en los controles de consenso, formación y bandada se eligieron como $\mathbf{p}_1(0) = [-4 \ 2]^\top$, $\mathbf{p}_2(0) = [4 \ 2]^\top$, $\mathbf{p}_3(0) = [-4 \ 6]^\top$, $\mathbf{p}_4(0) = [4 \ 6]^\top$, $\mathbf{p}_5(0) = [-6 \ -2]^\top$, $\mathbf{p}_6(0) = [6 \ -2]^\top$, $\mathbf{v}_i(0) = [0 \ 0]^\top$ con $i = 1, \dots, 6$. Las condiciones iniciales empleadas en el control de sincronización son $\mathbf{p}_1(0) = [-0.2 \ 0.5]^\top$, $\mathbf{p}_2(0) = [1 \ 1]^\top$, $\mathbf{p}_3(0) = [-1 \ 1.5]^\top$, $\mathbf{p}_4(0) = [1.5 \ 1.5]^\top$, $\mathbf{p}_5(0) = [-1.5 \ -1]^\top$, $\mathbf{p}_6(0) = [1.5 \ -0.5]^\top$, $\mathbf{v}_i(0) = [0 \ 0]^\top$, las condiciones iniciales para $\varphi_i(0)$ son iguales a cero, las condiciones iniciales para el observador de Luenberger son $\hat{\mathbf{p}}_i(0) = [0 \ 0]^\top$, $\hat{\mathbf{v}}_i(0) = [1 \ 1]^\top$, excepto para el algoritmo de sincronización sobre todo en posición, ya que como se recordará, la distancia que mantienen los agentes se rige por la condición inicial de $\hat{\mathbf{p}}_i$, por lo que en este caso se proponen las siguientes condiciones iniciales, $\hat{\mathbf{p}}_1(0) = [-1.3333 \ 3.4647]^\top$, $\hat{\mathbf{p}}_2(0) = [1.3333 \ 2.3094]^\top$, $\hat{\mathbf{p}}_3(0) = [-1.3333 \ 0]^\top$, $\hat{\mathbf{p}}_4(0) = [2.6667 \ 0]^\top$, $\hat{\mathbf{p}}_5(0) = [-1.3333 \ -3.4641]^\top$, $\hat{\mathbf{p}}_6(0) = [1.3333 \ -2.3094]^\top$. Para el caso de formación y bandada, las constantes δ_i son propuestas como $\delta_1 = [-2.6667 \ 6.9282]^\top$, $\delta_2 = [2.6667 \ 4.6188]^\top$, $\delta_3 = [-2.6667 \ 0]^\top$, $\delta_4 = [5.3333 \ 0]^\top$, $\delta_5 = [-2.6667 \ -6.9282]^\top$, $\delta_6 = [2.6667 \ -4.6188]^\top$. Las ganancias empleadas se muestran en la tabla 1. Para el controlador de bandada se hace uso del siguiente perfil de velocidad deseado

$$\mathbf{v}^d(t) = \begin{bmatrix} 2 - 0.04(\tanh(t - 10) - \tanh(t - 30)) \\ -0.04(\tanh(t - 10) - \tanh(t - 30)) \end{bmatrix},$$

la matriz \bar{D} empleada en el observador distribuido se propone como $\bar{D} = \text{diag}\{ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \}$ considerando que solo dos agentes conocen el perfil de velocidad deseado. A continuación se muestran los resultados obtenidos.

3.2.1. Resultados comportamiento de consenso

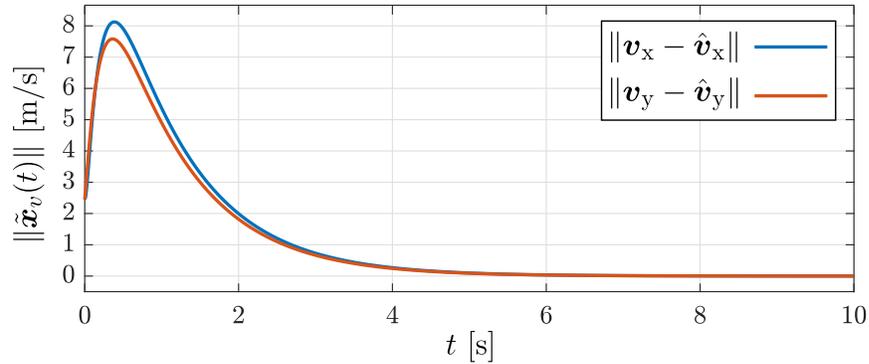


Figura 12. Norma del error en velocidad de lo medido contra lo estimado.

La Figura 12 tiene la finalidad de mostrar que el observador está teniendo un buen funcionamiento, ya que los errores en velocidad tanto en el eje x como y tienden a cero, dado que $\hat{v}_i(t) \rightarrow v_i(t)$ mientras $t \rightarrow \infty$.

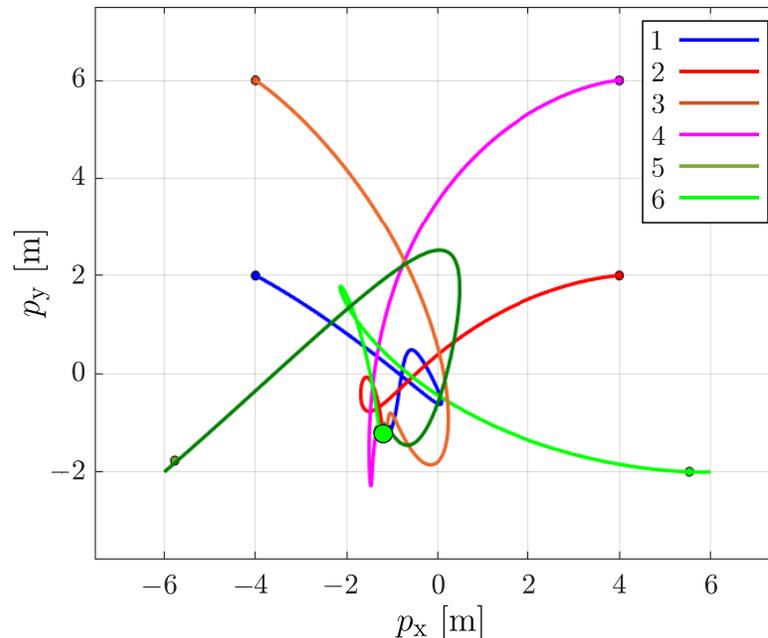


Figura 13. Trayectoria generada por los agentes en el plano $x - y$.

En la Figura 13 se puede observar que los agentes del grupo han logrado un consenso, ya que las trayectorias generadas por cada agente convergen al mismo punto.

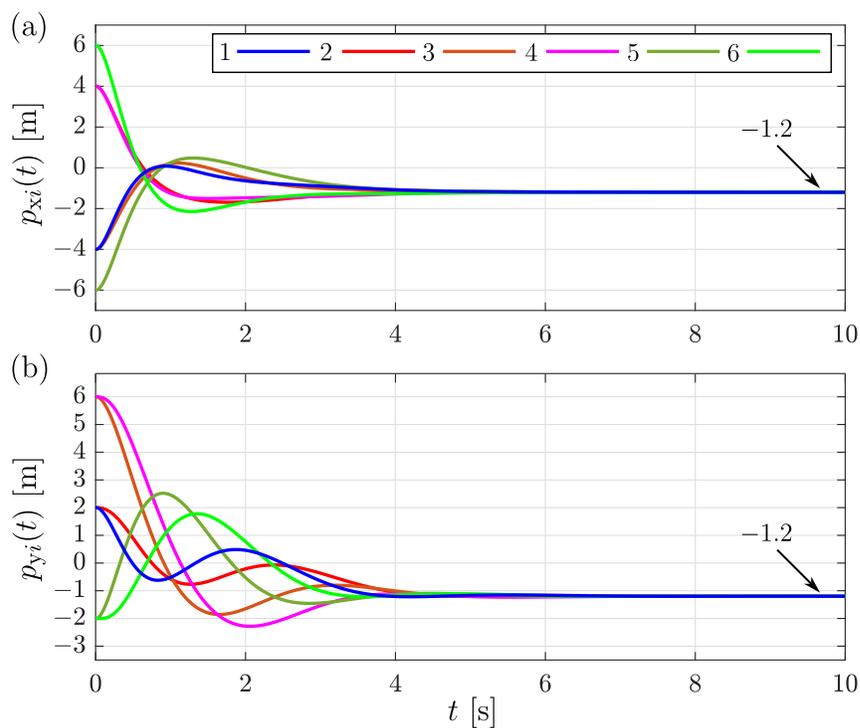


Figura 14. Evolución en el tiempo de la posición de los agentes usando el control de consenso.

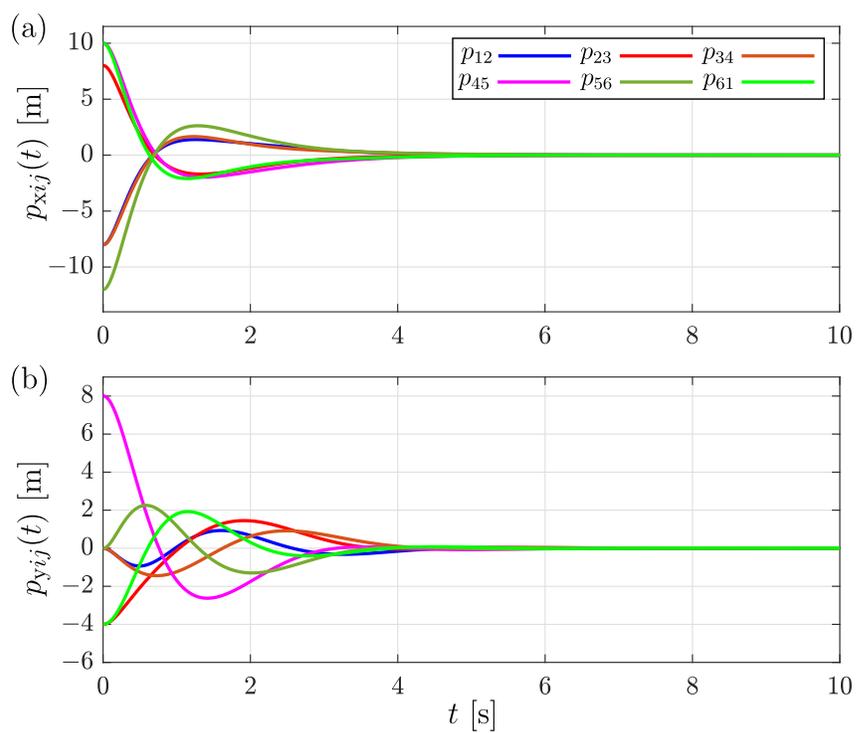


Figura 15. Objetivo de control de consenso en posición: (a) eje x y (b) eje y .

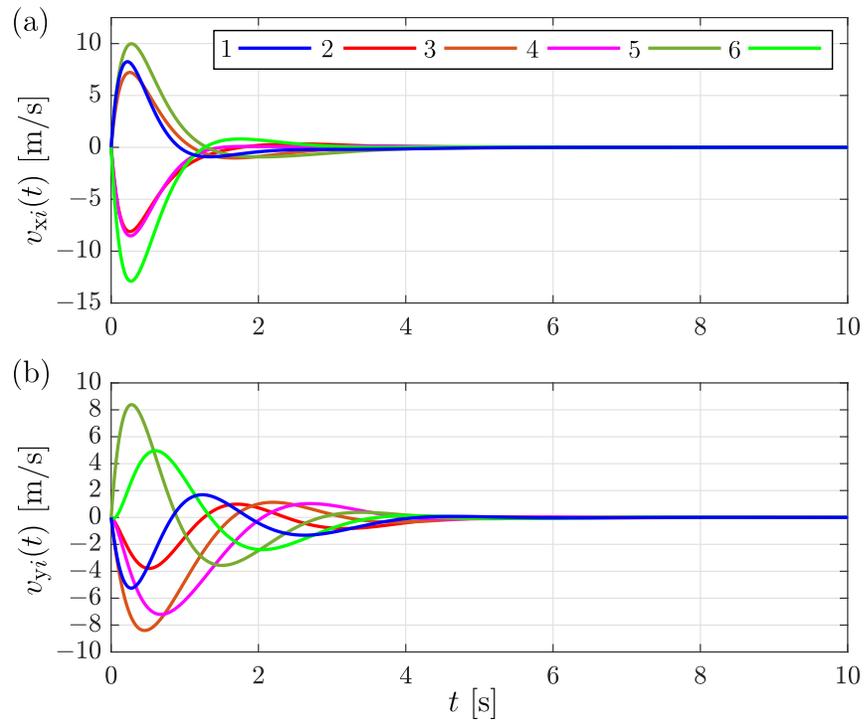


Figura 16. Medición de velocidad de cada agente comportamiento de consenso: (a) eje x y (b) eje y .

En la Figura 14 se muestra el punto al cual los agentes convergen en las coordenadas x (ver Figura 14(a)) y y (ver Figura 14(b)), dicho punto puede ser validado usando (43).

Los resultados mostrados en las Figuras 15 y 16 permiten afirmar que el control propuesto para lograr consenso, tiene un buen funcionamiento, ya que el objetivo de control establecido en (5) se cumple, dado que tanto el error de posición entre los agentes Figura 15 como las velocidades Figura 16 tienden a cero.

3.2.2. Resultados comportamiento de formación

En la Figura 17 se muestra que los agentes logran replicar el patrón establecido por las constantes $\delta_{1...6}$. Como se puede observar el control propuesto para emular el comportamiento de formación funciona adecuadamente, ya que las mediciones mostradas en las Figuras 18 y 19 tienden a cero después del tiempo transitorio, confirmando que el objetivo establecido en (6) se cumple de manera aceptable.

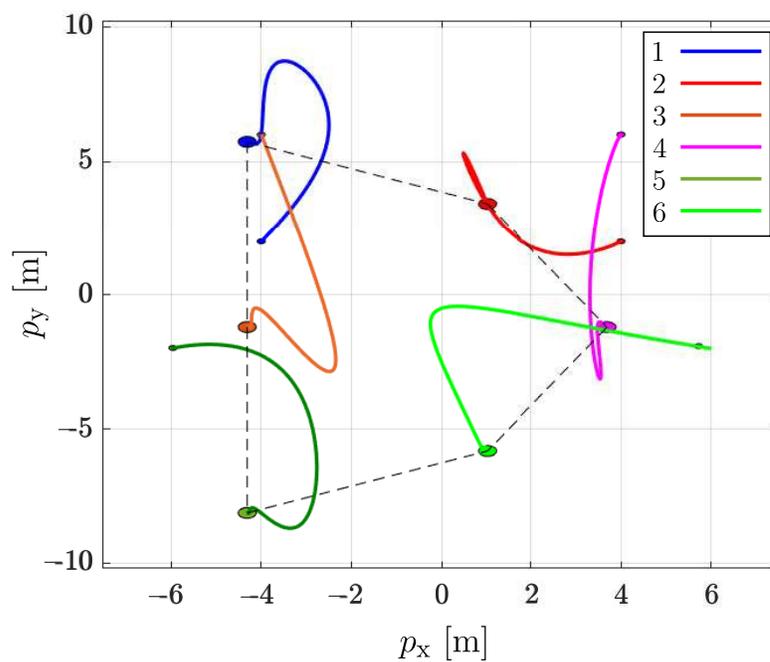


Figura 17. Formación de los agentes en el plano $x - y$.

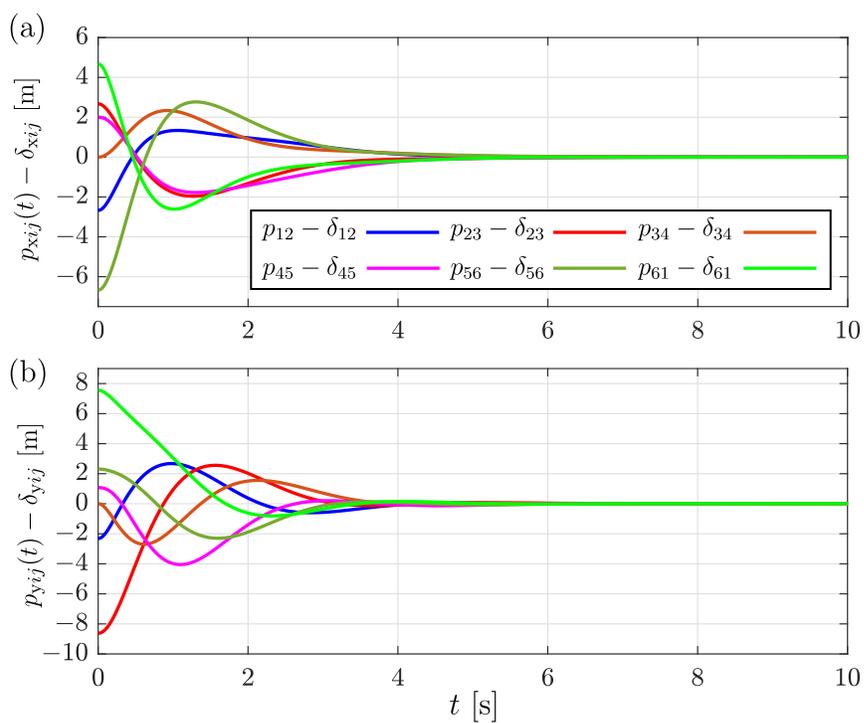


Figura 18. Objetivo de control de formación en posición: (a) eje x y (b) eje y .

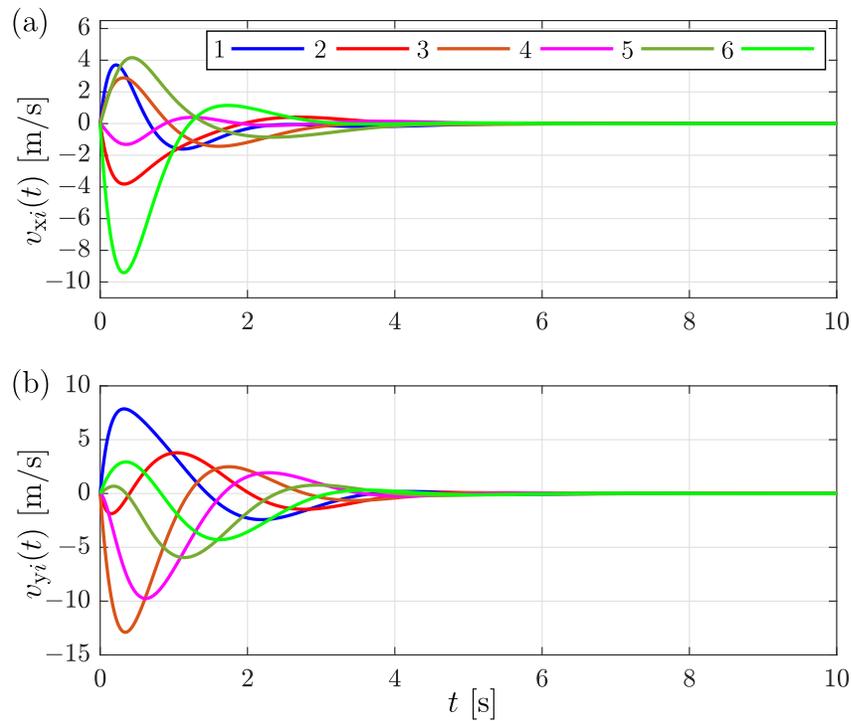


Figura 19. Medición de velocidad de cada agente comportamiento de formación: (a) eje x y (b) eje y .

3.2.3. Resultados comportamiento de bandada usando el observador distribuido

Para mostrar que el observador distribuido realiza una buena estimación del perfil de velocidad deseado, aún y cuando solo dos agentes del grupo tienen conocimiento de dicho perfil, se presenta la Figura 20, en dicha Figura se puede notar que lo estimado después de pocos segundos converge a lo deseado, por lo tanto se puede concluir que el observador es confiable y los valores estimados pueden ser usados en la ley de control propuesta para bandada.

Como se puede observar en la Figura 21 los agentes del grupo logran emular el comportamiento de bandada adecuadamente, ya que estos se desplazan con una misma velocidad, mientras mantienen una separación entre ellos, lo anterior se puede validar mediante lo mostrado en las Figuras 22 y 23.

Como se puede ver en la Figura 22 se cumple el objetivo de control en sentido de $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}^d$, ya que después de pocos segundos las velocidades de los agentes logran el seguimiento del perfil de velocidad deseado (en este caso el perfil de velocidad deseado estimado) en ambos ejes.

Por medio de la Figura 23 se puede afirmar que el objetivo de control establecido como $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_{ij}(t) -$

$\delta_{ij} = \mathbf{0}$ se ha logrado, ya que la evolución de las trayectorias tienden a cero, dado que los agentes han logrado colocarse a la distancia deseada como sucede en el caso de formación. Tomando en cuenta este resultado y el mostrado en la Figura 22 se concluye que el algoritmo para emular el comportamiento de bandada ha cumplido con el propósito para el cual fue diseñado.

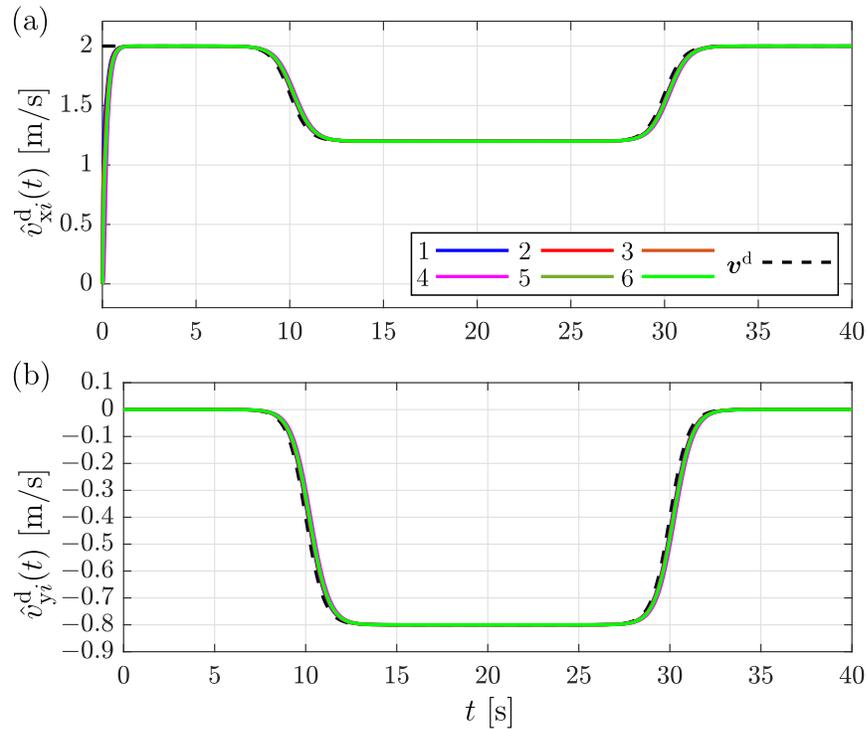


Figura 20. Perfil de velocidad deseado estimado contra el perfil deseado: (a) eje x y (b) eje y .

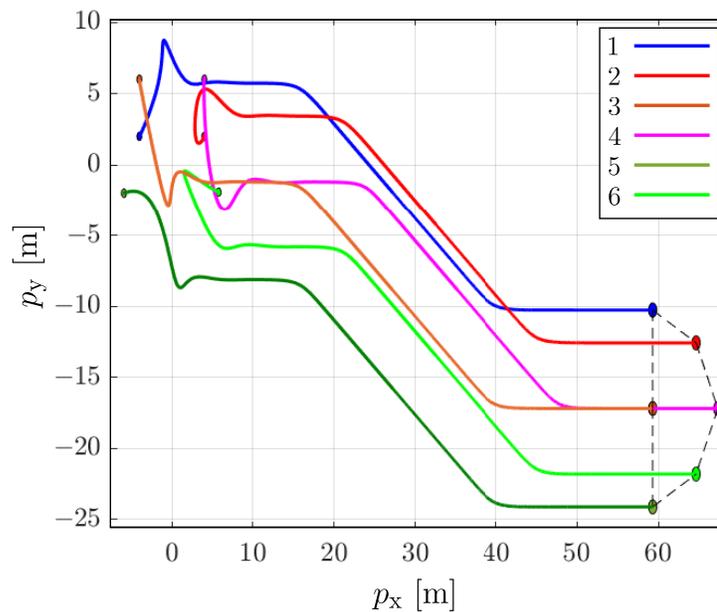


Figura 21. Trayectoria generada por los agentes al emplear \hat{v}^d .

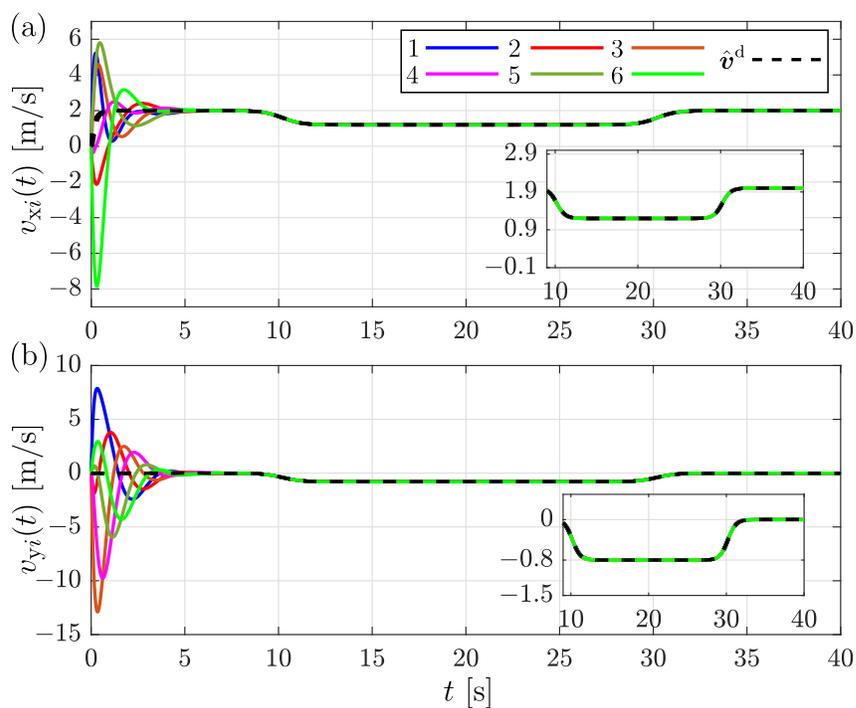


Figura 22. Evolución en el tiempo de la velocidad de los agentes al usar el control de bandada: (a) eje x y (b) eje y .

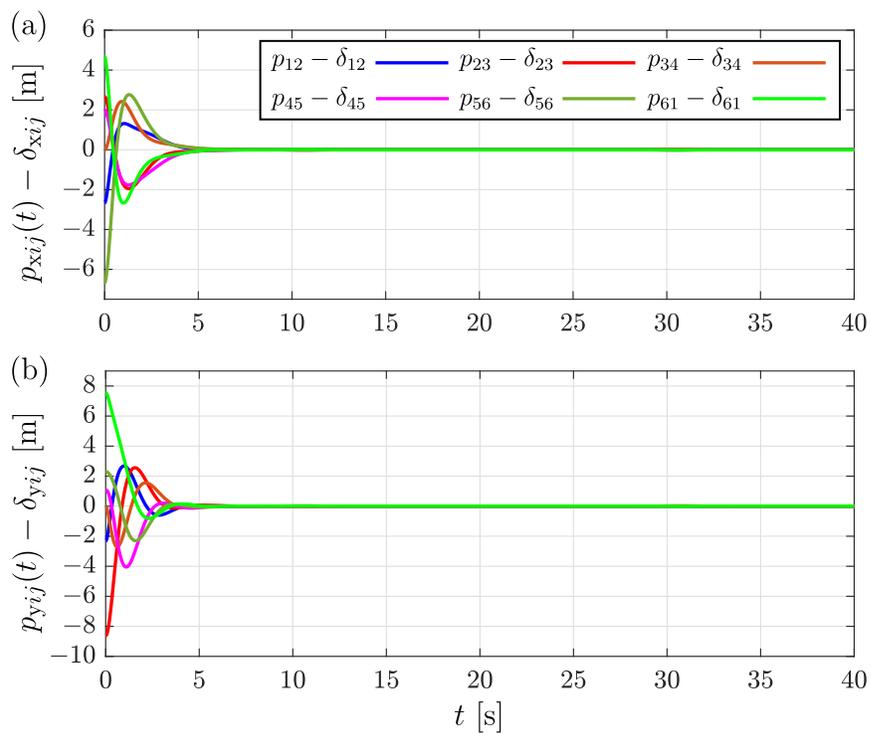


Figura 23. Objetivo de control de bandada en posición: (a) eje x y (b) eje y .

