La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).
La investigación fue financiada por el SECIHTI (Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación).
Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.
CICESE © 2025, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California

Doctorado en Ciencias
en Ciencias de la Tierra con
orientación en Geofísica Aplicada

Modelado 3D con elementos espectrales del método transitorio EM en medios anisótropos

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

Presenta:

Beatriz Valdés Moreno

Ensenada, Baja California, México

2025

Tesis defendida por

Beatriz Valdés Moreno

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Jonás De Dios De Basabe Delgado
Codirector de tesis

Dr. Marco Antonio Pérez Flores
Codirector de tesis

Dr. Carlos Francisco Flores Luna

Dr. Hugo Homero Hidalgo Silva

Dra. Claudia Arango Galván

Dr. Diego Ruiz Aguilar
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

Dra. Ana Denise Re Araujo
Directora de Estudios de Posgrado

Copyright © 2025, Todos los Derechos Reservados, CICESE
Prohibida su reproducción parcial o total sin la autorización por escrito del CICESE

Resumen de la tesis que presenta Beatriz Valdés Moreno como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Ciencias de la Tierra con
orientación en Geofísica Aplicada.

Modelado 3D con elementos espectrales del método transitorio EM en medios anisótropos

Resumen aprobado por:

Dr. Jonás De Dios De Basabe Delgado

Codirector de tesis

Dr. Marco Antonio Pérez Flores

Codirector de tesis

Esta investigación presenta un esquema numérico tridimensional para el modelado directo del método electromagnético transitorio (TEM) en medios con conductividad anisótropa, utilizando el método de elementos espectrales en el dominio del espacio y diferencias finitas explícitas en el dominio del tiempo. El objetivo principal es mejorar la precisión y eficiencia del modelado al incorporar anisotropía en la conductividad eléctrica de tipo VTI, considerando su importancia en la interpretación geofísica. El esquema propuesto incluye el uso de polinomios de alto orden como funciones base, lo que reduce significativamente el error numérico sin incrementar los costos computacionales. La validación del modelo se realizó comparando con soluciones analíticas y numéricas en diversos escenarios, incluyendo medios homogéneos, heterogéneos y estratificados. Los resultados demuestran que el esquema es capaz de representar con alta precisión el fenómeno electromagnético en escenarios complejos, contribuyendo al entendimiento del subsuelo y proporcionando herramientas útiles para aplicaciones en exploración minera, hidrogeología y geotermia.

Palabras clave: Modelado directo, método electromagnético, elementos espectrales

Abstract of the thesis presented by Beatriz Valdés Moreno as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics.

3D Spectral element modeling of the transient EM method on anisotropic media

Abstract approved by:

Dr. Jonás De Dios De Basabe Delgado
Thesis Co-Director

Dr. Marco Antonio Pérez Flores
Thesis Co-Director

This research presents a three-dimensional numerical scheme for the forward modeling the transient electromagnetic method (TEM) in media with anisotropic conductivity, using the spectral element method in the spatial domain and explicit finite differences in the time domain. The main objective is to improve the accuracy and efficiency of modeling by incorporating VTI-type anisotropy in electrical conductivity, considering its importance in geophysical interpretation. The proposed scheme includes high-order polynomials as basis functions, significantly reducing numerical error without increasing computational costs. The model was validated by comparing analytical and numerical solutions in various scenarios, including homogeneous, heterogeneous, and stratified media. The results demonstrate that the scheme can accurately represent the electromagnetic phenomenon in complex scenarios, contributing to the understanding of the subsurface and providing valuable tools for applications in mining exploration, hydrogeology, and geothermal studies.

Keywords: Forward modeling, electromagnetic method, spectral elements

Dedicatoria

A mi mamá, Margarita, porque sin su amor incondicional, su fortaleza y su apoyo constante, este logro no habría sido posible. Gracias por ser mi guía, mi ejemplo y mi mayor inspiración. Todo lo que soy, te lo debo a ti. A mis sobrinas, y a todas las niñas que sueñan con un futuro lleno de posibilidades. Esta tesis es para ustedes, el mundo necesita de su fuerza, su creatividad y su valentía para transformarlo.

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE), por brindarme la oportunidad de integrarme a esta prestigiosa institución. Asimismo, agradezco profundamente el apoyo financiero otorgado por la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), que permitió la realización de mis estudios de doctorado.

Agradezco al laboratorio de supercómputo del Sistema de Laboratorios Especializados de la División de Ciencias de la Tierra del CICESE por facilitarme el acceso al clúster Lamb, herramienta indispensable para el desarrollo de esta investigación.

A mis co-directores:

Dr. Jonás D. De Basabe Delgado, gracias por sus enseñanzas, apoyo y paciencia. Su motivación y guía impulsaron no solo mi desarrollo académico, sino también mi crecimiento personal. Aprecio profundamente la oportunidad de participar en el capítulo estudiantil SEG-CICESE y de formar parte del grupo de trabajo Rock Physics, experiencias que han marcado mi trayectoria profesional.

Dr. Marco Antonio Pérez Flores, gracias por compartir generosamente su conocimiento y por sus valiosos consejos. Su apoyo, comprensión y paciencia en cada etapa de esta tesis fueron determinantes. Le agradezco, además, el aliento constante para participar en congresos, vivencias que enriquecieron mi formación académica y profesional.

A los miembros de mi comité de tesis:

Dr. Carlos F. Flores Luna, gracias por sus invaluables aportaciones, enseñanzas y disposición para ayudar en todo momento.

Dra. Claudia Arango Galván, le agradezco sus valiosas contribuciones, su apoyo constante y su empatía a lo largo de este proceso.

Dr. Hugo H. Hidalgo Silva, gracias por sus observaciones y comentarios, que enriquecieron de forma significativa este trabajo.

A Gabriel Mejía Ruiz, mi más profundo agradecimiento. Has sido un pilar fundamental tanto en mi vida profesional como personal. No tengo palabras para agradecerte todo lo que has hecho por mí: por estar a mi lado en las buenas y en las malas, por compartir largas tardes de trabajo hasta el anochecer y, sobre todo, por creer en mí cuando yo misma no podía hacerlo.

A Luis Ángel Vega Ramírez, gracias por tu cariño, apoyo y comprensión. Tu compañía durante tanto tiempo ha sido muy importante para mí y siempre tendrás un lugar especial en mi vida. Estoy profundamente agradecida de haber formado parte de la tuya y por siempre estar a mi lado.

A mis compañeros y amigos, quienes fueron parte esencial de este proyecto y de esta etapa de mi vida: Juan Gerardo Peña, Simón Reyes, Jonathan Carrillo, Mariana Gómez, Josué González, Rubén Rioyos, Raúl León y Thalia Avilés, gracias por su apoyo y compañía. A mis compañeras de generación: Ana Lucía, Alejandra, Jessica y Francy, gracias por su amistad y motivación constante.

A los investigadores que influyeron positivamente en mi formación: Dr. Enrique Gómez Treviño, Dr. Diego Ruiz Aguilar, Dr. Juan M. Romo Jones, Dr. Mario González Escobar, Dr. Efraín Gómez Arias, Dr. Pratap Sahay, Dr. Antonio Vidal, Dr. Juan Contreras Pérez, Dr. Luis A. Gallardo Delgado, Dr. Lenin Ávila Barrientos, Dr. José Frez, Dr. Héctor González Huizar y Dr. Oscar A. Castro Artola. Su guía y apoyo durante mi estancia en CICESE han sido invaluables.

A todo el **personal técnico y administrativo del CICESE**, gracias por su disposición y por facilitar mi estancia en Ensenada.

Finalmente, con el mayor de los afectos, agradezco a mi familia. A mi mamá Margarita, por su amor incondicional, apoyo constante y por creer siempre en mis sueños. A mi papá José, mis hermanos, Jorge y Lalo, por su aliento y compañía a cada paso. A mi abuelita Virginia, por ser ejemplo de fortaleza y amor. Ustedes han sido mi refugio y motor en cada desafío de la vida.

Este logro les pertenece también a todos ustedes. ¡Gracias!

Tabla de contenido

Página

Lista de figuras

Figura Página

Figura Página

Lista de tablas

Tabla Página

Capítulo 1. Introducción

El uso del método transitorio electromagnético en la exploración geofísica es ampliamente reconocido en la industria, pero a medida que se trabajan con modelos terrestres más complejos, se requieren mejoras en la precisión de los resultados, por lo tanto, existe la necesidad de mejorar el modelado directo; Este juega un papel fundamental en varias etapas de la exploración geofísica, como el diseño del trabajo de campo, el procesamiento y la inversión de los datos. Con el avance del poder computacional y los método numéricos para solucionar ecuaciones diferenciales, se tienen nuevas oportunidades para desarrollar algoritmos más sofisticados y precisos, lo que nos permite crear modelos de conductividad terrestre más complejos y detallados.

El proyecto de tesis busca mejorar el modelado directo del método transitorio electromagnético utilizando el método numérico de elementos espectrales, aprovechando el incremento del poder computacional y considerando el efecto de la anisotropía en la conductividad eléctrica en medios terrestres y marinos. Los resultados obtenidos contribuirán a un mejor entendimiento del subsuelo y tendrán aplicaciones prácticas en la industria de la exploración geofísica, como agua, minería, petróleo, geotermia, etc.

1.1. Antecedentes

El método transitorio electromagnético (TEM) consiste en colocar una bobina en la superficie de la tierra, la cual es energizada inyectando una corriente eléctrica que circula a través de ella, posteriormente la corriente es interrumpida abruptamente y se mide el decaimiento del campo magnético en función del tiempo. Las mediciones de campo magnético son utilizadas para estimar los valores de la conductividad del subsuelo. El método TEM ha sido utilizado ampliamente en la exploración de aguas subterráneas, delineación y caracterización de acuíferos (Fitterman & Stewart, 1986; Goldman et al., 1994; Krivochieva & Chouteau, 2003; Porsani et al., 2012). También se utiliza para determinar variaciones en la saturación del agua dentro de acuíferos (Huerta et al., 2022) y masas de agua salinas subterránea (Kafri et al., 2014). Por otro lado, también ha sido utilizado para aplicaciones de exploración minera profunda (Mörbe et al., 2020; Xue et al., 2022), en investigaciones geotérmicas (Cumming et al., 2005) y otros estudios de subsuelo.

El modelado o problema directo consiste en calcular la respuesta de una estructura geoeléctrica para un determinado equipo de medición. El modelado directo para modelos unidimensionales (modelos de capas) ha sido estudiado por muchos años, sin embargo calcular la respuesta del campo eléctrico y magnético de un modelo bidimensional o tridimensional es mucho más complicado (Hohmann, 1987).

Las ecuaciones de Maxwell pueden resolverse numéricamente tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. En la literatura, se han propuesto diversos enfoques para abordar este problema en el dominio del tiempo. Por ejemplo, uno de ellos consiste en obtener la respuesta en el dominio de la frecuencia para múltiples frecuencias y luego aplicar la transformada inversa de Fourier, con el fin de derivar la solución en el dominio del tiempo (Everett & Edwards, 1992; Mitsuhata, 2000).

Otras opciones incluyen describir los campos eléctrico y magnético en términos de potenciales vectoriales y escalares (Biro et al., 1996; Haber et al., 2000; Mitsuhata & Uchida, 2004; Zhou et al., 2022), o en términos de los campos eléctrico y magnético, donde son calculados simultáneamente, usando las ecuaciones de Maxwell acopladas (Wang & Hohmann, 1993; Commer & Newman, 2004; Maaø, 2007). También se pueden resolver uno de los dos campos utilizando la ecuación de onda del campo eléctrico o del campo magnético (Um et al., 2010; Yin et al., 2016; Li et al., 2018; Cabrer et al., 2022).

Por otro lado, existe una amplia variedad de método numéricos que son utilizados para resolver los campos electromagnéticos, los cuales incluyen: la ecuación integral (SanFilipo & Hohmann, 1985; Zhdanov et al., 2006); el método de diferencias finitas (Wang & Hohmann, 1993; Streich, 2009; Cabrer et al., 2022); el método de volumen finito (Jahandari & Farquharson, 2014; Lu & Farquharson, 2020); y el método de elemento finito (Coggon, 1971; Um et al., 2010; Li et al., 2018).

El modelado de los campos electromagnéticos que incluye anisotropía eléctrica ha sido abordado por algunos autores utilizando diferentes metodologías. Jaysaval et al. (2015) emplean el método de diferencias finitas en el dominio de la frecuencia con isotropía transversal vertical (*VTI* por sus siglas en inglés). Davydycheva et al. (2003) utilizan el tensor completo de conductividad con método de diferencias finitas en el dominio de la frecuencia con un mallado intercalado de Lebedev, aplicado a registros de inducción en pozos. Um et al. (2010) utilizan el método de elemento finito en el dominio del tiempo con el tensor completo de conductividad. Este modelado también ha sido aplicado para métodos electromagnéticos aéreos con el método de elemento finito (Yin et al., 2016; Huang et al., 2017).

En la literatura, la gran mayoría de las formulaciones que utilizan el método de elemento finito (MEF) en el dominio del tiempo usan funciones base de primer orden (Um et al., 2010; Li et al., 2018, 2020). El método de elementos espectrales (MES) extiende el método de elementos finitos al reemplazar las funciones base de bajo orden por polinomios de Lagrange de alto orden utilizando los nodos de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL). Además, emplea las reglas de cuadratura GLL para la integración numérica, lo que permite obtener una matriz de masa diagonal. Estas características permiten que el MES alcance una mayor precisión y resolución, siendo particularmente relevante en el contexto del modelado electromagnético en el dominio del tiempo. En comparación con métodos tradicionales como diferencias finitas y elementos finitos, el MES ofrece ventajas específicas. Por ejemplo, el método de diferencias finitas (MDF) es conocido por su simplicidad en la implementación numérica, pero ofrece una precisión limitada y requiere una cantidad significativa de memoria y recursos computacionales cuando se aplica a estructuras geológicas altamente complejas (Avdeev et al., 1998). El MEF, por otro lado, proporciona una discretización flexible de las geometrías, lo que permite una representación precisa de características irregulares como cuerpos minerales, topografía y pozos cilíndricos (Avdeev et al., 1998; Börner, 2010). Sin embargo, su precisión también es limitada y generalmente requiere invertir grandes matrices, lo que implica altos costos computacionales. El MES combina la flexibilidad geométrica del MEF con la precisión superior de las funciones base de alto orden, especialmente en modelos complejos. Además, el avance temporal es más rápido que en el MEF, ya que la matriz de masa diagonal puede invertirse de manera trivial. En aplicaciones geofísicas, el MES ha demostrado ser muy exitoso en el modelado sísmico (Komatitsch & Tromp, 1999; Komatitsch et al., 2002). Se ha demostrado que las funciones base de alto orden reducen drásticamente la dispersión numérica (De Basabe & Sen, 2007). En el modelado electromagnético para aplicaciones geofísicas, este método ha sido investigado en el dominio de la frecuencia por Schwarzbach et al. (2011), Grayver & Kolev (2015), Rochlitz et al. (2019) y Weiss et al. (2023); Además, recientemente en el dominio del tiempo por Huang et al. (2019) y Yin et al. (2021) con esquemas de avance temporal implícitos. Sin embargo, estos métodos implícitos pueden ser computacionalmente costosos, debido a que se tiene que resolver un sistema de ecuaciones en cada paso de tiempo. En este trabajo, se propone utilizar un esquema explícito para analizar el problema electromagnético en un medio tridimensional y además se incorpora la anisotropía en la conductividad eléctrica sin aumentar el costo computacional.

1.2. Hipótesis

1. El método numérico de elementos espectrales con polinomios de órdenes elevados como funciones base proporcionará una aproximación más precisa de la solución de las ecuaciones de Maxwell en comparación con otros métodos numéricos.

2. La incorporación del tensor de anisotropía tipo *VTI* en los modelos de conductividad eléctrica se puede realizar de manera sencilla y efectiva en el planteamiento de las ecuaciones de Maxwell, lo que

permitirá una representación más precisa del fenómeno electromagnético en medios anisótropos.

3. El método de diferencias finitas para discretizar la parte temporal en el análisis de las ecuaciones de Maxwell demostrará ser una opción computacionalmente eficiente y estable, ya que no requerirá la resolución de un sistema de ecuaciones en cada paso de tiempo.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Desarrollar un esquema de modelado directo tridimensional en el dominio del tiempo para datos electromagnéticos en medios con conductividad eléctrica anisótropa, a través del uso del método de elementos espectrales en el dominio del espacio y diferencias finitas en el dominio del tiempo.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Obtener las ecuaciones de Maxwell en forma débil adecuadas para describir medios anisótropos, considerando la conductividad eléctrica de tipo *VTI*.
2. Diseñar e implementar un algoritmo eficiente basado en el método de elementos espectrales para resolver las ecuaciones de Maxwell en medios anisótropos, considerando las condiciones de frontera e iniciales adecuadas.
3. Validar el esquema propuesto mediante pruebas y comparaciones con soluciones analíticas.
4. Evaluar el desempeño y la robustez del algoritmo implementado al utilizar diferentes medios tanto isótropos como anisótropos.

Capítulo 2. Marco teórico

Este capítulo esta dividido en cuatro secciones, en las cuales se establecen los conceptos básicos involucrados en el proyecto. En la primera sección se encuentran las ecuaciones de Maxwell que describen el fenómeno electromagnético, en la segunda sección se describe el funcionamiento del método transitorio electromagnético. La tercera sección está dedicada al concepto de anisotropía en la conductividad eléctrica y finalmente en la cuarta sección se desarrolla el método numérico de elemento finito y de elementos espectrales.

2.1. Ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo

Los campos electromagnéticos son definidos por cuatro campos vectoriales: la intensidad del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en V/m, la inducción magnética $\boldsymbol{B}$ en Wb/m^2 o $Tesla$, el desplazamiento dieléctrico o densidad de flujo eléctrico $\boldsymbol{D}$ en C/m^2 y la intensidad de campo magnético $\boldsymbol{H}$ en A/m (Ward & Hohmann, 1987).

Las ecuaciones de Maxwell describen el comportamiento del fenómeno electromagnético, en el dominio del tiempo están definidas como:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} - \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \boldsymbol{J}, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = q \tag{3}$$

y

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{J}$ es la densidad de corriente eléctrica en A/m^2, y q es la densidad de carga eléctrica en C/m^3 (Ward & Hohmann, 1987).

Las ecuaciones 1-4 son descritas a continuación

- La ley de Faraday (ecuación 1) muestra que un campo magnético variando en el tiempo induce una campo eléctrico que circula a su alrededor y además es proporcional a la tasa negativa de cambio del flujo magnético.

- La ley de Ampere (ecuación 2) indica que la densidad de flujo eléctrico variando en el tiempo genera un campo magnético que circula alrededor de $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{J}$.
- La ley de Gauss para el campo eléctrico (ecuación 3) indica que la divergencia del vector $\boldsymbol{D}$ sobre una región (o volumen) del espacio es igual a la cantidad de carga total contenida en la región.
- La ley de Gauss para el magnetismo (ecuación 4) implica que: a) no existen cargas magnéticas o monopolos magnéticos y b) la divergencia de $\boldsymbol{B}$ siempre es cero en cualquier volumen.

Por otro lado, relaciones constitutivas nos permiten relacionar los campos eléctricos y magnéticos con las propiedades físicas del medio y son expresadas como

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu H}, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon E} \tag{6}$$

y

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma E}. \tag{7}$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de permitividad dieléctrica en F/m, $\boldsymbol{\mu}$ es el tensor de permeabilidad magnético en N/A^2 y $\boldsymbol{\sigma}$ es el tensor de conductividad eléctrica en S/m. Estas propiedades físicas dependen de la posición r, de la temperatura T, de la presión P y del tiempo t; y son aplicables para medios anisótropos.

Sin embargo, para métodos aplicados en la exploración geofísica tenemos las siguientes consideraciones, con el fin simplificar el análisis de las propiedades

1. Las propiedades eléctricas son independientes del tiempo, temperatura y presión. Además, considerando un medio isótropo, pueden representarse como escalares.
2. La permeabilidad magnética μ es igual a la del espacio libre, es decir $\mu = \mu_0$. La mayoría de los materiales terrestres poseen una μ muy similar a la del vacío con excepción de los altamente magnetizados.

En algunos casos como estudios de exploración geotérmica y de la corteza profunda los efectos de la presión y la temperatura tienen que ser considerados. Pero en la mayoría de los casos podrían no ser considerados (Ward & Hohmann, 1987).

2.1.1. Ecuación de onda en el dominio del tiempo

A partir de las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo, se obtiene fácilmente la ecuación de onda. Aplicando el operador rotacional a las ecuaciones 1 y 2, tenemos

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = 0 \tag{8}$$

y

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) - \boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{J}. \tag{9}$$

Si utilizamos las relaciones constitutivas en el dominio del tiempo y las sustituimos en las ecuaciones 8 y 9 obtenemos

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{\nabla} \times \left[\frac{\partial}{\partial t}(\mu \boldsymbol{H})\right] = 0 \tag{10}$$

y

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) - \boldsymbol{\nabla} \times \left[\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \boldsymbol{E})\right] = \boldsymbol{\nabla} \times (\sigma \boldsymbol{E}). \tag{11}$$

Ordenando los términos, obtenemos

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) + \mu \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) = 0 \tag{12}$$

y

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = \sigma \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}. \tag{13}$$

Los valores de $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}$ son la ley de Ampere y la ley de Faraday respectivamente, por lo tanto las ecuaciones 12 y 13 son reescritas como

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{14}$$

y

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0. \tag{15}$$

La identidad

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{a},$$

nos permite expandir el termino del lado izquierdo de las ecuaciones 14 y 15. Además conociendo que $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$ y $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{H} = 0$, para regiones homogéneas, las ecuaciones 14 y 15 ahora son

$$\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

y

$$\boldsymbol{\nabla}^{\mathbf{2}} \boldsymbol{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0. \tag{17}$$

De esta manera, las ecuaciones 16 y 17 son las ecuaciones de onda para el campo eléctrico y magnético en el dominio del tiempo.

En general, para materiales terrestres, consideramos que las corrientes de desplazamiento, asociadas al término de propagación de las ecuaciones 14 y 15 son muy pequeñas, comparadas con las corrientes de conducción (asociado al término difusivo), por lo tanto pueden ser despreciadas.

De esta manera las ecuaciones de difusión para el campo eléctrico y magnético son

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) + \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0 \tag{18}$$

y

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}) + \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0. \tag{19}$$

Para solucionar la ecuación de onda electromagnética entre medios homogéneos necesitamos las condiciones de frontera apropiadas, dichas condiciones se derivan de la forma integral de las ecuaciones de Maxwell y son enumeradas a continuación:

i) **B normal**. La componente normal B_n de **B** es continua en la frontera que separa los medios 1 y 2. Es decir $B_{n1} = B_{n2}$.

ii) **D normal**. La componente normal D_n de **D** es discontinua en la frontera debido a la acumulación de carga superficial q_s. Por lo tanto $D_{n2} - D_{n1} = q_s$.

iii) **E tangencial**. La componente tangencial E_t de **E** es continua en la frontera $E_{t1} = E_{t2}$.

iv) **H tangencial**. La componente tangencial H_t de **H** es continua en la frontera, si no hay corriente superficial. Es decir, $H_{t1} = H_{t2}$.

v) **J normal**. La componente normal J_n de **J** es continua en la frontera, $J_{n1} = J_{n2}$.

vi) **E normal**. La componente normal E_n de **E** es discontinua en la frontera, debido a la acumulación de carga superficial. Por lo tanto $\varepsilon_1 E_{n1} - \varepsilon_2 E_{n2} = q_s$.

2.2. Métodos electromagnéticos en el dominio del tiempo

El método electromagnético transitorio consiste en hacer pasar una corriente eléctrica a través de una bobina transmisora colocada sobre el subsuelo. Al circular esta corriente por la bobina, según la ley de Ampere, se genera un campo magnético primario que penetra en el terreno (Figura 1).

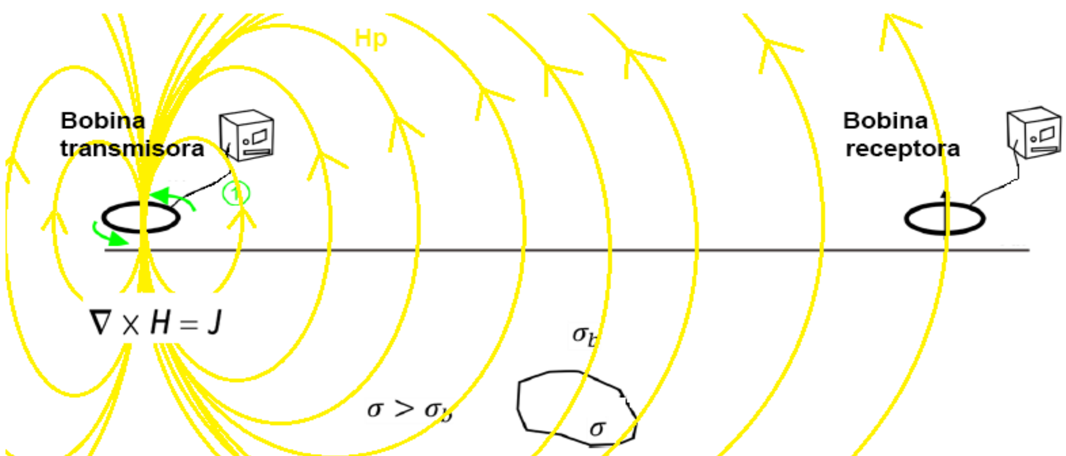


Figura 1. Etapa 1. Generación del campo magnético primario por circulación de corriente en la bobina transmisora.

Luego de mantener estable esta corriente durante un breve intervalo, la corriente es interrumpida abruptamente. En este instante, el campo magnético primario comienza a decaer rápidamente, generando una variación temporal del flujo magnético en el subsuelo. De acuerdo con la Ley de Faraday, esta variación temporal del flujo magnético induce corrientes eléctricas secundarias en cualquier medio conductor presente en el subsuelo (Figura 2).

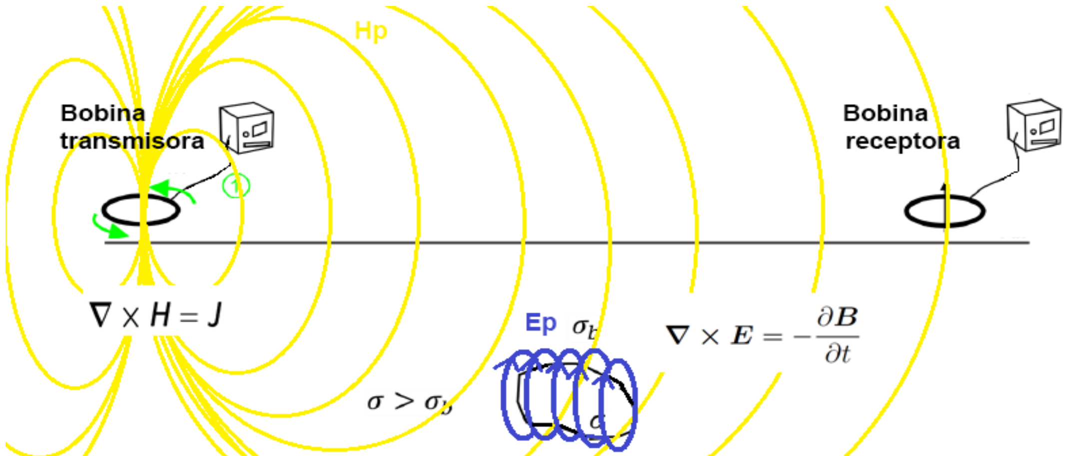


Figura 2. Etapa 2. Inducción de corrientes secundarias en el subsuelo conductor al interrumpir abruptamente la corriente en la bobina transmisora.

Estas corrientes inducidas comienzan a disminuir en intensidad con el tiempo, generando a su vez un campo magnético secundario variable temporalmente. Este campo magnético secundario puede detectarse mediante una bobina receptora colocada también en superficie. La bobina receptora mide el campo magnético secundario durante su decaimiento (Figura 3), generando datos que posteriormente son procesados e interpretados para determinar propiedades del subsuelo, como la conductividad eléctrica.

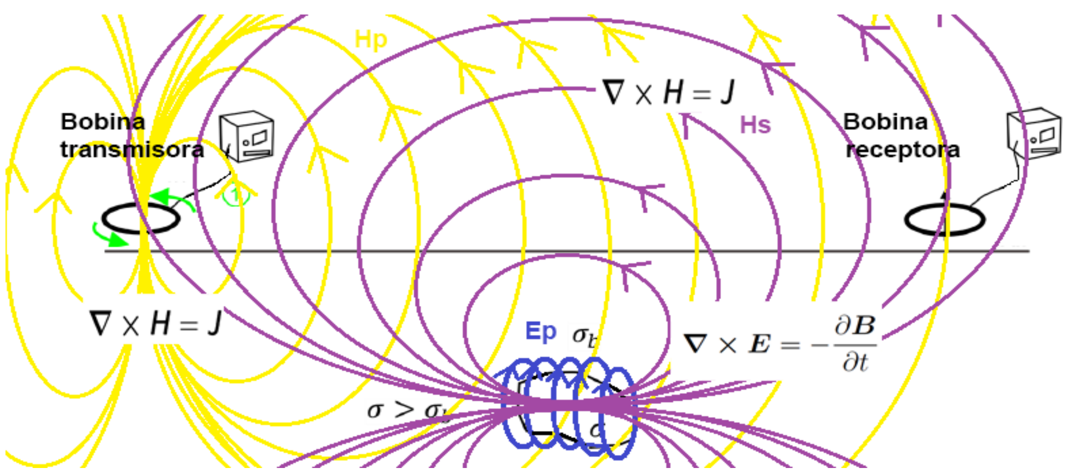


Figura 3. Etapa 3. Medición del campo magnético secundario producido por las corrientes inducidas mediante una bobina receptora.

En la Figura 4 se presenta un esquema típico que ilustra el proceso de adquisición en los sondeos transitorios electromagnéticos. La corriente eléctrica es inyectada en la bobina transmisora, generando un campo magnético primario. Posteriormente, al interrumpir bruscamente la corriente, se inducen corrientes en el subsuelo, las cuales generan un campo magnético secundario. La configuración fuente-receptor mostrada en el esquema corresponde al arreglo denominado *in loop*, en el que la bobina receptora se encuentra ubicada dentro de la bobina transmisora.

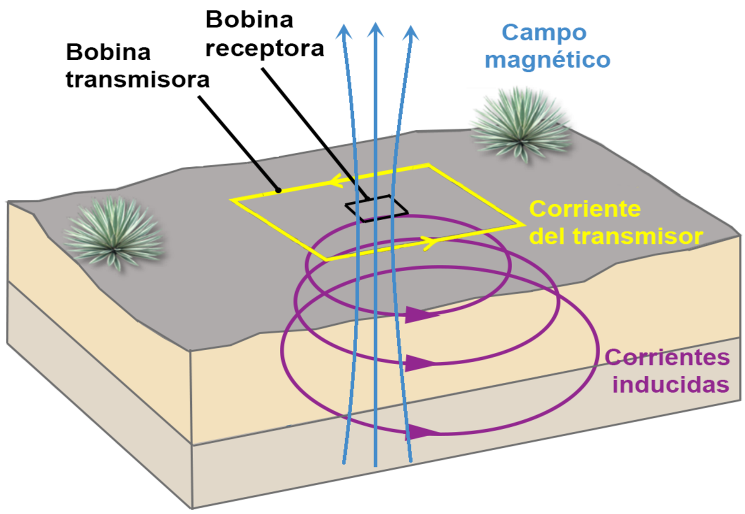


Figura 4. Esquema típico de la adquisición de datos electromagnéticos en el dominio del tiempo usando una configuración *in loop*.

