La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el SECIHTI (Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE © 2025. Todos los derechos reservados

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Maestría en Ciencias en Ciencias de la Tierra con Orientación en Geología

Algoritmos de acoplamiento presión-velocidad para la modelación numérica de la transferencia de calor en 2D de un yacimiento geotérmico

Tesis para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de Maestro en Ciencias

Presenta:

Elizabeth Magaña Torres

Ensenada, Baja California, México 2025

Tesis defendida por Elizabeth Magaña Torres

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Efraín Gómez Arias Director de tesis

Dr. Carlos Francisco Flores Luna

Dr. Benjamín Barón Sevilla

Dr. Antonio González Fernández



Dr. Diego Ruiz Aguilar Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

> **Dra. Ana Denise Re Araujo** Directora de Estudios de Posgrado

Copyright © 2025, Todos los Derechos Reservados, CICESE Prohibida su reproducción parcial o total sin la autorización por escrito del CICESE Resumen de la tesis que presenta **Elizabeth Magaña Torres** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geología.

Algoritmos de acoplamiento presión-velocidad para la modelación numérica de la transferencia de calor en 2D de un yacimiento geotérmico

Resumen aprobado por:

Dr. Efraín Gómez Arias Director de tesis

La modelación numérica de los campos geotérmicos requiere de diversas herramientas computacionales y matemáticas para comprender su dinámica compleja. Los modelos numéricos permiten simular la interacción de los distintos procesos, como la convección del fluido (campo de velocidades), los campos de presión y temperatura, y el transporte de solutos, mediante el balance de masa y energía. En este trabajo se desarrolla una solución numérica para acoplar los campos de velocidad y presión involucrados en las ecuaciones de continuidad, momento y conservación de energía (temperatura) en un yacimiento geotérmico bidimensional. La metodología empleada se basa en el método de volumen finito (MVF) o método de volumen de control (MVC). La implementación computacional se realiza en lenguaje Fortran, acoplado a subrutinas en Python para la generación de gráficos que permiten visualizar los campos modelados de velocidad y temperatura en 2D. Para evaluar la funcionalidad del algoritmo, este fue aplicado al Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes (CGLTV), donde se simularon 15 modelos distintos para estimar el campo de temperaturas, variando la permeabilidad y los valores y distribución de fuentes de calor asociadas a zonas de fallas. Los resultados mostraron que el modelo 13 presentó la mejor concordancia, con errores normalizados estimados a partir de temperaturas simuladas y las registradas en los pozos del CGLTV, obteniendo una distribución del porcentaje de error de $\pm 10\%$, lo que indica una precisión aceptable. El algoritmo es adecuado para su implementación bajo el concepto de un sistema cerrado (líquido dominante) en medio poroso, donde solo se considera la transferencia de calor entre el sistema y su entorno, sin intercambio de materia. El algoritmo se puede adaptar a otros campos geotérmicos y optimizarse al incorporar información nueva del sitio de estudio a modelar.

Palabras clave: modelación numérica, acoplamiento presión-velocidad, transferencia de calor, yacimiento geotérmico

Abstract of the thesis presented **by Elizabeth Magaña Torres** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Earth Sciences with orientation in Geology.

Pressure-velocity Coupling Algorithms of 2D Heat Transfer Numerical Modelling in a Geothermal Reservoir

Abstract approved by:

Dr. Efraín Gómez Arias Thesis Director

Numerical modelling in geothermal fields requires multiple computational and mathematical tools to understand their complex dynamics. Numerical models allow the simulation of the different processes, such as fluid convection (velocity field), pressure and temperature fields, and solute transport through mass and energy balance. In this work, a numerical solution is developed to couple the velocity and pressure fields involved in the continuity, momentum, and energy conservation (temperature) equations in a two-dimensional geothermal reservoir. The methodology is based on the finite volume method (FVM) or control volume method (CVM). The computational implementation is carried out in Fortran, coupled with Python subroutines for generating graphics to visualize the modeled velocity and temperature fields in 2D. To evaluate the functionality of the algorithm, it was applied to the Las Tres Vírgenes Geothermal Field (LTVGF), where 15 different models were simulated to estimate the temperature field by varying permeability and the values and distribution of fault zones associated heat sources. The results indicated that Model 13 had the best overall performance and accuracy for each well, with normalized errors estimated from simulated and recorded temperatures, yielding an error percentage distribution of $\pm 10\%$, indicating acceptable accuracy. The algorithm is suitable for implementation under the concept of a closed systems (liquid-dominated) in porous medium, where only heat transfer occurs between the systems and its surroundings, with no mass exchange. The algorithm can be adapted to other geothermal fields and optimized by incorporating new information from the study site to be modeled.

Dedicatoria

A mi madre, María Carmen de la Soledad Torres Calderón.

Agradecimientos

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (Secihti), cuyo apoyo financiero fue primordial para concluir este trabajo y grado académico de forma satisfactoria.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE), por el tiempo que me permitió estar aquí y por el desarrollo académico que me otorgó. Al personal docente de la división de Ciencias de la Tierra del CICESE, quienes contribuyeron a mi formación durante la maestría.

A mi director de tesis, el Dr. Efraín Gómez Arias por su infinita paciencia, guía y apoyo a lo largo de la realización de este trabajo, así como al comité de tesis conformado por el Dr. Carlos Francisco Flores Luna, el Dr. Benjamín Barón Sevilla y el Dr. Antonio González Fernández por su apoyo, tiempo y esfuerzo en la revisión de esta tesis.

A Yahaira Castañeda Sidón de apoyo psicológico del CICESE por toda su ayuda y acompañamiento.

Al personal administrativo del CICESE, que están siempre pendientes presentes para atendernos a todos los alumnos y que con su trabajo hacen posible que todos lleguemos hasta el final.

A mi familia por su apoyo incondicional. Especialmente a mi mamá que, aunque de lejitos, siempre estuvo presente para darme apoyo emocional en todo momento para para que no me faltara nada. Sin ella no podría haber llegado hasta aquí

A mis compañeros y colegas, por su presencia y amistad durante la maestría.

A mis amigas Yunuén, Mónica y Ana Karina cuyo apoyo, palabras y cariño estuvo siempre presente desde la distancia.

Al Calpulli Kachora por su apoyo moral, emocional y espiritual, en especial a Diego, por su amistad, cariño, apoyo, servicio y profundo amor por el prójimo.

A Heart Horse, a mi querida amiga Carolina y a Tamarindo por contribuir enormemente en mi desarrollo personal.

Tabla de contenido

_	,			
ν	а	σι	n	а
•	u	8'		u

	Resume	en en es	spañol	ii
	Resume	en en in	glés	iii
	Dedicat	toria		iv
	Agrade	cimient	OS	v
	Lista de	e figuras		ix
	Lista de	e tablas .		xv
(Capítulo	1.	Introducción	1
	1.1	Antece	edentes	2
	1.2	Justific	ación	8
	1.3	Objetiv	/OS	8
	1.3.1	Obje	etivo general	8
	1.3.2	Obje	etivos específicos	8
(Capítulo	2.	Modelación de la transferencia de calor en un yacimiento geotérmico	9
	2.1	Transfe	erencia de calor	9
	2.1.1	Con	ducción	9
	2.1.2	Con	vección	10
	2.1.3	Radi	ación	10
	2.1.4	Tran	sferencia de calor en un yacimiento geotérmico	10
	2.2	Dinám	ica de fluidos computacional (DFC)	13
	2.2.1	Estr	uctura general de un código de DFC	15
	2.2.2	1.1	Pre-procesador	15
	2.2.2	1.2	Procesamiento (solver)	17
	2.2.2	1.3	Post-procesador	19
	2.2.2	Мос	delación en yacimientos geotérmicos	19

2.3	Ecuaciones de transferencia de calor en 2D	20
2.3.1	Ley de Fourier	21
2.3.2	Ecuación en estado estable	22
2.3.3	Ecuación en estado transitorio	23
2.4	Presión y velocidad	24
2.4.1	Ley de Darcy	25
2.5	Corrección de presiones	26
2.6	Convergencia	27
Capítulo	3. Metodología	28
3.1	Zona de estudio	28
3.1.1	Complejo Volcánico Las Tres Vírgenes	28
3.1.2	Estratigrafía	29
3.1.3	Geología estructural	31
3.1.4	Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes (CGLTV)	33
3.1.5	Base de datos del CGTV	34
3.2	Método de volumen finito (MVF) o de volumen de control (MVC)	39
3.2.1	Generación de la malla	39
3.2.2	Condiciones iniciales y de frontera	40
3.2.3	Discretización en 2D	43
3.3	Solución del sistema de ecuaciones con algoritmo de matrices tri-diagonales (TDMA)	49
3.4	Cálculo de las velocidades	56
3.5	Construcción de algoritmo en FORTRAN	58
3.5.1	Algoritmo de solución numérica	58
3.6	Construcción de programación PYTHON	60
3.6.1	Algoritmo de procesamiento y graficación de datos en PYTHON	61
Capítulo	4. Resultados	63
4.1	Campos de temperatura en el tiempo	67

vii

Anexos	Anexos		
Literatur	a citada	103	
Capítulo	5. Conclusiones y recomendaciones	101	
4.7	Discusión	. 98	
4.6	Error	. 92	
4.5	Modelo 13	. 87	
4.4	Modelo 11	. 82	
4.3	Modelo 5	. 77	
4.2	Modelo 2	. 72	

viii

Lista de figuras

Figura Página	3
Figura 1. Representación esquemática de un sistema geotérmico típico (tomado y modificado de Dickson & Fanelli, 2003)	
Figura 2. Mapa de localización del Complejo Volcánico Las Tres Vírgenes (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019)	
Figura 3. Mapa geológico de la zona de estudio. Se muestran los tres estratovolcanes que conforman el CVLTV (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019)	
Figura 4. Perfil Geológico del CVLTV que corresponde al perfil A-A' de la Figura 3. (PRB) Cinturón Batolítico Peninsular, (SL) Formación Santa Lucía, (EB) Basalto Esperanza, (Ag) Caldera El Aguajito, (VIc) Volcán El viejo, (Az) Estratocono El Azufre, (Vsc) Conos de escoria Virgen, (Vst) Estratovolcán La Virgen (Modificado de Avellán et al., 2018)	
Figura 5. a) Mapa tectónico local sintetizado y ubicación de los pozos. (AG) caldera El Aguajito, (RE) Caldera La Reforma. b) Ampliación de la zona central del CGLTV y señalada en la Figura 5a con un recuadro color rojo (Modificado de Antayhua Vera, 2017)	
Figura 6. Mapa de distribución y localización de los pozos del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes. Los pozos se señalan con puntos rojos (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019)	
Figura 7. Correlación litológica entre los pozos LV4A, LV11 y LV13D. Debajo se han indicado los rumbos entre los pozos respecto uno con otro y las distancias entre éstos están a escala. La línea gruesa que se encuentra abajo y a la derecha de cada pozo representa la zona de producción (Viggiano- Guerra et al., 2009)	
Figura 8. Modelo 2D de perfil geológico a partir de estudios gravimétricos en donde se muestran dos estructuras de fallas cerca de los pozos LV-13D (LV13) y LV-4 (Casallas-Moreno et al., 2021) 37	
Figura 9. Modelo numérico en 2D con 11 dominios geológicos del Complejo Volcánico Las Tres Vírgenes. El rectángulo rojo señala la falla incluida para este estudio (Modificado de Guerrero et al., 2021)	
Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019)	

Figura 13. Sistema de coordenadas de mallas desfasadas. Las coordenadas en letras mayúsculas indican la malla de nodos centrales. Las coordenadas en letras minúsculas indican la malla de las caras o límites de los VC. Las flechas indican la velocidad de flujo en las direcciones x (azules) y z (rojas) (u y v respectivamente) en la interfaz entre cada par de VC. Las letras E, W, T, B (east, west, top, bottom) mayúsculas, simbolizan posiciones de los nodos vecinos entorno a un nodo principal P, las letras e, w, t, b minúsculas, son las caras del VC que corresponde al nodo P, indicado en morado claro.
Figura 14. División del dominio en regiones de acuerdo con sus características geométricas
Figura 15. Volúmenes de control en una dimensión 51
Figura 16. Esquema de solución progresiva en una malla de un dominio 2D con algoritmo de matriz tri- diagonal (TDMA). El cálculo inicia en la primera columna con las ecuaciones (59) y (60), en orden de abajo hacia arriba
Figura 17. Esquema de solución progresiva en una malla de un dominio 2D con algoritmo de matriz tri- diagonal (TDMA). A partir de la columna $n = 2$, el cálculo se realiza con las ecuaciones (61) y (62) de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha
Figura 18. Esquema de solución progresiva en una malla de un dominio 2D con algoritmo de matriz tri- diagonal (TDMA). El cálculo inicia en la primera columna de abajo hacia arriba (A, B, C) con la ecuación (64) y posteriormente continua con la ecuación (63) de derecha a izquierda (D, E, F). 55
Figura 19. Diagrama de flujo de algoritmo de acople presión-velocidad codificado en FORTRAN para la modelación de transferencia de calor
Figura 20. Diagrama de flujo de algoritmo en PYTHON62
 Figura 21. Dominios simplificados para variaciones de permeabilidad k en el yacimiento por presencia de fallas para los modelos 3 y 4. Las zonas 2, 4 y 6 corresponden a las áreas de falla F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021), respectivamente. Las líneas punteadas negras corresponden a pozos proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).
Figura 22. Campos de temperatura simulados para distintos pasos de tiempo en el Modelo 1 (donde t = 0.5, 100, 150 y 200 a). Se simuló un tiempo total de t = 200 a con pasos de tiempo Δt = 0.5 a. El flujo de calor en las zonas de falla y en el dominio del yacimiento es constante con valor de HF = 1.5 W/m2
Figura 23. Campos de temperatura simulados para distintos pasos de tiempo en el Modelo 3 donde t = 0.5, 100, 150 y 200 a. Se simuló un tiempo total de t = 200 a con pasos de tiempo Δt = 0.5 a. El flujo de calor en las zonas de falla es una fuente constante con valor de HF = 2.1 W/m2.

Figura 24. Campos de temperatura simulados para distintos pasos de tiempo en el Modelo 5 (donde t = 1.0, 200, 300 y 400 a). Se simuló un tiempo total de t = 400 a con pasos de tiempo Δt =

1.0 a. El flujo de calor en las zonas de falla es una fuente constante con valor de $\mathrm{HF}=1.8~\mathrm{W/m2}.$ 70

- Figura 26. Perfil del campo de presiones [bar] del Modelo 2. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5$ a. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°C. El rectángulo en el centro representa el yacimiento simplificado y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).
- Figura 28. Perfil del campo de presiones [bar] del yacimiento del Modelo 2. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5$ a. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°C. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).
- Figura 29. Perfil del campo de temperaturas [°C] del yacimiento del Modelo 2. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5$ a. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°C. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).
- Figura 30. Perfil del campo de presiones [bar] de Modelo 5. Tiempo de simulación t = 400 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 1.0$ a. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°C. El rectángulo en el centro representa el yacimiento simplificado y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).

- Figura 32. Perfil del campo de presiones [bar] del yacimiento del Modelo 5. Tiempo de simulación t = 400 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 1.0 \text{ a}$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°C. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).
- Figura 33. Perfil del campo de temperaturas [°C] del yacimiento del Modelo 5. Tiempo de simulación t = 400 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 1.0$ a. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°C. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).
- Figura 34. Perfil del campo de presiones [bar] de Modelo 11. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5$ a. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°C. El rectángulo en el centro representa el yacimiento simplificado y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).
- Figura 36. Perfil del campo de presiones [bar] del yacimiento del Modelo 11. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°C. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).
- Figura 37. Perfil del campo de temperaturas [°C] del yacimiento del Modelo 11. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas

- Figura 38. Perfil del campo de presiones [bar] de Modelo 13. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5$ a. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°C. El rectángulo en el centro representa el yacimiento simplificado y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).
- Figura 39. Perfil del campo de temperaturas °C del Modelo 1. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5$ a. Se muestran las isotermas con cota cada 10°C. El rectángulo en el centro señala el yacimiento y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).
- Figura 40. Perfil del campo de presiones [bar] del yacimiento del Modelo 13. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°C. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).
- Figura 41. Perfil del campo de temperaturas [°C] del yacimiento del Modelo 13. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5$ a. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°C. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).

Figura 45. Distribución del porcentaje de error normalizado (%ErN) en cada modelo para el pozo LV4 del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes
Figura 46. Distribución del porcentaje de error normalizado (%ErN) en cada modelo para el pozo LVS del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes
Figura 47. Distribución del porcentaje de error normalizado (%ErN) en cada modelo para el pozo LVZ del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes97
Figura 48. Distribución del porcentaje de error normalizado (%ErN) en cada modelo para el pozo LV13 del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes

Lista de tablas

Tabla Página
Tabla 1. Compendio del desarrollo de ecuaciones gobernantes (continuidad, momento y energía) para modelación de yacimientos geotérmicos según diversos autores
Tabla 2. Comparación de los tres métodos de solución de problemas (Xamán & Gijón-Rivera, 2015).
Tabla 3. Comparación de ventajas y desventajas de tres métodos de discretización
Tabla 4. Datos de temperatura de pozos en el Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes. Las temperaturasfueron obtenidas a partir de inclusiones fluidas en muestras de roca. Qz: cuarzo; Ep: epidota; Cc:calcita (Verma et al., 2006).35
Tabla 5. Propiedades termodinámicas de rocas correspondientes a la estratigrafía del CampoGeotérmico Las Tres Vírgenes (Peña Beltrán, 2023)
Tabla 6. Notación para posiciones en sistema de coordenadas de mallas desfasadas de la Figura 13.45
Tabla 7. Ecuación de presión discretizada para cada una de las nueve regiones
Tabla 8. Descripción detallada de funciones en cada sección del código
Tabla 9. Valores de parámetros espaciales y termodinámicos iniciales generales para todos losmodelos
Tabla 10. Parámetros temporales para cada modelo ($a = a$ ños) 64
Tabla 11. Distribución de regiones de permeabilidad en términos de número de volúmenes de control (nvc) y orden de valores de permeabilidad k $(m2)$ para cada modelo. Las siete regiones tienen como límites superior e inferior, la cima $(nvcz = 92)$ y la base $(nvcz = 32)$ del yacimiento, respectivamente. La segunda columna indica la velocidad inicial del flujo (m/s) de cada modelo.
Tabla 12. Dominios de flujo de calor $[W/m^2]$ en regiones de fallas
Tabla 13. Valores mínimos y máximos de temperatura y presión simulados en los distintos dominiosdel Modelo 2.72
Tabla 14. Valores mínimos y máximos de temperatura y presión simulados en los distintos dominiosdel Modelo 5.77
Tabla 15. Valores de flujo de calor $[W/m2]$ como condición inicial utilizados en los diferentes dominios en las zonas de fallas del Modelo 11
Tabla 16. Valores mínimos y máximos de temperatura y presión simulados en los distintos dominiosdel Modelo 11.82

Tabla 17. Valores de flujo de calor $[W/m2]$ como condición inicial utilizados en los diferentes dominiosen las zonas de fallas del Modelo 13
Tabla 18. Valores mínimos y máximos de temperatura y presión simulados en los distintos dominiosdel Modelo 13.87
Tabla 19. Tabla comparativa de datos de temperaturas medidas en pozos (Verma et al., 2006) y temperaturas de los 15 modelos simulados en °C
Tabla 20. Tabla comparativa del porcentaje de error normalizado (%ErN) de las temperaturas simuladas de cada modelo con base en la Tabla 19. 94

El término *geotermia* se refiere, de manera general, al calor generado en el interior de la Tierra. En el campo de las Ciencias de la Tierra, la geotermia es la rama que estudia el origen y utilización de la energía térmica desplazada desde el interior de la Tierra hacia la superficie a través de roca o fluidos y que forma sistemas geotérmicos (Martínez-Safora, 2009).

Si bien toda la corteza alberga energía geotérmica y tiene un gradiente geotérmico promedio de 30°C/km, su extracción generalmente ocurre en regiones de la Tierra donde las condiciones geológicas favorecen el flujo de calor. Lo anterior resulta en anomalías positivas del gradiente geotérmico de la litósfera y en última instancia una producción de energía accesible y redituable. Esto ocurre en la mayoría de los países que presentan actividad magmática. Hoy en día, la energía geotérmica se considera una energía renovable tanto para la generación de electricidad como para su uso directo y tiene el potencial de proveer una fuente de energía segura, de largo plazo y con bajas emisiones de gases de efecto invernadero.

En el campo de la geotermia, puede resultar complicado tener un pleno entendimiento de los procesos fisicoquímicos de un sistema geotérmico a profundidad a partir de las manifestaciones y estructuras superficiales. Tal es el caso de los geotermómetros que, aunque son una buena herramienta de exploración como primera aproximación de las condiciones termodinámicas del yacimiento y de bajo costo, la aplicación de distintos geotermómetros en un sitio a veces es inconsistente. En los campos geotérmicos, a esta complejidad se suma la interacción del sistema geotérmico con los pozos de extracción y reinyección.

Una herramienta de investigación que resulta útil en la exploración y evaluación de yacimientos geotérmicos es la modelación numérica, la cual permite inferir diferentes escenarios de su comportamiento termodinámico, geoquímico y térmico para estimar su potencial geotérmico disponible. Los modelos numéricos son una herramienta que facilita el entendimiento de la interacción de los distintos procesos dinámicos como es la convección del fluido (campo de velocidades), los campos de presión y temperatura, el transporte de solutos (el balance de masa y energía), por mencionar algunos.

La aplicación de modelos numéricos de transferencia de calor y dinámica de fluidos computacional (CFD, por sus siglas en inglés) es indispensable para modelar yacimientos geotérmicos. Esto es, además, una necesidad tecnológica asociada al reto de incrementar el aprovechamiento de los recursos de mediana y

alta entalpía en la geotermia en México (Instituto Mexicano del Petróleo, 2017). En este sentido, es necesario continuar el desarrollo tecnológico, no solo de la modelación numérica, sino también generar programas computacionales (software) con interfaces visuales para el fácil manejo del usuario.

En la actualidad, se tiene gran acceso a la información y a códigos de software libre y esto ha dado lugar a la creación y mejoramiento constante de herramientas que facilitan la resolución de problemas en el campo de las ciencias. En particular, Python es un lenguaje de alto nivel de programación orientado a objetos que, recientemente, ha sido ampliamente utilizado por su facilidad de uso en la integración de sistemas e interpretación intuitiva. Su popularidad ha crecido ampliamente en la última década por su versatilidad y sintaxis explícita y es utilizado para la creación de software especializado para su aplicación en Ciencias de la Tierra (Krieger y Peacock, 2014; Pocasangre y Fujimitsu, 2018; Olguín-Martínez et al., 2022). Por otro lado, FORTRAN es un lenguaje de programación diseñado para realizar cálculos de ciencia e ingeniería computacionalmente exigentes y de alto rendimiento. La combinación del cálculo de alto rendimiento de FORTRAN con subrutinas versátiles de Python dará por resultado un software básico de visualización de modelaciones para generar resultados de forma gráfica. En este estudio se acoplarán los campos de velocidad de fluidos y de temperatura de un yacimiento geotérmico.

1.1 Antecedentes

La modelación numérica es fundamental para la toma de decisiones sobre la utilización estratégica de la energía geotérmica. Si bien se han explorado algoritmos de acoplamiento presión-velocidad, se han desarrollados en otros campos como el de la aeronáutica (Hillcoat & Hickey, 2025), el acondicionamiento climático en interior de edificios (Serra & Semiao, 2021) y en el estudio de la dinámica de fluidos computacional general (Ferreira et al., 2019; Vidal et al., 2016). En el caso de la geotermia, se han hecho numerosos estudios exploratorios termo-hidráulicos; para identificar zonas con potencial en reservorios en etapa de exploración (Darmawan et al., 2023), en reservorios con fracturas discretas (Yao et al., 2022), en sistemas geotérmicos de ciclo cerrado (Fallah et al., 2021; Christiansen et al., 2024), o para calcular la capacidad de almacenamiento de energía de un reservorio (Kim et al., 2010). Otro tipo de modelaciones incluyen la transferencia de calor con transporte de solutos (Peña-Beltrán et al., 2024). Sin embargo, en la revisión de la literatura no se identificaron casos de estudio que se centraran en conocer las características del movimiento del flujo y en cómo éste afecta a la transferencia de calor en un yacimiento geotérmico en explotación. En la Tabla 1 se incluyen algunas de las referencias anteriores, en donde se presenta el desarrollo de las ecuaciones de continuidad, momento y energía para un yacimiento geotérmico.