3.2.4. Resultados comportamiento de sincronización

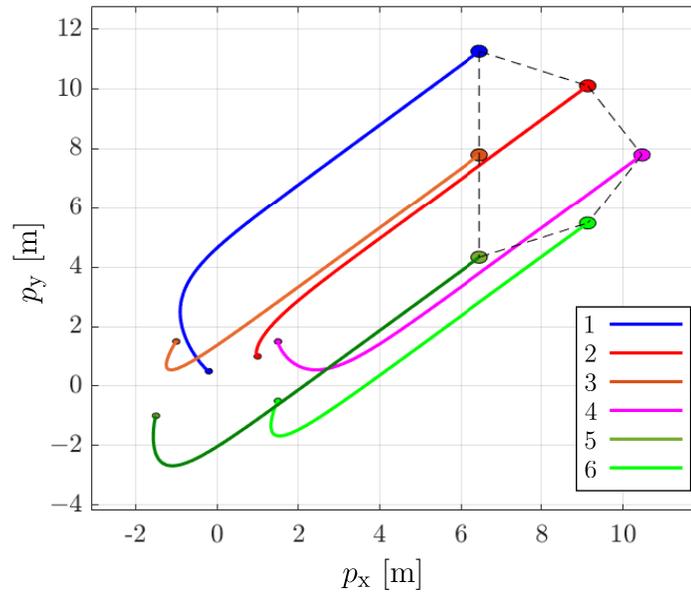


Figura 24. Trayectoria generada por los agentes en el plano $x - y$ al usar el control de sincronización en velocidad.

Como se puede notar en la Figura 24 los agentes se encuentran dispersos en el plano y con forme el tiempo transcurre estos adoptan una formación mientras se desplazan, como se podrá recordar anteriormente se mencionó que dicha formación es causada por la condición inicial dada a \hat{p}_i y considerando proponer las condiciones iniciales de s_i como se ejemplifico.

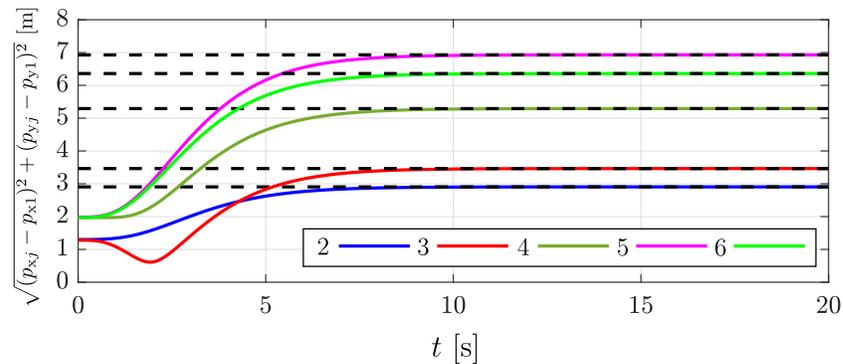


Figura 25. Distancia euclidiana entre agentes.

Para validar lo anterior, en la Figura 25 se muestra gráficamente la distancia que existe entre el agente uno con respecto a los demás miembros y se compara con la distancia que existe entre la condición inicial $\hat{p}_1(0)$ con respecto a las condiciones iniciales dadas a $\hat{p}_i(0)$ con i de 2 a 6, estas mediciones se

muestran en líneas punteadas. Como se puede ver las distancias medidas tienden a las líneas punteadas, por lo tanto se confirma que el patrón descrito por los agentes depende de las condiciones iniciales de posición dadas al observador de Luenberger, y de las condiciones de $s_i(0)$.

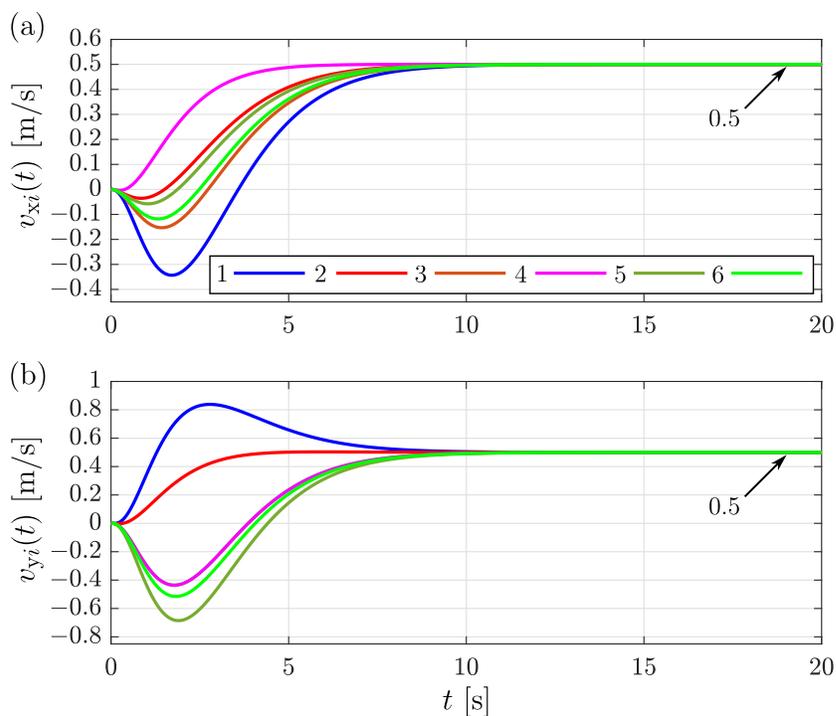


Figura 26. Evolución en el tiempo de la velocidad de los agentes: (a) eje x y (b) eje y .

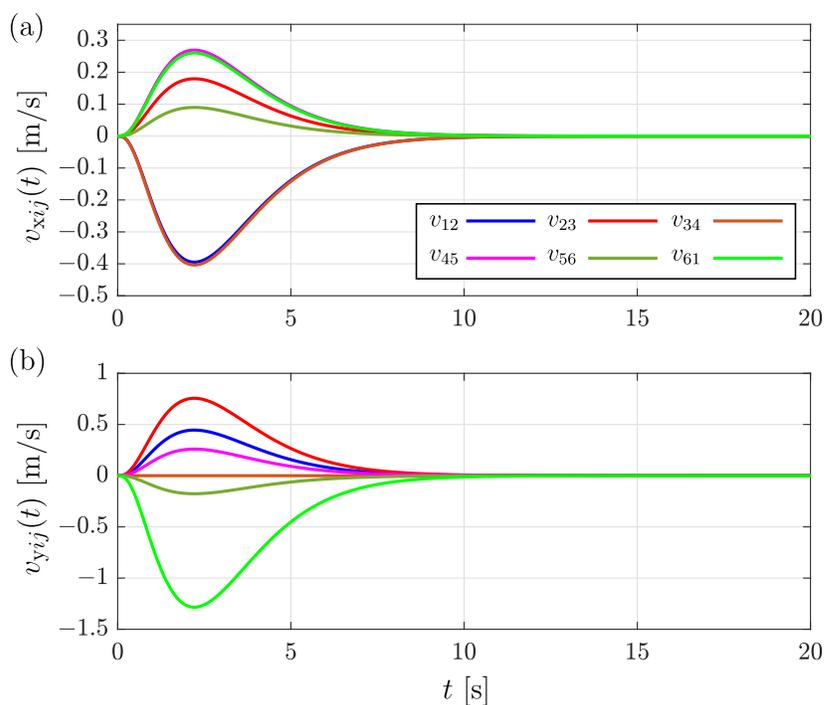


Figura 27. Objetivo de control en velocidad: (a) eje x y (b) eje y .

En la Figura 26 se puede ver que los agentes logran sincronizar sus velocidades después de 10 segundos, ya que cada una de estas mediciones tienden a 0.5 m/s , hasta este punto se puede concluir que el control propuesto funciona de forma adecuada.

Para verificar que el objetivo de control (8) se cumple se presenta la Figura 27 donde se puede ver que después de pocos segundos las mediciones convergen a 0, confirmando que la velocidad del i -ésimo agente tiene a la velocidad del j -ésimo agente conforme $t \rightarrow \infty$.

3.3. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentó el modelo matemático con dinámica de doble integrador que representa a cada uno de los agentes (robots) del grupo, dado que uno de los objetivos del trabajo es lograr que estos robots emulen los comportamientos colectivos bajo estudio, se han diseñado algoritmos de control que permiten abordar dicho problema. Es importante resaltar que las leyes de control propuestas no requieren de las mediciones de velocidad de los agentes vecinos al realizar la comunicación, por lo tanto, esto trae consigo cierta ventaja sobre todo a la hora de llevarlo a la práctica, ya que como se ha mencionado antes no siempre es posible tener acceso a dichas mediciones. Otros puntos a tomar en cuenta son, se da una solución al caso en el cual no se tiene acceso a mediciones de velocidad locales empleando el observador de Luenberger, se mostró de forma analítica el punto de consenso al que se converge, se mostró que el punto de consenso depende de la topología de conexión y de las condiciones iniciales y se propuso un observador distribuido para abordar el caso de cuando no todos los agentes tienen conocimiento del perfil de velocidad deseado de banda, para validar la teoría presentada se muestran pruebas numéricas.

Capítulo 4. Robot móvil con tracción diferencial y diseño de los algoritmos de control

En este capítulo se presenta tanto el algoritmo que permite que un robot móvil de tracción diferencial realice seguimiento de un perfil de velocidad deseado como los algoritmos propuestos para lograr que un grupo de estos robots repliquen los comportamientos colectivos de sincronización, formación y bandada.

4.1. Modelo matemático del robot móvil con tracción diferencial

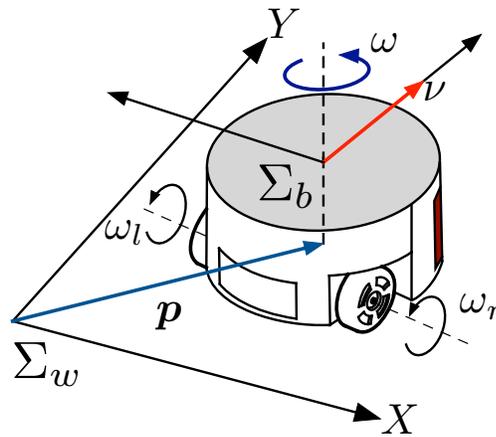


Figura 28. Esquema del robot móvil con tracción diferencial.

Considere un robot móvil con tracción diferencial moviéndose en el plano (ver Figura 28), donde la posición del robot se encuentra descrita por el vector $p \in \mathfrak{R}^2$ que va del marco de referencia inercial Σ_w al marco fijo al cuerpo Σ_b , por otra parte, la orientación se encuentra descrita por la matriz de rotación $R \in SO(2)$, está puede ser parametrizada por el ángulo de conducción $\theta \in \mathfrak{R}$ del robot, es decir

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (66)$$

El modelo matemático que describe la cinemática del robot bajo estudio está dado por

$$v = \nu R e_1 \quad (67a)$$

$$\dot{R} = R S \omega \quad (67b)$$

donde $v \in \mathfrak{R}^2$ es la velocidad lineal, ν y $\omega \in \mathfrak{R}$ son la magnitud de la velocidad y la velocidad angular

respectivamente que a su vez son las entradas de control,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{SO}(2)$$

es la matriz antisimétrica en $\mathfrak{SO}(2)$ (conjunto de matrices antisimétricas de orden 2) y $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0]^\top$ es el vector unitario en el eje x .

4.1.1. Algoritmo de control para seguimiento de velocidad

El método que se utiliza en este trabajo para la obtención de la entrada de control que permite seguimiento de un perfil de velocidad deseado arbitrario pero continuo y derivable, está basado en la técnica de linealización por retroalimentación dinámica reportada en (Oriolo et al., 2002).

Para diseñar el algoritmo se comienza obteniendo la primer derivada con respecto al tiempo de (67a), en la cual se reemplaza $\dot{\mathbf{R}}$ por (67b) y se suma en ambos lados de la ecuación el termino auxiliar $\lambda \mathbf{v}$ (con $\lambda > 0$), para así obtener

$$\dot{\mathbf{v}} + \lambda \mathbf{v} = \dot{\nu} \mathbf{R} \mathbf{e}_1 + \nu \dot{\mathbf{R}} \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{v} \quad (68)$$

donde se sustituirá \mathbf{v} por (67a) y $\dot{\mathbf{v}} + \lambda \mathbf{v}$ por $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^2$ para conseguir

$$\mathbf{u} = \dot{\nu} \mathbf{R} \mathbf{e}_1 + \nu \mathbf{S}(\omega) \mathbf{R} \mathbf{e}_1 + \lambda \nu \mathbf{R} \mathbf{e}_1, \quad (69)$$

donde \mathbf{u} es una nueva entrada de control que será diseñada más adelante.

Empleando la propiedad $\mathbf{S}(\omega) \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{S}(\omega)$ y realizando algunas operaciones se obtiene

$$\dot{\mathbf{v}} + \lambda \mathbf{v} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \dot{\nu} + \lambda \nu \\ \nu \omega \end{bmatrix} = \mathbf{u}, \quad (70)$$

de este resultado la entrada de control ω y la primer derivada con respecto al tiempo de ν pueden ser obtenidas, por lo tanto, al realizar las operaciones necesarias dichas expresiones están dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{\nu} + \lambda \nu \\ \nu \omega \end{bmatrix} = \mathbf{R}^\top \mathbf{u} \implies \begin{cases} \dot{\nu} = -\lambda \nu + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{e}_1 \\ \omega = \frac{\mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{e}_2}{\nu} \end{cases}, \quad (71)$$

la entrada de control ν se obtendrá como solución de

$$\dot{\nu} = -\lambda\nu + \mathbf{u}^\top \mathbf{R}e_1$$

y como se puede apreciar en (71), es necesario que $\nu(0) \neq 0$ para evitar una posible indeterminación.

Para diseñar el algoritmo que permite seguimiento de un perfil de velocidad deseado \mathbf{v}^d se utiliza (70) donde $\lambda > 0$ es una ganancia definida positiva y la entrada de control \mathbf{u} se propone como

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{v}}^d + \lambda\mathbf{v}^d. \quad (72)$$

Dado que la entrada de control se eligió como (72) la dinámica en lazo cerrado es dada por

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = -\lambda\tilde{\mathbf{v}}$$

donde $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}^d$ es el error de velocidad. Esta dinámica presenta como único punto de equilibrio el origen, lo que implica que el sistema sea globalmente exponencialmente estable para todo $\lambda > 0$ y que $\tilde{\mathbf{v}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$ con una convergencia exponencial.

Por último es importante resaltar dos puntos, el primero de ellos es que para lograr el seguimiento del perfil de velocidad deseado, la entrada de control no requiere del uso de la medición de velocidad, sino que solo depende de la velocidad deseada y su derivada, siendo esto muy útil, ya que como se mencionó anteriormente en la práctica no siempre es posible medir todos los estados de un sistema. El segundo punto consiste en destacar que gracias a la técnica aplicada se pudo llevar al sistema (67) a la forma de un sistema con dinámica similar a la de un doble integrador, por lo tanto, la estrategia propuesta en el capítulo 3, puede ser adoptada para diseñar un algoritmo que permita que un grupo de robots diferenciales repliquen alguno de los comportamientos colectivos bajo estudio.

4.2. Algoritmos de control para un grupo de robots de tracción diferencial

A continuación se presentan el diseño de los algoritmos de control, que se proponen en este trabajo para lograr que un grupo de robots con tracción diferencial descritos por (67) logren la emergencia de los comportamientos colectivos, de sincronización, formación y bandada.

4.2.1. Algoritmo para sincronización en velocidad

Recordando que (8) se ha establecido como el objetivo de control para decir que el comportamiento de sincronización se está llevando a cabo o de manera equivalente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_s \quad \forall i \in \mathcal{N} \quad (73)$$

donde \mathbf{v}_s es la velocidad de sincronización. Se propone para lograr el objetivo

$$\lambda_i = \bar{c} \sum_{j=1}^N d_{ij} \quad i = 1, \dots, N \quad (74)$$

y la entrada de control \mathbf{u}_i como

$$\mathbf{u}_i = \bar{c} \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{v}_j \quad (75)$$

donde $\bar{c} > 0$ es una nueva ganancia. Sustituyendo (75) en (70) se obtiene la dinámica del sistema en lazo cerrado, dada por $\dot{\mathbf{v}}_i = -\bar{c} \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j)$, la ecuación anterior se puede escribir en forma compacta como

$$\dot{\mathbf{v}} = -\bar{c}(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)\mathbf{v} \quad (76)$$

donde $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1^\top \dots \mathbf{v}_n^\top]^\top \in \mathfrak{R}^{2N}$. Considerando que $\mathbf{L}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}$, (76) tiene como único punto de equilibrio $\mathbf{v} = \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{v}_s$. Si el grafo empleado es no dirigido (conectado) el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable (Ren et al., 2007; Zelazo et al., 2007). No obstante la entrada de control (75) depende de la medición de velocidad de los robots vecinos, lo que provoca una desventaja en un caso práctico donde no se pueda medir la velocidad, por lo tanto para abordar dicho problema se propone como nueva entrada de control

$$\mathbf{u}_i = \lambda_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (77)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_i$, es la salida de un filtro de primer orden que permite estimar la velocidad Cartesiana de los robots y λ_i es una nueva ganancia que se define como $\lambda_i = \bar{c}$. El filtro está dado por

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_i = -\alpha_i \boldsymbol{\beta}_i + \bar{c} \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{p}_j \quad (78a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = -\alpha_i \boldsymbol{\beta}_i + \bar{c} \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{p}_j \quad (78b)$$

donde

$$\alpha_i = \bar{c} \sum_{j=1}^N d_{ij}, \quad (79)$$

es la ganancia del filtro y se encuentra conformada por los términos d_i de la matriz de grado asociada a un grafo. La entrada del filtro corresponde a la posición Cartesiana de los robots.

Para probar la estabilidad del sistema y comprobar que los robots se sincronizan en el sentido de (8), se procede a analizar la dinámica en lazo cerrado del sistema. La dinámica en lazo cerrado considerando

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\alpha \boldsymbol{\varepsilon} + \bar{c} \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{v}_j \quad (80)$$

y reemplazando (77) en $\dot{\mathbf{v}}_i = -\lambda_i \mathbf{v}_i + \mathbf{u}_i$ se define como

$$\dot{\mathbf{v}}_i = -\bar{c} \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{v}_i - \boldsymbol{\varepsilon}_i) \quad (81a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_i = -\bar{c} \sum_{j=1}^N a_{ij} (\boldsymbol{\varepsilon}_i - \mathbf{v}_i) - \bar{c} \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j). \quad (81b)$$

Para realizar la prueba para N robots (81) se puede expresar en forma compacta como

$$\dot{\mathbf{v}} = -\bar{c}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (82a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = -\bar{c}(\mathbf{D} \otimes \mathbf{I}_2)(\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{v}) - \bar{c}(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)\mathbf{v} \quad (82b)$$

donde $\mathbf{v} \in \mathfrak{R}^{2N}$, $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathfrak{R}^{2N}$ son vectores apilados y $\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ es la matriz de grado asociada a un grafo.

Igualando (82) a cero y empleando las propiedades $\mathbf{L}\mathbf{1}_N = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1) = (\mathbf{A}\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}\mathbf{B}_1)$ se concluye que (82) tiene un punto de equilibrio en $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}) = (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{v}_s, \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{v}_s)$ para una \mathbf{v}_s . Para analizar la estabilidad del punto de equilibrio en el sentido de Lyapunov se propone como función candidata

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top (\mathbf{D} \otimes \mathbf{I}_2) \mathbf{v} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^\top (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) \mathbf{v}. \quad (83)$$

La derivada con respecto al tiempo de V a lo largo de (82) está dada por

$$\dot{V} = -\bar{c}(\mathbf{v} - \boldsymbol{\varepsilon})^\top (\mathbf{D} \otimes \mathbf{I}_2)(\mathbf{v} - \boldsymbol{\varepsilon}) - \bar{c} \mathbf{v}^\top \mathbf{L} \mathbf{v} \leq 0. \quad (84)$$

Dado que \dot{V} es negativa semidefinida, las trayectorias en lazo cerrado de $\mathbf{v}(t)$ y $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ son acotadas, lo

que implica que el punto de equilibrio $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}) = (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{v}_s, \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{v}_s)$ es estable. Aplicando el teorema de invarianza de LaSalle sobre el conjunto $\{\mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathfrak{R}^{2N} \mid \dot{V} = 0\}$ permite probar que el punto de equilibrio es también asintóticamente estable. Lo que implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) = \mathbf{v}_s$ y $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_i(t) - \mathbf{v}_j(t) = \mathbf{0}$ para todo $i, j \in \mathcal{N}$. Es importante resaltar que esta prueba es válida siempre y cuando el grafo sea no dirigido y conectado o dirigido y balanceado, ya que se tiene que cumplir que \mathbf{L} sea simétrica.

4.2.2. Algoritmo de control de bandada

Aplicando el enfoque para obtener (14) y tomando en cuenta (70), se obtiene

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \boldsymbol{\vartheta}_i + \tilde{\mathbf{v}}_i \quad (85a)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}}_i = -\lambda_i \mathbf{v}_i - \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i + \mathbf{u}_i, \quad (85b)$$

con dicha estructura, es posible adoptar los pasos que permiten obtener la ley de control que logra que los comportamientos colectivos bajo estudio emerjan en un grupo de sistemas con dinámica de doble integrador. La ley de control que se propone para que un grupo de robots móviles emulen el comportamiento de bandada en el sentido de (7) está dada por

$$\boldsymbol{\vartheta}_i = \mathbf{v}_d(t) - k_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_i \quad (86a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_i = -k_{\varphi_i} \boldsymbol{\varphi}_i + c \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij} - \boldsymbol{\varphi}_{ij}) \quad (86b)$$

$$\mathbf{u}_i = \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i + \lambda_i \boldsymbol{\vartheta}_i. \quad (86c)$$

donde λ_i , k_i y c son ganancias positivas.

Tomando en cuenta la primer deriva con respecto al tiempo de (15), las ecuaciones (85), (86) y empleando las propiedades del producto de Kronecker, la dinámica en lazo cerrado se puede escribir de forma compacta como

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = -(\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_2) \boldsymbol{\varphi} + c(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) \mathbf{r} \quad (87a)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = -c(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{v}} \quad (87b)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{v}}} = -(\boldsymbol{\Lambda} \otimes \mathbf{I}_2) \tilde{\mathbf{v}}. \quad (87c)$$

donde $\mathbf{K} = \text{diag}\{k_{\varphi 1}, \dots, k_{\varphi N}\} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ y $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ son matrices diagonales definidas positivas. Dado que la estructura de (87) es igual a la de (20), es posible omitir la prueba de estabilidad y concluir que al hacer uso de (21) y las propiedades de (23) la estabilidad que presenta el sistema en lazo cerrado es global exponencialmente estable, lo que implica que los robots con tracción diferencial logran emular el comportamiento de bandada en el sentido de (7) y considerando que $\|\mathbf{v}^d(t)\| > 0$ para todo $t \geq 0$.

Como se puede observar la ley de control (86) requiere que todos los agentes conozcan el perfil de velocidad deseado. Para abordar dicho problema se propone un observador distribuido, el cual está dado por

$$\dot{\hat{\mathbf{v}}}_i^d = \mu_1 \left(b_i \bar{\mathbf{v}}_i - \sum_{i=1}^N a_{ij} \hat{\mathbf{v}}_{ij}^d \right) + \boldsymbol{\sigma}_i \quad (88a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_i = \mu_2 \left(b_i \bar{\mathbf{v}}_i - \sum_{i=1}^N a_{ij} \hat{\mathbf{v}}_{ij}^d \right) + \mu_3 \text{sign}_c \left(b_i \bar{\mathbf{v}}_i - \sum_{i=1}^N a_{ij} \hat{\mathbf{v}}_{ij}^d \right) \quad (88b)$$

donde $\mu_k \in \mathfrak{R}$ con $k = 1, 2, 3$ son constantes positivas, $\hat{\mathbf{v}}_{ij}^d = \hat{\mathbf{v}}_i^d - \hat{\mathbf{v}}_j^d \in \mathfrak{R}^2$ es la velocidad estimada relativa, $\bar{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}^d(t) - \hat{\mathbf{v}}_i^d \in \mathfrak{R}^2$ es el error de observación, $\text{sign}_c(\cdot)$ es la función signo por componentes

$$\text{sign}_c(\mathbf{f}) = [\text{sign}(f_1) \text{sign}(f_2)]^\top \in \mathfrak{R}^2$$

donde $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2] \in \mathfrak{R}^2$, la función sign y b_i se definen respectivamente como

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad (89)$$

$$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \mathcal{N}_d \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases} \quad (90)$$

donde $\mathcal{N}_d \subset \mathcal{N}$ es el conjunto de robots que tienen acceso a $\mathbf{v}^d(t)$.

Suponiendo que el grafo empleado es no dirigido y conectado y las ganancias del observador satisfacen

$$\frac{\mu_1^2}{\mu_2} > \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}^2\{\mathbf{M}\}}{2\lambda_{\min}\{\mathbf{M}\}}, \lambda_{\max}\{\mathbf{M}\} \right\}, \quad \mu_3 > \Delta_d \sqrt{N}, \quad (91)$$

donde $\mathbf{M} = ((\mathbf{L} + \bar{\mathbf{D}}) \otimes \mathbf{I}_2)^{-1} \in \mathfrak{R}^{2N \times 2N}$, $\bar{\mathbf{D}} = \text{diag}\{b_1, \dots, b_N\} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ y $\Delta_d \in \mathfrak{R}$ es una cota superior de $\ddot{\mathbf{v}}_d(t) \in \mathfrak{R}^2$, es decir, $\|\ddot{\mathbf{v}}_d(t)\| \leq \Delta_d$. El observador distribuido garantiza

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\mathbf{v}}_i^d(t) = \mathbf{v}_d(t), \quad \forall i \in N. \quad (92)$$

Considerando que la comunicación se realiza con un grafo no dirigido se asume que $\mathbf{L} + \bar{\mathbf{D}}$ es una matriz simétrica definida positiva (Hong et al., 2006), por lo tanto, $\lambda_{\min}\{\mathbf{M}\} > 0$. Teniendo en cuenta que $\hat{\mathbf{v}}_{ij}^d = -\bar{\mathbf{v}}_{ij}$ y (88), la dinámica del error de observación $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{1}_N \otimes \mathbf{v}(t) - \hat{\mathbf{v}}^d$ es dado por

$$\dot{\bar{\mathbf{v}}} = -\mu_1 \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{1}_N \otimes \dot{\mathbf{v}}_d(t) \quad (93a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mu_2 \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{v}} + \mu_3 \text{sign}_c(\mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{v}}). \quad (93b)$$

Para llevar a cabo la prueba de estabilidad, se define el siguiente cambio de coordenadas

$$\mathbf{z} = \mathbf{M}^{-1} \bar{\mathbf{v}} \in \mathfrak{R}^{2N}. \quad (94)$$

Bajo el cambio de coordenadas la derivada de (93a) puede ser escrita como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{z}} = -\mu_1 \dot{\mathbf{z}} - \mu_2 \mathbf{z} - \mu_3 \text{sign}_c(\mathbf{z}) + \mathbf{1}_N \otimes \ddot{\mathbf{v}}_d(t). \quad (95)$$

Considerando la función escalar

$$W = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{z}}^\top \mathbf{M} \dot{\mathbf{z}} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \dot{\mathbf{z}}^\top \mathbf{M} \mathbf{z} + \mu_2 \mathbf{z}^\top \mathbf{z} + \beta - \underbrace{\int_0^t \mathbf{z}^\top(\tau) (\ddot{\mathbf{v}}_d^*(\tau) - \mu_3 \text{sign}_c(\mathbf{z}(\tau))) d\tau}_{\mathcal{I}}, \quad (96)$$

donde $\ddot{\mathbf{v}}_d^*(\tau) = \mathbf{1}_N \otimes \ddot{\mathbf{v}}_d(t)$ y $\beta \in \mathfrak{R}$ sera definida más adelante. Una cota superior del término integral \mathcal{I} es dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathbf{z}^\top(t) \ddot{\mathbf{v}}_d^*(t) - \mathbf{z}^\top(0) \ddot{\mathbf{v}}_d^*(0) - \mu_3 |\mathbf{z}(t)| + \mu_3 |\mathbf{z}(0)| \\ &\leq -(\mu_3 - \Delta_d \sqrt{N}) |\mathbf{z}(t)| - \mathbf{z}^\top(0) \ddot{\mathbf{v}}_d^*(0) + \mu_3 |\mathbf{z}(0)| \\ &\leq \mu_3 |\mathbf{z}(0)| - \mathbf{z}^\top(0) \ddot{\mathbf{v}}_d^*(0) \triangleq \beta, \end{aligned} \quad (97)$$

donde $|\mathbf{z}| = |z_1| + \dots + |z_n|$ y $\|\ddot{\mathbf{v}}(t)\| \leq \Delta_d$ han sido usadas. La desigualdad (97) implica $\beta - \mathcal{I} \geq 0$.

La función W es acotada por abajo como

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \|\dot{z}\| \\ \|z\| \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{\min}\{\mathbf{M}\} & -\mu_2\mu_1^{-1}\lambda_{\max}\{\mathbf{M}\} \\ -\mu_2\mu_1^{-1}\lambda_{\max}\{\mathbf{M}\} & 2\mu_2 \end{bmatrix}}_{\Phi} \begin{bmatrix} \|\dot{z}\| \\ \|z\| \end{bmatrix} \leq W. \quad (98)$$

Dado que las ganancias del observador se seleccionan para satisfacer (91), la matriz $\Phi \in \mathfrak{R}^{2 \times 2}$ es definida positiva, y por lo tanto la función W es positiva definida. Además, W es radialmente acotada.