En la Figura 5 se presentan la nomenclatura básica y los principios fundamentales del método electromagnético transitorio. La subfigura (a) muestra el comportamiento temporal de la corriente eléctrica en la bobina transmisora, mientras que la subfigura (b) muestra la respuesta del campo magnético secundario registrado por la bobina receptora.

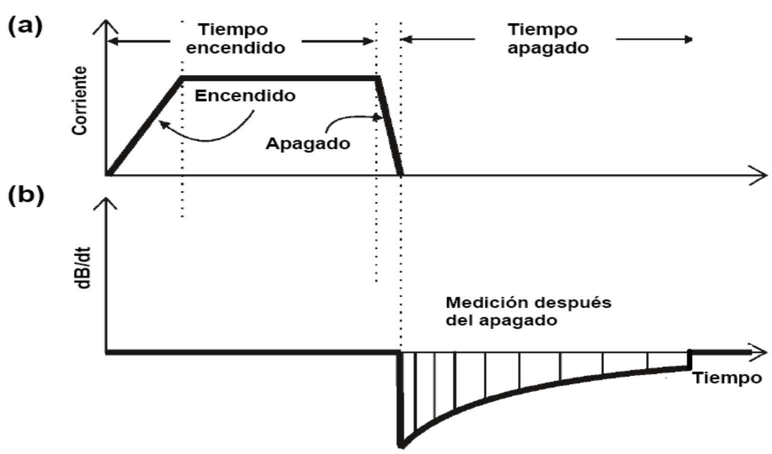


Figura 5. Principio del método transitorio electromagnético. (a) Muestra la corriente en el transmisor y (b) muestra el campo magnético secundario en el receptor. Modificado de Christiansen et al. (2009).

Los tiempos típicos asociados son los siguientes: 1) una rampa de encendido que varía entre 50 y 200 μs, 2) un tiempo de encendido de 1 a 40 ms, 3) una rampa de apagado de 1 a 30 μs, y 4) un tiempo de apagado de 1 a 40 ms. La forma de onda de la fuente suele ser cuadrada; sin embargo, también pueden emplearse otras formas, como la triangular o la senoidal, que se utilizan principalmente en métodos electromagnéticos aéreos (Christiansen et al., 2009).

Una vez generada la señal, la medición de los datos se lleva a cabo mediante ventanas de tiempo. Estas ventanas se distribuyen de manera logarítmica, incrementando su longitud conforme avanza el tiempo, lo que permite capturar con mayor precisión las variaciones del campo electromagnético en diferentes rangos temporales.

Las principales aplicaciones someras del método transitorio electromagnético incluyen la delimitación de rellenos sanitarios ocultos o abandonados (Descloitres et al., 2008; White et al., 2016), el mapeo de plumas de contaminación en aguas subterráneas (Baawain et al., 2018; Metwaly et al., 2014), y el monitoreo de intrusiones de agua salada (Kafri et al., 2014; Bauer-Gottwein et al., 2010). También se emplea en la cartografía geológica, particularmente para el estudio de fallas y zonas de fracturas (Cummings, 2000), en investigaciones de aguas subterráneas (Krivochieva & Chouteau, 2003; Porsani et al., 2012), en la detección de cavidades kársticas rellenas de arcilla (Chalikakis et al., 2011), y para localizar objetos metálicos (Everett et al., 2005). Recientemente ha sido utilizado en la detección de municiones sin detonar (*UXO*, por sus siglas en inglés) (Qi et al., 2020). En aplicaciones más profundas, el TDEM destaca en la exploración minera (Mörbe et al., 2020; Xue et al., 2022) e investigaciones geotérmicas (Cumming et al., 2005).

2.3. Anisotropía en la conductividad eléctrica

La anisotropía eléctrica consiste en un cambio del valor de la conductividad (o resistividad) eléctrica en función de la dirección de la corriente. En los años recientes la inclusión de la anisotropía eléctrica en los modelos geofísicos se ha incrementado, principalmente en estudios magnetotelúricos (Heise & Pous, 2001). Esta propiedad tiene grandes implicaciones para la evaluación económica de los recursos, la interpretación de flujos hidrológicos y en modelos de transporte y composición del material en la zona profunda de la corteza y el manto superior (Wannamaker, 2005), por lo tanto ofrece nuevos grados de libertad, los cuales nos permiten obtener una mejor interpretación de los datos. En la Figura 6 se muestra un cuerpo inclinado que presenta dos conductividades distintas σ_1 y σ_2 propias del cuerpo, pero también otros valores de conductividad debido a su inclinación.

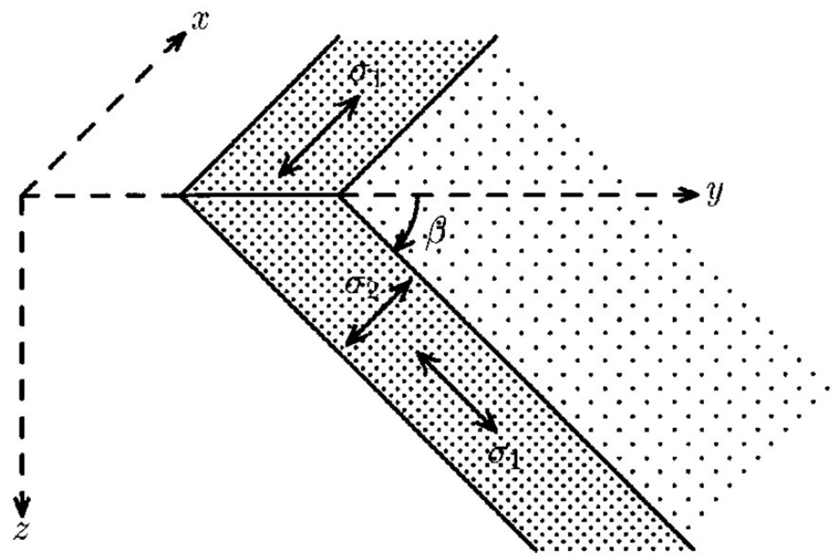


Figura 6. Ejemplo de una distribución de la conductividad en una estructura inclinada. Tomada de Weidelt (1999).

En el caso anisótropo, se asume que solo la conductividad eléctrica presenta anisotropía. Para describir su variación con la dirección dentro del medio, se emplea un tensor de conductividad, el cual, en términos generales, es simétrico y se representa como

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Para simplificar el tensor de conductividades utilizamos la isotropía transversal vertical (*VTI* por sus siglas en inglés). Así, el tensor de conductividad (ecuación 20) ahora es considerado como

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} = \sigma_h & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} = \sigma_h & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} = \sigma_v \end{bmatrix}. \tag{21}$$

La anisotropía puede ser causada por orientaciones preferenciales de fracturas, heterogeneidades orientadas, estratificaciones, defectos hidratados dentro de los cristales de olivino alineados al cizallamiento o zonas de cizalla grafitizadas (Wannamaker, 2005). Además Key (2012) indica que, en ambientes marinos, la conductividad de los sedimentos puede ser anisótropa debido a un alineamiento de los cristales en las lutitas (anisotropía a escala de grano) o a una macro-escala, por las intercalaciones de capas con diferentes conductividades. Recientemente MacFarlane et al. (2014) indica que la anisotropía eléctrica es un indicador del movimiento de los fluidos, debido a fracturas generadas con fracturamiento hidraúlico. Por otro lado, Weidelt (1999) indica que, esencialmente, la anisotropía en la conductividad eléctrica es un efecto de escala; incluso si la conductividad es isótropa a microescala, esta se convertirá en anisótropa a una escala mayor si en el promediado del volumen existen orientaciones preferidas (por ejemplo; capas estratificadas o laminación). En la Figura 7 se muestra que en ambas láminas isótropas el campo eléctrico **E** y la densidad de corriente **J** son paralelas y despúes del promediado espacial **E** y **J** ya no están alineados. A esta escala, existe anisotropía estructural, la cual es diferente de la intrínseca causada por las inhomogeneidades que pueden existir a escala pequeña.

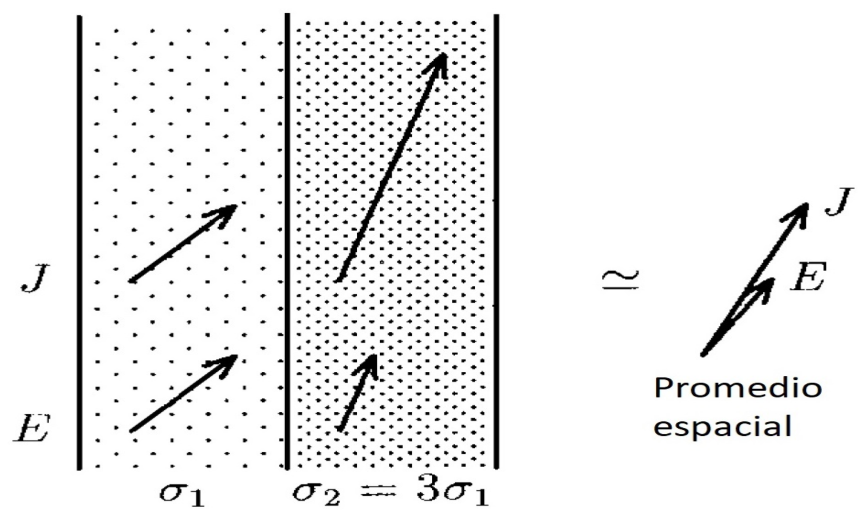


Figura 7. Origen de la anisotropía estructural de un promedio espacial de **E** y **J** sobre conductores isótropos con orientaciones preferenciales. La densidad de corriente promediada es desviada hacia la dirección preferencial (Modificada de Weidelt *et al.,* 1999).

2.4. Discretización espacial

En esta sección se describen los fundamentos matemáticos y físicos que sustentan el problema, partiendo de las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo, el método transitorio electromagnético (TEM) y el concepto de anisotropía eléctrica. También se revisará la formulación del método de elementos finitos y del método de elementos espectrales.

2.4.1. Método de elemento finito

El método de elemento finito es una herramienta numérica para aproximar una solución a problemas complejos, en los cuales es difícil de obtener una solución analítica. Fue desarrollado en la década de 1950 para la industria aérea (Clough, 1990). Este método numérico consiste en dividir el dominio en el cual una ecuación diferencial está definida, en pequeñas regiones conocidas como elementos. Entonces el proceso de discretización reduce el problema continuo, el cual tiene un número infinito de incógnitas a uno con un número finito de incógnitas en puntos específicos conocidos como nodos (Lewis et al., 2004), los cuales forman a los elementos como se muestra en la Figura 8.

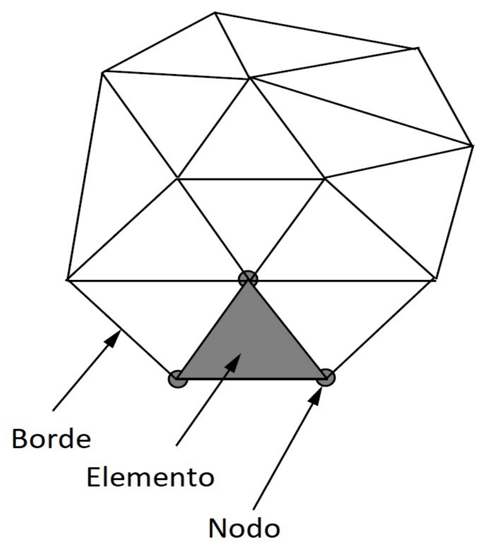


Figura 8. Discretización de un dominio en elementos; los elementos están definidos por nodos y delimitados por bordes. Tomada de Lewis et al. (2004).

Una descripción completa del problema a solucionar una ecuación diferencial con el método de EF comprende (Öchsner & Merkel, 2018):

- la geometría para la descripción del dominio,
- las ecuaciones de campo en el dominio,
- las condiciones de frontera y
- las condiciones iniciales para problemas que dependen del tiempo.

De manera general los pasos a seguir para utilizar el método de EF para solucionar una ecuación diferencial son los siguientes:

1. Obtener la forma débil de la ecuación (aquí se incluyen las condiciones de frontera)

2. Discretizar el dominio.

3. Definir las funciones base adecuadas para el problema.

4. Formulación. Determinar las ecuaciones matriciales que expresan las propiedades de los elementos individuales.

5. Ensamblar las ecuaciones de los elementos para obtener un sistema de ecuaciones simultáneas. Para encontrar las propiedades de todo el sistema, se deben ensamblar todas las ecuaciones de los elementos individuales.

6. Discretización de la parte temporal. Para ecuaciones dependientes del tiempo, se establece un esquema para solucionar la parte temporal.

2.4.1.1. Forma débil de la ecuación

La formulación débil (o formulación variacional) es una manera alternativa de escribir las ecuaciones diferenciales, y se reescriben de forma integral.

Consideramos la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} D(u) =& f \\ u|_{\Gamma} =& u_0. \quad u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Gamma \subset \partial\Omega \end{aligned} \tag{22}$$

Donde D es un operador diferencial; u es la solución de la ecuación diferencial; y f es una función conocida. En este caso consideramos que la incógnita u es un campo escalar, donde en cada punto M del dominio Ω se tiene que determinar $u(M)$. Ahora definimos una función v llamada función de prueba *(test function)*. Esta función de prueba es multiplicada por la ecuación diferencial y es integrada sobre el dominio Ω

$$\int_{\Omega} D(u) \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega \quad \forall v \in V \tag{23}$$

Se considera que la futura solución u de la formulación variacional debe ser una de las funciones v de V, por lo tanto todas la funciones v de V satisfacen las condiciones de Dirichlet, entonces:

$$v|_{\Gamma} = v_0. \quad v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \Gamma \subset \partial\Omega \tag{24}$$

Si definimos el dominio a una dimensión y definimos condiciones de frontera en la ecuación 23 de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'vdx &= \int_0^1 fvdx \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0, \end{aligned} \tag{25}$$

aplicando la integración por partes a esta ecuación, se obtiene la forma débil del problema, la cual consiste en encontrar $u \in V$, tal que, para todo $v \in V$,

$$\begin{aligned} vu\mid_0^1 - \int_0^1 uv'dx &= \int_0^1 fvdx \\ -\int_0^1 uv'dx &= \int_0^1 fvdx, \end{aligned} \tag{26}$$

de esta manera la ecuación 26 es la forma débil de la ecuación diferencial original, en la cual las condiciones de frontera quedan incorporadas de manera natural mediante los límites de integración, a diferencia de enfoques como el de diferencias finitas, donde deben imponerse de forma explícita. Una vez obtenida la formulación débil, se discretiza el dominio.

2.4.1.2. Discretización del dominio

Para ejemplificar, suponemos un problema en una dimensión. Donde el dominio $\Omega = (0, L)$ y será discretizado en 3 elementos, como se muestra en la Figura 9.

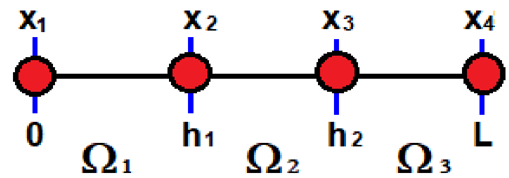


Figura 9. Discretización del dominio Ω, los tres elementos están conformados por cuatro nodos x_1, x_2, x_3 y x_4.

Donde h_i es la distancia entre los nodos y cada subdominio esta definido por $\Omega_1 = (0, h_1)$, $\Omega_2 = (h_1, h_1 + h_2)$ y $\Omega_3 = (h_1 + h_2, L)$, una vez discretizado el dominio se establecen las funciones base adecuadas para el problema.

2.4.1.3. Funciones base

Las funciones base (*basis function, interpolation function*) son utilizadas para determinar el valor del campo variable dentro de la función, es decir, nos describen el comportamiento de la función entre nodo y nodo. Estas funciones tienen que cumplir ciertas característica: deben ser fácil de derivar e integrar y deben ser continuas en el dominio. En este caso, utilizamos funciones base lineales, las más sencillas dentro del método de elementos espectrales. Cada función es lineal dentro de su elemento, Ω_1, y cumple la propiedad $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, es decir, toma el valor de 1 en el nodo x_1 y 0 en los demás. La Figura 10 ilustra estas funciones base en nuestro problema. Por ejemplo, la función $\phi_3 \neq 0$ dentro de los dominios Ω_2 y Ω_3, pero $\phi_3 = 0$ en e dominio Ω_1.

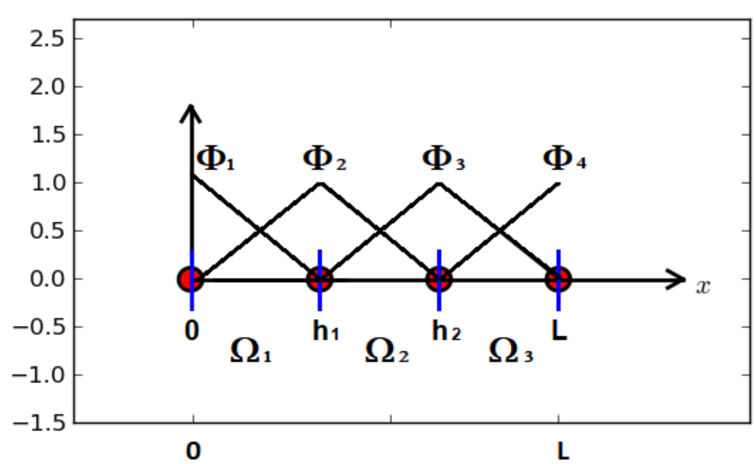


Figura 10. Nodos con sus respectivas funciones base y dominios.

La solución por el método de EF se definirá en términos de las funciones base. Por lo tanto la solución será

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(x) \tag{27}$$

donde a_i son los coeficientes (incógnitas) que serán determinados y N es el número de funciones base en el dominio. Una vez que se tienen los coeficientes de a_i, se obtiene la solución completa por el método de EF para cualquier punto en el dominio.

2.4.1.4. Formulación

Una vez obtenidas las funciones base, son integradas en la forma débil de la ecuación. Como se había mencionado antes la función v_h debe tener la misma forma que u_h por lo tanto

$$u_h = \sum a_i \phi_i(x) \tag{28}$$

$$v_h = \phi_j(x) \tag{29}$$

Se sustituyen las ecuaciones anteriores en la formulación débil (ecuación 26), considerando solo un elemento Ω_1, quedando

$$-\int_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{N} a_i \phi_i(x) \phi_j'(x) dx = \int_{\Omega_1} f \phi_j(x) \quad \forall j = 1, ..., N \tag{30}$$

$$-\sum_{i=1}^{N} a_i \int_{\Omega_1} \phi_i(x) \phi_j'(x) dx = \int_{\Omega_1} f \phi_j(x) \quad \forall j = 1, ..., N \tag{31}$$

A partir de la última ecuación se pueden definir a

$$K_{i,j} = -\int_{\Omega_1} \phi_i(x) \phi(j)'(x) dx, \tag{32}$$

$$a_i = \{a_1, ..., a_N\}^T \tag{33}$$

y

$$f_j = \int_{\Omega_1} f\phi_j dx \tag{34}$$

para tener un sistema de ecuaciones de la forma

$$K_{i,j} a_i = f_j \tag{35}$$

$K_{i,j}$ es conocida como la matriz de rigidez, a_i es el vector de incógnitas y f_j es el vector de carga.

2.4.1.5. Ensamble

Debido a que la formulación se realiza para cada elemento, es necesario hacer un ensamble, ya que los elementos comparten algunos nodos. Por ejemplo en el dominio Ω_1 se encuentran el nodo 1 y 2; el dominio Ω_2 se encuentran los nodos 2 y 3 y así sucesivamente hasta obtener una matriz, llamada matriz global de rígidez $[K]$ y de esta manera, obtener el siguiente sistema de ecuaciones

$$[K]\{u\} = \{F\} \tag{36}$$

2.4.2. Método de elementos espectrales

El método de elementos espectrales es una técnica desarrollada originalmente para estudios de dinámica de fluidos (Patera, 1984). Su nombre proviene de la combinación entre la flexibilidad del método de elementos finitos y la alta precisión característica de los métodos espectrales clásicos. Gracias a esta formulación, el método ha demostrado ser especialmente eficaz en aplicaciones que requieren alta resolución espacial, como la propagación de ondas sísmicas (Komatitsch et al., 2002). La característica clave de este método es que utiliza polinomios de alto orden como funciones base en lugar de funciones lineales. Para entender cómo funciona, podemos compararlo con el método de elemento finito. En ambos casos, se comienza reescribiendo la ecuación en su forma débil. Luego, se divide el dominio en elementos y se definen las funciones base.

Para ejemplificar y simplificar el procedimiento, consideraremos un caso en una dimensión. Supongamos que tenemos una función dependiente del tiempo, denotada como $u(x,t)$, esta función se aproxima como una combinación de n funciones base ϕ_i (donde i varía de 1 a n), que solo dependen del espacio y no del tiempo. La solución aproximada se expresa como

$$u(x,t) \approx u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\phi_i(x), \tag{37}$$

donde $u_i(t)$ son coeficientes de expansión que dependen del tiempo. La calidad de esta aproximación depende de la elección de las funciones base (Cohen, 2002).

Dentro del método de elementos espectrales, las funciones base más utilizadas son los polinomios de interpolación de Lagrange definidos en nodos específicos. Para ello, cada elemento espacial se transforma en un elemento de referencia con coordenadas locales ξ, que varían en el intervalo [-1, 1]. En este sistema de coordenadas, se eligen $N+1$ nodos internos utilizando la regla de cuadratura de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL). De este modo, las funciones base locales quedan definidas mediante polinomios de Lagrange de grado N, dados por:

$$\phi_i^N(\xi) = \prod_{j=1 \;\; j\neq i}^{N+1} \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}, \quad i = 1, ..., N+1, \tag{38}$$

donde los puntos ξ_i corresponden precisamente a los nodos obtenidos con la regla GLL. Es importante destacar que en esta definición, cuando el polinomio de Lagrange es evaluado en su correspondiente punto de cuadratura es igual a uno, pero es cero en el resto de los puntos (Komatitsch & Tromp, 1999), entonces

$$\phi_i^{N_i}(\xi_j) = \delta_{ij}, \tag{39}$$

donde δ_{ij} indica la delta de Kronecker.

La regla de cuadratura de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) permite aproximar integrales definidas mediante una suma ponderada de valores de la función evaluada en puntos específicos llamados nodos GLL. Estos nodos, no distribuidos uniformemente, incluyen obligatoriamente los extremos del intervalo $\xi = -1$ y $\xi = 1$, además de $N-1$ puntos interiores. Matemáticamente, esta aproximación se expresa como:

$$\int_{-1}^{1} f(\xi), d\xi \approx \sum_{i=1}^{N+1} w_i f(\xi_i), \tag{40}$$

donde los pesos w_i dependen del orden N y se calculan mediante la siguiente fórmula:

$$w_i = \frac{2}{N(N+1)[P_N(\xi_i)]^2}, \quad i = 1, 2, ..., N+1, \tag{41}$$

siendo $P_N(\xi_i)$ el polinomio de Legendre de orden N evaluado en los nodos ξ_i. Dichos nodos se obtienen resolviendo las raíces del polinomio:

$$(1-\xi^2)P_N'(\xi) = 0. \tag{42}$$

La elección de dichos nodos y polinomios de Langrage se realiza con base en varias razones (Fichtner, 2011):

- Usar puntos de GLL para la interpolación polinomial asegura que el valor absoluto de los polinomios de Lagrange sea menor o igual a 1, sin importar el orden del polinomio, lo que ayuda a evitar el fenómeno de Runge.
- Los puntos de GLL son puntos Fekete, lo que significa que los errores numéricos en los puntos de colocación tendrán el menor efecto posible en los valores interpolados entre ellos.
- Los puntos de GLL son los puntos de colocación de la regla de cuadratura de GLL, lo que permite aplicar esta regla para obtener aproximaciones precisas de las integrales y obtener una matriz de masa diagonal.

En las Figuras 11, 12 y 13, se muestran diferentes polinomios interpoladores sobre puntos de GLL. Es importante destacar que los puntos de GLL no siempre están equiespaciados; mientras que para un polinomio de segundo orden los puntos están igualmente separados, para órdenes superiores esto no es así.

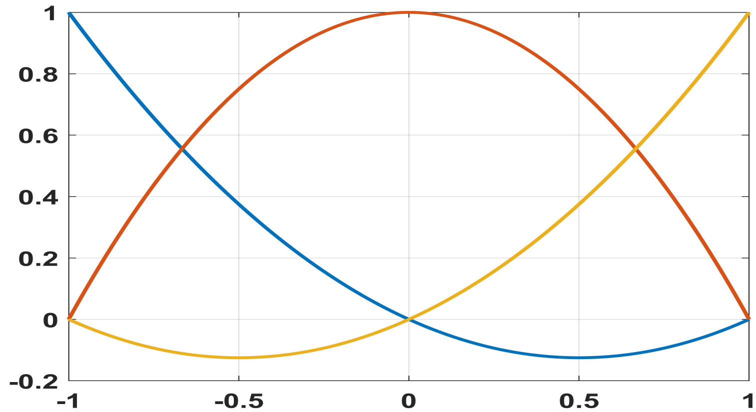


Figura 11. Polinomio interpolador de Lagrange de segundo orden sobre los puntos de referencia de Gauss-Lobatto-Legendre. El segmento se encuentra en los límites $[-1, 1]$.

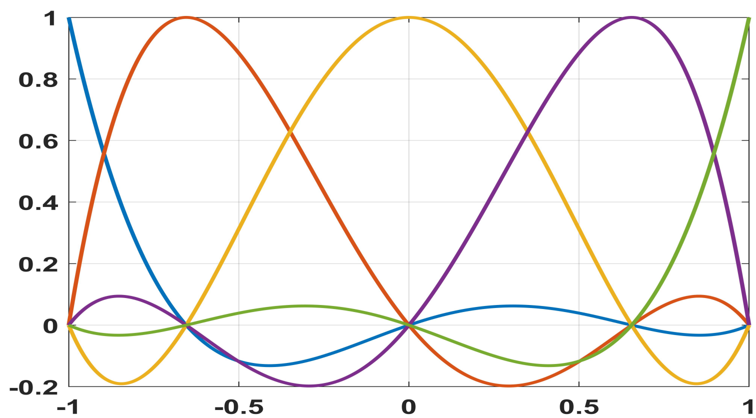


Figura 12. Polinomio interpolador de Lagrange de cuarto orden sobre los puntos de referencia de Gauss-Lobatto-Legendre.

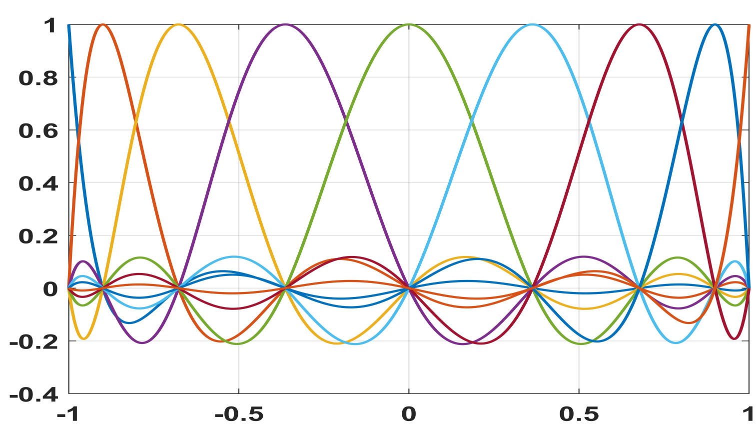


Figura 13. Polinomio interpolador de Lagrange de octavo orden sobre los puntos de referencia de Gauss-Lobatto-Legendre.

En la siguiente sección se presenta una descripción del proceso de discretización del dominio en el método de elementos espectrales, incluyendo la representación de las funciones de forma mediante interpoladores de Lagrange de alto orden y su evaluación en los puntos de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL). Además, se abordan los cálculos necesarios para la integración sobre los elementos, así como la conexión entre los nodos locales y globales.

2.4.2.1. Definición de la malla

En la sección anterior, describimos los fundamentos del método de elementos espectrales en una dimensión para ilustrar su formulación básica y el uso combinado de los polinomios de Lagrange con la cuadratura de GLL. Ahora, extendemos estos conceptos al caso tridimensional, abordando la discretización espacial del dominio, describiendo la generación de la malla y el mapeo hacia elementos maestros en el espacio paramétrico.

En el método de elementos espectrales, la discretización del dominio físico Ω comienza con su división en un conjunto de elementos no superpuestos Ω_e, donde $e = 1, \ldots, n_e$.

Mapeo al elemento maestro

Los elementos de volumen se transforman, o "*mapean*", a un elemento de referencia (o maestro) definido en el espacio paramétrico por las coordenadas naturales (ξ, η, ζ), con $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$. Este mapeo permite trabajar en un sistema estándar y facilita el uso de interpoladores polinomiales.

Cada elemento de volumen se describe mediante n_a puntos de control $\boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{x}(\xi_a, \eta_a, \zeta_a)$, con $a = 1, \ldots, n_a$, y un conjunto de funciones de forma $N_a(\boldsymbol{\xi})$. En el caso más básico, se requieren al menos 8 puntos de control, correspondientes a las esquinas del hexaedro. Sin embargo, al incluir puntos adicionales en los centros de aristas, caras y el centro del volumen, se pueden definir hasta 27 puntos de control (Komatitsch & Tromp, 1999). La Figura 14 muestra ejemplos con 8 y 27 puntos de control.

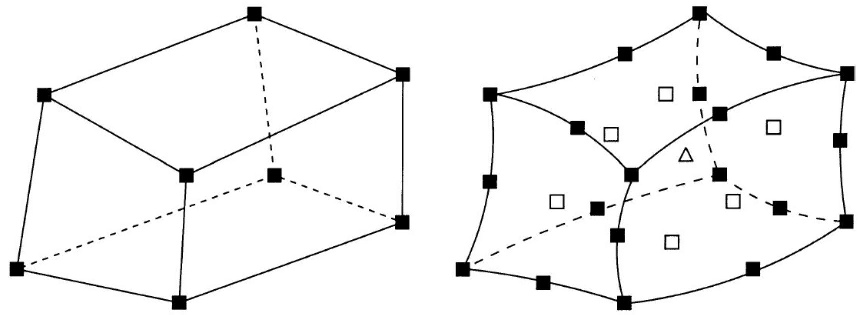


Figura 14. Elementos de volumen definidos utilizando diferentes puntos de control; (Izquierdo) con 8 puntos de control y (derecho) con 27 puntos de control. En el elemento de la derecha, los cuadros vacíos son los 6 puntos que se encuentran en el medio de las aristas del elemento y el triángulo indica el nodo localizado en el centro del elemento. Tomado de Komatitsch & Tromp (1999).

La relación de mapeo entre un punto físico $\boldsymbol{x}$ dentro del elemento y su correspondiente punto en el elemento de referencia se define como

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{a=1}^{n_a} N_a(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{x}_a, \tag{43}$$

donde las funciones de forma N_a son productos de polinomios de Lagrange en cada dirección. Estos polinomios se construyen utilizando los puntos de control definidos en el espacio paramétrico, este caso las funciones de forma del elemento de volumen con 8 puntos de control y con 27 puntos, son productos triples del polinomio de Lagrange de orden uno y dos, respectivamente. En la práctica, es común utilizar elementos de 20 puntos, eliminando los 7 nodos centrales del elemento de 27 nodos.

