

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por la SECIHTI (Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE © 2025, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Doctorado en Ciencias en Oceanografía Física

Parametrización de la dispersión turbulenta en remolinos por métodos estocásticos

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Jesús Ocampo Jaimes

Ensenada, Baja California, México

2025

Tesis defendida por

Jesús Ocampo Jaimes

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Zavala Sansón

Codirector de tesis

Dr. Federico Graef Ziehl

Codirector de tesis

Dra. Paula Pérez Brunius

Dr. Enric Pallàs Sanz

Dr. Francisco Javier Alfredo Berón Vera



Dra. María Tereza Cavazos Pérez
Coordinadora del Posgrado en Oceanografía Física

Dra. Ana Denise Re Araujo
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Jesús Ocampo Jaimes como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Oceanografía Física.

Parametrización de la dispersión turbulenta en remolinos por métodos estocásticos

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Zavala Sansón

Codirector de tesis

Dr. Federico Graef Ziehl

Codirector de tesis

En esta tesis se estudia la dispersión de partículas dentro de remolinos monopoles ciclónicos y anticiclónicos utilizando un modelo estocástico Lagrangiano para representar la difusión turbulenta y, en general, los movimientos de pequeña escala. Los resultados se presentan en dos partes independientes: la primera se enfoca en el estudio de la dispersión de partículas dentro de un vórtice teórico idealizado que decae debido a los efectos de la viscosidad lateral (vórtice de Oseen) y la fricción del fondo, asociada a la capa límite de Ekman. El sistema vortical se compone de un campo de velocidad tridimensional, donde la componente azimutal domina sobre las componentes radial y vertical, manteniendo una estructura circular. Este modelo analítico permite examinar por separado los efectos de la fricción. Los experimentos de dispersión horizontal muestran que la viscosidad lateral retrasa la redistribución angular de una carga puntual de partículas, mientras que la fricción del fondo genera movimientos radiales, induciendo advección hacia afuera en ciclones y hacia adentro en anticiclones. La intensidad de ambos efectos friccionales ralentiza la expulsión o retención de partículas. En cuanto a la dispersión vertical, los ciclones elevan partículas en una fracción sustancial de la columna del fluido, mientras que los anticiclones las hunden. Se demuestra que la distribución vertical de partículas es significativamente afectada por la intensidad de los mecanismos de decaimiento. En la segunda parte del trabajo, se aborda el problema de la dispersión horizontal de partículas dentro de dos remolinos oceánicos de mesoescala del Golfo de México: el anticiclón Kraken y el ciclón de Campeche. Se consideran tanto el balance geostrofico como el ciclogeostrofico (o viento gradiente), utilizando datos de altimetría satelital y, en menor medida, de boyas a la deriva. Los resultados muestran que la corrección ciclogeostrofica, que intensifica los anticiclones y debilita los ciclones geostroficos, provoca que una carga puntual de partículas rote más rápido en anticiclones y más lento en ciclones. Esto reduce la dispersión en el primer caso y la incrementa en el segundo. Es decir, el balance geostrofico tiende a sobrestimar la dispersión en anticiclones y a subestimarla en ciclones. Finalmente, la comparación de trayectorias de boyas en el Kraken con trayectorias sintéticas sugiere que el balance ciclogeostrofico es una mejor representación de la velocidad real en las regiones periféricas o intensas del anticiclón.

Palabras clave: Dispersión de partículas, Vortices Monopoles, Bombeo de Ekman, Viento Gradiente, Balance Ciclogeostrofico

Abstract of the thesis presented by Jesús Ocampo Jaimes as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Physical Oceanography.

Parameterization of turbulent dispersion in vortices by stochastic methods

Abstract approved by:

Dr. Luis Zavala Sansón

Thesis Co-Director

Dr. Federico Graef Ziehl

Thesis Co-Director

This thesis studies the particle dispersion within monopolar cyclonic and anticyclonic vortices using a stochastic Lagrangian model to represent turbulent diffusion and, more broadly, small-scale motions. The findings are divided into two independent parts. The first part examines particle dispersion within a theoretical vortex model experiencing decay due to lateral viscosity (Oseen vortex) and bottom friction related to the Ekman bottom boundary layer. The vortex model comprises the three-dimensional velocity field, where the azimuthal component is much larger than the radial and vertical components, so the structure remains circular. The analytical model allows the examination of frictional effects separately. The experiments on horizontal dispersion indicate that lateral viscosity delays the angular spreading of a point charge of particles. Bottom friction, on the other hand, generates radial motions, thus inducing outward advection in cyclones and inward advection in anticyclones. The intensity of lateral and bottom friction slows down the expulsion or retention of particles. Regarding vertical dispersion, cyclonic vortices can lift particles by a substantial fraction of the fluid column, while anticyclones sink particles as in a bath-tube vortex. It is shown that the vertical distributions of the particles are significantly affected by the strength of the decaying mechanisms. The second part of the study focuses on the horizontal spreading of particles in two mesoscale oceanic vortices in the Gulf of Mexico: the anticyclone known as Kraken and the Campeche cyclone. Both geostrophic and cyclogeostrophic (gradient wind) balances are considered using satellite altimetry data and, to a lesser extent, drifting buoy data. The findings indicate that the cyclostrophic correction, which intensifies anticyclones and diminishes cyclones compared to the geostrophic balance, leads to a more rapid rotation of a point charge of particles in anticyclones and a slower rotation in cyclones. Consequently, dispersion decreases in anticyclones and increases in cyclones. That is, the geostrophic approximation tends to overestimate dispersion within anticyclones and underestimate it within cyclones. Finally, a comparison between buoy trajectories and synthetic particle paths in Kraken shows that the cyclogeostrophic balance more accurately captures the total velocity, particularly in the periphery or high-velocity regions of the anticyclonic vortex.

Keywords: Particle dispersion, Monopolar Vortices, Ekman Pumping, Gradient Wind, Cyclogeostrophic Balance

Dedicatoria

Al perro callejero, un reflejo de nuestra sociedad.

Agradecimientos

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), así como al departamento de Oceanografía Física del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE) por el soporte económico.

Este trabajo no habría sido posible sin el apoyo incondicional, la paciencia, la orientación personal y profesional, así como la guía en la conceptualización del problema de estudio por parte del profesor Federico Graef y del profesor Luis Zavala Sansón. También agradezco a mis sinodales, Paula Pérez Brunios, Enric Pallàs Sans y Javier Berón Vera por su ayuda en el análisis de los remolinos en el Golfo de México. Agradezco de manera especial a mis compas Javier Rodríguez Outerelo y Giovanni Durante Barajas por su ayuda fundamental en la parte operativa del proyecto, y a María Fernanda Amador por su ayuda en los esquemas. Finalmente, agradezco a Giovanna Serafín por su acompañamiento y la ayuda en la redacción de esta tesis.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	xii
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Motivación y antecedentes	2
1.2. Estructura del escrito	4
1.3. Objetivos	5
1.3.1. Objetivo general	5
1.3.2. Objetivos específicos	5
Capítulo 2. Dispersión Lagrangiana horizontal y vertical en vórtices ciclónicos y anticiclónicos en decaimiento por fricción lateral y del fondo.	
2.1. Teoría y métodos	6
2.1.1. Modelo aleatorio para los vórtices idealizados	6
2.1.2. Movimientos radiales y verticales en remolinos circulares	8
2.1.3. Movimientos azimutales: vórtice de Oseen	10
2.1.4. Estadísticas Lagrangianas	14
2.1.5. Diseño de los experimentos y parámetros del flujo	15
2.2. Dispersión horizontal	17
2.2.1. Advección angular	17
2.2.2. Advección angular y radial	20
2.2.2.1. Sólo fricción de fondo: $E \neq 0, Re \rightarrow \infty$	20
2.2.2.2. Fricción de fondo y lateral: $E \neq 0, Re < \infty$	22
2.3. Dispersión vertical	24
2.3.1. Distribución vertical en ciclones y anticiclones	24
2.3.2. Dispersión absoluta vertical	28
2.4. Discusión y conclusiones	30
Capítulo 3. Dispersión de partículas en remolinos oceánicos en balance ciclogeográfico	
3.1. Datos	33
3.2. Balance ciclogeográfico/viento gradiente	35
3.2.1. Método de detección de remolinos	37
3.2.2. Campos de velocidad	39
3.3. Dispersión de partículas en el Kraken	41
3.3.1. Dispersión horizontal	41
3.4. Dispersión de partículas en el giro de Campeche	45
3.5. Comparación entre trayectorias sintéticas y boyas en el Kraken	50

3.6.	Discusión	54
3.6.1.	Sobre la dispersión de partículas en el Kraken	54
3.6.2.	Sobre la dispersión de partículas en el ciclón de Campeche	56
Capítulo 4.	Conclusiones	
4.1.	Conclusiones sobre los remolinos idealizados	57
4.2.	Conclusiones sobre los remolinos oceánicos	58
4.3.	Trabajo futuro	59
4.3.1.	Sobre los remolinos idealizados	59
4.3.2.	Sobre los remolinos oceánicos	59
Literatura citada	60
Anexos	66