La derivada de W a lo largo de (95) es dada por

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -\mu_1 \|\dot{z}\|^2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \|z\|^2 - \mu_3 \frac{\mu_2}{\mu_1} |z| + \frac{\mu_2}{\mu_1} z^\top \ddot{v}_d^* + \frac{\mu_2}{\mu_1} \dot{z}^\top M \dot{z} \\ &\leq -\left(\mu_1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \lambda_{\max}\{\mathbf{M}\}\right) \|\dot{z}\|^2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} \|z\|^2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} (\mu_3 - \Delta_d \sqrt{N}) |z|. \end{aligned} \quad (99)$$

Tomando en cuenta (91), \dot{W} satisface

$$\dot{W} \leq -\varrho(\|\dot{z}\|^2 + \|z\|^2), \quad (100)$$

donde $\varrho = \mu_1^{-1} \min\{\mu_1^2 - \mu_2 \lambda_{\max}\{\mathbf{M}\}, \mu_2\}$. La función \dot{W} es negativa $\forall (z, \dot{z}) \in \mathfrak{R}^{2N} \times \mathfrak{R}^{2N} \setminus (\mathbf{0}, \mathbf{0})$. Por lo tanto, de acuerdo a la teoría de Lyapunov, el punto de equilibrio $(z, \dot{z}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ es globalmente asintóticamente estable. Por lo tanto, se concluye que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{v} = \mathbf{M}z(t) = \mathbf{0} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{v}_i^d(t) = v^d(t). \quad (101)$$

Ahora, combinando el observador distribuido (88) con el algoritmo de control (86) para lograr emular el comportamiento de bandada aún y cuando solo algunos robots del grupo tienen conocimiento del perfil de velocidad deseado, se obtiene

$$\vartheta_i = \hat{v}_i^d - k_{\varphi i} \varphi_i \quad (102a)$$

$$\dot{\varphi}_i = -k_{\varphi i} \varphi_i + c \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{p}_{ij} - \delta_{ij} - \varphi_{ij}) \quad (102b)$$

$$\mathbf{u}_i = \dot{\vartheta}_i + \lambda_i \vartheta_i. \quad (102c)$$

donde $\hat{v}_i^d \in \mathfrak{R}^2$ es obtenida de (88) permitiendo que los robots del grupo emulen el comportamiento de bandada en el sentido de (7).

Asumiendo que el grafo empleado es no dirigido y conectado se procede a realizar el análisis de estabilidad, por lo que es necesario considerar las ecuaciones (21), (85b), (94), (102) y las propiedades mostradas en (23) para obtener la dinámica en lazo cerrado, dada por

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{H}\mathbf{x}_1 + \mathbf{F}\mathbf{x}_2 \quad (103a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}_2), \quad (103b)$$

donde $\mathbf{x}_1 = [\varphi^\top \ \mathbf{q}^\top \ \tilde{\mathbf{v}}^\top]^\top \in \mathfrak{R}^{2(3N-1)}$, $\mathbf{x}_2 = [\mathbf{z}^\top \ \dot{\mathbf{z}}^\top]^\top \in \mathfrak{R}^{4N}$ y

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_2 & c(\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top \otimes \mathbf{I}_2) & \mathbf{O}_{2N} \\ \mathbf{O}_{2(N-1) \times 2N} & -c(\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top \otimes \mathbf{I}_2) & \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{O}_{2N} & \mathbf{O}_{2N \times 2(N-1)} & -\mathbf{\Lambda} \otimes \mathbf{I}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{2N} & \mathbf{O}_{2N} \\ \mathbf{O}_{2(N-1) \times 2N} & \mathbf{O}_{2(N-1) \times 2N} \\ -\mathbf{\Lambda} \otimes \mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_{2N} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \mathbf{M}^{-1}(-\mu_1 \dot{\mathbf{z}} - \mu_2 \mathbf{z} - \mu_3 \text{sign}_c(\mathbf{z}) + \dot{\mathbf{v}}_d^*) \end{bmatrix}.$$

El sistema (103) tiene como punto de equilibrio $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, lo anterior es valido por la manera en la que se definió (89) y considerando que $\dot{\mathbf{v}}_d^*$ tiene que ser cero.

Para analizar la estabilidad del punto de equilibrio se hace uso de la función candidata de Lyapunov

$$V_x = \epsilon \mathbf{x}_1^\top \mathbf{P} \mathbf{x}_1 + W(\mathbf{x}_2), \quad (104)$$

donde $\epsilon \in \mathfrak{R}$ es una constante positiva, $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{2(3N-1) \times 2(3N-1)}$ es la solución de la ecuación de Lyapunov $\mathbf{H}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{H} = -\iota \mathbf{I}_{2(3N-1)}$ con $\iota > 0$ y $W(\mathbf{x}_2)$ es definida en (96). La primer derivada con respecto al tiempo de V_x satisface

$$\dot{V}_x \leq - \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_1\| \\ \|\mathbf{x}_2\| \end{bmatrix}^\top \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon \iota & -\zeta \epsilon \\ -\zeta \epsilon & \varrho \end{bmatrix}}_{\Phi_x} \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_1\| \\ \|\mathbf{x}_2\| \end{bmatrix}, \quad (105)$$

donde $\lambda_{\max}\{\mathbf{P}\} \|\mathbf{F}\| \leq \zeta \in \mathfrak{R}$. Si el parámetro ϵ es seleccionado como

$$0 < \epsilon < \frac{\varrho \iota}{\zeta^2}, \quad (106)$$

la matriz Φ_x es definida positiva y por lo tanto

$$\dot{V}_x \leq -\lambda_{\min}\{\Phi_x\}(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2). \quad (107)$$

Dado que \dot{V}_x es definida negativa se puede concluir que el punto de equilibrio es globalmente asintóticamente estable. Esto a su vez garantiza que tanto el objetivo de control en el sentido de (7) como de $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{v}_i = \mathbf{0}$ se cumplan.

4.2.3. Algoritmo de control de sincronización en velocidad con formación

En este apartado se propone un entrada de control que permite emular tanto el comportamiento de formación como de sincronización en velocidad. Para el diseño de la entrada de control u_i , se define la variable del error $e_i \in \mathfrak{R}^2$ y su primer derivada con respecto al tiempo $\dot{e}_i \in \mathfrak{R}^2$ como

$$e_i = p_i - \delta_i - \eta_i - s_i \quad (108a)$$

$$\dot{e}_i = \dot{p}_i - \dot{\eta}_i - \dot{s}_i, \quad (108b)$$

donde $\eta_i \in \mathfrak{R}^2$ y $s_i \in \mathfrak{R}^2$ son nuevos estados cuyas dinámicas se definen a continuación. El estado s_i y su primer derivada \dot{s}_i son solución del sistema de segundo orden

$$\ddot{s}_i = -c_1 \sum_{j=1}^N a_{ij} s_{ij} - c_2 \sum_{j=1}^N a_{ij} \dot{s}_{ij} \quad (109)$$

donde $s_{ij} = s_i - s_j$, $\dot{s}_{ij} = \dot{s}_i - \dot{s}_j$, a_{ij} son elementos de la matriz de adyacencia y c_1 y $c_2 \in \mathfrak{R}$ son constantes positivas. De acuerdo a Ren y Atkins (2005); Yu et al. (2010); Abdessameud y Tayebi (2013) si el grafo empleado es conectado y las ganancias c_1 y c_2 son elegidas adecuadamente los estados de (109) logran sincronización, es decir

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_{ij}(t) = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{s}_{ij}(t) = \mathbf{0}. \quad (110)$$

Asumiendo que la entrada de control u_i y la dinámica de los estados η_i y $\dot{\eta}_i$ se diseñaron para que $(e_i(t), \dot{e}_i(t)) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ y $(\eta_i(t), \dot{\eta}_i(t)) \rightarrow (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ cuando $t \rightarrow \infty$, al escribir (108) como $p_i(t) - \delta_i = s_i(t) + e_i(t) + \eta_i(t)$ y $v_i(t) = \dot{s}_i(t) + \dot{e}_i(t) + \dot{\eta}_i(t)$, se puede observar que $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) - \delta_i = s_i(t)$ y $v_i(t) = \dot{s}_i(t)$, entonces considerando (110) el objetivo de formación y sincronización se logra

respectivamente en el sentido de

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_{ij}(t) - \delta_{ij} = \mathbf{s}_{ij}(t) = \mathbf{0}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_{ij}(t) = \dot{\mathbf{s}}_{ij}(t) = \mathbf{0} \quad (111)$$

Para cumplir con lo anterior se propone como entrada de control

$$\mathbf{u}_i = -\gamma_i \boldsymbol{\eta}_i - \lambda_i \dot{\boldsymbol{\eta}}_i + \lambda_i \dot{\mathbf{s}}_i \quad (112)$$

$\boldsymbol{\eta}_i$ y $\dot{\boldsymbol{\eta}}_i$ se obtienen de la solución de

$$\ddot{\boldsymbol{\eta}}_i = -\gamma_i \boldsymbol{\eta}_i - 2\lambda_i \dot{\boldsymbol{\eta}}_i - \ddot{\mathbf{s}}_i + \alpha_i \mathbf{e}_i \quad (113)$$

donde γ_i, λ_i y $\alpha_i \in \mathfrak{R}$ son ganancias definidas positivas.

Para llevar a cabo el análisis de estabilidad, se toman en cuenta las ecuaciones (70), (108), (112) y (113) para obtener la dinámica del error, dada por

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}_i = \mathbf{A}_{\chi_i} \boldsymbol{\chi}_i - \bar{\mathbf{B}}_i \ddot{\mathbf{s}}_i. \quad (114)$$

donde $\boldsymbol{\chi}_i = [\mathbf{e}_i^\top \dot{\mathbf{e}}_i^\top \boldsymbol{\eta}_i^\top \dot{\boldsymbol{\eta}}_i^\top]^\top \in \mathfrak{R}^8$, $\bar{\mathbf{B}}_i = [\mathbf{O}_2 \ \mathbf{O}_2 \ \mathbf{O}_2 \ \mathbf{I}_2]^\top \in \mathfrak{R}^{8 \times 2}$ y

$$\mathbf{A}_{\chi_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{8 \times 8}, \quad (115)$$

con

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_2 & \mathbf{I}_2 \\ -\alpha_i \mathbf{I}_2 & -\lambda_i \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_2 & \mathbf{O}_2 \\ \alpha_i \mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_2 & \mathbf{I}_2 \\ -\gamma_i \mathbf{I}_2 & -2\lambda_i \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}.$$

Remplazando las matrices anteriores en (115) se puede notar que la matriz \mathbf{A}_{χ_i} es una matriz triangular inferior a bloques, en vista de que \mathbf{A}_{11} y \mathbf{A}_{22} son matrices Hurwitz eligiendo adecuadamente los valores de λ_i, α_i y $\gamma_i > 0$, se concluye que \mathbf{A}_{χ_i} es una matriz Hurwitz. Además, (114) es un sistema lineal con $\ddot{\mathbf{s}}$ como entrada de control que se desvanece (Hale, 2009). Esto implica que $\boldsymbol{\chi}_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $t \rightarrow \infty$ y por lo tanto se puede concluir que los agentes del grupo han logrado la formación deseada y sincronizar

su velocidad, ya que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}_{ij}(t) - \boldsymbol{\delta}_{ij} = \mathbf{s}_{ij}(t) + \mathbf{e}_{ij}(t) + \boldsymbol{\eta}_{ij}(t) = \mathbf{0}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{v}_{ij}(t) = \dot{\mathbf{s}}_{ij}(t) + \dot{\mathbf{e}}_{ij}(t) + \dot{\boldsymbol{\eta}}_{ij}(t) = \mathbf{0}.$$

4.3. Resultados experimentales

Para validar los algoritmos propuestos en este capítulo que permiten que un grupo de robots móviles con tracción diferencial emulen los comportamientos de sincronización, formación y bandada, se presentan solo resultados experimentales. Para realizar las pruebas se emplearon cuatro robots Khepera III desarrollados por la empresa K-Team's. Este robot está equipado con un procesador DsPIC 30F5011 a 60 MHz, una memoria RAM de 4 KB, nueve sensores infrarrojos a su alrededor, y dos en la parte inferior, cinco sensores ultrasónicos, una batería de polímero de litio y dos motores DC. Para medir la posición y la orientación de los robots se emplean seis cámaras de captura de movimiento de la marca OptiTrack, la programación de los algoritmos se realiza en Matlab usando un tiempo de muestreo de 0.01 [s]. En la Figura 29 se presenta el esquema que ejemplifica el experimento.

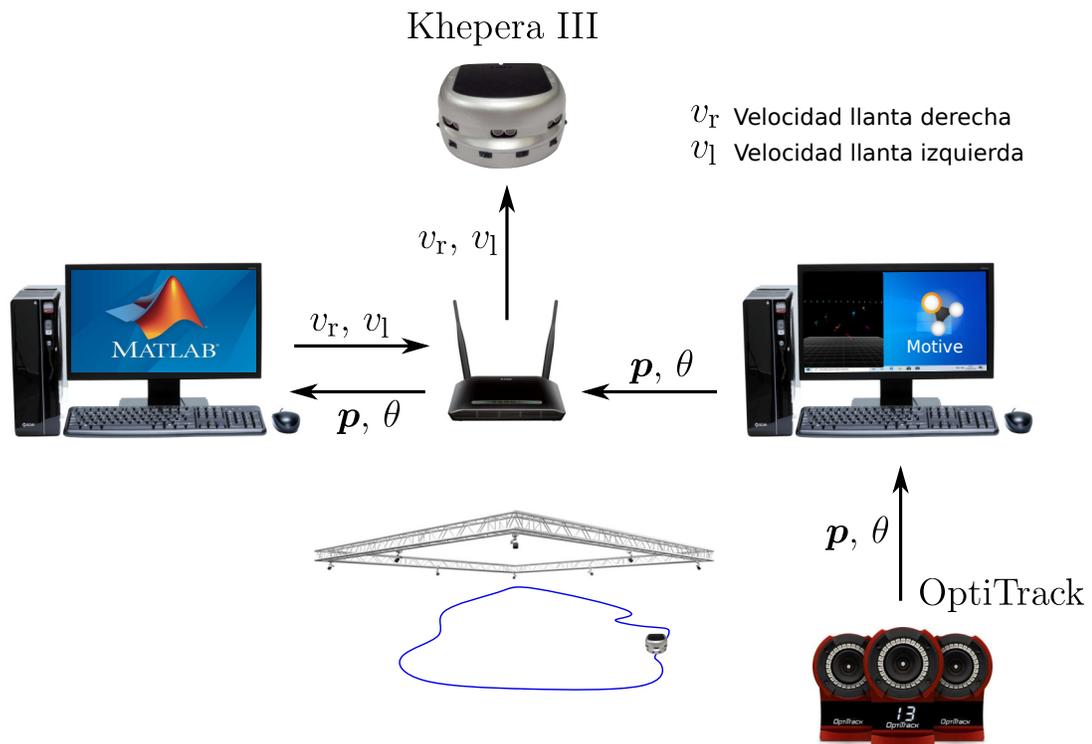


Figura 29. Esquema del experimento con robots móviles de tracción diferencial.

Es importante mencionar que aún y cuando los algoritmos propuestos no requieren mediciones de velocidad, se ha empleado el modelo cinemático (67a) para estimarla con propósitos de comparación.

4.3.1. Resultados del algoritmo de sincronización en velocidad

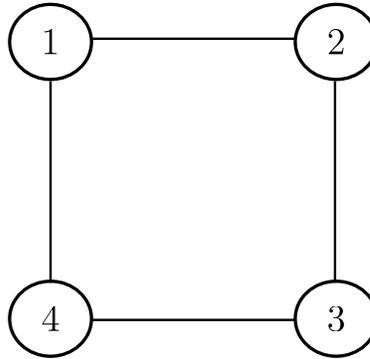


Figura 30. Grafo no dirigido topología anillo.

El grafo no dirigido empleado en este experimento, para llevar a cabo la comunicación entre los agentes corresponde a un anillo (ver Figura 30), su matriz de adyacencia y de grado son respectivamente:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Las condiciones iniciales para ε_i y la entrada de control ν_i se proponen respectivamente como $\varepsilon_i(0) = \mathbf{0}$ y $\nu_i(0) = 0.01$ [m/s]. La orientación inicial de cada robot está dada por

$$\mathbf{R}_1(0) = \begin{bmatrix} 0.9997 & -0.0249 \\ 0.0250 & 0.9995 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_2(0) = \begin{bmatrix} 0.8279 & 0.5604 \\ -0.5607 & 0.8279 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_3(0) = \begin{bmatrix} 0.7622 & -0.6473 \\ 0.6471 & 0.7622 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_4(0) = \begin{bmatrix} 0.9998 & 0.0170 \\ -0.0167 & 0.9996 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, recordando que la ganancia $\lambda_i = \bar{c}$ se propone $\bar{c} = 5$.

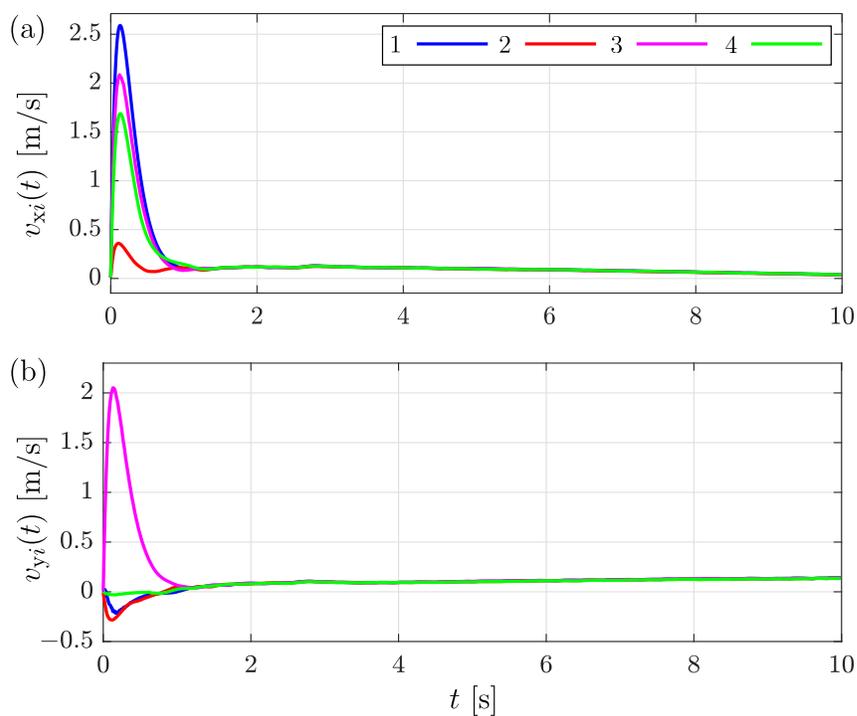


Figura 31. Mediciones de velocidad de cada robot: (a) eje x y (b) eje y .

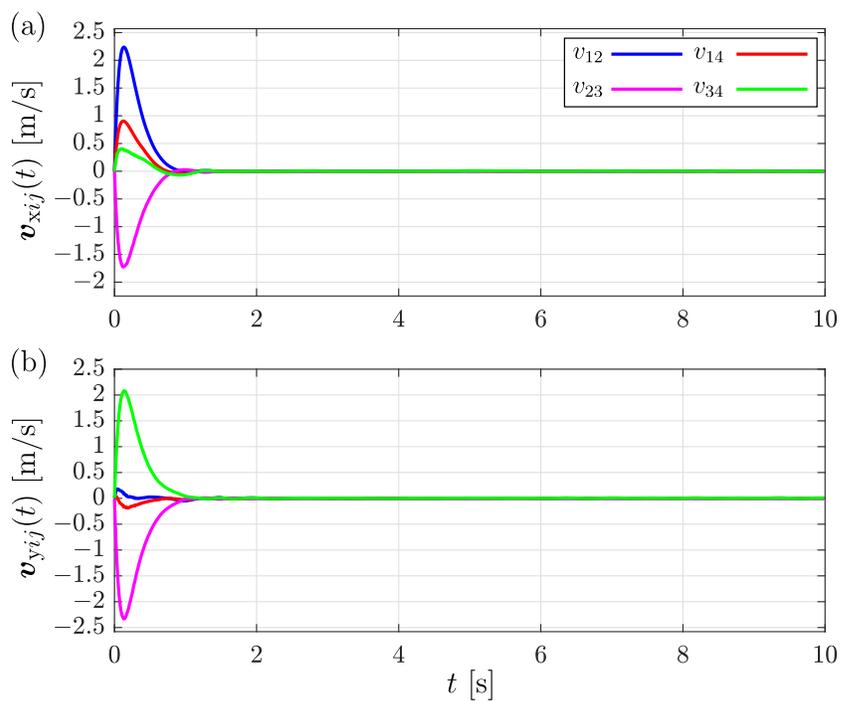


Figura 32. Objetivo de control en velocidad: (a) eje x y (b) eje y .

En la Figura 31 a simple vista se puede ver que los robots diferenciales han logrado emular el comportamiento de sincronización, ya que sus velocidades después de pocos segundos tienden a un mismo valor.

Para confirmar que el control propuesto está cumpliendo de manera razonable con su propósito, en la Figura 32 se presenta el objetivo de control planteado en (8), como se puede notar el objetivo se cumple de manera adecuada, ya que los errores tienden a cero.

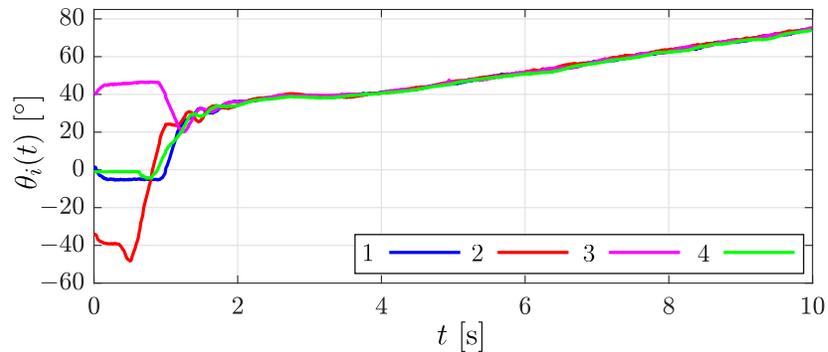


Figura 33. Medición de la posición angular de cada robot.

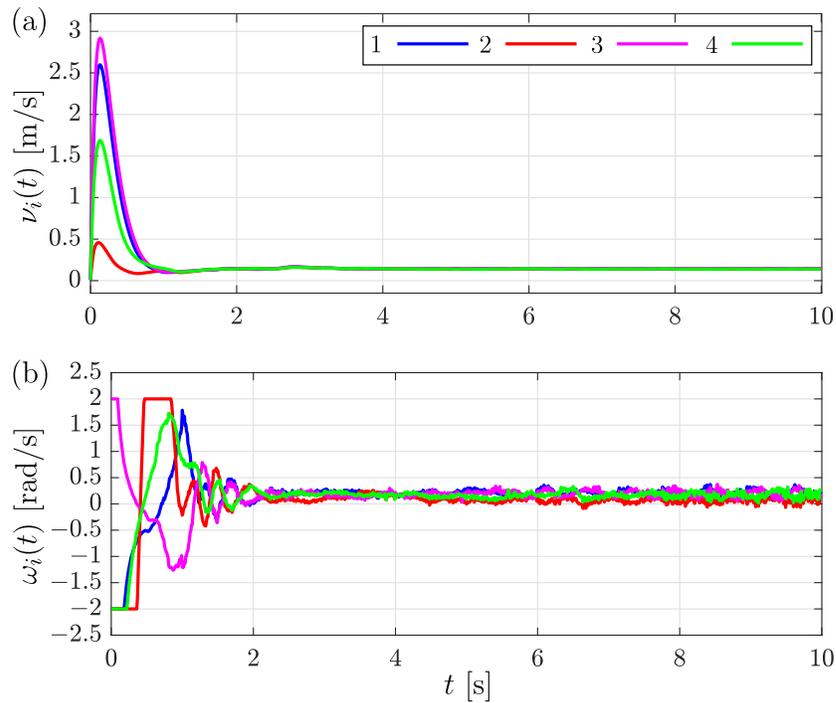


Figura 34. Entrada de control para cada robot.

Del resultado mostrado en la Figura 33 se puede ver que los robots también se sincronizan en orientación, dado que cada uno de ellos ha comenzado con una orientación diferente y al transcurrir pocos segundos convergen al mismo valor.

Las entradas de control que permiten que los robots del grupo logren emular el comportamiento de sincronización en velocidad, se presentan en la Figura 34, donde se puede ver que en el caso de la

entrada de control $\nu_i(t)$ Figura 34(a) no existen cruces por cero que puedan indeterminar la entrada de control ω_i .

La trayectoria que describen los robots al emular el comportamiento de sincronización se puede ver en la Figura 35, se puede notar que aún y cuando llevan la misma velocidad los robots no se desplazan en línea recta, esto se debe a que existe fricción entre las llantas y la superficie de la mesa causando dicho efecto, no obstante se puede decir que el control presenta cierta robustez, ya que los robots logran sincronizar su velocidad.

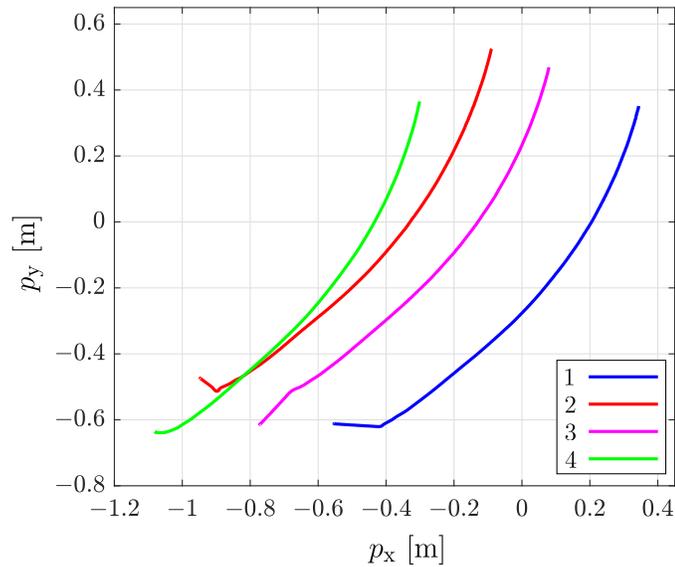


Figura 35. Trayectoria generada por los robots en el plano $x-y$.

4.3.2. Resultados del algoritmo de bandada usando el observador distribuido

Para obtener los resultados mostrados en este apartado, se emplea para la comunicación el grafo mostrado en el caso anterior y el observador distribuido (88). En este experimento se propone que solo el primer robot conozca el perfil de velocidad deseado dado por

$$\mathbf{v}^d(t) = \begin{bmatrix} 0.035 - 0.015(\tanh(t - 20) - \tanh(t - 35)) \\ -0.015(\tanh(t - 20) - \tanh(t - 35)) \end{bmatrix}$$

por lo tanto se fija $\bar{\mathbf{D}} = \text{diag}\{1 \ 0 \ 0 \ 0\}$. Para la implementación del observador distribuido, la función signo se aproximó con la función tangente hiperbólica $\tanh(\mu_4 x)$.

Las condiciones iniciales para la entrada $\nu_i(0)$ son las mismas que en el caso anterior, las condiciones iniciales para $\varphi_i(0)$ y $\sigma_i(0)$ son iguales a cero, en el caso de $\hat{v}_i^d(0)$ las condiciones iniciales se obtienen de $v^d(0)$, las ganancias del algoritmo de control y del observador se proponen como $\lambda_i = k_i = 2$, $\mu_1 = 10.5$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 1$ y $\mu_4 = 80$. Por otra parte, las constantes δ_i han sido fijadas como $\delta_1 = [-0.1 \ 0.1]^\top$ [m], $\delta_2 = [0.1 \ 0.1]^\top$ [m], $\delta_3 = [-0.1 \ -0.1]^\top$ [m] y $\delta_4 = [0.1 \ -0.1]^\top$ [m].

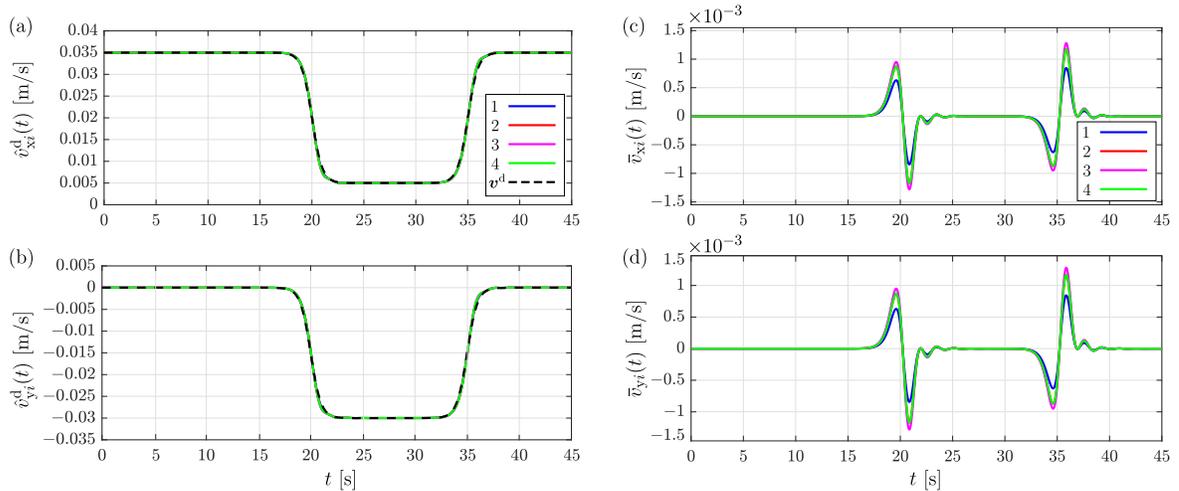


Figura 36. Velocidad estimada: (a) eje x y (b) eje y y errores de observabilidad: (c) eje x y (d) eje y .