El grado de dichos polinomios determina directamente la precisión de la interpolación dentro de cada elemento. A modo de ejemplo, en una dimensión, los polinomios lineales (grado 1) con dos puntos de control en $\xi_0 = -1$ y $\xi_1 = 1$ se definen como

$$l_0^1(\xi) = \frac{1-\xi}{2}, \quad l_1^1(\xi) = \frac{1+\xi}{2}, \tag{44}$$

de manera similar, al considerar polinomios cuadráticos (grado 2) generados a partir de tres puntos de control $\xi_0 = -1$, $\xi_1 = 0$ y $\xi_2 = 1$, obtenemos

$$l_0^2(\xi) = \frac{\xi(\xi-1)}{2}, \quad l_1^2(\xi) = 1-\xi^2, \quad l_2^2(\xi) = \frac{\xi(\xi+1)}{2}. \tag{45}$$

En dos dimensiones, las funciones de forma N_a se obtienen como productos de estos polinomios

$$N_1(\xi,\eta) = l_0^1(\xi) l_0^1(\eta), \quad N_2(\xi,\eta) = l_1^1(\xi) l_0^1(\eta), \quad N_3(\xi,\eta) = l_1^1(\xi) l_1^1(\eta), \quad N_4(\xi,\eta) = l_0^1(\xi) l_1^1(\eta). \tag{46}$$

Este enfoque se extiende naturalmente a tres dimensiones. Donde las funciones de forma se definen como el producto de polinomios de Lagrange en cada una de las tres direcciones paramétricas

$$N_{ijk}(\xi,\eta,\zeta) = l_i^N(\xi) l_j^N(\eta) l_k^N(\zeta), \tag{47}$$

donde $i, j, k = 0, ..., N$ y se obtienen $(N+1)^3$ funciones de forma por elemento.

Cálculo del Jacobiano

Un elemento volumétrico en el espacio físico $dx\ dy\ dz$, se relaciona con un elemento de volumen en el espacio de referencia $d\xi\ d\eta\ d\zeta$ mediante el Jacobiano

$$dx\ dy\ dz = \boldsymbol{J}_e d\xi\ d\eta\ d\zeta, \tag{48}$$

donde el Jacobiano volumétrico está dado por

$$\boldsymbol{J}_e = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)} \right|, \tag{49}$$

este Jacobiano $\boldsymbol{J}_e$ relaciona las derivadas en el espacio físico con las del espacio paramétrico. Derivando la ecuación (43), obtenemos

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \sum_{a=1}^{n_a} \frac{\partial N_a}{\partial \boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{x}_a, \tag{50}$$

donde derivadas parciales de las funciones base son calculadas analíticamente. Para asegurar que el mapeo sea único e invertible, el Jacobiano no debe ser singular en ningún punto del elemento.

Representación polinomial e integración

Dentro de un elemento volumétrico Ω_e, una función f se interpola como

$$f(\boldsymbol{x}(\xi,\eta,\zeta)) \approx \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^{n_l} f^{\alpha,\beta,\gamma} l_\alpha(\xi) l_\beta(\eta) l_\gamma(\zeta), \tag{51}$$

donde

$$f^{\alpha,\beta,\gamma} = f(\boldsymbol{x}(\xi_\alpha, \eta_\beta, \zeta_\gamma)). \tag{52}$$

La integración sobre los elementos se aproxima mediante la regla de cuadratura Gauss-Lobatto-Legendre

$$\int_{\Omega_e} f(\boldsymbol{x}) d^3\boldsymbol{x} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\boldsymbol{x}(\xi,\eta,\zeta)) J_e(\xi,\eta,\zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{\alpha,\beta,\gamma}^{n_l} \omega_\alpha \omega_\beta \omega_\gamma f^{\alpha\beta\gamma} \boldsymbol{J}_e^{\alpha\beta\gamma}, \tag{53}$$

donde ω_α, ω_β y ω_γ son los pesos de integración de GLL y $\boldsymbol{J}_e^{\alpha\beta\gamma} = \boldsymbol{J}_e(\xi_\alpha, \eta_\beta, \zeta_\gamma)$ es el Jacobiano evaluado en los puntos GLL. Para realizar estas integraciones, es necesario evaluar la matriz Jacobiana inversa $\partial\boldsymbol{\xi}/\partial\boldsymbol{x}$ en todos los puntos de integración.

Sistema global y progresión en tiempo

En el método de elementos espectrales, el modelo se subdivide en elementos hexaédricos y las funciones se evalúan en los puntos de GLL de cada elemento. Los nodos ubicados en las caras o aristas de los elementos son compartidos entre elementos adyacentes. La Figura 15 muestra un ejemplo en 2D que ilustra esta relación entre nodos locales y globales.

Para garantizar la correcta acumulación de contribuciones, es necesario establecer un mapeo entre los nodos locales de cada elemento y los nodos globales del dominio. Este proceso es equivalente al ensamblaje del sistema global en el método de elementos finitos.

No obstante, en el método de elementos espectrales, este paso puede ser computacionalmente costoso, especialmente en implementaciones paralelas. La razón es que los datos de los elementos deben ser compartidos entre los procesadores encargados de los elementos vecinos, lo cual implica una comunicación intensiva.

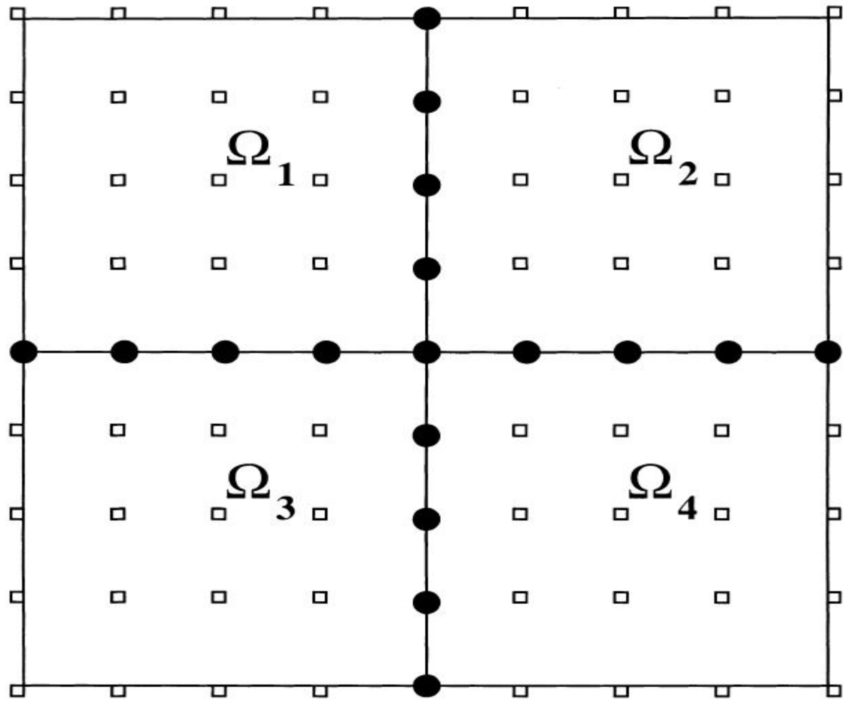


Figura 15. Esquema de nodos compartidos entre elementos rectangulares en la malla global y local. Los círculos negros muestran los nodos compartidos con los elementos y los cuadrados indican los nodos independientes. Tomado de Komatitsch & Tromp (1999).

Este proceso de ensamble resalta una de las principales características del método de elementos espectrales: la necesidad de balancear la alta precisión en los cálculos con la eficiencia computacional, especialmente en problemas de gran escala donde las operaciones paralelas son fundamentales.

Capítulo 3. Implementación computacional

En este capítulo se describe el proceso de implementación computacional utilizado para resolver la ecuación de difusión electromagnética mediante el método de elementos espectrales, así como los pasos necesarios para representar distintas configuraciones de fuentes y llevar a cabo la discretización temporal. Además, se discute el cálculo de la componente magnética a partir del campo eléctrico y, finalmente, se efectúa una validación numérica comparando las soluciones obtenidas con expresiones analíticas en medios homogéneos (tanto en espacio completo como en semi-espacio).

3.1. Método de elementos espectrales para la ecuación de difusión electromagnética

Partimos de la ley de Faraday y la Ley de Ampere en el regimén cuasi-estático en una región con una fuente eléctrica definida, donde

$$\nabla \times \mathbb{E} = -\frac{\partial \mathbb{B}}{\partial t}, \tag{54}$$

y

$$\nabla \times \mathbb{H} = \boldsymbol{J}. \tag{55}$$

Aplicando el operador rotacional a la ecuación 54, sustituyendo el resultado en la ecuación 55 y considerando la relación constitutiva del campo magnético, obtenemos la ecuación diferencial en términos del campo eléctrico

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \left(\mu^{-1} \nabla \times \mathbb{E}(\boldsymbol{r}, t)\right) + \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial \mathbb{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \text{ en } \Omega \\
&\mathbb{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \\
&\mathbb{E}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \text{ en } \ t = 0,
\end{aligned} \tag{56}$$

donde la permeabilidad magnética es igual a la del vacío ($\mu = \mu_0$), $\mathbb{E}(\boldsymbol{r}, t) = (E_x(\boldsymbol{r}, t),\ E_y(\boldsymbol{r}, t),\ E_z(\boldsymbol{r}, t))$ es el campo eléctrico en el tiempo t y la posición $\boldsymbol{r}$, utilizando un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) con el eje z positivo hacia abajo, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ es la fuente eléctrica y Ω es el dominio espacial con frontera $\partial\Omega$. Establecemos una condición de frontera homogénea de tipo Dirichlet, donde el campo eléctrico es igual a cero, ya que la frontera se encuentra muy lejos de la fuente y el campo eléctrico decae rápidamente; además consideramos como condición inicial, que el campo eléctrico es cero en cualquier parte del espacio en el tiempo $t = 0$.

La conductividad eléctrica $\boldsymbol{\sigma}$ está dada por el tensor definido positivo de 3×3 para una tierra con anisotropía eléctrica definida por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{57}$$

En nuestro modelo solo consideramos las tres conductividades (σ_{xx}, σ_{yy}, y σ_{zz}) de la diagonal principal, y el resto de los elementos del tensor son cero

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix}. \tag{58}$$

Una vez establecidas las condiciones de frontera e iniciales del problema, obtenemos la forma débil o formulación variacional, la cual se obtiene multiplicando la ecuación 56 por una función de prueba $\boldsymbol{\Psi}$ e integrando sobre el dominio Ω, de esta manera obtenemos la forma débil para la ecuación de difusión del campo eléctrico

$$\int_\Omega \mu^{-1}(\nabla \times \mathbb{E}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Psi}) dV + \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r}) \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\Psi} dV = -\int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\Psi} dV. \tag{59}$$

Posteriormente, discretizamos el dominio Ω en un número finito de elementos hexaédricos cuyo dominio es Ω_e y definimos un conjunto de funciones base $\boldsymbol{\Phi}^e_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r})$, las cuales dependen solo del espacio y no del tiempo. Entonces la combinación lineal de estas funciones base nos dará una aproximación del campo eléctrico en un elemento

$$\mathbb{E}^e(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{j=1}^{N_f} E^e_j(t) \boldsymbol{\Phi}^e_j(\boldsymbol{r}) \tag{60}$$

donde $\boldsymbol{E}^e_j(t)$ son los coeficientes a determinar del campo eléctrico en el nodo j para un elemento en particular e a un tiempo t y N_f es el número de funciones base por elemento, este número depende del orden polinomial de las funciones base.

Sin pérdida de generalidad, definimos la función de prueba igual a las funciones base y obtenemos ($\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi}_i^e$) de la ecuación 59

$$\sum_{i=1}^{N_e}\sum_{j=1}^{N_f} E_j^e \int_{\Omega_e} \mu^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{\Phi}_j^e)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\Phi}_i^e)\,dV + \sum_{i=1}^{N_e}\sum_{j=1}^{N_f}\frac{\partial E_j^e}{\partial t}\int_{\Omega_e}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\Phi}_j^e)\cdot\boldsymbol{\Phi}_i^e\,dV = -\sum_{i=1}^{N_e}\int_{\Omega_e}\frac{\partial \boldsymbol{J}^e}{\partial t}\cdot\boldsymbol{\Phi}_i^e\,dV, \tag{61}$$

donde Ω_e es el dominio de un elemento. Cada elemento hexáhedrico es transformado a un elemento cúbico de referencia con coordenadas ξ, η, ζ, donde $-1 \le \xi \le 1$, $-1 \le \eta \le 1$, y $-1 \le \zeta \le 1$. En este elemento de referencia se definen las funciones base utilizando los polinomios de Lagrange en una dimensión de grado n_l, basadas en su correspondiente punto de GLL.

Si extendemos las bases en 1D al elemento de referencia en 3D, las funciones base se obtienen como el producto de los polinomios de Lagrange de grado n_l en cada dirección de la siguiente forma

$$\tilde{\Phi}_i^{n_l}(\xi,\eta,\zeta) = \tilde{\Phi}_j(\xi)\tilde{\Phi}_k(\eta)\tilde{\Phi}_l(\zeta), \tag{62}$$

y la transformación entre $\tilde{\Phi}_i^{n_l}(\xi,\eta,\zeta)$ y $\Phi_i^{n_l}(x,y,x)$ esta dada por

$$\Phi_i^{n_l}(x,y,x) = \mathbb{J}^{-1}\cdot\tilde{\Phi}_i^{n_l}(\xi,\eta,\zeta), \tag{63}$$

donde $\mathbb{J}$ es el Jacobiano o matriz de mapeo de dimensiones 3×3. Las derivadas parciales de las funciones base son utilizadas para calcular tanto el Jacobiano como el rotacional de dichas funciones y son determinadas numéricamente. La integración sobre los elementos de la ecuación 61 es aproximada utilizando la regla de cuadratura de GLL. Aplicando la regla de cuadratura de GLL y los puntos de GLL en los polinomios de Lagrange, obtenemos aproximaciones precisas en las integrales de la ecuación 61 (Fichtner, 2011). Esto nos lleva a obtener un sistema de ecuaciones lineales que pueden ser escritas en su forma matricial como

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{ij}^1 E_j^x + \boldsymbol{K}_{ij}^2 E_j^y + \boldsymbol{K}_{ij}^3 E_j^z + \boldsymbol{M}_{ij}^1 \partial_t E_j^x &= \partial_t J_i^x \\
\boldsymbol{K}_{ij}^4 E_j^x + \boldsymbol{K}_{ij}^5 E_j^y + \boldsymbol{K}_{ij}^6 E_j^z + \boldsymbol{M}_{ij}^2 \partial_t E_j^y &= \partial_t J_i^y \\
\boldsymbol{K}_{ij}^7 E_j^x + \boldsymbol{K}_{ij}^8 E_j^y + \boldsymbol{K}_{ij}^9 E_j^z + \boldsymbol{M}_{ij}^3 \partial_t E_j^z &= \partial_t J_i^z,
\end{aligned} \tag{64}$$

donde $\boldsymbol{K}_{ij}^n$ y $\boldsymbol{M}_{ij}^n$ son llamadas matrices de rígidez y de masa, respectivamente. Las matrices de masa contienen los valores del modelo de conductividad eléctrica, la cual es la propiedad de interés en nuestro esquema de modelado. Además el uso de los polinomios de Lagrange y las reglas de cuadratura de GLL nos permiten obtener una matriz de masa diagonal (Komatitsch & Tromp, 1999), la cual puede invertirse fácilmente.

3.2. Fuente

En el modelado electromagnético las fuentes más utilizadas son bobinas o cables largos aterrizados, los cuales pueden ser representados por una combinación de dipolos eléctricos (un pequeño elemento de corriente de longitud ds), donde cada dipolo eléctrico es considerado como una fuente puntual.

3.2.1. Fuente puntual

Ward & Hohmann (1987) definen la densidad de corriente eléctrica en cada dipolo eléctrico orientado en la dirección de un vector unitario $\hat{\boldsymbol{u}}$ como

$$\boldsymbol{J}^e(\boldsymbol{r}, t) = I(t) ds \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)\hat{\boldsymbol{u}}, \tag{65}$$

donde $I(t)$ es la corriente eléctrica, $(x_0,\, y_0,\, z_0)$ son las coordenadas de la posición de la fuente, ds es la longitud del elemento de corriente y δ es la función delta de Dirac, la cual es aproximada utilizando una función Gaussiana angosta. La corriente eléctrica $I(t)$ se aproxima utilizando una interpolación lineal, simulando la fase de encendido y apagado de la fuente como se muestra en la Figura 16. La rampa de encendido comienza en 0.0019 s y finaliza en 0.002 s, mientras que la rampa de apagado inicia en 0.006 s y concluye en 0.0061 s.

Utilizando esta forma de onda, la simulación comienza con el campo eléctrico igual a cero en todo el dominio (condición inicial). En la etapa de encendido, se dispone de tiempo suficiente para establecer un campo eléctrico estático, el cual se interrumpe posteriormente en la etapa de apagado. Las interpretaciones geofísicas del método TEM se basan en el análisis de las curvas de decaimiento de los campos electromagnéticos, con el fin de estimar la conductividad eléctrica en el subsuelo.

Para incluir la fuente en el esquema de discretización temporal, partimos de la ecuación 59, donde la fuente se encuentra definida como $\partial \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)/\partial t$. Esta derivada puede calcularse numéricamente, lo que permite incorporar adecuadamente la contribución de la fuente en el esquema numérico.

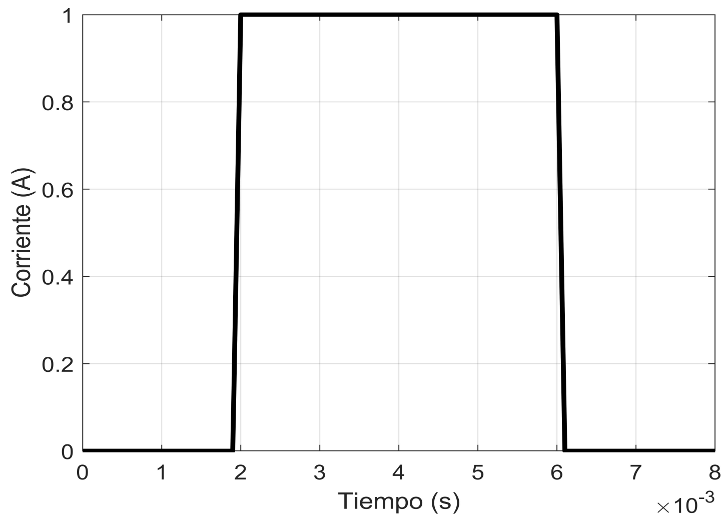


Figura 16. Forma de la fuente. La etapa de encendido finaliza a los 0.002 s y la de apagado inicia a los 0.006 s.

3.2.2. Espira cuadrada

Las espiras o bobinas pueden ser representadas como una combinación de dipolos eléctricos (fuentes puntuales), pero en nuestro caso representamos una bobina cuadrada como la suma de 4 dipolos (dos orientados en la dirección x y dos en y). Para delimitar la longitud efectiva de cada dipolo, empleamos una función rectangular suavizada, descrita por

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-2\alpha(x-a)}} - \frac{1}{1 + e^{-2\alpha(x-b)}} \tag{66}$$

donde a y b son los puntos medios de la curva de subida y bajada, respectivamente, y α es un factor de suavizamiento. Un valor pequeño de α produce transiciones suaves en los límites de encendido y apagado, mientras que valores grandes generan transiciones abruptas, como se muestra en la Figura 17. Esta función rectangular suavizada proporciona una aproximación más cercana a la forma de las espiras y resulta sencilla de utilizar, aunque su flexibilidad es limitada, ya que no se adapta a configuraciones circulares.

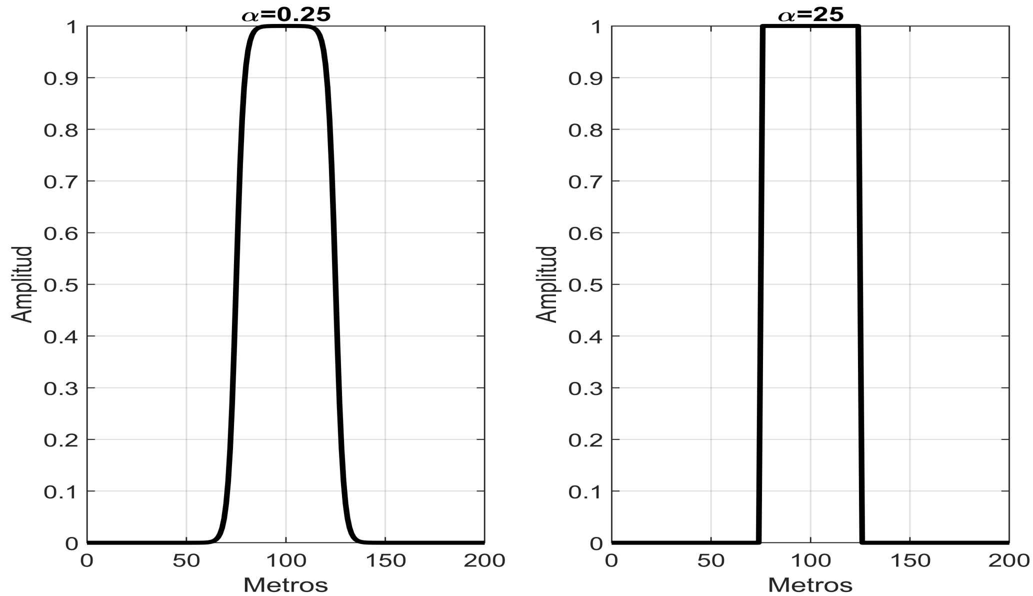


Figura 17. Función rectangular suavizada con 25 m de longitud, los valores de a y b son 75 y 125, respectivamente. (Izquierda) Muestra una curva con un factor de suavizamiento $\alpha = 0.25$; (Derecha) La curva tiene un un factor $\alpha = 25$.

En las Figuras 18 y 19 se muestra la suma de los cuatro dipolos, los cuales se encuentran delimitados por la función rectangular suavizada.

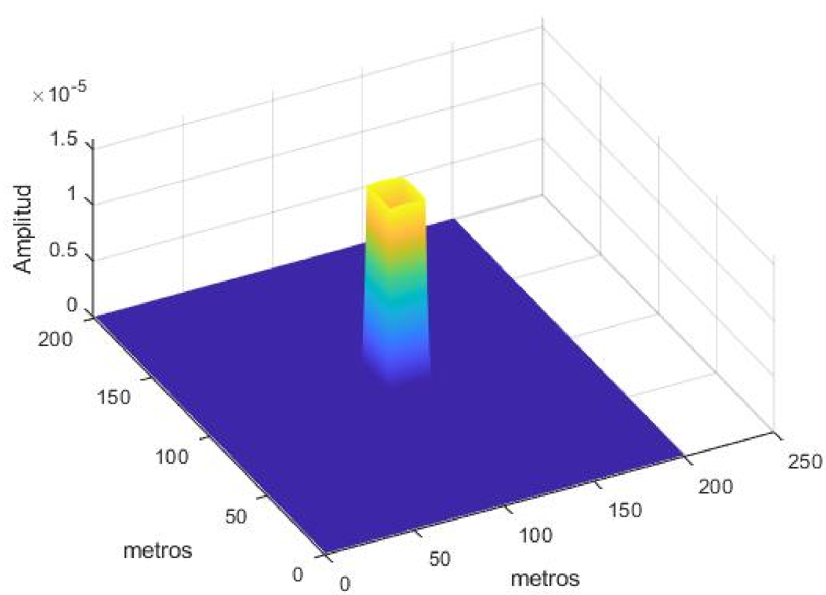


Figura 18. Espira cuadrada con dimensiones 25×25 m formada a partir de la suma de los cuatro dipolos. En el eje vertical se encuentra la amplitud de los dipolos.

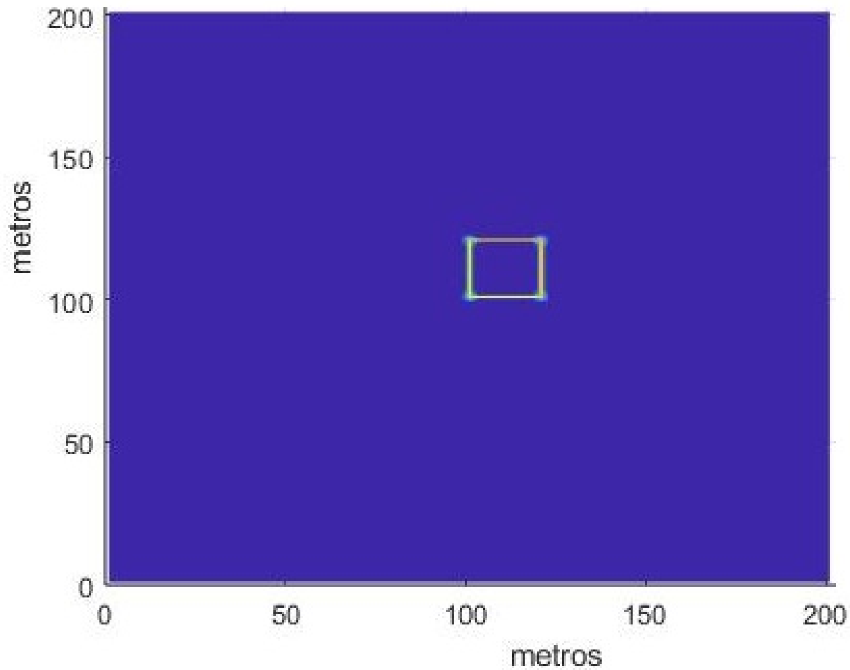


Figura 19. Vista en planta (XY) de la espira cuadrada de 25×25 m.

3.2.3. Cable largo

El método *LOTEM* (*Long Offset Transient Electromagnetic Method*) conocido como el método electromagnético transitorio de gran *offset*, consiste en utilizar un cable muy largo como fuente de 1 a 2 kilómetros, el cual generará los campos electromagnéticos primarios. Por otro lado los receptores son ubicados a grandes distancias de la fuente, generalmente a varios kilómetros de ella (Strack et al., 1990), en ellos se mide el campo eléctrico horizontal y la derivada en tiempo del campo magnético vertical.

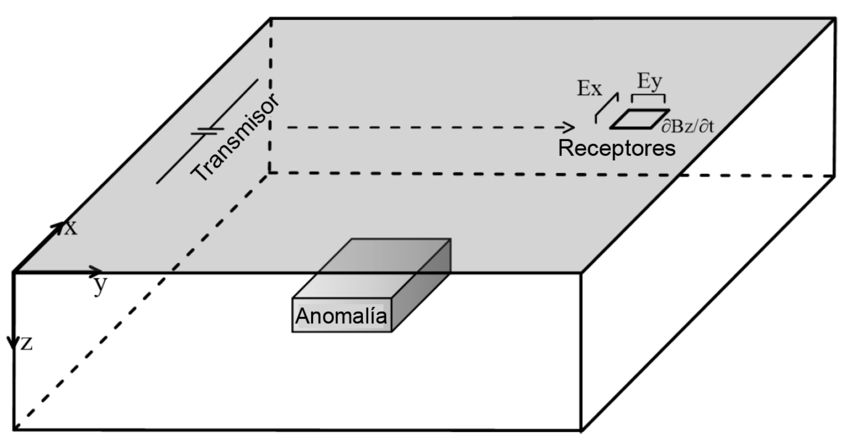


Figura 20. Diagrama esquemático de la adquisición de datos *LOTEM*. Modificado de Xu et al. (2023).

En un principio, el método fue concebido principalmente para la exploración de hidrocarburos y estudios de la corteza terrestre (Strack, 1992; Commer et al., 2006). Sin embargo, con el tiempo, también se ha empleado en diversos campos como la exploración minera (Stephan et al., 1991; Wang et al., 2023), estudios geotérmicos (Haroon et al., 2015) y otras aplicaciones relacionadas con la exploración de hidrocarburos (Vozoff et al., 1985; Yan et al., 2018).

La fuente del método *LOTEM* se representa como un dipolo eléctrico orientado en una dirección específica, que puede ser x o y. Para definir la longitud del dipolo, se utilizó una función rectangular suavizada, como se describe en la ecuación 66.

3.3. Discretización temporal

En la sección 3.1 definimos la discretización espacial de las ecuaciones de Maxwell con el método de elementos espectrales, sin embargo, la discretización temporal se realiza de manera independiente. Existen diferentes métodos numéricos que pueden ser utilizados para discretizar la parte temporal de nuestro problema, ya sean métodos explícitos (diferencias finitas, Lax Wendroff, etc.) o métodos implícitos (Backward Euler, Crank-Nicolson, etc.), estos últimos implican resolver un sistema de ecuaciones en cada paso de tiempo, lo cual hace que el problema se vuelva muy costoso computacionalmente. Por esta razón, proponemos utilizar el método explícito de diferencias finitas adelantadas, el cual es más eficiente que un método implícito.

Entonces, partimos de las ecuaciones en forma matricial 64 y defininimos el esquema de diferencias finitas adelantadas en x, y, y z de la siguiente manera

$$\partial_t E_j^x \approx \frac{E_j^{x,l+1} - E_x^{x,l}}{\Delta t}, \tag{67}$$

$$\partial_t E_j^y \approx \frac{E_j^{y,l+1} - E_j^{y,l}}{\Delta t} \tag{68}$$

y

$$\partial_t E_j^z \approx \frac{E_j^{z,l+1} - E_j^{z,l}}{\Delta t}. \tag{69}$$

donde el índice superior l indica el tiempo. Utilizando el mismo esquema, discretizamos la derivada temporal del término de fuente donde

$$\partial_t J_j^x \approx \frac{J_j^{x,l+1} - J_x^{x,l}}{\Delta t}, \tag{70}$$

$$\partial_t J_j^y \approx \frac{J_j^{y,l+1} - J_j^{y,l}}{\Delta t} \tag{71}$$

y

$$\partial_t J_j^z \approx \frac{J_j^{z,l+1} - J_j^{z,l}}{\Delta t}. \tag{72}$$

Sustituyendo las ecuaciones 67, 68,69, 70, 71 y 72, en la ecuación 64 obtenemos

$$E_i^{x,l+1} = E_i^{x,l} + (M_{ij}^1)^{-1}(J_j^{x,l+1} - J_j^{x,l}) - \Delta t(M_{ij}^1)^{-1}(K_{jk}^1 E_k^{x,l} + K_{jk}^2 E_k^{y,l} + K_{jk}^3 E_k^{z,l}) \tag{73}$$

$$E_i^{y,l+1} = E_i^{y,l} + (M_{ij}^2)^{-1}(J_j^{y,l+1} - J_j^{y,l}) - \Delta t(M_{ij}^2)^{-1}(K_{jk}^4 E_k^{x,l} + K_{jk}^5 E_k^{y,l} + K_{jk}^6 E_k^{z,l}) \tag{74}$$

$$E_i^{z,l+1} = E_i^{z,l} + (M_{ij}^3)^{-1}(J_j^{z,l+1} - J_j^{z,l}) - \Delta t(M_{ij}^3)^{-1}(K_{jk}^7 E_k^{x,l} + K_{jk}^8 E_k^{y,l} + K_{jk}^9 E_k^{z,l}) \tag{75}$$

donde l es el índice del tiempo y Δt es el tamaño del paso en el tiempo. La principal ventaja de utilizar el método de diferencias finitas es que al tener matrices de masa M_{ij} diagonales, el cálculo de su inversa es muy sencilla; Además no es necesario resolver un sistema de ecuaciones en cada paso de tiempo. Este método es totalmente explícito, y por lo tanto podemos reducir la cantidad de memoria que se utiliza y también el tiempo de cómputo.

Este método es condicionalmente estable. Por lo tanto, es necesario definir una condición de estabilidad que nos permita utilizarlo apropiadamente. Goldman et al. (1986) propone la siguiente condición de estabilidad para una malla de elementos uniforme

$$\Delta t \leq \frac{\mu \sigma_* \Delta^2}{8}, \tag{76}$$

donde σ_* es la conductividad mas pequeña del modelo y Δ es el tamaño mínimo de un lado del elemento. Goldman et al. (1986) analizó el campo eléctrico utilizando el método de elemento finito en 2D y el método explícito de diferencias finitas. Nuestros experimentos indican que este criterio de estabilidad también es apropiado en nuestra implementación.