(1) Peña Beltrán (2023)Continuidad: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) + \nabla \cdot (\rho v) = 0$ $\rho = densidad, m/L^3$ Método de elementosSolución analítica de velocidades (x-y): $u = velocidad en dirección x, L/t$ Modelación 2D de transporte de solutosMétodo de elementos $\vec{F}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}i + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}j$ $\vec{F} = vector de velocidad resultante, L/t$ $x, y = coordenadas cartesianas, LModelación 2D detransporte de solutosAcoplamiento de ecuacionesgobernantes de masa ytransporte de calor.Transporte de solutos de advección-difusión:\mathcal{O}_k = concentración de elemento, m/L^3\frac{\partial}{\partial t} [ØL_k] = \nabla \cdot (@Dx \nabla C_k - uC_k)+ \nabla \cdot (@Dy \nabla C_k - vC_k + R_{ck})D = coeficiente de difusión de iones, L^2/tT = temperatura, TR = fuente en términos de temperatura,m/Lt^3Incorpora datos detemperatura, de pozos,tiempo de residencia delagua, tasa de flujo y fallas.\frac{\rho C_{cp} \partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u C_{cp} T) + \nabla \cdot (\rho v C_{cp} T)= \nabla \cdot (K_x VT) + \nabla \cdot (K_y \nabla T) + RC_{cp} = capacidad calorifica, L^2/t^2 T\frac{k^2}{m(L^2 T)}Validación conobservaciones en campo.$
$\begin{array}{c c} \rho = \operatorname{densidad}, m/L^{3} \\ t = \operatorname{tiempo}, t \\ u = \operatorname{velocidad} \operatorname{en} dirección x, L/t \\ \overline{\partial}_{dt}^{2} + \nabla \cdot (\rho u) + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \\ \text{Solución analítica de velocidades (x-y):} \\ \overline{f}(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^{2} + y^{2}}}i + \frac{x}{\sqrt{x^{2} + y^{2}}}j \\ \overline{f} = \operatorname{vetor de velocidad en dirección y, L/t} \\ \text{Transporte de solutos de advección-difusión:} \\ \frac{\partial}{\partial t} [@C_{k}] = \nabla \cdot (@Dx\nabla C_{k} - uC_{k}) \\ + \nabla \cdot (@Dy\nabla C_{k} - vC_{k} + R_{ck}) \\ \text{Conservación de energía:} \\ \frac{\rho - \operatorname{densidad}, m/L^{3}}{\frac{\rho}{\sqrt{x^{2} + y^{2}}}} + \nabla \cdot (\rho uC_{cp}T) + \nabla \cdot (\rho vC_{cp}T) \\ = \nabla \cdot (K_{x}\nabla T) + \nabla \cdot (K_{y}\nabla T) + R \end{array}$ $\begin{array}{c} \rho = \operatorname{densidad}, m/L^{3} \\ t = \operatorname{tiempo}, t \\ u = \operatorname{velocidad} en \operatorname{dirección x, L/t} \\ v = \operatorname{velocidad} en \operatorname{dirección x, L/t} \\ v = \operatorname{velocidad} en \operatorname{dirección x, L/t} \\ v = \operatorname{velocidad} en \operatorname{dirección x, L/t} \\ x,y = \operatorname{coordenadas cartesianas, L} \\ 0 = \operatorname{porosidad}, 1 \\ C_{k} = \operatorname{concentración de elemento, m/L^{3}} \\ D = \operatorname{coeficiente de difusión de iones, L^{2}/t} \\ T = \operatorname{temperatura, T} \\ R = \operatorname{fuente en términos de temperatura, m/Lt^{3}} \\ R = \operatorname{fuente en términos de temperatura, m/Lt^{3}} \\ C_{cp} = \operatorname{capacidad calorifica, L^{2}/t^{2}T} \\ = \nabla \cdot (K_{x}\nabla T) + \nabla \cdot (K_{y}\nabla T) + R \end{array}$ $\begin{array}{c} \mu = \operatorname{concutividad térmica del material, m/Lt^{3}} \\ mL/t^{3}T \end{array}$

Tabla 1. Compendio del desarrollo de ecuaciones gobernantes (continuidad, momento y energía) para modelación de yacimientos geotérmicos según diversos autores

Tabla 1. Continuación.

(2) Fallah et al. (2021)				
Continuidad en 1D $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = \dot{m}_{source}$ Balance de momento en 1D $\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} + f_g + f_w + \dot{M}_{source}$ Balance de energía en 1D $\frac{\partial \rho \left(e + \frac{1}{2}v^2 + gz\right)}{\partial t} + \frac{\partial \rho v \left(h + \frac{1}{2}v^2 + gz\right)}{\partial x}$ $= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \dot{q}_{wall} + \dot{H}_{source}$	(2) Fallah et al. t = tiempo, t x = distancia a lo largo de la dirección del pozo, L $\rho = densidad, m/L^3v = velocidad, L/t\dot{m}_{source} = \text{es la tasa de generación de}masa por unidad de volumen de unafuente, m/L^3 tp = \text{presión, } m/Lt^2f_g = \text{fuerza gravitacional por unidad de}volumen, m/L^2t^2f_w = \text{fricción en pared por unidad de}volumen, m/L^2t^2\dot{M}_{source} = \text{tasa de generación de}momento por unidad de volumen de lasfuentes, m/L^2t^2e = \text{energía interna } L^2/t^2g = \text{gravedad, } L/t^2z = profundidad vertical, Lh = coeficiente de transferencia decalor convectiva m/t^3T$	(2021) Solución de las ecuaciones de conservación transitorias para un sistema de tuberías en U de ciclo cerrado, con sistemas integrados de operación para la gestión de la presión en sistemas geotérmicos mejorados (EGS). Desarrollo de sub-modelos	Esquema numérico semi- implícito para resolver las ecuaciones de conservación en estado transitorio. Ecuaciones de conservación unidimensionales para el flujo de las tuberías y una malla bidimensional de transferencia de calor externa en la formación	
$= \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \dot{q}_{wall} + \dot{H}_{source}$ En donde <i>e</i> y <i>h</i> se definen como: $e = \int_{T_0}^T c_v(T) dT + e_0$ $h = e + p/\rho$	$h = coefficiente de transferencia de calor convectiva, m/t^3Tk = \text{conductividad térmica } mL/t^3TT = temperatura, T\dot{q}_{wall} = tasa de transferencia de calor externa por unidad de volumen a través de las paredes, m/Lt^3\dot{H}_{source} = tasa entrada de entalpía de fuente o sumidero por unidad de volumen, m/Lt^3c_v = capacidad calorífica específica en volumen constante, L^2/t^2T$	Desarrollo de sub-modelos para el cálculo de las propiedades del agua como función de la presión y temperatura.	de calor externa en la formación de roca. Validación con modelos de software especializado	

(3) Christiansen et al. (2024)				
Balance de masa: $S \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot (\varepsilon B \overline{Q}_{\rho})$ $S = (BS_0 + S_S)$ Balance de momento: $\varepsilon v = -Kf_{\mu}(\nabla h - \theta e)$ $K = \frac{k\rho_0 g}{\mu_0}$ $f_{\mu} = \frac{\mu_0}{\mu}$ Balance de energía: $\{B[\varepsilon \rho^f c^f + (1 - \varepsilon)\rho^s c^s]\}\frac{\partial T}{\partial t} + \varepsilon \rho^f c^f B v \cdot \nabla T$ $-\nabla \cdot (BA \cdot \nabla T) + B\varepsilon \rho^f c^f \overline{Q}_{\rho}(T - T_0)$ $= B[\varepsilon \rho^f \overline{Q^f}_T + (1 - \varepsilon)\rho^s \overline{Q^s}_T]$	S = término de almacenamiento, 1 h = cabeza hidráulica, L $\varepsilon = porosidad, 1$ B = grosor o profundidad, L v = vector de velocidad del fluido, L/t $\bar{Q}_{\rho} = sumidero o fuente de masa de fluido, T-1 S_0 = compresibilidad, L^{-1}S_s = almacenatividad, 1K = tensor de conductividad hidráulica f_{\mu} = función de relación de viscosidad, 1\theta = tasa de densidad o coeficiente de flotabilidad, 1 e = vector de unidad gravitacional, 1k = tensor de permeabilidad, L^2\rho_0 = densidad de fluido de referencia, M/L^3g = gravedad, L/t^2\mu_0 = viscosidad dinámica de referencia del fluido M/Lt\mu = viscosidad del fluido, M/L^3c^f = capacidad calorífica específica del fluido, L/T2 \theta\rho^s = densidad del sólido, M/L^3c^s = capacidad calorífica específica del sólido L/T2 \thetaT = temperatura, TA = tensor de dispersión hidrodinámica termal, ML/T2 \thetaT_0 = temperatura de referencia, \thetaQ_T = fuente o sumidero de calor, M/LT3$	Modelación de pozos de intercambio de calor en un sistema geotérmico convectivo de baja entalpía controlado por fallas.	Método de elementos finitos. Acoplamiento de ecuaciones gobernantes de masa y transporte de calor. Incorpora datos de temperatura de pozos, tiempo de residencia del agua, tasa de flujo y fallas. Validación con observaciones en campo.	

Tabla 1. Continuación.

Tabla 1. Continuación.

Ecuación de flujo de filtración en matriz: $\rho_{f} S_{m} = \text{coeficiente de almacenamiento de agua en la matriz, 1/Pa p_{p} = \text{presión de fluido local en medio poroso, m/Lt^{2} t = tiempo, t u_{m} = -\frac{k_{m}}{\eta_{f}} (\nabla p_{p} + \rho_{f} g \nabla z)$ $u_{m} = -\frac{k_{m}}{\eta_{f}} (\nabla p_{p} + \rho_{f} g \nabla z)$ Ley de Darcy: $Q_{m} n$ $u_{m} = -\frac{k_{m}}{\eta_{f}} (\nabla p_{p} + \rho_{f} g \nabla z)$ $k_{eg} = \text{permeabilidad, } L^{2}$ Método de elementos finitos. Método de elementos finitos. Ley de Darcy:		(4) Yao et al. (2	2022)	
$k_{eq} = \frac{Q_{out}n_f}{(p_{in} - p_{out})}$ En Donde $Q_{out} = \left(\sum u_f d_f + \int u_c dy + \int u_m dy\right)$ Transferencia de calor en matriz: $(\rho C)_{eff} = \frac{\partial T_s}{\partial t} + \rho_f C_f u_m \nabla T_s = \lambda_{eff} \nabla^2 T_s + q$ $\lambda_{eff} = (1 - \varepsilon)\lambda_s + \varepsilon \lambda_f$ $k_{eq} = \frac{Q_{out}}{(p_{in} - p_{out})}$ esencial para evaluar el flujo y proceso de transferencia de calor. La ley de Darcy se implementa para calcular el equivalente de permeabilidad (k_{eq}) en cuevas fracturadas de reservorios geotérmicos kársticos. $(\rho C)_{eff} = \frac{\partial T_s}{\partial t} + \rho_f C_f u_m \nabla T_s = \lambda_{eff} \nabla^2 T_s + q$ $\lambda_{eff} = (1 - \varepsilon)\lambda_s + \varepsilon \lambda_f$ La ley de Darcy se implementa para calcular el equivalente de permeabilidad (k_{eq}) en cuevas fracturadas de reservorios geotérmicos kársticos. La ecuación de Navier-Stokes se utiliza para describir el flujo en el metriz y fluido en interface, W/m^3	Ecuación de flujo de filtración en matriz: $\rho_f S_m \frac{\partial p_p}{\partial t} + \nabla(\rho_f u_m) = 0$ $u_m = -\frac{k_m}{\eta_f} (\nabla p_p + \rho_f g \nabla z)$ Ley de Darcy: $k_{eq} = \frac{Q_{out} \eta_f}{(p_{in} - p_{out})}$ En Donde $Q_{out} = \left(\sum u_f d_f + \int u_c dy + \int u_m dy\right)$ Transferencia de calor en matriz: $(\rho C)_{eff} \frac{\partial T_s}{\partial t} + \rho_f C_f u_m \nabla T_s = \lambda_{eff} \nabla^2 T_s + q$ $\lambda_{eff} = (1 - \varepsilon) \lambda_s + \varepsilon \lambda_f$	$\begin{split} \rho_f &= \text{densidad de fluido, } M/L^3 \\ S_m &= \text{coeficiente de almacenamiento de agua en la matriz, } 1/Pa \\ p_p &= \text{presión de fluido local en medio poroso, } m/Lt^2 \\ t &= \text{tiempo, } t \\ u_m &= \text{velocidad de filtracion en la matriz, } L/t \\ k_m &= \text{permeabilidad de la matriz, } mD \\ \eta_f &= \text{viscosidad hidrodinámica, } M/Lt \\ g &= \text{gravedad, } L/t^2 \\ z &= \text{vector unitario a lo largo de la dirección de la gravedad, } 1 \\ k_{eq} &= \text{permeabilidad, } L^2 \\ Q_{out} &= \text{flujo de volumen al extremo de salida, } L^2/t \\ p_{in}, p_{out} &= \text{presión en extremos de entrada y salida, } m/Lt^2 \\ (\Sigma) &- &= \text{cálculo de flujo en la salida de fractura } (\int) - &= \text{cálculo de flujo en la salida de matriz y cueva kárstica } (\rho C)_{eff} &= \text{entalpía efectiva, } J/(m^3K) \\ \lambda_{eff} &= \text{conductividad térmica efectiva } M/(m^3K) \\ s, f &= \text{subíndices para sólido y líquido } \\ \varepsilon &= \text{porosidad en matriz, } 1 \\ C &= \text{capacidad de calor específico, } J/(kgK) \\ \lambda &= \text{conductividad térmica, } mL/t^3T \\ q &= \text{intercambio de calor entre matriz y } \\ fluido en interface, W/m^3 \\ \end{split}$	Modelación numérica de procesos de acoplamiento termo-hidráulico en reservorios geotérmicos kársticos.	Método de elementos finitos. Basado en método de redes de cavidades y fracturas discretas. La conectividad de redes de fracturamiento es un parámetro esencial para evaluar el flujo y proceso de transferencia de calor. La ley de Darcy se implementa para calcular el equivalente de permeabilidad (k_{eq}) en cuevas fracturadas de reservorios geotérmicos kársticos. La ecuación de Navier-Stokes se utiliza para describir el flujo en el medio libre de cavidades

(5) Franco & Vaccaro (2014)			
	$\emptyset = porosidad, 1$		
Conservación de masa $\frac{\partial}{\partial t}(\emptyset \rho) + \nabla \cdot (\rho_l \vec{q}_l + \rho_v \vec{q}_v) = 0$	q = velocidad de fluido de Darcy, L/t	Simulación numérica de	
	$R = permeabilidad relativa, L^2$	reservorios geotérmicos	Ejemplos de casos de estudio de
	$ ho = {\sf densidad}, M/L^3$	como soporte para el diseño y la gestión de plantas	simulación numérica en reservorios geotérmicos
Conservación de momento (líquido y	$ec{k}=$ tensor de permeabilidad	geotérmicas y como	alrededor del mundo.
$\vec{q}_l = -\frac{R_l \vec{k}}{\mu_l} \cdot (\nabla p - \rho_l \vec{g})$	$k_m =$ conductividad térmica de la mezcla sólido-líquido, mL/t^3T	herramienta en la toma de decisiones.	
$\vec{q}_{\nu} = -\frac{R_{\nu}\vec{k}}{\mu_{\nu}} \cdot (\nabla p - \rho_{\nu}\vec{g})$	$\mu =$ viscosidad, M/Lt		
	E = energía interna de la mezcla líquido-vapor		
Conservación de energía	T = temperatura, T		
$\frac{1}{\partial t} [(1 - \phi)\rho_r E_r + \phi\rho E] + \nabla(\rho_l E_l \vec{q}_l + \rho_v E_v \vec{q}_v + p \vec{q}_l + p \vec{q}_v) = \nabla(k_m \nabla T) + (\rho_l \vec{q}_l + \rho_v \vec{q}_v) \cdot \vec{g}$	$p = \text{presión}, m/Lt^2$		
	t = tiempo, t		
	$g = gravedad, L/t^2$		

Tabla 1. Continuación.

1.2 Justificación

La modelación numérica de campo de temperaturas en yacimientos geotérmicos involucra un acoplamiento complejo de múltiples balances, por lo que el desarrollo de modelos integrales que incluyan el balance de masa (ecuación de continuidad), momento (presión y velocidades) y energía (transferencia de calor convectivo-conductivo) en un yacimiento permitirá una mejor comprensión del estado de equilibrio térmico y químico (transporte de solutos) del mismo (Versteeg & Malalasekera, 1995; Xamán & Gijón-Rivera, 2015; Peña Beltrán, 2023).

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Implementar algoritmos de acople (métodos semi-implícitos) para resolver los campos de velocidad y presión involucrados en las ecuaciones de continuidad, momento y conservación de energía (transferencia de calor) en 2D de un yacimiento geotérmico.

1.3.2 Objetivos específicos

- Acoplar las ecuaciones gobernantes de presión-velocidad a un código en FORTRAN para modelar la transferencia de calor convectivo-conductivo en 2D de un yacimiento geotérmico.
- Desarrollar un código numérico en PYTHON como herramienta gráfica para el campo de presiones, velocidades y temperaturas.
- Evaluar el algoritmo de la modelación numérica con registros de pozos de un campo geotérmico en México.

Capítulo 2. Modelación de la transferencia de calor en un yacimiento geotérmico

2.1 Transferencia de calor

La transferencia de calor es un proceso que ocurre en la naturaleza por la transmisión de energía en forma de calor, entre cuerpos materiales o sistemas como resultado de su diferencia de su temperatura y en donde el calor fluye del cuerpo de mayor temperatura hacia el de menor temperatura. Cuando dos sistemas se encuentran a la misma temperatura, el flujo de calor es nulo, lo que significa que ambos sistemas intercambian cantidades equivalentes de calor y con la misma velocidad (Çengel, 2007).

El calor es el resultado macroscópico de la cantidad de energía cinética de las moléculas en un sistema, las cuales se agitan y vibran. La velocidad promedio del movimiento de las moléculas es proporcional a la temperatura. Este movimiento está restringido por la energía de cohesión molecular, la cual es muy fuerte en un material en estado sólido, disminuye al pasar a estado líquido y disminuye aún más al llegar al estado gaseoso.

La transferencia de calor, como ciencia, busca entender y explicar los mecanismos para la transferencia de energía calorífica, así como predecir la rapidez en que ocurre este intercambio bajo condiciones determinadas y en diversas situaciones prácticas. Existen diferentes mecanismos de transferencia de calor, entre los cuales podemos distinguir tres: conducción, convección y radiación (Çengel, 2007).

2.1.1 Conducción

Si en el proceso de transferencia de calor existe un gradiente de temperatura en el sistema, la energía calorífica se transfiere de la región de mayor temperatura a la de menor temperatura. A nivel molecular, el proceso consiste en la propagación de vibraciones a lo largo de enlaces interatómicos. Cada oscilación tiene una cantidad de energía proporcional a su frecuencia (Holman, 1998).

La conducción de energía en medios sólidos o en un fluido en reposo depende de su geometría, simetría molecular y conductividad térmica (Contreras et al., 2015). Debido a que la litósfera está constituida

mayormente de roca, es decir, de materia en estado sólido, en esta predomina la transferencia de calor predominante es la conducción.

2.1.2 Convección

La convección ocurre en medios líquidos y gaseosos, debido a que sus moléculas tienen poca fuerza intermolecular y por lo tanto tienen libertad de movimiento para desplazarse de un lugar a otro. La energía contenida en estas moléculas se transfiere al medio circundante y la temperatura se homogeneiza, ya que el calor se redistribuye en un volumen dado. El fluido en contacto con una frontera caliente incrementa su temperatura a lo largo de la interfaz común, entonces el fluido se dilata y disminuye su densidad. Como resultado, se genera una fuerza de flotación en las partes más calientes, por lo cual el fluido asciende. El fluido desplazado es reemplazado por fluido circundante más frío y entonces se genera un transporte circulatorio denominado corriente o celda de convección, con corrientes ascendentes y descendentes. Por lo que, en la convección, no solo ocurre transferencia de calor, sino también transferencia de materia. En el interior del planeta, este tipo de transferencia de calor ocurre en la zona del manto, ya que la roca se encuentra parcialmente fundida debido a la alta temperatura. Aquí se generan celdas convectivas a gran escala y originan el movimiento de las placas tectónicas. Las celdas de convección también pueden formarse en el interior de una cámara magmática o en los fluidos de un yacimiento geotérmico.

2.1.3 Radiación

La transferencia de calor por radiación involucra un mecanismo físico diferente, el de la propagación de energía electromagnética. El transporte de energía ocurre por la emisión de ondas electromagnéticas entre cuerpos y el flujo ocurre aun cuando no hay contacto entre las partes de un sistema y estén separados por el vacío. Este mecanismo se vuelve más evidente a temperaturas altas y ocurre por radiación electromagnética. En la naturaleza, el planeta Tierra recibe radiación electromagnética proveniente del Sol y una parte de ésta se transforma en energía calorífica (Holman, 1998).

2.1.4 Transferencia de calor en un yacimiento geotérmico

Para comprender el mecanismo de transferencia de calor en el interior de un yacimiento geotérmico, se

debe definir, en primer lugar, el concepto de yacimiento geotérmico y conocer sus características principales.

Se entiende por yacimiento geotérmico como un volumen de rocas debajo de la superficie terrestre, que puede o no contener fluidos, y cuyas cualidades le permiten almacenar una cantidad de calor suficiente como para considerarlo explotable en términos de ganancia económica.

Un sistema geotérmico convencional puede ser descrito esquemáticamente como agua (salmuera) en convección en la zona superior somera de la corteza terrestre, que está confinada en un espacio finito (roca almacén) y transfiere calor desde una fuente de calor hacia un sumidero, que usualmente es hacia la superficie libre (Hochstein, 1990). De estas definiciones se puede concluir que conocer la transferencia de calor de un yacimiento geotérmico es crucial para determinar si es explotable o no, y de ser así, cómo debe ser aprovechado.

En la naturaleza, los yacimientos geotérmicos llegan a ser muy distintos entre sí, pero puede decirse de manera general que un sistema geotérmico típico se compone de tres partes: una fuente de calor, un acuífero y una capa sello que impide el escape de los fluidos hacia la superficie. Ejemplos de fuentes de calor podrían ser una cámara magmática, un cuerpo plutónico en enfriamiento o el gradiente natural de la corteza terrestre en zonas de adelgazamiento cortical. El acuífero es una formación litológica suficientemente permeable y/o porosa para almacenar agua y la capa sello es otra formación nocosa que sobreyace al acuífero y ésta es impermeable o es de permeabilidad menor que la del acuífero, por lo que impide la salida total o parcial del agua hacia la superficie. Si el sistema no satisface alguna de estas características, probablemente no sea un sistema económicamente redituable o deberá remediarse con avances tecnológicos como sucede al compensar la falta de permeabilidad mediante fracturamiento hidráulico (DiPippo, 2012). En la **Figura 1** se muestra un sistema geotérmico típico con las características antes descritas.

En general, los yacimientos geotérmicos difieren en su geometría, tamaño, profundidad, estratigrafía, temperatura, número y proporción de fases, sin mencionar que pueden situarse en una multitud de ambientes tectónicos y geológicos, así como relieves geográficos. De esto se puede decir que el mecanismo de transferencia de calor de un yacimiento geotérmico es el resultado de una serie de procesos físicos y químicos en los cuales influyen sus características y condiciones particulares.

En primera instancia se tiene que la fuente de calor, que se encuentra a profundidad, transfiere el calor a

la roca circundante por conducción. El calor continúa propagándose por la roca en dirección a la superficie hasta encontrarse con la zona del yacimiento o acuífero, el cual almacena fluidos. Cabe mencionar que estos fluidos generalmente son de origen meteórico y se filtran por gravedad a través del suelo y subsuelo por medio de fallas y fracturas para finalmente acumularse y confinarse en el acuífero. Cuando el agua del acuífero entra en contacto con el calor, esto ocasiona que el fluido aumente su temperatura y presión, lo cual resulta en la generación de celdas de convección que transportan el fluido más caliente y presurizado desde el fondo del yacimiento, a través del medio poroso, en dirección a la superficie hasta encontrar una salida, que puede ser una falla o fractura y, de esta manera, se libera la energía del sistema. Las salidas de estos fluidos se manifiestan de formas diversas: manantiales termales, salidas de vapor y/o de gas, pozas de lodo caliente y géiseres.



Figura 1. Representación esquemática de un sistema geotérmico típico (tomado y modificado de Dickson & Fanelli, 2003).

Para conocer la transferencia de calor de un yacimiento geotérmico se requiere de una inmersión en varios campos de la ciencia como la geología, geofísica, termodinámica, mecánica continua de medios porosos, geoquímica, etc.; así como de una serie de herramientas que van desde tomar datos en pozos hasta implementar métodos numéricos y programación de algoritmos computacionales, entre otras.

De manera minuciosa, también se estudian las propiedades físicas y químicas de las diferentes fases (líquido/vapor) del yacimiento para entender cómo éstas influyen en la transferencia de calor del sistema enter. Algunas de estas propiedades son porosidad, calor específico, viscosidad, densidad, compresibilidad, composición química, grado de saturación y fracturación de la roca, etc. El conocimiento de las propiedades de las partes que componen un yacimiento geotérmico es una base importante para realizar los balances de masa, momento y energía para la modelación de la transferencia de calor del sistema

2.2 Dinámica de fluidos computacional (DFC)

Actualmente existen una variedad de métodos teóricos y experimentales (analógicos) para entender muchos de los fenómenos asociados a los fluidos y a la transferencia de calor y masa en muchos sistemas físicos que existen tanto en la naturaleza como creados por el ser humano. Los problemas que involucran el flujo de fluidos y transferencia de calor y masa se reducen a la solución de modelos con formulaciones matemáticas basadas en sistemas de ecuaciones diferenciales parciales. En general estos problemas son complejos, y la aplicación de un método teórico lleva a una solución que puede o no representar apropiadamente al sistema físico, ya que lo que se estudia no es el sistema físico real sino un modelo matemático simplificado del mismo.

En el campo de los estudios experimentales o analógicos de mecánica de fluidos, se realizan prototipos a pequeña o gran escala y permiten estudiar los campos de presión, velocidad y/o temperatura. Sin embargo, pueden ser estudios económicamente costosos económicos que requieren una gran inversión de tiempo; para lo cual cabe mencionar que además se aplican solo para un sistema en específico.

Entre los métodos teóricos, se tienen los métodos analíticos y los numéricos. Los métodos analíticos suelen tener una solución complicada con funciones e integrales excesivas, por lo que no resulta práctico. Los métodos numéricos, en cambio, dan como resultado una serie de valores aproximados para una solución deseada y resuelven las ecuaciones de conservación de masa, momento, energía y especies químicas (transporte de masa).

Sin embargo, sin importar que haya suficiente validación de los resultados calculados, estos requieren, de ser posible, ser comparados con datos experimentales. Por otro lado, el diseño de estudios experimentales también requiere de cálculos preliminares. La proporción de estudio experimental y teórico depende de

la naturaleza del problema, objetivos de predicción, y otros aspectos como las limitaciones económicas (Patankar, 1980). Las ventajas y desventajas generales de los distintos métodos se muestran en la Tabla 2.

Técnica	Ventajas	Desventajas
Experimental (analógico)	Fenómeno más realista	 Equipo requerido Problemas de escala Dificultad de mediciones Costo operacional
Teórica	 Fenómeno más general Resultado en formato de una fórmula 	 Restricción de geometría y procesos físicos simples Generalmente se restringe a fenómenos lineales
Numérica	 Geometría y procesos físicos complicados Fenómenos no-lineales Evolución temporal del fenómeno 	 Errores de truncamiento Información de condiciones de frontera Costo computacional

Tabla 2. Comparación de los tres métodos de solución de problemas (Xamán & Gijón-Rivera, 2015).

Entre los estudios teóricos, existe la dinámica de fluidos computacional (DFC), que es una técnica poderosa que permite implementar diversos métodos y analizar los sistemas que involucran el flujo de fluido, transferencia de calor y fenómenos asociados como reacciones químicas en términos de simulación computacional.

Entre las ventajas que ofrece la DFC se tienen: a) reducción substancial de costos y tiempo; b) permiten estudiar sistemas de experimentos controlados que son difíciles o imposibles de replicar artificialmente; c) permiten estudiar sistemas bajo condiciones peligrosas y más allá de los límites de desempeño normales y; d) tienen un nivel ilimitado de detalle en los resultados (Versteeg & Malalasekera, 1995).