Lista de figuras

Figura	Página
1. Representación esquemática del remolino en un sistema en rotación para (a) ciclones y (b) anticiclones con velocidad (u_r, u_θ, u_z) y escala vertical H en el hemisferio norte, $f > 0$. La región delgada en la parte inferior representa la capa de Ekman de fondo.	10
2. (a)-(b) Perfiles de velocidad azimutal (19) para diferentes números de Ekman y Reynolds (ver texto). (c)-(d) Perfiles de vorticidad relativa (20) asociados a los perfiles de velocidad. El tamaño y la intensidad del vórtice (R_{max}, Γ) , el parámetro de Coriolis f y los coeficientes viscosos turbulentos (contenidos en Re y E) están descritos en la subsección 2.1.5. Los perfiles en decaimiento son a $t = 45$ días.	13
3. Propagación de una carga puntual de 2500 partículas a diferentes tiempos en un monopolo de Oseen ciclónico ($\Gamma > 0$). Paneles de la izquierda: vórtice no viscoso, $Re \rightarrow \infty$ (puntos grises). Paneles de la derecha: $Re = 1310$ (puntos naranjas). La carga puntual inicia en $r_0 = R_{max}$, (punto negro). El círculo discontinuo en todos los paneles tiene un radio R_{max} , y el círculo continuo en los paneles de la derecha representa el radio de máxima velocidad en expansión debido a la viscosidad lateral.	19
4. (a) Evolución temporal de la dispersión respecto al centro de masa en vórtices de Oseen con diferentes números de Reynolds. La posición inicial de la carga puntual de las partículas es $r_0 = (R_{max}, R_{max})/\sqrt{2}$ (como en la Figura 3. La curva gris corresponde al vórtice no viscoso ($Re \rightarrow \infty$). Ajustes en potencias de $t^{2.1}$ y $t^{2.5}$ en los tiempos iniciales para $Re \approx 1310$ (curva verde) y para $Re \rightarrow \infty$ (curva turquesa) respectivamente. La recta discontinua en los tiempos posteriores corresponde a la dispersión estándar (29). (c) Razón entre las curvas de dispersión para diferentes Re y el caso no viscoso ($Re \rightarrow \infty$).	20
5. Evolución temporal de la dispersión respecto al centro de masa, (a) ciclones ($\Gamma > 0$) y (b) anticiclones ($\Gamma < 0$) para diferentes valores del número de Ekman (con $Re \rightarrow \infty$). La posición inicial de la carga puntual de las partículas es $r_0 = (R_{max}, R_{max})/\sqrt{2}$. Las curvas grises corresponden al vórtice no viscoso ($E = 0, Re \rightarrow \infty$). (c) Posición radial promedio del conjunto de partículas para cada número de Ekman (las curvas verdes son para $\Gamma > 0$ y las magenta para $\Gamma < 0$); (d) desviación estándar en la dirección radial para cada número de Ekman.	21
6. Evolución temporal de la dispersión relativa respecto al centro de masa para (a) ciclones ($\Gamma > 0$) y (b) anticiclones ($\Gamma < 0$) con diferentes números de Reynolds (y $E = 10^{-5}$). La posición inicial de la carga puntual de las partículas es $r_0 = (R_{max}, R_{max})/\sqrt{2}$. Las curvas grises corresponden al vórtice no viscoso ($E = 0, Re \rightarrow \infty$). (c) Posición radial promedio del conjunto de partículas para cada número de Reynolds (las curvas verdes son para $\Gamma > 0$ y las magenta para $\Gamma < 0$). (d) Desviación estándar en la dirección radial para cada número de Reynolds.	23
7. Posición vertical y horizontal de 5000 partículas en vórtices ciclónicos a $t/T = 180$. (a) Sólo con viscosidad del fondo (puntos azules), y (b) con viscosidad del fondo más viscosidad lateral (puntos rojos). Los trazadores parten del fondo distribuidas aleatoriamente en una cama circular con radio $2.5R_{max}$. (c)-(d) Distribución de partículas en la dirección z de las simulaciones de los paneles (a)-(b). Las barras tienen un ancho constante de $0.015H$	25

8. (a) Perfiles de vorticidad relativa de los remolinos utilizados en los experimentos de la Figura 7, a $t/T = 15$ (líneas continuas) y $t/T = 30$ (líneas discontinuas). Las líneas negras verticales denotan el radio de intersección R_i . (b) Evolución temporal de R_i normalizada con la escala radial inicial R 26
9. Distribución regional de las simulaciones de la Figura 7 (el código de colores es el mismo). (a)-(b) $r < R_i$ y (c)-(d) $r > R_i$ 27
10. Posición vertical y horizontal final de 5000 partículas en vórtices anticiclónicos a $t/T = 180$. (a) Solo con viscosidad del fondo (puntos azules), y (b) con viscosidad en el fondo más viscosidad lateral (puntos rojos). Los trazadores parten de $z_0 = H/4$ distribuidos aleatoriamente en una cama circular con radio $2.5R_{max}$. (c)-(d) Distribución de partículas en la dirección z de las simulaciones de los paneles (a)-(b). Las barras tienen un ancho constante de $0.015H$ 28
11. Raíz cuadrada de la dispersión absoluta en la dirección z de una carga puntual de 2500 partículas en ciclones (paneles superiores) y anticiclones (paneles inferiores). Las partículas parten de $z_0 = H/4$ desde distintas posiciones radiales: a $r_0 = R_{max}/2$ en los paneles (a) y (d); a $r_0 = R_{max}$ en los paneles (b) y (e); y a $r_0 = 3R_{max}/2$ en los paneles (c) y (f). Las curvas azules corresponden a vórtices que decaen sólo por efectos Ekman, y las rojas por efectos Ekman y de fricción lateral. 29
12. Trayectorias (en negro) de las 8 boyas tipo *Far Horizon Drifter* desplegadas en el Kraken. Cada trazador inicia desde (finaliza en) el punto magenta (turquesa). Las fechas y posiciones de lanzamiento se encuentran detalladas en la Tabla 2. 34
13. (a) Representación de un vector de velocidad arbitrario \mathbf{V} , en coordenadas naturales \hat{t} y \hat{n} junto con las coordenadas cartesianas (x, y) . (b)-(c) Balance de fuerzas del viento gradiente en giros ciclónicos y anticiclónicos regulares en el hemisferio norte. Las letras A y B indican presiones altas y bajas, respectivamente. 37
14. Esquema del método de detección de remolinos *Rotationally Coherent Rings* (RCR). (a) Condición inicial al tiempo t_0 ; el color azul representa el campo de velocidad, las flechas negras al remolino a definir y los puntos negros la malla de partículas iniciales. (b) Extracción de la vorticidad (amarillo) de cada punto donde están las partículas al paso de tiempo Δt . (c) Campo LAVD (color verde) al tiempo de integración T . El color naranja representa el área del remolino, el contorno negro su frontera, el contorno blanco es la curva más convexa que envuelve al remolino y el color morado representa el área entre el contorno negro y blanco. El punto negro representa el máximo local de LAVD o centro del remolino. 39
15. Campo LAVD en el remolino Kraken obtenido con la velocidad (a) geostrófica, y (b) ciclogeostrófica. Los contornos negros son las curvas externas más convexas que rodean al Kraken y el punto negro el máximo local de LAVD o centro del remolino. 40
16. Magnitud y dirección de la velocidad (a) geostrófica (b) ciclogeostrófica para el 10 de junio de 2013. Los contornos y punto negro en el centro, calculados a partir del LAVD, delimitan al Kraken. Las flechas son vectores unitarios que indican la dirección del flujo. 40

17.	(a) Diferencia absoluta y (b) diferencia relativa entre la magnitud de las velocidades ciclogeostrófica y geostrófica del remolino Kraken. Ambos paneles corresponden al 10 de junio de 2013. Los contornos y el punto negro central, calculados a partir del LAVD, delimitan al remolino. Las flechas representan vectores unitarios que indican la dirección del flujo.	41
18.	Redistribución de 2500 partículas en distintos tiempos dentro del Kraken. (a)–(d) velocidad geostrófica (rojo) y (f)–(h) velocidad ciclogeostrófica (azul). El punto verde marca la posición inicial de las partículas, mientras que las curvas amarilla y turquesa representan la trayectoria de sus centros de masa. Los contornos y puntos negros delimitan al remolino. Las flechas indican la dirección del flujo.	43
19.	(a) Evolución temporal del centro de masa de las partículas mostradas en los experimentos de la Figura 18 calculado con las ecuaciones (21)–(22). En rojo el caso geostrófico y en azul el ciclogeostrófico. Los puntos negros indican los máximos locales de las curvas. (b) Suma acumulativa de la distancia recorrida por el centro de masa a cada paso de tiempo, ecuación (38).	44
20.	Evolución temporal de la dispersión respecto al centro de masa dentro del Kraken en balance geostrófico (rojo) y en balance ciclogeostrófico (azul). (a) $K = 22 \text{ m}^2/\text{s}$, experimentos de la Figura 18. (b) $K = 44 \text{ m}^2/\text{s}$	45
21.	Igual que la Figura 16, pero en el ciclón de Campeche.	46
22.	Igual que la Figura 17, pero en el ciclón de Campeche.	47
23.	Igual que la Figura 18, pero en el ciclón de Campeche.	48
24.	Igual que la Figura 19, pero en el ciclón de Campeche.	49
25.	Igual que la Figura 20, pero en el ciclón de Campeche.	49
26.	Trayectorias de cada una de las boyas (amarillo) del conjunto Kraken-Intenso y las de la partícula geostrófica (rojo) y ciclogeostrófica (azul) asociadas, tras 10 días de advección. Cada panel muestra el número de la boya correspondiente. Todos los trazadores parten desde el punto turquesa. El contorno y el punto verde (negro) indican la posición inicial (final) del borde y centro del remolino geostrófico, respectivamente	50
27.	Igual que la Figura 26, pero para cada boya del conjunto Kraken-Débil.	51
28.	Suma acumulativa de la distancia recorrida, ecuación 38, de cada una de las boyas (amarillo) del conjunto Kraken-Intenso y de la partícula geostrófica (rojo) y ciclogeostrófica (azul) asociada.	52
29.	Igual que la Figura 28 pero para las boyas del conjunto Kraken-Débil.	53
30.	Promedio de la distancia acumulada recorrida por las boyas (amarillo), y por las partículas geostróficas (rojo) y ciclogeostróficas (azul) del conjunto (a) Kraken-Intenso (Figura 28) y (b) Kraken-Débil (Figura 29). Las líneas punteada, continua y discontinua corresponden a difusividades de $K = 0, 22$ y $44 \text{ m}^2/\text{s}$, respectivamente.	54