3.4. Cálculo del campo magnético

El cálculo del campo magnético se basa en la ecuación de Faraday 1, que relaciona la variación temporal del campo magnético con el rotacional del campo eléctrico. Al desarrollar esta expresión, se obtienen las tres componentes del campo magnético:

$$\frac{\partial B^x}{\partial t} = -\frac{\partial E^z}{\partial y} + \frac{\partial E^y}{\partial z}, \tag{77}$$

$$\frac{\partial B^y}{\partial t} = -\frac{\partial E^x}{\partial z} + \frac{\partial E^z}{\partial x}, \tag{78}$$

y

$$\frac{\partial B^z}{\partial t} = -\frac{\partial E^y}{\partial x} + \frac{\partial E^x}{\partial y}. \tag{79}$$

Aplicando la aproximación de diferencias finitas centradas de primer orden para la derivada espacial a las ecuaciones 77, 78 y 79, se obtiene

$$\frac{\partial B^x}{\partial t} \approx \frac{E^y(i,j,k+\Delta_z) - E^y(i,j,k-\Delta_z)}{2\Delta_z} - \frac{E^z(i,j+\Delta_y,k) - E^z(i,j-\Delta_y,k)}{2\Delta_y}, \tag{80}$$

$$\frac{\partial B^y}{\partial t} \approx \frac{E^z(i+\Delta_x,j,k) - E^z(i-\Delta_x,j,k)}{2\Delta_x} - \frac{E^x(i,j,k+\Delta_z) - E^x(i,j,k-\Delta_z)}{2\Delta_z}, \tag{81}$$

y

$$\frac{\partial B^z}{\partial t} \approx \frac{E^x(i,j+\Delta_y,k) - E^x(i,j-\Delta_y,k)}{2\Delta_y} - \frac{E^y(i+\Delta_x,j,k) - E^y(i-\Delta_x,j,k)}{2\Delta_x}. \tag{82}$$

En este esquema, Δ_x, Δ_y y Δ_z representan los pasos espaciales en cada dirección de la malla. Para simplificar la notación y minimizar errores numéricos en la implementación, se asume un mallado uniforme en todas las direcciones, es decir, $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta$.

La elección del esquema de diferencias finitas centradas asegura un error de truncamiento del orden $\mathcal{O}(\Delta^2)$ en las derivadas espaciales, lo que proporciona una aproximación de segundo orden en espacio.

3.5. Verificación de la solución numérica

Para determinar la precisión del esquema de modelado directo, se realizaron comparaciones entre las soluciones del campo eléctrico obtenidas de manera numérica y analítica. Todos los experimentos numéricos fueron ejecutados en la supercomputadora LAMB de CICESE[1]. Las simulaciones fueron realizadas en un nodo, equipado con dos procesadores Intel Xeon E5-2670 v2, con 10 núcleos a 2.5 GHz (20 núcleos en total) y 128 GB de *RAM*. Además usamos las librerias de *Open MP* y los compiladores de Intel OneAPI para paralelizar el código computacional.

3.5.1. Soluciones analíticas

3.5.1.1. Espacio completo homogéneo e isótropo

Ward & Hohmann (1987) desarrollan la solución analítica del campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico horizontal orientado en la dirección x en un medio completo, homogéneo e isótropo después de que el dipolo es apagado abruptamente (etapa de apagado). La solución está dada por la siguiente ecuación

$$\boldsymbol{E} = \frac{Ids}{4\pi\sigma r^3}\left[\left(\frac{x^2}{r^2}\hat{x} + \frac{xy}{r^2}\hat{y} + \frac{xz}{r^2}\hat{z}\right)\left(\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^3 r^3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}}\theta r\right)e^{-\theta^2 r^2} + 3\,\mathrm{erfc}(\theta r)\right)\right.$$
$$\left. - \left(\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^3 r^3 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\theta r\right)e^{-\theta^2 r^2} + \mathrm{erfc}(\theta r)\right)\hat{x}\right] \tag{83}$$

donde I es la intensidad de corriente, ds es la longitud del dipolo, y erfc la función error complementaria, definida como $\mathrm{erfc} = 1 - \mathrm{erf}$, siendo erf la función error. El vector $\boldsymbol{r}$ representa la distancia entre la fuente y el receptor. Las distancias entre las posiciones de la fuente y el receptor son x, y y z; es decir $x = x_r - x_f$, $y = y_r - y_f$ y $z = z_r - z_f$, los subíndices r y f indican si se trata de la posición del receptor o de la fuente, respectivamente y $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$ son los vectores unitarios en las tres direcciones.

Además el término θ esta definido por

[1] http://lamb.cicese.mx

$$\theta = \left(\frac{\mu\sigma}{4t}\right)^{1/2}, \tag{84}$$

donde t es el tiempo. Por otro lado, en la etapa de encendido, la ecuación se define de la siguiente manera

$$\boldsymbol{E} = \frac{Ids}{4\pi\sigma r^3}\left[\left(\frac{x^2}{r^2}\hat{x} + \frac{xy}{r^2}\hat{y} + \frac{xz}{r^2}\hat{z}\right)\left(3\,\mathrm{erf}(\theta r) - \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^3 r^3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}}\theta r\right)e^{-\theta^2 r^2}\right) - \left(\mathrm{erf}(\theta r) - \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^3 r^3 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\theta r\right)e^{-\theta^2 r^2}\right)\hat{x}\right], \tag{85}$$

En la Figura 21 se muestra el comportamiento en tiempo del campo eléctrico E_x de un dipolo eléctrico horizontal orientado en la dirección x, donde la etapa de encendido comienza a los 0.002 s y la de apagado a los 0.006 s, en un medio de conductividad $\sigma = 0.01$ S/m.

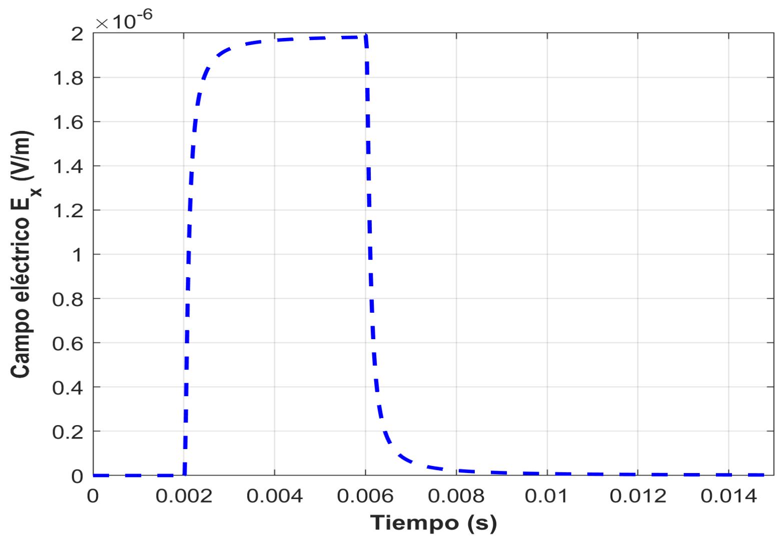


Figura 21. Solución analítica del campo eléctrico E_x producido por una fuente puntual orientada en la dirección x. El receptor esta ubicado a 200 m de distancia en la dirección x.

De manera análoga, obtenemos la solución para el campo eléctrico producido por un dipolo eléctrico vertical en un espacio completo, homogéneo e isótropo en la etapa de encendido y apagado, dadas por las siguientes ecuaciones

$$\boldsymbol{E} = \frac{Ids}{4\pi\sigma r^3}\left[\left(\frac{xz}{r^2}\hat{x} + \frac{yz}{r^2}\hat{y} + \frac{z^2}{r^2}\hat{z}\right)\left(3\,\mathrm{erf}(\theta r) - \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^3 r^3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}}\theta r\right)e^{-\theta^2 r^2}\right)\right.$$
$$\left. - \left(\mathrm{erf}(\theta r) - \left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^3 r^3 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\theta r\right)e^{-\theta^2 r^2}\right)\hat{z}\right] \tag{86}$$

y

$$\boldsymbol{E} = \frac{Ids}{4\pi\sigma r^3}\left[\left(\frac{xz}{r^2}\hat{x} + \frac{yz}{r^2}\hat{y} + \frac{z^2}{r^2}\hat{z}\right)\left(\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^3 r^3 + \frac{6}{\sqrt{\pi}}\theta r\right)e^{-\theta^2 r^2} + 3\,\mathrm{erfc}(\theta r)\right)\right.$$
$$\left. - \left(\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\theta^3 r^3 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\theta r\right)e^{-\theta^2 r^2} + \mathrm{erfc}(\theta r)\right)\hat{z}\right]. \tag{87}$$

En la Figura 22 se muestra la solución analítica del campo eléctrico E_z producida por un dipolo eléctrico vertical, en un medio de conductividad $\sigma = 0.01$ S/m, el tiempo de encendido y apagado es a los 0.002 s y 0.006 s respectivamente.

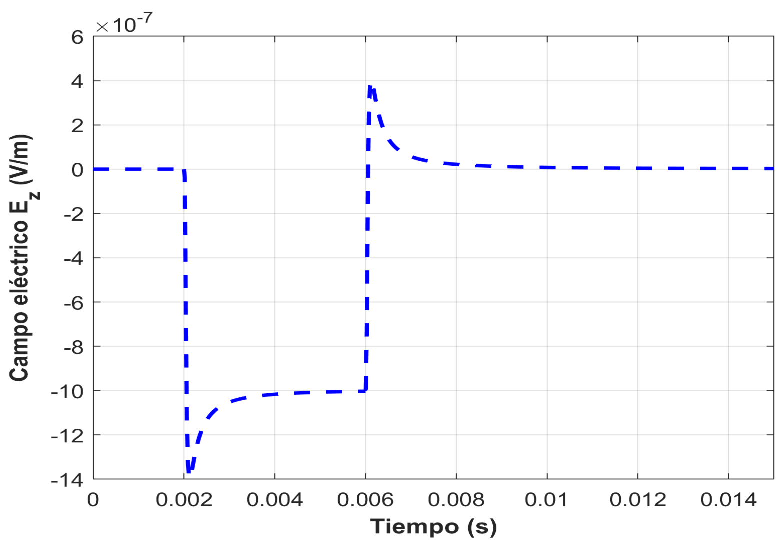


Figura 22. Solución analítica del campo eléctrico E_z producido por una fuente puntual orientado en la dirección z. El receptor esta ubicado a 200 m de distancia en la dirección x.

3.5.1.2. Semi-espacio homogéneo e isótropo

La solución analítica del campo eléctrico E_x producido por un dipolo eléctrico orientado en la dirección x, dentro de un semi-espacio homogéneo e isótropo, en la etapa de apagado, está dado por (Spies & Frischknecht, 1991)

$$E_x = \frac{Ids}{2\pi\sigma r^3}\left[\mathrm{erf}(\theta r) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\theta r e^{-\theta^2 r^2}\right]. \tag{88}$$

En la Figura 23 se muestra el comportamiento del campo eléctrico en función del tiempo, durante la etapa de apagado (después de 0.006 s); la conductividad del semi-espacio es $\sigma = 0.01$ S/m y el punto receptor se encuentra a 200 m de distancia de la fuente sobre el eje x

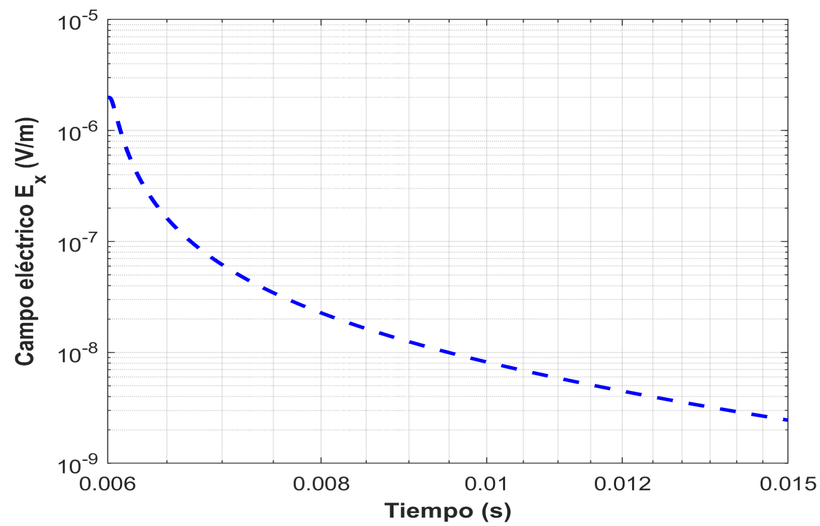


Figura 23. Solución analítica del campo eléctrico E_x en un semi-espacio homogéneo, producido por una fuente puntual orientada en la dirección x registrado por un receptor ubicado a 200 m sobre el mismo eje. Se presenta una escala logarítmica en ambos ejes para ilustrar la variación del campo en un amplio rango de valores.

3.5.2. Soluciones numéricas

En esta sección se analizan las soluciones obtenidas con el método de elementos espectrales y las soluciones analíticas. Se diseñaron una serie de experimentos empleando polinomios de diferentes órdenes y mallas regulares. El dominio en todos los experimentos está compuesto por un espacio completo o semi-espacio homogéneos de resistividad isótropa $\rho = 100$ Ωm y tiene dimensiones de $2000 \times 2000 \times 2000$ m en las direcciones x, y y z, siendo z positivo hacia abajo.

Para cuantificar la precisión del esquema numérico se utilizó como medida el error cuadrático medio normalizado (conocido como *NRMSE* por sus siglas en inglés) definido como

$$\text{NRMSE} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(E_a(i) - E_c(i)\right)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_a(i)^2}}, \tag{89}$$

donde E_a es una componente del campo eléctrico calculado analíticamente, E_c es la misma componente obtenida numéricamente y N es el número de muestras.

3.5.2.1. Comparación del espacio completo homogéneo e isótropo

En este experimento comparamos la solución analítica del espacio completo homogéneo e isótropo con la solución numérica utilizando cuatro polinomios de diferentes órdenes: 1^o, 2^o, 4^o y 8^o, con diferentes mallados, pero conservando el mismo número de incógnitas en todos los modelos. En la tabla 1 se encuentran los parámetros de los modelos que se utilizaron para verificar la solución numérica, podemos observar que al aumentar el orden del polinomio, también aumenta el número de nodos por elemento y al aumentar el tamaño del lado de cada elemento se necesitan menos elementos para discretizar el mismo dominio, pero conservando el número total de nodos en todos los modelos; con este diseño, podemos garantizar que no estamos dando ninguna ventaja a los polinomios de órdenes mayores, pues estamos asegurando la misma cantidad de incógnitas en todos los modelos.

Tabla 1. Configuración del mallado para los diferentes experimentos de un espacio completo, homogéneo e isótropo.

Orden polinomial	Número de elementos hexaedrales	Tamaño del lado del elemento (m)	Nodos por elemento	Número total de nodos
1	512000	25	8	531441
2	64000	50	27	531441
4	8000	100	125	531441
8	1000	200	729	531441

Para visualizar mejor el diseño del experimento, en la Figura 24 se muestran diferentes dominios discretizados tomando en cuenta el orden polinomial de las funciones base. Todos los dominios de la Figura 24 tienen 81 nodos, pero están distribuidos de manera diferente dependiendo el orden del polinomio interpolador. El número de nodos por elemento n_e está en función del orden del polinomio interpolador y está dado por $n_e = (N_f + 1)^2$ para un modelo de dos dimensiones (2D) y en en tres dimensiones (3D) por $n_e = (N_f + 1)^3$.

En la Figura 24 se muestra que en a) el dominio tiene 64 elementos, cada elemento esta formado por 4 nodos y este corresponde a un polinomio de primer orden; en b) el dominio tiene 16 elementos, donde cada elemento esta formado por 9 nodos el cual corresponde a un polinomio de segundo orden; en c) tenemos 4 elementos, con 25 nodos cada uno y una función base de cuarto orden y finalmente el dominio en d) cuenta con un solo elemento con 81 nodos y un polinomio de octavo orden. Es importante notar que aunque en el diagrama los nodos se encuentran equiespaciados, en la soluciones numéricas los nodos están espaciados de acuerdo a los puntos de referencia de Gauss-Lobatto-Legendre y del orden del polinomio.

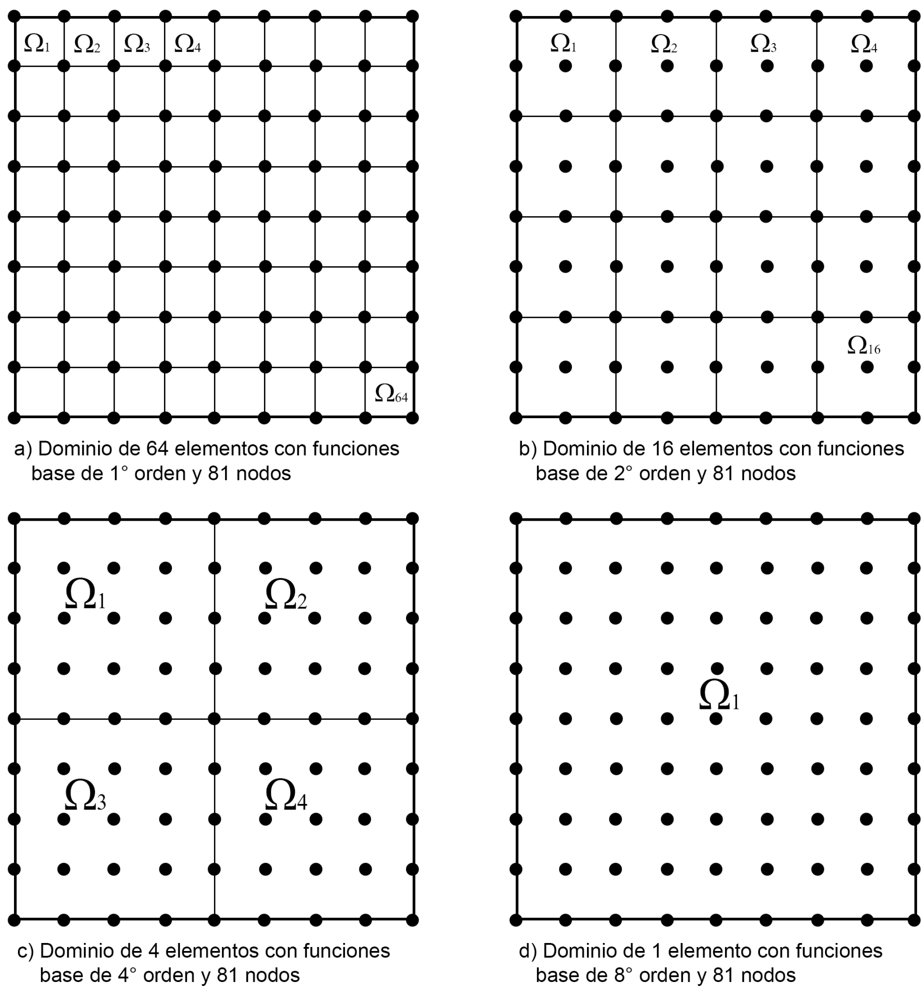


Figura 24. Dominios discretizados en función del orden polinomial.

• Dipolo eléctrico horizontal

El primer modelo fue obtenido utilizando como fuente un dipolo eléctrico horizontal orientado en x, el cual esta ubicado en el centro del dominio en (0, 0, 0) m. La fuente fue encendida en el tiempo $t = 0.002$ s y apagada en $t = 0.006$ s, como se muestra en la Figura 16, y el paso en tiempo es $\Delta t = 1 \times 10^{-7}$ s. Además el punto receptor fue ubicado a 200 m en la dirección x, es decir en el punto (200, 0, 0) m. En la Figura 25, se muestra el modelo de conductividad y el campo eléctrico E_x, obtenido de la simulación numérica utilizando un polinomio de segundo grado.

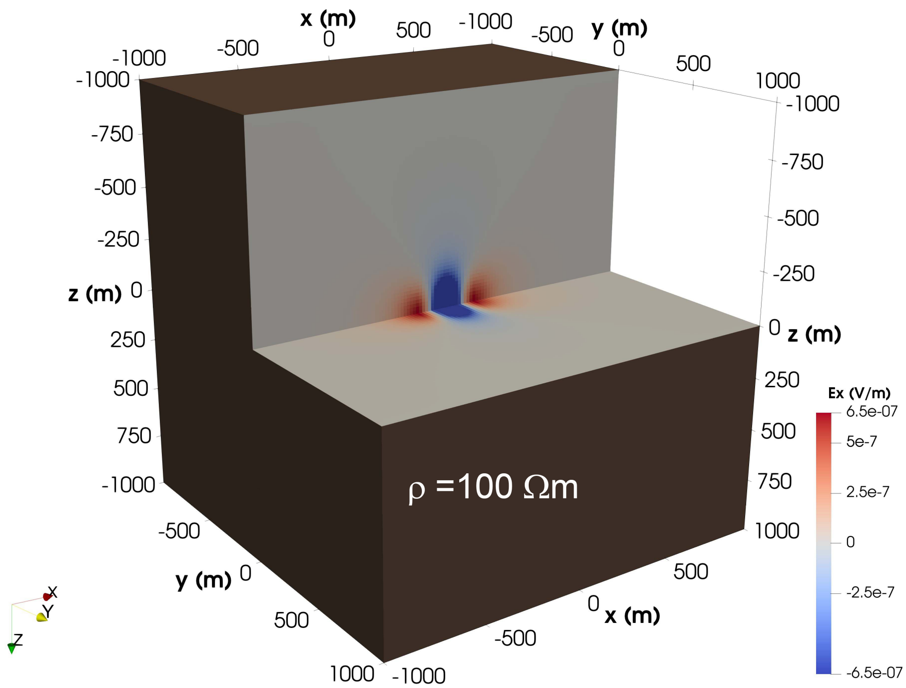
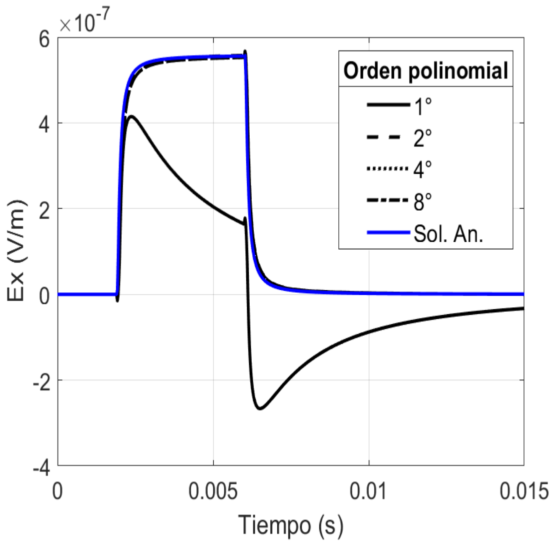
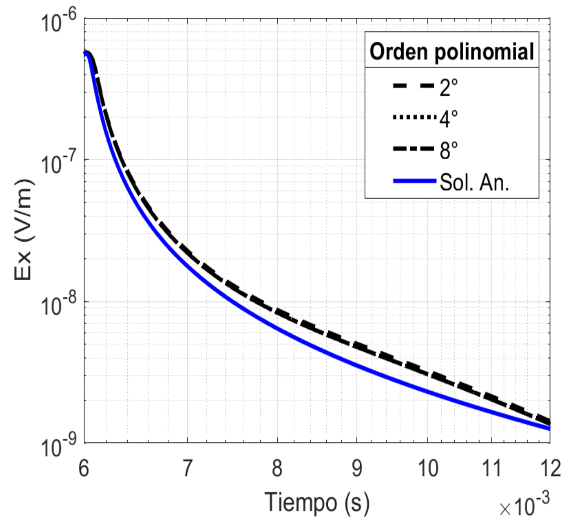


Figura 25. Modelo 3D de un espacio completo, homogéneo e isótropo de resistividad $\rho = 100\ \Omega$m y el campo eléctrico E_x, producido por un DEH en el tiempo $t = 0.0055$ s, utilizando un polinomio de segundo orden.

La Figura 26 muestra la comparación entre las soluciones obtenidas numéricamente y la solución analítica (ecuaciones 83 y 85). En (a) podemos observar que la solución numérica obtenida con el polinomio de primer orden se aleja considerablemente de la solución analítica, incluso cambia de signo. Sin embargo, al aumentar en un solo grado el orden del polinomio obtenemos resultados con mejores aproximaciones. En la tabla 2 se muestran los errores calculados de cada polinomio utilizado, podemos observar que a partir del polinomio de segundo orden, los errores ya no disminuyen de forma significativa, lo cual nos indica que para tener una buena aproximación no es necesario utilizar polinomios de órdenes muy grandes.



(a)



(b)

Figura 26. Comparación del campo eléctrico E_x producido por un dipolo eléctrico horizontal como fuente; en (a) Muestra la serie de tiempo completa de la comparación de las soluciones analítica (línea azul) y numéricas utilizando polinomios de diferentes órdenes y en (b) Se muestra un acercamiento a la curva de decaimiento (después de los 0.006 s) de las diferentes soluciones. En esta gráfica se omitió el resultado obtenido con el polinomio de primer orden.

Tabla 2. Comparación de los errores obtenidos utilizando los polinomios de 1^o, 2^o, 4^o y 8^o usando un DEH como fuente.

Orden polinomial	NRMSE
1^o	0.6430
2^o	0.0687
4^o	0.0665
8^o	0.0667

• Dipolo eléctrico vertical

En el segundo modelo se utilizó un dipolo eléctrico vertical, localizado en el centro del dominio (0, 0, 0) m. La fuente tiene los mismos parámetros utilizados con el dipolo eléctrico horizontal y el paso en tiempo está definido como $\Delta t = 1 \times 10^{-7}$ s. Un receptor es colocado a 200 m de distancia de la fuente, en el punto (200, 0, 0) m. La Figura 27 muestra el modelo de conductividad del espacio completo y el campo eléctrico E_z calculado utilizando un polinomio de segundo grado.

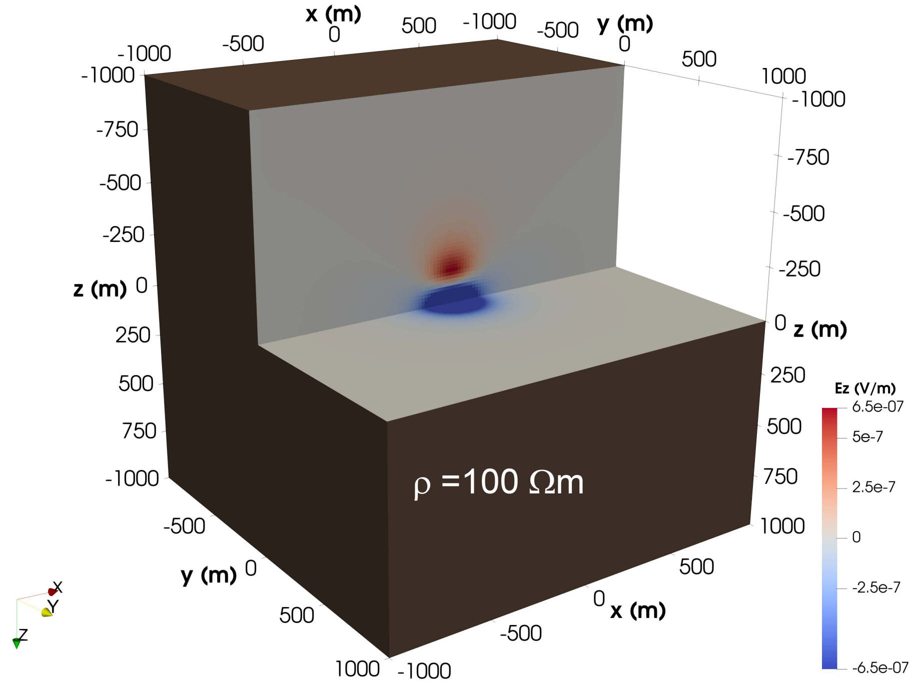


Figura 27. Modelo 3D de un espacio completo, homogéneo e isótropo de $\rho = 100\ \Omega$m y el campo eléctrico E_z, producido por un DEV en el tiempo $t = 0.0055$ s.

En la Figura 28 se muestra la comparación de la soluciones numéricas y la solución analítica (ecuaciones 86 y 87). En (a) observamos que la solución numérica utilizando el polinomio de primer orden tiene el peor ajuste, pero al aumentar en un grado el polinomio se mejora la precisión de los resultados. En la tabla 3 se muestran los errores obtenidos con cada polinomio, cuando usamos un polinomio de cuarto grado obtenemos la mejor aproximación y al incrementar el orden polinomial el error se mantiene.

Tabla 3. Comparación de los errores obtenidos utilizando los polinomios de 1^o, 2^o, 4^o y 8^o usando un DEV como fuente.

Orden polinomial	NRMSE
1^o	0.3080
2^o	0.0771
4^o	0.0678
8^o	0.0678

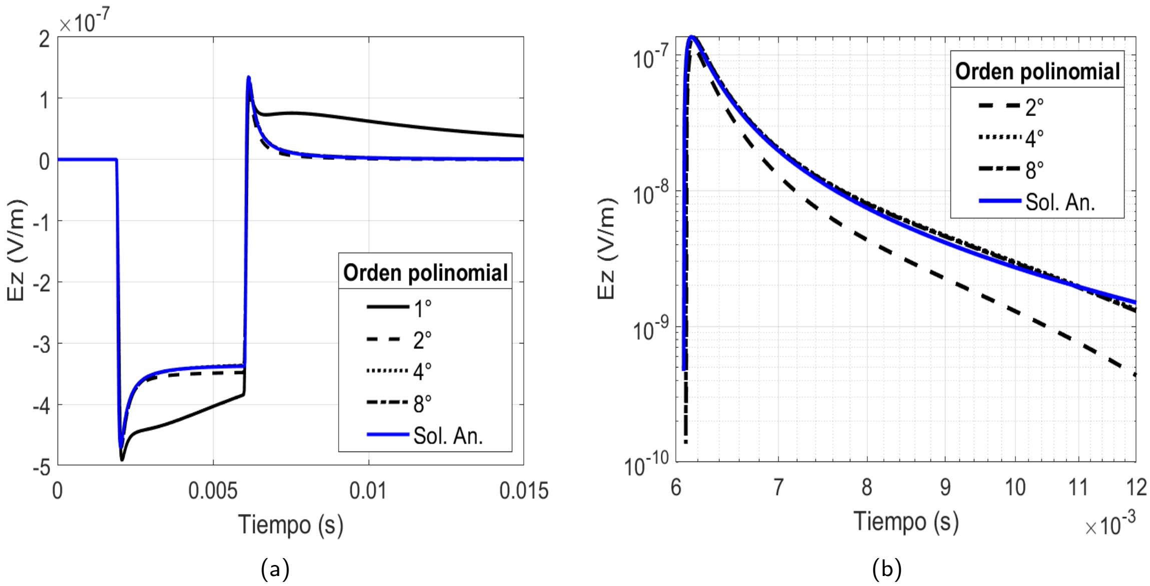


Figura 28. Comparación del campo eléctrico E_z producido por un dipolo eléctrico vertical como fuente; en (a) Muestra la serie de tiempo completa de la comparación de las soluciones analítica (línea azul) y numéricas utilizando polinomios de diferentes órdenes y en (b) Se muestra un acercamiento a la curva de decaimiento (después de los 0.006 s) de las diferentes soluciones. En esta gráfica se omitió el resultado obtenido con el polinomio de primer orden.

Por otro lado, el costo computacional en términos de memoria *RAM* utilizada fue el siguiente: 2.37 GB (primer orden), 5.25 GB (segundo orden), 7.11 GB (cuarto orden), y 14.9 GB (octavo orden). Esta memoria se utiliza principalmente para almacenar las matrices de rigidez.

Al mantener el mismo paso en el tiempo para todos los modelos, observamos que el polinomio de segundo orden produjo los mejores resultados en términos de tiempo de cómputo. Por lo tanto, normalizamos los tiempos en relación con el modelo más rápido (polinomio de segundo orden). Los tiempos de cómputo relativos fueron los siguientes: el uso del polinomio de cuarto orden requirió un 12.27 % más de tiempo que el uso del polinomio de segundo orden. El polinomio de octavo orden tomó un 126.13 % más de tiempo que el polinomio de segundo orden, mientras que el polinomio de primer orden necesitó un 141.81 % más de tiempo que el modelo más rápido; por lo tanto, fue el más lento.