En la DFC existe una etapa preliminar de identificación y formulación de los fenómenos físicos y químicos que serán considerados en el problema de flujo. También deben enlistarse las suposiciones iniciales para reducir el nivel de complejidad y que el problema sea manejable sin descartar los aspectos importantes del problema a tratar. La convergencia, consistencia y estabilidad son tres conceptos que deben considerarse durante todo el proceso para determinar si un algoritmo cumple su objetivo.

Convergencia: Es la propiedad de un método numérico de producir una solución que se aproxima a la solución exacta conforme el espaciado del mallado o el tamaño del volumen de control se reducen a cero. De lo contrario, la solución se dice que es divergente.

Consistencia: Los esquemas numéricos producen sistemas de ecuaciones algebraicas que se puede demostrar que son equivalentes a la ecuación gobernante original conforme el espaciado de la malla tiende a cero. Esto implica que el error de discretización debe tender a cero conforme el tamaño del espacio de la malla también tienda a cero ($\Delta x, \Delta y \sim 0$). Si esto ocurre, se dice que la aproximación del método numérico es consistente con la ecuación diferencial original. Esta propiedad es crucial para mejorar la solución numérica.

Estabilidad: Durante la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales, se introducen diversos errores en casi todas las etapas del cálculo. Estos errores pueden ser amplificados durante el progreso del cálculo numérico hacia la solución correcta de las ecuaciones diferenciales parciales y causar oscilaciones extremas. Si lo anterior no ocurre, entonces se dice que el esquema de solución es estable.

2.2.1 Estructura general de un código de DFC

Los códigos de DFC están estructurados alrededor de algoritmos numéricos que pueden abordar problemas de flujo de fluidos. Generalmente estos códigos se estructuran, de forma general, en tres elementos principales: (a) pre-procesador, b) procesamiento (solver) y (c) post-procesador (Versteeg & Malalasekera, 1995).

2.2.1.1 Pre-procesador

En esta etapa, se preparan los datos de entrada para resolver el código del DFC. Se realizan actividades para estructurar el resto del programa como definir la geometría de la región de interés o dominio; generación de una malla para subdividir el dominio en volúmenes de control y que sea adecuada al problema; se seleccionan los procesos físicos y químicos que serán modelados; se definen las propiedades del fluido y se especifican las condiciones de frontera del dominio.

Las soluciones del problema se definen en los nodos centrales de cada uno de los volúmenes de control y la precisión y el tiempo de cálculo de las soluciones se determinan por la cantidad de volúmenes de control, es decir, la fineza de la malla. La optimización de los cálculos generalmente requiere de mallas irregulares, que suelen ser más finas en las zonas de mayor variación y más gruesas en las zonas donde no hay cambios importantes. Entre los aspectos principales de esta etapa, está el de establecer las condiciones de frontera y la condición inicial; de lo contrario, las ecuaciones diferenciales correspondientes tendrán numerosas soluciones. Las condiciones iniciales y de frontera deben especificarse correctamente porque de ello depende el resultado de la variable de interés. Las condiciones de frontera más comunes son: (1) condición de Dirichlet o de primera clase, (2) condición de Von Neumann o de segunda clase y (3) condición de Robin o de tercera clase.

- Condición de frontera de Dirichlet o de primera clase: Esta condición fija un valor de la variable Ø en los nodos frontera. Dicho valor puede ser constante o una función del espacio y/o tiempo.
- (2) Condición de frontera Von Neumann o de segunda clase: Esta condición impone en las fronteras, el gradiente de la variable Ø en dirección normal a la frontera igual a una función del espacio y/o tiempo.
 El gradiente puede ser también una constante de la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = A \tag{1}$$

donde n representa la dirección normal a la frontera y A es un valor constante conocido. Un ejemplo de esto es el gradiente de presión o geotérmico, el cual varía con la profundidad.

(3) Condición de frontera Robin o de tercera clase: Este tipo de condición de frontera es una combinación de la primer y segunda clase. La frontera analizada se encuentra gobernada por una ecuación diferencial de primer orden del tipo:

$$a \cdot \frac{\partial \emptyset}{\partial n} + b \cdot \emptyset = f \tag{2}$$

donde a y b son constantes diferentes y f es una función conocida de espacio y/o tiempo o un valor constante.

En fenómenos de transferencia de calor se tiene:

$$\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial n} = -h(T - T_{ext}) \tag{3}$$

donde λ representa la conductividad térmica y h es el coeficiente convectivo de transferencia de calor $[W/(m^{\circ}C)]$. Si λ y h son tratados como coeficientes, las condiciones de frontera de primera y segunda clase se obtienen como casos especiales al agrupar $\lambda = 0$ y h = 0.

2.2.1.2 Procesamiento (solver)

Dentro de esta sección del código, existen diferentes métodos de solución numérica. Los más ampliamente usados son el Método de Diferencias Finitas (MDF), de Elementos Finitos (MEF) y de Volúmenes Finitos (MVF), de los cuales se comparan sus ventajas y desventajas en la Tabla 3. En general, estos métodos base del solucionador cumplen una serie de pasos:

- 1. Una aproximación de variables de flujo desconocidas por medio de funciones simples.
- 2. Discretización por sustitución de las aproximaciones en las ecuaciones de flujo gobernantes y manipulaciones matemáticas subsecuentes. La discretización numérica se define como la sustitución de la ecuación diferencial que describe el fenómeno de estudio, por un conjunto de expresiones algebraicas con el uso de alguna de las técnicas numéricas mencionadas anteriormente.
- Solución de las ecuaciones algebraicas. Esto se realiza con un método de inversión de matrices para el sistema de ecuaciones algebraicas resultantes del proceso de discretización.

Las diferencias entre las técnicas de solución numérica radican en cómo se realizan las aproximaciones a las variables del flujo y los procesos de discretización.

Método de diferencias finitas (MDF)

Es un método de aplicación sencilla para casos de geometrías simples. Se inicia con la ecuación diferencial de una variable desconocida ϕ , la cual se describe por medio de nodos en una malla. En cada nodo, se realiza una aproximación a la ecuación diferencial reemplazando las derivadas parciales por aproximaciones finitas con series de Taylor o polinomios ajustados. Se obtienen aproximaciones de diferencias finitas de la primera y segunda derivada de ϕ . Como resultado se obtiene una ecuación algebraica para ϕ en cada nodo.

Una de las desventajas del MDF es que no cumple con la conservación de masa y resulta complicado para mallas irregulares. En resumen, de este método se derivan las ecuaciones y posteriormente se utilizan expansiones para realizar la aproximación. Se basa en la aproximación de la solución de un problema mediante funciones definidas localmente en pequeños subdominios llamados elementos. Estas funciones de aproximación describen la variación de la variable desconocida ϕ dentro de cada elemento. Dado que la solución exacta ϕ satisface la ecuación gobernante del problema, al sustituir la función aproximada en dicha ecuación, generalmente se introduce un error, conocido como residuo. Para minimizar este error, se emplea un procedimiento en el que el residuo se pondera mediante un conjunto de funciones de peso y luego se integra en el dominio del problema. Este proceso conocido como formulación débil o método de los residuos ponderados, permite transformar la ecuación diferencial original en un sistema de ecuaciones algebraicas que se resuelve para determinar los coeficientes de las funciones de aproximación. Como resultado, se obtiene una solución numérica que se aproxima a la solución exacta, con una precisión que depende de la discretización del dominio y de la elección de las funciones de aproximación.

Método de volúmenes finitos (MVF)

En este método (también conocido como Método de Volumen de Control -MVC-) se utiliza la forma integral de las ecuaciones de conservación. El dominio de interés se subdivide por medio de una malla en un número finito de volúmenes de control (VC) y las ecuaciones de conservación se aplican a cada VC. El centro de cada VC es un nodo en donde se calcula el valor de las variables y estos pueden interpolarse para obtener los valores de un parámetro ϕ en la superficie del VC, por lo que da como resultado una ecuación algebraica para cada VC que implica los valores de los nodos vecinos.

Entre los aspectos limitantes de este método se tiene que es complicado de utilizar en esquemas de alto orden en 3D. El MVF sigue varios pasos como se describen:

- 1) Integración de las ecuaciones gobernantes de flujo de fluido sobre todos los VC del dominio de solución.
- 2) Discretización al sustituir una variedad de aproximaciones finitas para los términos en las ecuaciones integradas, los cuales representan procesos, tales como la convección, difusión, fuentes y sumideros, por lo que convierte a las ecuaciones integrales en un sistema de ecuaciones algebraicas.
- 3) Solución de las ecuaciones algebraicas por un método iterativo.
Tabla 3. Comparación de ventajas y desventajas de tres métodos de discretización.

Método	Ventajas	Desventajas
Diferencias Finitas	 Es el más simple de implementar No requiere integración numérica 	 El dominio requiere malla No cumple con la conservación de la masa No es apropiado para problemas infinitos No es apropiado para mallas irregulares, lo que lleva a que en ocasiones se requieran de mallas muy finas El proceso de cómputo consume mucho tiempo.
Elementos Finitos	 Integración de funciones simples Matrices simétricas y escasas. Puede utilizarse para modelar en materiales complejos o heterogéneos. Apropiado para problemas de estructuras. 	 El dominio requiere malla No es apropiado para problemas infinitos Requiere relación integral del principio variacional o formulación de pesos residuales. Requiere de grandes recursos computacionales y poder de procesamiento. Los procesos de cómputo consumen mucho tiempo.
Volúmenes Finitos	 Requiere comparativamente menos memoria y poder de procesamiento. La conservación de masa, momento, energía y especies químicas es asegurada en cada volumen de control, por lo que los flujos tienen un mayor significado físico. Su formulación sencilla permite utilizar mallas irregulares 	 Geometrías irregulares requieren mayor esfuerzo La dificultad es mayor para crear esquemas de alto orden para estimar una solución en problemas no lineales en 3D.

2.2.1.3 Post-procesador

La etapa de post-procesamiento implica diversas herramientas de visualización. Ejemplos de ello incluyen disposición de malla y geometría de dominio, gráficas de campos vectoriales, curvas de nivel y de superficie de 2D y 3D y rastreo de partículas. Además de lo anterior, exportación de archivos de salida con diferentes formatos para futuro procesamiento externo al código.

2.2.2 Modelación en yacimientos geotérmicos

La modelación de yacimientos geotérmicos es necesaria porque hay ciertos procesos físicos y químicos que son imposibles de replicar experimentalmente de manera que se integren todas las variables. Estas modelaciones se realizan mediante una descripción matemática construida de manera correcta para obtener una solución numérica adecuada para el sistema.

Un modelo matemático para un yacimiento geotérmico incorpora información de: 1) procesos físicos y químicos en el yacimiento; 2) condiciones iniciales a través del sistema y condiciones de frontera; 3)

parámetros hidrogeológicos (porosidad, permeabilidad, etc.) con sus variaciones espaciales; 4) propiedades de los fluidos (densidad, viscosidad, entalpía, presión de vapor, etc.); 5) ubicación y tasas de flujo de las fuentes y sumideros (Ganguly & Kumar, 2012).

Esta información es esencial para resolver las ecuaciones fundamentales que gobiernan a un yacimiento geotérmico. La modelación debe, además, aproximarse a ciertos aspectos del sistema geotérmico como sus dimensiones, geometría y estratigrafía.

El flujo de los fluidos en el interior de un yacimiento geotérmico es un proceso complejo y estos fluidos pueden encontrarse en una o varias fases. Las ecuaciones gobernantes que describen este proceso se desarrollan en términos de ecuaciones de conservación o leyes de balance de masa, momento y energía.

2.3 Ecuaciones de transferencia de calor en 2D

La transferencia de calor tiene dirección y magnitud. La razón de la transferencia de calor por conducción en una dirección específica es proporcional al gradiente de temperatura, el cual es la razón del cambio de la temperatura con respecto a la distancia en esa dirección (Çengel, 2007).

Los procesos térmicos más importantes en el contexto de los sistemas de energía geotérmica son la conducción o difusión, la convección o advección y el almacenamiento de calor. Adicionalmente deben considerarse la radiación de calor, el calor latente y las fuentes y sumideros para la geotermia somera (intercambiadores de calor geotérmicos).

En problemas donde el flujo de fluido juega un papel significativo, siempre se deben tomar en cuenta los efectos de la convección. La conducción siempre ocurre junto con la convección en la naturaleza, por lo que se deben examinar los métodos para predecir la combinación de ambos mecanismos de transferencia de calor. La ecuación general de transporte incluye la parte conductiva y convectiva y funciona para una variable general Ø.

En su forma diferencial tenemos la ecuación:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\phi \boldsymbol{u}) = div(\Gamma\nabla\phi) + S_{\phi}$$
(4)

Tasa de incremento de
$$\emptyset$$
 del elemento fluidoTasa neta de flujo de \emptyset
fuera del elemento fluidoTasa de incremento
de \emptyset por difusiónTasa de incremento
de \emptyset por fuentes

Los términos convectivos se encuentran del lado izquierdo de la ecuación y el término de difusión (donde Γ =coeficiente de difusión) y la fuente se encuentran en el lado derecho. En la forma integral de esta ecuación se tiene:

$$\int_{CV} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV + \int_{CV} div(\rho\phi u) dV = \int_{CV} div(\Gamma\nabla\phi) dV + \int_{CV} S_{\phi} + dV$$
(5)

De esta expresión se obtienen diversas ecuaciones de transferencia de calor que obedecen a la Ley de Fourier.

2.3.1 Ley de Fourier

La transferencia de calor a través de un medio isótropo en una dirección específica es proporcional a la diferencia de temperatura entre uno y otro lado del medio y al área perpendicular a la dirección de la transferencia de calor, pero es inversamente proporcional a la distancia en esa dirección. Esto, expresado en forma diferencial es la Ley de Fourier de conducción de calor. Para entender esta ley, se parte de su forma unidimensional.

$$\frac{q}{A} \sim k \frac{\partial T}{\partial x} \tag{6}$$

Cuando se inserta la constante de proporcionalidad se tiene:

$$q = -kA\frac{\partial T}{\partial x} \tag{7}$$

donde q es la rapidez de transferencia de calor $[W/m^2]$ y $\partial T/\partial x$ es el gradiente de temperatura $[{}^{\circ}C/m]$ en la dirección del flujo de calor, k es la conductividad térmica del material $[W/m^{\circ}C]$ y el signo negativo se inserta para satisfacer el segundo principio de termodinámica en donde el calor debe fluir hacia abajo en el gradiente de temperatura del medio.

Tanto en la conducción como en la convección se puede aplicar la Ley de Fourier, aunque en el problema de convección se tiene que poner en juego la mecánica de fluidos a fin de establecer el gradiente de temperatura

2.3.2 Ecuación en estado estable

Se dice que la transferencia de calor en un medio es estacionaria o estable cuando la temperatura no varía con el tiempo. La ecuación de convección-difusión en estado estable puede ser derivada de la ecuación general de transporte (4) para una propiedad general Ø, eliminando el término transitorio. Entonces se tiene la expresión:

$$div(\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{\emptyset}) = div(\Gamma grad\boldsymbol{\emptyset}) + S_{\boldsymbol{\emptyset}}$$
(8)

En ausencia de fuentes, la convección y difusión estacionaria de una propiedad \emptyset en un campo de flujo unidimensional u está dada por:

$$\frac{d}{dx}(\rho \boldsymbol{u}\boldsymbol{\emptyset}) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\boldsymbol{\emptyset}}{dx} \right)$$
(9)

Para la transferencia de calor, la variable general \emptyset es reemplazada por la temperatura T (°C), y el coeficiente de difusión Γ se reemplaza por la conductividad térmica k. En este caso, además se reescribe para dos dimensiones x, y, con un campo de flujo bidimensional u, v. Entonces se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{d}{dx}(\rho \boldsymbol{u}T) + \frac{d}{dy}(\rho \boldsymbol{v}T) = \frac{d}{dx}\left(k\frac{dT}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(k\frac{dT}{dy}\right)$$
(10)

Esta expresión es la parte estacionaria de la ecuación general de transporte y es el punto de partida del proceso de discretización del balance de energía en el Método de Volumen de Control (MVC) o MVF.

2.3.3 Ecuación en estado transitorio

En problemas de transferencia de calor en estado transitorio, se considera la variación de la temperatura con el tiempo, así como la posición de los valores dentro de una malla. En la ecuación general de transporte (4) para una variable general \emptyset se tiene un término transitorio que representa la tasa de cambio, pero en flujos estacionarios es igual a cero, por lo que debe dejarse fuera durante el proceso de discretización. Esto no ocurre en problemas transitorios, pues debe de realizarse el procedimiento de integrar pasos de tiempo finitos a la ecuación general de transporte. Si reemplazamos \emptyset por la variable temperatura *T*, se obtiene una tasa de flujo de calor:

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t} \tag{11}$$

Considerar que:

$$Q = \rho C_P \Delta V \Delta T \tag{12}$$

donde tenemos densidad ρ [kg/m^3], calor específico C_P [$KJ/kg^\circ C$], cambio de temperatura ΔT [$^\circ C$], y cambio de volumen ΔV [m^3].

De la ecuación general de transporte en su forma unidimensional y de acuerdo con la Ley de Fourier, entonces se obtiene la siguiente expresión:

$$\rho C_P \Delta V \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + S \tag{13}$$

Al extender la ecuación general de transporte a dos dimensiones, se obtiene la ecuación de balance de energía de transferencia de calor conductivo-convectivo:

$$\frac{\rho C_P \Delta V \Delta T}{\partial t} = kA \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + kA \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial (u\rho T)}{\partial x} - \frac{\partial (v\rho T)}{\partial y} + S$$
(14)

2.4 Presión y velocidad

En general, se tiene que la convección-difusión de una variable escalar Ø depende de la magnitud y dirección del campo de velocidad local. Sin embargo, el campo de velocidad es desconocido. En problemas de dinámica de fluidos, el campo de velocidad se calcula como parte del proceso global de solución junto con las variables del flujo como temperatura y especies químicas.

La velocidad y la presión tienen tres componentes en este tipo de problemas y las ecuaciones de masa (continuidad) y momento son los modelos matemáticos correspondientes para conocer estas variables. Las ecuaciones de momento pueden ser derivadas de la ecuación general de transporte para obtener las componentes de la velocidad. Las ecuaciones gobernantes para un flujo estacionario laminar en un medio libre en dos dimensiones están dadas por:

Ecuación de momento en *x*:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial x} + S_u$$
(15)

Ecuación de momento en *y*:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vv) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial P}{\partial y} + S_v$$
(16)

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$
(17)

En el sistema de ecuaciones anterior se presentan dos problemas para la solución. En primer lugar, se tiene que el término convectivo contiene términos no lineales como $\frac{\partial}{\partial x}(\rho uu)$, que es la segunda derivada de ρu^2 . En segundo lugar, los componentes de velocidad se encuentran en cada ecuación de momento y en la ecuación de continuidad, por lo que las tres ecuaciones anteriores están acopladas. Cabe mencionar que la presión aparece en ambas ecuaciones de momento, pero no hay una ecuación (de transporte u otra) para la presión. Si se conoce el gradiente de presión, entonces el proceso de discretizar las ecuaciones de momento para obtener el campo de velocidad es similar al de la ecuación de balance de energía. Sin embargo, el campo de presiones también es parte de la solución global por lo que no se conoce de antemano. Para resolver este problema, se deben suponer escenarios (ej. flujos incompresibles con densidad constante) o de antemano resolver la ecuación general de transporte para otra variable Ø.

Sin embargo, en el sistema de ecuaciones anterior (Ecs. (15, (16 y (17), las ecuaciones de momento son válidas solo para medios libres, no para medios porosos como ocurre en los sistemas geotérmicos. De este sistema solo se considera la ecuación de continuidad, pero en su estado transitorio (Ec. (18).

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + S = \frac{\partial \rho \phi P}{\partial t}$$
(18*)

*En las secciones siguientes de la discretización, se cambiará la variable y por z, ya que se considera un plano en 2D con una componente vertical.

2.4.1 Ley de Darcy

Dado que las ecuaciones de momento en x y en y (Ecs. (15 y (16) describen flujos en medios libres, se debe utilizar otra ecuación que describa el movimiento de los fluidos en un medio poroso, la cual corresponde a la Ley de Darcy (Ec. (19).

La ley de Darcy es una adaptación de la ecuación de momento y describe las características del movimiento de un flujo multifase a través de un medio poroso. Esta ley es válida para un medio saturado, continuo, homogéneo e isótropo y donde las fuerzas inerciales son despreciables. Cuando no se tiene un campo de temperaturas, para reservorios geotérmicos se asume que la temperatura es uniforme con la profundidad.

$$u = -\frac{k}{\mu}(\nabla P - \rho g \Delta z) \tag{19}$$

donde u es la velocidad de flujo [m/s], k es la permeabilidad $[m^2]$, μ es la viscosidad [Pa/s], ∇P es gradiente de presión [bar], ρ es densidad $[kg/m^3]$, g la aceleración de la gravedad $[m/s^2]$, Δz es la profundidad [m].

El escenario real de un reservorio geotérmico generalmente presenta una red de numerosas fracturas interconectadas en el dominio, por lo cual no es viable una representación explícita de las fracturas. Al aplicar la Ley de Darcy en la modelación de un reservorio geotérmico, se asume que el medio fracturado es representado por un medio poroso singular con propiedades elegidas de tal manera que se pueda representar el medio fracturado original. Notar que la Ley de Darcy no es válida para describir un flujo a través de una fractura singular. En aras de un cómputo manejable, comúnmente se postula que la permeabilidad de la roca *k* depende principalmente de los cambios de porosidad.

2.5 Corrección de presiones

El algoritmo de solución del campo de presiones es iterativo y los cálculos residuales de la conservación global de las propiedades del flujo son muy pequeñas. El progreso hacia la solución de convergencia puede ser mejorado al seleccionar cuidadosamente los ajustes de factores de relajación variados. No existe un protocolo estricto para realizar estas decisiones, ya que los factores de relajación dependen del problema.

La ecuación de corrección de presión es susceptible a divergencia a menos que sea utilizado un factor de sub-relajación durante el proceso iterativo (Versteeg & Malalasekera, 2007). Es posible obtener presiones nuevas p^{new} mejoradas con la ecuación:

$$P^{new} = P^* + \alpha_p P' \tag{20}$$

en donde $\alpha P' = (P^*\alpha) + (1 - \alpha)(P^*)^{(\alpha-1)}$.

Entonces se tiene que:

$$P^{new} = P^* + \left[(P^*\alpha) + (1 - \alpha)(P^*)^{(\alpha - 1)} \right]$$
(21)

donde α_p es el factor de sub-relajación de la presión, el cual tiene valores $0 < \alpha_p < 1$.

Si tenemos que $\alpha_p = 1$, entonces el campo de presión supuesto p^* se corrige con p', pero éste puede ser muy grande para mantener cálculos estables, especialmente cuando el campo supuesto p^* está muy alejado de la solución final. Por otro lado, si se tiene que $\alpha_p = 0$ entonces no se estaría aplicando corrección alguna, lo cual es indeseable. Por lo que se debe definir un valor de factor de relajación α_p suficientemente grande para mejorar el proceso iterativo, pero suficientemente pequeño para asegurar un cómputo estable (Versteeg & Malalasekera, 2007). En resumen, los factores de relajación ayudan a estabilizar el flujo y, por lo tanto, a mejorar la transferencia de calor.

Existen otros métodos de corrección de la presión como el método SIMPLE (Patankar & Spalding, 1972), SIMPLER (Patankar, 1980) Y SIMPLEC (Van Doormal and Raithby, 1984). Sin embargo, este tipo de correcciones fueron desarrolladas para corregir la presión después de resolver el balance de momento para sistemas de ecuaciones de Navier-Stokes.

2.6 Convergencia

La convergencia de la solución numérica del campo de presión debe aproximarse hacia valores fijos en cada iteración. En este caso, los valores del campo de presión que están siendo calculados en la iteración k, se comparan con los del campo de presión calculado en la iteración anterior inmediata (k - 1). Se obtiene una diferencia entre ambos y se compara con el criterio de convergencia, que es básicamente un valor de error máximo que impide que los cálculos numéricos sean amplificados conforme el algoritmo avanza hacia la solución correcta del sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Esto implica que, durante el proceso iterativo, esta diferencia debe decrecer para eventualmente converger con un valor de error $\varepsilon = 0$.

El valor de error máximo que permita la estabilidad del algoritmo no siempre se conoce de antemano, por lo que depende de la experiencia del usuario o puede pasar por un proceso de prueba y error para establecerlo (Xamán & Gijón-Rivera, 2015). El criterio de convergencia es necesario para detener o terminar el proceso iterativo de manera automática y evitar que se genere un bucle o ciclo interminable de cálculos. De este criterio depende el número de iteraciones *k* realizadas durante el proceso de solución. Para este trabajo, se utilizó el Método de Volumen de Control para desarrollar el algoritmo, el cual fue codificado en lenguaje FORTRAN. Para desarrollar los modelos numéricos en 2D, el algoritmo se corrió con datos del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes (CGTV), el cual se encuentra actualmente en explotación y ha sido investigado intensamente en años recientes. Se generaron archivos de salida para los campos de velocidad, campos de presión y campos de temperatura, los cuales fueron procesados en lenguaje PYTHON para la generación de gráficos de perfiles en 2D.

3.1 Zona de estudio

Para el desarrollo de los modelos numéricos, se realizó revisión bibliográfica de el Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes (CGLTV) y se establecieron los parámetros y condiciones del modelo a partir de bases de datos.

El CGLTV está ubicado en la porción central de la Península de Baja California a 35 *km* al noroeste de la ciudad de Santa Rosalía y es uno de los cuatro campos geotérmicos operados por la Comisión Federal de Electricidad (CFE) en México. Geológicamente, el CGLTV se encuentra a lo largo del límite sureste del Complejo Volcánico Las Tres Vírgenes (CVLTV). La zona es afectada por cuatro sistemas de fallas, de las cuales algunas atraviesan el CGLTV. Las fallas El Viejo 1, El Viejo 2 y La Reforma fueron consideradas para los modelos de este estudio en términos de permeabilidad y generación de calor.

3.1.1 Complejo Volcánico Las Tres Vírgenes

El CVLTV se encuentra al suroeste de la caldera El Aguajito y está conformado por tres estratovolcanes cuaternarios orientados en dirección noreste-suroeste. Del más antiguo al más reciente se tiene El Viejo (~300 ka), El Azufre (~173 ka) y La Virgen (~112 ka) (Avellán et al., 2018). La localización del CVLTV se encuentra señalado con un cuadro verde en laFigura 2.

El Viejo: se encuentra en la zona norte del CVTV y tiene 1360 msnm. Es un cono de lava y está constituido por domos de lava dacíticos.