31. (a)-(b) Perfiles de velocidad azimutal, ecuación (43), de ciclones y anticiclones en decaimiento por fricción de Ekman con $E = 10^{-5}$, no lineales (en café), lineales (en azul) y vórtice estacionario (en gris). (c)-(d) Perfiles de vorticidad relativa, ecuación (45). Los perfiles corresponden a $t = 45$ días. 67
32. Evolución temporal de la dispersión respecto al centro de masa. Las curvas cafés corresponden a remolinos en decaimiento por fricción de fondo más efectos no lineales, ecuación (43) y las curvas azules a remolinos sin efectos no lineales, ecuación (16). Las curvas grises corresponden al remolino estacionario, ecuación (16). (a) ciclones ($\Gamma > 0$) y (b) anticiclones ($\Gamma < 0$). La posición inicial de la carga puntual de las partículas es $r_0 = (R_{max} \cdot R_{max} / \sqrt{2})$. En este caso $E = 10^{-5}$ y $R_o = 0.08$ 69
33. Posición vertical y horizontal final de 5000 partículas en vórtices ciclónicos en decaimiento por pura fricción del fondo a $t/T = 180$. (a) Sin efectos no lineales (puntos azules), y (b) con efectos no lineales (puntos café). Los trazadores parten del fondo distribuido aleatoriamente en una cama circular de radio $2.5R_{max}$. (c)-(d) Distribución de partículas en la dirección z de las simulaciones de los paneles (a)-(b). Las barras tienen un ancho constante de $0.015H$ 70
34. Posición vertical y horizontal final de 5000 partículas en vórtices anticiclónicos en decaimiento por pura fricción de fondo a $t/T = 180$. (a) Sin efectos no lineales (puntos azules), y (b) con efectos no lineales (puntos café). Los trazadores parten de $z_0 = H/4$ distribuidos aleatoriamente en una cama circular con radio $2.5R_{max}$. (c)-(d) Distribución de partículas en la dirección z de las simulaciones de los paneles (a)-(b). Las barras tienen un ancho constante de $0.015H$ 71
35. Raíz cuadrada de la dispersión absoluta en la dirección z de una carga puntual de 2500 partículas en ciclones (paneles superiores) y anticiclones (paneles inferiores). Las partículas parten de $z_0 = H/4$ desde distintas posiciones radiales: a $r_0 = R_{max}/2$ en los paneles (a) y (d); a $r_0 = R_{max}$ en los paneles (b) y (e); y a $r_0 = 3R_{max}/2$ en los paneles (c) y (f). Las curvas azules corresponden a vórtices lineales, mientras que las cafés a remolinos no lineales. Ambos tipos de vórtices decaen solo por efectos de Ekman de fondo. 72
36. Redistribución de partículas (azul) para diferentes tiempos en el remolino de Kirchhoff (cuyo campo de velocidad se indica con flechas negras y su magnitud en superficies de color). El círculo gris representa la posición inicial del ensamble de partículas y la curva azul la trayectoria del centro de masa. 74
37. Evolución temporal de la dispersión respecto al centro de masa en el experimento de la Figura 36. El periodo alrededor del remolino es de poco más de 6 días. 75

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Configuración de las velocidades deterministas y estocásticas utilizadas en los experimentos de dispersión. El vórtice decae debido a la fricción del fondo cuando $E \neq 0$ y a la fricción lateral cuando $Re < \infty$	15
2. Información sobre el lanzamiento de las boyas en el anticiclón Kraken en el Golfo de México.	34

Capítulo 1. Introducción

En el océano interactúan múltiples escalas espaciales y temporales, que involucran fenómenos que van desde tamaños moleculares hasta aquellos de decenas, cientos o incluso miles de kilómetros, en los que la rotación de la Tierra es importante. A estos últimos se les clasifica como fenómenos de gran escala (Pedlosky, 2013, capítulo 1, página 2). El efecto de la rotación de la Tierra se cuantifica mediante el número de Rossby, el cual compara la aceleración relativa del fluido con la aceleración de Coriolis. Cuando el número de Rossby es mucho menor que 1, se puede considerar que el sistema se encuentra en balance geostrófico en la horizontal, debido al equilibrio entre el gradiente horizontal de presión y la aceleración de Coriolis. La velocidad geostrófica tiene divergencia horizontal nula y, por lo tanto, el movimiento es predominantemente horizontal (Vallis, 2017, capítulos 3 y 5).

Entre las estructuras más ubicuas que son afectadas por la rotación de la Tierra se encuentran los remolinos de mesoescala, con escalas horizontales típicas de 100 km y tiempos de vida de semanas o incluso meses. Estos remolinos poseen una capacidad de transporte comparable a la de la circulación termohalina (Zhang et al., 2014), facilitando la distribución de propiedades físicas y biogeoquímicas como el oxígeno disuelto (Muñoz, 2021; Quintanilla et al., 2024). Dichas propiedades son esenciales para el ecosistema marino y tienen importantes implicaciones en la climatología global (Roemmich & Gilson, 2001; Rypina et al., 2012). Además, estos remolinos son cruciales para comprender la dispersión de contaminantes como el petróleo o los microplásticos (Brach et al., 2018), así como la distribución del sargazo (Andrade-Canto et al., 2022).

Aunque los movimientos oceánicos verticales son varios órdenes de magnitud más pequeños que los horizontales, son la principal causa de la transferencia de materia a lo largo de la columna de agua (Klein & Lapeyre, 2009). Por ejemplo, los movimientos verticales en la capa superior del océano modulan la abundancia de nutrientes que favorecen el crecimiento del plancton, el cual representa aproximadamente la mitad de la producción primaria oceánica (Lehahn et al., 2017). En este contexto, la suspensión de materia dentro de los remolinos de mesoescala, impulsada por diversos procesos, contribuye tanto a la actividad biológica como a los procesos de transporte de sedimentos (Siegel et al., 2011; González-Vera et al., 2020).

Existen dos enfoques principales para analizar la distribución de materia en remolinos o flujos en general: el Euleriano y el Lagrangiano. El primero describe la evolución temporal de la concentración de una sustancia en el flujo por medio de la ecuación de advección-difusión (Martin et al., 2001). El segundo se basa en el análisis estadístico de trayectorias individuales, como las de boyas a la deriva (Zavala Sansón

et al., 2018), o de partículas artificiales impulsadas por campos de velocidad oceánicos o analíticos (Griffa, 1996; Zambianchi & Griffa, 1994; Graef et al., 2020; Barrientos Valencia et al., 2024). Las partículas artificiales ofrecen la ventaja de ser prácticamente ilimitadas y de generar estadísticas más robustas. Sin embargo, cuando la resolución del campo de velocidad es baja, se pierde información sobre movimientos turbulentos o de pequeña escala. Una alternativa para abordar esta limitación es el uso de modelos estocásticos Lagrangianos (Sawford, 1991), los cuales han demostrado ser efectivos para describir la dispersión de partículas en el océano y en flujos turbulentos (Pasquero et al., 2001; Essink et al., 2019).

En este trabajo abordamos el análisis de la dispersión de partículas en remolinos, utilizando modelos estocásticos Lagrangianos en dos problemas independientes. En primer lugar, estudiamos la dispersión horizontal y vertical en monopolos idealizados (analíticos) que decaen por efectos viscosos. El segundo problema está enfocado en cuantificar la dispersión horizontal de partículas en remolinos oceánicos superficiales. Para ello utilizamos campos de velocidad geostroficados obtenidos a partir de altimetría satelital y, en menor medida, boyas a la deriva.

1.1. Motivación y antecedentes

Los remolinos de mesoescala retienen, distribuyen y transportan materia en el océano gracias a sus fronteras casi impermeables (Provenzale, 1999) y a mecanismos físicos de atrapamiento (*eddy trapping*), que ocurre cuando las velocidades orbitales superan la velocidad de traslación (Flierl, 1981; Damien et al., 2021). Las velocidades orbitales también desempeñan un papel clave en la distribución horizontal de la clorofila en escalas de tiempo superiores a tres semanas (Chelton et al., 2011). Además, el corte de velocidad, en combinación con la difusión turbulenta asociada a movimientos de submesoescala, influyen en la dinámica interna de la materia dentro de los remolinos (Martin et al., 2001; Ocampo Jaimes et al., 2022).

El sentido de circulación también es importante en la distribución horizontal de la materia dentro de los remolinos oceánicos de mesoescala. De acuerdo con Cetina-Heredia et al. (2019), los vórtices anticiclónicos son más efectivos en retener agua en la zona de rotación de cuerpo rígido. Algo similar se observa en la concentración de microplásticos, la cual es más alta en vórtices anticiclónicos que en ciclónicos (Brach et al., 2018). Además, imágenes satelitales muestran que los remolinos ciclónicos están asociados a anomalías positivas de clorofila en el centro, mientras que los anticiclones las concentran en la periferia.