En ambos experimentos, observamos que utilizando un polinomio de primer orden como función base, nos lleva a tener resultados erróneos, pero al incrementar el orden polinomial en un grado, el error se reduce significativamente. Además los polinomios de segundo y cuarto orden proporcionan los mejores resultados sin incrementar de manera significativa el costo computacional.

3.5.2.2. Comparación del semi-espacio homogéneo e isótropo

En este experimento se utilizó la solución analítica de un semi-espacio homogéneo e isótropo (ecuación 88) la cual fue comparada con las soluciones numéricas utilizando tres polinomios diferentes (1^o, 2^o y 4^o orden). El dominio fue discretizado con diferentes mallas, conservando el mismo número de incógnitas en todos los modelos, en la tabla 4 se muestran los parámetros de cada modelo, podemos observar que, al aumentar el orden del polinomio, también aumenta el número de nodos por elemento, pero se reduce el número de elementos en cada dominio y conservamos el número total de nodos.

Tabla 4. Configuración del mallado para los diferentes experimentos de un semi-espacio, homogéneo e isótropo.

Orden polinomial	Número de elementos hexaedrales	Tamaño del lado del elemento (m)	Nodos por elemento	Número total de nodos
1	64000	50	8	68921
2	8000	100	27	68921
4	1000	200	125	68921

El semi-espacio homogéneo e isótropo consiste en un dominio de $2000 \times 2000 \times 2000$ m, la resistividad del aire y del semi-espacio son $\rho_{aire} = 1 \times 10^5$ y $\rho = 100$ Ωm respectivamente (ver Fig. 29). La fuente es un dipolo eléctrico horizontal orientado en x y está localizada en el centro del dominio, en el punto (0, 0, 0) m. El tiempo de encendido es $t = 0.001$ s y el apagado en $t = 0.005$ s; el paso en tiempo es $\Delta t = 1 \times 10^{-9}$ s, Además el punto receptor esta localizado a 400 m de la fuente en la dirección x.

La Figura 30 muestra la comparación entre las soluciones númericas, utilizando polinomios de 1^o, 2^o y 4^o orden, y la solución analítica (ecuación 88). Observamos que las soluciones numéricas con los polinomios de 2^o y 4^o orden ofrecen las mejores aproximaciones a la solución analítica, sin embargo el polinomio de primer orden muestra el peor ajuste. En la tabla 5 se muestran los errores calculados de cada polinomio, en este modelo el mejor ajuste fue obtenido usando el polinomio de segundo grado.

El costo computacional para este experimento en términos de memoria *RAM*, fue el siguiente: 8.45 GB (primer orden), 8.23 GB (segundo orden) y 8.34 (cuarto orden). Además, los tiempos de cómputo también se normalizaron con el caso más rápido, que fue el de primer orden. Resultó que el uso del polinomio de segundo orden tomó un 6.71 % más de tiempo que el de primer grado, y el polinomio de cuarto orden tomó un 58.52 % más.

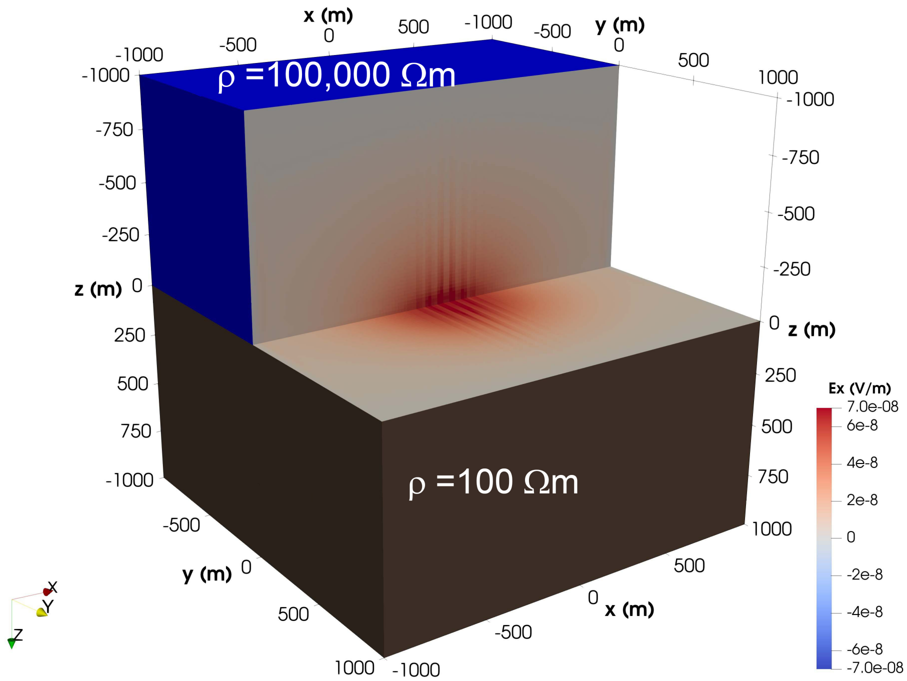


Figura 29. Modelo de conductividad de un semi-espacio homogéneo e isótropo y el campo eléctrico E_x producido por un DEH en el tiempo $t = 0.0055$ s, después de apagar la fuente.

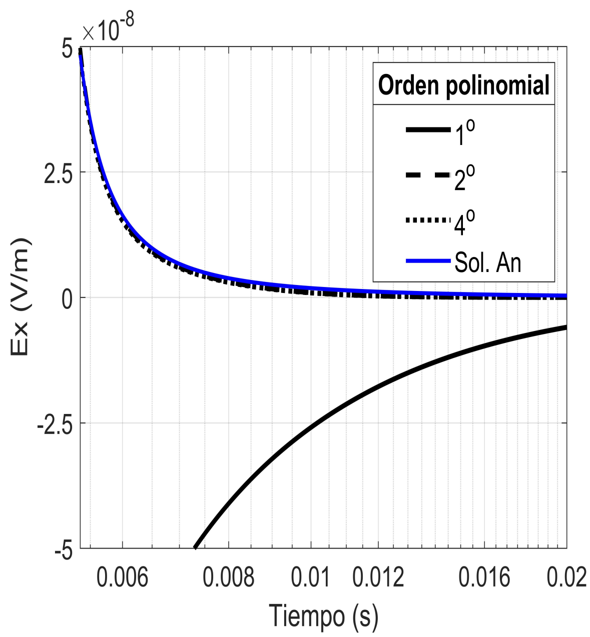


Figura 30. Comparación numérica y analítica del campo eléctrico E_x producido por un DEH orientado en la dirección x después de la etapa de apagado. Para mejorar la visualización se definieron los límites del eje vertical.

Tabla 5. Comparación de los errores en un semi-espacio homogéneo utilizando los polinomios de 1^o, 2^o, 4^o y 8^o usando un DEH como fuente.

Orden polinomial	RMSE
1^o	4.5977
2^o	0.0827
4^o	0.0936

De manera similar al caso del espacio homogéneo e isótropo, cuando se utilizaron polinomios de segundo orden o superiores, obtenemos mejores resultados sin aumentar el costo computacional. Por otro lado, el polinomio de primer orden produjo resultados incorrectos.

En este capítulo se ha detallado la implementación computacional paso a paso, desde la formulación variacional de la ecuación de difusión para el campo eléctrico hasta la validación de resultados. Después de confirmar que las soluciones numéricas con polinomios de segundo orden o superiores son precisas, llevamos a cabo diversos experimentos.

Capítulo 4. Experimentos numéricos

En esta sección se describen diversos experimentos que permiten analizar los campos eléctricos y magnéticos en distintos medios y configuraciones de resistividad. Para cada uno de los modelos propuestos, se detalla la discretización, la configuración de la fuente y el posicionamiento de los receptores, así como el comportamiento observado en las curvas de decaimiento de los campos.

4.1. Medio completo homogéneo y anisótropo

El primer modelo consiste en un espacio completo homogéneo y anisótropo, cuyas dimensiones son $2000 \times 2000 \times 2000\,\mathrm{m}$ en las direcciones x, y y z. Dicho dominio se discretizó en 8000 elementos hexaédricos regulares (Figura 31). Se evaluaron dos tensores de resistividad distintos: 1)ρ_1, con resistividad vertical ρ_{zz} tres veces menor que la resistividad horizontal; y 2)ρ_2, con resistividad horizontal tres veces menor que la vertical. Los valores específicos se muestran en la Tabla 6.

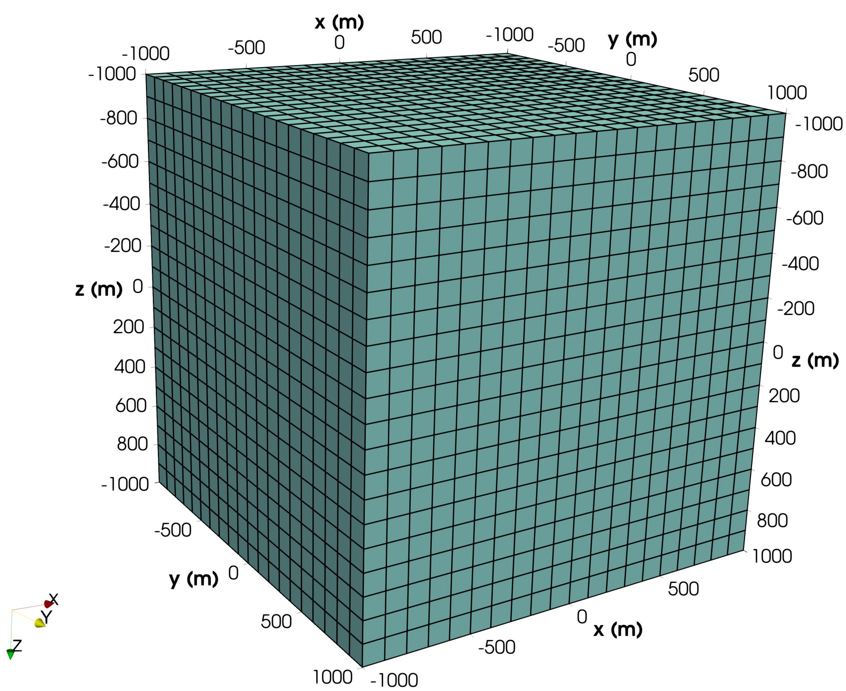


Figura 31. Malla del espacio completo homogéneo y anisótropo, discretizado en elementos hexaédricos regulares.

Tabla 6. Resistividad ($\Omega\,\mathrm{m}$) de los modelos anisótropos.

Modelo 1	**Modelo 2**
$\rho_1 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 33.3 \end{pmatrix}$	$\rho_2 = \begin{pmatrix} 33.3 & 0 & 0 \\ 0 & 33.3 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$

Siguiendo los resultados previos obtenidos en casos isótropos, aquí se presenta únicamente la respuesta usando un polinomio de cuarto orden como función base. Esto permite comparar cada modelo anisótropo con el caso isótropo de resistividad $\rho = 100\,\Omega\,\mathrm{m}$. Se utilizaron dos tipos de fuente: un dipolo eléctrico horizontal (DEH) orientado en x y un dipolo eléctrico vertical (DEV), ambos ubicados en $(0, 0, 0)\,\mathrm{m}$. El receptor se colocó a 200 m de la fuente, también en la dirección x. La fuente se encendió en $t = 0.002\,\mathrm{s}$ y se apagó en $t = 0.006\,\mathrm{s}$, con un paso de tiempo $\Delta t = 1 \times 10^{-7}\,\mathrm{s}$ y un tiempo total de simulación de $0.015\,\mathrm{s}$.

4.1.1. Dipolo eléctrico horizontal (DEH)

En la Figura 32 se muestran las curvas de decaimiento del campo eléctrico E_x para diferentes modelos de resistividad anisótropa e isótropa. Se observa que, con un DEH, no hay diferencias significativas en las curvas de decaimiento de E_x para ninguno de los casos estudiados.

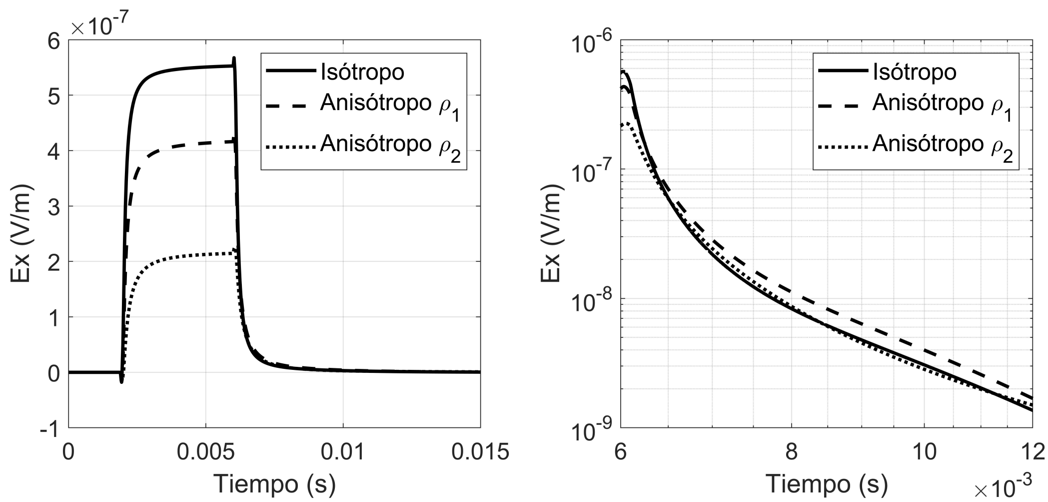


Figura 32. Comparación del campo eléctrico E_x calculado con polinomios de cuarto orden y un DEH como fuente. (Izquierda) Serie temporal completa. (Derecha) Acercamiento a la curva de decaimiento tras la etapa de apagado.

En la Figura 33 se muestra la evolución temporal de la tasa de cambio del campo magnético vertical dBz/dt para los distintos modelos. Tanto el modelo isótropo como el anisótropo ρ_1 (resistividad horizontal mayor que la vertical) presentan respuestas prácticamente idénticas. En cambio, el modelo ρ_2 (resistividad horizontal menor) exhibe un decaimiento más lento, lo que se traduce en una mayor persistencia del campo inducido.

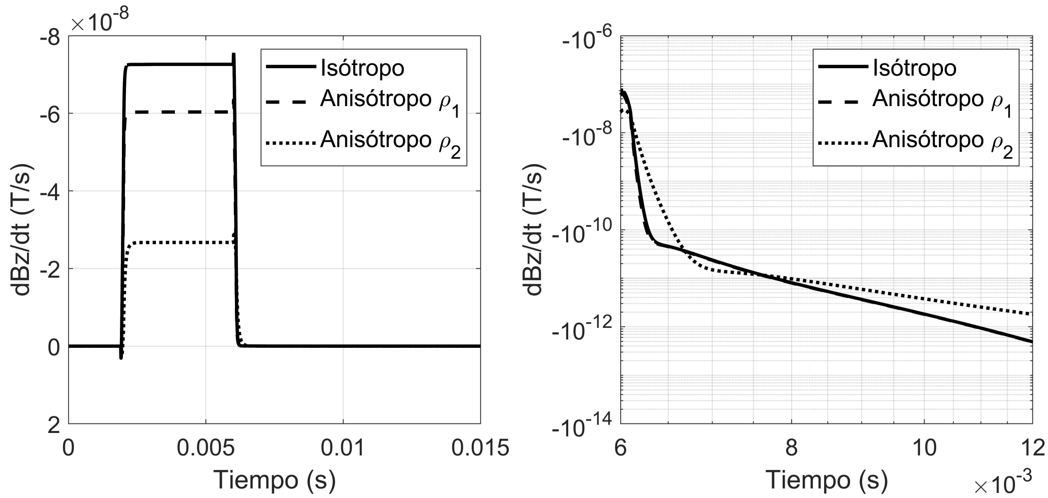


Figura 33. Comparación de dB_z/dt usando un DEH. (Izquierda) Serie temporal completa. (Derecha) Acercamiento a la curva de decaimiento tras el apagado.

En presencia de un dipolo eléctrico horizontal, los modelos anisótropos solo muestran diferencias relevantes en dBz/dt, particularmente cuando la resistividad horizontal es significativamente menor que la vertical. Esto indica que la anisotropía puede prolongar la duración del campo en ciertos ejes, aunque en términos generales la respuesta eléctrica E_x no evidencia grandes contrastes.

4.1.2. Dipolo eléctrico vertical (DEV)

En la Figura 34 se muestran las curvas de decaimiento del campo eléctrico E_z para un DEV. Cuando la resistividad vertical es menor que la horizontal (ρ_1), la respuesta de E_z es ligeramente menor que en el caso isótropo. Por el contrario, cuando la resistividad horizontal es menor (ρ_2), se observa una amplitud mayor del campo eléctrico.

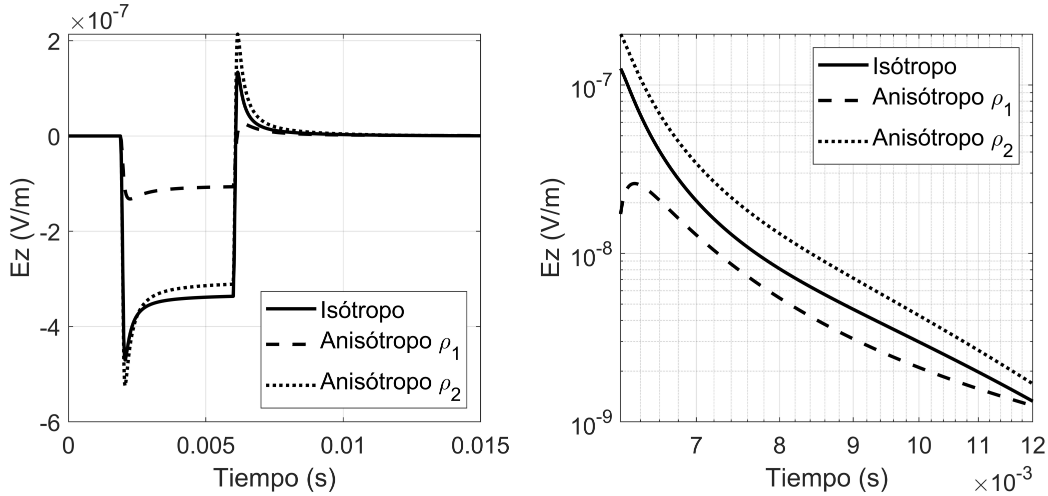


Figura 34. Comparación del campo eléctrico E_z con un DEV como fuente y polinomios de cuarto orden. (Izquierda) Serie temporal completa. (Derecha) Acercamiento del decaimiento tras el apagado.

En la Figura 35 se muestra la tasa de cambio del campo magnético horizontal dBx/dt. El modelo isótropo y el anisótropo ρ_1 convergen a lo largo del tiempo, mientras que ρ_2 muestra un decaimiento más lento tras el apagado de la fuente, lo que sugiere una mayor persistencia de las corrientes inducidas.

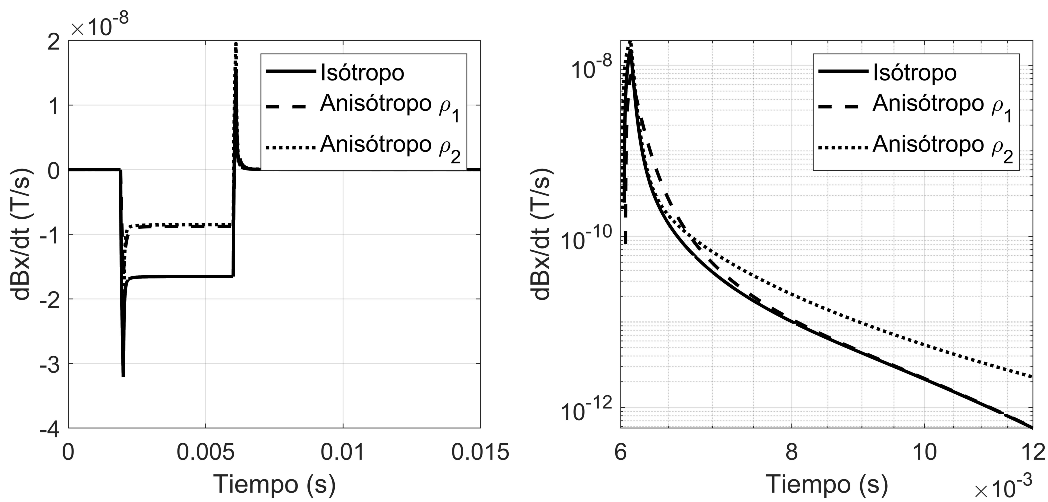


Figura 35. Comparación de dBx/dt para un DEV. (Izquierda) Serie temporal completa. (Derecha) Ampliación de la curva de decaimiento.

Con un DEV, la presencia de anisotropía es más notable en el campo eléctrico E_z y en el campo magnético dBx/dt. Los resultados sugieren que, en escenarios donde la resistividad vertical difiere significativamente de la horizontal, pueden observarse variaciones en la amplitud del campo eléctrico y en la tasa de decaimiento del campo magnético. Esto pone de manifiesto la sensibilidad de ciertas componentes de campo a la relación entre resistividades horizontal y vertical.

4.2. Modelos estratificados anisótropos

Para el siguiente conjunto de experimentos, se emplearon modelos marinos estratificados con dimensiones de $2800 \times 2800 \times 2800\,\mathrm{m}$, los cuales fueron discretizados en 2744 elementos hexaédricos regulares. Cada modelo incluye una capa de aire, una capa de agua de mar y un semi-espacio, al cual se le incorpora una capa adicional, ya sea resistiva o conductora. Las resistividades se definieron de manera que la anisotropía esté presente únicamente en la capa de interés, con el propósito de evaluar si esta puede distinguirse frente a un modelo isótropo. Se utilizó un dipolo eléctrico horizontal (DEH) orientado en x, situado en el fondo marino $(0, 0, -200)\,\mathrm{m}$. La fuente termino la etapa de encendido a $t = 0.001\,\mathrm{s}$ e inicio la etapa de apagado a $t = 0.005\,\mathrm{s}$, con $\Delta t = 2 \times 10^{-9}\,\mathrm{s}$ y un tiempo total de simulación de $0.02\,\mathrm{s}$. El receptor se ubicó a $200\,\mathrm{m}$ en la dirección x, en $(200, 0, -200)\,\mathrm{m}$.

4.2.1. Capa horizontal resistiva

En este experimento se consideraron tres configuraciones:

1. Modelo con capas horizontales isótropas.
2. Modelo con el semi-espacio anisótropo.
3. Modelo donde solo la capa resistiva presenta anisotropía.

En la Tabla 7 se detallan las resistividades de cada configuración y la Figura 36 presenta el modelo isótropo y su malla.

Tabla 7. Modelos de resistividad para el medio estratificado con capa resistiva.

Modelo	Isótropo	Semi-espacio anisótropo	Resistivo anisótropo
Aire (Ωm)	1×10^6	1×10^6	1×10^6
Agua de mar (Ωm)	0.3	0.3	0.3
Semi-espacio (Ωm)	10	$\rho_h = 10, \rho_v = 100$	10
Capa resistiva (Ωm)	1000	1000	$\rho_h = 1000, \rho_v = 10000$

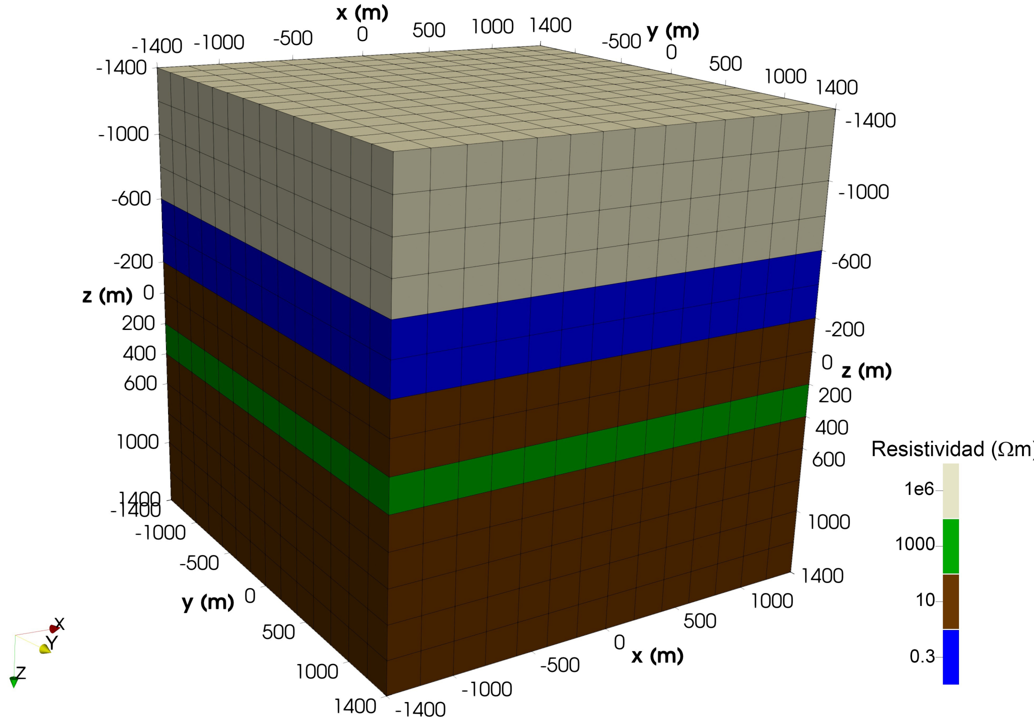


Figura 36. Modelo de resistividades isótropas en un medio marino estratificado, con capa de aire, capa de agua, semi-espacio y una capa resistiva.

En la Figura 37, se observa la evolución del campo eléctrico E_x para estos tres modelos. La línea roja continua representa el caso isótropo, la línea azul punteada el semi-espacio anisótropo y la línea negra punteada la capa resistiva anisótropa. Los modelos isótropo y de capa resistiva anisótropa presentan comportamientos muy similares, mientras que el modelo de semi-espacio anisótropo decae más rápidamente. En este caso, la anisotropía de la capa resistiva no puede identificarse con claridad, posiblemente debido a que gran parte de la energía se disipa en el entorno marino y en el semi-espacio; Por otro lado, el semi-espacio anisótropo muestra una respuesta distinta, lo cual puede atribuirse a que la mayor parte de la contribución de la respuesta proviene del semi-espacio. Una posible solución para mejorar la detección de la capa resistiva sería inyectar una corriente de mayor intensidad en el dipolo eléctrico, de modo que la fuente logre una mayor penetración.

En la Figura 38 se muestra la tasa de decaimiento del campo magnético dBz/dt. Nuevamente, los modelos isótropo y de capa resistiva anisótropa son prácticamente indistinguibles, y el semi-espacio anisótropo exhibe ligeras diferencias en la fase inicial, para luego converger en el tiempo.

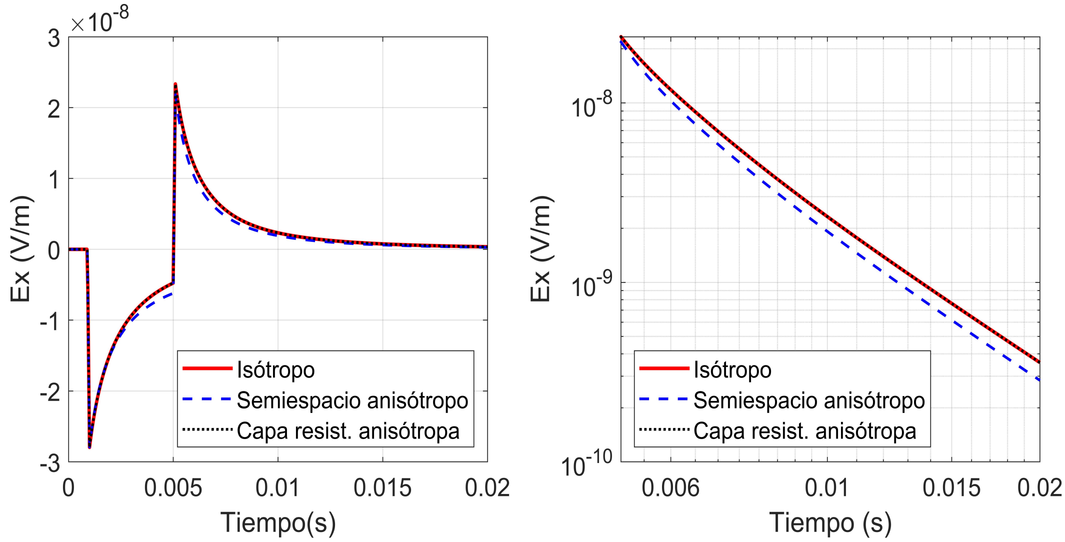


Figura 37. Comparación de E_x usando polinomios de segundo orden para los tres modelos. (Derecha) Serie completa; (Izquierda) acercamiento al decaimiento tras el apagado.

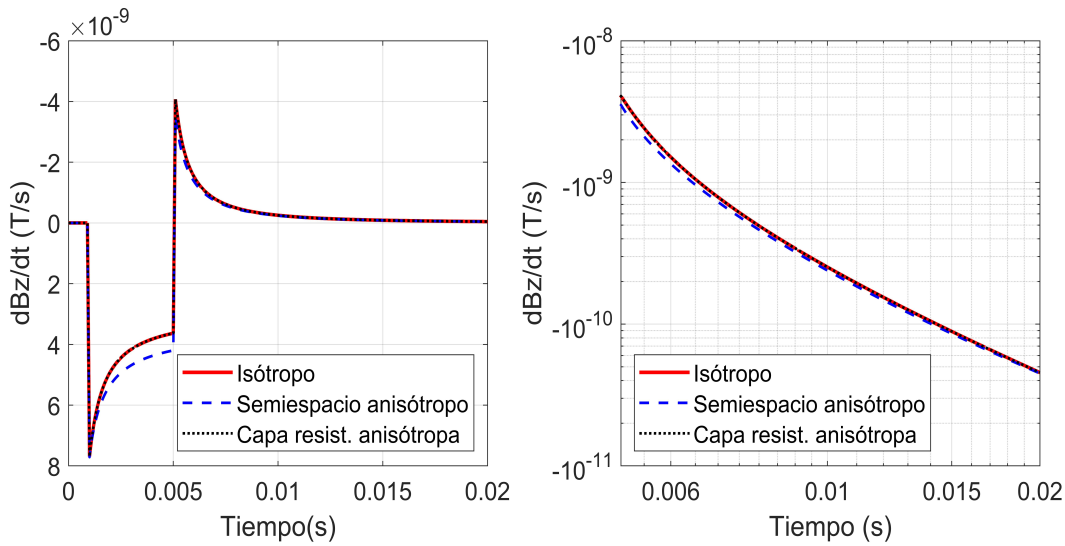


Figura 38. Tasa de cambio del campo magnético dB_z/dt para los tres modelos. (Izquierda) Serie temporal completa. (Derecha) Detalle tras la desconexión de la fuente.

La presencia de anisotropía en el semi-espacio tiene un efecto más notorio que la anisotropía localizada solo en la capa resistiva, especialmente en la fase inicial del decaimiento. A pesar de ello, a tiempos más avanzados, las curvas tienden a converger, por lo que la distinción entre los modelos depende mayormente de mediciones en tiempos tempranos.

4.2.2. Capa horizontal conductora

En el siguiente experimento se definieron tres escenarios análogos a la sección anterior:

1. Capas horizontales isótropas.

2. Semi-espacio anisótropo.

3. Capa conductora anisótropa.

En la Tabla 8 se detallan los valores de resistividad del modelo y la Figura 39 muestra la malla y el modelo isótropo.