El Azufre: es un estratocono al suroeste de El Viejo. Está conformado por una secuencia de depósitos de bloques y cenizas en sus flancos.

La Virgen: es un estratovolcán cuya geomorfología es de un cono simétrico. Su edificio lo constituyen al menos 12 unidades de flujos de lavas y domos dacíticos y andesíticos.

La distribución espacial y temporal de los tres edificios volcánicos refleja la migración del magmatismo en este complejo (Avellán et al., 2018). La distribución y localización de estas estructuras se muestra en el mapa geológico de la Figura 3.



Figura 2. Mapa de localización del Complejo Volcánico Las Tres Vírgenes (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).

3.1.2 Estratigrafía

Los edificios volcánicos del CVLTV yacen sobre una secuencia que consiste en cuatro unidades geológicas, de las más vieja a la más joven: el Cinturón Batolítico Peninsular, Formación Santa Lucía (FSL), Basalto Esperanza y la Ignimbrita de la Caldera el Aguajito. Estas unidades, junto con el CVLTV, se muestran en la secuencia litológica de la Figura 3 y el perfil geológico de la Figura 4.



Figura 3. Mapa geológico de la zona de estudio. Se muestran los tres estratovolcanes que conforman el CVLTV (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).

Cinturón Batolítico Peninsular (~99 Ma): Este cinturón se describe como una formación intrusiva de 800 km de longitud desde el sur de California hasta la porción central de Baja California. En el CGLTV, este batolito fue perforado a los 1129 m de profundidad en el pozo exploratorio LV-2, aunque Viggiano-Guerra et al., (2009) reportaron un rango de 950 a 1150 m de profundidad. Esta unidad está conformada por granodiorita de biotita y hornblenda con mineralogía plagioclasa> cuarzo > biotita > feldespato potásico > hornblenda= esfena > apatito, con aumento del contenido de augita después de 1250 m de profundidad

(Viggiano-Guerra et al., 2009). Las muestras de roca de esta formación presentan textura fanerítica cristalina de color blanco rosáceo con algunos cristales de tamaño medio de color gris-verdoso (Avellán et al., 2018).

Formación Santa Lucía (~21.6 Ma): Esta formación pertenece al grupo Comondú con rocas expuestas en las Sierras de San Francisco y Santa Lucía. Sin embargo, por su proximidad al CVLTV, estas rocas corresponden a la FSL. De acuerdo con las descripciones de la perforación del pozo LV-2, esta unidad estratigráfica tiene 364 m de espesor y sobreyace al Cinturón Batolítico Peninsular. Viggiano-Guerra et al. (2009) reportaron una profundidad de entre 650 y 950 m para esta unidad. Las rocas de esta formación se presentan como depósitos masivos caóticos de fragmentos de lava angulares y subangulares en una matriz de ceniza.

Basalto Esperanza: (~7.6 Ma): Esta unidad cubre la FSL y presenta una cima de superficie plana En general presenta vesículas grandes y columnas basálticas casi verticales cubiertas por tefras de la unidad Virgen (Avellán et al., 2018).

Caldera el Aguajito (~1.1 Ma): Esta unidad está conformada por ignimbritas dacíticas cubierta de domos dacíticos. Se encuentran al norte y noreste del CVLTV (Avellán et al., 2018).



Figura 4. Perfil Geológico del CVLTV que corresponde al perfil A-A' de la Figura 3. (PRB) Cinturón Batolítico Peninsular, (SL) Formación Santa Lucía, (EB) Basalto Esperanza, (Ag) Caldera El Aguajito, (Vlc) Volcán El viejo, (Az) Estratocono El Azufre, (Vsc) Conos de escoria Virgen, (Vst) Estratovolcán La Virgen (Modificado de Avellán et al., 2018).

3.1.3 Geología estructural

El conocimiento de la geología estructural del CVLTV es clave, ya que los fluidos geotérmicos se encuentran en las fracturas y fallas del plutón granodiorítico Cretácico que se encuentra debajo del complejo volcánico

(Verma et al., 2006). El CVLTV se emplazó en una zona tectónicamente activa. La configuración tectónica actual tiene su origen en la transición de la zona de subducción a sistemas de rifts asociados a la apertura del Golfo de California en el Mioceno (~12 Ma) (Conly et al., 2005; Fletcher & Munguia, 2000; Fletcher et al., 2007; Seiler et al., 2010). Avellán et al. (2018) dividen la zona en cinco bloques morfoestructurales: caldera El Aguajito, el CVTV, Sierra Reforma, Sierra de Santa Lucia y la Sierra de San Francisco; los cuales están divididos por cinco fallas principales: Falla El Campamento, Falla El Mezquital, Falla El Bonfil, Falla Reforma y Falla Cimarrón.

Las fallas de la zona se agrupan en cuatro sistemas tectónicos principales con orientaciones NW-SE, N-S, NE-SW, E-W. Estos sistemas fueron identificados por Benton et al. (2011), Gómez y Rocha (2009) y Macías & Jiménez (2012, 2013). Antayhua Vera (2017) presenta un mapa tectónico sintetizado de los diversos estudios de esta zona (Figura 5).



Figura 5. a) Mapa tectónico local sintetizado y ubicación de los pozos. (AG) caldera El Aguajito, (RE) Caldera La Reforma. b) Ampliación de la zona central del CGLTV y señalada en la Figura 5a con un recuadro color rojo (Modificado de Antayhua Vera, 2017).

El sistema NW-SE se asocia a la apertura del Golfo de California y lo representan las fallas normales La Virgen, El Azufre, El Volcán, El Viejo 1, El Viejo 2, Las Víboras, El Partido, Mezquital y Bonfil. En este sistema

existen algunas fallas conjugadas menores con buzamientos opuestos. El CVLTV fue emplazado por medio del sistema de fallas N-S, que consiste de fallas laterales con componentes normales y al cual pertenecen las fallas El Colapso y El Cimarrón. Al sistema NE-SW pertenecen las fallas El Álamo y El Aguajito, que limitan al CVLTV en la parte sur y norte, respectivamente, por sistemas de horts y graben. El Sistema E-W se asocia a movimientos transpresivos y transtensivos, sin embargo, no representan de forma importante al CVLTV.

De las fallas mencionadas, las Falla El Cimarrón y la Falla Reforma son las más próximas al CVLTV (Figura 3). La Falla Reforma es una falla lateral derecha y se muestra superficialmente en varios segmentos. Su componente vertical es muy pequeña y su desplazamiento total tanto vertical como horizontal son poco evidentes. La Falla Cimarrón tiene orientación NNE-SSW y disecta la Caldera El Aguajito. Controla el patrón de drenaje formando el cañón de El Azufre, con segmentos de hasta 300 m de profundidad. Esta estructura continúa en dirección SSE, controlando la ubicación y emplazamiento de los volcanes del CVLTV a lo largo de la fisura eruptiva (Avellán et al., 2018).

3.1.4 Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes (CGLTV)

El CGLTV se extiende a lo largo del límite sureste del CVLTV, abarca un área de aproximadamente 57 km² y tiene una elevación promedio de 720 msnm. Entre los aspectos importantes de su caracterización es que es dominantemente líquido, y sus aguas han sido clasificadas como cloruradas-sódicas. La actividad geotérmica superficial se presenta como fumarolas y manifestaciones ácido-sulfatadas con temperaturas entre 53 y 98 °C (Viggiano-Guerra et al., 2009). Las temperaturas más altas reportadas para este campo se encuentran entre 250 y 275 °C. El área geotérmicamente más activa se presenta al sureste del volcán El Azufre. Sin embargo, la fuente de calor está relacionada a la cámara magmática del volcán La Virgen (Tello-Hinojosa et al., 2005). De acuerdo con diversas observaciones petrológicas y modelaciones de tomografía sísmica, hay evidencia de que el reservorio de calor magmático se encuentra a una profundidad entre 5 y 9 km (Guerrero et al., 2021).

El CGLTV es uno de los cinco campos geotérmicos en explotación en México y es un proyecto geotermoeléctrico operado por la Comisión Federal de Electricidad (CFE). Su exploración inició en 1982 y el primer pozo (LV-2) fue perforado en 1986. La primera planta entró en operación en Julio de 2001. Actualmente tiene una capacidad instalada de 10 MW y se encuentra en una región que son forma parte de la red eléctrica nacional.

En total, hay 11 pozos en el CGLTV. Actualmente, los pozos LV3, LV4, LV6 y LV13 son pozos de producción; los pozos LV7 y LV8 son pozos de reinyección y los pozos restantes son de monitoreo (LV1, LV2, LV5, LV10 y LV11). El pozo LV13 es el más profundo (2414 m) y se ha registrado una temperatura de 274°C (Barragán et al., 2010). La distribución de los pozos se muestra en el mapa de la Figura 6.



Figura 6. Mapa de distribución y localización de los pozos del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes. Los pozos se señalan con puntos rojos (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).

3.1.5 Base de datos del CGTV

Verma et al. (2006) realizaron un estudio integral de geoquímica y temperaturas previas a la explotación en el CGLTV, basados en geoquímica de aguas de manantiales termales y pozos domésticos, fluidos de pozos geotérmicos, inclusiones fluidas en minerales y datos geotermométricos. Las temperaturas de geotermometría de Na/K, SiO_2 , H_2/Ar y CO_2/Ar , arrojaron temperaturas ~260-265°C, que fueron consistentes con las temperaturas de homogenización de inclusiones fluidas (Tabla 4). **Tabla 4.** Datos de temperatura de pozos en el Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes. Las temperaturas fueron obtenidas a partir de inclusiones fluidas en muestras de roca. Qz: cuarzo; Ep: epidota; Cc: calcita (Verma et al., 2006).

Profundidad vertical		Elevación	B.dimented	Rango de temperatura	Temperatura promedio de
(m)		(msnm)	winerai	de homogenización (°C)	homogenización (°C)
Pozo LV1	(longit	ud: 112.560388 °	W, latitud: 27	.526996°N, elevación	de cabeza de pozo: 741
110		631	Oz	101	101
110		631	Cc	100	100
250		491	Oz	116-126	121
500		241	Cc	148-163	152
600		141	Сс	162-171	165
700		41	Сс	170-188	177
1057		-316	Qz	219-238	231
1150		-409	Qz	232-264	243
1325		-584	Qz	219-252	225
1500		-759	Qz	219-252	223
1633		-892	Qz	220-222	221
1695		-954	Ер	213-234	217
Pozo LV3	(longit	ud: 112.55591°W	7, latitud: 27.5	06226°N, elevación d	e cabeza de pozo: 720
570		150	Сс	109	
580		140	Сс	114-127	118
920		-200	Qz	125-126	125.5
1202		-482	Qz	226-237	230
1202		-482	Ер	227-264	241
1647		-927	Qz	231-235	232
1830		-1110	Qz	256-271	261
1940		-1220	Qz	242-259	247
1940		-1220	Ер	237-259	243
2000		-1280	Qz-Cc	261-263	262
2150		-1430	Qz-Cc	261-263	261
Pozo LV4	(longit	ud: 112.555948°V	V, latitud: 27.5	506421°N, elevación o	le cabeza de pozo: 720
800		-80	Qz	194-197	196
900		-180	Qz	201-210	207
1101		-365	Qz	214-220	217
1191		-455	Qz	217-225	222
1311		-560	Qz	237-244	242
1588		-820	Cc	236-249	243
2452		-1647	0z	287-292	290
Pozo LV5	(longitu	d: 112.560800°W	7, latitud: 27.5	26747°N, elevación d	e cabeza de pozo: 739
405		334	Сс	146-158	150
498		241	Qz	164-170	168
606		133	0z	180-187	185
706		33	Cc	189-196	194
895		-156	Qz	215-217	216
895		-156	Cc	189-196	194
1182		-443	Qz	231-250	244
1272		-533	Qz	230-250	248
1745		-1006	Qz	265-276	270
Pozo LV7	(longit	ud: 112.533518°V	V, latitud: 27.4	97852, elevación de	cabeza de pozo: 523
1098	. 0	-575	Oz	213-217	215
1203		-680	Oz	223-230	227
1250		-727	0z	207-213	211
			· ·		

Profundidad vertical (m)	Elevación (msnm)	Mineral	Rango de temperatura Temperatura pro de homogenización (°C) homogenización		
Pozo LV8 (longit	ud: 112.543706°W, la	6°W, latitud: 27.519266°N, elevación de cabeza de pozo: 725 msnm)			
399	326	Сс	155-159	157	
500	225	Сс	154-165	160	
598	127	Сс	172-185	180	
700	25	Сс	168-169	169	
890	-165	Qz	187-195	191	
985	-260	Qz	200-212	207	

Tabla 4. Continuación.

Adicionalmente a los datos anteriores, Izquierdo (2006) reportó una temperatura de 260°C a 1800 m de profundidad en el pozo LV13.

Todos los pozos geotérmicos interceptan el basamento a una profundidad de ~1000 m del cabezal del pozo, el cual consiste en un plutón de granodiorita de biotita y corresponde al Cinturón Batolítico Peninsular (Verma et al., 2006). Lo anterior es consistente con el estudio de Viggiano-Guerra et al. (2009), en donde muestra una correlación litológica de algunos de los pozos (**Figura 7**). También se encontró que las diferentes unidades litológicas han interactuado con el fluido geotérmico sódico-clorurado a partir de al menos 473 m de profundidad (Viggiano-Guerra et al., 2009).



Figura 7. Correlación litológica entre los pozos LV4A, LV11 y LV13D. Debajo se han indicado los rumbos entre los pozos respecto uno con otro y las distancias entre éstos están a escala. La línea gruesa que se encuentra abajo y a la derecha de cada pozo representa la zona de producción (Viggiano-Guerra et al., 2009).

Para graficar los modelos, se trazó un perfil A-B (**Figura 10**) en el cual se incluyeron tres fallas. Dos de éstas son normales con dirección NW-SE, son paralelas entre si y tienen buzamiento en dirección NE. Pasan a pocos metros al sur del pozo LV13, y los pozos LV3/LV4, respectivamente, y coinciden con las fallas trazadas como El Viejo 2 y El Viejo 1 (Figura 5b) (Antayhua Vera, 2017) y con las reportadas en el estudio sísmico y gravimétrico de Casallas-Moreno et al. (2021), el cual se muestra en la **Figura 8**.

Se incluyó una tercera falla inferida, la cual es lateral derecha con orientación NW-SE y con buzamiento en dirección SW. La línea del plano de la falla pasa a ~500 m al suroeste del pozo LV8 (Guerrero et al., 2021) y se muestra en la **Figura 9**. Esta falla podría corresponder a un segmento escalonado de la Falla la Reforma como se muestra en la Figura 5 (Antayhua Vera, 2017).



Figura 8. Modelo 2D de perfil geológico a partir de estudios gravimétricos en donde se muestran dos estructuras de fallas cerca de los pozos LV-13D (LV13) y LV-4 (Casallas-Moreno et al., 2021).



Figura 9. Modelo numérico en 2D con 11 dominios geológicos del Complejo Volcánico Las Tres Vírgenes. El rectángulo rojo señala la falla incluida para este estudio (Modificado de Guerrero et al., 2021).

Finalmente, se trazó un perfil A-B representativo del CGLTV utilizado para la generación de los modelos. Este intersecta siete pozos, de los cuales se tienen datos de temperatura de tres de ellos, el resto de los datos se proyectaron perpendicularmente al perfil. El Perfil A-B se muestra en la **Figura 10**.



Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).

3.2 Método de volumen finito (MVF) o de volumen de control (MVC)

El método de volúmenes finitos permite discretizar y resolver numéricamente ecuaciones diferenciales. El MVF requiere establecer valores de frontera del dominio y puede aplicarse a geometrías complejas ajustando la fineza de la malla, es decir, el número de VC y por lo tanto la exactitud de los cálculos. El MVF tiene como una ventaja a resaltar, la conservación integral de propiedades que son relevantes como la masa, momento, energía y especies químicas. La solución obtenida satisface en forma exacta las ecuaciones de conservación consideradas, independientemente del tamaño de la malla.

3.2.1 Generación de la malla

La división del dominio en volúmenes de control discretos es el primer paso del Método de Volumen Finito. La utilización de una malla facilita el mapeo y la transformación de coordenadas de una región irregular a una regular sobre el dominio computacional aplicado al MVF. Entre las consideraciones para generar una malla adecuada, se incluyen la eficiencia computacional del código, discretización adecuada del espacio físico donde ocurre el fenómeno, la geometría acoplada entre la malla y las fronteras del dominio, la densidad de puntos nodales en ciertas regiones de acuerdo con los altos y bajos gradientes de la variable analizada.

Para este trabajo se consideró una malla estructurada regular, la cual es naturalmente mapeada en elementos de una matriz. Los nodos vecinos con respecto a un nodo central dentro de la malla en el espacio físico son los elementos vecinos en la matriz de la malla. Por lo que para un arreglo bidimensional (i, j), resulta conveniente ya que almacena las coordenadas de los puntos para una malla en 2D.

La malla tiene dimensiones de 180 x 132 volúmenes de control con Δx y Δz = 25m (un total de 23760 nodos o volúmenes de control). El modelo propuesto en la Figura 11 es un dominio de 4500 m de largo y 3300 mde profundidad y se estableció que el yacimiento, que se encuentra señalado en rojo, tiene 3000 m de longitud, un espesor de 1500 m a una profundidad de 1000 m, la cual corresponde a la profundidad en que la unidad de granodiorita fue perforada en los pozos (Viggiano-Guerra et al., 2009) y donde se ubicaría el yacimiento.



Figura 11. Dominio del modelo dividido en volúmenes de control (VCs) con una malla regular de 180 x 132 nodos. El yacimiento se encuentra dentro del dominio (rectángulo rojo) cuyos límites se encuentran entre los nodos 30 y 150 en *x*, y 32 a 92 en *z*.

3.2.2 Condiciones iniciales y de frontera

Para este trabajo se asumió como sistema cerrado un yacimiento líquido-dominante, es decir, no hay entrada y tampoco salida de fluidos. La transferencia de calor en el interior del yacimiento es convectiva y al exterior es conductiva. El campo de velocidades iniciales supuestas u^* y v^* simula dos celdas convectivas circulares. Los vectores de ambas celdas van en direcciones opuestas con respecto una de la otra; el flujo del yacimiento desciende por los lados y asciende por el centro (Figura 12).

Se consideraron las propiedades termodinámicos de las diferentes rocas en todo el dominio de acuerdo con la geología del CGLTV, las cuales se muestran en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**

(/ / / / / / / / / / / / / / / / / / /		×××××//	1111111111	×××××××××××××××××	***
111111111111111111111111111111111111111	******	XXXXX//	1111111111	<i>/////////////////////////////////////</i>	***
111111111111111111111111111111111111111	******	XXXXX//	1111111111	111111111111111111111111111111111111111	×××
(/ / / / / / / / / / / / / / / / / / /		XXXXX//	1111111111	111111111111111111111	× × ×
111111111111111111111111111111111111111		XXXXX//	1111111111	11111111111111111111	111
111111111111111111111111111111111111111		XXXXX//	1111111111	11111111111111111111	111
111111111111111111111111111111111111111	******	X X X X / /	1111111111	111111111111111111	111
111111111111111111111111111111111111111		X X X X 7 7	1111111111	111111111111111111	111
111111111111111111111111111111111111111		×××××	1111111111	111111111111111111111111111111111111111	111
111111111111111111111111111111111111111		* * * * / / /			111
111111111111111111111111111111111111111				***********	111
111111111111111111111111111111111111111					111
111111111111111111					111
					111
					111
		111111			111
					111
					111
					111
					* * *
		111133	11111111111	~~~~~~~~~	* * *
		111133		~~~~~~~~~~	1.1.1.
		111133	*********	~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~~	1.1.1
111111111111111111111111111111111111111		1111 XX	*********		1.1.1
		1111XX	*********		111
, , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	*******	///////	*********		111
*********************	~ ~ ~ / / / / / /	///////	1111111111		111
, , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	~ ~ ~ / / / / / /	///////	11111111111	*************	111
())))))))))))))))))))))))))))))))))))))	~ ~ ~ ~ / / / / /	///////	11111111111	**************	///
())))))))))))))))))))))))))))))))))))))		///////		***************	///
())))))))))))))))))))))))))))))))))))))		///////		***************	///
(A,A,A,A,A,A,A,A,A,A,A,A,A,A,A,A,A,A,A,			*********		111

Figura 12. Campo de velocidades iniciales supuestas u^* y v^* dentro del yacimiento, el cual simula dos celdas convectivas circulares de velocidad uniforme y con direcciones contrapuestas entre ambas celdas. Los colores corresponden a la dirección de vector resultante.

Unidad	Litología	z [m]	Espesor [<i>m</i>]	ρ [kg/m ³]	C_P^T [$KJ/kg^\circ C$]	k [W/mk°C]	Ø [%]
Aluvión	Andesitas porfídicas de hornblenda y augita, dacitas y riolitas	0	100	2400	1020	1.68	0.15
Complejo Volcánico Las Tres Vírgenes	Unidades volcánicas: domos dacíticos y flujos de lavas, depósitos de bloques y ceniza.	100	150	2010	840	1.65	0.10
Formación Santa Lucía	Andesitas, andesitas basálticas y basaltos	250	300	2360	1151	1.87	0.05
Formación Santa Lucía	Basaltos	550	100	3100	840	2.80	0.22
Grupo Comondú	lgnimbritas y tobas vítreo-cristalinas	650	250	2360	840	1.40	0.18
Grupo Comondú	Areniscas de colófano	900	250	2800	920	1.68	0.14
Basamento	Granodiorita	1150	2150	2761	950	3.20	0.11

Tabla 5. Propiedades termodinámicas de rocas correspondientes a la estratigrafía del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes (Peña Beltrán, 2023).

donde z: profundidad; ρ : densidad de la roca; C_P^T : calor específico; k: conductividad térmica; \emptyset : porosidad.

Se tiene una temperatura ambiente en superficie de $T = 25^{\circ}C$. El gradiente geotérmico convencional corresponde a $\nabla T = 30^{\circ}C/km$, pero al ser una zona con anomalía geotérmica, se consideró un gradiente de $\nabla T = 140^{\circ}C/km$, propuesto para el CGLTV por Peña-Beltrán (2023). Para el interior del yacimiento, se consideraron campos homogéneos de temperaturas y presiones iniciales supuestas de $T^* = 100^{\circ}C$ y $P^* = 100 \ bar$, respectivamente. Dado que en el exterior del yacimiento no hay convección, los campos de presiones iniciales supuestos fueron $P^* = 0 \ bar$. Las presiones en las fronteras están dadas por la siguiente expresión, donde R es un factor de relajación:

$$P_F = (\mu_{H2O} * g * z * 0.00001) * R$$
(22)

Las propiedades y parámetros termodinámicos del fluido (agua) como el volumen específico ($VolEsp_{H2O}$), densidad (ρ_{H2O}), calor específico (CP_{H2O}) y viscosidad (μ_{H2O}), se calculan en función de la temperatura (T) (Çengel & Boles, 2011):

$$VolEsp_{H20} = 0.000901197185132796 + (0.00000445146344058546T) + 0.000000342517187013603T^{2}) + (0.00000000084856695714478T^{3})$$
(23)

De la ecuación (23) se tiene que la densidad del agua ρ_{H2O} es la función inversa su volumen específico $(VolEsp_{H2O})$ (Çengel & Boles, 2011):

$$\rho_{H2O} = \frac{1}{VolEsp_{H2O}} \tag{24}$$

El calor específico del agua está dado por la siguiente expresión (Fallah et al., 2021):

$$CP_{H20} = (0.00016T^3) - (0.0235T^2) + (1.61T) + 4170.0$$
(25)

Para viscosidad del agua μ_{H20} , se tomaron valores de referencia de Fallah et al. (2021). Para $T < 100^{\circ}C$ se tiene una viscosidad μ_{H20} :

$$\mu_{H20} = (0.00000000327 T^4) - (0.0000000914 T^3) + (0.000000993 T^2) - (0.0000556 T) + 0.00179$$
(26)

Mientras que para temperaturas mayores $T > 100^{\circ}C$ se tiene para la viscosidad μ :

$$\mu_{H20} = (-0.0000000002025 T^3) + (0.000000172T^2) - (0.00000518 T) + 0.000644$$
(27)

Para la conductividad hidráulica *K* se tiene (Witherspoon et al., 1979a, 1979b):

$$K = \frac{(k \ \rho_{H20} \ \phi \ \Delta x \ \Delta y)}{\mu_{H20} \Delta x}$$
(28)

3.2.3 Discretización en 2D

La discretización es una parte medular en el método de volumen de control. Se integra la ecuación gobernante entre los límites del VC en su respectivo nodo central y de este modo se obtiene la ecuación discreta correspondiente. Con el fin de simplificar la notación de coordenadas de la malla, los límites de los VC con respecto a su nodo central tienen notación W (oeste por su sigla en inglés) y E (este) en el eje x, mientras que en el eje z se tiene la notación T (top = cima) y B (bottom = base o fondo).

Ecuación de continuidad en una dimensión:

$$\frac{\rho \emptyset \,\partial P}{\partial t} = \nabla(\rho u) + S \tag{29}$$

Sustitución de ecuación de Darcy en la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho \phi P}{\partial t} = -\nabla \left(\rho \frac{k}{\mu} (\nabla P - \rho g \Delta z) \right) + S$$
(30)

Si se extiende a dos dimensiones, que en este caso son en las direcciones x y z, donde Δz representa la profundidad del dominio, entonces se tiene:

$$\frac{\partial \rho \phi P}{\partial t} = -\nabla \left[\left(\frac{\rho k}{\mu} (\nabla P_x - \rho g \Delta x) \right) + \left(\frac{\rho k}{\mu} (\nabla P_z - \rho g \Delta z) \right) \right] + S$$
(31)

donde el término $\rho g \Delta x = 0$ debido a que la gravedad g no actúa en dirección horizontal x.