(Wang et al., 2018). Por otro lado, los anticiclones (ciclones) actúan como atractores (repulsores) de partículas con flotabilidad y tamaño finito (Beron-Vera et al., 2015).

El transporte vertical de materia dentro de los remolinos de mesoescala puede ser impulsado por movimientos causados por la evolución temporal y el cambio espacial de la densidad, procesos de submesoescala o por las capas límite de superficie y fondo (Siegel et al., 2011). Estas capas, conocidas como capas de Ekman (Vallis, 2017), se forman debido al rozamiento del viento con la superficie marina y a los efectos de fricción en el fondo del océano (Salon et al., 2008). La convergencia y divergencia en estas capas generan el bombeo de Ekman, que es la velocidad vertical que inyecta o extrae fluido hacia o desde el interior del océano.

Los monopolos oceánicos pueden debilitarse o intensificarse a causa de las capas de Ekman (Pedlosky, 2013). En el límite inferior, la capa de Ekman de fondo genera surgencias en los ciclones y hundimiento en los anticiclones, lo cual hace decaer a ambos tipos de vórtices (Cushman-Roisin & Malačič, 1997). Además, la tasa de decaimiento es diferente cuando se consideran los términos no lineales asociados al bombeo en las ecuaciones de movimiento (Kloosterziel & van Heijst, 1992; Zavala Sansón & van Heijst, 2000; Zavala Sansón, 2001). En la capa superficial, el decaimiento o intensificación de los remolinos dependerá de la forma de la parametrización del viento (Zavala Sansón et al., 2023).

En flujos con curvatura, los términos no lineales están asociados a la aceleración centrífuga. En ciencias atmosféricas, el equilibrio entre el gradiente de presión, la fuerza de Coriolis y la fuerza centrífuga se conoce como viento gradiente, mientras que en flujos oceánicos suele denominarse como balance ciclogeostrófico (Ioannou et al., 2019). En giros monopulares, la aceleración centrífuga siempre apunta radialmente hacia afuera, lo que intensifica a los anticiclones y debilita a los ciclones (Penven et al., 2014; Hiron et al., 2020). Es decir, el balance geostrófico subestima la intensidad de los anticiclones y la sobrestima en los ciclones. Mediciones Lagrangianas con boyas a la deriva resaltan el papel de los efectos no lineales y ageostróficos en este tipo de estructuras (Larrañaga et al., 2023). Estos hallazgos subrayan la importancia de los términos no lineales en la dispersión de materia dentro de los remolinos oceánicos.

La dispersión horizontal y vertical en vórtices de mesoescala también puede verse afectada por mecanismos dispersivos debido a características de submesoescala (Essink et al., 2019) y, en general, a la turbulencia inherente al océano. La submesoescala va desde unas pocas decenas de metros hasta unos pocos kilómetros en las direcciones horizontales y es de unos pocos metros en la vertical. Estos movimientos son responsables de una dispersión turbulenta errática, que puede modificar la distribución generada por la circulación oceánica de mayor escala (Richards et al., 1995). Estudios previos han discutido el

papel de los movimientos de submesoescala en la dispersión horizontal (Martin et al., 2001) y vertical (Mahadevan et al., 2008) en vórtices oceánicos superficiales.

Los efectos turbulentos de menor escala pueden ser incluidos mediante parametrizaciones fundamentadas en procesos Markovianos, conocidos como modelos estocásticos Lagrangianos (Sawford, 1991). Esta clase de modelos describe el movimiento de ensambles de partículas lanzadas independientemente en diferentes realizaciones, advectadas por un flujo medio y perturbadas aleatoriamente en su posición, velocidad o aceleración. El modelo de Markov 1, en el cual la variable aleatoria es la posición, corresponde al problema de la caminata aleatoria. En el modelo de Markov 2, la variable aleatoria es la velocidad (LaCasce, 2008).

Los modelos estocásticos Lagrangianos se han utilizado en el estudio de la dispersión de trazadores oceánicos en flujos de mesoescala (Griffa, 1996; Essink et al., 2019) y pueden reproducir la dispersión de flujos turbulentos (Pasquero et al., 2001). Otras aplicaciones incluyen el transporte horizontal y vertical oceánico (Visser, 1997; Marinone et al., 2008). Investigaciones previas han utilizado modelos estocásticos para analizar la dispersión de partículas en vórtices idealizados sin viscosidad (Graef et al., 2020; Ocampo Jaimes et al., 2022) y giros oceánicos de gran escala (Barrientos Valencia et al., 2024). Estos trabajos cuantificaron la capacidad de distribuir y transportar partículas, destacando el papel del corte angular de la velocidad y la difusión turbulenta en los patrones de las estadísticas Lagrangianas, es decir, los momentos estadísticos basados en las trayectorias de un gran número de trazadores (LaCasce, 2008).

Las estadísticas Lagrangianas se pueden clasificar en aquellas que describen el comportamiento de partículas individuales como la dispersión absoluta, o las que se calculan a partir de pares de partículas como la dispersión relativa (Flores Ramírez & Zavala Sansón, 2019). La dispersión absoluta mide la separación cuadrática media de las partículas respecto a su posición inicial en función del tiempo. Por otro lado, la dispersión relativa mide la separación cuadrática media entre pares de partículas conforme pasa el tiempo, y por lo tanto describe la rapidez con la que se dispersa una nube de trazadores. Otras métricas pueden ser dependientes del espacio en lugar del tiempo, como los Exponentes de Lyapunov de Escala Finita (Artale et al., 1997).

1.2. Estructura del escrito

Los resultados principales de este trabajo se dividen en dos capítulos principales. En el capítulo 2, analizamos la dispersión horizontal y vertical de miles de partículas individuales en un remolino de Oseen

(una solución exacta de las ecuaciones de Navier-Stokes) sobre un sistema en rotación bajo efectos de la capa de Ekman del fondo. En este sistema, el vórtice experimenta un decaimiento lento debido a dos mecanismos distintos: la fricción lateral, característica del monopolo, y la fricción de Ekman del fondo, asociada a la rotación del sistema. En el Anexo A se cuantifican los efectos no lineales sobre la dispersión de partículas para casos con solo fricción del fondo.

En el capítulo 3, se analiza la dispersión horizontal de partículas en un anticiclón y en un ciclón de mesoescala del Golfo de México considerando que están en balance geostrófico o ciclgeostrófico. Los campos de velocidad de los vórtices provienen de datos de altura del nivel del mar obtenidos mediante altimetría satelital. Usamos la ecuación del viento gradiente para hacer la corrección ciclostrófica y así evaluar el efecto de la aceleración centrífuga en la dispersión de partículas. Además, comparamos las trayectorias de partículas advectadas por los campos de velocidad geostrófica y ciclgeostrófica con trayectorias de boyas a la deriva dentro del anticiclón.

El capítulo 4 está dedicado a las conclusiones finales y recomendaciones para trabajos futuros.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Analizar y cuantificar la dispersión turbulenta en vórtices idealizados en un sistema en rotación y en remolinos oceánicos de mesoescala por medio de métodos estocásticos Lagrangianos.

1.3.2. Objetivos específicos

- Examinar el efecto separado y combinado de la fricción de Ekman del fondo y la fricción lateral en la dispersión horizontal y vertical de partículas en un vórtice de Oseen.
- Analizar el efecto combinado de la fricción de Ekman del fondo y los términos no lineales sobre la dispersión horizontal y vertical de partículas en un vórtice monopolar no aislado.
- Caracterizar la dispersión de partículas dentro de remolinos oceánicos de mesoescala en equilibrio geostrófico y en equilibrio ciclgeostrófico.

Capítulo 2. Dispersión Lagrangiana horizontal y vertical en vórtices ciclónicos y anticiclónicos en decaimiento por fricción lateral y del fondo.

En este capítulo, analizamos la dispersión horizontal y vertical de trazadores pasivos en vórtices circulares idealizados. Nos enfocamos en investigar numéricamente la dispersión de partículas individuales debido a los movimientos del vórtice en combinación con efectos turbulentos, los cuales se parametrizan mediante un modelo estocástico. El modelo físico consiste en una capa de fluido homogénea sobre un sistema en rotación con un parámetro de Coriolis constante. Además de la rotación del sistema, el fluido gira como un vórtice circular (con un perfil teórico de velocidad angular específico) sobre un fondo plano y sin considerar efectos de la superficie libre. El vórtice se debilita lentamente por dos efectos distintos: la viscosidad turbulenta lateral y la fricción de Ekman del fondo. Para incorporar la difusión turbulenta, utilizamos un modelo estocástico en el que partículas pasivas son advectadas por el campo de velocidad del vórtice, más perturbaciones estocásticas que simulan movimientos turbulentos de pequeña escala. Usamos estadísticas Lagrangianas para cuantificar la dispersión de miles de partículas.

El objetivo de nuestra investigación es ampliar la comprensión de la dispersión horizontal y vertical en monopolos, considerando la influencia de la fricción lateral y de fondo, así como de movimientos estocásticos. Analizamos los efectos de la fricción en la evolución del remolino, ya sea de forma aislada como en conjunto, prestando atención a las diferencias entre ciclones y anticiclones.

El capítulo está dividido de la siguiente manera: la Sección 2.1 presenta el modelo estocástico y el modelo vortical, este último describe las velocidades radial y vertical inducidas por la condición de Ekman en el fondo. Los resultados se analizan en dos partes. La Sección 2.2 se enfoca en la dispersión horizontal en vórtices en decaimiento bajo la influencia de la fricción lateral y de fondo. La Sección 2.3 analiza la capacidad del vórtice para transportar partículas pasivas a lo largo de la columna de fluido y la diferencia entre ciclones y anticiclones. Finalmente, en la Sección 2.4 discutimos los resultados y presentamos las conclusiones.