El desempeño del observador distribuido se muestra en la Figure 36 donde se observa que cumple con su objetivo, ya que aún y cuando solo un agente conoce el perfil v^d las mediciones obtenidas del observador tienden a lo deseado. Además, los resultados que se presentan en las Figuras 36(c) y 36(d) demuestran que el observador presenta un buen desempeño, dado que se cumple lo establecido en (101).

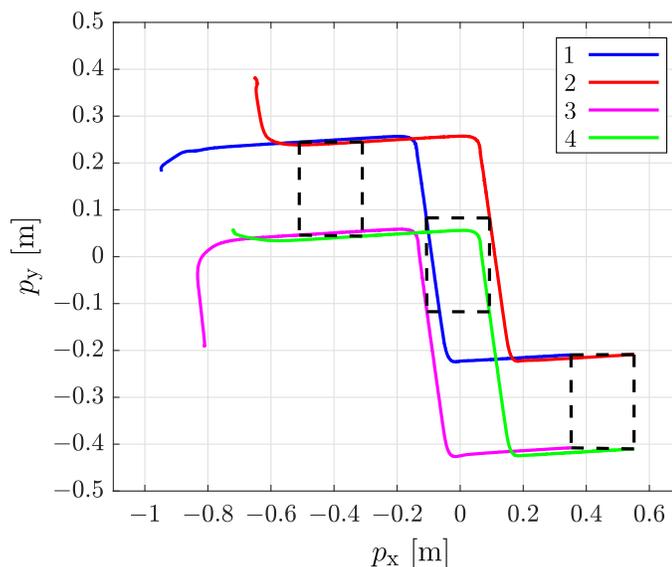


Figura 37. Trayectoria generada por los agentes al realizar el seguimiento del perfil v^d y formación deseada.

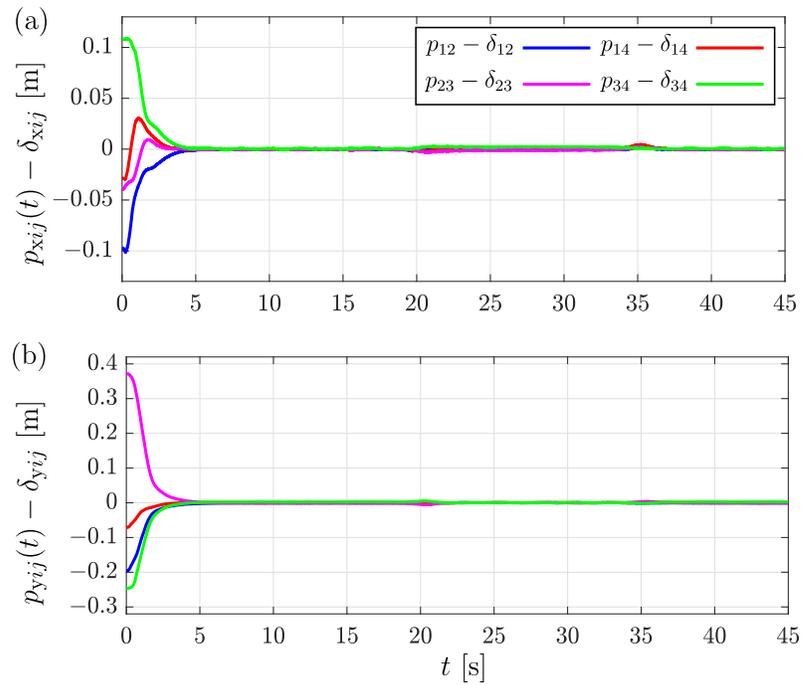


Figura 38. Evolución en el tiempo del objetivo de control de bandada en posición: (a) eje x y (b) eje y .

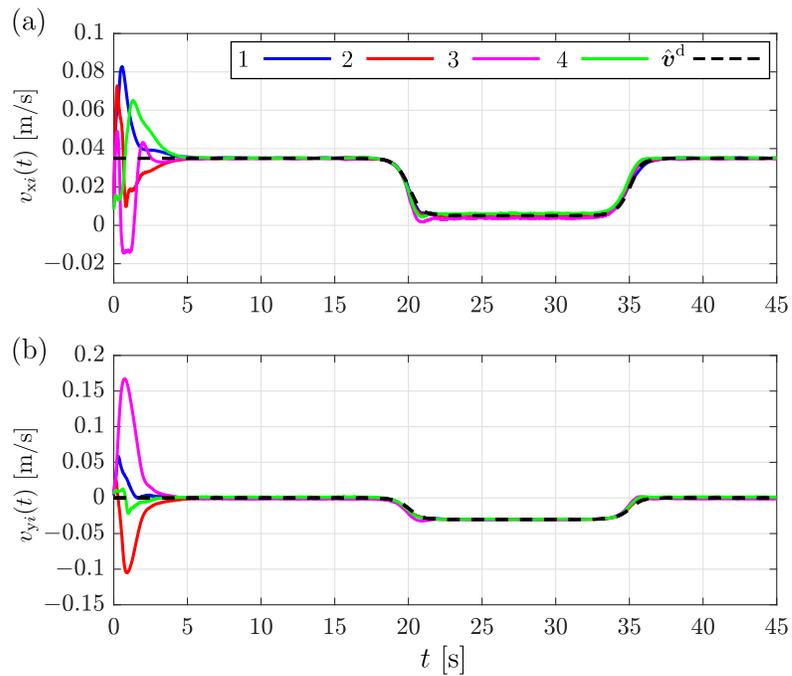


Figura 39. Evolución en el tiempo de la medición de velocidad de cada agente: (a) eje x y (b) eje y .

De acuerdo con la Figura 37, se puede concluir que el control propuesto logra que los robots emulen el comportamiento de bandada, ya que mientras se desplazan (desplazamiento causado por v^d) mantienen una formación y una misma dirección. Para validar lo dicho anteriormente, tómnese en cuenta los resultados que se muestran en las Figuras 38, 39 y 40.

La Figura 38 confirma que los robots logran mantener la distancia establecida por las constantes δ_i , ya que el objetivo de control en posición se cumple, puesto que las mediciones tienden a cero, de la Figura 39 se deduce que el objetivo de control en velocidad se ha cumplido, ya que las velocidades de cada robot tienden a la velocidad estimada deseada después del tiempo transitorio, para validar que los robots mantienen una misma dirección se tiene la Figura 40, donde se observa que la orientación de cada robot tiende a un mismo valor conforme transcurre el tiempo. Considerando estos resultados se infiere que el control de banda presenta un buen desempeño.

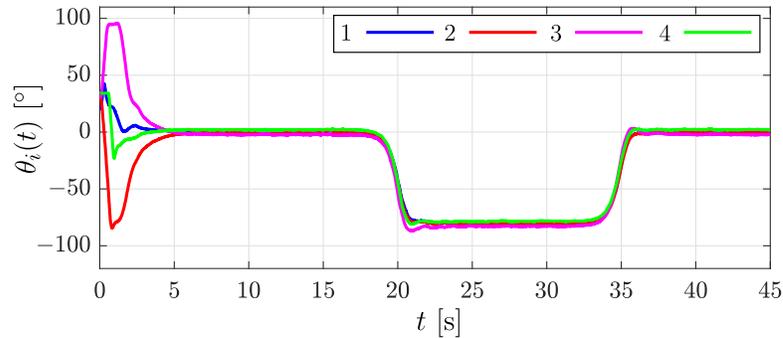


Figura 40. Posición angular de cada agente.

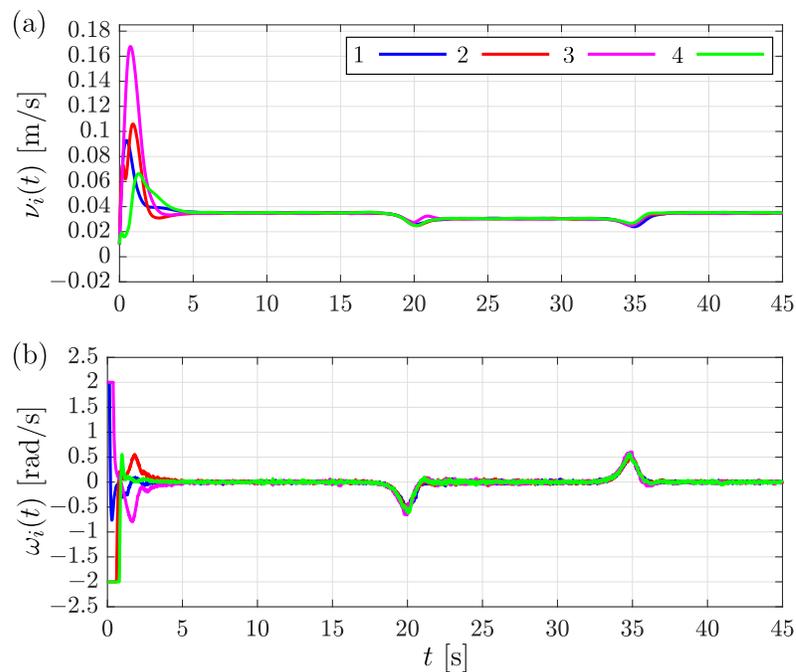


Figura 41. Entradas de control: (a) magnitud de la velocidad lineal y (b) velocidad angular.

La magnitud de la velocidad lineal y la velocidad angular necesarias para lograr que los agentes logren emular el comportamiento bajo estudio se presentan en la Figura 41.

4.3.3. Resultados del algoritmo de sincronización en velocidad con formación

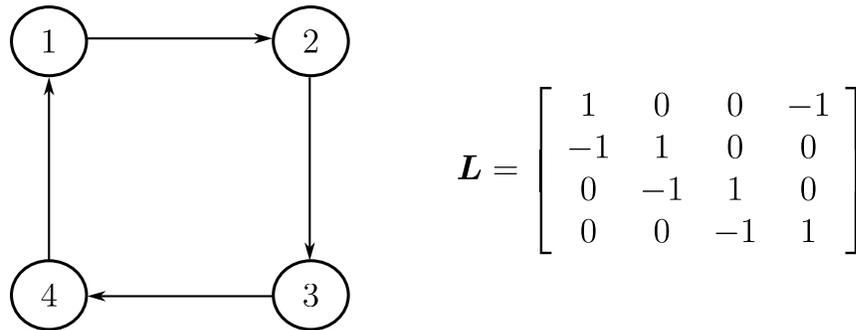


Figura 42. Grafo dirigido topología anillo y su matriz Laplaciana.

En este experimento se empleó un grafo dirigido (ver Figura 42) para llevar a cabo la comunicación. Las condiciones iniciales y ganancias empleadas en este experimento se muestran a continuación.

Las condiciones iniciales para $\eta_i(0)$ y $\dot{\eta}_i(0)$ se fijaron igual a cero, para las variable $s_i(t)$ y $\dot{s}_i(t)$ las condiciones iniciales son $s_i(0) = [0.05 \ 0.05]^\top$ [m], $\dot{s}_1(0) = [0.1 \ 0]^\top$ [m/s], $\dot{s}_2(0) = [-0.05 \ 0]^\top$ [m/s], $\dot{s}_3(0) = [0.05 \ 0.08]^\top$ [m/s] y $\dot{s}_4(0) = [0.04 \ 0]^\top$ [m/s], para $\nu_i(t)$ la condición inicial es la misma que en los experimentos anteriores. En lo que respecta a las ganancias se propone $\lambda_i = 6$, $\alpha_i = \gamma_i = 2$ y $c_1 = c_2 = 1.7$. Las constantes δ_i son iguales a las del caso del control de banda.

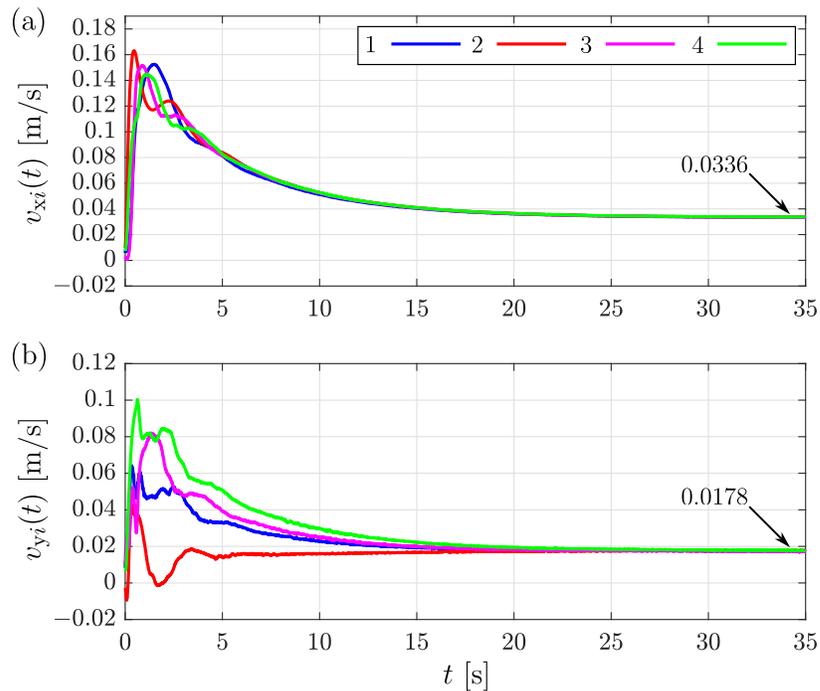


Figura 43. Medición de la velocidad de cada robot móvil: (a) eje x y (b) eje y .

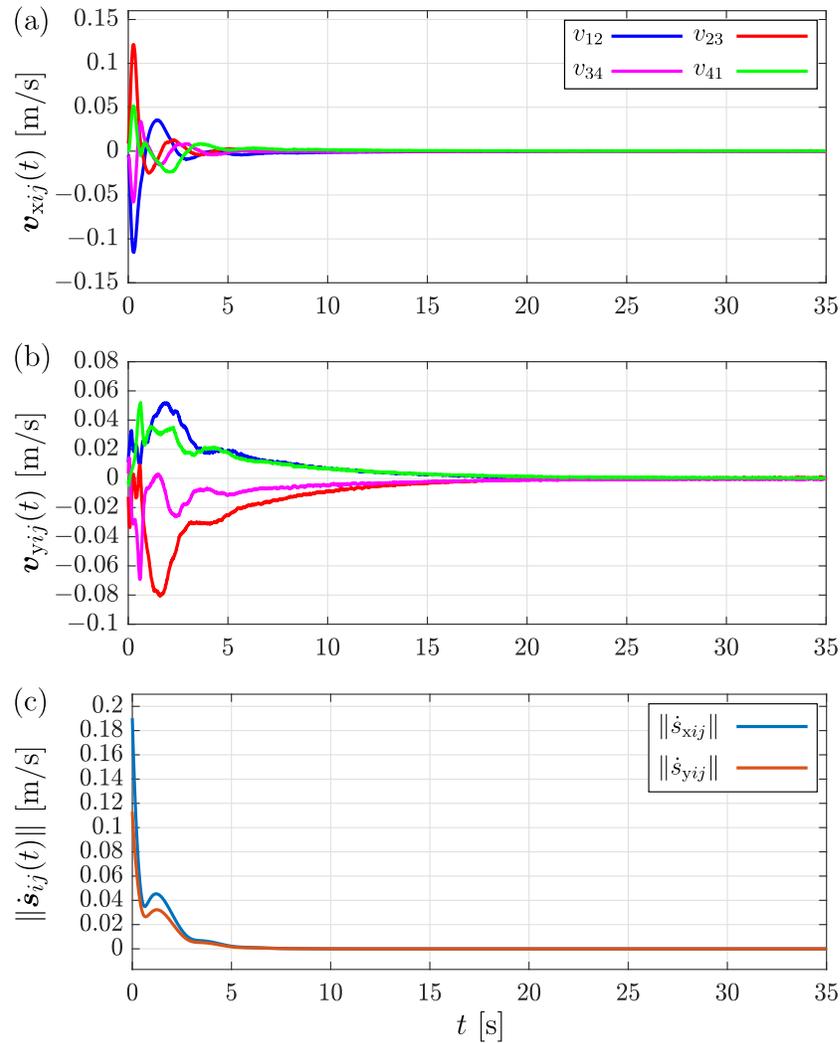


Figura 44. Objetivo de control en velocidad: (a) eje x y (b) eje y , y norma de la variable $\dot{s}_{ij} = \dot{s}_i - \dot{s}_j$.

La velocidad a la cual se desplazan los cuatro robots se muestra en la Figura 43, dado que el valor alcanzado es aproximadamente el valor esperado, se puede concluir que los robots se han sincronizado en velocidad. El valor esperado es de 0.035 m/s en el eje x y de 0.02 m/s en el eje y , estos valores se obtienen del promedio de las condiciones iniciales dadas a $\dot{s}(0)$ en cada uno de los ejes. Cabe mencionar que probablemente los robots no convergen exactamente al valor esperado, debido a la fricción que existe entre las llantas y la superficie de la mesa.

Por medio de las mediciones mostradas en la Figura 44 se valida lo anterior, ya que se cumple el objetivo de control establecido tanto en (8) como en (111), puesto que todas las trayectorias tienden a cero.

Para validar que el control propuesto también logra que los robots emulen el comportamiento de formación, se tiene la Figura 45, donde se muestra que el objetivo de control en posición establecido en (111) es logrado, debido a que las trayectorias después de pocos segundos convergen a cero.

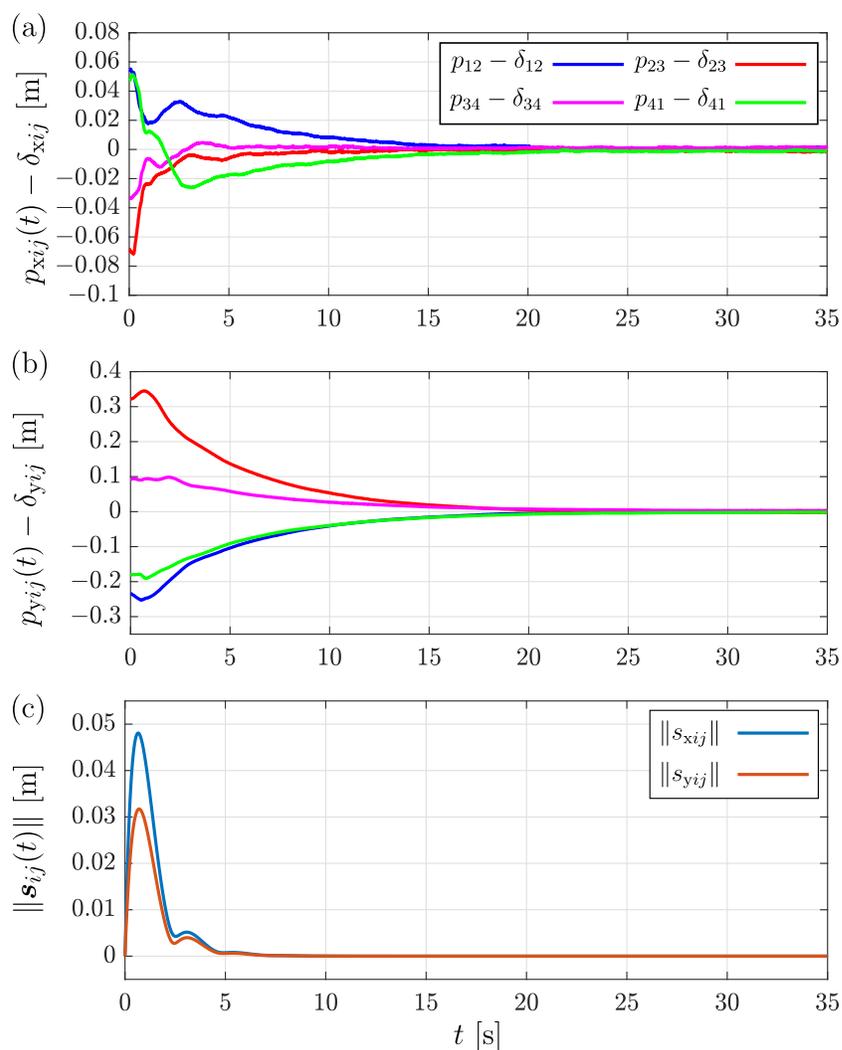


Figura 45. Objetivo de control en posición: (a) eje x y (b) eje y , y norma de la variable $s_{ij} = s_i - s_j$.

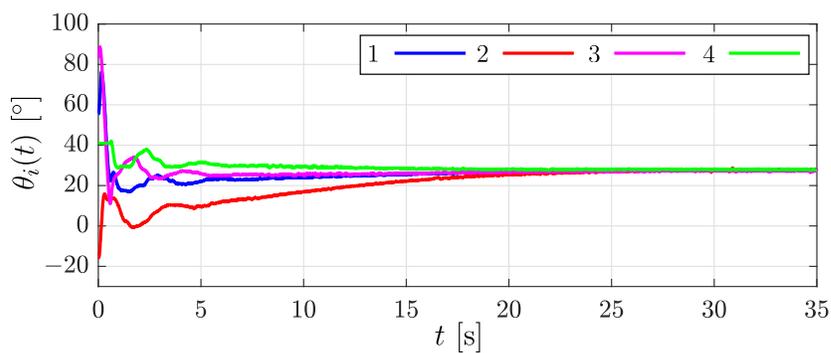


Figura 46. Posición angular empleando el algoritmo de sincronización en velocidad y formación.

La orientación de cada robot se muestra en la Figura 46, esta medición demuestra que los robots también logran sincronizar su orientación, lo cual se esperaba, ya que los cuatro robots lograron sincronizar sus velocidades.

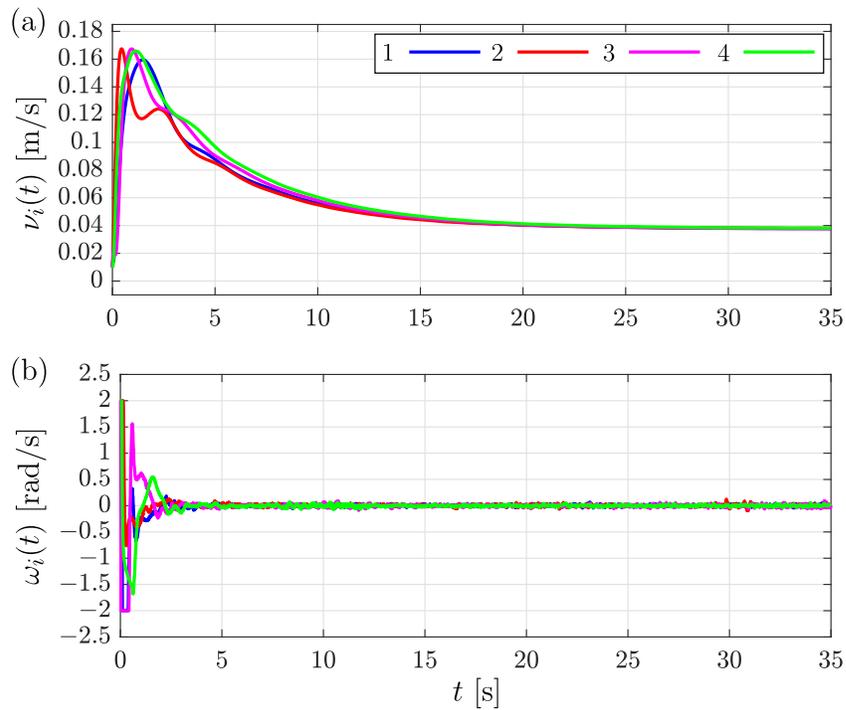


Figura 47. Entradas de control empleando el algoritmo de sincronización en velocidad y formación: (a) magnitud de la velocidad lineal y (b) velocidad angular.

Al igual que en los dos experimentos anteriores en la Figura 47, se presentan las mediciones de las entradas de control, que permiten cumplir con los objetivos propuestos.

En la Figura 48, se muestra la trayectoria generada por los robots al sincronizar sus velocidades, mientras que al mismo tiempo se observa que logran que emerja el comportamiento de formación.

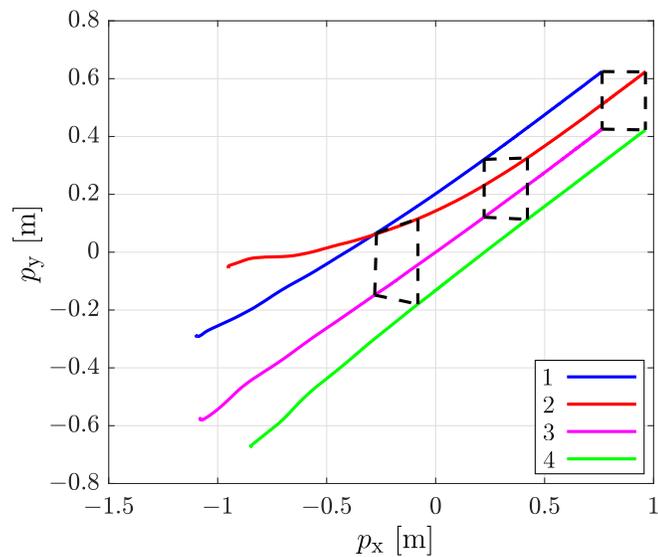


Figura 48. Trayectoria generada por los robots en el plano x - y y formación.

4.4. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se aborda el diseño de algoritmos de control que permiten que un grupo de robots móviles de tracción diferencial repliquen los comportamientos de sincronización, bandada y formación. Para lograr dichos comportamientos, primero se comenzó llevando al modelo matemático del robot bajo estudio a un sistema con dinámica de doble integrador, aprovechando la estructura obtenida fue posible adoptar el algoritmo que se propuso para los sistemas con dinámica de doble integrador para lograr que estos robots emulen el comportamiento de bandada. En el caso de los algoritmos que permiten replicar los comportamientos de sincronización en velocidad y sincronización en velocidad con formación se siguió otra estrategia pero aún así la estructura obtenida facilitó el diseño de dichas leyes de control, es importante resaltar que las leyes de control no requieren mediciones de velocidad locales ni de los vecinos. Para validar que las leyes de control permiten cumplir con los objetivos de control establecidos, se presentaron pruebas experimentales de las cuales se confirma que los controles tienen un buen desempeño.

Capítulo 5. Robot aéreo cuadricóptero y diseño de los algoritmos de control

El presente capítulo está conformado en primer lugar por el modelo dinámico del cuadricóptero y el algoritmo de control de orientación, ya que sin un control de orientación es imposible que el cuadricóptero pueda realizar seguimiento de trayectorias en el plano o en este caso emular los comportamientos de consenso, formación, bandada y sincronización. En segundo lugar se muestran los algoritmos de control propuestos para lograr que los comportamientos colectivos antes mencionados se puedan replicar en un grupo de cuadricópteros, el resto del capítulo se compone de los resultados numéricos y experimentales que validan la teoría presentada.

5.1. Modelo matemático del cuadricóptero

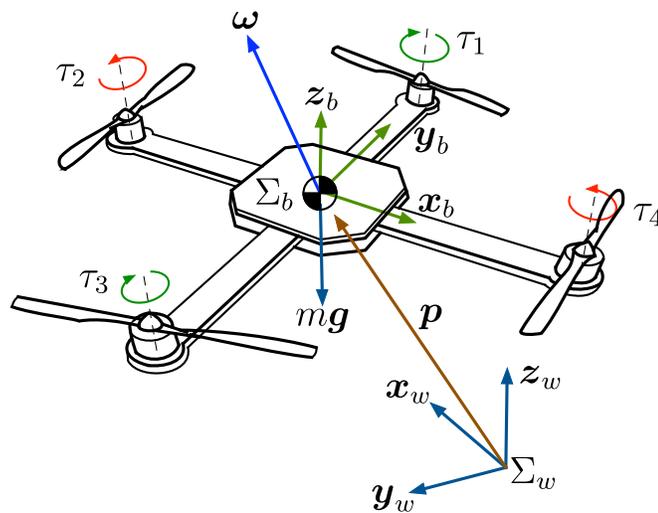


Figura 49. Esquemático del cuadricóptero.

Considerando un vector $p \in \mathcal{R}^3$ que va del marco de referencia inercial Σ_w al marco Σ_b fijo al centro de masa del cuadricóptero (ver Figura 49) es posible describir la posición lineal del vehículo. Por otra parte, la orientación del cuadricóptero puede ser obtenida empleando una matriz de rotación $R \in SO(3)$ que relaciona los marcos de referencia Σ_w y Σ_b .

Ahora empleando la formulación Newton-Euler el modelo matemático (Pliego, 2021) que describe la dinámica de traslación y orientación del vehículo bajo estudio es el siguiente

$$\dot{p} = v \quad (116a)$$

$$\dot{v} = \frac{\mathcal{T}}{m} R z_b - g \quad (116b)$$

$$\dot{R} = R S(\omega) \quad (116c)$$

$$J \dot{\omega} = \tau + S(J\omega)\omega \quad (116d)$$

donde $v \in \mathfrak{R}^3$ es la velocidad lineal, $\mathcal{T} \in \mathfrak{R}$ es la fuerza total de empuje provocada por los pares de los motores, $m \in \mathfrak{R}$ es la masa del cuadricóptero, $z_b = [0 \ 0 \ 1]^\top \in \mathbb{S}^2$ es el vector unitario¹ que indica la dirección de la fuerza de empuje en Σ_b , $g = [0 \ 0 \ 9.81]^\top$ [m/s²] es el vector de gravedad, $S(\omega) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ es la matriz antisimétrica² que dado un vector $\omega \in \mathfrak{R}^3$ se define como

$$S(\omega) \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

por otra parte, ω y $J \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ son la velocidad angular y la matriz de inercia ambas respecto al marco Σ_b , $\tau \in \mathfrak{R}^3$ es el par generado por los motores.