Entonces se tiene:

$$\frac{\partial \rho \phi P}{\partial t} = \frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + \frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \rho g \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \right) + S$$
(32)

Ecuación de estado para densidad, donde C_f es la compresibilidad del fluido:

$$\rho = \rho^0 e^{C_f (P - P^0)}$$
(33)

Ecuaciones de compresibilidad de fluido C_f , de roca C_R y total C_T :

$$C_f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \quad \therefore \quad \rho C_f = \frac{\partial \rho}{\partial P} \tag{34}$$

$$C_R = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial P} \quad \therefore \quad \phi C_R = \frac{\partial \phi}{\partial P}$$
 (35)

$$C_T = C_f + \frac{\phi^0}{\phi} C_R \tag{36}$$

Del término del lado izquierdo de la ecuación de continuidad se tiene:

$$\frac{\partial \rho \phi P}{\partial t} = \left(\phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \frac{\partial P}{\partial t}$$
(37)

Al sustituir todas las variables se tiene que la ecuación incluye un parámetro de compresibilidad total C_T en el término transitorio:

$$\left(\emptyset \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \emptyset}{\partial t}\right) \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) + \frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \rho g \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}\right) + S$$
(38)

$$\left(\phi\rho C_f + \rho\phi C_R\right)\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\right) + \frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \rho g \frac{\partial^2 z}{\partial z^2}\right) + S$$
(39)

$$\rho \phi C_T \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right) + \frac{\rho k}{\mu} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \rho g \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} \right) + S$$
(40)

Finalmente se obtiene la ecuación de derivadas parciales, donde se tiene como variables la densidad de fluido ρ_f , conductividad hidráulica $K = \frac{\rho k}{\mu}$, área A y el coeficiente $\alpha = \rho \phi C_T \Delta V$.

$$\alpha \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{KA}{\partial x} (\partial^2 P) + \frac{KA}{\partial z} (\partial^2 P - \rho_f g \partial^2 z) + S$$
(41)

Para realizar esta discretización, se considera el sistema de coordenadas de mallas desfasadas como se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, cuya notación simplificada se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, cuya notación simplificada se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, cuya notación simplificada se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, cuya notación simplificada se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, cuya notación simplificada se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**, cuya notación simplificada se muestra en la **Figura 13.** Sistema de coordenadas de mallas desfasadas. Las coordenadas en letras mayúsculas indican la malla de las caras o límites de los VC. Las flechas indican la velocidad de flujo en las direcciones x (azules) y z (rojas) (u y v respectivamente) en la interfaz entre cada par de VC. Las letras E, W, T, B (east, west, top, bottom) mayúsculas, simbolizan posiciones de los nodos vecinos entorno a un nodo principal P, las letras e, w, t, b minúsculas, son las caras del VC que corresponde al nodo P, indicado en morado claro.

Tabla 6.



Figura 13. Sistema de coordenadas de mallas desfasadas. Las coordenadas en letras mayúsculas indican la malla de nodos centrales. Las coordenadas en letras minúsculas indican la malla de las caras o límites de los VC. Las flechas indican la velocidad de flujo en las direcciones x (azules) y z (rojas) (u y v respectivamente) en la interfaz entre cada par de VC. Las letras E, W, T, B (east, west, top, bottom) mayúsculas, simbolizan posiciones de los nodos vecinos entorno a un nodo principal P, las letras e, w, t, b minúsculas, son las caras del VC que corresponde al nodo P, indicado en morado claro.

 Tabla 6. Notación para posiciones en sistema de coordenadas de mallas desfasadas de la ¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.

Nodo	Nodos vecinos					
principal	East (este)	West (oeste)	Top (cima)	Bottom (base)		
P = I, J	E = I + 1, J	W = I - 1, J	T = I, J + 1	B = I, J - 1		
	e = i + 1, J	w = i, J	t = I, j + 1	b = I , j		

De la ecuación de derivadas parciales se puede obtener una ecuación discretizada para aplicar métodos numéricos con una simbología simplificada. En términos de coordenadas (x, z) se tiene que el coeficiente $K_{(e,w,t,b)}$ representa la conductividad hidráulica (Ley de Darcy) expresada como $K_{(x,z)} = \frac{\rho_{(x,z)}k_{(x,z)}}{\mu_{(x,z)}}$, por lo tanto, la ecuación discretizada tiene la siguiente forma:

$$\alpha(P_{P} - P^{0}) = \left[\frac{K_{e}A_{P}}{x_{E} - x_{P}}(P_{E} - P_{P}) - \frac{K_{w}A_{P}}{x_{P} - x_{W}}(P_{P} - P_{W})\right] + \left[\frac{K_{t}A_{P}}{z_{T} - z_{P}}(P_{T} - P_{P}) - \frac{K_{b}A_{P}}{z_{P} - z_{B}}(P_{P} - P_{B})\right] - \left[\left(\frac{K_{t}A_{P}}{z_{T} - z_{P}}\rho_{f}g(z_{T} - z_{P}) - \left(\frac{K_{b}A_{P}}{z_{P} - z_{B}}\rho_{f}g(z_{P} - z_{B})\right)\right] + S$$
(42)

Entonces se obtiene la ecuación general para el cálculo de la presión.

$$\left(\alpha + \frac{K_e A_P}{x_E - x_P} + \frac{K_w A_P}{x_P - x_W} + \frac{K_t A_P}{z_T - z_P} + \frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \right) P_P$$

$$= \left(\frac{K_e A_P}{x_E - x_P} \right) P_E + \left(\frac{K_w A_P}{x_P - x_W} \right) P_W + \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P} \right) P_T + \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \right) P_B$$

$$- \left[\frac{K_t A_P}{z_T - z_P} \rho_{fT} g z_T - \frac{K_t A_P}{z_T - z_P} \rho_{fP} g z_P - \frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \rho_{fP} g z_P + \frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \rho_{fB} g z_B \right]$$

$$+ \alpha P^0 + H$$

$$(43)$$

El desarrollo de la ecuación anterior en términos de posición en un volumen de control respecto a un sistema de coordenadas de mallas desfasadas (iError! No se encuentra el origen de la referencia.) se encuentra en el Anexo A.

Para discretizar la ecuación general de presión (Ec. (43), se establecieron nueve regiones dentro del dominio de acuerdo con la geometría de los nodos respecto a las fronteras y nodos vecinos. Esta división facilita el proceso de evaluación numérica de las ecuaciones y posterior implementación en un código de programación. La región 1 comienza en la esquina inferior izquierda del diagrama, la numeración continúa de izquierda a derecha y de la base a la cima como se muestra en el diagrama de la Figura 14. También se muestra la geometría de las distintas

regiones en términos de diferencias de distancias entre un nodo principal *P* con sus nodos vecinos (*E*, *W*, *T*, *B*), o de un nodo principal *P* a una frontera (*Ef*, *Wf*, *Tf*, *Bf*). De esta manera se obtiene una ecuación discretizada para cada región con un sistema de coordenadas simplificadas (Figura 14. División del dominio en regiones de acuerdo con sus características geométricas.



Tabla 7).

Figura 14. División del dominio en regiones de acuerdo con sus características geométricas.

 Tabla 7. Ecuación de presión discretizada para cada una de las nueve regiones.

Región Ecuación discretizada	
$\left(\alpha + \frac{K_e A_P}{x_E - x_P} + \frac{2K_w A_P}{x_P - x_W} + \frac{K_t A_P}{z_T - z_P} + \frac{2K_b A_P}{z_P - z_B}\right) P_P$	
$= \left(\frac{K_e A_P}{x_E - x_P}\right) P_E \qquad + \left(\frac{2K_w A_P}{x_P - x_W}\right) P_{WF} \qquad +$	$\left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) P_T$
$+ \left(\frac{2K_b A_P}{z_P - z_B}\right) P_{BF} - \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) \rho_{fT} g z_T +$	$\left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) \rho_{fP} g z_P \tag{44)a}$
$+\left(\frac{K_bA_P}{Z_P-Z_B}\right)\rho_{fP}gz_P + \alpha P^0 + H$	

$$\begin{pmatrix} \alpha + \frac{K_e A_P}{x_E - x_P} + \frac{K_w A_P}{x_P - x_W} + \frac{K_t A_P}{z_T - z_P} + \frac{2K_b A_P}{z_P - z_B} \end{pmatrix} P_P \\
= \left(\frac{K_e A_P}{x_E - x_P} \right) P_E + \left(\frac{K_w A_P}{x_P - x_W} \right) P_W + \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P} \right) P_T \\
+ \left(\frac{2K_b A_P}{z_P - z_B} \right) P_{BF} - \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P} \right) \rho_{fT} g z_T + \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P} \right) \rho_{fP} g z_P \\
+ \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \right) \rho_{fP} g z_P + \alpha P^0 + H$$
(44)b

Tabla 7. Continuación.

Región	Ecuación discretizada	
3	$\begin{split} \left(\alpha + \frac{2K_eA_P}{x_E - x_P} + \frac{K_wA_P}{x_P - x_W} + \frac{K_tA_P}{z_T - z_P} + \frac{2K_bA_P}{z_P - z_B}\right)P_P \\ &= \left(\frac{2K_eA_P}{x_E - x_P}\right)P_{EF} + \left(\frac{K_wA_P}{x_P - x_W}\right)P_W + \left(\frac{K_tA_P}{z_T - z_P}\right)P_T \\ &+ \left(\frac{2K_bA_P}{z_P - z_B}\right)P_{BF} - \left(\frac{K_tA_P}{z_T - z_P}\right)\rho_{fT}gz_T + \left(\frac{K_tA_P}{z_T - z_P}\right)\rho_{fP}gz_P \\ &+ \left(\frac{K_bA_P}{z_P - z_B}\right)\rho_{fP}gz_P + \alpha P^0 + H \end{split}$	(44)c
4	$\begin{split} \left(\alpha + \frac{K_e A_P}{x_E - x_P} + \frac{2K_w A_P}{x_P - x_W} + \frac{K_t A_P}{z_T - z_P} + \frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) P_P \\ &= \left(\frac{K_e A_P}{x_E - x_P}\right) P_E \qquad + \left(\frac{2K_w A_P}{x_P - x_W}\right) P_{WF} \qquad + \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) P_T \\ &+ \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) P_B \qquad - \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) \rho_{fT} g z_T \qquad + \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) \rho_{fP} g z_P \\ &+ \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) \rho_{fP} g z_P \qquad - \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) \rho_{fB} g z_B \qquad + \alpha P^0 \qquad + H \end{split}$	(44)d
5	$\begin{aligned} \left(\alpha + \frac{K_e A_P}{x_E - x_P} + \frac{K_w A_P}{x_P - x_W} + \frac{K_t A_P}{z_T - z_P} + \frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) P_P \\ &= \left(\frac{K_e A_P}{x_E - x_P}\right) P_E \qquad + \left(\frac{K_w A_P}{x_P - x_W}\right) P_W \qquad + \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) P_T \\ &+ \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) P_B \qquad - \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) \rho_{fT} g z_T \qquad + \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) \rho_{fP} g z_P \\ &+ \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) \rho_{fP} g z_P \qquad - \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) \rho_{fB} g z_B \qquad + \alpha P^0 \qquad + H \end{aligned}$	(44)e

$$\begin{pmatrix} \alpha + \frac{2K_{e}A_{P}}{x_{E} - x_{P}} + \frac{K_{w}A_{P}}{x_{P} - x_{W}} + \frac{K_{t}A_{P}}{z_{T} - z_{P}} + \frac{K_{b}A_{P}}{z_{P} - z_{B}} \end{pmatrix} P_{P} \\ = \left(\frac{2K_{e}A_{P}}{x_{E} - x_{P}}\right) P_{EF} + \left(\frac{K_{w}A_{P}}{x_{P} - x_{W}}\right) P_{W} + \left(\frac{K_{t}A_{P}}{z_{T} - z_{P}}\right) P_{T} \\ + \left(\frac{K_{b}A_{P}}{z_{P} - z_{B}}\right) P_{B} - \left(\frac{K_{t}A_{P}}{z_{T} - z_{P}}\right) \rho_{fT} g z_{T} + \left(\frac{K_{t}A_{P}}{z_{T} - z_{P}}\right) \rho_{fP} g z_{P} \\ + \left(\frac{K_{b}A_{P}}{z_{P} - z_{B}}\right) \rho_{fP} g z_{P} - \left(\frac{K_{b}A_{P}}{z_{P} - z_{B}}\right) \rho_{fB} g z_{B} + \alpha P^{0} + H$$

$$(44)f$$

Tabla 7. Continuación.

Región	Ecuación discretizada	
7	$\begin{split} \left(\alpha + \frac{K_e A_P}{x_E - x_P} + \frac{2K_w A_P}{x_P - x_W} + \frac{2K_t A_P}{z_T - z_P} + \frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) P_P \\ &= \left(\frac{K_e A_P}{x_E - x_P}\right) P_E + \left(\frac{2K_w A_P}{x_P - x_W}\right) P_{WF} + \left(\frac{2K_t A_P}{z_T - z_P}\right) P_{TF} \\ &+ \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) P_B + \left(\frac{2K_t A_P}{z_T - z_P}\right) \rho_{fP} g z_P + \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) \rho_{fP} g z_P \\ &- \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) \rho_{fB} g z_B + \alpha P^0 + H \end{split}$	(44)g
8	$ \begin{pmatrix} \alpha + \frac{K_e A_P}{x_E - x_P} + \frac{K_w A_P}{x_P - x_W} + \frac{2K_t A_P}{z_T - z_P} + \frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \end{pmatrix} P_P $ $ = \left(\frac{K_e A_P}{x_E - x_P} \right) P_E + \left(\frac{K_w A_P}{x_P - x_W} \right) P_W + \left(\frac{2K_t A_P}{z_T - z_P} \right) P_{TF} $ $ + \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \right) P_B + \left(\frac{2K_t A_P}{z_T - z_P} \right) \rho_{fP} g z_P + \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \right) \rho_{fP} g z_P $ $ - \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \right) \rho_{fB} g z_B + \alpha P^0 + H $	(44)h
9	$ \left(\alpha + \frac{2K_e A_P}{x_E - x_P} + \frac{K_w A_P}{x_P - x_W} + \frac{2K_t A_P}{z_T - z_P} + \frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \right) P_P $ $ = \left(\frac{2K_e A_P}{x_E - x_P} \right) P_{EF} + \left(\frac{K_w A_P}{x_P - x_W} \right) P_W + \left(\frac{2K_t A_P}{z_T - z_P} \right) P_{TF} $ $ + \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \right) P_B + \left(\frac{2K_t A_P}{z_T - z_P} \right) \rho_{fP} g z_P + \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \right) \rho_{fP} g z_P $ $ - \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \right) \rho_{fB} g z_B + \alpha P^0 + H $	(44)i

3.3 Solución del sistema de ecuaciones con algoritmo de matrices tri-diagonales (TDMA)

El TDMA es un algoritmo que resuelve el sistema de ecuaciones no lineales, el cual se realiza posteriormente a la discretización de la ecuación diferencial gobernante a su versión algebraica. En general, existen dos familias de técnicas de solución para ecuaciones algebraicas lineales: los métodos directos y los métodos indirectos o iterativos. En los métodos directos se conoce de antemano el número de operaciones para la solución de un sistema de n ecuaciones con n variables con un orden máximo de N^3 . Los más conocidos son la regla de Cramer y la eliminación Gaussiana.

Los métodos iterativos están basados en la aplicación repetida de un algoritmo relativamente simple que lleva a una eventual convergencia después de un, a veces, gran número de repeticiones. Cabe mencionar que el número total de operaciones de los métodos iterativos no puede ser predicho. Usualmente el Método de Volumen de Control da lugar a un sistema de ecuaciones en el que cada una tiene muchos coeficientes diferentes de cero en sus entradas. Dado que los sistemas de ecuaciones que emergen de problemas realistas en dinámica de fluidos computacional son muy grandes, generalmente los métodos iterativos son más económicos que los directos.

El algoritmo de matrices tri-diagonales (TDMA), también conocido como algoritmo de Thomas, es en realidad un método directo para problemas uni-dimensionales, pero puede ser aplicado iterativamente, línea por línea, para resolver problemas multi-dimensionales. Sus ventajas radican en su economía computacional y que requiere relativamente poco almacenamiento debido a que muchas de sus entradas son cero. Para realizar el procedimiento de TDMA, se considera la ecuación general de presión (Ec. (43), que tiene la forma:

$$aP_P = bP_E + cP_W + d \tag{45}$$

En donde se implementa el uso de coeficientes temporales *a*, *b*, *c*, *d*. Entonces se tiene que:

$$a = \alpha + \frac{2K_e A_P}{x_E - x_P} + \frac{K_w A_P}{x_P - x_W} + \frac{2K_t A_P}{z_T - z_P} + \frac{K_b A_P}{z_P - z_B}$$
(46)a

$$b = -\frac{K_e A_P}{x_E - x_P} \tag{46}b$$

$$c = -\frac{K_w A_P}{x_P - x_W} \tag{46}c$$

$$d = \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) P_T + \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) P_B$$

$$- \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) \rho_{fT} g z_T + \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) \rho_{fP} g z_P$$

$$+ \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) \rho_{fP} g z_P - \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) \rho_{fB} g z_B + \alpha P^0 + H$$
(46)d

en donde el coeficiente d lo conforman valores conocidos.

Se reescribe la ecuación general de presión para su configuración en su sistema matricial con n ecuaciones.

$$-cP_W + aP_P - bP_E = d \tag{47}$$

En donde se tiene que P_1 y P_{n+1} son valores conocidos de frontera. Notar que gran parte de las entradas son ceros, lo cual aminora la carga de almacenamiento. La forma de una de las líneas de la matriz anterior, es decir, en una dimensión, se ilustra en la Figura 15.



Figura 15. Volúmenes de control en una dimensión.

De acuerdo con la figura anterior, si empleamos la ecuación (45), notar que en los nodos de las fronteras este (I = 1) y oeste (I = n + 1), tenemos las siguientes condiciones:

$$a_{W(l=1)} = 0$$
 (49)

$$a_{E(l=n+1)} = 0 (50)$$

Esto se debe a que los términos no existen o se encuentran fuera del dominio. Las ecuaciones (48)a-g) pueden ser reescritas como:

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2} P_3 + \frac{c_2}{a_2} P_1 + \frac{d_2}{a_2}$$
(51)a

$$P_3 = \frac{b_3}{a_3}P_4 + \frac{c_3}{a_3}P_2 + \frac{d_3}{a_3}$$
(51)b

$$P_4 = \frac{b_4}{a_4} P_5 + \frac{c_4}{a_4} P_3 + \frac{d_4}{a_4}$$
(51)c

$$P_n = \frac{b_n}{a_n} P_{n+1} + \frac{c_n}{a_n} P_{n-1} + \frac{d_n}{a_n}$$
(51)d

Estas ecuaciones pueden ser resueltas si se tiene una relación general de recurrencia. Para encontrarla se utiliza la eliminación hacia adelante. De la ecuación (51b), se sustituye el término P_2 por la ecuación (51a). Entonces se obtiene la expresión de la ecuación (52). El desarrollo algebraico de esta expresión se encuentra en el Anexo B.

53

$$P_{3} = \frac{b_{3}}{\left(a_{3} - \frac{c_{3}b_{2}}{a_{2}}\right)}P_{4} + \left(\frac{c_{3}\left(\frac{c_{2}}{a_{2}}P_{1} + \frac{d_{2}}{a_{2}}\right) + d_{3}}{\left(a_{3} - \frac{c_{3}b_{2}}{a_{2}}\right)}\right)$$
(52)

Si implementamos los coeficientes A_I y Q_I tenemos:

$$A_2 = \frac{b_2}{a_2} \tag{53}$$

$$Q_2 = \frac{c_2}{a_2} P_1 + \frac{d_2}{a_2} \tag{54}$$

Entonces la ecuación (52) puede reescribirse como sigue:

$$P_3 = \frac{b_3}{(a_3 - c_3 A_2)} P_4 + \left(\frac{d_3 + c_3 Q_2}{(a_3 - c_3 A_2)}\right)$$
(55)

Si se continúa con la numeración anterior, se tiene:

$$A_3 = \frac{b_3}{(a_3 - c_3 A_2)} \tag{56}$$

$$Q_3 = \frac{d_3 + c_3 Q_2}{a_3 - c_3 A_2} \tag{57}$$

Con esto se obtiene una relación general de recurrencia, dada por la expresión:

$$P_I = A_I P_{(I+1)} + Q_I (58)$$

Para resolver esta expresión en dos dimensiones, se sugiere la implementación de los coeficientes temporales $A_{I,J}$ y $Q_{I,J}$ (Patankar, 1980; Versteeg y Malalasekera, 2007). Estos se obtienen a partir de la relación de recurrencia (Ec. (58) y al implementarse en el método de volumen de control son, esencialmente, coeficientes renombrados para cada volumen de control en un orden progresivo. Para iniciar el cálculo debe determinarse la relación de recurrencia en todos los nodos.

54

(62)

$$A_{1,J} = \frac{b_{1,J}}{a_{1,J}}$$
(59)

$$Q_{1,J} = \frac{d_{1,J}}{a_{1,J}} \tag{60}$$

Para el caso de I = 1, se consideran las condiciones de frontera de las ecuaciones (49) y (50) y los coeficientes $A_{I,J}$ y $Q_{I,J}$ quedan reducidos a las expresiones (59) y (60) y su ejecución se ilustra en la Figura 16.

Derivadas de las ecuaciones (56) y (57), para cualquier otro valor de *I* se tienen las expresiones (61) y (62). La Figura 17 ilustra su aplicación progresiva en el dominio.

$$A_{I,J} = \frac{b_{I,J}}{\left(a_{I,J} - c_{I,J}A_{(I-1,J)}\right)}$$
(61)



Figura 16. Esquema de solución progresiva en una malla de un dominio 2D con algoritmo de matriz tri-diagonal (TDMA). El cálculo inicia en la primera columna con las ecuaciones (59) y (60), en orden de abajo hacia arriba.

Α

В

С


Figura 17. Esquema de solución progresiva en una malla de un dominio 2D con algoritmo de matriz tri-diagonal (TDMA). A partir de la columna n = 2, el cálculo se realiza con las ecuaciones (61) y (62) de abajo hacia arriba y de izquierda a derecha.

Posteriormente, se utiliza la expresión (58) en dos dimensiones para realizar el cálculo en un proceso de sustitución hacia atrás, en orden de abajo hacia arriba y de derecha a izquierda.

$$P_{I,J} = A_{I,J}P_{(I+1,J)} + Q_{I,J}$$
(63)

Para iniciar el proceso, se considera la condición de frontera de la ecuación (49), por lo que la expresión (63) queda reducida como sigue:

$$P_{I,I} = Q_{I,I} \tag{64}$$

En la **Figura 18** se ilustra el cálculo de sustitución hacia atrás de forma progresiva (ecuaciones 63 y 64) en la malla del dominio.





Figura 18. Esquema de solución progresiva en una malla de un dominio 2D con algoritmo de matriz tri-diagonal (TDMA). El cálculo inicia en la primera columna de abajo hacia arriba (A, B, C) con la ecuación (64) y posteriormente continua con la ecuación (63) de derecha a izquierda (D, E, F).

Una vez que se obtiene todo el campo de presiones, se evalúa si hay convergencia. Primero se compara el resultado obtenido con el de la iteración anterior, en este caso es el valor absoluto de la diferencia entre la presión calculada en la iteración it y la presión de la iteración anterior inmediata it - 1.

$$\Delta P_{it} = |P_{it} - P_{it-1}| \tag{65}$$

Notar que $P_{it=0}$ en el paso de tiempo k = 1 es un campo de presiones iniciales establecido por el usuario.

Posteriormente se evalúa si dicha diferencia cumple el criterio de convergencia, el cual se establece con operadores lógicos y límites para los valores calculados. Para este trabajo se estableció una diferencia máxima inicial $\Delta P_{\max(it=1)} = -10 \text{ bar y un error } \varepsilon = 0.000001$. Si tenemos que se cumple:

$$\Delta P_{it} \ge \Delta P_{\max(it)} \Longrightarrow \Delta P_{\max(it+1)} = \Delta P_{it}$$
(66)

Lo cual permite renombrar la diferencia máxima de presión ΔP_{max} para la siguiente iteración it + 1. Si tenemos que además se cumple:

$$\Delta P_{it} \ge \mathcal{E} \implies P_{it+1} = P_{it} \tag{67}$$

De no cumplir esta condición, es decir, si la diferencia máxima calculada es $< \mathcal{E}$, entonces la presión calculada converge y el algoritmo procede al resto de cálculos del paso de tiempo. La presión calculada se renombra como inicial para la siguiente iteración o paso de tiempo, según sea el caso.

3.4 Cálculo de las velocidades

Las velocidades se calculan en las caras de las celdas a partir del campo de presiones obtenido. Sin embargo, los valores de presión corresponden a los nodos centrales de las celdas y no a las caras. Para resolver este problema se recurre al sistema de mallas desfasadas. Las componentes x y z de la velocidad deben calcularse por separado en cada nodo de la malla con la ecuación de Darcy.

$$v_x = \frac{k}{\mu} \left(\frac{\Delta P}{\Delta x} \right) \tag{68}$$

$$v_z = \frac{k}{\mu} \left(\frac{\Delta P}{\Delta z} \right) \tag{69}$$

en donde k es permeabilidad, μ es viscosidad, ΔP es la diferencia de presiones entre dos nodos vecinos en las direcciones x o z, y Δx y Δz la distancia entre dos nodos vecinos en las direcciones x o z, respectivamente.

Las ecuaciones anteriores se deben adaptar en cada celda de acuerdo con su relación a las fronteras del yacimiento, así como establecer si es positiva o negativa para indicar la dirección.

Considerando que para este trabajo se estableció una malla regular, las velocidades en las caras de las celdas se obtienen calculando el promedio de las velocidades de dos nodos centrales vecinos. Para las cuatro caras de cada celda se tienen las siguientes expresiones:

$$vw_P = \frac{vx_P + vx_W}{2} \tag{70}$$

$$ve_P = \frac{vx_P + vx_E}{2} \tag{71}$$

$$vt_P = \frac{vx_P + vx_T}{2} \tag{72}$$

$$vb_P = \frac{vx_P + vx_B}{2} \tag{73}$$

Hay que recordar que la simbología $w, e, t, b, W, E, T, B \neq P$ corresponde a las coordenadas simplificadas del sistema de mallas desfasadas (**iError! No se encuentra el origen de la referencia.**).

Al igual que la presión, las velocidades guardan una relación con las velocidades de las celdas vecinas, por lo que las cuatro expresiones anteriores no establecen esta relación. Entonces las velocidades en cada cara de la celda vuelven a recalcularse con las ecuaciones (**74**-(**77**, con las adaptaciones correspondientes con respecto a las fronteras del yacimiento:

$$vw_P = \frac{vw_E + vw_W + vw_T + vw_B}{4} \tag{74}$$

$$ve_P = \frac{ve_E + ve_W + ve_T + ve_B}{4} \tag{75}$$

$$vt_P = \frac{vt_E + vt_W + vt_T + vt_B}{4} \tag{76}$$

$$vb_P = \frac{vb_E + vb_W + vb_T + vb_B}{4} \tag{77}$$

3.5 Construcción de algoritmo en FORTRAN

Fortran (acrónimo de *FORmula TRANslation*) es uno de los lenguajes de programación de alto nivel más antiguos y establecidos, diseñado originalmente en la década de 1950 para resolver problemas científicos y de ingeniería. A lo largo de las décadas, Fortran ha evolucionado significativamente, integrando características modernas que lo hacen especialmente robusto y eficiente para cálculos matemáticos intensivos y simulaciones complejas.