Tabla 8. Modelos de resistividad para el medio estratificado con una capa conductora.

Modelo	**Isótropo**	**Semi-espacio anisótropo**	**Conductor anisótropo**
Aire (Ωm)	1×10^6	1×10^6	1×10^6
Agua de mar (Ωm)	0.3	0.3	0.3
Semi-espacio (Ωm)	10	$\rho_h = 10, \rho_v = 100$	10
Capa conductora (Ωm)	1.0	1.0	$\rho_h = 1.0, \rho_v = 0.33$

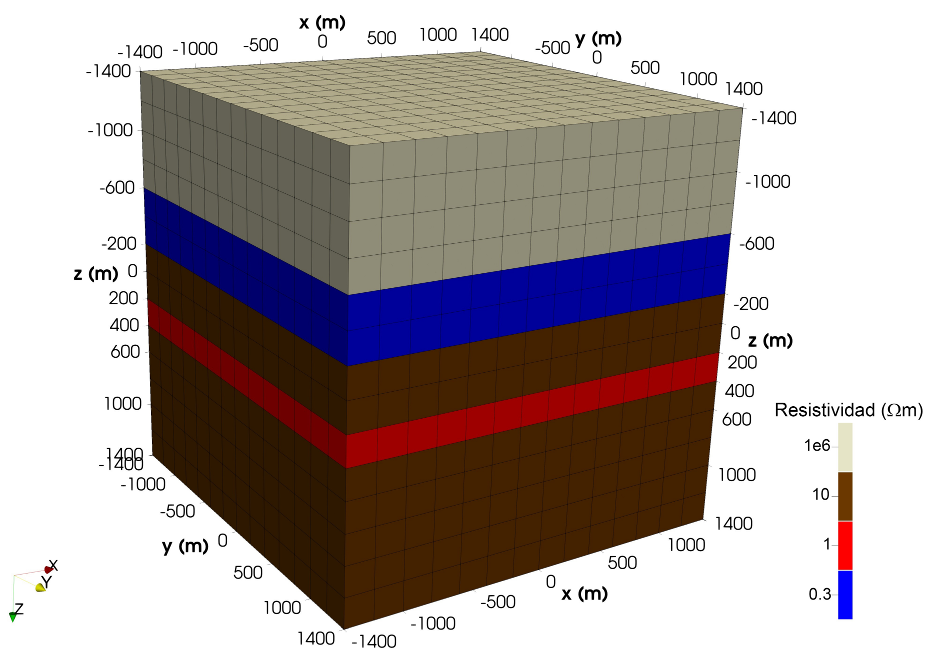


Figura 39. Modelo de resistividades isótropas para un medio estratificado marino con capa conductora.

La Figura 40 muestra la respuesta del campo eléctrico E_z. Los modelos isótropo y de capa conductora anisótropa exhiben curvas prácticamente idénticas, mientras que el semi-espacio anisótropo presenta un decaimiento más acelerado. De manera similar a lo ocurrido con la capa resistiva, es probable que gran parte de la energía permanezca en el entorno marino, lo que dificulta la diferenciación entre el caso isótropo y la capa conductora anisótropa. En contraste, el semi-espacio anisótropo muestra una respuesta distinta, posiblemente debido a su mayor proximidad a la fuente. Para una mejor identificación de la capa conductora, se podría incrementar intensidad de la corriente inyectada en el dipolo eléctrico, de modo que la señal penetre más profundamente.

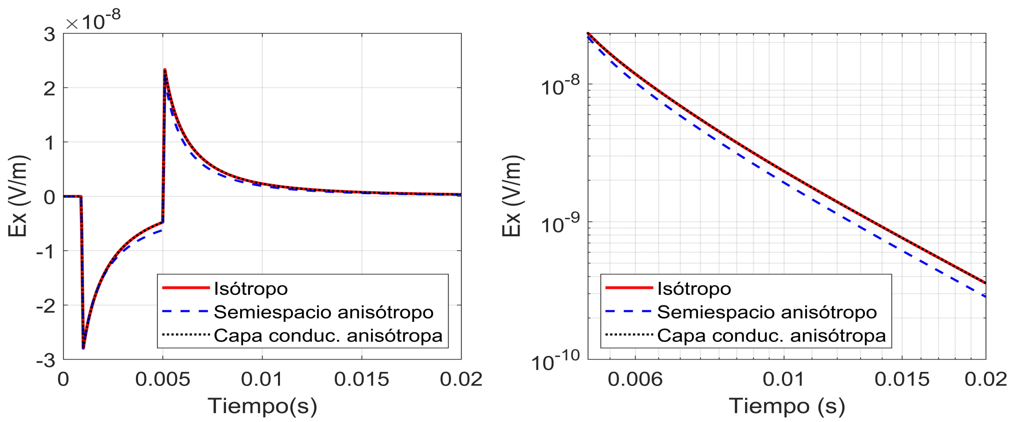


Figura 40. Campo eléctrico E_z utilizando polinomios de segundo orden para los tres modelos. (Derecha) Serie temporal completa; (Izquierda) acercamiento posterior al apagado.

En la Figura 41 se muestra la tasa de decaimiento del campo magnético dBz/dt. Al igual que en E_z, los modelos isótropo y de capa conductora anisótropa apenas muestran diferencias, mientras que el semi-espacio anisótropo resalta en la fase inicial, para después converger con las otras curvas.

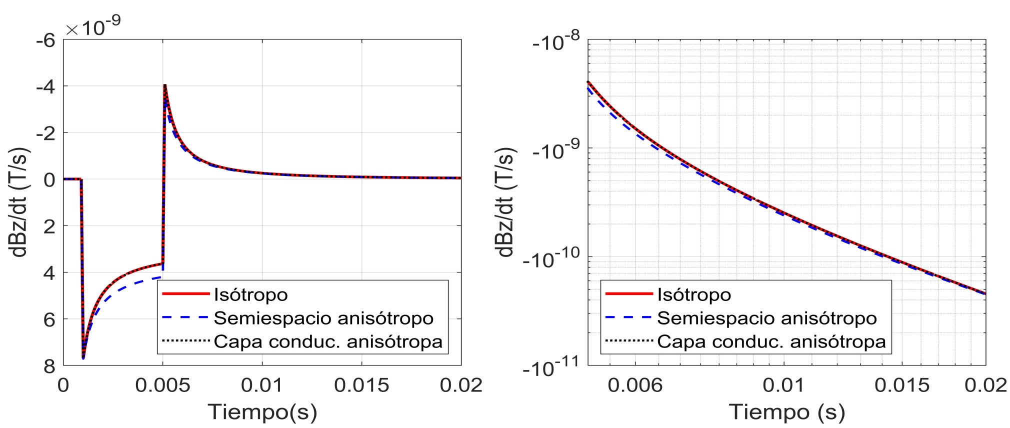


Figura 41. Comparación de dBz/dt en los tres modelos. (Derecha) Serie temporal completa; (Izquierda) acercamiento después de apagar la fuente.

En estos modelos estratificados con capa conductora, la anisotropía del semi-espacio es más influyente que la de la propia capa conductora. A pesar de que las diferencias se manifiestan sobre todo en los primeros instantes, la convergencia de las curvas en tiempos tardíos vuelve a poner de relieve la importancia de mediciones tempranas para discriminar anisotropías. Además observamos que al incluir la anisotropía en la conductividad eléctrica no siempre produce variaciones notables si la señal se atenúa fuertemente en capas someras. Por ello, a fin de resaltar la firma de la capa (sea resistiva o conductora), se podría incrementar la corriente de la fuente, prolongar el tiempo de registro o seleccionar configuraciones de fuente-receptor que aporten mayor sensibilidad a la zona de interés.

4.3. Modelo heterogéneo

Este modelo presenta un semi-espacio homogéneo en el que se han incrustado dos bloques (uno conductor y otro resistivo). El dominio mide $2000 \times 2000 \times 2000\,\mathrm{m}$. Cada bloque tiene dimensiones de $400 \times 1000 \times 500\,\mathrm{m}$ en x, y y z, respectivamente, y están enterrados a 100 m de profundidad desde la superficie. La malla resultante consta de 3042 elementos hexaédricos irregulares, generados con *Coreform-Cubit 2023.8*[1]. Se empleó un polinomio de segundo orden como función base.

Se consideraron cuatro escenarios de resistividad:

1. Modelo isótropo.
2. Semi-espacio anisótropo.
3. Bloque conductor anisótropo.
4. Bloque resistivo anisótropo.

La Figura 42 ilustra la malla y la distribución de resistividad para el caso isótropo, mientras que la Tabla 9 detalla los valores empleados.

[1] `https://coreform.com/`

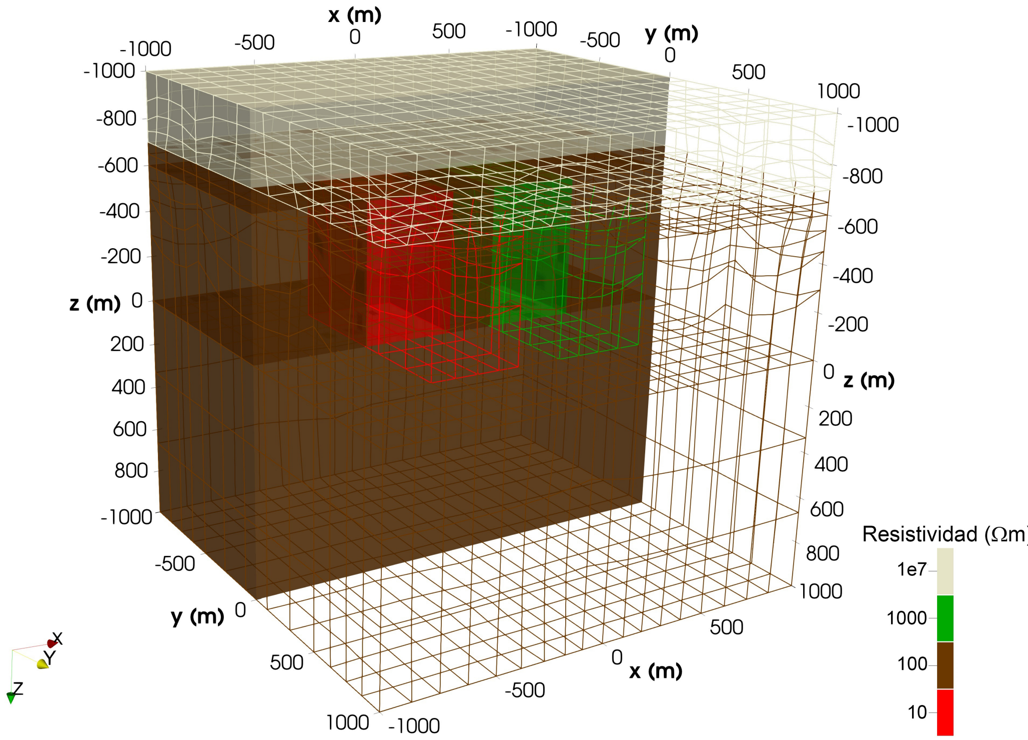


Figura 42. Modelo de dos bloques discretizado en elementos hexaédricos irregulares, mostrando las resistividades para el caso isótropo.

Tabla 9. Resitividades del los modelos anisótropos e isótropos.

Modelo	**Isótropo**	**Semi-espacio anisótropo**	**Conductor anisótropo**	**Resistivo anisótropo**
Aire (Ωm)	$1{\times}10^7$	$1{\times}10^7$	$1{\times}10^7$	$1{\times}10^7$
Semi-espacio (Ωm)	100	$\rho_h = 10$ y $\rho_v = 100$	100	100
Bloque conductor (Ωm)	10	10	$\rho_h = 10$ y $\rho_v = 1.0$	10
Bloque resistivo (Ωm)	1000	1000	1000	$\rho_h = 1000$ y $\rho_v = 10000$

La fuente utilizada fue un dipolo eléctrico orientado en la dirección x, el cual fue ubicado en la interfaz aire-tierra $(0, 100, -650)\,\mathrm{m}$. La etapa de encendido finalizo en $t = 0.001\,\mathrm{s}$ y la de apagado inició en $t = 0.005\,\mathrm{s}$, con $\Delta_t = 2 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}$. En este modelo se colocaron dos receptores: 1) R1 ubicado sobre el bloque conductor $(-320, 100, -650)\,\mathrm{m}$; y 2) R2 localizado sobre el bloque resistivo $(320, 100, -650)\,\mathrm{m}$.

En la Figura 43 se muestra una vista 2D del campo eléctrico E_x en el plano XY a $t = 0.005\,\mathrm{s}$ (inicio del apagado de la fuente).

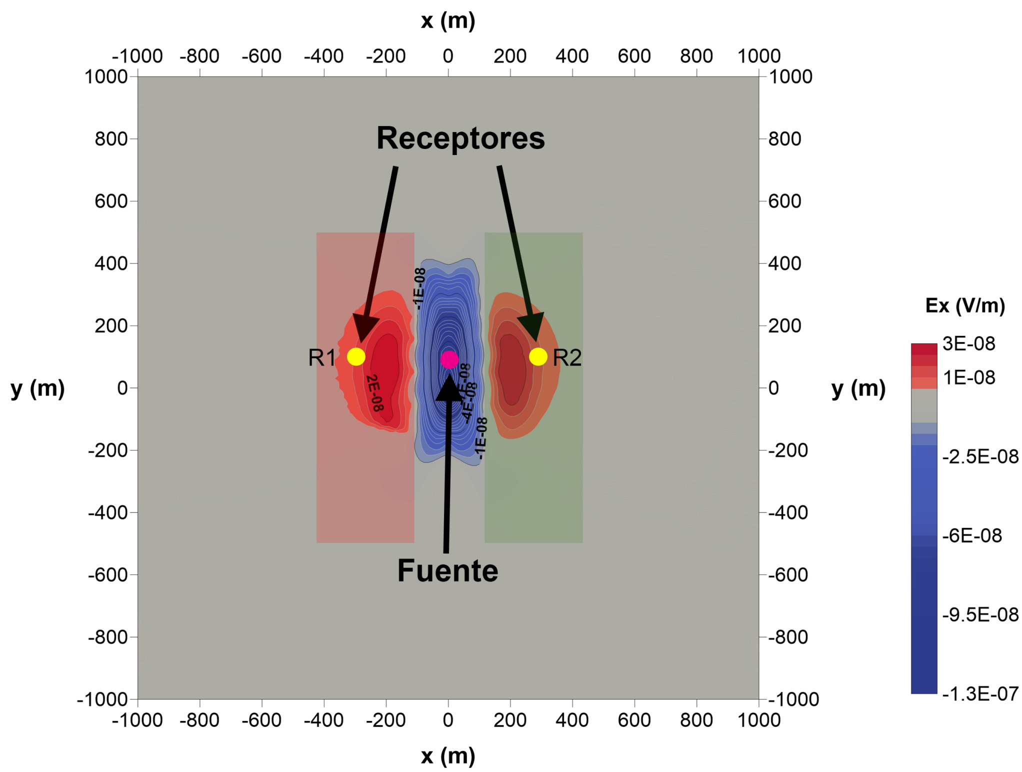


Figura 43. Vista en el plano XY del campo eléctrico E_x que coincide con la profundidad de la fuente. El rectángulo rojo y el verde muestran la posición de los bloques conductor y resistivo, respectivamente, el punto magenta muestra la posición de la fuente y los puntos amarillos indican la posición de los receptores R1 y R2 sobre los bloques.

En la Figura 44 se muestra la comparación de las curvas de decaimiento del campo eléctrico calculado, para los modelos isótropos y anisótropos en los dos puntos de medición. Sobre el receptor R1 se observa un contraste significativo en el modelo del conductor anisótropo (R1C), el cual muestra una respuesta de menor magnitud comparado con el modelo isótropo (R1A) y del semi-espacio anisótropo (R1B). Por otro lado, sobre el bloque resistivo (receptor R2), el caso isótropo y los anisótropos muestran una respuesta mayor, comparada con la del receptor R1 y tienen un comportamiento muy similar entre todos los modelos, esta respuesta sugiere que el campo eléctrico en estos modelos no es sensible a la anisotropía. En ambos receptores observamos que las respuestas convergen después de los 0.017 s y podemos diferenciar entre los bloques resistivos y conductores, pero solo la anisotropía en el cuerpo conductor puede tener una respuesta observable y la anisotropía del semi-espacio no influye en la respuesta de los modelos, cuando existe un cuerpo conductor.

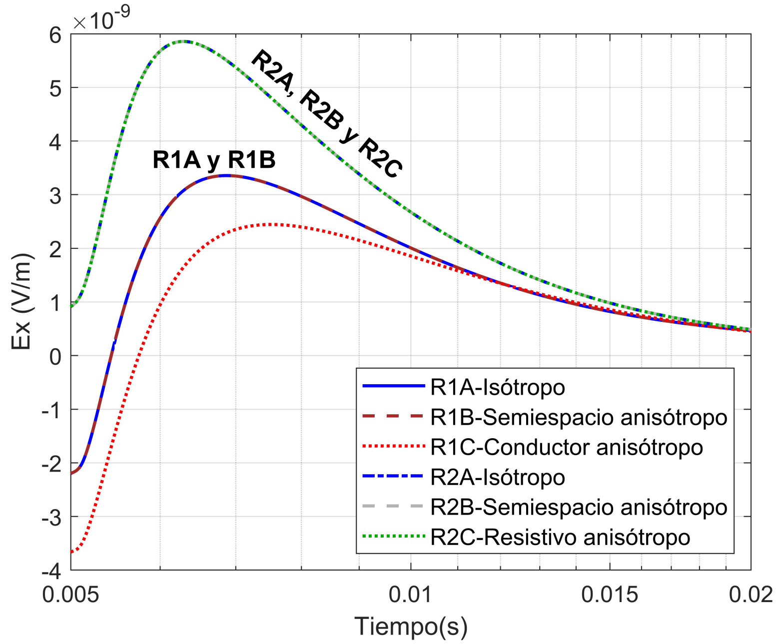


Figura 44. Comparación del campo eléctrico E_x entre distintos modelos de resistividad, después de la etapa de apagado de la fuente. R1 representa el receptor sobre el bloque conductor, mientras que R2 se sitúa sobre el bloque resistivo.

En la Figura 45 se presenta la curva de decaimiento de la tasa de cambio del campo magnético horizontal dBx/dt, para los distintos modelos de resistividad. De manera análoga a lo observado en el campo eléctrico, en el receptor R1 (situado sobre el bloque conductor) se observa un contraste marcado en el modelo del conductor anisótropo (R1C), mientras que los modelos isótropo (R1A) y de semi-espacio anisótropo (R1B) exhiben respuestas idénticas. En el receptor R2 (ubicado sobre el bloque resistivo), aunque todos los modelos muestran respuestas de mayor magnitud en comparación con R1, el comportamiento entre ellos es similar, lo que sugiere que la componente horizontal del campo magnético resulta poco sensible para detectar la anisotropía en la resistividad eléctrica.

En la Figura 46 se muestra la tasa de cambio de la componente vertical del campo magnético dBz/dt. En el receptor R1, la respuesta más intensa corresponde al modelo isótropo (R1A), pero se observa un marcado contraste entre el semi-espacio anisótropo (R1B) y el bloque conductor (R1C) anisótropo; este último muestra un decaimiento más rápido que el resto de los modelos, debido a que la resistividad vertical es mayor que la horizontal lo cual genera que la corriente fluya con mayor facilidad y acelera la atenuación del campo.

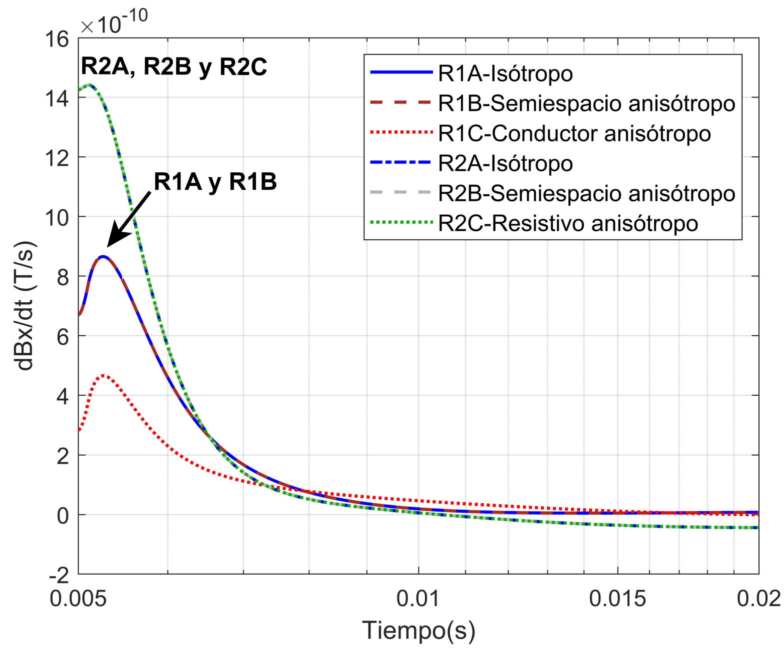


Figura 45. Comparación del campo magnético dBx/dt entre distintos modelos de resistividad, después de la etapa de apagado de la fuente. R1 representa el receptor sobre el bloque conductor, mientras que R2 se sitúa sobre el bloque resistivo.

En el receptor R2, tanto el modelo isótropo (R2A) como el bloque resistivo anisótropo (R2C) exhiben respuestas similares, a pesar de que en el bloque anisótropo la resistividad vertical también es mayor. Esta diferencia, sin embargo, no genera un contraste significativo en la respuesta. En cambio, el semi-espacio anisótropo (R2B) muestra un decaimiento más acelerado, atribuible a la mayor conductividad en la dirección horizontal impuesta por la anisotropía, lo cual permite que la corriente fluya fácilmente.

En este escenario heterogéneo, la anisotropía de un bloque conductor puede apreciarse claramente en el receptor correspondiente, mientras que la anisotropía del semi-espacio no produce cambios drásticos. En el bloque resistivo, la respuesta es mayor, pero con diferencias mínimas entre modelos. La anisotropía también se manifiesta en la etapa tardía del decaimiento, donde las curvas pueden mostrar ligeras divergencias, indicando que la corriente tiende a canalizarse en la dirección de mayor conductividad. En general, los resultados indican que la sensibilidad a la anisotropía depende del contraste de resistividad, siendo mayor cuando hay un incremento en la conductividad, así como de la componente del campo electromagnético analizada.

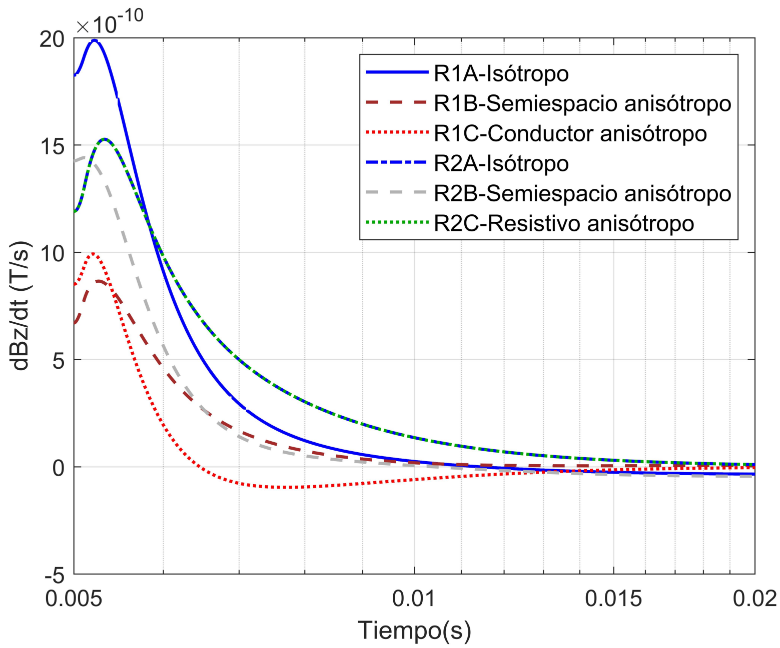


Figura 46. Comparación del campo magnético dBz/dt entre distintos modelos de resistividad, después de la etapa de apagado de la fuente. R1 representa el receptor sobre el bloque conductor, mientras que R2 se sitúa sobre el bloque resistivo.

4.4. Modelo con una espira como fuente

En este experimento se emplearon tres modelos de resistividades diferentes

1. Semi-espacio homogéneo (Figura 47).
2. Semi-espacio con bloque conductor (Figura 48).
3. Semi-espacio con bloque resistivo (Figura 49).

El dominio mide $2000 \times 2000 \times 2000\,\mathrm{m}$. El bloque se ubica a 200 m de profundidad y sus dimensiones son $400 \times 400 \times 200\,\mathrm{m}$. La resistividad del aire es $10^5\,\Omega\mathrm{m}$ y la del semi-espacio es $100\,\Omega\mathrm{m}$. La malla consta de 3072 elementos hexaédricos irregulares generados en *Coreform-Cubit 2023.8*[2], empleando polinomios de segundo orden como función base.

[2] `https://coreform.com/`

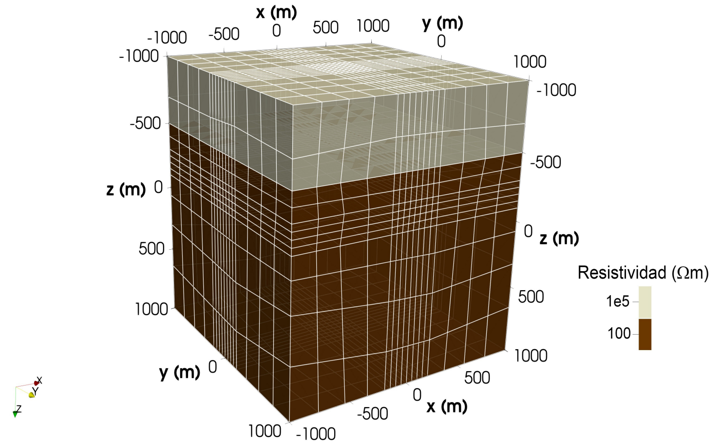


Figura 47. Semi-espacio homogéneo discretizado en elementos hexaédricos.

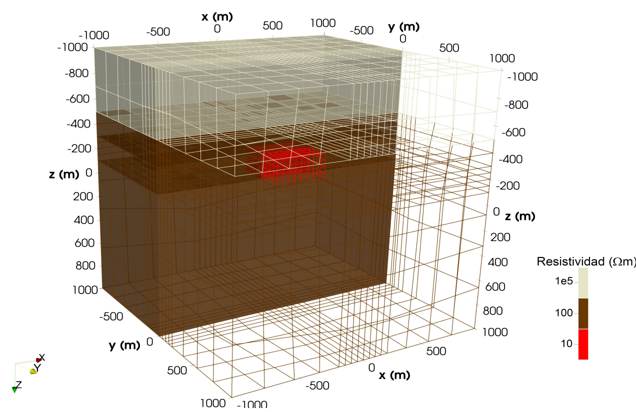


Figura 48. Modelo del semi-espacio con un bloque conductor.

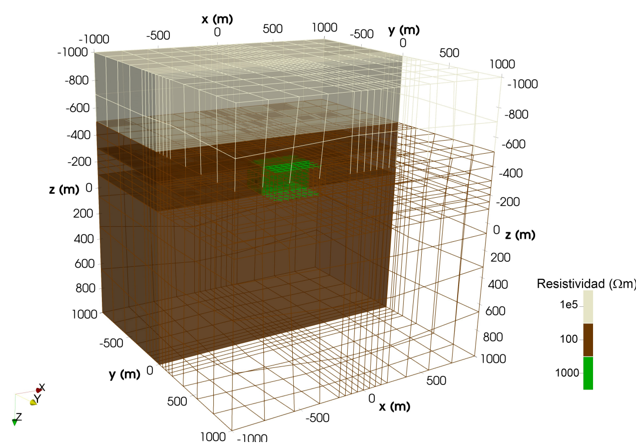


Figura 49. Modelo del semi-espacio con un bloque resistivo.

La fuente consiste en una espira cuadrada de $400 \times 400\,\mathrm{m}$ situada en la superficie, la cual fue aproximada utilizando un dipolo eléctrico de cada lado. Se encendió a $t = 0.002\,\mathrm{s}$ y se apagó a $t = 0.006\,\mathrm{s}$, con un tiempo total de $0.02\,\mathrm{s}$ y un paso $\Delta t = 2 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}$. Se emplearon dos configuraciones de receptores:

- *In loop* (dentro de la espira).
- *Offset loop* (fuera de la espira) a una distancia de 135 m del lado de la espira.

La Figura 50 muestra la ubicación en planta de la espira y los receptores.

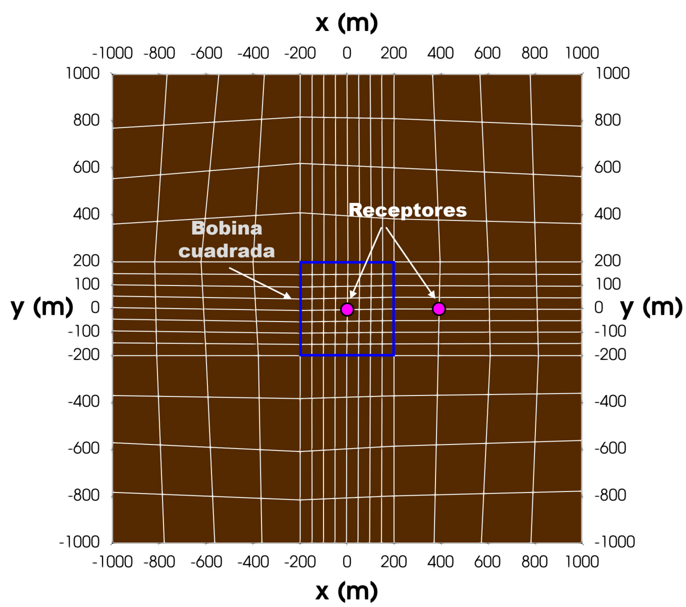


Figura 50. Vista en planta del arreglo de la bobina (en azul) y la posición de los receptores (en magenta).

La Figura 51 compara el campo eléctrico E_x tras el apagado para ambas configuraciones. La figura de la izquierda muestra la curva de decaimiento calculada utilizando la configuración *in loop*, donde la amplitud es mayor que utilizando la configuración *offset loop* (figura derecha). En ambas, el bloque conductor muestra un decaimiento más rápido, mientras que el bloque resistivo y el medio homogéneo presentan comportamientos muy similares. Este comportamiento nos demuestra, nuevamente que los cuerpos conductores son más fáciles de detectar independientemente de la ubicación del receptor, ya sea dentro o fuera de la bobina. A tiempos largos, se observa una convergencia en las respuestas, lo cual puede indicar que a esos tiempos el método está respondiendo a una versión más promediada del subsuelo, indicando con una mayor profundidad de penetración. Dado que en este modelo no considera una capa de mar, la profundidad de penetración es mayor. Desde una perspectiva de inversión, una mayor profundidad de penetración debería, en teoría, permitir visualizar la parte inferior de las estructuras. Sin embargo, en la práctica, esto es más factible para bloques resistivos que para cuerpos conductores, cuya base suele ser difícil de resolver debido a su rápida atenuación de la señal.