5.2. Algoritmo de control de orientación

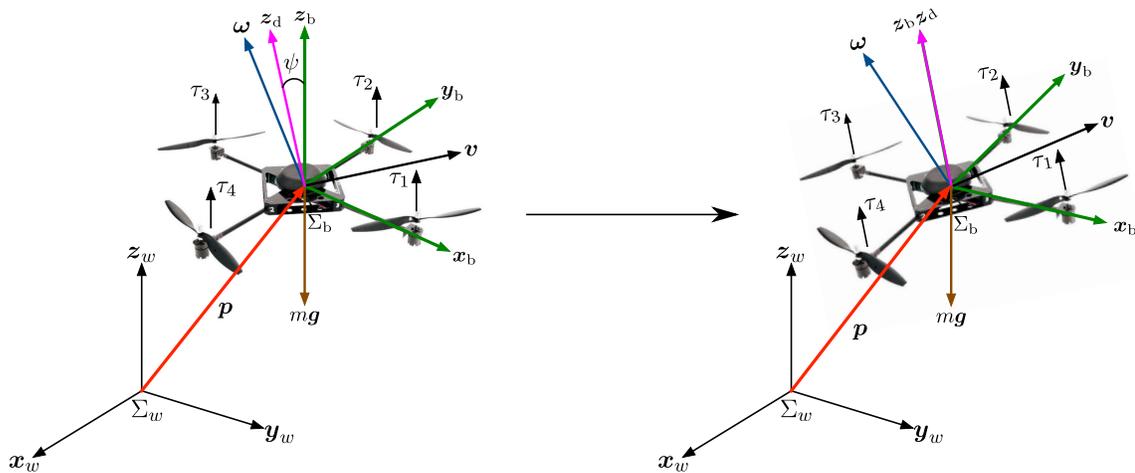


Figura 50. Esquema del objetivo de control.

¹La variedad matemática \mathbb{S}^2 se define como $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathfrak{R}^3 | x^\top x = 1\}$

²Esta matriz pertenece al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$, conjunto definido como $\mathfrak{so}(3) = \{S \in \mathfrak{R}^{3 \times 3} | S + S^\top = O_3\}$

Como se puede observar de las ecuaciones de movimiento de traslación del robot dadas por (116a) y (116b), la fuerza de empuje total \mathcal{T} es una entrada de control, por lo tanto, si ésta se diseña de forma adecuada el cuadricóptero será capaz de realizar tareas de regulación o seguimiento de trayectorias en el espacio cartesiano. Nótese que la dirección de la fuerza de empuje está dada por el vector unitario $\mathbf{r} = \mathbf{R}\mathbf{z}_b$ y cualquier rotación sobre éste vector unitario no afecta la dirección de la fuerza de empuje. De lo anterior se concluye que para lograr el objetivo de regulación o seguimiento de trayectorias en traslación solo es necesario controlar dos grados de libertad de $SO(3)$, por lo tanto, el vector \mathbf{r} lleva por nombre orientación reducida (Chaturvedi et al., 2011).

Para el diseño del control se propone como objetivo de control alinear el vector \mathbf{r} con el vector deseado $\mathbf{r}_d = \mathbf{R}_d\mathbf{z}_b$ (ver Figura 50) lo cual se cumple cuando

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{r}(t)^\top \mathbf{r}_d(t) = 1 \quad (117)$$

o lo equivalente es estabilizar el ángulo entre los vectores $\mathbf{z}_d = \mathbf{R}^\top \mathbf{r}_d$ y \mathbf{z}_b a cero, donde \mathbf{z}_d es la orientación reducida deseada expresada en el marco fijo al cuerpo, lo anterior se puede lograr empleando la primera derivada con respecto al tiempo del producto punto $\mathbf{z}_b^\top \mathbf{z}_d = \cos(\psi)$, donde ψ es el ángulo entre vectores. Por lo tanto al realizar las operaciones necesarias el control propuesto para lograr el objetivo está dado por

$$\boldsymbol{\omega}_a = \boldsymbol{\omega}_d - k_b \mathbf{S}(\mathbf{z}_d) \mathbf{z}_b \quad (118a)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_a - \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}) - \mathbf{S}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})(\boldsymbol{\omega}_a - \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\epsilon}) - \mathbf{K}_\omega \tilde{\boldsymbol{\omega}} - \mathbf{K}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon} - \gamma_b \frac{\mathbf{S}(\mathbf{z}_d) \mathbf{z}_b}{(1 + \mathbf{z}_b^\top \mathbf{z}_d)^2} \quad (118b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \gamma_b \mathbf{K}_\omega^{-1} \frac{\mathbf{S}(\mathbf{z}_d) \mathbf{z}_b}{(1 + \mathbf{z}_b^\top \mathbf{z}_d)^2} \quad (118c)$$

donde $\boldsymbol{\omega}_d = \mathbf{R}^\top \boldsymbol{\Omega}_d \in \mathfrak{R}^3$ es la velocidad angular deseada en el marco fijo al cuerpo, $\boldsymbol{\Omega}_d = \mathbf{S}(\mathbf{r}_d) \dot{\mathbf{r}}_d \in \mathfrak{R}^3$ es la velocidad angular deseada respecto al marco inercial, $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_a$ es el error de velocidad angular. Por otra parte, $k_b, \alpha_b \in \mathfrak{R}$ son ganancias positivas, $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{K}_\omega^{-1} \mathbf{K}_\epsilon$ y $\mathbf{K}_\omega, \mathbf{K}_\epsilon \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ son matrices diagonales de ganancias definidas positivas. La primer derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}_a$ se encuentra representada por

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_a = \mathbf{R}^\top \dot{\boldsymbol{\Omega}}_d - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega}_d - k_b \mathbf{S}(\dot{\mathbf{z}}_d) \mathbf{z}_b \quad (119)$$

donde $\dot{\mathbf{z}}_d = \mathbf{S}(\mathbf{z}_d)(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_d)$.

La dinámica en lazo cerrado del sistema de orientación está dada por

$$\dot{\psi} = -k_b \text{sen}(\psi) + \mathbf{n}^\top (\mathbf{q}_a - \Lambda \boldsymbol{\epsilon}) \quad (120a)$$

$$\mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{K}_\omega \mathbf{q}_a + \mathbf{S}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \mathbf{q}_a - \frac{\gamma_b \text{sen}(\psi)}{(1 + \cos(\psi))^2} \mathbf{n} - \mathbf{K}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon} \quad (120b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = -\Lambda \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{q}_a + \frac{\gamma_b \text{sen}(\psi)}{(1 + \cos(\psi))^2} \mathbf{K}_\omega^{-1} \mathbf{n}. \quad (120c)$$

donde

$$\mathbf{q}_a = \tilde{\boldsymbol{\omega}} + \Lambda \boldsymbol{\epsilon}$$

es una variable auxiliar y $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^3$ es un vector ortogonal a \mathbf{z}_b y a \mathbf{z}_d .

La dinámica en lazo cerrado presenta dos puntos de equilibrio dados por $(\psi, \mathbf{q}_a, \boldsymbol{\epsilon}) = (0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ y $(\psi, \mathbf{q}_a, \boldsymbol{\epsilon}) = (\pi, \mathbf{0}, \mathbf{0})$. Para el primer punto de equilibrio se tiene $\mathbf{z}_b = \mathbf{z}_d$ mientras que para el segundo punto de equilibrio se tiene $\mathbf{z}_d = -\mathbf{z}_b$. Por lo tanto, se mostrará que el primer punto de equilibrio es estable y las trayectorias no convergen al otro punto de equilibrio.

La estabilidad del punto elegido se probó en el sentido de Lyapunov empleando la función candidata

$$\begin{aligned} V &= \frac{\gamma_b(1 - \mathbf{z}_b^\top \mathbf{z}_d)}{2(1 + \mathbf{z}_b^\top \mathbf{z}_d)} + \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^\top \mathbf{J} \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^\top \mathbf{K}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon} \\ &= \frac{\gamma_b(1 - \mathbf{r}^\top \mathbf{r}_d)}{2(1 + \mathbf{z}_b^\top \mathbf{z}_d)} + \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^\top \mathbf{J} \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^\top \mathbf{K}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon} \\ &= \frac{\gamma_b(1 - \cos(\psi))}{2(1 + \cos(\psi))} + \frac{1}{2} \mathbf{q}_a^\top \mathbf{J} \mathbf{q}_a + \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^\top \mathbf{K}_\epsilon \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \quad (121)$$

que satisface

$$\lim_{\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}_d} V(\mathbf{r}, \mathbf{q}_a, \boldsymbol{\epsilon}) = \lim_{\psi \rightarrow \pm\pi} V(\psi, \mathbf{q}_a, \boldsymbol{\epsilon}) = \infty \quad (122a)$$

$$V \geq d_1 (\psi^2 + \|\mathbf{q}_a\|^2 + \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2) \quad (122b)$$

$$V \leq d_2 \left(\frac{1 - \cos(\psi)}{1 + \cos(\psi)} + \|\mathbf{q}_a\|^2 + \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2 \right) \quad (122c)$$

donde

$$d_1 = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{4} \gamma_b, \lambda_{\min}\{\mathbf{J}\}, \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_\epsilon\} \right\}, \quad d_2 = \frac{1}{2} \min \{ \gamma_b, \lambda_{\max}\{\mathbf{J}\}, \lambda_{\max}\{\mathbf{K}_\epsilon\} \}.$$

La derivada de V con respecto al tiempo a lo largo de (120) está dada por

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= \frac{(\gamma_b \text{sen}(\psi))\dot{\psi}}{(1 + \cos(\psi))^2} + \mathbf{q}_a^\top \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}_a + \boldsymbol{\epsilon}^\top \mathbf{K}_\epsilon \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \\
&= -\gamma_b k_b \frac{\text{sen}^2(\psi)}{(1 + \cos(\psi))^2} - \mathbf{q}_a^\top \mathbf{K}_\omega \mathbf{q}_a - \boldsymbol{\epsilon}^\top \mathbf{K}_{\omega\epsilon} \boldsymbol{\epsilon} \\
&= -\gamma_b k_b \frac{1 - \cos(\psi)}{1 + \cos(\psi)} - \mathbf{q}_a^\top \mathbf{K}_\omega \mathbf{q}_a - \boldsymbol{\epsilon}^\top \mathbf{K}_{\omega\epsilon} \boldsymbol{\epsilon},
\end{aligned} \tag{123}$$

donde $\mathbf{K}_{\omega\epsilon} = \mathbf{K}_\epsilon \mathbf{K}_\omega^{-1} \mathbf{K}_\epsilon \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ es una matriz simétrica definida positiva y se ha usado la siguiente igualdad $\mathbf{q}_a^\top \mathbf{S}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})\mathbf{q}_a = 0$. Empleando las desigualdades mostradas en (122), \dot{V} puede ser acotada por arriba como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -d_3 \left(\frac{1 - \cos(\psi)}{1 + \cos(\psi)} + \|\mathbf{q}_a\|^2 + \|\boldsymbol{\epsilon}\|^2 \right) \\
&\leq -\frac{d_3}{d_2} V,
\end{aligned} \tag{124}$$

donde $d_3 = \min\{\gamma_b k_b, \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_\omega\}, \lambda_{\min}\{\mathbf{K}_{\omega\epsilon}\}\}$, ya que V es positiva definida y \dot{V} es negativa definida se tiene que $V(t) \leq V(0) < \infty$ para todo $t \geq 0$. El resultado anterior junto con (122a) implica que $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{B}_r = \{\mathbf{r} \in \mathbb{S}^2 | \mathbf{r}^\top \mathbf{r}_d = \mathbf{z}_b^\top \mathbf{z}_d = \cos(\psi) \neq -1\}$ para todo $t \geq 0$ o $|\psi(t)| < \pi$ para todo $t \geq 0$. De acuerdo al lema de comparación (Khalil, 2002), resulta $V(t) \leq V(0) \exp\left(-\frac{d_3}{d_2} t\right)$, por lo tanto, las trayectorias en lazo cerrado $(\psi(t), \mathbf{q}_a(t), \boldsymbol{\epsilon}(t))$ son acotadas y convergen exponencialmente a cero. Por otra parte, el complemento del conjunto \mathbb{B}_r definido como

$$\mathbb{B}_r^C = \{\mathbf{r} \in \mathbb{S}^2 | \mathbf{r}^\top \mathbf{r}_d = \cos(\psi) = -1\} \subset \mathbb{S}^2$$

tiene un único elemento, es decir, $\mathbf{r} = -\mathbf{r}_d$. Así para casi toda condición inicial excepto $\mathbf{r}(0) = -\mathbf{r}_d$, las trayectorias en lazo cerrado convergen exponencialmente a cero. Por lo tanto, el punto de equilibrio $(\psi, \mathbf{q}_a, \boldsymbol{\epsilon}) = (0, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ es casi globalmente exponencialmente estable.

5.3. Algoritmos de control para un grupo de cuadricópteros

Esta sección se encuentra compuesta por los algoritmos de control que se proponen para lograr que los comportamientos colectivos de consenso, formación, bandada y sincronización emerjan en un grupo de vehículos aéreos de cuatro motores.

5.3.1. Algoritmo de control de consenso, formación y bandada

Antes de obtener el algoritmo que se propone para lograr que un grupo de cuadricópteros repliquen los comportamientos de consenso, formación y bandada se utiliza la siguiente entrada virtual

$$\mathbf{u}_i = \mathcal{T}_i \mathbf{r}_{di} - m\mathbf{g}. \quad (125)$$

La entrada virtual (125) se sumara y restara en (116b), para obtener

$$m\dot{\mathbf{v}}_i = \mathcal{T}_i \tilde{\mathbf{r}}_i + \mathbf{u}_i, \quad (126)$$

donde $\tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{di}$, como se puede observar si $\mathcal{T}_i \tilde{\mathbf{r}}_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$ el sistema de traslación se puede escribir como

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{v}_i \quad (127a)$$

$$m\dot{\mathbf{v}}_i = \mathbf{u}_i. \quad (127b)$$

Para comprobar que $\mathcal{T}_i \tilde{\mathbf{r}}_i(t) \rightarrow \mathbf{0}$, se puede recurrir al análisis de estabilidad presentado en la sección previa. Dado que en dicho análisis se obtuvo que el origen de (120) es casi globalmente exponencialmente estable, se puede concluir que el objetivo de control se cumple en el sentido de (117), por lo que $\tilde{\mathbf{r}}$ es una perturbación que se desvanece exponencialmente.

Dado que (127) es un sistema con dinámica de doble integrador, el algoritmo propuesto es diseñado adoptando lo realizado en la sección 3.1, por lo tanto el algoritmo para emular consenso, formación y bandada en el plano está dado por

$$\boldsymbol{\vartheta}_i = \mathbf{v}^d(t) - k_{\varphi i} \boldsymbol{\varphi}_i \quad (128a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_i = -k_{\varphi i} \boldsymbol{\varphi}_i + c \sum_{j=1}^N a_{ij} (\mathbf{p}_{ij} - \boldsymbol{\delta}_{ij} - \boldsymbol{\varphi}_{ij}) \quad (128b)$$

$$\mathbf{u}_i = m\dot{\boldsymbol{\vartheta}}_i - \gamma_i \tilde{\mathbf{v}}_i - k_{\sigma i} \boldsymbol{\sigma}_{ri} \quad (128c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{ri} = \tilde{\mathbf{v}}_i. \quad (128d)$$

Para el caso del eje z se propone una la ley de control para seguimiento de trayectoria, ya que se desea

fijar una altura determinada, dicha ley está dada por

$$u_{z_i} = m\dot{v}_{z_d}(t) - k_{p_i}\tilde{p}_{z_i} - k_{v_i}\tilde{v}_{z_i} - k_{\sigma_{z_i}}\sigma_{z_i} \quad (129a)$$

$$\dot{\sigma}_{z_i} = \tilde{p}_{z_i}. \quad (129b)$$

donde $\tilde{p}_{z_i}(t) = p_{z_i}(t) - p_{z_d}(t)$, $p_{z_d}(t)$ es la posición deseada, $\tilde{v}_{z_i}(t) = v_{z_i}(t) - v_{z_d}(t)$, y k_{p_i} , k_{v_i} y $k_{\sigma_{z_i}}$ son ganancias definidas positivas. Se dice que (129) logra su objetivo cuando $\lim_{t \rightarrow \infty} (\tilde{p}_{z_i}(t), \tilde{v}_{z_i}(t)) = (0, 0)$.

Recordando que \mathcal{T}_i es una entrada de control, se recurre a (125) para su obtención. Por otra parte, de (125) también es posible obtener los ángulos *roll* ϕ_d y *pitch* θ_d , ya que a diferencia del ángulo *yaw* ψ_d estos no pueden tomar valores arbitrarios. Dicho lo anterior la entrada de control \mathcal{T}_i y los ángulos deseados *pitch* y *roll* están dados respectivamente por

$$\mathcal{T}_i = \|\mathbf{u}_i + m\mathbf{g}\|, \quad (130a)$$

$$\theta_{di} = \tan^{-1} \left(\frac{1}{u_{z_i} + m\mathbf{z}_b^\top \mathbf{g}} (\cos(\psi_{di})u_{x_i} + \sin(\psi_{di})u_{y_i}) \right), \quad (130b)$$

$$\phi_{di} = \tan^{-1} \left(\frac{\cos(\theta_{di})}{u_{z_i} + m\mathbf{z}_b^\top \mathbf{g}} (\sin(\psi_{di})u_{x_i} - \cos(\psi_{di})u_{y_i}) \right), \quad (130c)$$

teniendo en cuenta que el control de orientación propuesto se diseñó para controlar dos grados de libertad en $SO(3)$, las ecuaciones (130b) y (130c) se reducen a

$$\theta_{di} = \tan^{-1} \left(\frac{u_{x_i}}{u_{z_i} + m\mathbf{z}_b^\top \mathbf{g}} \right),$$

$$\phi_{di} = \tan^{-1} \left(\frac{-u_{y_i} \cos(\theta_{di})}{u_{z_i} + m\mathbf{z}_b^\top \mathbf{g}} \right).$$

La ecuación que permite relacionar los ángulos deseados ϕ_{di} y θ_{di} con el vector \mathbf{r}_{di} está dada por

$$\mathbf{r}_{di} = \begin{bmatrix} \sin(\theta_{di}) \cos(\phi_{di}) \\ -\sin(\phi_{di}) \\ \cos(\theta_{di}) \cos(\phi_{di}) \end{bmatrix}. \quad (131)$$

Para probar la estabilidad del sistema correspondiente a traslación en el plano (para N cuadricópteros) se siguen los pasos mostrados en la subsección 3.1.1, para así obtener

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{q} \\ \dot{v} \\ \dot{\sigma}_r \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_2 & c(\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top \otimes \mathbf{I}_2) & \mathbf{O}_{2N} & \mathbf{O}_{2N} \\ \mathbf{O}_{2(N-1) \times 2N} & -c(\mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^\top \otimes \mathbf{I}_2) & \mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_2 & \mathbf{O}_{2(N-1) \times 2N} \\ \mathbf{O}_{2N} & \mathbf{O}_{2N \times 2(N-1)} & -(\frac{\mathbf{\Gamma}}{m} \otimes \mathbf{I}_2) & -(\frac{\mathbf{K}_\sigma}{m} \otimes \mathbf{I}_2) \\ \mathbf{O}_{2N} & \mathbf{O}_{2N \times 2(N-1)} & \mathbf{I}_{2N} & \mathbf{O}_{2N} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{xy}} \begin{bmatrix} \varphi \\ q \\ \tilde{v} \\ \sigma_r \end{bmatrix} \quad (132)$$

donde $\mathbf{K} = \text{diag}\{k_{\varphi_1}, \dots, k_{\varphi_N}\}$, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}$ y $\mathbf{K}_\sigma = \text{diag}\{k_{\sigma_1}, \dots, k_{\sigma_N}\} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$. Por otra parte, la dinámica en lazo cerrado que permite analizar la estabilidad de seguimiento de trayectoria en z para el i -ésimo vehículo está dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{p}}_{zi} \\ \dot{\tilde{v}}_{zi} \\ \dot{\sigma}_{zi} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_{pi}}{m} & -\frac{k_{vi}}{m} & -\frac{k_{\sigma zi}}{m} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{zi}} \begin{bmatrix} \tilde{p}_{zi} \\ \tilde{v}_{zi} \\ \sigma_{zi} \end{bmatrix} \quad (133)$$

como se puede apreciar ambos sistemas resultantes son lineales, por lo tanto, para garantizar que los sistemas sean exponencialmente estables es suficiente con elegir adecuadamente los valores de dichas ganancias, dado que tanto \mathbf{A}_{xy} como \mathbf{A}_{zi} serán matrices Hurwitz.

5.3.2. Control de sincronización en velocidad para un grupo de cuadricópteros

Para lograr que un grupo de cuadricópteros puedan emular el comportamiento de sincronización en velocidad en el plano, se hará uso del algoritmo presentado en la sección 3.1.4 empleando el observador de Luenberger, lo anterior es posible considerando que el modelo matemático que describe la dinámica de traslación del cuadricóptero se pudo llevar a la forma de un doble integrador. Dicho lo anterior el algoritmo propuesto está dado por

$$\mathbf{e}_i = \hat{\mathbf{v}}_i - \boldsymbol{\eta}_i - \mathbf{s}_i \quad (134a)$$

$$\mathbf{u}_i = -\alpha_i \boldsymbol{\eta}_i \quad (134b)$$

$$\dot{\mathbf{s}}_i = -c \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{s}_{ij} \quad (134c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_i = -\frac{\alpha_i}{m} \boldsymbol{\eta}_i - \dot{\mathbf{s}}_i + \beta_i \mathbf{e}_i. \quad (134d)$$

donde $\hat{v}_i \in \mathfrak{R}^2$ es la velocidad estimada obtenida de (39), α_i, β_i y c son ganancias positivas.

La prueba de estabilidad se omite para evitar redundancia en la información presentada en este trabajo, ya que dicha prueba es similar a lo mostrado en la sección 3.1.4 aún y con los cambios que presenta la ley de control. Para la parte de seguimiento en z se hace uso de la entrada de control (129), ya que solo se busca que los vehículos vuelen a una altura deseada.

5.4. Resultados

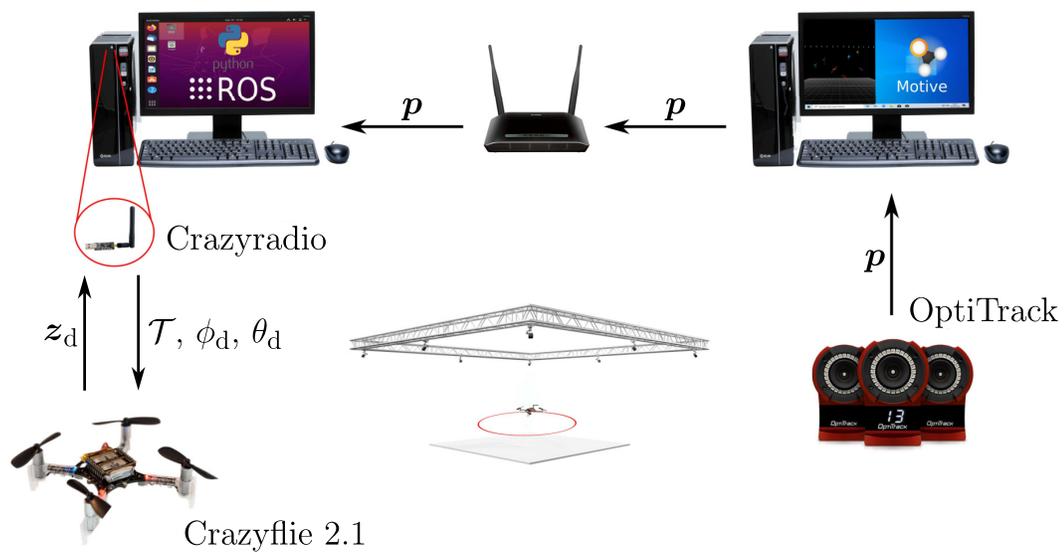


Figura 51. Esquema del experimento con cuadricópteros.

Para validar el funcionamiento de los algoritmos de control que se presentaron a lo largo de este capítulo se muestran resultados experimentales y numéricos. Para llevar a cabo los experimentos se hace uso de tres vehículos aéreos de pequeña escala, conocidos como Crazyflie 2.1 (este vehículo es desarrollado por la compañía Bitcraze). El crazyflie 2.1 se encuentra equipado con dos microcontroladores (un STM32F405 y un nRF51822), una unidad de medición inercial (conocida como IMU por sus siglas en inglés) compuesta por un giroscopio y un acelerómetro ambos de tres ejes, y un sensor de alta presión, por cuatro motores DC y una batería de polímero de Litio. Al igual que en el caso de los robots Khepera III, para obtener la posición de los Crazyflies se emplea el sistema de captura de movimiento compuesto por las cámaras OptiTrack, para enviar la información a los vehículos, se emplean tres radios USB (Crazyradio).

La programación de los algoritmos de control propuestos para emular los comportamientos colectivos se programan en un ordenador usando Python3 y ROS (sistema operativo robótico), el tiempo de muestreo usado es de 0.01 [s], el control de orientación es programado dentro del microcontrolador del Crazyflie usando lenguaje C, el tiempo de muestreo empleado es de 0.002 [s]. En la Figura 51 se encuentra el esquema que representa el experimento, como se puede ver de las cámaras solo se usa la medición de posición, ya que la orientación se obtienen del IMU, por lo tanto solo se requiere enviar \mathcal{T} , ϕ_d y θ_d al Crazyflie. Por otra parte, los resultados numéricos se obtuvieron utilizando el software Matlab.

Dado que el comportamiento de consenso en un caso práctico puede provocar que los robots colisionen entre ellos mismos, se tomó la decisión de omitir el experimento, no obstante, este comportamiento será validado junto con el comportamiento de formación, ya que si los términos δ_i se proponen pequeños, se puede decir que el comportamiento de consenso se está replicando.

5.4.1. Resultados del algoritmo de formación

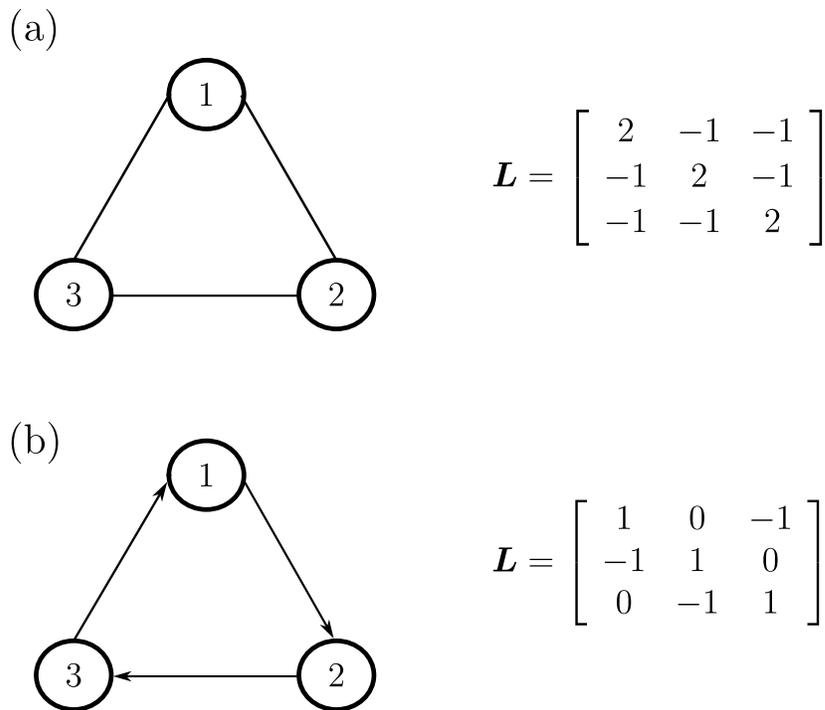


Figura 52. Grafos topología anillo y sus matrices Laplacianas: (a) no dirigido y (b) dirigido.

Los resultados que se muestran en este apartado corresponden tanto al caso cuando la comunicación entre los robots es realizada con un grafo no dirigido (ver Figura 52(a)) como con un grafo dirigido (ver

Figura 52(b)), esto se hizo simplemente para mostrar que el algoritmo de control funciona con ambos tipos de comunicación, y no con el afán de comparar con cual tipo de comunicación se obtienen mejores resultados, dicho lo anterior a continuación se presentan las condiciones iniciales y ganancias empleadas en ambos casos y otros datos de interés usados en el experimento.

Las condiciones iniciales y ganancias utilizadas para el experimento, cuando la comunicación es realizada por medio del grafo no dirigido son respectivamente $\varphi_i(0) = \sigma_{ri}(0) = \mathbf{0}$, $\sigma_{zi}(0) = 0$, y $\mathbf{K} = \text{diag}\{3 \ 3 \ 3\}$, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{0.1 \ 0.1 \ 0.1\}$, $\mathbf{K}_\sigma = \text{diag}\{0.02 \ 0.02 \ 0.02\}$, $k_{pi} = 1$, $k_{vi} = 0.35$, $k_{\sigma_{zi}} = 0.3$ y $c = 1.75$.