2.1. Teoría y métodos

2.1.1. Modelo aleatorio para los vórtices idealizados

El modelo estocástico se basa en las ecuaciones de trayectoria de trazadores pasivos impulsados por dos velocidades, una determinista (asociada a la estructura de vórtices monoplares) y otra aleatoria (debida

a efectos de submesoescala). Las fluctuaciones aleatorias están caracterizadas por una difusividad en la dirección horizontal y otra significativamente menor en la vertical. Este enfoque asume que las escalas de la velocidad turbulenta son mucho más pequeñas que los efectos advectivos de los flujos oceánicos de mesoescala. Por ello, sus efectos dispersivos pueden representarse mediante un coeficiente de difusividad constante (Griffa, 1996). El modelo es análogo a las ecuaciones de trayectoria descritas en Graef et al. (2020) y Ocampo Jaimes et al. (2022), pero incluye la componente de velocidad vertical, además de la dependencia temporal del campo de velocidad de los remolinos. En coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , las ecuaciones diferenciales estocásticas para las trayectorias se expresan como (Chirikjian, 2009; Øksendal, 2007)

$$\left. \begin{aligned} dr &= u_r(r, t)dt + \frac{K_h}{2r}dt + u_a(t)dt, \\ d\theta &= \frac{u_\theta(r, t)}{r}dt + \frac{v_a(t)}{r}dt, \\ dz &= u_z(r, z, t)dt + w_a(t)dt, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

donde u_r , u_θ y u_z son las componentes de velocidad deterministas del vórtice circular, dt es el incremento de tiempo y (u_a, v_a) y w_a son procesos aleatorios en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, con media cero y varianza de velocidad constante σ_h^2 y σ_z^2 . Los coeficientes de difusividad horizontal y vertical son $K_h = \sigma_h^2 dt/2$ y $K_z = \sigma_z^2 dt/2$, respectivamente (Griffa, 1996).

Para distribuciones uniformes se tiene $\sigma_h^2 = \frac{2}{3}f_h^2$ y $\sigma_z^2 = \frac{1}{3}f_z^2$, donde f_h y f_z son parámetros libres con dimensiones de velocidad que controlan la intensidad de las fluctuaciones aleatorias. Así, u_a y v_a pueden tomar valores entre $f_h[-1, 1]$ y w_a entre $f_z[-1, 1]$. Utilizando $\Delta t \equiv dt$ como paso de tiempo discreto, los coeficientes horizontales y verticales son (Graef et al., 2020)

$$K_h = \frac{1}{3}f_h^2\Delta t, \quad K_z = \frac{1}{6}f_z^2\Delta t. \quad (2)$$

Consideramos valores de f_h y f_z apropiados para obtener difusividades similares a los estimados en el océano (ver sección 2.1.5). Los experimentos numéricos consisten en resolver el sistema (1) con un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden para una gran cantidad de partículas.

2.1.2. Movimientos radiales y verticales en remolinos circulares

Consideremos un vórtice circular girando sobre una superficie plana dentro de un sistema en rotación con un parámetro de Coriolis constante f , gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes con simetría axial ($\partial/\partial\theta = 0$) y bajo efectos de fricción lateral:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_\theta^2}{r} - f u_\theta &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu_h \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right], \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + f u_r &= \nu_h \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right], \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

con la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

En el sistema de ecuaciones (3), ν_h es la viscosidad horizontal (turbulenta), ρ la densidad del fluido y P la presión reducida (Kloosterziel & van Heijst, 1992). Analizamos vórtices "lentos" que permanecen aproximadamente en equilibrio hidrostático en la dirección vertical. Además, asumimos que u_r y u_θ son independientes de z (Maas, 1993).

La fricción del fondo actúa por medio de la componente vertical de velocidad u_z , la cual extrae o inyecta flujo desde y hacia la capa de Ekman. El espesor de la capa está dado por $\delta_E = (2\nu_z/f)^{1/2}$, donde ν_z es el coeficiente de viscosidad vertical dentro de la capa límite. Este coeficiente es mucho menor que su homólogo horizontal, $\nu_z \ll \nu_h$. Los efectos de rotación hacen que la capa límite sea pequeña en comparación con la profundidad total H , es decir, $\delta_E \ll H$ (Zavala Sansón & van Heijst, 2000). Adicionalmente, la capa de Ekman de fondo genera una componente de velocidad en la dirección radial u_r (Figura 1). Cabe señalar que las componentes vertical y radial son menores que la componente azimutal, lo que permite que el vórtice mantenga su forma circular mientras decae debido a los efectos de fricción lateral y de fondo. Es importante recalcar que sólo estamos interesados en el flujo dentro del vórtice cilíndrico, y no en el flujo de la capa límite de Ekman.

La expresión para u_r surge de la integración de la ecuación de continuidad (4) en la dirección z :

$$\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) H = -(u_z|_{z=H} - u_z|_{z=\delta_E}), \quad (5)$$

con $\delta_E \ll H$ en el lado derecho. Al considerar que H es constante se está suponiendo que no hay efectos de la superficie libre (Maas, 1993). Con esto la velocidad vertical en la superficie es cero, $u_z|_{z=H} = 0$, mientras que en la capa límite la velocidad está determinada por la condición de Ekman (Pedlosky, 2013):

$$u_z|_{z=\delta_E} = \frac{1}{2}\delta_E\omega, \quad (6)$$

donde ω es la componente vertical de la vorticidad relativa, definida como

$$\omega = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u_\theta. \quad (7)$$

La velocidad vertical es positiva (negativa) para los ciclones (anticiclones), como se muestra en la Figura 1.

Insertando (6) en (5), usando 7 y dividiendo entre H obtenemos

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = \frac{1}{2}E^{1/2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \right),$$

con E el número de Ekman:

$$E \equiv \frac{2\nu_z}{fH^2} = \frac{\delta_E^2}{H^2}. \quad (8)$$

Por lo tanto, los componentes de velocidad radial y azimutal son proporcionales:

$$u_r = \frac{1}{2}E^{1/2}u_\theta. \quad (9)$$

Este importante resultado fue analizado por Kloosterziel & van Heijst (1992) y Maas (1993), y aplicado por Zavala Sansón (2001).

La velocidad vertical resulta de insertar (9) en la ecuación de continuidad (4) e integrarla desde una altura arbitraria z hasta la superficie (Zavala Sansón et al., 2012), resultando en

$$u_z = -(z - H) \frac{1}{2} E^{1/2} \omega. \quad (10)$$

Como mencionamos antes, las componentes de velocidad radial y vertical (9)-(10) son más pequeñas que u_θ , $|(u_r, u_z)| \ll |u_\theta|$, ya que la raíz cuadrada del número de Ekman cumple con $E^{1/2} = \delta_E/H \ll 1$.

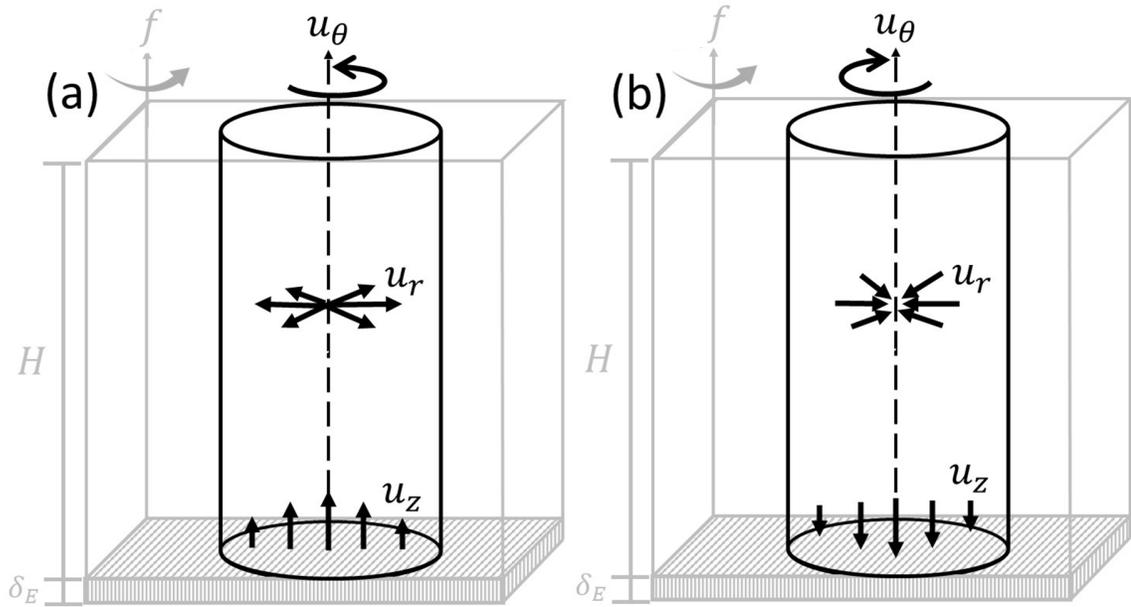


Figura 1. Representación esquemática del remolino en un sistema en rotación para (a) ciclones y (b) anticiclones con velocidad (u_r, u_θ, u_z) y escala vertical H en el hemisferio norte, $f > 0$. La región delgada en la parte inferior representa la capa de Ekman de fondo.