En el ámbito de la dinámica computacional de fluidos (CFD, por sus siglas en inglés), Fortran ha sido históricamente el lenguaje de elección debido a su capacidad para manejar grandes volúmenes de datos, optimizar cálculos numéricos y ejecutar simulaciones de alto rendimiento. Estas características lo convierten en una herramienta ideal para modelar fenómenos físicos complejos, como el comportamiento de fluidos en yacimientos geotérmicos.

La modelación de yacimientos geotérmicos presenta desafíos computacionales únicos, como la resolución de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que describen el flujo de calor y fluidos en medios porosos. En este contexto, Fortran proporciona un alto rendimiento y una sintaxis clara para implementar algoritmos de resolución numérica, como el método de volúmenes finitos en este caso.

En este trabajo, se empleó Fortran para desarrollar modelos de simulación que representan los procesos físicos en yacimientos geotérmicos. La elección de Fortran estuvo motivada por su eficiencia en cálculos numéricos y su capacidad para manejar simulaciones complejas con alta precisión. Los resultados obtenidos demuestran la potencia del lenguaje en la resolución de problemas de dinámica computacional de fluidos aplicados a la geotermia.

3.5.1 Algoritmo de solución numérica

El código de este trabajo está resumido en el diagrama de flujo que se muestra en la Figura 19. Está divido en cinco secciones principales sin contar el pre-procesamiento. El pre-procesamiento incluye aspectos básicos iniciales como declaración de variables; dimensionamiento de variables; lectura de archivos de entrada; cálculos dimensionales de dominios; creación de función de celdas convectivas; establecer campos iniciales supuestos de temperatura, presión y velocidades; definir condiciones iniciales y de frontera; y cálculo de parámetros conductivos, convectivos y temporales.



Figura 19. Diagrama de flujo de algoritmo de acople presión-velocidad codificado en FORTRAN para la modelación de transferencia de calor.

Después del pre-procesamiento, en la primera parte se establece el campo velocidades *u* y *v* a partir de una función que simula el movimiento de las dos celdas convectivas sintéticas y del campo de presiones iniciales supuesto. La segunda parte calcula la presión con la ecuación general discretizada para la presión en cada nodo de cada una de las nueve regiones y se resuelve por TDMA. La presión calculada se renombra como presión inicial.

La tercera parte recalcula el campo de velocidades a partir del campo de presión calculado anteriormente. A lo que sigue la corrección de las velocidades por medio de factores de relajación. Finalmente se resuelven el resto de las ecuaciones (transferencia de calor y/o transporte de solutos) y se implementa un criterio de convergencia para continuar o detener las iteraciones de todo el proceso.

3.6 Construcción de programación PYTHON

Python es un lenguaje de programación de alto nivel, interpretado y de propósito general, con una sintaxis legible e intuitiva. Python se ha consolidado como un lenguaje de programación ampliamente utilizado en diversas áreas científicas, debido a su simplicidad y la potencia de sus bibliotecas especializadas para el análisis y la visualización de datos, además de las comunidades activas de desarrollo.

Python ofrece una gran capacidad para generar gráficos de manera eficiente y flexible, gracias a su amplia gama de bibliotecas especializadas que permiten crear gráficos estáticos y personalizables en 2D y visualizaciones en 3D, ideales para representar datos espaciales complejos. La facilidad para ajustar estilos, colores y tipos de gráficos, así como la integración con otras herramientas de análisis, hace de Python una opción robusta para representar visualmente grandes volúmenes de datos y resultados numéricos.

Así mismo, Python posee una gran capacidad para manejar, manipular y analizar grandes volúmenes de datos de manera eficiente. Esto se logra principalmente a través del uso de bibliotecas como Pandas, diseñada específicamente para trabajar con estructuras de datos como *dataframes*. En particular, los *dataframes* son estructuras tabulares de datos que permiten organizar información en filas y columnas, similares a una hoja de cálculo. En Python, un *dataframe* se crea y gestiona con la biblioteca Pandas, que proporciona herramientas como cargar datos desde diferentes fuentes y con diferentes formatos (csv, Excel, SQL, JSON, etc.); realizar operaciones de filtrado, agrupamiento, y transformación de datos; calcular estadísticas descriptivas y realizar análisis exploratorios de datos.

3.6.1 Algoritmo de procesamiento y graficación de datos en PYTHON

La modelación de un yacimiento geotérmico requiere representar de manera precisa los cambios en las variables como la presión y la velocidad través de diferentes puntos del yacimiento, lo cual suele involucrar grandes cantidades de datos. Por sus características, Python fue elegido para este trabajo con el objetivo de realizar gráficos y visualizaciones detalladas que ayudan a entender la distribución y la evolución de variables en función de la ubicación y el tiempo.

El código desarrollado es simple y se presenta en este trabajo en seis secciones principales. Las funciones y comandos de cada sección se pueden visualizar en la Tabla 8 y el esquema general del código se muestra en la Figura 20.

Sección	Descripción	Funciones
1	Importación de librerías y módulos necesarios	 Incluyen las funciones necesarias que optimizan el código y evita que el usuario deba hacerlas manualmente.
2	Creación de dataframes para pre-procesamiento de datos	 Convertir columnas a tipos de datos correctos (int, float) Eliminar valores duplicados Cálculo de parámetros espaciales
3	Diseño y configuración de figuras	 Declaración de espacios lineales Límites de ejes Separación de marcadores en ejes Etiquetas de marcadores de ejes Graficación de fallas, pozos y datos de temperaturas de pozos
4	Procesamiento de datos de campos de P, T, u y v para paso de tiempo	 Convertir columnas a tipos de datos correctos Declaración de valores mínimos y máximos de campos Reemplazar valores nulos a ceros Automatización con definición de funciones Asignar datos a VC
5	Graficación de datos de P, T, u y v	 Gráficas 2D del perfil Isovalores e isolineas Rampa de colores
6	Iteración	• Se repite el proceso hasta graficar los datos de los pasos de tiempo asignados.

Tabla 8. Descripción detallada de funciones en cada sección del código.



Figura 20. Diagrama de flujo de algoritmo en PYTHON.

En esta sección se muestran los resultados de un total de quince modelos, para los cuales se asumió un yacimiento cerrado, líquido-dominante y sin fuente o sumidero de masa (fluidos). La transferencia de calor en el interior del yacimiento es convectiva-conductiva y al exterior es puramente conductiva. La geometría del campo de velocidades corresponde al de dos celdas convectivas descritas en la Figura 12. Se obtuvieron campos de presión, velocidades, temperatura y de dirección del fluido. Los campos de temperatura se compararon con las mediciones de temperaturas de los registros de pozos para evaluar el error de cada modelo simulado. Los parámetros espaciales y termodinámicos iniciales para todos los modelos se presentan resumidos en la Tabla 9 y los parámetros particulares de cada modelo se muestran en las tablas Tabla 10, Tabla 11 y Tabla 12.

Parámetro	Valor
Longitud del dominio	x = 4500 m
Profundidad del dominio	z = 3300 m
Profundidad de cima de yacimiento	z = 1000 m
Profundidad de base de yacimiento	z = 2500 m
Delta en <i>x</i>	$\Delta x = 25 m$
Delta en z	$\Delta z = 25 m$
Número total de volúmenes de control en x	nvcx = 180
Número total de volúmenes de control en z	<i>nvcz</i> = 132
Rango de volúmenes de control de yacimiento en x	$nvcx = 30 \ a \ 150$
Rango de volúmenes de control de yacimiento en z	nvcz = 32 a 92
Temperatura en superficie	$T = 25^{\circ}C$
Temperatura inicial supuesta en el yacimiento	$T^* = 100^{\circ}C$
Gradiente geotérmico	140°C/km
Flujo de calor en el yacimiento	$1.5 W/m^2$
Presión inicial en la cima del yacimiento	$P = 100 \ bar$
Presión inicial en la base del yacimiento	$P = 200 \ bar$
Campo de presión inicial supuesta de yacimiento	$P^* = 100 \ bar$
Compresibilidad del fluido (agua)	0.0003/bar
Compresibilidad de la roca	0.0007/bar
Expansión térmica del fluido (agua)	0.00944/°C

Tabla 9. Valores de parámetros espaciales y termodinámicos iniciales generales para todos los modelos.

Modelo	tiempo de simulación [<i>a</i>]	∆ tiempo [<i>a</i>]	Número de pasos de tiempo
1	200	0.5	400
2	200	0.5	400
3	200	0.5	400
4	400	1.0	400
5	400	1.0	400
6	400	1.0	400
7	200	0.5	400
8	200	0.5	400
9	200	0.5	400
10	200	0.5	400
11	200	0.5	400
12	200	0.5	400
13	200	0.5	400
14	200	0.5	400
15	200	0.5	400

Tabla 10. Parámetros temporales para cada modelo (a = años).



Figura 21. Dominios simplificados para variaciones de permeabilidad *k* en el yacimiento por presencia de fallas para los modelos 3 y 4. Las zonas 2, 4 y 6 corresponden a las áreas de falla F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021), respectivamente. Las líneas punteadas negras corresponden a pozos proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10).

Con el fin de crear modelos simplificados con variaciones de permeabilidad por la presencia de fallas, el yacimiento fue dividido en siete regiones o dominios de permeabilidad, cuya distribución se muestra en la **Figura 21**. Tres de estas regiones se asignaron a las zonas de falla señaladas en recuadros rojos (regiones 2, 4 y 6). Las fallas corresponden a F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021) (ver perfil A-B que se muestra en la **Figura 10**). En la **jError! No se encuentra el origen de la referencia.** se muestran los valores de velocidades iniciales de flujo, la distribución de los dominios de permeabilidad y los valores de permeabilidad utilizados en cada modelo.

Tabla 11. Distribución de regiones de permeabilidad en términos de número de volúmenes de control (nvc) y orden de valores de permeabilidad k (m^2) para cada modelo. Las siete regiones tienen como límites superior e inferior, la cima (nvcz = 92) y la base (nvcz = 32) del yacimiento, respectivamente. La segunda columna indica la velocidad inicial del flujo (m/s) de cada modelo.

	velocidad	Permeabilidad $k = 1x10^E m^2$							
Modelo	(m/s)	Región	1	2	3	4	5	6	7
		nvcx	30 a 38	39 a 43	44 a 58	59 a 63	64 a 120	121 a 126	127 a 150
1	$1x10^{-13}$	E	-14	-13	-14	-13	-14	-13	-14
2	$1x10^{-13}$	E	-14	-13	-14	-13	-14	-13	-14
3	$1x10^{-13}$	E	-14	-13	-14	-13	-14	-13	-14
4	$1x10^{-13}$	E	-14	-13	-14	-13	-14	-13	-14
5	$1x10^{-13}$	E	-14	-13	-14	-13	-14	-13	-14
6	$1x10^{-13}$	E	-14	-13	-14	-13	-14	-13	-14
7	$1x10^{-13}$	E	-15	-14	-15	-14	-15	-14	-15
8	$1x10^{-13}$	E	-15	-14	-15	-14	-15	-14	-15
9	$1x10^{-13}$	E	-15	-14	-15	-14	-15	-14	-15
10	$1x10^{-12}$	E	-15	-12	-15	-12	-15	-12	-15
11	$1x10^{-12}$	E	-15	-12	-15	-12	-15	-12	-15
12	$1x10^{-12}$	E	-15	-12	-15	-12	-15	-12	-15
Modelo	velocidad (m /s)	nvcx	30 a 38	39 a 43	44 a 58	59 a 63	64 a 112	113 a 118	119 a 150
13	$1x10^{-13}$	E	-15	-13	-15	-13	-15	-13	-15
14	$1x10^{-13}$	E	-15	-13	-15	-13	-15	-13	-15
15	$1x10^{-12}$	E	-15	-12	-15	-12	-15	-12	-15
*La distancia equivalente a 1 <i>nvcx</i> o 1 <i>nvcz</i> es igual a 25 <i>m</i>									

Se delimitaron dominios para la variación de flujo de calor asociado a las fallas F1, F2 y F3, ya que el flujo de calor puede ser favorecido por el ascenso de fluidos a través de fallas y fracturas desde la fuente de

calor en la base del yacimiento hasta la superficie. Cada zona de falla se dividió en dos dominios que corresponden a la porción superior (Th=Top half) y a la porción inferior (Bh=Bottom half) dentro del yacimiento, dando un total de seis dominios. Estos permiten simplificar un cambio del flujo de calor por influencia del gradiente geotérmico.

En la Tabla 12 se indican los valores de flujo de calor y límites correspondientes a cada uno de los seis dominios. También se indica si el flujo de calor es constante o inicial. El flujo de calor constante indica que hay una fuente de calor constante a lo largo del tiempo de simulación. El flujo de calor inicial se considera como una condición inicial de la temperatura dentro de las zonas de fallas, es decir, la temperatura se estima con el flujo de calor usando la Ley de Fourier (Ec. 6).

		Flujo de calor en fallas $[W/m^2]$						
Madala	HF inicial o	falla	F1(Th)	F1(Bh)	F2(Th)	F2(Bh)	F3(Th)	F3(Bh)
wodelo	constante	nvcx	38 a 43	38 a 43	58 a 63	58 a 63	122 a 127	120 a 125
		nvcz	62 a 92	32 a 61	62 a 92	32 a 61	62 a 92	32 a 61
1	constante ¹	HF	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
2	constante ¹	HF	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
3	constante ¹	HF	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1
4	constante ¹	HF	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
5	constante ¹	HF	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
6	constante ¹	HF	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1
7	inicial ²	HF	0.5	0.6	0.4	0.5	0.3	0.4
8	inicial ²	HF	0.3	0.4	0.3	0.5	0.5	0.5
9	inicial ²	HF	0.3	0.45	0.35	0.5	0.5	0.65
10	inicial ²	HF	0.5	0.6	0.4	0.5	0.3	0.4
11	inicial ²	HF	0.3	0.4	0.3	0.5	0.5	0.5
12	inicial ²	HF	0.3	0.45	0.35	0.5	0.5	0.65
Madala	<i>HF</i> inicial o	nvcx	38 a 43	38 a 43	57 a 62	58 a 63	113 a 118	112 a 115
wodelo	constante	nvcz	62 a 92	32 a 61	62 a 92	32 a 61	61 a 92	32 a 60
13	inicial ²	HF	0.3	0.5	0.3	0.5	0.3	0.7
14	inicial ²	HF	0.3	0.52	0.3	0.52	0.28	0.7
15	inicial ²	HF	0.3	0.5	0.3	0.5	0.3	0.7

Tabla 12. Dominios de flujo de calor $[W/m^2]$ en regiones de fallas.

¹ Flujo de calor como fuente constante.

² Flujo de calor como condición inicial de temperatura.

*HF= Flujo de calor (Heat Flow); Th=mitad superior de falla (Top half); B=mitad inferior de falla (Bottom half).

4.1 Campos de temperatura en el tiempo

El flujo de calor en las zonas de fallas de los modelos se evaluó de dos maneras: como una fuente constante de calor (modelos 1-6) y como una condición inicial de temperatura (modelos 7-15).

Para conocer cómo las variaciones de flujo de calor influyen en los campos de temperatura, las Figuras Figura 22Figura 25 muestran los campos de temperatura en distintos pasos de tiempo de forma progresiva para los Modelos 1, 3, 5 y 13.

En el caso del modelo 1, éste se evaluó con un flujo de calor en las zonas de falla como una fuente constante con valor $HF = 1.5 W/m^2$ (al igual que el resto del dominio del yacimiento) y un tiempo total de simulación de 200 años. Los resultados muestran que los campos de temperatura cambian de manera homogénea en el yacimiento a lo largo de la simulación (Figura 22).

En el modelo 3 se consideraron fuentes de calor constante en las zonas de fallas con un flujo de calor de $HF = 2.1 W/m^2$ y un tiempo total de simulación de 200 años. Los resultados del modelo se muestran en la Figura 23, en donde se presentan variaciones de temperatura entre las zonas de falla y el yacimiento a lo largo del tiempo.

El modelo 5 se evaluó con la misma modalidad de flujo de calor que el modelos 3, donde el flujo de calor en las zonas de fallas fue de $HF = 1.8 W/m^2$. Para este modelo se consideró un tiempo total de simulación igual a 400 años (ver Figura 24).

El modelo 13 fue evaluado con una temperatura como condición inicial la cual se estimó a partir del flujo de calor dado como condición inicial en las zonas de falla. El tiempo total de simulación de este modelo fue de 200 años. En la Figura 25 se puede notar que el calor en las zonas de falla se disipa progresivamente en el tiempo.

Las Figuras Figura 26-Figura **41** muestran los perfiles de los campos de presiones y temperaturas para el tiempo total de simulación de los Modelos 2, 5, 11 y 13. Se muestran cuatro Figuras por modelo, las cuales incluyen (1) el campo de presiones del perfil A-B; (2) el campo de temperaturas del perfil A-B; (3) el campo de presiones del yacimiento y (4) el campo de temperaturas del yacimiento.



CAMPO DE TEMPERATURAS EN EL TIEMPO [MODELO 1]

Figura 22. Campos de temperatura simulados para distintos pasos de tiempo en el Modelo 1 (donde t = 0.5, 100, 150 y 200 a). Se simuló un tiempo total de t = 200 a con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. El flujo de calor en las zonas de falla y en el dominio del yacimiento es constante con valor de $HF = 1.5 W/m^2$.



Figura 23. Campos de temperatura simulados para distintos pasos de tiempo en el Modelo 3 donde t = 0.5, 100, 150 y 200 a. Se simuló un tiempo total de t = 200 a con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. El flujo de calor en las zonas de falla es una fuente constante con valor de $HF = 2.1 W/m^2$.



Figura 24. Campos de temperatura simulados para distintos pasos de tiempo en el Modelo 5 (donde t = 1.0, 200, 300 y 400 a). Se simuló un tiempo total de t = 400 a con pasos de tiempo $\Delta t = 1.0 a$. El flujo de calor en las zonas de falla es una fuente constante con valor de $HF = 1.8 W/m^2$.



Figura 25. Campos de temperatura simulados para distintos pasos de tiempo en el Modelo 13 (donde t = 0.5, 100, 150 y 200 a). Se simuló un tiempo total de 200 años con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. A partir del flujo de calor es las zonas de falla se estimó una temperatura como condición inicial (ver valores de flujo de calor en la Tabla 12. Dominios de flujo de calor $[W/m^2]$ en regiones de fallas.

Todas las Figuras incluyen el campo de dirección del fluido en el yacimiento, las fallas F1, F2 y F3 y los pozos LV1, LV3, LV4, LV5, LV7, LV8 y LV13 del CGLTV. También se muestran los registros de temperaturas de los pozos del GCLTV dentro del perfil con el fin de comparar con las isotermas modeladas (obtenidas a partir de los campos de temperaturas simuladas). Se aclara que los pozos LV1, LV5 y LV7 son lo que se encuentran a mayor distancia del perfil A-B, por lo que fueron proyectados perpendicularmente a éste.

4.2 Modelo 2

El modelo 2 se realizó con un tiempo de simulación t = 200 a y pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$, es decir, un total de 400 pasos de tiempo. La velocidad inicial es de $v = 1x10^{-13} m/s$. El dominio del yacimiento tiene una permeabilidad $k = 1x10^{-14} m^2$ y las regiones de falla tienen un valor de permeabilidad mayor $k = 1x10^{-13} m^2$. El flujo de calor en las zonas de falla se consideró como una fuente constante con un valor $HF = 1.8 W/m^2$. La Tabla 13 muestra los valores de temperatura y presión mínimos y máximos obtenidos en todo el yacimiento y las tres regiones de falla. Las Figuras 26-29 muestran los resultados de las simulaciones.

Dominio	Temperatura mínima [°C]	Temperatura máxima [°C]	Presión mínima [bar]	Presión máxima [<i>bar</i>]
Yacimiento	185.51	291.17	74.87	305.09
F1	199.73	262.74	107.89	221.41
F2	199.73	261.79	111.56	227.85
F3	199.36	261.77	109.84	223.93

Tabla 13. Valores mínimos y máximos de temperatura y presión simulados en los distintos dominios del Modelo 2.

El campo de temperaturas de este modelo subestimó las temperaturas de referencia al igual que el modelo 1 (Figura 22) y el modelo 3 (Figura 23), debido a que el tiempo total de simulación fue insuficiente.



Figura 26. Perfil del campo de presiones [*bar*] del Modelo 2. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. El rectángulo en el centro representa el yacimiento simplificado y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del

presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 27. Perfil del campo de temperaturas [°*C*] del Modelo 2. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Se muestran las isotermas con cota cada 10°*C*. El rectángulo en el centro representa el yacimiento simplificado y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 28. Perfil del campo de presiones [*bar*] del yacimiento del Modelo 2. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas

al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 29. Perfil del campo de temperaturas [°*C*] del yacimiento del Modelo 2. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).

4.3 Modelo 5

El modelo 5 se realizó con un tiempo de simulación t = 400 a y pasos de tiempo $\Delta t = 1.0 a$, por lo que la simulación se realizó en 400 pasos de tiempo. La velocidad inicial es de $v = 1x10^{-13} m/s$. El dominio del yacimiento tiene una permeabilidad $k = 1x10^{-14} m^2$ y las regiones de falla tienen un valor de permeabilidad mayor $k = 1x10^{-13} m^2$. El flujo de calor en las zonas de falla se consideró como una fuente constante con un valor $HF = 1.8 W/m^2$. La Tabla 14 muestra los valores de temperatura y presión mínimos y máximos obtenidos en todo el yacimiento y las tres regiones de falla. Las Figuras 30-33 muestran los resultados de las simulaciones.

Dominio	Temperatura mínima [°C]	Temperatura máxima [°C]	Presión mínima [<i>bar</i>]	Presión máxima [<i>bar</i>]
Yacimiento	221.71	337.43	68.96	305.20
F1	263.36	336.89	102.41	162.32
F2	263.19	333.77	110.04	175.02
F3	262.44	333.88	109.72	174.18

El campo de temperaturas de este modelo sobreestimó las temperaturas de referencia al igual que los modelo 4 y 6, debido a que el tiempo total de simulación fue excesivo.



Figura 30. Perfil del campo de presiones [bar] de Modelo 5. Tiempo de simulación t = 400 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 1.0 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. El rectángulo en el centro representa el yacimiento simplificado y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa

geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 31. Perfil del campo de temperaturas [°*C*] del Modelo 5. Tiempo de simulación t = 400 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 1.0 a$. Se muestran las isotermas con cota cada 10°*C*. El rectángulo en el centro representa el yacimiento simplificado y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de

estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 32. Perfil del campo de presiones [bar] del yacimiento del Modelo 5. Tiempo de simulación t = 400 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 1.0 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas

al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 33. Perfil del campo de temperaturas [°*C*] del yacimiento del Modelo 5. Tiempo de simulación t = 400 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 1.0 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas

al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).

4.4 Modelo 11

El modelo 11 se realizó con un tiempo de simulación t = 200 a y pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$, lo que dio un total de 400 pasos de tiempo. La velocidad inicial es de $v = 1x10^{-12} m/s$. El dominio del yacimiento tiene una permeabilidad $k = 1x10^{-15} m^2$ y las regiones de falla tienen un valor de permeabilidad mayor $k = 1x10^{-12} m^2$. El flujo de calor en las zonas de falla se consideró como una condición inicial y sus valores se muestran en la **Tabla 15** (partir de estos valores de flujos de calor se estimaron las temperaturas iniciales en cada dominio de las zonas de fallas). Los valores de temperatura y presión mínimos y máximos obtenidos en todo el yacimiento y las tres regiones de falla se muestran en la Tabla 16. Las Figuras 34-37 muestran los resultados de las simulaciones.

Tabla 15. Valores de flujo de calor $[W/m^2]$ como condición inicial utilizados en los diferentes dominios en las zonas de fallas del Modelo 11.

Falla	F1 (Th)	F1 (Bh)	F2 (Th)	F2 (Bh)	F3 (Th)	F3 (Bh)
nvcx	38 a 43	38 a 43	58 a 63	58 a 63	122 a 127	120 a 125
nvcz	62 a 92	32 a 61	62 a 92	32 a 61	62 a 92	32 a 61
$HF[W/m^2]$	0.3	0.4	0.3	0.5	0.5	0.5

* 1 *nvcx* o 1 *nvcz* es igual a 25 *m*

*Th=mitad superior de falla (Top half), Bh= mitad inferior de falla (Bottom half)

Dominio	Temperatura mínima [°C]	Temperatura máxima [°C]	Presión mínima [<i>bar</i>]	Presión máxima [<i>bar</i>]
Yacimiento	185.66	317.86	83.18	306.87
F1	208.30	285.70	112.78	214.04
F2	225.83	286.97	113.00	198.21
F3	228.50	317.86	98.90	213.29

Tabla 16. Valores mínimos y máximos de temperatura y presión simulados en los distintos dominios del Modelo 11.



Figura 34. Perfil del campo de presiones [*bar*] de Modelo 11. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. El rectángulo en el centro representa el yacimiento simplificado y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del
presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 35. Perfil del campo de temperaturas [°*C*] del Modelo 11. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Se muestran las isotermas con cota cada 10°*C*. El rectángulo en el centro representa el yacimiento simplificado y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 36. Perfil del campo de presiones [bar] del yacimiento del Modelo 11. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas

al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 37. Perfil del campo de temperaturas [°*C*] del yacimiento del Modelo 11. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).

4.5 Modelo 13

El modelo 13 se realizó con un tiempo de simulación t = 200 a y pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$, lo que dio un total de 400 pasos de tiempo. La velocidad inicial es de $v = 1x10^{-13} m/s$. El dominio del yacimiento tiene una permeabilidad $k = 1x10^{-15} m^2$ y las regiones de falla tienen un valor de permeabilidad mayor $k = 1x10^{-13} m^2$. El flujo de calor en las zonas de falla se consideró como una condición inicial y sus valores se muestran en la Tabla 17 (a partir de estos valores de flujos de calor se estimaron las temperaturas iniciales en cada dominio de las zonas de fallas). Los valores de temperatura y presión mínimos y máximos obtenidos en todo el yacimiento y las tres regiones de falla se muestran en la Tabla 18. Las Figuras 38-41 muestran los resultados de las simulaciones.

Tabla 17. Valores de flujo de calor $[W/m^2]$ como condición inicial utilizados en los diferentes dominios en las zonas de fallas del Modelo 13.