Para el experimento con el grafo dirigido las condiciones iniciales son iguales a las del caso anterior, en el caso de las ganancias se propone $\mathbf{K} = \text{diag}\{\mathbf{K}_{\varphi 1} \ \mathbf{K}_{\varphi 2} \ \mathbf{K}_{\varphi 3}\} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$, donde $\mathbf{K}_{\varphi i} = \text{diag}\{3.2 \ 3\}$, nótese que este cambio no afecta la prueba de estabilidad, ya que el termino $-\mathbf{K} \otimes \mathbf{I}_2$ ahora será reemplazando únicamente por $-\mathbf{K}$. Por otra parte, la constante de acoplamiento se fijó como $c = 1.85$, las ganancias restantes conservan los valores del caso anterior.

La matriz de inercia y la masa del Crazyflie (Förster, 2015) son

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 16.57171 & 0.830806 & 0.718277 \\ 0.830806 & 16.655602 & 1.800197 \\ 0.718277 & 1.800197 & 29.261652 \end{bmatrix} \times 10^{-6} \text{ [Kgm}^2\text{]} \text{ y } m = 0.031 \text{ [Kg]},$$

para estimar la velocidad lineal de cada Crazyflie se empleó un filtro de primer orden, dado por $H(s) = \frac{\lambda_f s}{s + \lambda_f}$ con $\lambda_f = 30$. Cabe señalar que este filtro es usado en cada uno de los experimentos restantes.

Como se podrá notar en las Figuras se ha resaltado un área en particular, esto se hace con la finalidad de diferenciar el momento en el cual solo se está ejecutando un simple control PD en conjunto con (129), para lograr que los Crazyflies primero se regulen a una altura y posición deseada, con la finalidad de evitar posibles problemas de saturación en los motores, al hacer solo uso del control de formación. En este experimento el tiempo que se fija para que se ejecuten el control PD y el control dado en (129) en conjunto es de 7 [s]. La altura deseada a la cual tienen que llegar los drones se propone como $p_{zd} = 0.45(1 - e^{-t})$ [m].

El patrón que se desea que el grupo de Crazyflies repliquen corresponde a un triángulo, por lo tanto las contantes δ se proponen como $\delta_1 = [0 \ -0.4]^\top$ [m], $\delta_2 = [0.4 \ 0]^\top$ [m] y $\delta_3 = [0 \ 0.4]^\top$ [m].

Las ganancias del control de orientación son $k_{bi} = 10$, $\gamma_{bi} = 5 \times 10^{-5}$, $\mathbf{K}_{\omega i} = \text{diag}\{0.002 \ 0.002 \ 0.02\}$

y $\mathbf{K}_{\epsilon_i} = \text{diag}\{2.25 \times 10^{-4} \ 2.55 \times 10^{-4} \ 0.0017\}$. La condición inicial para $\epsilon_i(t)$ es $\epsilon_i(0) = \mathbf{0}$

Por medio de la Figura 53, se puede validar que el control de formación logra que los vehículos aéreos puedan adoptar la formación deseada, ya que después de que se activa el control de formación ($t \geq 7$) las distancias relativas tienden aproximadamente a cero, tanto al hacer uso de un grafo no dirigido (ver Figura 53(a) y 53(b)) como un dirigido (ver Figura 53(c) y 53(d)).

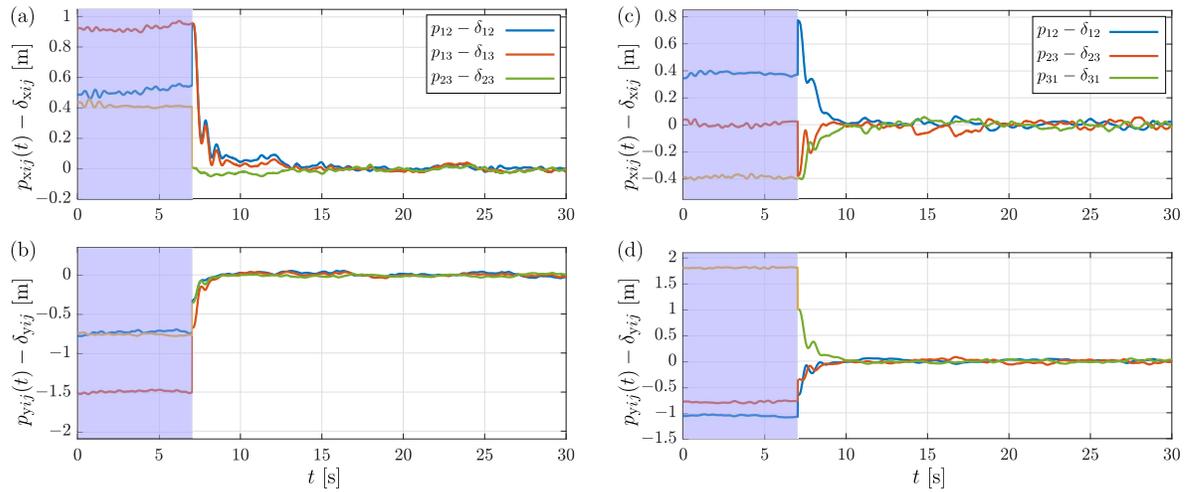


Figura 53. Objetivo de control en posición algoritmo de formación: (a), (b) grafo no dirigido, y (c), (d) grafo dirigido.

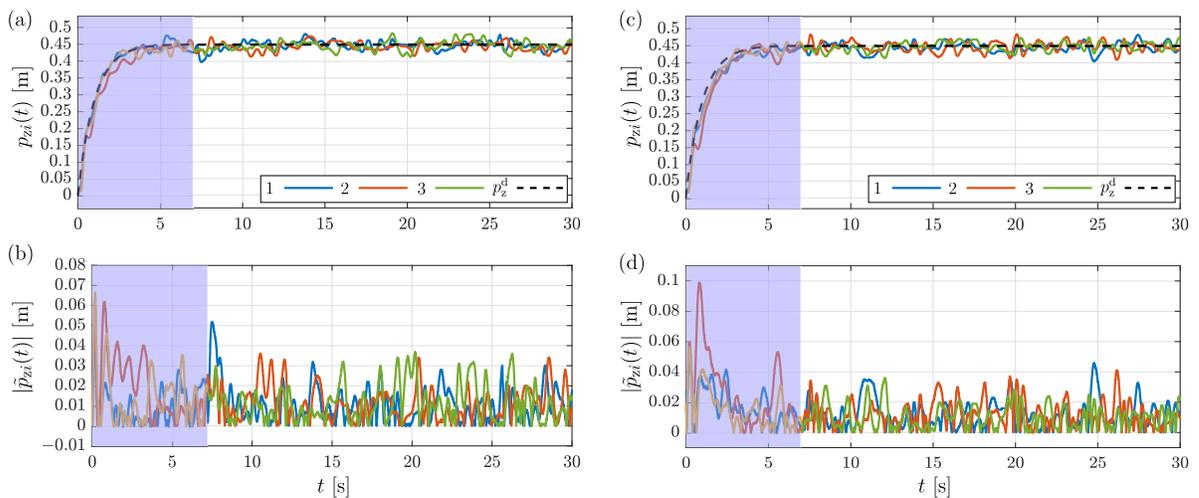


Figura 54. Seguimiento de trayectoria en el eje z y valor absoluto del error \tilde{p}_{zi} : (a), (b) grafo no dirigido, y (c), (d) grafo dirigido.

En las Figuras 54(a) y 54(c) se puede ver que los tres crazyflies han alcanzado la altura deseada. Para validar que tan bueno es el funcionamiento del control (129) en las Figuras 54(b) y 54(d) se muestra el valor absoluto del error en posición \tilde{p}_{zi} , en ambos casos se puede ver que se tiene un error de $0.04 [m]$ lo cual se puede considerar aceptable, ya que en el control no se contemplan términos que compensen

incertidumbres paramétricas, como las dinámicas no modeladas de los motores, problemas con las baterías o perturbaciones externas. En vista de lo anterior se puede asumir que el control (129) cumple de manera aceptable con su objetivo.

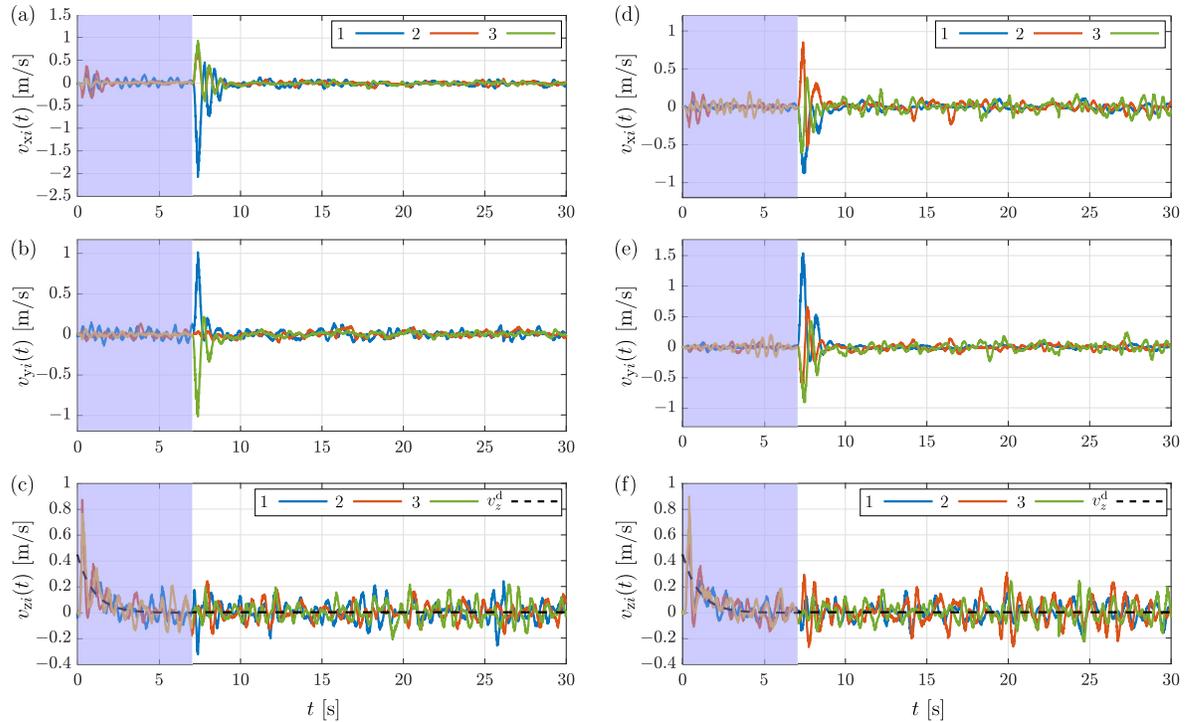


Figura 55. Velocidad estimada de cada cuadricóptero: (a), (b), (c) grafo no dirigido, y (d), (e), (f) grafo dirigido.

Como se puede apreciar en las Figuras 55(a), 55(b), 55(d) y 55(e) el control de formación logra cumplir con el objetivo de velocidad establecido en (6), puesto que las velocidades obtenidas por medio del filtro tienden a cero. En el caso del control (129) (ver Figuras 55(c) y 55(f)) se puede observar que también logra un buen seguimiento de la velocidad deseada, ya que la velocidad estimada tiende a lo deseado.

Para validar el funcionamiento del algoritmo de orientación reducida, se ha colocado la Figura 57, donde se puede ver que se cumple con el objetivo de control, tanto al hacer uso de un grafo no dirigido como de un dirigido, ya que los componentes del vector z_d tienden a los valores del vector unitario z_b .

En la Figura 57 se presentan las mediciones de las fuerzas de empuje de cada cuadricóptero, necesarias para lograr que los vehículos aéreos alcancen la altura deseada y puedan desplazarse en el plano.

En la Figura 58 se ilustra como los Crazyflies después de despegar y desplazarse logran realizar una formación, por lo tanto, al tomar en cuenta este resultado y en los cuales se muestra que los objetivos establecidos son logrados, se puede decir que las leyes de control de formación y orientación trabajan adecuadamente.

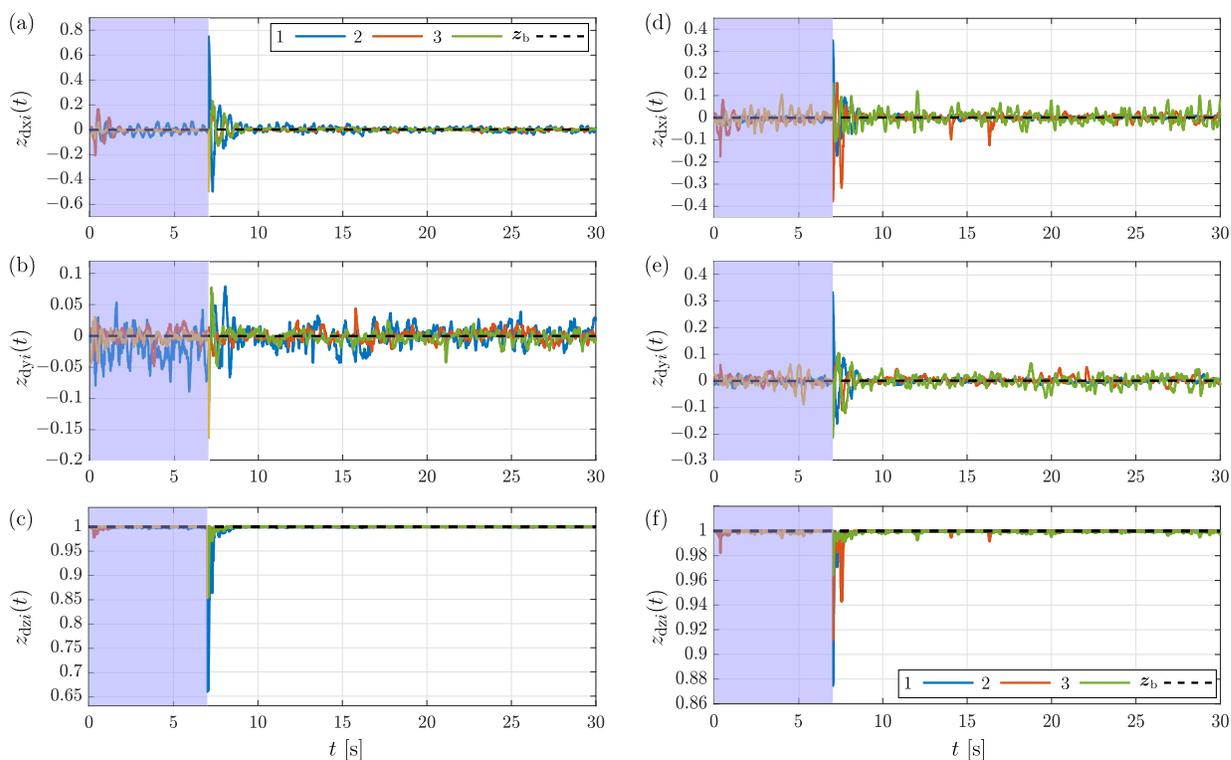


Figura 56. Mediciones del vector deseado z_d contra el vector z_b : (a), (b), (c) grafo no dirigido, y (d), (e), (f) grafo dirigido.

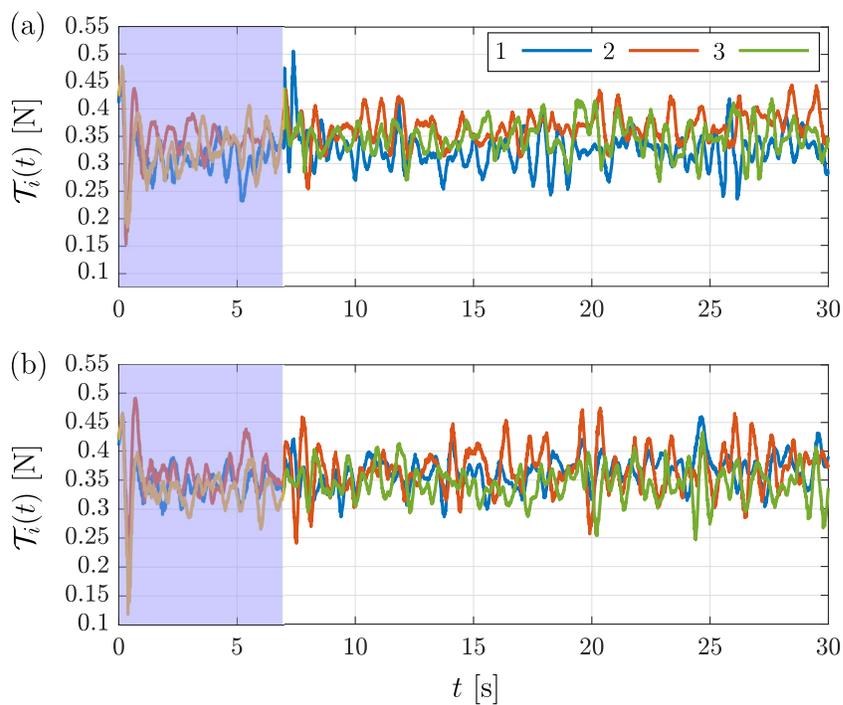


Figura 57. Fuerza de empuje de cada cuadricóptero algoritmo de formación: (a) grafo no dirigido y (b) grafo dirigido.

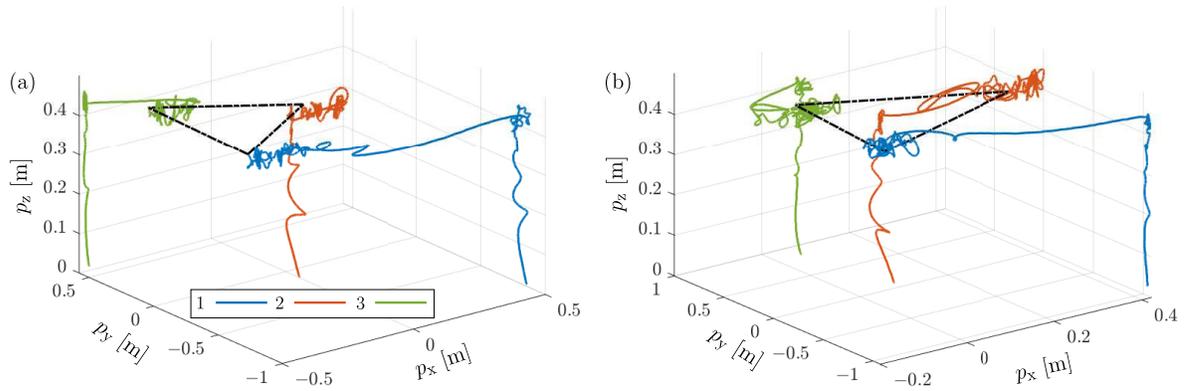


Figura 58. Formación y trayectoria generada por los cuadricópteros en el espacio tridimensional y en el plano: (a) grafo no dirigido y (b) grafo dirigido.

5.4.2. Resultados del algoritmo de bandada

Al igual que en el experimento anterior, los resultados que aquí se muestran, se obtienen usando los grafos que se encuentran en la Figura 52. Las condiciones iniciales usadas para el algoritmo de bandada empleando el grafo no dirigido o el dirigido son las mismas que para el de formación, lo mismo sucede con las ganancias, y condiciones iniciales del algoritmo de orientación.

Las ganancias propuestas para llevar a cabo el experimento en el cual se utiliza el grafo no dirigido son $\mathbf{K} = \text{diag}\{3.5 \ 3.5 \ 3.5\}$, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{0.1 \ 0.1 \ 0.1\}$, $\mathbf{K}_\sigma = \text{diag}\{0.06 \ 0.06 \ 0.06\}$, $k_{pi} = 1$, $k_{vi} = 0.35$, $k_{\sigma zi} = 0.3$ y $c = 1.7$.

Para las pruebas empleando el grafo dirigido la única ganancia que cambia con respecto a las propuestas utilizando el grafo no dirigido es \mathbf{K} , ya que se fija como $\mathbf{K} = \text{diag}\{\mathbf{K}_{\varphi 1} \ \mathbf{K}_{\varphi 2} \ \mathbf{K}_{\varphi 3}\}$ donde $\mathbf{K}_{\varphi i} = \text{diag}\{4 \ 3.5\}$.

En este experimento se fijó que durante los primeros 4 [s] se ejecute el control PD en conjunto con (129). La altura deseada está dada por $p_{zd} = 0.5(1 - e^{-t})$ [m].

Por otra parte, el perfil de velocidad deseado al cual se tienen que desplazar los tres Crazyflies se propone como

$$\mathbf{v}^d(t) = \begin{cases} [0 \ -0.3]^\top & \text{si } 4 < t \leq 11 \\ [0 \ 0.3]^\top & \text{si } 11 < t \leq 18 \\ [0 \ -0.3]^\top & \text{si } 18 < t \leq 25 \\ [0 \ 0.3]^\top & \text{si } 25 < t \leq 32 \\ [0 \ -0.3]^\top & \text{si } t > 32 \end{cases} .$$

Por último en lo que respecta a este experimento, los valores de las constantes δ_i son $\delta_1 = [-0.4 \ 0]^\top$ [m], $\delta_2 = [0 \ -0.4]^\top$ [m] y $\delta_3 = [0.4 \ 0]^\top$ [m].

Como se puede ver en la Figura 59, el objetivo de control en posición establecido en (7), también se cumple en este experimento, ya que después de cuatro segundos (área sombreada) los errores tienden a cero.

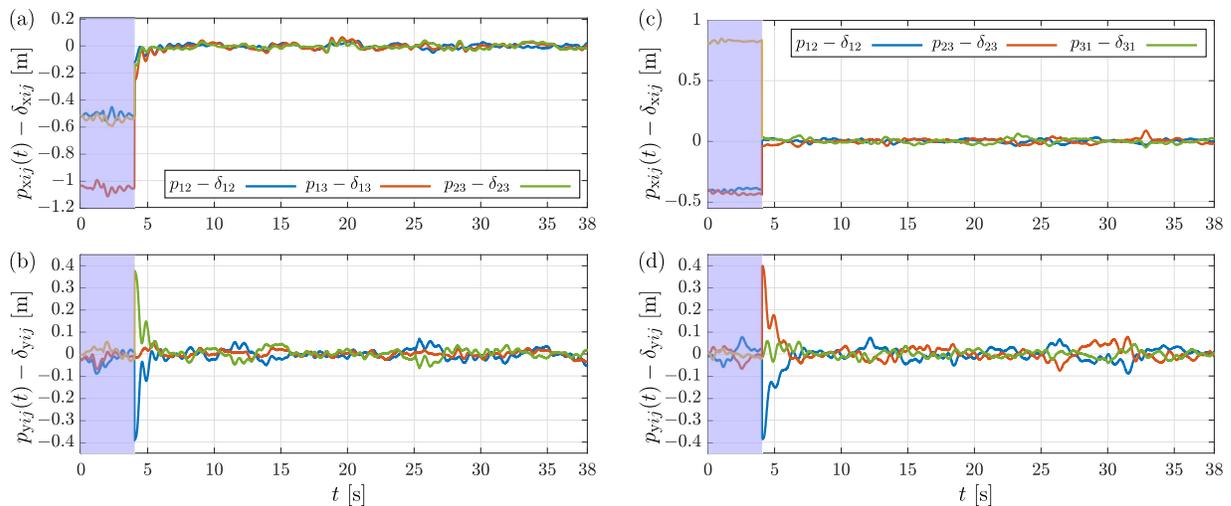


Figura 59. Objetivo de control en posición algoritmo de bandada: (a), (b) grafo no dirigido, y (c), (d) grafo dirigido.

De la Figura 60, se puede concluir que el control de seguimiento de trayectoria (129), tiene un buen funcionamiento pues permite que en este experimento los tres Crazyflies también alcancen la altura deseada. Al igual que en el caso de formación, en las Figuras 60(b) y 60(d), se muestra el valor absoluto del error de posición en el eje z , como se puede notar los errores son similares a los obtenidos en el experimento anterior, aún y cuando los cuadricópteros tienen que realizar el seguimiento de un perfil de velocidad deseado en el plano $x - y$, entonces de este resultado se puede reafirmar que el control (129) presenta un buen funcionamiento.

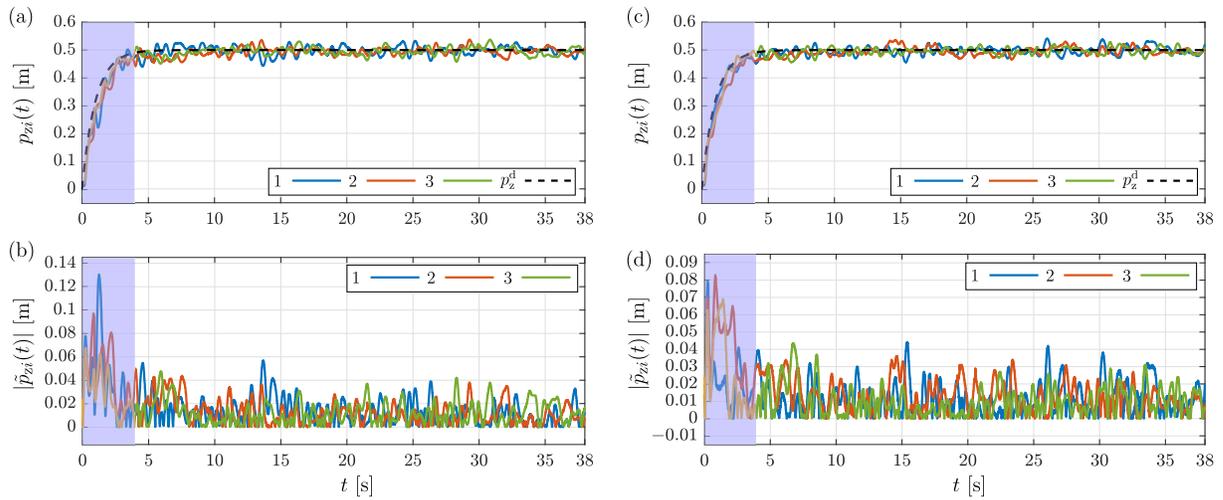


Figura 60. Seguimiento de trayectoria en el eje z y valor absoluto del error \tilde{p}_{zi} : (a), (b) grafo no dirigido, y (c), (d) grafo dirigido.

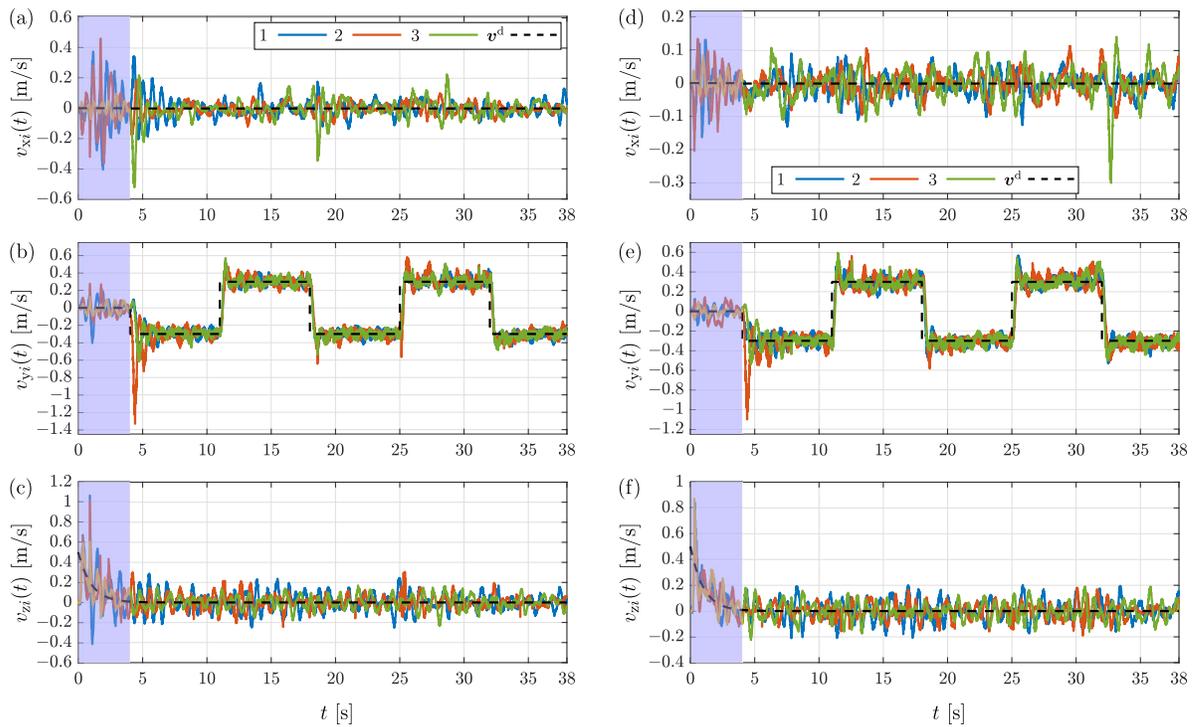


Figura 61. Velocidad estimada de cada cuadricóptero: (a), (b), (c) grafo no dirigido, y (d), (e), (f) grafo dirigido.