2.1.3. Movimientos azimutales: vórtice de Oseen

Ahora analizamos la componente de velocidad azimutal. Para ello, suponemos que el vórtice se mantiene en un equilibrio aproximadamente geostrófico en la dirección radial y que los términos no lineales en la ecuación de u_θ en (3) pueden despreciarse:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r f = \nu_h \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right]. \quad (11)$$

Sustituyendo u_r de (9) en (11), obtenemos

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{u_\theta}{T_E} = \nu_h \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \right], \quad (12)$$

donde T_E denota al periodo de Ekman tal que

$$T_E \equiv H \left(\frac{2}{\nu_z f} \right)^{1/2} = \frac{2}{f E^{1/2}}. \quad (13)$$

T_E es una escala de tiempo asociada a los efectos de fricción en el fondo. Dado que $E^{1/2} \ll 1$, T_E es considerablemente mayor que la escala del período de rotación del sistema, $2/f$.

Para definir una escala de tiempo asociada con la fricción lateral de forma equivalente que T_E , consideramos al número de Reynolds:

$$Re = \frac{|\Gamma|}{\nu_h}, \quad (14)$$

con $\Gamma \sim 2\pi R U$ la circulación (positiva o negativa), R la escala radial característica del remolino y U la de velocidad azimutal. La circulación mide la intensidad y el signo del vórtice. Usando estas escalas en (12), se puede ver que la escala de tiempo asociada a la fricción lateral es

$$T_\nu \equiv \frac{R^2}{\nu_h} = \frac{R^2}{|\Gamma|} Re. \quad (15)$$

De (13), la ausencia de efectos de Ekman en (12) ocurre cuando $\nu_z \rightarrow 0$, es decir, para $T_E \rightarrow \infty$ o $E = 0$. De manera similar, de (15), la fricción lateral desaparece cuando $\nu_h \rightarrow 0$, es decir, $T_\nu \rightarrow \infty$ o $Re \rightarrow \infty$.

En nuestro análisis, utilizamos cuatro soluciones de (12) que surgen de considerar diferentes números de Ekman y Reynolds.

(a) *Vórtice estacionario* ($E = 0$, $Re \rightarrow \infty$). En este caso, no hay efectos de fricción y la solución de (12) corresponde a un vórtice estacionario arbitrario $u_\theta(r)$. De aquí en adelante vamos a utilizar el vórtice monopolar no aislado (van Heijst & Clercx, 2009):

$$u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right], \quad (16)$$

el cual se vuelve irrotacional a grandes distancias radiales, i.e., $u_\theta \propto 1/r$ cuando $r \rightarrow \infty$. Se puede demostrar fácilmente que el radio de velocidad máxima es $R_{max} \approx 1.12R$. Utilizamos este flujo como la condición inicial en las soluciones que analizamos a continuación.

(b) *Vórtice en decaimiento debido a la fricción lateral, ($E = 0$, Re finito).* La solución de (12) que satisface (16) en $t = 0$ es el vórtice de Oseen:

$$u_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2 + 4\nu_h t}\right) \right]. \quad (17)$$

Este remolino decae mientras aumenta lentamente su radio de máxima velocidad (Kloosterziel & van Heijst, 1992; Zavala Sansón & van Heijst, 2000; Drazin & Riley, 2006).

(c) *Vórtice en decaimiento debido a la fricción de Ekman, (E finito, $Re \rightarrow \infty$).* La solución de (12) en este límite es

$$u_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right] \exp(-t/T_E). \quad (18)$$

Este monopolo decae exponencialmente mientras que el radio de velocidad máxima permanece constante (Maas, 1993; Zavala Sansón, 2001).

(d) *Vórtice en decaimiento debido a la fricción lateral y del fondo, (E finito, Re finito).* La solución completa de (12) resulta de una nueva variable $u_\theta(r, t) = u'_\theta(r, t) \exp(-t/T_E)$; con esto (12) se transforma en una ecuación de difusión para u'_θ (Kloosterziel & van Heijst, 1992). La solución completa es

$$u_\theta(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2 + 4\nu_h t}\right) \right] \exp\left(-\frac{t}{T_E}\right). \quad (19)$$

En este caso el vórtice decae a causa de ambos efectos de fricción, mientras que el radio de velocidad máxima aumenta debido a la viscosidad lateral.

La vorticidad relativa de la solución completa es

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{\pi R^2 + 4\pi\nu_h t} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2 + 4\nu_h t}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_E}\right). \quad (20)$$

Evidentemente, las soluciones (16)-(18) son casos especiales de (19).

La Figura 2 muestra los perfiles de velocidad azimuthal (paneles a,b) y vorticidad relativa (paneles c,d) de los cuatro casos de interés:

- Los perfiles grises corresponden al vórtice estacionario (16).
- Los perfiles naranjas corresponden al remolino de Oseen y decaen por fricción lateral (17).
- Los perfiles azules decaen sólo por fricción de Ekman del fondo (18).
- Los perfiles rojos decaen por fricción lateral y de Ekman del fondo (19).

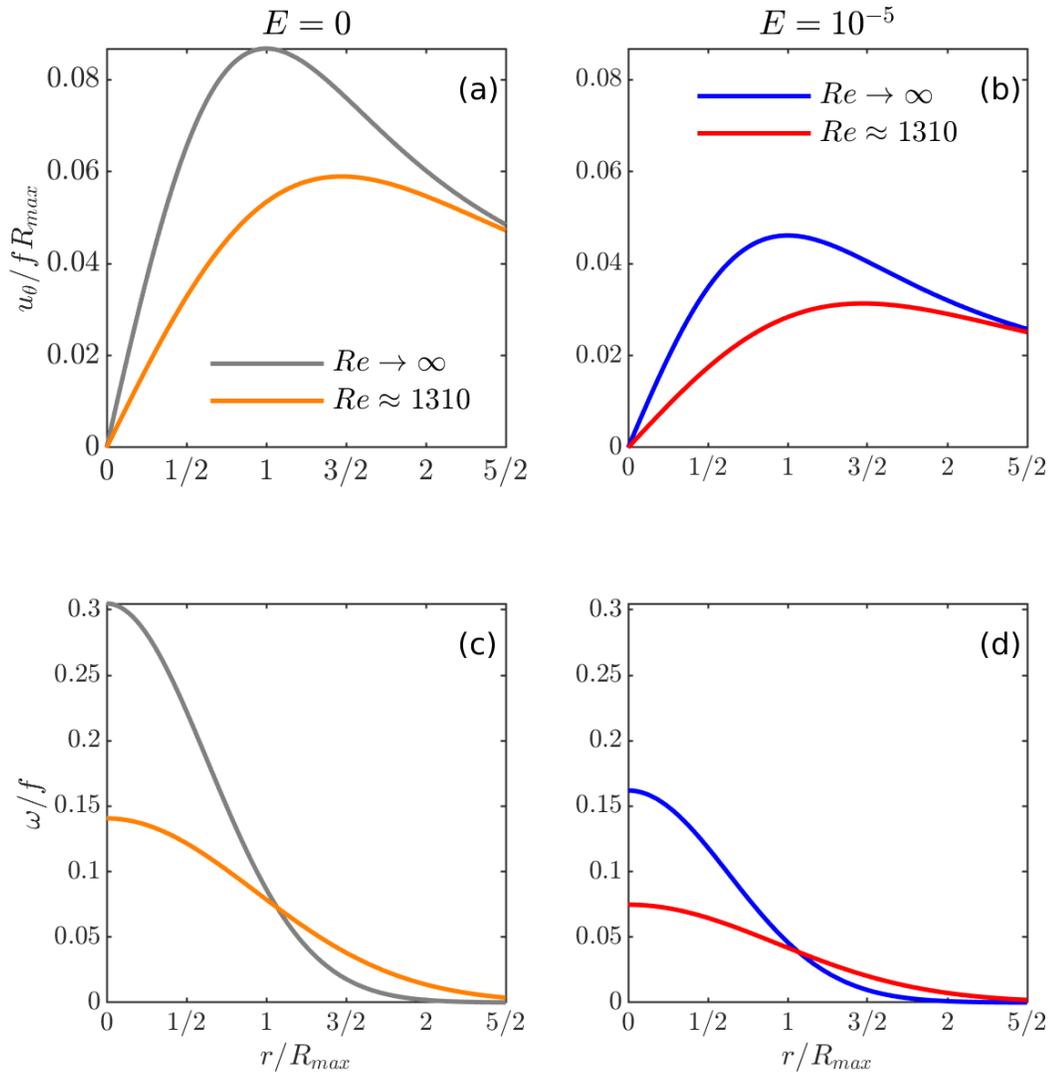


Figura 2. (a)-(b) Perfiles de velocidad azimuthal (19) para diferentes números de Ekman y Reynolds (ver texto). (c)-(d) Perfiles de vorticidad relativa (20) asociados a los perfiles de velocidad. El tamaño y la intensidad del vórtice (R_{max}, Γ), el parámetro de Coriolis f y los coeficientes viscosos turbulentos (contenidos en Re y E) están descritos en la subsección 2.1.5. Los perfiles en decaimiento son a $t = 45$ días.