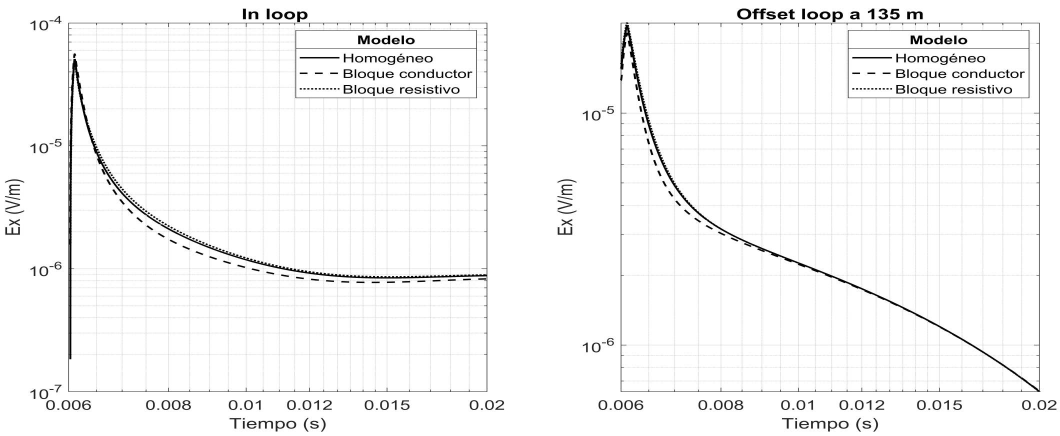


Figura 51. Comparación de E_x tras el apagado en configuración *in loop* (izquierda) y *offset loop* a 135 m (derecha).

En la Figura 52, se representan la tasa de cambio de la componente vertical del campo magnético dBz/dt. En la configuración *in loop* (izquierda), las curvas de los tres modelos prácticamente se superponen, sin mostrar contrastes apreciables. También, en *offset loop* (derecha), las respuestas de los tres modelos son casi idénticas, lo que impide su diferenciación con esta disposición del receptor. Esta falta de contraste puede atribuirse a que, en esta configuración, el receptor se encuentra alejado de la fuente, lo que reduce la sensibilidad del método a las diferencias de conductividad en el subsuelo. A mayores distancias, el campo observado muestra una respuesta más suavizada y promediada del medio.

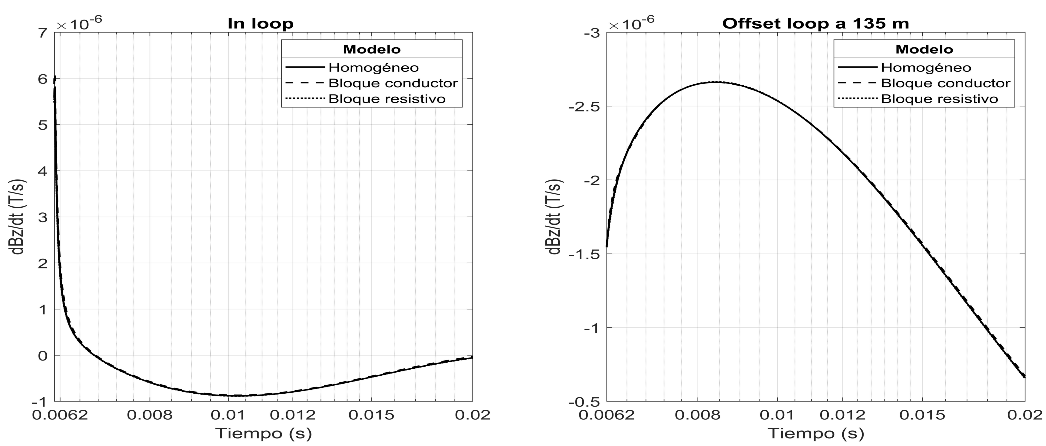


Figura 52. Curvas de dBz/dt para *in loop* (izquierda) y *offset loop* a 135 m (derecha).

El uso de una espira cuadrada como fuente evidencia que la configuración *in loop* ofrece mayor sensibilidad para distinguir entre un bloque conductor y uno resistivo, debido a mayores amplitudes y diferencias de decaimiento en los primeros instantes. Por otro lado, la configuración *offset loop* resulta menos eficaz para distinguir el bloque embebido, pues las curvas tienden a ser muy similares para este modelo.

4.5. Comparación con diferentes fuentes

En esta sección se comparan los resultados obtenidos al emplear tres tipos de fuentes: (i) una fuente puntual orientada en la dirección x, (ii) una espira cuadrada de $400 \times 400\,\mathrm{m}$, y (iii) un cable largo orientado en la dirección y con una longitud de 800 m.

Para llevar a cabo esta comparación, se consideraron tres modelos de resistividad:

- Un semi-espacio homogéneo (Figura 47).
- Un semi-espacio homogéneo con un cuerpo conductor embebido (Figura 48).
- Un semi-espacio homogéneo con un cuerpo resistivo (Figura 49).

El objetivo principal de este análisis es evaluar cómo la geometría de la fuente influye en la capacidad de detección y discriminación de bloques con distintos contrastes de resistividad.

En cada caso, se calcularon los campos eléctrico y magnético utilizando como función base un polinomio de segundo orden. La Figura 53 muestra la ubicación en planta de las distintas fuentes utilizadas. Los receptores se ubicaron a 400 m de las fuentes: el receptor 1 (punto magenta) registra las respuestas de la fuente puntual y el cable largo (*LOTEM*), mientras que en el receptor 2 (punto verde) se calcula la respuesta cuando se emplea la espira cuadrada como fuente y esta localizado a 400 m de distancia del lado derecho de la bobina.

A continuación, se presentan los resultados de los campos eléctrico y magnético para cada tipo de fuente y para los tres modelos de resistividad.

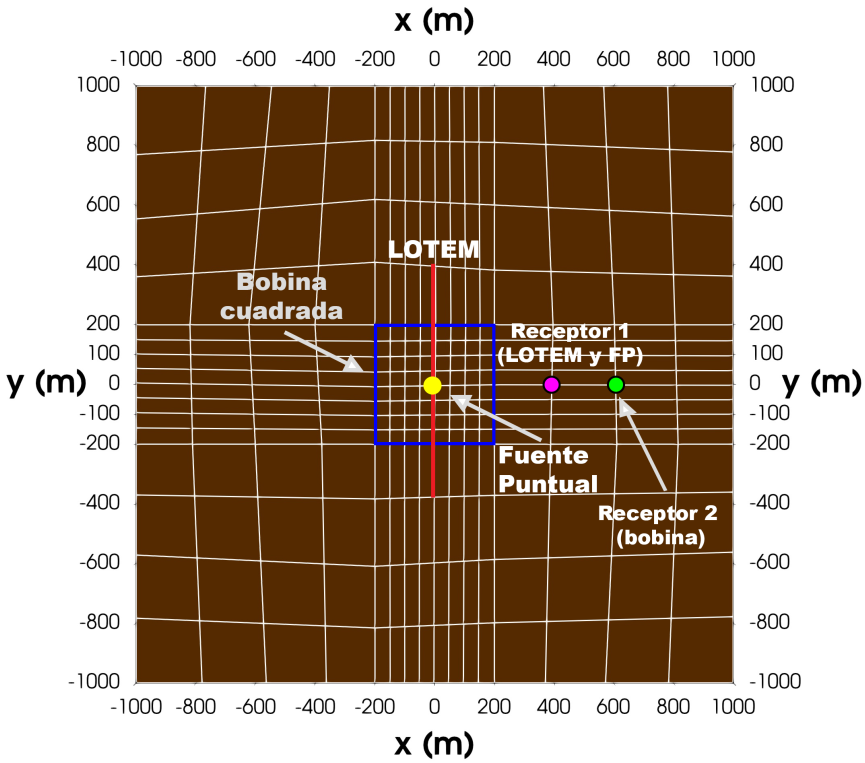
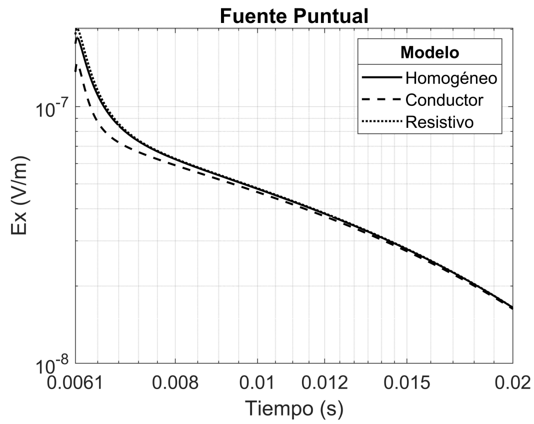


Figura 53. Ubicación de las fuentes y los receptores. La fuente puntual se indica con un punto amarillo, la bobina (espira) cuadrada con el contorno azul y el cable largo (*LOTEM*) con una línea roja. El receptor 1 se representa con un punto magenta y el receptor 2 con un punto verde.

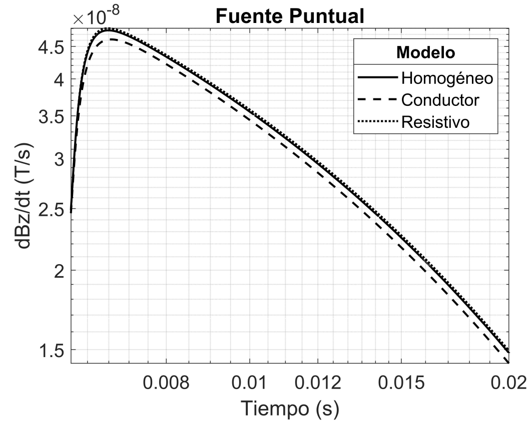
4.5.1. Fuente puntual

En la Figura 54 se muestran las curvas de decaimiento del campo eléctrico E_x y de la tasa de cambio de la componente vertical del campo magnético dBz/dt registradas en el receptor 1, cuando se emplea la fuente puntual orientada en la dirección x.

Se observa que, en el campo eléctrico, el modelo correspondiente al semi-espacio homogéneo y aquel con el cuerpo resistivo embebido presentan comportamientos muy similares. El modelo que contiene el cuerpo conductor, en cambio, exhibe un decaimiento más rápido. En el caso del campo magnético, los tres modelos muestran comportamientos similares en cuanto a la forma de decaimiento, con diferencias sutiles en amplitud. La respuesta del modelo con cuerpo conductor presenta una amplitud ligeramente menor, pero no tan contrastante como en el caso del campo eléctrico.



(a) Comparación del campo eléctrico E_x después de la etapa de apagado.



(b) Comparación de la tasa de cambio del campo magnético dBz/dt después de la etapa de apagado.

Figura 54. Comparación de los campos eléctrico E_x y magnético dBz/dt entre los distintos modelos de resistividad, utilizando una fuente puntual.

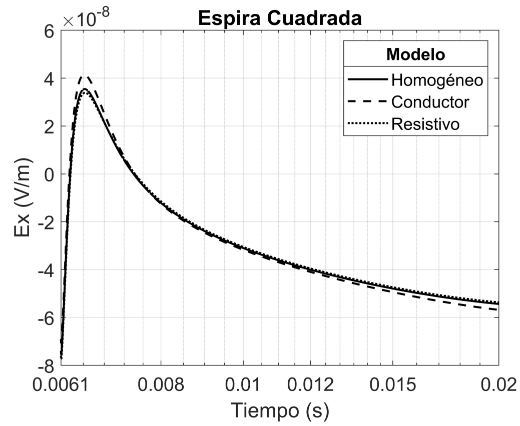
La fuente puntual muestra la influencia del bloque conductor en E_x, donde se observa un decaimiento más rápido. En cambio, el modelo con un cuerpo resistivo embebido presenta una respuesta casi indistinguible del semi-espacio homogéneo, tanto en el campo eléctrico como en el magnético. Esto indica que la fuente puntual posee mayor sensibilidad frente a estructuras conductoras, especialmente en las primeras etapas de la respuesta transitoria, donde el contraste en el campo eléctrico es más notorio.

A tiempos largos, las curvas tienden a converger, lo que sugiere que el método comienza a responder a un volumen más profundo y promediado del subsuelo. Aunque el campo magnético también responde a la presencia del cuerpo conductor, su capacidad para resolver detalles estructurales profundos, como la parte inferior del cuerpo, parece ser más limitada.

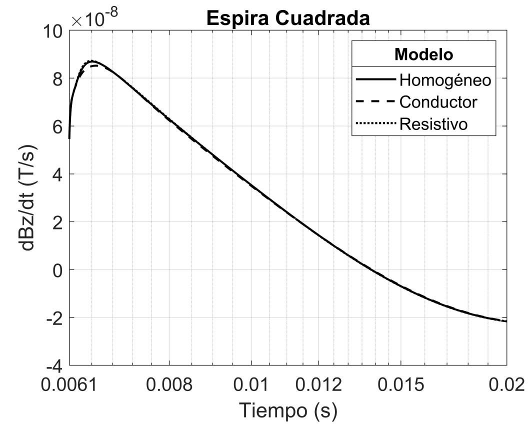
4.5.2. Espira cuadrada

La Figura 55 presenta las curvas de decaimiento del campo eléctrico E_x y de la tasa de cambio de la componente vertical del campo magnético dBz/dt) en el receptor 2, empleando la espira cuadrada como fuente.

En el caso de E_x, se aprecia que el modelo con el cuerpo resistivo muestra una amplitud mayor respecto al semi-espacio homogéneo y al modelo con cuerpo conductor, siendo este último el de menor amplitud. A partir de aproximadamente $0.0012\,\mathrm{s}$, las tres curvas convergen. Por otro lado, para la componente magnética, los tres modelos siguen comportamientos prácticamente idénticos, sin diferencias significativas en amplitud ni en el ritmo de decaimiento. Esto sugiere una menor capacidad del campo magnético, en esta configuración, para resolver contrastes de resistividad en el modelo propuesto.



(a) Comparación del campo eléctrico E_x después de la etapa de apagado.



(b) Comparación de la tasa de cambio del campo magnético dBz/dt después de la etapa de apagado.

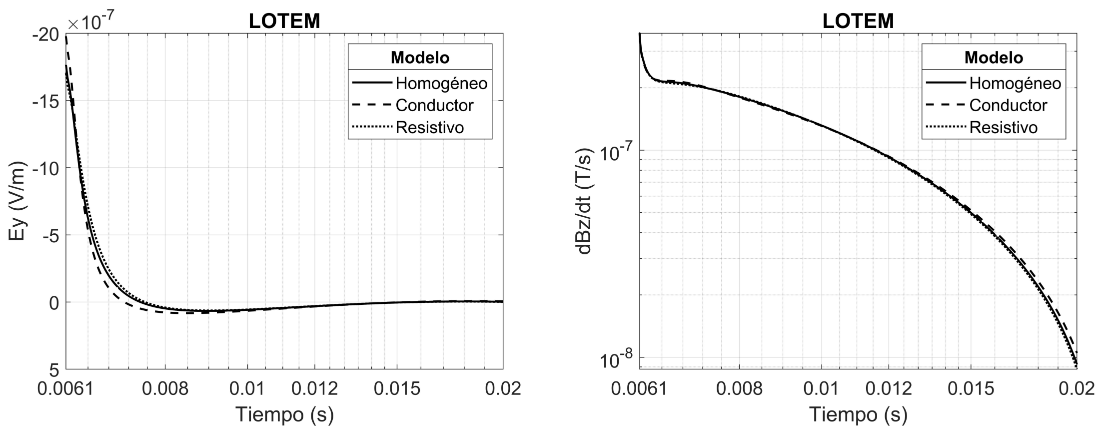
Figura 55. Comparación de los campos eléctrico E_x y magnético dBz/dt entre los distintos modelos de resistividad, utilizando una espira cuadrada como fuente.

La espira cuadrada como fuente permite distinguir con mayor claridad las diferencias entre bloques conductores y resistivos en la respuesta del campo eléctrico, especialmente en los primeros instantes después del apagado. Esto indica que el campo eléctrico E_x es más sensible a las zonas superiores del conductor a tiempos cortos, mientras que, a tiempos más largos, podría estar registrando una respuesta más promediada del medio. Por otro lado, la derivada del campo magnético dBz/dt, no muestra un contraste significativo entre modelos, lo que muestra una menor resolución en este experimento.

4.5.3. Cable largo (LOTEM)

Por último, en la Figura 56 se observan las curvas de decaimiento de la componente del campo eléctrico E_y y de la tasa de cambio de la componente vertical del campo magnético dBz/dt, registradas en el receptor 1 al emplear un cable largo (*LOTEM*) como fuente. Debido a que este cable se orienta en la dirección y, se considera la componente E_y del campo eléctrico.

Los resultados muestran que la respuesta del campo eléctrico E_y decae con mayor rapidez en el modelo con un cuerpo conductor embebido lo cual indica una mayor sensibilidad de esta configuración hacia estructuras altamente conductoras. Por otro lado, las respuestas del semi-espacio homogéneo y del modelo con cuerpo resistivo son prácticamente indistinguibles entre sí. A partir de aproximadamente a los $0.011\,\mathrm{s}$, las tres curvas tienden a converger, lo que sugiere una transición hacia una respuesta más promediada del volumen investigado. En cuanto a la tasa de cambio del campo magnético dBz/dt, los tres modelos mantienen una tendencia de decaimiento semejante, sin diferencias notorias en amplitud.



(a) Comparación del campo eléctrico E_y después de la etapa de apagado.

(b) Comparación de la tasa de cambio del campo magnético dBz/dt después de la etapa de apagado.

Figura 56. Comparación de los campos E_y y dBz/dt entre los distintos modelos de resistividad, utilizando un cable largo como fuente (*LOTEM*).

Este comportamiento sugiere que el campo eléctrico generado por la fuente *LOTEM* es particularmente efectivo para detectar bloques conductores, especialmente en los primeros instantes, cuando parece ser más sensible a las partes superiores del cuerpo. A tiempos más largos, la señal podría estar captando información más profunda, posiblemente relacionada con la base del conductor. En cambio, el campo magnético, muestra curvas prácticamente idénticas en los tres modelos, sin diferencias significativas en amplitud ni en su evolución temporal. Esto indica una menor resolución del campo magnético en esta configuración.

En general, la elección de la fuente (puntual, espira cuadrada o cable largo) influye directamente en la sensibilidad y en el ritmo de decaimiento de las respuestas electromagnéticas. Las diferencias entre modelos de resistividad son más evidentes en los primeros instantes tras el apagado de la fuente, momento en el que los campos eléctricos capturan mejor los contrastes. A tiempos más avanzados, las curvas tienden a converger, lo que limita la capacidad de diferenciación y resalta la importancia de realizar mediciones en etapas tempranas para una caracterización más precisa del subsuelo.

Los resultados obtenidos muestran que el campo eléctrico ofrece mayor capacidad para distinguir bloques conductores, especialmente en los primeros tiempos, mientras que su sensibilidad a mayor profundidad depende de la geometría de la fuente utilizada. En cambio, la derivada del campo magnético dBz/dt presenta una respuesta más uniforme entre los distintos modelos, lo que sugiere una menor eficacia para identificar variaciones de resistividad en los escenarios evaluados.

En conjunto, esta comparación evidencia la necesidad de seleccionar cuidadosamente tanto la configuración de la fuente como las componentes del campo a registrar, de acuerdo con el objetivo del estudio geofísico. Ya sea para detectar estructuras someras, delinear geometrías en profundidad o diferenciar entre cuerpos con distintos contrastes de resistividad, una elección adecuada puede mejorar significativamente la resolución y la calidad de la interpretación del modelo del subsuelo.

Capítulo 5. Conclusiones

Esta investigación se centró en el desarrollo e implementación de un esquema numérico para el modelado directo del método electromagnético transitorio en medios tridimensionales con conductividad anisótropa, donde se integró el método de elementos espectrales para la discretización espacial con un método explícito de diferencias finitas para la discretización temporal.

En la formulación propuesta se incorporó el tensor anisótropo de tipo *VTI* (*vertical transverse isotropy*), permitiendo representar adecuadamente la variación direccional de la conductividad en el subsuelo. Al incluir esta anisotropía establecemos un modelado más flexible, el cual resulta en un modelado más realista que puede abarcar una gran variedad de escenarios geológicos complejos, en particular, ambientes sedimentarios y medios con estructuras preferenciales o fracturas alineadas. Las simulaciones mostraron que las respuestas electromagnéticas difieren sensiblemente entre los casos isótropos y anisótropos, sobre todo en los primeros instantes tras el apagado de la fuente.

Por otro lado, el uso de los polinomios de Lagrange de orden elevado sobre los puntos de Gauss-Lobatto-Legendre (GLL) demostraron ser efectivos para mantener la precisión espacial. A diferencia de esquemas convencionales de elemento finito de bajo orden, la aproximación espectral ofrece una mayor exactitud sin necesidad de un refinamiento excesivo de la malla. De esta manera, se obtiene una representación más fiel de los campos eléctricos en zonas con altos gradientes o con heterogeneidades relevantes. Al utilizar la cuadratura GLL, la matriz de masa resultante se vuelve diagonal, lo que permite un avance temporal explícito de diferencias finitas sin resolver sistemas lineales en cada paso. Esto reduce significativamente la complejidad computacional, facilitando la implementación en escenarios 3D de gran escala.

El método de diferencias finitas adelantadas, aplicado a la parte temporal, se mostró ventajoso frente a técnicas implícitas, ya que no necesita resolver grandes sistemas de ecuaciones en cada paso de tiempo; no obstante, exige pasos de tiempo más pequeños y, en consecuencia, mayor tiempo de cómputo, a medida que aumenta la resistividad de los modelos, para garantizar la estabilidad numérica.

La validación de la metodología se realizó comparando las soluciones numéricas con soluciones analíticas en escenarios de espacio completo homogéneo y de semi-espacio homogéneo. En ambos casos, las curvas de decaimiento del campo eléctrico convergieron adecuadamente hacia la solución teórica al incrementar el orden polinomial o ajustar el tamaño de la malla, mostrando la capacidad del método para capturar los fenómenos de difusión electromagnética tanto en la etapa de encendido como de apagado de la fuente. Se observó, además, que al utilizar las funciones base de orden superior, junto con mallas más gruesas, se obtuvieron resultados más precisos que cuando usamos una malla fina con polinomios de primer orden.

Los experimentos mostraron que las funciones base de segundo y cuarto orden ofrecen un buen equilibrio entre precisión y tiempo de cálculo; y las funciones de primer orden generan errores grandes, por lo que no se recomiendan para aplicaciones prácticas.

Asimismo, se evaluó el desempeño de la formulación en medios estratificados, con capas conductoras y resistivas, mostraron la robustez del esquema al manejar interfaces abruptas y gradientes marcados de resistividad. En escenarios con bloques incrustados, tanto conductores como resistivos, se observó que el método de elementos espectrales describe la propagación de campos eléctricos y magnéticos. En cuanto a los medios anisótropos VTI, se comprobó cómo la presencia de resistividades distintas en la dirección vertical y en la horizontal modifica el decaimiento de los campos. En particular, los modelos con resistencia vertical mayor tienden a exhibir decaimientos más lentos en ciertos componentes, mientras que los modelos con conductividad vertical mayor muestran variaciones más rápidas. Dicho comportamiento coincide con el entendimiento teórico de cómo la anisotropía puede guiar o frenar las corrientes inducidas.

La investigación también incluyó distintas configuraciones de fuentes: puntual (dipolo eléctrico), espira cuadrada y cable largo (*LOTEM*). Este amplio rango de fuentes permitió analizar la respuesta del subsuelo ante arreglos comunes en la exploración electromagnética, mostrando que cada fuente aporta información distinta, particularmente en los instantes iniciales tras el apagado de la fuente, y brindando la posibilidad de diseñar levantamientos de adquisición óptimos según los objetivos de exploración. Para el caso de la espira cuadrada, se demostró que la ubicación del receptor (*in loop* o *offset loop*) impacta la sensibilidad principalmente con cuerpos conductores y resaltando las respuestas más locales en el arreglo *in loop*.

Los resultados numéricos de esta tesis muestran que omitir la anisotropía en el modelado TEM puede conducir a interpretaciones incompletas o sesgadas en ciertos contextos geológicos. Además, la formulación propuesta facilita la incorporación de la anisotropía en simulaciones realistas, ofreciendo un marco teórico y computacional capaz de mejorar la exactitud de la caracterización geofísica. La posibilidad de combinar métodos numéricos de alta precisión (como el método de elementos espectrales) con distintas geometrías de fuente (puntual, bobina, cable largo) demuestra un amplio espectro de aplicaciones. Este trabajo de investigación ha demostrado que el método de elementos espectrales combinado con discretización explícita en el tiempo constituye una alternativa sólida para el modelado 3D del TEM, especialmente cuando la conductividad del subsuelo presenta orientaciones definidas. La validación con soluciones analíticas y experimentos en diversos escenarios respalda la precisión y estabilidad de la implementación. Además, la capacidad de manejar medios anisótropos y distintas configuraciones de fuente demuestra el gran potencial de esta formulación. De esta manera, se ofrece un enfoque más detallado para la exploración geofísica, permitiendo apreciar mejor la influencia de la anisotropía y examinar estructuras subterráneas con mayor fidelidad. Con ello, el trabajo establece bases firmes para futuros avances tanto en la investigación académica (por ejemplo, metodologías de inversión o ampliaciones a otras propiedades físicas) como en aplicaciones industriales (cartografía de acuíferos, exploración minera, estudios geotérmicos o de hidrocarburos), y contribuye a optimizar recursos y mejorar la precisión en la interpretación del subsuelo.

La formulación propuesta abre algunas líneas de desarrollo para futuros trabajos como

- Inversión de datos: La integración del método de elementos espectrales en esquemas de inversión electromagnética presenta un gran potencial. Contar con un método de modelado directo permitiría implementar diferentes esquemas de inversión de datos, facilitando la estimación de la conductividad eléctrica en medios anisótropos.
- Paralelización y supercómputo: La naturaleza explícita del método propuesto y la matriz de masa diagonal, favorecen considerablemente su implementación en infraestructuras de cómputo de alto rendimiento (*HPC*, por sus siglas en inglés). Con ello se pueden realizar simulaciones de gran escala en modelos tridimensionales complejos.

Literatura citada

Avdeev, D., Kuvshinov, A., Pankratov, O., & Newman, G. (1998). Three-dimensional frequency-domain modeling of airborne electromagnetic responses. *Exploration Geophysics*, *29*, 111–119. `https://doi.org/10.1071/EG998111`.

Baawain, M., Al-Futaisi, A., Ebrahimi, A., & Omidvarborna, H. (2018). Characterizing leachate contamination in a landfill site using Time Domain Electromagnetic (TDEM) imaging. *Journal of Applied Geophysics*, *151*, 73-81. `https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2018.02.002`.

Bauer-Gottwein, P., Gondwe, B., Christiansen, L., Herckenrath, D., Kgotlhang, L., & Zimmermann, S. (2010). Hydrogeophysical exploration of three-dimensional salinity anomalies with the time-domain electromagnetic method (TDEM). *Journal of Hydrology*, *380*(3), 318-329. `https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2009.11.007`.

Biro, O., Preis, K., & Richter, K. (1996). On the use of magnetic vector potencial in the nodal and edge finite element analysis of 3D magnetostatic problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, *32*(3), 651–654. `https://doi.org/10.1109/20.497322`.

Börner, R. (2010). Numerical Modelling in Geo-Electromagnetics: Advances and Challenges. *Surveys in Geophysics*, *31*, 225–245. `https://doi.org/10.1007/s10712-009-9087-x`.

Cabrer, R., Gallardo, L., & Flores, C. (2022). Implicit finite-difference time-domain schemes for TDEM modeling in three dimensions. *Geophysics*, *87*(5), E347-E358. `https://doi.org/10.1190/geo2021-0587.1`.

Chalikakis, K., Plagnes, V., Guerin, R., Valois, R., & Bosch, F. (2011). Contribution of geophysical methods to karst-system exploration: an overview. *Hydrogeology Journal*, *19*(6), 1169–1180. `https://doi.org/10.1007/s10040-011-0746-x`.

Christiansen, A., Auken, E., & Sørensen, K. (2009). The transient electromagnetic method. In Kirsch, R., editor, *Groundwater Geophysics. A tool for Hydrogeology*, (pp. 179–226). Springer.

Clough, R. (1990). Original formulation of the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*, *7*(2), 89-101. `https://doi.org/10.1016/0168-874X(90)90001-U`.

Coggon, J. H. (1971). Electromagnetic and electrical modeling by the finite element method. *Geophysics*, *26*(1), 132-155. `https://doi.org/10.1190/1.1440151`.

Cohen, G. (2002). Finite element methods. In Cohen, G., editor, *Higher-order numerical methods for transient wave equarions*, (pp. 167–339). Springer Berlin, Heidelberg, Berlin.

Commer, M., Helwig, S., Hördt, A., Scholl, C., & Tezkan, B. (2006). New results on the resistivity structure of Merapi Volcano (Indonesia), derived from three-dimensional restricted inversion of long-offset transient electromagnetic data. *Geophysical Journal International*, *167*(3), 1172-1187. `https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03182.x`.

Commer, M. & Newman, G. (2004). A parallel finite difference approach for 3D transient electromagnetic modeling with galvanic sources. *Geophysics*, *69*(5), 1192-1202. `https://doi.org/10.1190/1.1801936`.

Cumming, W., Nordquist, G., & Astra, D. (2005). Geophysical exploration for geothermal resources: An application for combined MT-TDEM. In *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2000*, 1071–1074. Society of Exploration Geophysicists. `https://doi.org/10.1190/1.1815571`.

Cummings, D. (2000). Transient electromagnetic survey of a landslide and fault, Santa Susanna Mountains, Southern California. *Environmental Engineering Geoscience*, *6*(3), 247-254. https://doi.org/10.2113/gseegeosci.6.3.247.

Davydycheva, S., Druskin, V., & Habashy, T. (2003). An efficient finite-difference scheme for electromagnetic logging in 3D anisotropic inhomogeneous media. *Geophysics*, *68*(5). https://doi.org/10.1190/1.1620626.

De Basabe, J. & Sen, M. (2007). Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, *72*(6), T81-T95. https://doi.org/10.1190/1.2785046.

Demkowicz, L. (2017). Finite element methods for maxwell's equation. In Stein, E., Borst, R., & Hughes, T., editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*, (pp. 1–20). American Cancer Society.

Descloitres, M., Laurent, J., Morra, C., Clément, R., Oxarango, L., & Gourc, J. (2008). Monitoring resistivity in non-hazardous waste landfill using Time Domain Electromagnetism (Drome, France). *EAGE Near Surface Geophysics*, , 1-5. https://doi.org/10.3997/2214-4609.20146321.

Everett, M., Benavides, A., & Pierce, C. (2005). An experimental study of the time-domain electromagnetic response of a buried conductive plate. *Geophysics*, *70*(1), G1-G7. https://doi.org/10.1190/1.1852773.

Everett, M. & Edwards, R. (1992). Transient marine electromagnetics: the 2.5-D forward problem. *Geophysical Jorunal International*, *113*, 545–561. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1993.tb04651.x.

Fichtner, A. (2011). Spectral-Element Methods. In Fichtner, A., editor, *Full Seismic Waveform Modelling and Inversion*, (pp. 59–81). Springer Berlin, Heidelberg, Berlin.

Fitterman, D. & Stewart, M. (1986). Transient electromagnetic sounding for groundwater. *Geophysics*, *51*(4), 995-1005. https://doi.org/10.1190/1.1442158.

Goldman, M., Rabinovich, B., Rabinovich, M., Gilad, D., Gev, I., & Schirov, M. (1994). Application of the integrated NMR-TDEM method in groundwater exploration in Israel. *Journal of Applied Geophysics*, *31*(1), 27-52. Geophysics and Environment, https://doi.org/10.1016/0926-9851(94)90045-0.

Goldman, Y., Hubans, S., Nicoletis, S., & Spitz, S. (1986). A finite-element solution for the transient electromagnetic response of an arbitrary two-dimensional resistivity distribution. *Geophysics*, *51*(7), 1450–1461. https://doi.org/10.1190/1.1442193.

Grayver, A. & Kolev, T. (2015). Large-scale 3D geoelectromagnetic modeling using parallel adaptative high-order finite element method. *Geophysics*, *80*(6), E277-E291. https://doi.org/10.1190/geo2015-0013.1.

Haber, E., Ascher, U., Aruliah, D., & Oldenburg, D. (2000). Fast simulation of 3D Electromagnetic problems using potentials. *Journal of Computational Physics*, *163*(1), 150-171. https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6545.