De los resultados presentados en la Figura 61 se puede ver que los algoritmos de control propuestos logran que los cuadricópteros realicen el seguimiento de una velocidad deseada, ya que las mediciones estimadas se parecen a lo deseado. Tomado en cuenta los resultados mostrados en la Figura 59 en conjunto con los mostrados en las Figuras 61(a), 61(b), 61(d) y 61(e), se puede asumir que el control propuesto para replicar el comportamiento de banda funciona de forma adecuada, puesto que logra cumplir con los objetivos de control establecidos.

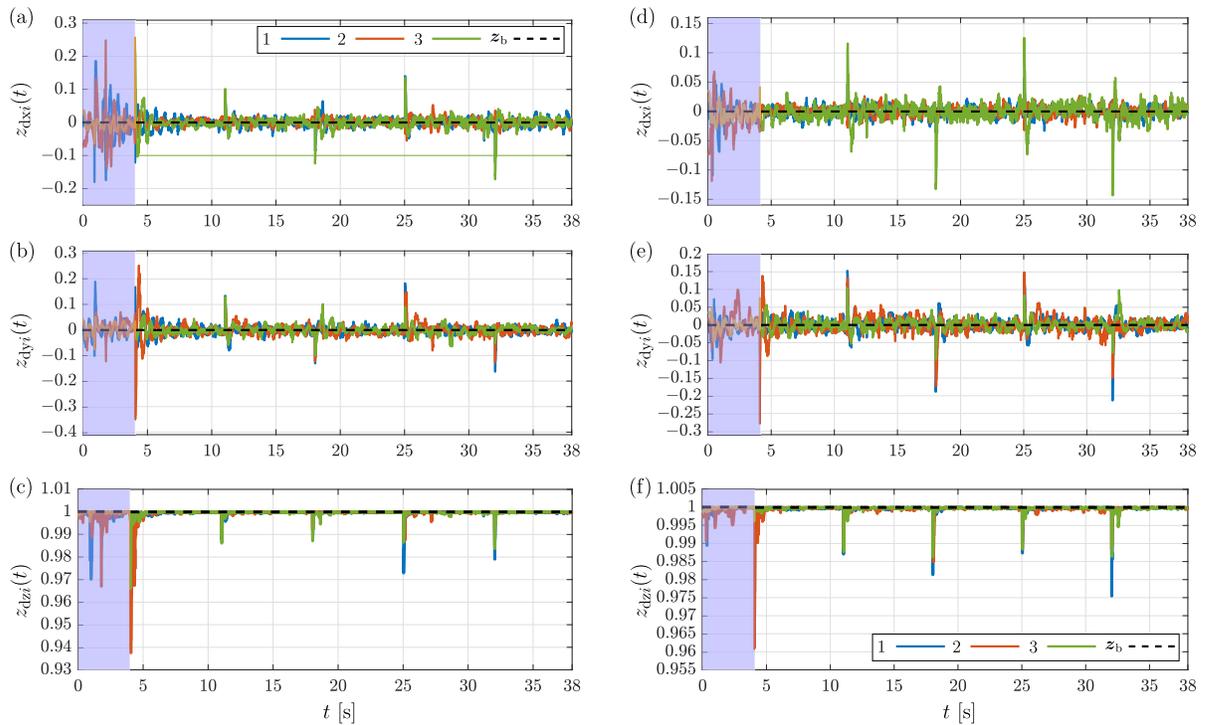


Figura 62. Mediciones del vector deseado z_d contra el vector z_b : (a), (b), (c) grafo no dirigido, y (d), (e), (f) grafo dirigido.

El control de orientación reducida, en esta prueba también cumple con su objetivo de manera aceptable, ya que como se puede ver en la Figura 62 las componentes del vector deseado z_{di} de cada Crazyflie tienden a las componentes del vector z_b . Cabe mencionar que los pequeños sobre impulsos que se observan en las figuras son a causa de los cambios de dirección producidos durante el seguimiento del perfil de velocidad deseado.

Las fuerzas de empuje de cada Crazyflie necesarias para lograr replicar el comportamiento bajo estudio son presentadas en la Figura 63, como se puede ver aunque cada Crazyflie puede presentar pequeñas diferencias (por ejemplo motores dañados o baterías con carga diferente) el control logra que las mediciones sean muy similares, tanto al hacer uso del grafo no dirigido Figura 63(a) como del dirigido Figura 63(b)

En la Figura 64 se ilustra como los Crazyflies han logrado replicar el comportamiento de bandada, lo anterior puede ser concluido, ya que los Crazyflies mientras se desplazan tratan de mantener una formación deseada. Los resultados como se puede ver son aceptables tanto al hacer uso del grafo no dirigido (ver Figura 64(a)) como del dirigido (ver Figuras 64(b)).

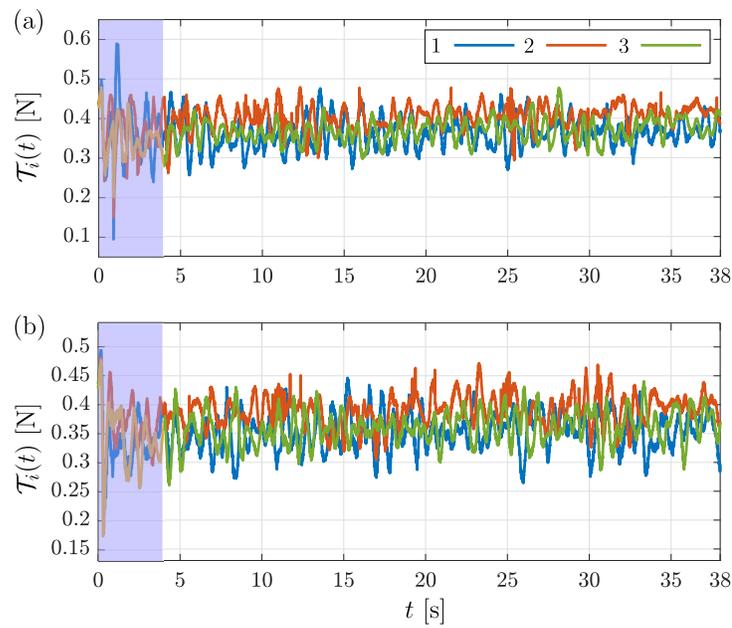


Figura 63. Fuerza de empuje de cada cuadricóptero algoritmo de bandada: (a) grafo no dirigido y (b) grafo dirigido.

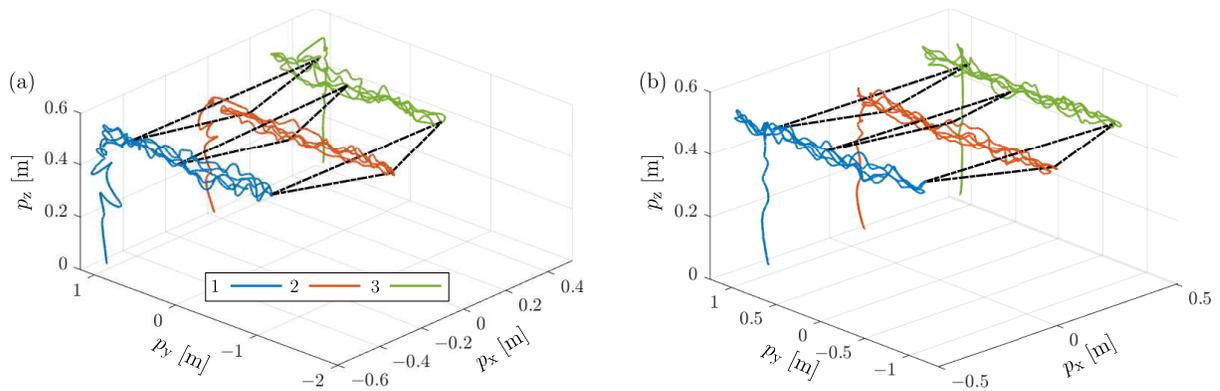


Figura 64. Trayectoria generada por los cuadricópteros al realizar el seguimiento del perfil de velocidad deseado y formación: (a), grafo no dirigido y (b) grafo dirigido.

5.4.3. Resultados del algoritmo de bandada usando el observador distribuido

En este experimento se hace uso del observador distribuido (88), con la finalidad de validar el funcionamiento del algoritmo de bandada, cuando solo un Crazyflie tiene conocimiento del perfil de velocidad deseado, por lo tanto se propone $\bar{D} = \text{diag}\{0 \ 0 \ 1\}$. Dado que el perfil de velocidad es constante, se omite del observador distribuido el término en el cual se encuentra la función $\text{sign}_c(\cdot)$. Por otra parte, para realizar el intercambio de información entre los Crazyflies se emplea el grafo no dirigido mostrado en la Figura 52(a).

Las condiciones iniciales para $\hat{v}^d(0)$ y $\sigma(0)$ son iguales a cero, al igual que para $\varphi_i(0)$, $\sigma_{ri}(0)$ y $\sigma_{zi}(0)$. Las ganancias propuestas son $\mathbf{K} = \text{diag}\{3.5 \ 3.5 \ 3.5\}$, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{0.1 \ 0.1 \ 0.1\}$, $\mathbf{K}_\sigma = \text{diag}\{0.08 \ 0.08 \ 0.08\}$, $k_{pi} = 1$, $k_{vi} = 0.35$, $k_{\sigma_{zi}} = 0.3$, $c = 1.75$, $\mu_1 = 15$ y $\mu_2 = 0.02$. Las constantes δ_i , el perfil de velocidad deseado, la altura deseada, y las condiciones iniciales y ganancias del control de orientación utilizadas en esta prueba son iguales a las del experimento anterior.

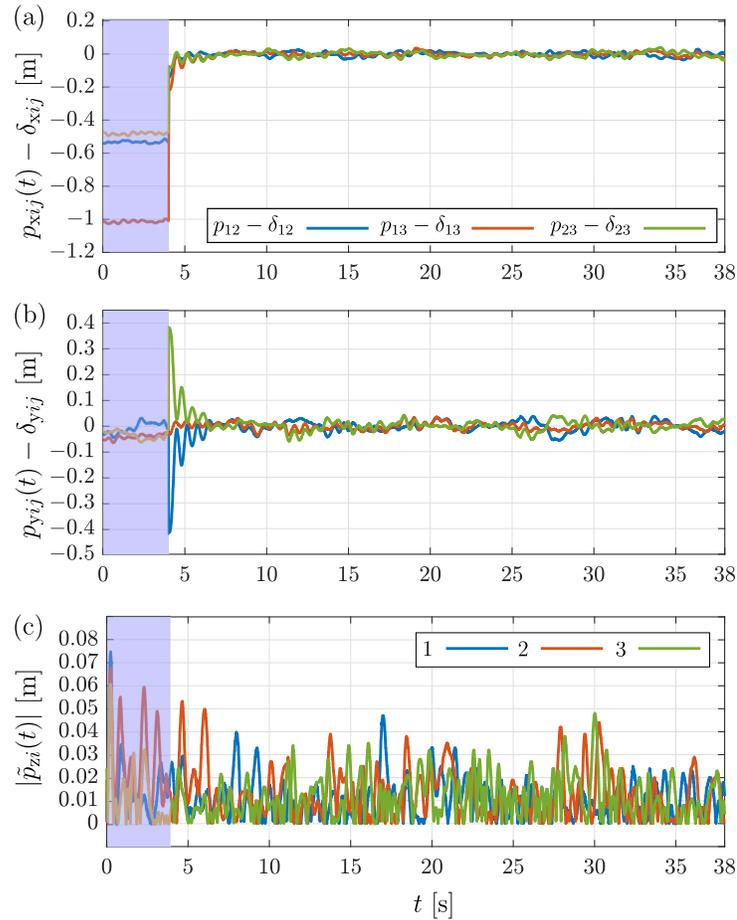


Figura 65. Objetivo de control en posición algoritmo de banda usando el observador distribuido.

De los resultados mostrados en las Figuras 65(a), 65(b) y 66, es claro ver que los objetivos de control han sido logrados, ya que los errores en posición (ver Figura 65) tienden a cero después de los cuatro segundos establecidos, para que los tres Crazyflies se coloquen a una posición y altura deseada, y en el caso de la velocidad (ver Figura 66), las velocidades estimadas tienden a lo deseado aún y cuando solo un Crazyfly tiene conocimiento del perfil de velocidad deseado, de este resultado también se puede asumir que el observador distribuido cumple con su objetivo, ya que las velocidades estimadas logran tender a lo deseado. Lo mostrado en la Figura 65(c), valida que los tres Crazyflies han logrado alcanzar la altura deseada, puesto que el valor absoluto del error \tilde{p}_{zi} trata de tender a cero.

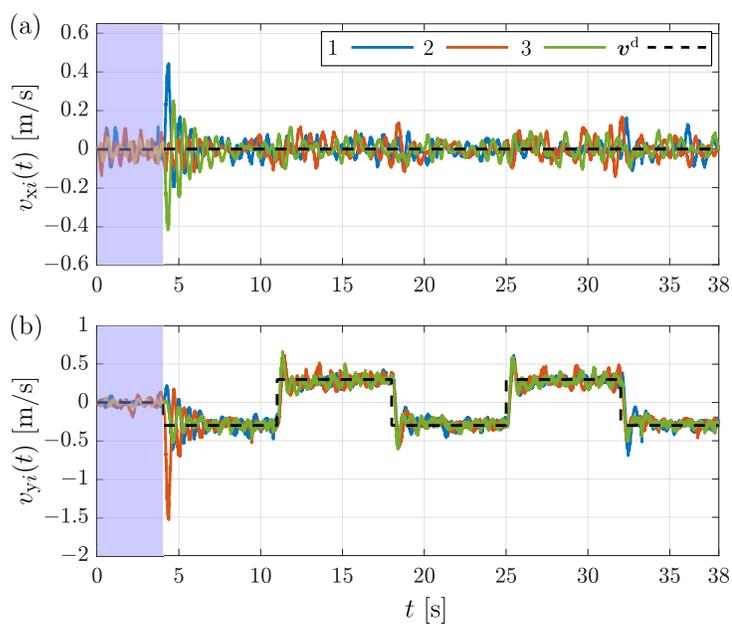


Figura 66. Velocidad estimada contra la velocidad deseada en el plano: (a) eje x y (b) eje y .

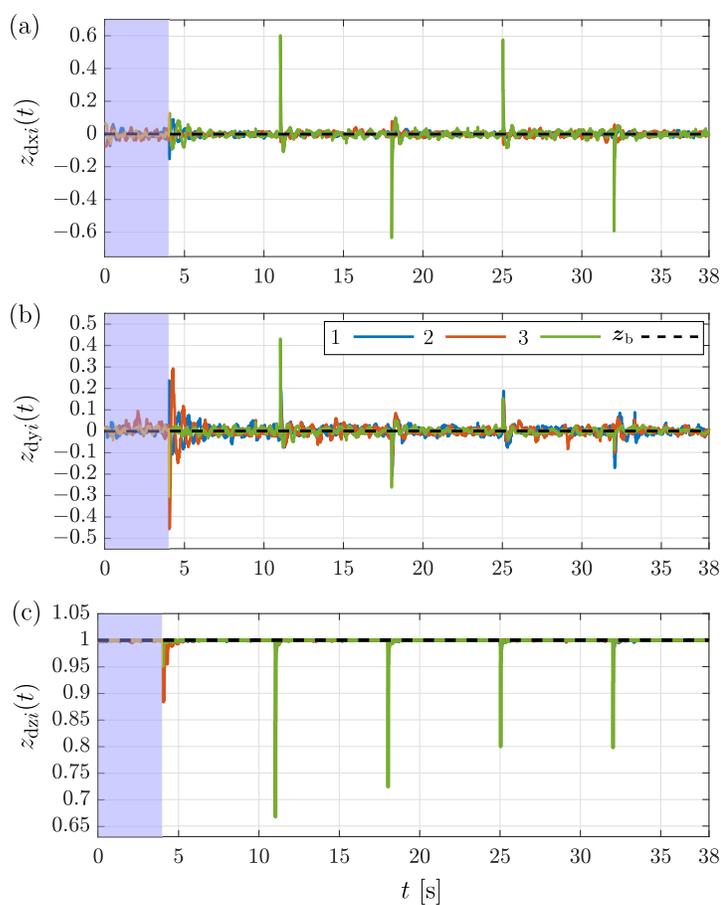


Figura 67. Mediciones del vector deseado z_d contra el vector z_b usando el observador distribuido.

Al igual que en los dos experimentos anteriores, se puede decir que en este caso el control de orientación

cumple con su objetivo, ya que las mediciones deseadas tienden a los valores que componen a z_b . Recordando lo dicho en el experimento anterior, los impulso que se observan en las Figuras 67(a), 67(b) y 67(c), son a causa de los cambios de dirección que realizan los tres Crazyflies en el plano.

La Figura 68 es colocada con la finalidad de mostrar como los tres Crazyflies logran replicar el comportamiento de bandada de manera aceptable, aún y cuando solo un miembro del grupo conoce el perfil de velocidad deseado.

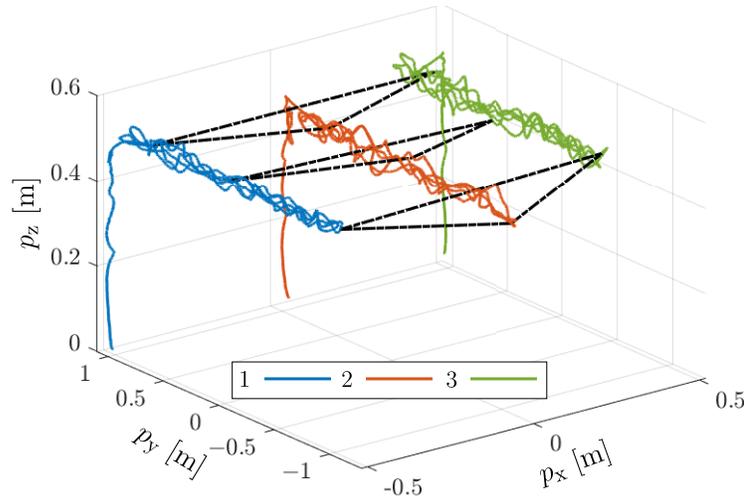


Figura 68. Trayectoria generada por los cuadrícópteros al realizar el seguimiento del perfil de velocidad deseado estimado y formación.

5.4.4. Resultados numéricos del algoritmo de sincronización

Dado que el área de trabajo con la que se cuenta para realizar los experimentos es reducida, por cuestiones de seguridad el algoritmo de sincronización solo se validó numéricamente.

Para realizar la simulación se emplea el modelo discreto del cuadrícóptero, dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{k+1} &= \mathbf{p}_k + h\mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_{k+1} &= \mathbf{v}_k + h\left(\frac{\mathcal{T}_k}{m}\mathbf{R}_k\mathbf{z}_b - \mathbf{g}\right) \\ \mathbf{R}_{k+1} &= \mathbf{R}_k e^{h\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_k)} \\ \boldsymbol{\omega}_{k+1} &= \boldsymbol{\omega}_k + h\mathbf{J}^{-1}(\boldsymbol{\tau}_k + \mathbf{S}(\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_k)\boldsymbol{\omega}_k) \end{aligned}$$

donde $h = 0.01$ [s] es el tiempo de muestreo. La comunicación entre los cuadrícópteros se realiza utilizan-

do el gafo no dirigido mostrado en la Figura 30, por lo tanto solo se han utilizado cuatro cuadricópteros. Para estimar la velocidad se hace uso del observador de Luenberger (39), con la finalidad de mostrar que puede ser usado en conjunto con el control propuesto y así remplazar el filtro de primer orden que se ha usado en las pruebas experimentales, puesto que la medición obtenida aunque es aceptable es solo una aproximación, caso contrario a lo obtenido del observador, donde el error de observación tiende a cero (ver Figura 12).

Las condiciones iniciales para el sistema de traslación son fijadas como $\mathbf{p}_1(0) = [0 \ 0.8 \ 0]^\top$ [m], $\mathbf{p}_2(0) = [0.8 \ 0.8 \ 0]^\top$ [m], $\mathbf{p}_3(0) = [-0.6 \ 0.8 \ 0]^\top$ [m], $\mathbf{p}_4(0) = [0.4 \ 0.8 \ 0]^\top$ [m] y $\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}$, en el caso del sistema de orientación las condiciones iniciales son $\mathbf{R}_i(0) = \mathbf{I}$ y $\boldsymbol{\omega}_i(0) = \mathbf{0}$, las condiciones iniciales del observador de Luenberger que estima la velocidad que se retroalimenta en el control de sincronización son $\hat{\mathbf{x}}_i(0) = [\hat{\mathbf{p}}_i(0)^\top \ \hat{\mathbf{v}}_i(0)^\top]^\top$, donde $\hat{\mathbf{p}}_1(0) = [0 \ 0.8]^\top$ [m], $\hat{\mathbf{p}}_2(0) = [0.8 \ 0.8]^\top$ [m], $\hat{\mathbf{p}}_3(0) = [-0.6 \ 0.8]^\top$ [m], $\hat{\mathbf{p}}_4(0) = [0.4 \ 0.8]^\top$ [m], $\hat{\mathbf{v}}_i(0) = \mathbf{0}$, para el observador que estima la velocidad que se emplea en el control (129a), las condiciones iniciales son $\hat{\mathbf{x}}_{zi}(0) = [0 \ 0]^\top$, las condiciones iniciales de las variables $\boldsymbol{\eta}_i(t)$ y $\mathbf{s}_i(t)$ se establecieron como, $\boldsymbol{\eta}_i(0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{s}_1(0) = [0 \ -0.1]^\top$ [m/s] y $\mathbf{s}_{2,3,4}(0) = [0 \ -0.5]^\top$ [m/s]. Las ganancias empleadas se encuentran en la Tabla 2.

Tabla 2. Ganancias para el algoritmo de sincronización y observador

Algoritmo de control y observadores	Ganancias
Control de sincronización	$\beta_i = \alpha_i = 2, c = 1$
Control de orientación	$\gamma_i = 10$ $k_{bi} = 0.005$ $\mathbf{K}_{\omega i} = 1.5\mathbf{I} \times 10^{-3}$ $\mathbf{K}_{\epsilon i} = 0.01\mathbf{I}$
Observador de Luenberger	$\boldsymbol{\Xi}_{11} = \text{diag}\{26 \ 26 \ 45\}$, $\boldsymbol{\Xi}_{12} = \text{diag}\{165 \ 165 \ 486\}$ $\boldsymbol{\Xi}_i = [\boldsymbol{\Xi}_{11} \ \boldsymbol{\Xi}_{12}]^\top$

Al igual que en las pruebas experimentales se ha establecido que durante cierto tiempo los cuadricópteros se regulen a una altura y posición deseada ($\mathbf{p}_{xydi} = [p_{xi}(0) \ p_{yi}(0)]^\top$), por lo tanto el tiempo propuesto para realizar esta acción es de 7 [s] y la altura deseada está dada por $p_{zd} = 0.5(1 - e^{-t})$.

Con base a todo lo anterior se presentan los siguientes resultados.

La trayectoria generada por los cuatro cuadricópteros al sincronizar sus velocidades se muestra en la Figura 69, para comprobar que los cuadricópteros han logrado sincronizar sus velocidades. En la Figura 70, se puede ver que después de los siete segundos los errores de velocidad entre cuadricópteros tienden a cero, cumpliendo así con lo establecido en (8).

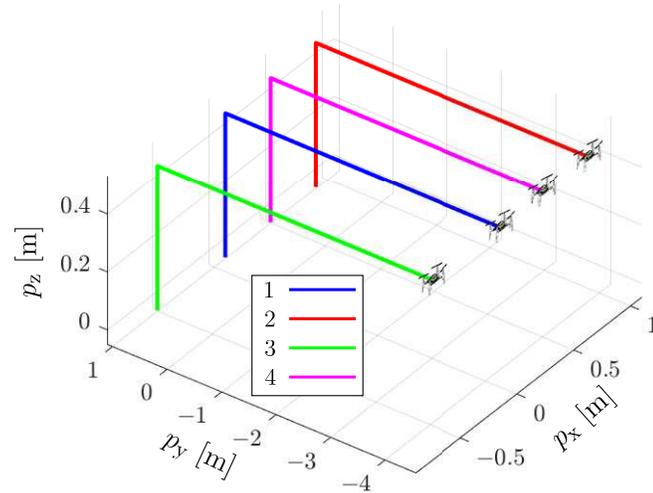


Figura 69. Trayectoria generada por los cuadricópteros.

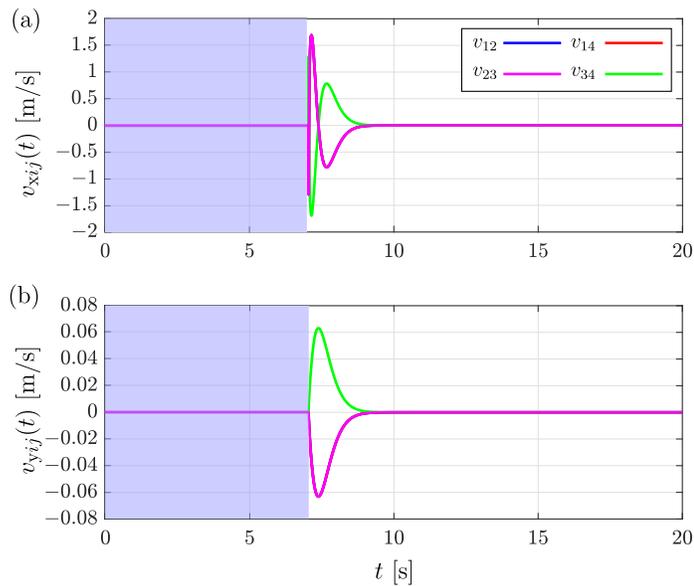


Figura 70. Objetivo de control algoritmo de sincronización: (a) eje x y (b) eje y .

En la Figura 71(a) se puede observar que el control (129) logra que los cuadricópteros converjan a la altura deseada, para validar lo anterior se presenta el valor absoluto del error en la Figura 71(b), donde es claro que lo anterior se cumple en vista que dicho error tiende a cero.

Los valores de velocidad a los cuales se han sincronizado los cuatro cuadricópteros tanto en el eje x como en el eje y son mostrados respectivamente en la Figuras 72(a) y 72(b), recordando las ecuaciones (60a) y (60b) se puede validar que el control logra que los cuadricópteros converjan a los valores de velocidad de cierta manera establecidos por el usuario. Del resultado mostrado en la Figura 72(c) se puede concluir que el control (129) presenta un buen seguimiento en velocidad, puesto que las velocidades de cada

cuadricóptero tienden a lo deseado. Considerando que las mediciones obtenidas convergen a lo deseado, se concluye que los observadores han cumplido correctamente con su objetivo.

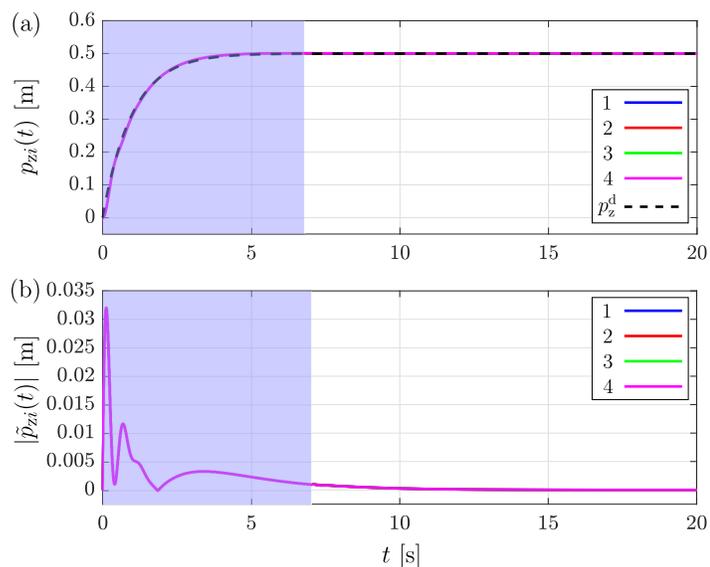


Figura 71. (a) Seguimiento de trayectoria en el eje z y (b) valor absoluto del error de posición en z .

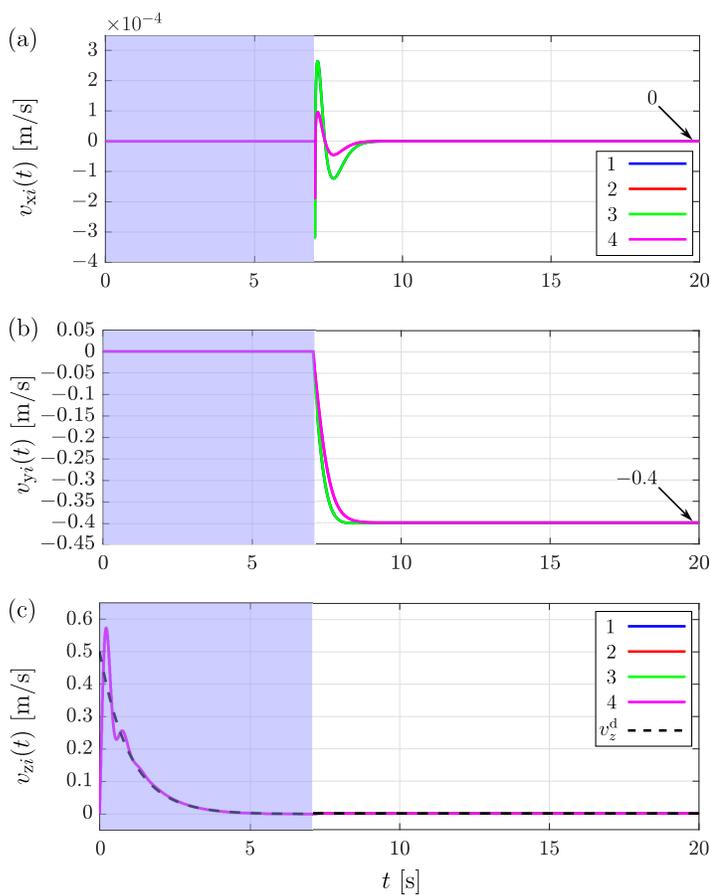


Figura 72. Velocidad estimada de cada cuadricóptero: (a) eje x , (b) eje y y (c) eje z .