2.1.4. Estadísticas Lagrangianas

Para medir la dispersión horizontal de las partículas, calculamos los desplazamientos cuadráticos medios desde la posición promedio o centro de masa en función del tiempo. Las componentes cartesianas (x, y) del centro de masa respecto a la posición inicial de N partículas son (LaCasce, 2008; Zavala Sansón et al., 2018)

$$\langle X(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_k [x^k(t) - x^k(t_0)], \quad (21)$$

$$\langle Y(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_k [y^k(t) - y^k(t_0)], \quad (22)$$

donde x^k e y^k son las coordenadas de la partícula k , t_0 el tiempo de liberación y $\langle \rangle$ indica el promedio sobre el ensamble. Con esto, las componentes de la dispersión respecto al centro de masa son

$$\langle M_x^2(t) \rangle = \frac{1}{N-1} \sum_k [x^k(t) - x^k(t_0) - \langle X(t) \rangle]^2, \quad (23)$$

$$\langle M_y^2(t) \rangle = \frac{1}{N-1} \sum_k [y^k(t) - y^k(t_0) - \langle Y(t) \rangle]^2, \quad (24)$$

y la dispersión horizontal total es

$$\langle M^2(t) \rangle = \langle M_x^2 \rangle + \langle M_y^2 \rangle. \quad (25)$$

En este caso usamos fuentes puntuales de partículas, por lo que las posiciones iniciales $x^k(t_0), y^k(t_0)$ son las mismas: todas las partículas comienzan en una posición radial dada. Así, $\langle M^2(t) \rangle$ mide la dispersión de la nube de partículas a medida que transcurre el tiempo.

En algunos experimentos, calculamos la dispersión radial a partir de la posición radial promedio

$$\mu_r(t) = \frac{1}{N} \sum_k r^k(t) \quad (26)$$

y la desviación estándar correspondiente

$$\sigma_r(t) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_k [r^k(t) - \mu_r(t)]^2}. \quad (27)$$

Por último, utilizamos la dispersión absoluta en la vertical. Esta métrica cuantifica la separación cuadrática promedio de las partículas desde su posición inicial. En la dirección z , la dispersión absoluta es

$$\langle A_z^2(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_k [z^k(t) - z^k(t_0)]^2. \quad (28)$$

En estos casos, examinaremos cargas de partículas puntuales que al tiempo inicial parten de diferentes posiciones radiales a una profundidad dada. Para tiempos posteriores, $\langle A_z^2(t) \rangle$ mide el hundimiento o ascenso promedio de las partículas desde el nivel inicial.

2.1.5. Diseño de los experimentos y parámetros del flujo

Los experimentos están diseñados para investigar de manera independiente la dispersión horizontal y vertical en remolinos en decaimiento. En la sección 2.2, analizamos la dispersión horizontal atribuida a las componentes azimutales y radiales de vórtices lineales, incluyendo fluctuaciones turbulentas horizontales. Posteriormente, la sección 2.3 se enfoca en la dispersión vertical, que involucra movimientos estocásticos horizontales y verticales. En ambas secciones examinamos distintas combinaciones de efectos de fricción lateral y de fondo en función de los números de Ekman y Reynolds. La Tabla 1 resume los tipos de experimentos realizados.

Tabla 1. Configuración de las velocidades deterministas y estocásticas utilizadas en los experimentos de dispersión. El vórtice decae debido a la fricción del fondo cuando $E \neq 0$ y a la fricción lateral cuando $Re < \infty$.

Experimentos				
Velocidad del vórtice	Velocidad estocástica	Fricción	Figuras	Sección
$(0, u_\theta, 0)$	$(u_a, v_a, 0)$	$E = 0, Re < \infty$	3-4	2.2.1
$(u_r, u_\theta, 0)$	$(u_a, v_a, 0)$	$E \neq 0, Re \rightarrow \infty$	5	2.2.2.1
		$E \neq 0, Re < \infty$	6	2.2.2.2
(u_r, u_θ, u_z)	(u_a, v_a, w_a)	$E \neq 0, Re \rightarrow \infty$	7-11	2.3
		$E \neq 0, Re < \infty$		

Para la condición inicial de los remolinos, utilizamos la ecuación (16) con los parámetros descritos a continuación. Primero, consideramos una escala radial $R = 100$ km, típica de los vórtices oceánicos de mesoescala, lo que implica un radio de velocidad máxima $R_{\max} \approx 112$ km. En segundo lugar, elegimos una circulación $\Gamma = 9.85 \times 10^5 \text{ m}^2/\text{s}$, que, junto con R_{\max} en (16), da una velocidad azimutal máxima $V_{\max} \approx 1 \text{ m/s}$. Este valor está en el rango de los vórtices de mesoescala. El parámetro de Coriolis utilizado es $f = 10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Utilizando los parámetros del remolino, se puede verificar que la escala de vorticidad relativa, $V_{\max}/R_{\max} \approx 8.9 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$, es más de un orden de magnitud menor que f . En consecuencia, el vórtice es lo suficientemente débil como para aplicar la condición de Ekman (6) en el fondo y para despreciar la influencia de los términos no lineales en la ecuación de movimiento azimutal (12).

Los coeficientes de viscosidad turbulenta ν_h y ν_v están contenidos en los números de Reynolds (14) y Ekman (8). Para representar los efectos de la viscosidad horizontal ($Re < \infty$), los números de Reynolds elegidos inducen una tasa de expansión radial similar a la de los remolinos oceánicos [ver la solución del vórtice de Oseen (17)]. Por ejemplo, con $Re \approx 3940$ (lo que corresponde a $\nu_h = 250 \text{ m}^2/\text{s}$), el radio de máxima velocidad aumenta 67 km en 180 días. Este crecimiento radial es razonable en comparación con lo observado en el océano (Chaigneau et al., 2008). La escala de tiempo (15) es $T_\nu \approx 463$ días, lo que indica que los efectos de fricción lateral actúan a un ritmo lento.

En cuanto a los efectos de fricción del fondo ($E \neq 0$), elegimos números de Ekman que van desde 10^{-7} hasta 10^{-5} . Estos valores inducen velocidades verticales de aproximadamente 10^{-5} m/s , comparables con los valores oceánicos (Estrada-Allis et al., 2019). Para $E = 10^{-5}$, la escala temporal de Ekman (13) es $T_E \approx 73$ días. Dado que el período de rotación del sistema es $T = 1$ día, las dos escalas de tiempo asociadas a efectos de fricción son mucho más largas: $T < T_E < T_\nu$. Esta estimación implica que nuestros experimentos corresponden a vórtices que decaen lentamente, donde el decaimiento se produce principalmente por la fricción del fondo.

Los experimentos de dispersión horizontal consisten en liberar una carga puntual de 2500 partículas a una cierta distancia radial del centro del vórtice y dejarlas evolucionar durante 180 días. Hemos verificado que la precisión estadística de las métricas de dispersión es adecuada con esta cantidad de partículas. Sin embargo, en algunos experimentos de dispersión vertical, utilizamos 5000 partículas distribuidas aleatoriamente a una cierta profundidad para apreciar mejor sus desplazamientos verticales.

Las posiciones de las partículas resultan de resolver el sistema (1) con un esquema de Runge-Kutta de cuarto orden, utilizando un paso de tiempo $\Delta t = 450$ s en todos los casos. Para elegir las escalas de velocidad f_h y f_z de los movimientos estocásticos, utilizamos la definición de los coeficientes de

difusividad (2); consideramos que una estimación adecuada de la difusividad horizontal en un remolino de mesoescala oceánico es $K_h \approx 22 \text{ m}^2/\text{s}$ (Martin et al., 2001). Con este valor en (2), la escala horizontal de velocidad aleatoria es $f_h = 0.38 \text{ m/s}$. Posteriormente, suponemos que la escala vertical f_z es mucho más débil, aproximadamente una milésima (10^{-3}) de f_h . Por lo tanto, usamos $f_z = 0.38 \times 10^{-3} \text{ m/s}$, lo que da una difusividad vertical de $K_v \approx 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$.

2.2. Dispersión horizontal

2.2.1. Advección angular

En investigaciones previas, presentamos evidencia de que el corte variable de velocidad en vórtices monopolares no viscosos aumenta la dispersión de partículas pasivas durante las etapas iniciales del proceso de redistribución (ver Graef et al., 2020; Ocampo Jaimes et al., 2022). En esta sección, nos enfocamos en el análisis de la dispersión de partículas dentro del vórtice de Oseen (17), el cual decae y expande su radio lentamente con el tiempo (ver Figura 2a). Nuestra intención es cuantificar el efecto de la viscosidad lateral sobre la dispersión de partículas; es decir, no se consideran efectos de Ekman ($E = 0$), lo que implica que los resultados son idénticos para ciclones y anticiclones. En este caso, las partículas se dispersan únicamente por la velocidad azimutal y la difusión turbulenta. Utilizamos una distribución inicial puntual de 2500 partículas ubicadas a una distancia radial $r_0 = R_{max}$, donde el campo de velocidad pasa de estar en rotación de cuerpo rígido a un régimen irrotacional. Tomamos distintos valores de Re para que la tasa de decaimiento del monopolo varíe, para luego comparar con el caso sin fricción, $Re \rightarrow \infty$.

En la Figura 3, mostramos la propagación de la carga puntual de partículas en un vórtice con circulación antihoraria para $Re \rightarrow \infty$ y $Re \approx 1310$ a diferentes tiempos t/T , con T el período de rotación de la Tierra. Inicialmente, en $t/T = 13$, ambos casos muestran la formación de una franja de partículas. Estas franjas son prácticamente iguales al inicio de la simulación, ya que el corte de velocidad es similar en ambos casos. Es decir, la viscosidad horizontal tiene un impacto insignificante en ese momento. En $t/T = 52.1$, empiezan a aparecer diferencias en la distribución de partículas: para $Re \rightarrow \infty$, las partículas se distribuyen en forma de anillo, mientras que para $Re \approx 1310$, el anillo aún no está completamente formado. Lo último se debe a que la viscosidad empieza a debilitar al remolino. Finalmente, en $t/T = 114,6$, el anillo de partículas está completamente cerrado para $Re \rightarrow \infty$, pero no del todo para $Re \approx$

1310. A pesar de esto, la posición radial promedio de las partículas en ambos vórtices se mantiene en el radio de máxima velocidad inicial, R_{max} . Nótese que, para el vórtice en decaimiento (paneles de la derecha), las partículas permanecen dentro del radio de velocidad máxima en expansión (círculo negro).