Falla	F1 (Th)	F1 (Bh)	F2 (Th)	F2 (Bh)	F3 (Th)	F3 (Bh)
nvcx	38 a 43	38 a 43	57 a 62	58 a 63	113 a 118	112 a 115
nvcz	62 a 92	32 a 61	62 a 92	32 a 61	61 a 92	32 a 60
$HF[W/m^2]$	0.3	0.5	0.3	0.5	0.3	0.7

* 1 *nvcx* o 1 *nvcz* es igual a 25 *m*

*Th=mitad superior de falla (Top half), Bh= mitad inferior de falla (Bottom half)

Dominio	Temperatura mínima [°C]	Temperatura máxima [°C]	Presión mínima [<i>bar</i>]	Presión máxima [<i>bar</i>]
Yacimiento	185.66	317.86	83.18	306.87
F1	208.30	285.70	112.78	214.04
F2	224.85	286.97	113.00	209.01
F3	191.03	261.36	102.79	238.16

Tabla 18. Valores mínim	os y máximos de terr	nperatura y presión sim	ulados en los distintos d	ominios del Modelo 13.
-------------------------	----------------------	-------------------------	---------------------------	------------------------



Figura 38. Perfil del campo de presiones [*bar*] de Modelo 13. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. El rectángulo en el centro representa el yacimiento simplificado y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del

presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 39. Perfil del campo de temperaturas [°*C*] del Modelo 1. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Se muestran las isotermas con cota cada 10°*C*. El rectángulo en el centro señala el yacimiento y las flechas en su interior la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 40. Perfil del campo de presiones [bar] del yacimiento del Modelo 13. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).



Figura 41. Perfil del campo de temperaturas [°*C*] del yacimiento del Modelo 13. Tiempo de simulación t = 200 a, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.5 a$. Las isolíneas corresponden al campo de temperaturas con cota cada 10°*C*. Las flechas muestran la dirección del flujo convectivo. Las líneas rojas señalan las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma. Las líneas blancas muestran la posición de los pozos y las mediciones de temperaturas dentro del yacimiento (círculos blancos). Las líneas blancas punteadas corresponden a los pozos que fueron proyectados perpendicularmente al perfil A-B (ver Figura 10. Mapa geológico del área de estudio. La línea A-B en color azul tiene una longitud de 4500 m y representa el perfil utilizado para los modelos numéricos del presente trabajo de investigación, los cuales incluyen las fallas F1: El Viejo 2, F2: El Viejo 1 y F3: Falla La Reforma (Antayhua Vera, 2017; Guerrero et al., 2021). Las líneas de fallas señaladas en color púrpura fueron agregadas

al mapa original. df: Depósito de flujo de detritos; Vst: Estratovolcán andesítico-dacítico La Virgen; Vsc: Conos de escoria La Virgen; Az: Estratocono dacítico El Azufre; Vlc: Cono de lava dacítico El Viejo; Ag: Caldera El Aguajito (Modificado de Sosa-Ceballos et al., 2019).

4.6 Error

Para calcular el error, se consideró el análisis de porcentaje de error normalizado (%ErN) (Ec. (78), para evaluar la calidad de los resultados obtenidos. Las temperaturas simuladas y las temperaturas de registro de los pozos se compararon a las mismas profundidades dentro de la malla de volúmenes de control (*nvcx* y *nvcz*) del yacimiento. La distribución del porcentaje de error para cada modelo se muestra en la **jError! No se encuentra el origen de la referencia.** LaTabla 20 muestra en detalle las temperaturas medidas en pozos (Verma et al., 2006) y las temperaturas obtenidas en las simulaciones. La Tabla 20 muestra los detalles del error de las temperaturas simuladas, el error mínimo y máximo para cada modelo.

$$\% \text{ErN} = \frac{|temperatura simulada - temperatura de pozo|}{temperatura de pozo} (100)$$
(78)

Adicionalmente, en las Figuras

Figura **43**Figura **48** se muestra la distribución del porcentaje de error normalizado para cada uno de los pozos del CGLTV en los 15 modelos. Sólo el pozo LV8 no se muestra, ya que las mediciones de temperatura de este pozo fueron obtenidas en profundidades menores a la del yacimiento del modelo (<1000 m).



Distribución del Error (%ErN) por Modelo

Figura 42. Gráfica de distribución del porcentaje del error normalizado (%ErN) general para cada modelo.

Pozo	Z [m]	T Pozo	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15
LV1	1057	231	203.81	204.77	205.72	279.97	283.02	286.01	209.93	219.50	219.49	218.81	236.65	236.54	231.84	227.91	245.35
LV1	1150	243	205.19	206.99	208.78	293.77	298.36	302.82	215.55	230.47	230.47	216.61	233.37	233.05	234.48	230.31	230.34
LV1	1325	225	205.48	207.60	209.71	294.45	299.63	304.68	217.28	234.17	234.17	217.12	232.80	232.39	233.64	229.62	227.52
LV1	1500	223	205.51	207.64	209.76	294.37	299.61	304.72	217.47	234.40	234.53	217.12	232.75	234.18	233.83	229.83	227.94
LV1	1633	221	205.51	207.85	210.17	294.36	300.06	305.61	219.53	236.28	238.39	219.41	235.26	239.41	236.71	233.00	231.77
LV1	1695	217	205.51	208.22	210.90	294.36	300.61	306.69	221.99	238.53	243.11	221.97	237.62	243.80	240.01	236.68	235.83
LV3	1202	230	205.37	210.54	215.65	294.41	304.00	313.33	239.43	225.22	232.31	240.03	225.45	232.80	220.70	220.70	220.89
LV3	1647	232	205.52	210.76	215.95	294.39	304.08	313.50	241.96	229.67	235.79	242.21	229.86	235.96	226.09	226.53	226.14
LV3	1830	261	205.51	210.76	215.95	294.45	304.14	313.56	251.69	248.90	250.29	250.39	247.66	249.03	248.00	250.41	246.88
LV3	1940	243	205.52	210.77	215.96	294.40	304.09	313.50	254.05	253.56	253.80	252.89	252.35	252.53	253.34	256.22	252.39
LV3	2000	262	205.50	210.75	215.94	294.35	304.04	313.46	254.46	254.38	254.42	253.90	253.79	253.65	254.32	257.28	253.56
LV3	2150	261	205.49	210.74	215.92	295.03	304.70	314.11	254.57	254.57	254.57	254.10	254.32	254.16	254.55	257.53	254.04
LV4	1101	217	204.84	211.97	219.00	290.12	302.33	314.14	245.78	228.59	237.16	251.78	232.94	242.42	222.78	222.78	226.90
LV4	1191	222	205.30	213.09	220.78	294.22	307.14	319.69	247.34	229.76	238.52	248.87	230.80	239.89	225.03	225.02	225.94
LV4	1311	242	205.48	213.31	221.06	294.49	307.43	320.01	247.33	229.84	238.56	247.44	228.95	238.31	225.52	225.52	224.87
LV4	1588	243	205.51	213.35	221.10	294.37	307.29	319.84	248.36	231.98	240.13	248.40	231.50	239.66	228.05	228.29	227.56
LV4	2452	290	239.98	246.36	252.67	315.92	325.86	335.58	283.81	283.81	283.81	275.50	275.33	275.31	283.00	285.76	275.05
LV5	1182	244	205.28	205.92	206.55	294.11	296.36	298.56	210.23	217.32	217.32	210.30	217.32	217.19	239.54	234.65	235.51
LV5	1272	248	205.45	206.18	206.90	294.52	297.01	299.45	211.02	218.99	218.99	210.94	218.34	218.19	238.38	233.66	232.03
LV5	1745	270	205.51	206.87	208.21	294.40	298.16	301.83	216.55	224.93	229.78	216.37	224.30	229.63	256.89	253.73	254.63
LV7	1098	215	204.51	204.51	204.51	285.31	285.33	285.34	204.45	204.46	204.46	204.45	204.46	204.46	208.83	208.22	208.56
LV7	1203	227	205.36	205.36	205.36	294.32	294.37	294.42	205.40	205.46	205.46	205.39	205.45	205.45	213.22	212.10	211.58
LV7	1250	211	205.45	205.46	205.46	294.51	294.57	294.63	205.50	205.57	205.57	205.50	205.56	205.56	213.68	212.50	211.80
LV8	985	207	173.21	173.22	173.23	220.50	220.62	220.74	173.28	173.45	173.45	173.27	173.44	173.44	173.17	173.17	173.17
LV13	1800	260	205.56	213.39	221.15	295.08	308.04	320.63	278.97	242.72	249.22	277.93	241.63	248.00	255.74	258.43	253.06

Tabla 19. Tabla comparativa de datos de temperaturas medidas en pozos (Verma et al., 2006) y temperaturas de los 15 modelos simulados en °*C*.

Pozo	z [m]	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	M11	M12	M13	M14	M15
LV1	1057	-11.77	-11.35	-10.94	21.20	22.52	23.81	-9.12	-4.98	-4.98	-5.28	2.45	2.40	0.37	-1.34	6.21
LV1	1150	-15.56	-14.82	-14.08	20.89	22.78	24.62	-11.30	-5.15	-5.16	-10.86	-3.96	-4.09	-3.51	-5.22	-5.21
LV1	1325	-8.67	-7.73	-6.80	30.87	33.17	35.41	-3.43	4.08	4.07	-3.50	3.47	3.29	3.84	2.05	1.12
LV1	1500	-7.85	-6.89	-5.94	32.00	34.35	36.64	-2.48	5.11	5.17	-2.64	4.37	5.01	4.85	3.06	2.21
LV1	1633	-7.01	-5.95	-4.90	33.19	35.77	38.28	-0.67	6.91	7.87	-0.72	6.45	8.33	7.11	5.43	4.87
LV1	1695	-5.30	-4.05	-2.81	35.65	38.53	41.33	2.30	9.92	12.03	2.29	9.50	12.35	10.60	9.07	8.68
LV3	1202	-10.71	-8.46	-6.24	28.00	32.18	36.23	4.10	-2.08	1.00	4.36	-1.98	1.22	-4.04	-4.05	-3.96
LV3	1647	-11.42	-9.15	-6.92	26.89	31.07	35.13	4.29	-1.00	1.63	4.40	-0.92	1.71	-2.55	-2.36	-2.53
LV3	1830	-21.26	-19.25	-17.26	12.81	16.53	20.14	-3.57	-4.63	-4.10	-4.06	-5.11	-4.59	-4.98	-4.06	-5.41
LV3	1940	-15.42	-13.26	-11.13	21.15	25.14	29.01	4.55	4.35	4.45	4.07	3.85	3.92	4.26	5.44	3.86
LV3	2000	-21.56	-19.56	-17.58	12.35	16.05	19.64	-2.88	-2.91	-2.89	-3.09	-3.13	-3.19	-2.93	-1.80	-3.22
LV3	2150	-21.27	-19.26	-17.27	13.04	16.74	20.35	-2.46	-2.46	-2.46	-2.64	-2.56	-2.62	-2.47	-1.33	-2.67
LV4	1101	-5.60	-2.32	0.92	33.69	39.32	44.77	13.26	5.34	9.29	16.03	7.34	11.71	2.66	2.66	4.56
LV4	1191	-7.52	-4.02	-0.55	32.53	38.35	44.01	11.41	3.50	7.44	12.10	3.96	8.06	1.36	1.36	1.77
LV4	1311	-15.09	-11.85	-8.65	21.69	27.04	32.24	2.20	-5.02	-1.42	2.25	-5.39	-1.52	-6.81	-6.81	-7.08
LV4	1588	-15.43	-12.20	-9.01	21.14	26.46	31.62	2.21	-4.53	-1.18	2.22	-4.73	-1.37	-6.15	-6.05	-6.35
LV4	2452	-17.25	-15.05	-12.87	8.94	12.37	15.72	-2.13	-2.14	-2.14	-5.00	-5.06	-5.06	-2.41	-1.46	-5.15
LV5	1182	-15.87	-15.61	-15.35	20.54	21.46	22.36	-13.84	-10.93	-10.93	-13.81	-10.94	-10.99	-1.83	-3.83	-3.48
LV5	1272	-17.16	-16.86	-16.57	18.76	19.76	20.75	-14.91	-11.70	-11.70	-14.94	-11.96	-12.02	-3.88	-5.78	-6.44
LV5	1745	-23.88	-23.38	-22.89	9.04	10.43	11.79	-19.79	-16.69	-14.90	-19.86	-16.93	-14.95	-4.85	-6.03	-5.69
LV7	1098	-4.88	-4.88	-4.88	32.70	32.71	32.72	-4.91	-4.90	-4.90	-4.91	-4.90	-4.90	-2.87	-3.15	-3.00
LV7	1203	-9.53	-9.53	-9.53	29.66	29.68	29.70	-9.52	-9.49	-9.49	-9.52	-9.50	-9.50	-6.07	-6.56	-6.79
LV7	1250	-2.63	-2.63	-2.63	39.58	39.60	39.63	-2.60	-2.57	-2.57	-2.61	-2.58	-2.58	1.27	0.71	0.38
LV8	985	-16.32	-16.32	-16.32	6.52	6.58	6.64	-16.29	-16.21	-16.21	-16.29	-16.21	-16.21	-16.34	-16.34	-16.34
LV13	1800	-20.94	-17.93	-14.94	13.49	18.48	23.32	7.30	-6.65	-4.15	6.90	-7.07	-4.61	-1.64	-0.60	-2.67
Error n	nínimo	-23.88	-23.38	-22.89	6.52	6.58	6.64	-19.79	-16.69	-16.21	-19.86	-16.93	-16.21	-16.34	-16.34	-16.34
Error n	náximo	-2.63	-2.32	0.92	39.58	39.60	44.77	13.26	9.92	12.03	16.03	9.50	12.35	10.60	9.07	8.68

 Tabla 20. Tabla comparativa del porcentaje de error normalizado (%ErN) de las temperaturas simuladas de cada modelo con base en la Tabla 19.



Figura 43. Distribución del porcentaje de error normalizado (%ErN) en cada modelo para el pozo LV1 del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes. Los círculos abiertos representan valores atípicos (outliers).



Figura 44. Distribución del porcentaje de error normalizado (%ErN) en cada modelo para el pozo LV3 del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes. Los círculos abiertos representan valores atípicos (outliers).



Figura 45. Distribución del porcentaje de error normalizado (%ErN) en cada modelo para el pozo LV4 del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes.



Figura 46. Distribución del porcentaje de error normalizado (%ErN) en cada modelo para el pozo LV5 del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes.



Figura 47. Distribución del porcentaje de error normalizado (%ErN) en cada modelo para el pozo LV7 del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes.



Figura 48. Distribución del porcentaje de error normalizado (%ErN) en cada modelo para el pozo LV13 del Campo Geotérmico Las Tres Vírgenes.

4.7 Discusión

Los resultados muestran diferencias notables en los campos de temperatura cuando el flujo de calor en las zonas de falla se establece ya sea como una fuente constante o como una condición inicial. En el caso de una fuente constante, se debe ajustar el tiempo de simulación para un valor de *HF* dado y, de este modo, lograr obtener temperaturas cercanas a las temperaturas de referencia (temperaturas de registros de pozos geotérmicos). Una limitación en este caso es conocer con menor incertidumbre el tiempo de residencia del fluido en el yacimiento lo que está fuera del alcance de este trabajo de investigación; además de que el modelo conceptual del yacimiento geotérmico establecido fue considerado como un sistema cerrado, donde no hay transferencia de materia (procesos de recarga y extracción de fluido geotérmico), sólo transferencia de energía (calor).

En este trabajo, se propuso un flujo de calor $HF = 1.5 W/m^2$ para el yacimiento para los modelos 1 al 6 considerando que el flujo de calor en un campo geotérmico es del orden de $HF = 0.5 W/m^2$ y, en el interior del yacimiento puede ser mayor. Aunque en los modelos 1 al 3 las zonas de falla se evaluaron con un flujo de calor máximo $HF = 2.1 W/m^2$, no se alcanzaron los valores de temperaturas de referencia para el CGLTV para un tiempo total de simulación de 200 años. Esto se refleja en las gráficas de distribución del error normalizado (%ErN; **jError! No se encuentra el origen de la referencia**.), ya que el valor promedio del porcentaje de error de estos modelos 4 al 6), donde el comportamiento de los campos de temperatura tuvo la misma tendencia, pero las temperaturas fueron sobreestimadas al final del tiempo total, obteniendo un valor promedio del porcentaje de error (%ErN) mayor al 20% como se muestra en **jError! No se encuentra el origen de** areforencia.

En los modelos 7 al 15, se implementó un flujo de calor como condición inicial en las zonas de falla. El comportamiento de estos modelos es de variaciones de temperatura en las zonas de falla en el paso inicial y con el tiempo el calor se disipa en el resto del yacimiento (ver ejemplo en Figura 2537 y 45), lo que permitió una mejora en la estimación de temperaturas con respecto a los valores de referencia para el CGLTV.

La velocidad inicial del flujo y las variaciones de permeabilidad k del yacimiento fueron otros parámetros que se utilizaron para evaluar la repuesta del algoritmo. El orden de las velocidades consideradas fue de $1x10^{-12} m/s$ y $1x10^{-13} m/s$, que son valores típicos reportados en la literatura (McKenna & Blackwell, 2004; Wisian & Blackwell, 2004). Por otro lado, el aumento de permeabilidad está asociado a la presencia

de fallas, por lo que el rango de permeabilidad propuesto para el yacimiento de estos modelos se encuentra entre $1x10^{-12} m^2 y 1x10^{-16} m^2$. Valores de permeabilidad menores a $1x10^{-16} m^2$ emulan un comportamiento de transferencia de calor por conducción y valores mayores a $1x10^{-12} m^2$ presentan turbulencias en el campo de velocidades o un comportamiento similar a la convección de un fluido en un medio libre o un medio no poroso, lo cual influye en la convergencia de la solución acoplada de las ecuaciones de gobierno de masa, momento (presión-velocidad) y energía (temperatura), en donde la ecuación de Darcy no es suficiente para estimar los campos de velocidades.

Se encontró que para un modelo con un campo de permeabilidades dado (ver Tabla 11), la variación de la velocidad inicial del flujo no repercutía de forma significativa en los campos de presión y velocidad al final del tiempo total de simulación. La explicación a esto es que el yacimiento de los modelos se asume como un sistema cerrado en donde no hay fuente o sumidero de materia (procesos de recarga, extracción o reinyección de fluidos geotérmicos), por lo que no hay perturbaciones en el movimiento convectivo del fluido y éste se homogeneiza antes de terminar el tiempo total de simulación. En otras palabras, se obtienen campos de velocidad y presión en equilibrio. Si bien los campos de temperatura de los modelos reflejan un acoplamiento adecuado de los campos de presión y velocidad para la transferencia de calor, el yacimiento como un sistema cerrado limitó conocer el alcance del algoritmo o si el rango de valores de permeabilidad pueda ampliarse. Sin embargo, hay que señalar que modelar un sistema cerrado es un paso que debe realizarse previamente a incorporar fuentes o sumideros de masa en las simulaciones para tener un mejor control en la evaluación de los parámetros.

La precisión de estos modelos depende mayormente de la información que se tenga del campo geotérmico, la cual incluye mediciones de temperatura de pozos y de manantiales termales, geometría y distribución de fallas y fracturas, estratigrafía, grado de alteración y propiedades termodinámicas de las rocas del sitio y, en el mejor de los casos, un balance hídrico del subsuelo de la zona de estudio para establecer fuentes y sumideros de fluido. Es necesario señalar lo anterior ya que información insuficiente para la modelación supone un sesgo en la interpretación de resultados.

De acuerdo con la gráfica de distribución del porcentaje de error general (%ErN; **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), los modelos 7-12 muestran un rango entre -16% y 14%. Para reducir el rango de error se tomó en cuenta que los pozos LV1, LV5 y LV7 fueron proyectados perpendicularmente en el perfil A-B, ya que se encuentran considerablemente alejados. Esto implica que las mediciones de temperatura de estos pozos no son representativas del perfil.

En la **Figura 10**, los pozos LV1 y LV5 se encuentran posicionados el norte del CGLTV y al suroeste de una falla con orientación NW-SE que parece ser una sección escalonada de la falla F3 (La Reforma), a lo que cabe agregar que existen otras fallas cerca de estos dos pozos. La distancia entre estos pozos y la falla F3 en el perfil es el resultado de haber proyectado perpendicularmente los pozos, pero no la falla. Considerando lo anterior, el dominio de permeabilidad y de flujo de calor para la falla F3 se desplazó 200 metros en dirección SW en los modelos 13, 14 y 15, lo cual resultó en temperaturas simuladas más cercanas a las temperaturas de referencia. Como resultado, estos tres modelos mostraron un rango de error entre -10% a 10%. Esto podría ser indicio de un sesgo en la información en las estructuras geológicas del CGLTV, lo cual limita una configuración más detallada del escenario de los modelos. Esto mismo podría estar ocurriendo en el pozo LV7, que se encuentra al sureste del perfil A-B.

De los 15 modelos, el modelo 13 fue considerado el modelo con las mejores estimaciones, ya que presenta los valores de errores normalizados mas bajos tanto en la gráfica general (-6.81 a 10.60%; **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), como en la distribución de porcentaje de error por pozo (Figuras

Figura 43Figura **48**). Las gráficas de distribución de porcentaje de error de los pozos muestran que los modelos 1-3 y 4-6 tienen la misma tendencia en todos los pozos y los modelos 7 al 15 presentan mejoras. A excepción del modelo 13, el resto de los modelos presentan una distribución que puede favorecer la disminución del error para un pozo, pero el aumento para otro. Por ejemplo, el modelo 8 es más adecuado para el pozo LV4 (

Figura 45) que para el pozo LV5 (Figura Figura 46), ya que la caja de error de este último se encuentra completamente por debajo de -10%. Lo anterior, también podría ser consecuencia de falta de información de la zona de estudio.

A pesar de las limitaciones del modelo conceptual propuesto para el campo geotérmico Las Tres Vírgenes, se logró desarrollar un algoritmo de acoplamiento de las ecuaciones de presión y velocidad para la modelación numérica de la transferencia de calor en 2D de un yacimiento geotérmico, logrando tener un algoritmo versátil, el cual puede adecuarse a las necesidades de problema futuros, donde los resultados pueden mejorar si se cuenta con más información del campo en estudio.

Capítulo 5. Conclusiones y recomendaciones

El algoritmo numérico en lenguaje Fortran resuelve de manera acoplada los campos de presiones, velocidades y temperaturas que satisfacen las ecuaciones de balance de energía, momento y masa en un yacimiento geotérmico.

Para evaluar su funcionalidad, el algoritmo fue aplicado al campo geotérmico Las Tres Vírgenes, donde se simularon 15 modelos distintos para estimar el campo de temperaturas, variando la permeabilidad y los valores y distribución de fuentes de calor. Los resultados mostraron que el modelo 13 fue el mejor de manera global y para cada pozo, ya que con este modelo se estimaron errores normalizados (a partir de las temperaturas simuladas y las temperaturas de registro de los pozos reportados en la literatura) con una distribución del porcentaje de error de $\pm 10\%$.

El algoritmo es adecuado para implementarse en campos geotérmicos bajo el concepto de un sistema cerrado (líquido dominante) en medio poroso, donde solo hay transferencia del calor entre el sistema y sus entornos (no hay transferencia de materia).

El flujo de calor, al ser el parámetro de mayor control en los campos de temperatura de un sistema geotérmico, debe ser cuidadosamente configurado considerando la mayor cantidad de información posible de la zona de estudio.

El esquema de discretización de las ecuaciones gobernantes se realizó utilizando el Método de Volumen Finito o Volumen de Control (MVF), además de usar el método Up-Wind para resolver la transferencia de calor, por lo tanto, los valores de permeabilidad deben estar por arriba de $k = 1x10^{-12} m^2$ para evitar problemas de divergencia (no convergencia de la modelación numérica).

Los modelos numéricos presentan un movimiento de flujo en convección estabilizado y homogéneo antes de terminar el tiempo total de simulación debido a que se está simulando un sistema cerrado sin fuentes ni sumideros de masa. Por lo tanto, los resultados de los modelos numéricos dependen altamente del tiempo total de simulación si el flujo de calor se implementa como una fuente constante.

Este algoritmo puede ser adaptado a otros campos geotérmicos siempre y cuando se tenga la información necesaria para la modelación y los modelos pueden mejorarse en el tiempo al integrar información y datos nuevos.

Los códigos de generación de gráficas en Python son una herramienta clave para examinar los resultados de las modelaciones de manera eficaz ya que facilita la detección e identificación ágil de errores en el algoritmo.

Para trabajos futuros que sigan la línea de este estudio, se recomienda la implementación de fuentes y sumideros de materia (fluido) en el yacimiento geotérmico en producción, entre los cuales se encuentra la extracción de fluidos (pozos productores) y la reinyección de fluidos (pozos inyectores), así como los procesos de recarga de aguas meteóricas al yacimiento.

También se recomienda evaluar otros métodos que permitan incorporar a la modelación numérica permeabilidades más altas (> $k = 1x10^{-12} m^2$), sobre todo en áreas de alteración hidrotermal en la cima del yacimiento, con fines de estimación de profundidades de circulación hidrotermal.

Literatura citada

- Antayhua Vera, Y. T. (2017). Caracterización sismológica aeromagnética y magnetotelúrica del Campo Volcánico y Geotérmico Las Tres Vírgenes, Baja California Sur, México [Tesis de Doctorado en Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México]. http://132.248.9.195/ptd2017/marzo/0757594/0757594.pdf
- Avellán, D. R., Macías, J. L., Arce, J. L., Jiménez-Haro, A., Saucedo-Girón, R., Garduño-Monroy, V. H., Sosa-Ceballos, G., Bernal, J. P., López-Loera, H., Cisneros, G., Layer, P. W., García-Sánchez, L., Reyes-Agustín, G., Rocha, V. S., & Rangel, E. (2018). Eruptive chronology and tectonic context of the late Pleistocene Tres Vírgenes volcanic complex, Baja California Sur (México). *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, *360*, 100–125. <u>https://doi.org/10.1016/J.JVOLGEORES.2018.06.012</u>
- Barragán, R. M., Iglesias, E., Torres, R. J., Arellano, V. M., Reyes-Picasso, N., Ramírez, M., & Hernández, P. (2010). Cambios geoquímicos en fluidos del campo geotérmico de Las Tres Vírgenes, BCS, durante 1997-2007: Identificación de procesos de yacimiento. *Geotermia. Revista Mexicana de Geoenergía*, 23(2), 24–32. <u>https://biblat.unam.mx/hevila/Geotermia/2010/vol23/no2/3.pdf</u>
- Benton, A., García, F., Sillis, J., & Cruz, S. (2011). Estudio geohidrológico de la cuenca de Tres Vírgenes, B.C.S. [Informe técnico DEX-DGL-TV-16-11, Gerencia de proyectos Geotermoeléctricos, Comisión Federal de Electricidad, 196]
- Casallas-Moreno, K. L., González-Escobar, M., Gómez-Arias, E., Mastache-Román, E. A., Gallegos-Castillo, C. A., & González-Fernández, A. (2021). Analysis of subsurface structures based on seismic and gravimetric exploration methods in the Las Tres Vírgenes volcanic complex and geothermal field, Baja California Sur, Mexico. *Geothermics*, 92. https://doi.org/10.1016/j.geothermics.2020.102026
- Çengel, Y. A. (2007). Transferencia de calor y masa. Un enfoque práctico (3ra Ed.). McGraw Hill,

 Interamericana
 Editores.