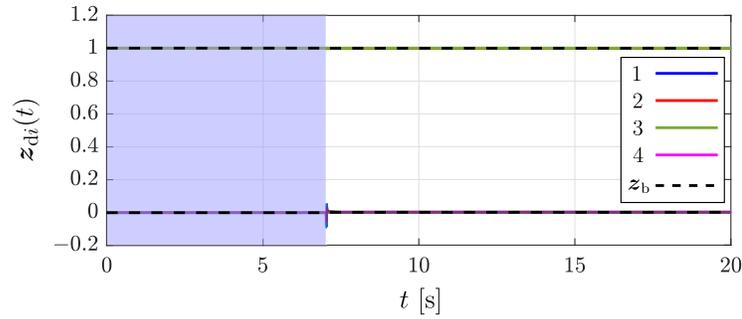


Figura 73. Trayectoria de la orientación reducida de los robots en la simulación.

Por último, en cuanto a resultados, se presenta la Figura 73 con la finalidad de mostrar que el control de orientación reducida cumple con el objetivo de control, visto que las componentes de los vectores z_{di} han convergido al vector z_b .

5.5. Conclusiones del capítulo

En el capítulo se propuso una solución al problema de emular los comportamientos de consenso, formación, bandada y sincronización en un grupo de vehículos de cuatro motores. Para resolver los problemas planteados primero el subsistema de traslación se llevó a la forma de un sistema con dinámica de doble integrador, con la finalidad de poder adoptar las estrategias de control empleadas en los sistemas con dinámica de doble integrador, para obtener las leyes de control que permiten que los comportamientos antes mencionados emerjan en un grupo de cuadricópteros de pequeña escala. Dado que el cuadricóptero no puede funcionar únicamente con la ley de control diseñada para el subsistema de traslación, ya que este vehículo también está conformada por un subsistema de orientación, en segundo lugar se propone un algoritmo de control para controlar la orientación del robot aéreo, dicho algoritmo lleva por nombre control de orientación reducida, ya que como se mencionó en el capítulo solo es necesario controlar dos grados de libertad en $SO(3)$, esto presenta cierta ventaja con respecto a controles de orientación que requieren controlar los tres grados de libertad, ya que el control requiere de menos energía para lograr que el cuadricóptero se oriente. Para validar la teoría presentada se realizaron pruebas tanto numéricas como experimentales.

Capítulo 6. Conclusiones

Este apartado se encuentra conformado por las conclusiones del trabajo, las contribuciones, trabajos derivados y el trabajo futuro.

6.1. Conclusiones

En este trabajo se abordó el problema de diseño de algoritmos de control que permitan que los comportamientos colectivos de consenso, formación, bandada y sincronización emerjan en grupos de agentes con dinámica de doble integrador y vehículos no tripulados. Para obtener los algoritmos de control que permiten resolver el problema, se empleó la teoría de control no lineal y de grafos, es importante mencionar que también se resolvió el problema para el caso en donde no se tiene acceso a mediciones de velocidad, empleando el observador de Luenberger o un filtro de primer orden para estimar dicha medición. Además, se proponen algoritmos que no requieren de dicha medición, lo cual es de ayuda en un caso práctico pues los cálculos computacionales se pueden ver reducidos. Cabe mencionar que en el trabajo también se hace uso de observadores distribuidos que permiten estimar la velocidad deseada de bandada, con la finalidad de lograr que el comportamiento de bandada emulado por los robots se asemeje más a lo observado en los seres vivos. Un punto a destacar es que la estrategia empleada para obtener los algoritmos de control para los sistemas con dinámica de doble integrador, se pudo adoptar para diseñar los algoritmos de control que permiten que tanto un grupo de robots móviles con tracción diferencial como un grupo de cuadricópteros emulen los comportamientos bajo estudio. Por otra parte, haciendo uso de la teoría de estabilidad para sistemas lineales y de Lyapunov se probó que los puntos de equilibrio de los sistemas en lazo cerrado son asintóticamente estables, lo que teóricamente permite demostrar que los objetivos de control establecidos se han cumplido. Para validar la teoría se presentaron resultados numéricos y experimentales, de los resultados mostrados se puede concluir que la teoría propuesta es confiable, ya que los algoritmos presentan un buen desempeño y permiten que los comportamientos bajo estudio emerjan en los sistemas de doble integrador y vehículos no tripulados empleados en este trabajo.

6.2. Contribuciones

Las contribuciones de este trabajo de tesis se listan a continuación:

1. Se propuso un algoritmo de control para el seguimiento de trayectorias de un robot móvil de tracción diferencial basado en la técnica de control linealización por retroalimentación dinámica. La ley de control propuesta es una mejora al algoritmo de control reportado en (Oriolo et al., 2002), ya que no requiere mediciones de la velocidad lineal del robot y garantiza convergencia exponencial a la trayectoria deseada. El diseño del algoritmo así como su correspondiente análisis de estabilidad se encuentra reportado en el artículo de congreso (Montañez et al., 2023a).
2. En lo que respecta al problema de generación de comportamientos colectivos, se propuso una ley de control distribuido sin mediciones de velocidad que logra emular los comportamientos colectivos de consenso, formación y movimiento coordinado (bandada) para enjambres robóticos con dinámica de doble integrador. Es importante resaltar que el esquema propuesto funciona para topologías de comunicación unidireccionales y bidireccionales. Un resultado importante es que para el caso de consenso se logró calcular el punto al cual los robots convergen y se demostró que dicho punto depende de las condiciones iniciales de los agentes, la topología de conexión y las ganancias del controlador. Si bien ya existen trabajos reportados donde se calcula el estado de consenso, en dichos trabajos se asume que se miden todos los estados y la mayoría se enfoca a grafos unidireccionales. Los resultados antes mencionados se encuentran reportados en el artículo de congreso (Montañez et al., 2022) y el artículo de revista (Montañez et al., 2023b).
3. Para el comportamiento de movimiento coordinado se propuso un observador distribuido que estima la velocidad deseada a la cual los robots deben converger y que solo está accesible para un grupo reducido de robots que forman parte del enjambre. Con el observador propuesto se logra emular el comportamiento de movimiento coordinado de un modo más apegado a lo observado en la realidad, dado que en ésta no todos los miembros de un grupo conocen la velocidad a la que se desplazan sus vecinos, sino que gracias a la interacción que se produce entre los agentes después de un cierto periodo de tiempo se alcanza una misma velocidad.
4. El algoritmo propuesto para sincronización en velocidad aún y cuando requiere de la estimación de la velocidad, presenta cierta ventaja desde el punto de vista práctico, con respecto al control reportado en (Zhang et al., 2022), debido a que los robots no convergerán a la misma posición, puesto que solo se sincronizan sus velocidades.
5. Se logró extender los algoritmos de control para enjambres robóticos con dinámica de doble integrador a grupos de robots móviles con tracción diferencial y aéreos de cuatro rotores, a pesar de que este tipo de vehículos son sistemas no lineales. Por otro lado, para validar lo anterior se presentan resultados numéricos y experimentales.

6.3. Trabajos derivados de la tesis

Los trabajos derivados de la tesis son:

- **Montañez, C.**, Pliego-Jiménez, J., y Cruz-Hernández, C. (2022). Formation control for robot networks with double integrator dynamics. En: 2022 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA), pp. 589–594, agosto 2022, Trieste Italia.
- **Montañez, C.**, Pliego-Jiménez, J., y Martínez, R. (2023). Formation and flocking control algorithms for robot networks with double integrator dynamics and time-varying formations. *Entropy*, 25(6): 834.
- **Montañez, C.**, Pliego-Jiménez, J., y Cruz-Hernández, C. (2023). Velocity and position tracking controllers for wheeled mobile robots. The 22nd World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC), julio 2023, Yokohama Japón.

Los trabajos en los que se contribuyó son:

- Sevilla, J., Pliego-Jiménez, J., **Montañez, C** y Cruz-Hernández, C. (2024). Attitude stabilization controller for quadrotors based on the unit quaternion. Congreso Nacional de Control Automático (CNCA), octubre 2024, Ciudad de México.
- Villalobos, C., Pliego-Jiménez, J., **Montañez, C.**, y Arellano-Delgado, A. (2024). An almost global trajectory tracking controller for differential-drive wheeled mobile robots. *International Journal of Control, Automation, and Systems (IJCAS)*. 22: pp. 3684–3693.

6.4. Trabajo futuro

- Se propone diseñar algoritmos de control que permitan que grupos de agentes evadan obstáculos mientras replican algún comportamiento colectivo (lograr lo anterior permitiría la posibilidad de realizar tareas como búsqueda, mapeo de áreas y trabajo de carga por mencionar algunas), ya que fuera de un ambiente controlado existen obstáculos.

- Considerar en el diseño de los algoritmos de control la existencia de retardos en la comunicación, puesto que estos pueden afectar considerablemente el desempeño de los algoritmos de control debido a que se puede perder información.
- Diseñar algoritmos de control que permitan replicar comportamientos colectivos en grupos heterogéneos de robots.
- Considerar el caso en el cual las topologías de comunicación sean variantes en el tiempo, para validar la robustez de los algoritmos de control.

Literatura citada

- Abdessameud, A. & Tayebi, A. (2009). Formation control of VTOL-UAVs. *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*. <https://doi.org/10.1109/CDC.2009.5400941>.
- Abdessameud, A. & Tayebi, A. (2013). On consensus algorithms design for double integrator dynamics. *Automatica*, 49(1), 253–260. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2012.08.044>.
- Arteaga, M. A., Gutiérrez, A., & Pliego, J. (2022). *Local stability and ultimate boundedness in the control of robot manipulators*. Springer.
- Bandala, A., Vicerra, R., & Dadios, E. (2014). Formation stabilization algorithm for swarm tracking in unmanned aerial vehicle (uav) quadrotors. *TENCON 2014 IEEE Region 10 Conference*. <https://doi.org/10.1109/TENCON.2014.7022455>.
- Bazoula, A. & Nemra, A. (2013). Mobile robots formation: graph-force approach. *Mediterranean Conference on Control and Automation*. <https://doi.org/10.1109/MED.2013.6608867>.
- Bollobás, B. (1998). *Modern graph theory*. Springer.
- Breger, L., Inalhan, G., Tillerson, M., & How, J. (2007). Cooperative spacecraft formation flying: model predictive control with open-and closed-loop robustness. *Elsevier Astrodynamics Series, 1*. [https://doi.org/10.1016/S1874-9305\(07\)80010-0](https://doi.org/10.1016/S1874-9305(07)80010-0).
- Buck, J. (1988). Synchronous rhythmic flashing of fireflies. II. *The Quarterly Review of Biology*, 63(3), 265–289. <https://doi.org/doi:10.1086/415929>.
- Carli, R. & Zampieri, S. (2014). Network clock synchronization based on the second-order linear consensus algorithm. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(2), 409–422. <https://doi.org/10.1109/TAC.2013.2283742>.
- Chaturvedi, N. A., Sanyal, A. K., & McClamroch, N. H. (2011). Rigid-body attitude control. *IEEE Control Systems Magazine*, 31(3), 30–51. <https://doi.org/10.1109/MCS.2011.940459>.
- Chen, L., Shi, M., Garcia, H., & Cao, M. (2022). Stabilizing and maneuvering angle rigid multiagent formations with double-integrator agent dynamics. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 9(3), 1362–1374. <https://doi.org/10.1109/TCNS.2022.3153885>.
- Chen, N., Wang, Y., & Zhang, R. (2023). Distributed prescribed performance formation control for nonholonomic mobile robots under noisy communication. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s10846-023-01828-z>.
- Chen, X.-X. & Huang, J. (2019). Odor source localization algorithms on mobile robots: a review and future outlook. *Robotics and Autonomous Systems*, 112, 123–136. <https://doi.org/10.1016/j.robot.2018.11.014>.
- Cheng, J. & Wang, B. (2020). Flocking control of mobile robots with obstacle avoidance based on simulated annealing algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*. <https://doi.org/10.1155/2020/7357464>.
- Deo, N. (2017). *Graph theory with applications to engineering and computer science*. Dover.
- Duarte, M., Costa, V., Gomes, J., Rodrigues, T., Silva, F., Moura, S., & Lyhne, A. (2016). Evolution of collective behaviors for a real swarm of aquatic surface robots. *Plos one*, 11(3). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0151834>.

- Duranton, C. & Gaunet, F. (2016). Behavioural synchronization from an ethological perspective: Overview of its adaptive value. *Adaptive Behavior*, 24(3), 181–191. <https://doi.org/10.1177/1059712316644966>, <https://https://doi.org/10.1177/1059712316644966>.
- Díaz, R. (2018). *Vuelo en formación de vehículos aéreos no tripulados*. [Tesis de Maestría en Ciencias, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California], Repositorio institucional <https://cicese.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1007/2066>.
- Díaz, Y., Dávila, J., & Mera, M. (2023). Leader-follower formation of unicycle mobile robots using sliding mode control. *IEEE Control Systems Letters*, 7, 883–888. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2022.3227578>.
- Feng, Y., Duan, Z., Lv, Y., & Ren, W. (2019). Some necessary and sufficient conditions for synchronization of second-order interconnected networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 49(12), 4379–4387. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2018.2864625>.
- Furuta, K., Sano, A., & Atherton, D. P. (1988). *State variable methods in automatic control*. John Wiley & Son Limited.
- Förster, J. (2015). System identification of the crazyflie 2.0 nano quadcopter. *B.S. thesis, ETH, Zurich*. <https://doi.org/10.3929/ethz-b-000214143>.
- Gao, J., Xu, X., Ding, N., & Li, E. (2017). Flocking motion of multi-agent system by dynamic pinning control. *IET Control Theory and Applications*, 11, 714–722. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2016.1150>.
- Goldin, D. & Raisch, J. (2014). Consensus for agents with double integrator dynamics in heterogeneous networks. *Asian Journal of Control*, 16(1), 30–39. <https://doi.org/10.1002/asjc.610>.
- Guo, J., Qi, J., Wang, M., Wu, C., Ping, Y., Li, S., & Jin, J. (2023). Distributed cooperative obstacle avoidance and formation reconfiguration for multiple quadrotors: Theory and experiment. *Aerospace Science and Technology*, 136. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2023.108218>.
- Guo, Z., Li, H., Ma, H., & Meng, W. (2024). Distributed optimal attitude synchronization control of multiple quadrotors via adaptive dynamic programming. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 35(6), 8053–8063. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2022.3224029>.
- Gutiérrez, H., Morales, A., & Nijmeijer, H. (2017). Synchronization control for a swarm of unicycle robots: analysis of different controller topologies. *Asian Journal of Control*, 19(5), 1822–1833. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/asjc.1497>.
- Hale, J. K. (2009). *Ordinary differential equations*. Dover Publications.
- Han, Z., Wang, L., Lin, Z., & Zheng, R. (2016). Formation control with size scaling via a complex laplacian-based approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 46(10), 2348–2359. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2015.2477107>.
- Hong, Y., Hu, J., & Gao, L. (2006). Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology. *Automatica*, 42(7), 1177–1182. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.02.013>.
- Hu, J. & Lin, Y. (2010). Consensus control for multi-agent systems with double-integrator dynamics and time delays. *IET Control Theory & Applications*, 4(1). <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2008.0479>.

- Jian, D., Haibo, J., Yequiu, L., Kun, L., & Chenhui, Y. (2018). Flocking control of multi-quadrotor system of systems. *2018 IEEE CSAA Guidance, Navigation and Control Conference (CGNCC)*, 1–6. <https://doi.org/10.1109/GNCC42960.2018.9019130>.
- Joshi, A., Limbu, N., Ahuja, I., Mulla, K., Chung, H., & Chakraborty, D. (2016). Implementation of distributed consensus on an outdoor testbed. *2016 European Control Conference (ECC)*, 2146–2151. <https://doi.org/10.1109/ECC.2016.7810609>.
- Joshi, A., Wala, A., Ludhiyani, M., Chakraborty, D., Chung, H., & Manjunath, D. (2019). Outdoor cooperative flight using decentralized consensus algorithm and a guaranteed real-time communication protocol. *Control Engineering Practice*, *88*, 128–140. <https://doi.org/10.1016/j.conengprac.2019.05.002>.
- Kelly, R. & Santibáñez, V. (2003). *Control de movimiento de robots manipuladores*. Pearson.
- Khaledyan, M., Liu, T., Fernandez, V., & de Queiroz, M. (2020). Flocking and target interception control for formations of nonholonomic kinematic agents. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, *28*(4), 1603–1610. <https://doi.org/10.1109/TCST.2019.2914994>.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear systems*. Pearson Education.
- Kocarev, L. (2013). *Consensus and synchronization in complex networks*. Springer.
- Li, H. (2022). Properties and applications of graph laplacians. <https://doi.org/https://math.uchicago.edu/~may/REU2022/REUPapers/Li,Hanchen.pdf>.
- Li, H., Zhu, M., Chu, Z., Du, H., Wen, G., & Alotaibi, D. (2018). Fixed-time synchronization of a class of second-order nonlinear leader-following multi-agent systems. *Asian Journal of Control*, *20*(1), 39–48. <https://doi.org/10.1002/asjc.1585>.
- Li, M., Zhang, K., Miao, Q., & Jiang, B. (2023). Adaptive fault-tolerant control for attitude and altitude synchronization of quadrotors based on fully-actuated system approaches. *2023 2nd Conference on Fully Actuated System Theory and Applications (CFASTA)*, 480–485. <https://doi.org/10.1109/CFASTA57821.2023.10243309>.
- Listmann, K., Masalawala, M., & Adamy, J. (2009). Consensus for formation control of nonholonomic mobile robots. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. <https://doi.org/10.1109/ROBOT.2009.5152865>.
- Liu, Z., Chen, W., Lu, J., & Wang, H. (2016). Synchronous trajectory tracking for mobile robot network without velocity measurements between coupling robots. *IEEE International Conference on Real-Time Computing and Robotics (RCAR)*. <https://doi.org/10.1109/RCAR.2016.7784102>.
- Martínez, R. (2014). *Control de comportamientos colectivos en grupos de robots móviles*. [Tesis de Maestría en Ciencias, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California], Repositorio institucional <https://cicese.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1007/248>.
- Martínez, R. (2019). *Control de enjambres robóticos*. [Tesis de Doctorado en Ciencias, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California], Repositorio institucional <https://cicese.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1007/2773>.
- Martínez, R., Cruz, C., Pliego, J., & Arellano, A. (2018). Control algorithms for the emergence of self-organized behaviours in swarms of differential-traction wheeled mobile robots. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, *15*(6), 1–14. <https://doi.org/10.1177/1729881418806435>.

- Michaels, D. C., Matyas, E. P., & Jalife, J. (1987). Mechanisms of sinoatrial pacemaker synchronization: a new hypothesis. *Circulation Research*, *61*(5), 704–714. <https://doi.org/doi:10.1161/01.res.61.5.704>.
- Montañez, C. (2020). *Formación de vehículos aéreos con aplicaciones a búsqueda y vigilancia*. [Tesis de Maestría en Ciencias, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California], Repositorio institucional <https://cicese.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1007/3224>.
- Montañez, C., Pliego, J., & Cruz, C. (2022). Formation control for robot networks with double integrator dynamics. *2022 IEEE Conference on Control Technology and Applications (CCTA)*, 589–594. <https://doi.org/10.1109/CCTA49430.2022.9966124>.
- Montañez, C., Pliego, J., & Cruz, C. (2023a). Velocity and position tracking controllers for wheeled mobile robots. *The 22nd World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC)*. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2023.10.1121>.
- Montañez, C., Pliego, J., & Martínez, R. (2023b). Formation and flocking control algorithms for robot networks with double integrator dynamics and time-varying formations. *Entropy*, *25*(6), 834. <https://doi.org/10.3390/e25060834>.
- Moshtagh, N., Jadbabaie, A., & Daniilidis, K. (2005). Distributed geodesic control laws for flocking of nonholonomic agents. *IEEE Conference on Decision and Control*. <https://doi.org/10.1109/CD C.2005.1582593>.
- Munz, U., Papachristodoulou, A., & Allgower, F. (2011). Consensus in multi-agent systems with coupling delays and switching topology. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *56*(12), 2976–2982. <https://doi.org/10.1109/TAC.2011.2161052>.
- Niemoczynski, B., Biswas, S., Kollmer, J., & Ferrese, F. (2014). Hovering synchronization of a fleet of quadcopters. *International Symposium on Resilient Control Systems (ISRCS)*. <https://doi.org/10.1109/ISRCS.2014.6900102>.
- Ning, B., Han, Q., Zuo, Z., Jin, J., & Zheng, J. (2018). Collective behaviors of mobile robots beyond the nearest neighbor rules with switching topology. *IEEE Transactions on Cybernetics*, *48*(5). <https://doi.org/10.1109/TCYB.2017.2708321>.
- Nuño, E., Ortega, R., Basañez, L., & Hill, D. (2011). Synchronization of networks of nonidentical euler-lagrange systems with uncertain parameters and communication delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, *56*(4), 935–941. <https://doi.org/10.1109/TAC.2010.2103415>.
- Olfati-Saber, R., Fax, J. A., & Murray, R. M. (2007). Consensus and cooperation in networked multi-agent systems. *Proceedings of the IEEE*, *95*(1), 215–233. <https://doi.org/10.1109/JPROC.2006.887293>.
- Oriolo, G., Luca, A. D., & Vendittelli, M. (2002). Wmr control via dynamic feedback linearization: design, implementation, and experimental validation. *IEEE Transactions on control systems technology*, *10*(6), 835–852. <https://doi.org/10.1109/TCST.2002.804116>.
- Pais, D. (2012). *Emergent collective behavior in multi-agent systems: an evolutionary perspective*. [Phd Thesis, Princeton University], Institutional repository <https://arks.princeton.edu/ark:/88435/dsp01h128nd74k>.

- Pavlov, D. & Kasumyan, A. (2000). Patterns and mechanisms of schooling behavior in fish: A review. *Journal of Ichthyology*, 40(2), S163. https://www.researchgate.net/publication/264977013_Patterns_and_mechanisms_of_schooling_behavior_in_fish_A_review.
- Pliego, J. (2021). Quaternion-based adaptive control for trajectory tracking of quadrotor unmanned aerial vehicles. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 35(5), 628–641. <https://doi.org/10.1002/acs.3218>.
- Portugal, S., Hubel, T., Fritz, J., Heese, S., Trobe, D., Voelkl, B., Hailes, S., Wilson, A., & Usherwood, J. (2014). Upwash exploitation and downwash avoidance by flap phasing in ibis formation flight. *Nature*. <https://doi.org/10.1038/nature12939>.
- Ren, W. (2008). On consensus algorithms for double-integrator dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 53(6), 1503–1509. <https://doi.org/10.1109/TAC.2008.924961>.
- Ren, W. & Atkins, E. (2005). *Second-order consensus protocols in multiple vehicle systems with local interactions*. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. <https://doi.org/10.2514/6.2005-6238>.
- Ren, W. & Beard, R. W. (2008). *Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control. communications and control engineering*. Springer.
- Ren, W., Beard, R. W., & Atkins, E. M. (2007). Information consensus in multivehicle cooperative control. *IEEE Control systems magazine*, 27(2), 71–82. <https://doi.org/10.1109/MCS.2007.338264>.
- Ren, W., Beard, W., & McLain, W. (2005). *Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems*. *Cooperative contro*, (pp. 171–188). https://doi.org/10.1007/978-3-540-31595-7_10.
- Reynolds, C. W. (1998). *Flocks, herds, and schools: a distributed behavioral model*. *Seminal graphics*, (pp. 273–282). <https://doi.org/10.1145/280811.281008>.
- Rojo, E., Garcia, O., Ollervides, E., Zambrano, P., & Espinoza, E. (2019). Robust consensus-based formation flight for multiple quadrotors. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, 213–226. <https://doi.org/10.1007/s10846-018-0843-3>.
- Rubio, J. (2022). *Formación de cuadricópteros utilizando un control por backstepping y un acoplamiento dinámico*. [Tesis de Maestría en Ingeniería, Universidad Autónoma de Baja California], Repositorio institucional <https://catalogocimarron.uabc.mx/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=251098>.
- Saber, O. & Murray, R. (2003). Consensus protocols for networks of dynamic agents. *Proceedings of the 2003 American Control Conference, 2003*, volumen 2, 951–956. <https://doi.org/10.1109/ACC.2003.1239709>.
- Saif, O., Fantoni, I., & Zavala-Río, A. (2019). Distributed integral control of multiple uavs: precise flocking and navigation. *IET Control Theory & Applications*, 13(13), 2008–2017. <https://doi.org/10.1049/iet-cta.2018.5684>.
- Scardovi, L., Arcak, M., & Sontang, E. (2010). Synchronization of interconnected systems with applications to biochemical networks: an input-output approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 55(6), 1367–1379. <https://doi.org/10.1109/TAC.2010.2041974>.

- Shi, H., Wang, L., & Chu, T. (2009). Flocking of multi-agent systems with a dynamic virtual leader. *International Journal of Control*, *82*(1), 43–58. <https://doi.org/10.1080/00207170801983091>, <https://https://doi.org/10.1080/00207170801983091>.
- Sumano, E., Castro, R., Lozano, R., & Salazar, S. (2013). Synchronized flight formation of quadrotors. *IFAC Proceedings Volumes*, *46*(30). <https://doi.org/10.3182/20131120-3-FR-4045.00042>.
- Sumpter, D. J. T. (2010). *Collective animal behavior*. Princeton University Press.
- Sun, D., Wang, C., Shang, W., & Feng, G. (2009). A synchronization approach to trajectory tracking of multiple mobile robots while maintaining time-varying formations. *IEEE Transactions on Robotics*, *25*(5). <https://doi.org/10.1109/TR0.2009.2027384>.
- Sun, Y. G. & Wang, L. (2009). Consensus problems in networks of agents with double-integrator dynamics and time-varying delays. *International Journal of Control*, *82*(10), 1937–1945. <https://doi.org/10.1080/00207170902838269>.
- Trianni, V. & Campo, A. (2015). *Fundamental collective behaviors in swarm robotics*. Springer Handbook of Computational Intelligence.
- Trudeau, R. J. (1993). *Introduction to graph theory*. Dover.
- Vara, Y. A. (2021). *Sincronización externa de robots móviles empleando acoplamiento dinámico*. [Tesis de Maestría en Ciencias, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California], Repositorio institucional <https://cicese.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1007/3585>.
- Vicsek, T. (2001). A question of scale. *Nature*, *411*, 421. <https://doi.org/10.1038/35078161>.
- Villalobos, C. A. (2023). *Sincronización y formación de robots móviles aplicando un sistema intermedio con transmisión segura*. [Tesis de Maestría en Ciencias, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California], Repositorio institucional <https://cicese.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1007/3934>.
- Wang, X. & Chen, G. (2002). Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, *49*(1), 54–62. <https://doi.org/10.1109/81.974874>.
- Wilson, S., Buffin, A., & Berman, S. (2018). Multi-robot replication of ant collective towing behaviours. *Royal Society Open Science*, *5*(10), 180490. <https://doi.org/10.1098/rsos.180409>.
- Yang, P., Zhang, A., Bi, W., & Li, M. (2023). Cooperative group formation control for multiple quadrotors system with finite- and fixed-time convergence. *ISA Transactions*, *138*, 186–196. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2023.03.029>.
- Yang, X., Wang, W., & Huang, P. (2020). Distributed optimal consensus with obstacle avoidance algorithm of mixed-order uavs–usvs–uavs systems. *ISA Transactions*, *107*, 270–286. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2020.07.028>.
- Yu, W., Chen, G., & Cao, M. (2010). Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems. *Automatica*, *46*(6), 1089–1095. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2010.03.006>.
- Zelazo, D., Amirreza, R., & Mehran, M. (2007). Agreement via the edge laplacian. *2007 46th IEEE Conference on Decision and Control*, 2309–2314. <https://doi.org/10.1109/CDC.2007.4434553>.

- Zhang, W., Zuo, Z., & Wang, Y. (2022). Active synchronization for double-integrator network systems without velocity information. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 69(6), 2589–2600. <https://doi.org/10.1109/TCSI.2022.3151310>.
- Zhang, Y., Yang, L. M. C., Zhou, L., Wang, G., & Dai, W. (2023). Formation control for multiple quadrotors under dod attacks via singular perturbation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 59(4), 4753–4762. <https://doi.org/10.1109/TAES.2023.3241139>.
- Zhao, S. & Zelazo, D. (2017). Translational and scaling formation maneuver control via a bearing-based approach. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 4(3), 429–438. <https://doi.org/10.1109/TCNS.2015.2507547>.
- Zoltán, N., Erzsébet, R., Yves, B., Tamás, V., & Laszlo, B. A. (2000). The sound of many hands clapping - tumultuous applause can transform itself into waves of synchronized clapping. *Nature*, 403, 849–850. <https://doi.org/10.1038/35002660>.