Haroon, A., Adrian, J., Bergers, R., Gurk, M., Tezkan, B., Mammadov, A. L., & Novruzov, A. G. (2015). Joint inversion of long-offset and central-loop transient electromagnetic data: Application to a mud volcano exploration in Perekishkul, Azerbaijan. *Geophysical Prospecting*, *63*(2), 478-494. https://doi.org/10.1111/1365-2478.12157.

Heise, W. & Pous, J. (2001). Effects of anisotropy on the two-dimensional inversion procedure. *Geophysics International Journal*, *147*(3), 610-621. https://doi.org/10.1046/j.0956-540x.2001.01560.x.

Hohmann, G. (1987). Numerical modeling for electromagnetic methods of geophysics. In Nabighian, M., editor, *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, volume I, (pp. 313–364). Society of Exploration Geophysicists.

Huang, W., Ben, F., Yin, C., Meng, Q., Li, W., Liao, G., Wu, S., & Xi, Y. (2017). Three-dimensinal arbitrarily anisotropic modeling for time-domain airborne electromagnetic surveys. *Applied Geophysics*, *14*(3), 431–440. https://doi.org/10.1007/s11770-017-0627-8.

Huang, X., Yin, C., Farquharson, C., Cao, X., Zhang, B., Huang, W., & Cai, J. (2019). Spectral-element method with arbitrary hexahedron meshes for time-domain 3D airborne electromagnetic forward modeling. *Geophysics*, *84*(1), E37–E46. https://doi.org/10.1190/geo2018-0231.1.

Huerta, P., Carrasco-García, P., Armenteros, I., Recio, C., Carrasco-García, J., & Rodríguez-Jiménez, E. (2022). TDEM soundings as a tool to determine seasonal variations of groundwater salinity (Villafáfila Lakes, Spain). *Water*, *14*(15). https://doi.org/10.3390/w14152402.

Jahandari, H. & Farquharson, C. (2014). A finite-volume solution to the geophysical electromagnetic forward problem using unstructured grids. *Geophysics*, *79*(6), E287-E302. https://doi.org/10.1190/geo2013-0312.1.

Jaysaval, P., Shantsev, D., & de la Kethulle de Ryhove, S. (2015). Efficient 3-D controlled-source electromagnetic modelling using and exponential finite-differce method. *Geophysical Journal International*, *203*, 1541–1574. https://doi.org/10.1093/gji/ggv377.

Kafri, U., Goldman, M., Levi, E., & Wollman, S. (2014). Detection of saline groundwater bodies between the Dead Sea and the Mediterranean Sea, Israel, using the TDEM method and hydrochemical parameters. *Environmental Processes*, *1*(1), 21-41. https://doi.org/10.1007/s40710-014-0001-2.

Kagerer, F. (2018). *Finite Element for Maxwell's Equations.* [Tesis de Licenciatura en Matemáticas, Johannes Kepler University Linz]. Disponible en: https://numa.jku.at/media/filer˙public/42/6a/426ad6dd-dc96-43b8-a518-b00f139a476b/bachelor-kagerer.pdf.

Key, K. (2012). Marine electromagnetic studies of seafloor resources and tectonics. *Surveys in Geophysics*, *33*, 135–167. https://doi.org/10.1007/s10712-011-9139-x.

Komatitsch, D., Ritsema, J., & Tromp, J. (2002). The Spectral-Element Method, Beowulf Computing, and Global Seismology. *Science*, *298*(5599), 1737–1742. https://doi.org/10.1126/science.1076024.

Komatitsch, D. & Tromp, J. (1999). Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophysical Journal International*, *139*(3), 806–822. https://doi.org/10.1046/j.1365-246x.1999.00967.x.

Krivochieva, S. & Chouteau, M. (2003). Integrating TDEM and MT methods for characterization and delineation of the Santa Catarina aquifer (Chalco Sub-Basin, Mexico). *Journal of Applied Geophysics*, *52*(1), 23-43. https://doi.org/10.1016/S0926-9851(02)00231-8.

Lewis, R., Nithiarasu, P., & Seetharamu, K. (2004). *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. Wiley.

Li, J., Lu, X., Farquharson, C., & Hu, X. (2018). A finite-element time-domain forward solver for elecctromagnetic methods with complex-shaped loop sources. *Geophysics*, *83*(3), E117-E132. https://doi.org/10.1190/geo2017-0216.1.

Li, X., Hu, X., Cai, H., & Liu, Y. (2020). A finite-element time-domain forward-modelling algorithm for transient electromagnetics excited by grounded-wire sources. *Geophysical Prospecting*, , 1–20. https://doi.org/10.1111/1365-2478.12917.

Lu, X. & Farquharson, C. (2020). 3D finite-volume time-domain modeling of geophysical electromagnetic data on unstructured grids using potentials. *Geophysics*, *85*(6), E221-E240. https://doi.org/10.1190/geo2020-0088.1.

Maaø, F. (2007). Fast finite-difference time-domain modeling for marine subsurface electromagnetic problems. *Geophysics*, *72*(2), A19–A23. https://doi.org/10.1190/1.2434781.

MacFarlane, J., Thiel, S., Pek, J., Peacock, J., & Heinson, G. (2014). Characterisation of induced fracture networks within and enhanced geothermal system using anisotropic electromagnetic modelling. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, *288*, 1–7. https://doi.org/10.1016/j.jvolgeores.2014.10.002.

Metwaly, M., Elawadi, E., Moustafa, S., Arifi, N., El Alfy, M., & Al Zaharani, E. (2014). Groundwater contamination assessment in Al-Quwy'yia area of central Saudi Arabia using transient electromagnetic and 2D electrical resistivity tomography. *Environmental Earth Sciences*, *71*(2), 827–835. https://doi.org/10.1007/s12665-013-2485-x.

Mitsuhata, Y. (2000). 2-D electromagnetic modeling by finite-element method with a dipole source and topography. *Geophysics*, *65*(2), 465–476. https://doi.org/10.1190/1.1444740.

Mitsuhata, Y. & Uchida, T. (2004). 3D magnetotelluric modeling using the T-Ω finite-element method. *Geophysics*, *69*(1), 108-119. https://doi.org/10.1190/1.1649380.

Mörbe, W., Yogeshwar, P., Tezkan, B., & Hanstein, T. (2020). Deep exploration using long-offset transient electromagnetics: interpretation of field data in time and frequency domain. *Geophysical Prospecting*, *68*(6), 1980-1998. https://doi.org/10.1111/1365-2478.12957.

Öchsner, A. & Merkel, M. (2018). *One-Dimensional Finite Elements. An introduction to the FE Method*. Springer.

Patera, A. (1984). A spectral element method for fluid dynamics: Laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics*, *54*(3), 468-488. https://doi.org/10.1016/0021-9991(84)90128-1.

Porsani, J., Bortolozo, C., Almeida, E., Sobrinho, E., & Santos, T. (2012). TDEM survey in urban environmental for hydrogeological study at USP campus in São Paulo city, Brazil. *Journal of Applied Geophysics*, *76*, 102-108. https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2011.10.001.

Qi, Z., Li, X., Li, H., & Liu, W. (2020). First results from drone-based transient electromagnetic survey to map and detect unexploded ordnance. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, *17*(12), 2055-2059. https://doi.org/10.1109/LGRS.2019.2962754.

Rochlitz, R., Skibbe, N., & Günther, T. (2019). custEM: Customizable finite-element simulation of complex controlled-source electromagnetic data. *Geophysics*, *84*(2), F17-F33. https://doi.org/10.1190/geo2018-0208.1.

SanFilipo, W. & Hohmann, G. (1985). Integral equation solution for the transient electromagnetic response of a three-dimensional body in a conductive half-space. *Geophysics*, *50*(5), 798–809. `https://doi.org/10.1190/1.1441954`.

Schwarzbach, C., Börner, R., & Spitzer, K. (2011). Three-dimensional adaptative higher order finite element simulation for geo-electromagnetics-a marine CSEM example. *Geophysical Journal International*, *187*(1), 63-74. `https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2011.05127.x`.

Spies, B. & Frischknecht, F. (1991). Electromagnetic sounding. In Nabighian, M., editor, *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, volume II, (pp. 285–425). Society of Exploration Geophysicists, USA.

Stephan, A., Schniggenfittig, H., & Strack, K. (1991). Long-Offset transient EM sounding north of the Rhine-Ruhr coal district, Germany. *Geophysical Prospecting*, *39*(4), 505-525. `https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1991.tb00325.x`.

Strack, K. (1992). *Exploration with deep tranisent electromagnetics*. Elsevier.

Strack, K., Luschen, E., & Kotz, A. (1990). Long-offset transient electromagnetic (LOTEM) depth soundings applied to crustal studies in the Black Forest and Swabian Alb, Federal Republic of Germany. *Geophysics*, *5*(7), 835-842. `https://doi.org/10.1190/1.1442897`.

Streich, R. (2009). 3D finite-difference frequency-domain modeling of controlled-source electromagnetic data: Direct solution and optimization for high accuracy. *Geophysics*, *74*(5), F95-F105. `https://doi.org/10.1190/1.3196241`.

Um, E., Harris, J., & Alumbaugh, L. (2010). 3D time-domain simulation of electromagnetic diffusion phenomena: A finite-element electric field approach. *Geophysics*, *75*(4), F115–F126. `https://doi.org/10.1190/1.3473694`.

Vozoff, K., Moss, D., LeBrocq, K., & McAllister, K. (1985). LOTEM electric field measurements for mapping resistive horizons in petroleum exploration. *Exploration Geophysics*, *16*(2-3), 309–312. `https://doi.org/10.1071/EG985309`.

Wang, T. & Hohmann, G. (1993). A finite-difference, time-domain solution for three-dimensional electromagnetic modeling. *Geophysics*, *58*(6), 797–809. `https://doi.org/10.1190/1.1443465`.

Wang, X., Cai, H., Liu, L., Revil, A., & Hu, X. (2023). Three-dimensional inversion of long-offset transient electromagnetic method over topography. *Minerals*, *13*(7). `https://doi.org/10.3390/min13070908`.

Wannamaker, P. (2005). Anisotropy versus heterogeneity in continental solid earth electromagnetic studies: Fundamental reponse characteristics and implications for physicochemical state. *Surveys in Geophysics*, *26*, 733–765. `https://doi.org/10.1007/s10712-005-1832-1`.

Ward, S. & Hohmann, G. (1987). Electromagnetic theory for geophysical applications. In Nabighian, M., editor, *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics*, volume I, (pp. 113–312). Society of Exploration Geophysicists.

Weidelt, P. (1999). 3-D conductivity models: Implication of electrical anisotropy. In Oristaglio, M. & Spies, B., editors, *Three-Dimensional Electromagnetics*, (pp. 119–137). Society of Exploration Geophysicists.

Weiss, M., Kalscheuer, T., & Ren, Z. (2023). Spectral element method for 3-D controlled-source electromagnetic forward modelling using unstructured hexahedral meshes. *Geophysical Journal International*, *232*(2), 1427–1454. `https://doi.org/10.1093/gji/ggac358`.

White, E., Day-Lewis, F., Johnson, C., & Lane Jr, J. (2016). Application of frequency- and time-domain electromagnetic surveys to characterize hydrostratigraphy and landfill construction at the Amargosa Desert Research Site, Beatty, Nevada. *USGS Publications Warehouse*, , 1-5. https://doi.org/10.4133/SAGEEP.29-024.

Xu, Y., Xie, X., Zhou, L., Xi, B., & Yan, L. (2023). Noise characteristics and denoising methods of long-offset transient electromagnetic method. *Minerals*, *13*(8), 1-17. https://doi.org/10.3390/min13081084.

Xue, G., Chen, W., Wu, X., Yan, S., & Guo, W. (2022). A near-source electromagnetic method for deep ore explorations. *Minerals*, *12*(10). https://doi.org/10.3390/min12101208.

Yan, L., Chen, X., Tang, H., Xie, X., Zhou, L., Hu, W., & Wang, Z. (2018). Continuous TDEM for monitoring shale hydraulic fracturing. *Applied Geophysics*, *15*(1), 26-34. https://doi.org/10.1007/s11770-018-0661-1.

Yin, C., Gao, Z., Su, Y., Liu, Y., Huang, X., & Ren, X Xiong, B. (2021). 3D Airborne EM forward modeling based o time-domain spectral element method. *Remote Sensing*, *601*(13), 1–18. https://doi.org/10.3390/rs13040601.

Yin, C., Qi, Y., & Liu, Y. (2016). 3D time-domain airborne EM modeling for an arbitrarily anisotropic earth. *Journal of Applied Geophysics*, *131*, 163–178. https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2016.05.013.

Zhdanov, M., Kon Lee, S., & Yoshioka, K. (2006). Integral equation method for 3D modeling of electromagnetic fields in complex structures with inhomogeneous background conductivity. *Geophysics*, *71*(6), G333-G345. https://doi.org/10.1190/1.2358403.

Zhou, F., Chen, H., Tang, J., Zhang, Z., Yuan, Y., & Wu, Q. (2022). A comparison of A-ϕ formulae for three-dimensional geo-electromagnetic induction problems. *Journal of Geophysics and Engineering*, *19*(4), 630-649. https://doi.org/10.1093/jge/gxac038.

Anexos

Anexo A Integración por partes del rotacional

Para obtener la formulación débil de las ecuaciones de Maxwell se necesita la integración por partes del rotacional del campo. Kagerer (2018) indica que a partir de

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i} dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{x_i} \cdot \boldsymbol{v} dx + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \cdot n_i) \cdot \boldsymbol{v} ds_x \tag{90}$$

Se deriva el lema

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} dx = \int_{\Omega} \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v})\, dx - \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{v} ds_x \tag{91}$$

o bien la ecuación presentada por Demkowicz (2017)

$$\int_{\Omega} (\nabla \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = \int_{\Omega} \boldsymbol{u} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} \tag{92}$$

Anexo B

La forma débil para la ecuación de difusión, una vez discretizada en elementos, está dada por

$$\sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \mu^{-1}(\nabla \times \mathbb{E}^e) \cdot (\nabla \times \mathbf{\Phi}_i^e)\, dV + \sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \sigma \frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t} \cdot \mathbf{\Phi}_i^e\, dV = -\sum_{i=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{J}^e}{\partial t} \cdot \mathbf{\Phi}_i^e\, dV, \tag{93}$$

ahora, desarrollamos la ecuación 60 en cada una de sus componentes, donde

$$\mathbb{E}^e(\boldsymbol{r}, t) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{Nf} E_j^x(t) \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}) \\ \sum_{j=1}^{Nf} E_j^y(t) \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}) \\ \sum_{j=1}^{Nf} E_j^z(t) \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}. \tag{94}$$

• Primera componente x

Para calcular cada una de las componentes del campo eléctrico son necesarias tres ecuaciones. Entonces para calcular la primera componente, se utiliza la función de prueba definida como:

$$\mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \Phi_i(\boldsymbol{r}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{95}$$

sustituimos las ecuaciones 94 y 95 en la ecuación 93. Entonces, desarrollando el primer término del lado derecho (sin las sumatorias sobre las funciones base),

$$(\nabla \times \mathbb{E}^e) \cdot (\nabla \times \mathbf{\Phi}_i^e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_j^z \Phi_j}{\partial y} - \frac{\partial E_j^y \Phi_j}{\partial z} \\ \frac{\partial E_j^x \Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial E_j^z \Phi_j}{\partial x} \\ \frac{\partial E_j^y \Phi_j}{\partial x} - \frac{\partial E_j^x \Phi_j}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \\ -\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{96}$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbb{E}^e) \cdot (\nabla \times \mathbf{\Phi}_i^e) &= \left(\frac{\partial E_j^x \Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial E_j^z \Phi_j}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial E_j^y \Phi_j}{\partial x} - \frac{\partial E_j^x \Phi_j}{\partial y} \right) \left(-\frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) \\
&= E_j^x \frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} - E_j^z \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} - E_j^y \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + E_j^x \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \\
&= E_j^x \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) - E_j^y \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} - E_j^z \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z},
\end{aligned} \tag{97}
$$

agregando las sumatorias de las funciones base y la integral sobre el dominio de cada elemento Ω_e

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_e} \mu^{-1} (\nabla \times \mathbb{E}^e) \cdot (\nabla \times \mathbf{\Phi}_i^e) dV =& \sum_{j=1}^{Nf} E_j^x(t) \int_{\Omega_e} \mu^{-1} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) dV \\
&+ \sum_{j=1}^{Nf} E_j^y(t) \int_{\Omega_e} -\mu^{-1} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \right) dV \\
&+ \sum_{j=1}^{Nf} E_j^z(t) \int_{\Omega_e} -\mu^{-1} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \right) dV.
\end{aligned} \tag{98}
$$

El segundo término corresponde al término que involucra la conductividad, la cual será considerada como anisótropa $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r})$, donde

$$
\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \tag{99}
$$

y además tenemos :

$$
\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t} = \sum_{j=1}^{Nf} \frac{d\boldsymbol{E}_j(t)}{dt} \mathbf{\Phi}_j(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{Nf} \frac{dE_j^x(t)}{dt} \Phi_j(\boldsymbol{r}) \\ \sum_{j=1}^{Nf} \frac{dE_j^y(t)}{dt} \Phi_j(\boldsymbol{r}) \\ \sum_{j=1}^{Nf} \frac{dE_j^z(t)}{dt} \Phi_j(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}. \tag{100}
$$

Entonces, en el caso anisótropo:

$$
\boldsymbol{\sigma} \frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t} \ \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{i}} = \left[\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t} \right]^T \boldsymbol{\sigma} \ \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{i}}. \tag{101}
$$

Sustituyendo la conductividad de la ecuación 99 y 100 (sin las sumatorias)

$$\left[\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t}\right]^T \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\Phi_i} = \left\{\frac{dE_j^x \Phi_j(\boldsymbol{r})}{dt} \quad \frac{dE_j^y \Phi_j(\boldsymbol{r})}{dt} \quad \frac{dE_j^z \Phi_j(\boldsymbol{r})}{dt}\right\} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_i(\boldsymbol{r}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{102}$$

$$\left[\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t}\right]^T \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\Phi_i} = \sigma_{xx}\frac{dE_j^x}{dt}\Phi_j\Phi_i + \sigma_{yx}\frac{dE_j^y}{dt}\Phi_j\Phi_i + \sigma_{zx}\frac{dE_j^z}{dt}\Phi_j\Phi_i. \tag{103}$$

Si, sólo utilizamos la diagonal principal de $\boldsymbol{\sigma}$, entonces la ecuación anterior queda como:

$$\left[\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t}\right]^T \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Phi_i} = \sigma_{xx}\frac{dE_j^x}{dt}\phi_j\phi_i; \tag{104}$$

Agregando la integral y la sumatoria, este término queda como

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{r})\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\Phi_i} dV = \sum_{j=1}^{Nf} \frac{dE_j^x(t)}{dt}\int_{\Omega_e} \sigma_{xx}\Phi_j\Phi_i dV. \tag{105}$$

Y el término del lado derecho de la ecuación 93, para la primera componente obtenemos

$$-\int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\Phi_i} dV = -\int_{\Omega_e} \frac{\partial J^x(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \cdot \Phi_i dV. \tag{106}$$

Juntando todos los términos, la primera ecuación queda como

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{Nf} E_j^x(t)\int_{\Omega_e} \mu^{-1}\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\right)dV + \sum_{j=1}^{Nf} E_j^y(t)\int_{\Omega_e} -\mu^{-1}\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\right)dV \\ &+ \sum_{j=1}^{Nf} E_j^z(t)\int_{\Omega_e} -\mu^{-1}\left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}\right)dV + \sum_{j=1}^{Nf}\frac{dE_j^x(t)}{dt}\int_{\Omega_e}\sigma_{xx}\Phi_j\Phi_i dV = -\int_{\Omega_e}\frac{\partial J^x(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot\Phi_i dV\end{aligned} \tag{107}$$

• Segunda componente, y

Para la componente y, utilizamos la función de prueba definida de la siguiente manera,

$$\boldsymbol{\Phi_i}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_i(\boldsymbol{r}) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{108}$$

Ahora se sustituyen las ecuaciones 94 y 108 en la ecuación 93. Desarrollando el primer término del lado derecho (sin las sumatorias),

$$(\nabla \times \mathbb{E}^e) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Phi_i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_j^z \Phi_j}{\partial y} - \frac{\partial E_j^y \Phi_j}{\partial z} \\ \frac{\partial E_j^x \Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial E_j^z \Phi_j}{\partial x} \\ \frac{\partial E_j^y \Phi_j}{\partial x} - \frac{\partial E_j^x \Phi_j}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{109}$$

y

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbb{E}^e) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\Phi_i}) &= \left(\frac{\partial E_j^z \Phi_j}{\partial y} - \frac{\partial E_j^y \Phi_j}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial E_j^y \Phi_j}{\partial x} - \frac{\partial E_j^x \Phi_j}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right) \\ &= -E_j^z \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + E_j^y \frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + E_j^y \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} - E_j^x \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \\ &= -E_j^x \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right) + E_j^y \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right) - E_j^z \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}\right), \end{aligned} \tag{110}$$

agregando las sumatorias y la integral sobre el dominio

$$\int_{\Omega_e} \mu^{-1} \left(\nabla \times \mathbb{E}^e\right) \cdot \left(\nabla \times \boldsymbol{\Phi_i}\right) dV = \sum_{j=1}^{Nf} E_j^x(t) \int_{\Omega_e} -\mu^{-1} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right) dV$$
$$+ \sum_{j=1}^{Nf} E_j^y(t) \int_{\Omega_e} \mu^{-1} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z}\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right) dV$$
$$+ \sum_{j=1}^{Nf} E_j^z(t) \int_{\Omega_e} -\mu^{-1} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}\right) dV. \tag{111}$$

Usando el tercer término de la ecuación 93 con la función de prueba para la segunda componente y sustituyendo la conductividad de la ecuación 99 y 100 (sin las sumatorias)

$$\left[\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t}\right]^T \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\Phi_i} = \left\{\frac{dE_j^x \Phi_j(\boldsymbol{r})}{dt} \quad \frac{dE_j^y \Phi_j(\boldsymbol{r})}{dt} \quad \frac{dE_j^z \Phi_j(\boldsymbol{r})}{dt}\right\} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_i(\boldsymbol{r}) \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{112}$$

$$\left[\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t}\right]^T \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\Phi_i} = \sigma_{xy}\frac{dE_j^x}{dt}\Phi_j\Phi_i + \sigma_{yy}\frac{dE_j^y}{dt}\Phi_j\Phi_i + \sigma_{zy}\frac{dE_j^z}{dt}\Phi_j\Phi_i. \tag{113}$$

Si sólo utilizamos la diagonal principal de $\boldsymbol{\sigma}$, entonces la ecuación anterior queda como

$$\left[\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t}\right]^T \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\Phi_i} = \sigma_{yy}\frac{dE_j^y}{dt}\Phi_j\Phi_i. \tag{114}$$

Agregando la integral y la sumatoria, este término queda como

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma(r)}\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\Phi_i} dV = \sum_{j=1}^{Nf} \frac{dE_j^y(t)}{dt} \int_{\Omega_e} \sigma_{yy}\Phi_j\Phi_i dV. \tag{115}$$

Y el término del lado derecho de la ecuación 93, para la segunda componente queda como:

$$-\int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\Phi_i} dV = -\int_{\Omega_e} \frac{\partial J^y(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \cdot \Phi_i dV. \tag{116}$$

Juntando todos los términos, la segunda ecuación queda como,

$$\sum_{j=1}^{Nf} E_j^x(t)\int_{\Omega_e} -\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right)dV + \sum_{j=1}^{Nf} E_j^y(t)\int_{\Omega_e}\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}+\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right)dV$$
$$+\sum_{j=1}^{Nf} E_j^z(t)\int_{\Omega_e} -\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}\right)dV + \sum_{j=1}^{Nf}\frac{dE_j^y(t)}{dt}\int_{\Omega_e}\sigma_{yy}\Phi_j\Phi_i dV = -\int_{\Omega_e}\frac{\partial J^y(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot\Phi_i dV. \tag{117}$$

• Tercera componente, z

Para la última componente, utilizamos la función de prueba definida de la siguiente manera

$$\boldsymbol{\Phi_i}(\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi_i(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}. \tag{118}$$

Ahora se sustituyen las ecuaciones 94 y 118 en la ecuación 93. Desarrollando el primer término del lado derecho (sin las sumatorias),

$$(\nabla\times\mathbb{E}^e)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\Phi_i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_j^z\Phi_j}{\partial y} - \frac{\partial E_j^y\Phi_j}{\partial z} \\ \frac{\partial E_j^x\Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial E_j^z\Phi_j}{\partial x} \\ \frac{\partial E_j^y\Phi_j}{\partial x} - \frac{\partial E_j^x\Phi_j}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial\Phi_i}{\partial y} \\ -\frac{\partial\Phi_i}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{119}$$

$$\begin{aligned}(\nabla\times\mathbb{E}^e)\cdot(\nabla\times\boldsymbol{\Phi_i}) &= \left(\frac{\partial E_j^z\Phi_j}{\partial y} - \frac{\partial E_j^y\Phi_j}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial E_j^x\Phi_j}{\partial z} - \frac{\partial E_j^z\Phi_j}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right) \\ &= E_j^z\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y} - E_j^y\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y} - E_j^x\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x} + E_j^z\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x} \\ &= -E_j^x\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right) - E_j^y\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right) + E_j^z\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y} + \frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right).\end{aligned} \tag{120}$$

Agregando las sumatorias y la integral sobre el dominio

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_e} \mu^{-1} \left(\nabla \times \mathbb{E}^e\right) \cdot \left(\nabla \times \boldsymbol{\Phi_i}\right) dV = &\sum_{j=1}^{Nf} E_j^x(t) \int_{\Omega_e} -\mu^{-1} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right) dV \\ &+ \sum_{j=1}^{Nf} E_j^y(t) \int_{\Omega_e} -\mu^{-1} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial z} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y}\right) dV \\ &+ \sum_{j=1}^{Nf} E_j^z(t) \int_{\Omega_e} \mu^{-1} \left(\frac{\partial \Phi_j}{\partial y} \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x}\right) dV. \end{aligned} \tag{121}$$

Usando el segundo de la ecuación 93 con la función de prueba para la tercera componente y sustituyendo la conductividad de la ecuación 99 y 100 (sin las sumatorias)

$$\left[\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t}\right]^T \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\Phi_i} = \left\{ \tfrac{dE_j^x \Phi_j(\boldsymbol{r})}{dt} \quad \tfrac{dE_j^y \Phi_j(\boldsymbol{r})}{dt} \quad \tfrac{dE_j^z \Phi_j(\boldsymbol{r})}{dt} \right\} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Phi_i(\boldsymbol{r}) \end{bmatrix}, \tag{122}$$

$$\left[\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t}\right]^T \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\Phi_i} = \sigma_{xz} \frac{dE_j^x}{dt} \Phi_j \Phi_i + \sigma_{yz} \frac{dE_j^y}{dt} \Phi_j \Phi_i + \sigma_{zz} \frac{dE_j^z}{dt} \Phi_j \Phi_i. \tag{123}$$

Si, sólo utilizamos la diagonal principal de $\boldsymbol{\sigma}$, entonces la ecuación anterior queda como:

$$\left[\frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t}\right]^T \boldsymbol{\sigma}\ \boldsymbol{\Phi_i} = \sigma_{zz} \frac{dE_j^z}{dt} \Phi_j \Phi_i. \tag{124}$$

Agregando la integral y la sumatoria, este término queda como

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial \mathbb{E}^e}{\partial t} \sigma(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{\Phi_i} dV = \sum_{j=1}^{Nf} \frac{dE_j^z(t)}{dt} \int_{\Omega_e} \sigma_{zz} \Phi_j \Phi_i dV. \tag{125}$$

Y el término del lado derecho de la ecuación 93, para la tercera componente queda como:

$$-\int_{\Omega_e} \frac{\partial \boldsymbol{J_s}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{\Phi_i} = -\int_{\Omega_e} \frac{\partial J_s^z(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \cdot \Phi_i \tag{126}$$

Juntando todos los términos la tercer ecuación queda como,

$$\sum_{j=1}^{Nf} E_j^x(t)\int_{\Omega_e} -\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right)dV + \sum_{j=1}^{Nf} E_j^y(t)\int_{\Omega_e} -\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right)dV$$
$$+\sum_{j=1}^{Nf} E_j^z(t)\int_{\Omega_e} \mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right) + \sum_{j=1}^{Nf}\frac{dE_j^z(t)}{dt}\int_{\Omega_e}\sigma_{zz}\Phi_j\Phi_i dV = -\int_{\Omega_e}\frac{\partial J^z(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot\Phi_i dV \tag{127}$$

Colocando las ecuaciones 107, 117 y 127 en forma matricial

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{ij}^1 E_j^x + \boldsymbol{K}_{ij}^2 E_j^y + \boldsymbol{K}_{ij}^3 E_j^z + \boldsymbol{M}_{ij}^1\partial_t E_j^x &= \partial_t J_i^x\\
\boldsymbol{K}_{ij}^4 E_j^x + \boldsymbol{K}_{ij}^5 E_j^y + \boldsymbol{K}_{ij}^6 E_j^z + \boldsymbol{M}_{ij}^2\partial_t E_j^y &= \partial_t J_i^y\\
\boldsymbol{K}_{ij}^7 E_j^x + \boldsymbol{K}_{ij}^8 E_j^y + \boldsymbol{K}_{ij}^9 E_j^z + \boldsymbol{M}_{ij}^3\partial_t E_j^z &= \partial_t J_i^z
\end{aligned} \tag{128}$$

Donde las matrices de rigidez son

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{K}_{ij}^1 &= \sum_{i=1}^{Ne}\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e}\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}+\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right)dV\\
\boldsymbol{K}_{ij}^2 &= \sum_{i=1}^{Ne}\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e}-\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right)dV\\
\boldsymbol{K}_{ij}^3 &= \sum_{i=1}^{Ne}\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e}-\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}\right)dV\\
\boldsymbol{K}_{ij}^4 &= \sum_{i=1}^{Ne}\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e}-\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right)dV\\
\boldsymbol{K}_{ij}^5 &= \sum_{i=1}^{Ne}+\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e}\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}+\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right)dV\\
\boldsymbol{K}_{ij}^6 &= \sum_{i=1}^{Ne}\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e}-\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}\right)dV\\
\boldsymbol{K}_{ij}^7 &= \sum_{i=1}^{Ne}\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e}-\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right)dV\\
\boldsymbol{K}_{ij}^8 &= \sum_{i=1}^{Ne}\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e}-\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right)dV\\
\boldsymbol{K}_{ij}^9 &= \sum_{i=1}^{Ne}\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e}\mu^{-1}\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right)dV,
\end{aligned} \tag{129}$$

las matrices de masa

$$\boldsymbol{M}_{ij}^{1} = \sum_{i=1}^{Ne}\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e} \sigma_{xx}\Phi_j\Phi_i dV$$
$$\boldsymbol{M}_{ij}^{2} = \sum_{i=1}^{Ne}\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e} \sigma_{yy}\Phi_j\Phi_i dV$$
$$\boldsymbol{M}_{ij}^{3} = \sum_{i=1}^{Ne}\sum_{j=1}^{Nf}\int_{\Omega_e} \sigma_{zz}\Phi_j\Phi_i dV \tag{130}$$

y los términos de fuente

$$\boldsymbol{J}_{i}^{x} = -\sum_{i=1}^{Ne}\int_{\Omega_e} \frac{\partial J^x(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot\Phi_i dV$$
$$\boldsymbol{J}_{i}^{y} = -\sum_{i=1}^{Ne}\int_{\Omega_e} \frac{\partial J^y(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot\Phi_i dV$$
$$\boldsymbol{J}_{i}^{z} = -\sum_{i=1}^{Ne}\int_{\Omega_e} \frac{\partial J^z(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot\Phi_i dV. \tag{131}$$