 <u>https://dredgarayalaherrera.wordpress.com/wp-</u>

 <u>content/uploads/2019/06/transferencia-de-calor-un-enfoque-prc3a1ctico-3ra-edicion-yunus-</u>

 <u>cengel1-copia.pdf</u>
- Çengel, Y. A., & Boles, M. A. (2011). *Termodinámica* (7ma Ed.). McGraw-Hill. <u>https://www.academia.edu/39821820/Termodin%C3%A1mica_Cengel_and_Boles_7ma_edici%C_3%B3n</u>
- Christiansen, R., Mebrahtu, T. K., Aguil, N., & Wohnlich, S. (2024). Numerical modelling of an advective geothermal system in the Central Andes: Sustainable utilization through borehole heat exchangers. *Renewable Energy*, 223. <u>https://doi.org/10.1016/j.renene.2024.119989</u>
- Conly, A. G., Brenan, J. M., Bellon, H., & Scott, S. D. (2005). Arc to rift transitional volcanism in the Santa Rosalía Region, Baja California Sur, Mexico. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 142(3–4), 303–341. <u>https://doi.org/10.1016/J.JVOLGEORES.2004.11.013</u>
- Contreras, J. (2015, noviembre 28). Flujo de calor. En Contreras, J., Herrera, G., & Tolson, G., *Modelado de Procesos Terrestres*. (pp. 1-40). https://www.researchgate.net/publication/284899923 Flujo_de_Calor_en_la_Litosfera_Terrestretre______e__- Capitulo_de_libro

- Darmawan, I. G. B., Rustadi, & Karyanto. (2023). Hydrothermal fluid flow modeling using numerical simulation to identify potential reservoir zones in the Mount Rajabasa geothermal field. *Kuwait Journal of Science*, *50*(3), 376–386. <u>https://doi.org/10.1016/j.kjs.2023.02.025</u>
- Dickson, M. H., & Fanelli, M. (2003). *Geothermal Energy: Utilization and Technology*. United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (UNESCO)
- DiPippo, R. (2012). Geology of Geothermal Regions. In L. Reading (Ed.), *Geothermal Power Plants* (pp. 3–18). Joe Hayton. <u>https://doi.org/10.1016/B978-0-08-098206-9.00001-4</u>
- Fallah, A. H., Gu, Q., Chen, D., Ashok, P., & van Oort, E. (2021). Globally scalable geothermal energy production through managed pressure operation control of deep closed-loop well systems. *Energy Conversion and Management*, 236. <u>https://doi.org/10.1016/j.enconman.2021.114056</u>
- Ferreira, G. G. S., Lage, P. L. C., Silva, L. F. L. R., & Jasak, H. (2019). Implementation of an implicit pressure– velocity coupling for the Eulerian multi-fluid model. *Computers and Fluids*, 181, 188–207. <u>https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.01.018</u>
- Fletcher, J. M., Grove, M., Kimbrough, D., Lovera, O., & Gehrels, G. E. (2007). Ridge-trench interactions and the Neogene tectonic evolution of the Magdalena shelf and southern Gulf of California: Insights from detrital zircon U-Pb ages from the Magdalena fan and adjacent areas. *Bulletin of the Geological Society of America*, 119(11–12), 1313–1336. <u>https://doi.org/10.1130/B26067.1</u>
- Fletcher, J. M., & Munguia, L. (2000). Active continental rifting in southern Baja California Mexico: Implications for plate motion partitioning and the transition to seafloor spreading in the Gulf of California. *Tectonics*, 19(6), 1107–1123. <u>https://doi.org/10.1029/1999TC001131</u>
- Franco, A., & Vaccaro, M. (2014). Numerical simulation of geothermal reservoirs for the sustainable design of energy plants: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 30, (987–1002). <u>https://doi.org/10.1016/j.rser.2013.11.041</u>
- Ganguly, S., & Kumar, M. S. M. (2012). Geothermal Reservoirs A Brief Review. *Journal of the Geological Society of India, 79*(6), 589-602. <u>https://doi.org/10.1007/s12594-012-0098-8</u>
- Gómez, G., & Rocha, S. (2009). Estudio estructural a detalle en la zona noreste y noroeste del campo geotérmico Las Tres Vírgenes, Baja California Sur. [Informe técnico, Gerencia de proyectos Geotermoeléctricos, Comisión Federal de Electricidad, 52]
- Guerrero, F. J., Sosa-Ceballos, G., Prol-Ledesma, R. M., Jácome-Paz, M. P., Calò, M., de la Cruz, L. M., & Macías, J. L. (2021). A numerical model for the magmatic heat reservoir of the Las Tres Virgenes volcanic complex, Baja California Sur, Mexico. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 414. <u>https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2021.107227</u>
- Hillcoat, S., & Hickey, J. P. (2025). Pressure–velocity coupling in transpiration cooling. *International Journal* of Heat and Mass Transfer, 239. <u>https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2024.126532</u>
- Holman, J. P. (1998). *Transferencia de Calor* (8va ed.). Mc Graw Hill. <u>https://biblici.wordpress.com/wp-content/uploads/2013/07/holman-j-p-8ed1998-transferencia-de-calor.pdf</u>
- Instituto Mexicano del Petróleo. (2017). *Cartera de necesidades de innovación y desarrollo tecnológico Geotermia*. [Reporte]

- Izquierdo, M. G. (2006). Estudio microtermométrico de inclusiones fluidas en los pozos LV-11 y LV-13 del Campo Geotérmico de Las Tres Vírgenes, B.C.S. [Informe técnico, Comisión Federal de Electricidad]
- Kim, J., Lee, Y., Yoon, W. S., Jeon, J. S., Koo, M. H., & Keehm, Y. (2010). Numerical modeling of aquifer thermal energy storage system. *Energy*, 35(12), 4955–4965. <u>https://doi.org/10.1016/j.energy.2010.08.029</u>
- Macías, J. L., & Jiménez, S. (2012). Actualización vulcanológica del complejo de Las Tres Vírgenes, Baja California Sur. *Memorias Del XX Congreso Anual de la Asociación Geotérmica Mexicana-I Congreso Geotérmico Latinoamericano*, 8.
- Macías, J. L., & Jiménez, S. (2013). Estudio de Estratigrafía y Geología del Complejo Volcánico Tres Vírgenes, Baja California Sur. *Revista Mexicana de Geoenergía, Geotermia.*, 26(1), 14–23. <u>https://www.geotermia.org.mx/app/assets/media/2017/11/Geotermia-Vol26-1.pdf</u>
- Martínez-Safora, C. B. (2009). Apuntes del tema geotermia de la asignatura geología de explotación del petróleo, agua y vapor. [Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México]. https://hdl.handle.net/20.500.14330/TES01000649659
- McKenna, J. R., & Blackwell, D. D. (2004). Numerical modeling of transient Basin and Range extensional geothermal systems. *Geothermics*, 33(4), 457–476. https://doi.org/10.1016/j.geothermics.2003.10.001
- Patankar, S. V. (1980). Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corporation. <u>https://catatanstudi.wordpress.com/wp-content/uploads/2010/02/numerical-heat-transfer-and-fluid-flow.pdf</u>
- Peña Beltrán, Y. X. (2023). Modelado numérico en 2D del transporte de solutos (Na, K, Ca y Mg) en un yacimiento geotérmico: El caso de Las Tres Vírgenes, BCS. [Tesis de Maestría en Ciencias, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California]. https://cicese.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1007/3843/1/tesis Yesica%20Ximena %20Peña%20Beltrán 27%20ene%202023.pdf
- Peña-Beltrán, Y. X., Gómez-Arias, E., Delgado-Argote, L. A., & Tello-Hinojosa, E. (2024). 2D numerical modeling of solute transport Na-K from a geothermal reservoir: The case of Las Tres Vírgenes, BCS. *Geothermics*, 117. <u>https://doi.org/10.1016/j.geothermics.2023.102890</u>
- Seiler, C., Fletcher, J. M., Quigley, M. C., Gleadow, A. J. W., & Kohn, B. P. (2010). Neogene structural evolution of the Sierra San Felipe, Baja California: Evidence for proto-gulf transtension in the Gulf Extensional Province? *Tectonophysics*, 488(1–4), 87–109. https://doi.org/10.1016/J.TECTO.2009.09.026
- Serra, N., & Semiao, V. (2021). ESIMPLE, a new pressure–velocity coupling algorithm for built-environment CFD simulations. *Building and Environment*, 204. <u>https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2021.108170</u>
- Sosa-Ceballos, G., Macías, J. L., Avellán, D. R., Arce, J. L., Saucedo, R., Boijseauneau-López, M., García-Sánchez, L., Reyes-Agustín, G., & Osorio-Ocampo, S. (2019). Genesis of magmas from the Tres Vírgenes Volcanic Complex, Baja California Sur, México. *Lithos*, *350–351*, 105240. <u>https://doi.org/10.1016/J.LITHOS.2019.105240</u>

- Tello-Hinojosa, E., Verma, M. P., & González-Partida, E. (2005). Geochemical Characteristics of ReservoirFluids in the Geochemical Characteristics of Reservoir Fluids in the Las Tres Virgenes, BCS, México.ProceedingsWorldGeothermalCongress,Congress,24–29.https://www.researchgate.net/publication/267829709
- Van Doormal, J.P. and Raithby, G.D. (1984). Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows. *Numerical Heat Transfer*, 7(2), 147-163. <u>https://doi.org/10.1080/01495728408961817</u>
- Verma, S. P., Pandarinath, K., Santoyo, E., González-Partida, E., Torres-Alvarado, I. S., & Tello-Hinojosa, E. (2006). Fluid chemistry and temperatures prior to exploitation at the Las Tres Vírgenes geothermal field, Mexico. *Geothermics*, 35(2), 156–180. <u>https://doi.org/10.1016/j.geothermics.2006.02.002</u>
- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. (2nd ed.). Pearson Education Limited.
- Vidal, A., Kassab, A. J., & Divo, E. A. (2016). A direct velocity-pressure coupling Meshless algorithm for incompressible fluid flow simulations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 72, 1–10. <u>https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2016.07.014</u>
- Viggiano-Guerra, J. C., Sandoval-Medina, F., Flores-Armenta, M. C., Pérez, R. J., & González-Partida, E. (2009). Aplicación del SPALC en la especiación química y termodinámica de fluidos: ejemplos del caso de los pozos LV-4A, LV-11 y LV-13, del campo geotérmico de Las Tres Vírgenes, BCS. *GEOTERMIA. Revista Mexicana de Geoenergía*, 22(1), 12–27. https://biblat.unam.mx/hevila/Geotermia/2009/vol22/no1/2.pdf
- Wisian, K. W., & Blackwell, D. D. (2004). Numerical modeling of Basin and Range geothermal systems. *Geothermics*, 33(6), 713–741. <u>https://doi.org/10.1016/j.geothermics.2004.01.002</u>
- Witherspoon, P. A., Amick, C. H., Gale, J. E., & Iwai, K. (1979). Observations of a Potential Size Effect in Experimental Determination of the Hydraulic Properties of Fractures. *Water Resources Research*, 15 (5), (1142-1146). <u>https://doi.org/10.1029/WR015i005p01142</u>
- Witherspoon, P. A., Wang, J. S. Y., Iwai, K., & Gale, J. E. (1979). Validity of Cubic Law For Fluid Flow in a Deformable Rock Fracture. [Reporte técnico W-7405-ENG-48, Lawrence Berkeley Laboratory, University of California] <u>https://doi.org/10.1029/WR016i006p01016</u>
- Xamán, J., & Gijón-Rivera, M. (2015). Dinámica de fluidos computacional para ingenieros. Palibrio.
- Yao, J., Zhang, X., Huang, Z., Gong, L., Yang, W., & Li, Y. (2022). Numerical simulation of thermoehydraulic coupling processes in fractured karst geothermal reservoirs. *Natural Gas Industry B*, 9(6), 511-520. <u>https://doi.org/10.1016/j.ngib.2022.11.003</u>

Anexos

A. Desarrollo numérico de la ecuación general discretizada para el cálculo de la presión a partir de la ecuación de derivadas parciales en 2D

Ecuación inicial de derivadas parciales, donde se tiene densidad de fluido $\rho_f (kg/m^3)$, conductividad hidráulica $K = \frac{\rho k}{\mu}$, área A(m) y el coeficiente $\alpha = \rho \phi C_T \Delta V$.

$$\alpha \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{KA}{\partial x} (\partial^2 P) + \frac{KA}{\partial z} (\partial^2 P - \rho_f g \partial^2 z) + S$$
(79)

Desarrollo numérico de la ecuación de derivadas parciales para calcular la presión (Ec.(41) en términos de posición en un volumen de control respecto a un sistema de coordenadas de mallas desfasadas (**iError!** No se encuentra el origen de la referencia.), en donde se tiene que el factor de área es $A_{(I,J)} = (x_{(i+1)} - x_{(i)})(z_{(j+1)} - z_{(j)})$

$$\begin{aligned} \alpha (P_{(l,f)} - P^{0}) &= \left[\frac{K_{(l+1,f)}A_{(l,f)}}{x_{(l+1)} - x_{(l)}} (P_{(l+1,f)} - P_{(l,f)}) \right] \\ &- \frac{K_{(i,f)}A_{(l,f)}}{x_{(l)} - x_{(l-1)}} (P_{(l,f)} - P_{(l-1,f)}) \right] \\ &+ \left[\frac{K_{(l,j+1)}A_{(l,f)}}{z_{(j+1)} - z_{(j)}} (P_{(l,f+1)} - P_{(l,f)}) - \frac{K_{(l,f)}A_{(l,f)}}{z_{(f)} - z_{(f-1)}} (P_{(l,f)} - P_{(l,f-1)}) \right] \\ &- \left[\left\{ \left(\frac{K_{(l,j+1)}A_{(l,f)}}{z_{(j+1)} - z_{(j)}} \rho_{f(l,f+1)}gz_{(j+1)} \right) - \left(\frac{K_{(l,j+1)}A_{(l,f)}}{z_{(f+1)} - z_{(f)}} \rho_{f(l,f)}gz_{(f)} \right) \right\} \right] \\ &- \left\{ \left(\frac{K_{(l,j)}A_{(l,f)}}{z_{(f)} - z_{(f-1)}} \rho_{f(l,f)}gz_{(f)} \right) \\ &- \left(\frac{K_{(l,j)}A_{(l,f)}}{z_{(f)} - z_{(f-1)}} \rho_{f(l,f-1)}gz_{(f-1)} \right) \right\} \right] + S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(P_{(l,J)} - P^{0}) &= \left[\left(\frac{K_{(l+1,J)} A_{(l,J)}}{x_{(l+1)} - x_{(l)}} P_{(l+1,J)} \right) - \left(\frac{K_{(l+1,J)} A_{(l,J)}}{x_{(l+1)} - x_{(l)}} P_{(l,J)} \right) \right] \\ &- \left[\left(\frac{K_{(i,J)} A_{(l,J)}}{x_{(l)} - x_{(l-1)}} P_{(l,J)} \right) - \left(\frac{K_{(i,J)} A_{(l,J)}}{x_{(l)} - x_{(l-1)}} P_{(l-1,J)} \right) \right] \\ &+ \left[\left(\frac{K_{(l,j+1)} A_{(l,J)}}{z_{(j+1)} - z_{(J)}} P_{(l,J+1)} \right) - \left(\frac{K_{(l,j+1)} A_{(l,J)}}{z_{(j+1)} - z_{(J)}} P_{(l,J)} \right) \right] \\ &- \left[\left(\frac{K_{(l,j+1)} A_{(l,J)}}{z_{(j)} - z_{(j-1)}} P_{(l,J)} \right) - \left(\frac{K_{(l,j)} A_{(l,J)}}{z_{(j)} - z_{(j-1)}} P_{(l,J-1)} \right) \right] \\ &- \left[\left\{ \left(\frac{K_{(l,j)} A_{(l,J)}}{z_{(j+1)} - z_{(J)}} \rho_{f(l,J)} g_{z_{(j)}} \right) - \left(\frac{K_{(l,j)} A_{(l,J)}}{z_{(j+1)} - z_{(J)}} \rho_{f(l,J)} g_{z_{(J)}} \right) \right\} \\ &- \left\{ \left(\frac{K_{(l,j)} A_{(l,J)}}{z_{(j)} - z_{(j-1)}} \rho_{f(l,J)} g_{z_{(J)}} \right) - \left(\frac{K_{(l,j)} A_{(l,J)}}{z_{(J)} - z_{(J-1)}} \rho_{f(l,J-1)} g_{z_{(J-1)}} \right) \right\} \right] \\ &+ S \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha + \frac{K_{(i+1,j)}A_{(l,j)}}{x_{(l+1)} - x_{(l)}} + \frac{K_{(i,j)}A_{(l,j)}}{x_{(l)} - x_{(l-1)}} + \frac{K_{(l,j+1)}A_{(l,j)}}{z_{(j+1)} - z_{(j)}} + \frac{K_{(l,j)}A_{(l,j)}}{z_{(j)} - z_{(j-1)}} \end{pmatrix} P_{(l,j)} = \\ = \begin{pmatrix} \frac{K_{(i+1,j)}A_{(l,j)}}{x_{(l+1)} - x_{(l)}} P_{(l+1,j)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K_{(i,j)}A_{(l,j)}}{x_{(l)} - x_{(l-1)}} P_{(l-1,j)} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \frac{K_{(l,j+1)}A_{(l,j)}}{z_{(j+1)} - z_{(j)}} P_{(l,j+1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K_{(l,j)}A_{(l,j)}}{z_{(j)} - z_{(j-1)}} P_{(l,j-1)} \end{pmatrix} \\ - \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{K_{(l,j+1)}A_{(l,j)}}{z_{(j+1)} - z_{(j)}} \rho_{f(l,j)} g_{Z_{(j)}} \end{pmatrix} \end{bmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{K_{(l,j)}A_{(l,j)}}{z_{(j)} - z_{(j-1)}} \rho_{f(l,j)} g_{Z_{(j)}} \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \frac{K_{(l,j)}A_{(l,j)}}{z_{(j)} - z_{(j-1)}} \rho_{f(l,j-1)} g_{Z_{(j-1)}} \end{pmatrix} \end{bmatrix} + \alpha P^{0} + S$$

Reemplazando las coordenadas de mallas desfasadas por la simbología de la **Figura 13.** Sistema de coordenadas de mallas desfasadas. Las coordenadas en letras mayúsculas indican la malla de nodos centrales. Las coordenadas en letras minúsculas indican la malla de las caras o límites de los VC. Las flechas indican la velocidad de flujo en las direcciones x (azules) y z (rojas) (u y v respectivamente) en la interfaz entre cada par de VC. Las letras E, W, T, B (east, west, top, bottom) mayúsculas, simbolizan posiciones de los nodos vecinos entorno a un nodo principal P, las letras e, w, t, b minúsculas, son las caras del VC que corresponde al nodo P, indicado en morado claro.

Tabla 6, se obtiene una ecuación general de discretización para la presión:

$$\left(\alpha + \frac{K_e A_P}{x_E - x_P} + \frac{K_w A_P}{x_P - x_W} + \frac{K_t A_P}{z_T - z_P} + \frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) P_P$$

$$= \left(\frac{K_e A_P}{x_E - x_P}\right) P_E + \left(\frac{K_w A_P}{x_P - x_W}\right) P_W + \left(\frac{K_t A_P}{z_T - z_P}\right) P_T + \left(\frac{K_b A_P}{z_P - z_B}\right) P_B$$

$$- \left[\frac{K_t A_P}{z_T - z_P} \rho_{fT} g z_T - \frac{K_t A_P}{z_T - z_P} \rho_{fP} g z_P - \frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \rho_{fP} g z_P$$

$$+ \frac{K_b A_P}{z_P - z_B} \rho_{fB} g z_B \right] + \alpha P^0 + H$$
(43)

B. Desarrollo algebraico para obtener una expresión de relación de recurrencia para el algoritmo de matriz tri-diagonal (TDMA)

Expresiones iniciales:

$$P_2 = \frac{b_2}{a_2} P_3 + \frac{c_2}{a_2} P_1 + \frac{d_2}{a_2}$$
(51a)

$$P_3 = \frac{b_3}{a_3} P_4 + \frac{c_3}{a_3} P_2 + \frac{d_3}{a_3}$$
(51b)

Sustitución de P_2 en la ecuación (51b):

$$P_{3} = \frac{b_{3}}{a_{3}}P_{4} + \frac{c_{3}}{a_{3}}\left(\frac{\frac{b_{2}}{a_{2}}P_{3} + \frac{c_{2}}{a_{2}}P_{1} + \frac{d_{2}}{a_{2}}}{1}\right) + \frac{d_{3}}{a_{3}}$$
(i52)

$$P_{3} = \frac{b_{3}}{a_{3}}P_{4} + \left(\frac{\frac{c_{3}b_{2}}{a_{2}}P_{3} + \frac{c_{3}c_{2}}{a_{2}}P_{1} + \frac{c_{3}d_{2}}{a_{2}}}{a_{3}}\right) + \frac{d_{3}}{a_{3}}$$
(ii52)

$$P_3 = \frac{b_3}{a_3}P_4 + \left(\frac{c_3b_2P_3 + c_3c_2P_1 + c_3d_2}{a_2a_3}\right) + \frac{d_3}{a_3}$$
(iii52)

$$P_3 = \frac{b_3}{a_3}P_4 + \frac{c_3b_2}{a_2a_3}P_3 + \frac{c_3c_2}{a_2a_3}P_1 + \frac{c_3d_2}{a_2a_3} + \frac{d_3}{a_3}$$
(iv52)

$$P_3 - \frac{c_3 b_2}{a_2 a_3} P_3 = \frac{b_3}{a_3} P_4 + \frac{c_3 c_2}{a_2 a_3} P_1 + \frac{c_3 d_2}{a_2 a_3} + \frac{d_3}{a_3}$$
(v52)

$$P_3\left(1 - \frac{c_3b_2}{a_2a_3}\right) = \frac{b_3}{a_3}P_4 + \frac{c_3c_2}{a_2a_3}P_1 + \frac{c_3d_2}{a_2a_3} + \frac{d_3}{a_3}$$
(vi52)

$$P_{3} = \left(\frac{\left(\frac{b_{3}}{a_{3}}\right)P_{4}}{1 - \frac{c_{3}b_{2}}{a_{2}a_{3}}}\right) + \left(\frac{\left(\frac{c_{3}c_{2}}{a_{2}a_{3}}\right)P_{1}}{1 - \frac{c_{3}b_{2}}{a_{2}a_{3}}}\right) + \left(\frac{\left(\frac{c_{3}d_{2}}{a_{2}a_{3}}\right)}{1 - \frac{c_{3}b_{2}}{a_{2}a_{3}}}\right) + \left(\frac{\left(\frac{d_{3}}{a_{3}}\right)}{1 - \frac{c_{3}b_{2}}{a_{2}a_{3}}}\right) + \left(\frac{c_{3}a_{3}}{a_{3}}\right) + \left(\frac{c_{3}a_$$

$$P_{3} = \left(\frac{\left(\frac{b_{3}}{a_{3}}\right)P_{4}}{\left(\frac{a_{2}a_{3}-c_{3}b_{2}}{a_{2}a_{3}}\right)}\right) + \left(\frac{\left(\frac{c_{3}c_{2}}{a_{2}a_{3}}\right)P_{1}}{\left(\frac{a_{2}a_{3}-c_{3}b_{2}}{a_{2}a_{3}}\right)}\right) + \left(\frac{\left(\frac{a_{2}a_{3}-c_{3}b_{2}}{a_{2}a_{3}}\right)}{\left(\frac{a_{2}a_{3}-c_{3}b_{2}}{a_{2}a_{3}}\right)}\right) + \left(\frac{\left(\frac{d_{3}}{a_{3}}\right)}{\left(\frac{a_{2}a_{3}-c_{3}b_{2}}{a_{2}a_{3}}\right)}\right)$$
(viii52)

$$P_{3} = \frac{b_{3}}{\left(\frac{a_{2}a_{3} - c_{3}b_{2}}{a_{2}}\right)}P_{4} + \left(\frac{c_{3}c_{2}}{a_{2}a_{3} - c_{3}b_{2}}\right)P_{1} + \left(\frac{c_{3}d_{2}}{a_{2}a_{3} - c_{3}b_{2}}\right) + \left(\frac{a_{2}d_{3}}{a_{2}a_{3} - c_{3}b_{2}}\right) \quad \text{(ix52)}$$

$$P_3 = \frac{b_3 a_2}{a_2 a_3 - c_3 b_2} P_4 + \left(\frac{c_3 c_2 P_1 + c_3 d_2 + a_2 d_3}{a_2 a_3 - c_3 b_2}\right)$$
(x52)

$$P_{3} = \left(\frac{\left(\frac{1}{a_{2}}\right)}{\left(\frac{1}{a_{2}}\right)}\right) \left(\frac{b_{3}a_{2}}{a_{2}a_{3}-c_{3}b_{2}}\right) P_{4} + \left(\frac{\left(\frac{1}{a_{2}}\right)}{\left(\frac{1}{a_{2}}\right)}\right) \left(\frac{c_{3}c_{2}P_{1}+c_{3}d_{2}+a_{2}d_{3}}{a_{2}a_{3}-c_{3}b_{2}}\right)$$
(xi52)

$$P_{3} = \frac{b_{3}}{\left(a_{3} - \frac{c_{3}b_{2}}{a_{2}}\right)}P_{4} + \left(\frac{c_{3}\left(\frac{c_{2}}{a_{2}}P_{1} + \frac{d_{2}}{a_{2}}\right) + d_{3}}{\left(a_{3} - \frac{c_{3}b_{2}}{a_{2}}\right)}\right)$$
(52)