Con la evolución temporal de la dispersión relativa al centro de masa en la Figura 4(a), cuantificamos la distribución de partículas en monopolos con diferentes Re . En la Figura se observa que las curvas de dispersión comienzan desde cero y crecen hasta alcanzar un comportamiento asintótico en tiempos más largos. Todo el proceso ocurre más rápido para Re mayores. El crecimiento inicial de todas las curvas crece en potencias del tiempo $M^2(t) \rightarrow t^n$ con $n > 2$. Este comportamiento se debe al estiramiento de las franjas de partículas a causa de la diferencia del corte de velocidad azimutal en las dos primeras etapas de la propagación, como se muestra en la Figura 3. En tiempos posteriores, las curvas de dispersión comienzan a crecer linealmente en el tiempo. El crecimiento lineal ocurre cuando las partículas se distribuyen uniformemente alrededor del centro del vórtice y se forma el anillo. La tendencia lineal coincide con la solución analítica de la dispersión respecto al centro de masa de la caminata aleatoria (Graef et al., 2020):

$$M^2(t) = \frac{2}{3} f_h^2 \Delta t t, \quad (29)$$

representada por la línea verde discontinua de la Figura 4(a). La ley de potencia t^n , seguida de la dispersión lineal o estándar (29), es análoga a la dispersión encontrada en vórtices monopoles irrotacionales y de Rankine (Graef et al., 2020; Ocampo Jaimes et al., 2022).

Para enfatizar los efectos de la viscosidad lateral, en la Figura 4(b) graficamos el resultado de dividir a las curvas de dispersión con Reynolds finito entre las de Re infinito (es decir, sin viscosidad). Se puede observar que los valores mínimos de todas las curvas ocurren alrededor de $t/T \approx 30$, o aproximadamente a un mes. El valor mínimo disminuye conforme Re decrece, lo que indica una desaceleración en la redistribución inicial de partículas a medida que aumenta la viscosidad. Posteriormente, dependiendo del número de Reynolds, las curvas alcanzan el valor de 1, asociado a la dispersión estándar, en diferentes momentos. Por ejemplo, cuando $Re \approx 1310$, se requiere de al menos cinco meses más para llegar al régimen de dispersión estándar en comparación con el remolino sin viscosidad. En resumen, a medida que la viscosidad horizontal aumenta o Re disminuye, la distribución angular inicial de partículas se debilita, retrasando la transición a la dispersión estándar.

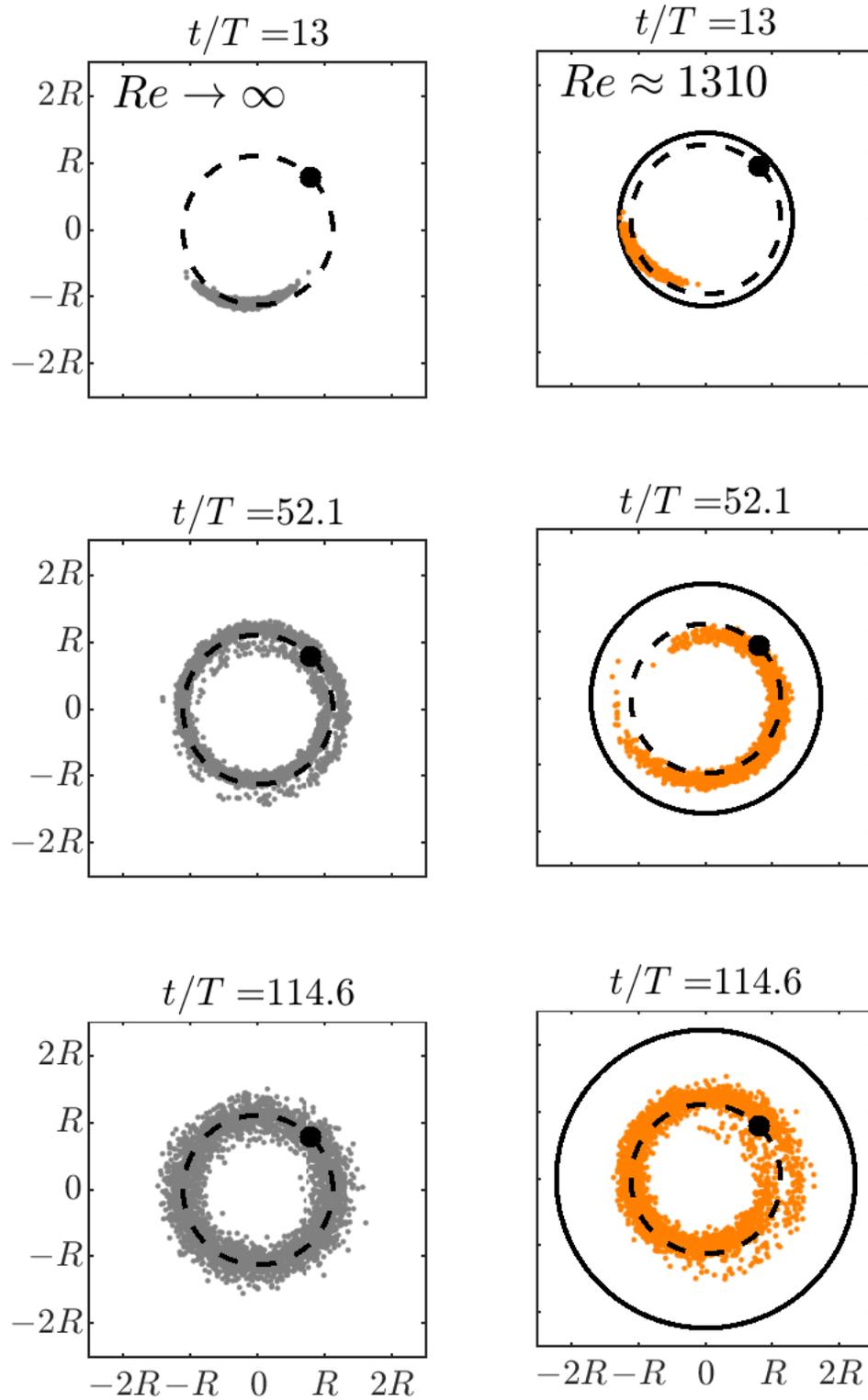


Figura 3. Propagación de una carga puntual de 2500 partículas a diferentes tiempos en un monopolo de Oseen ciclónico ($\Gamma > 0$). Paneles de la izquierda: vórtice no viscoso, $Re \rightarrow \infty$ (puntos grises). Paneles de la derecha: $Re = 1310$ (puntos naranjas). La carga puntual inicia en $r_0 = R_{max}$, (punto negro). El círculo discontinuo en todos los paneles tiene un radio R_{max} , y el círculo continuo en los paneles de la derecha representa el radio de máxima velocidad en expansión debido a la viscosidad lateral.

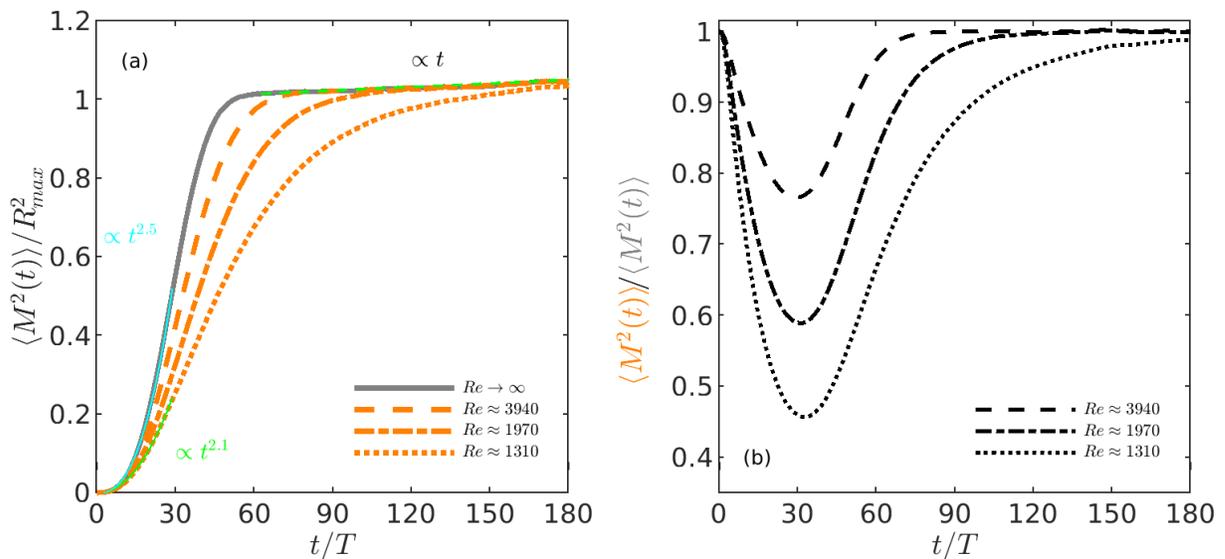


Figura 4. (a) Evolución temporal de la dispersión respecto al centro de masa en vórtices de Oseen con diferentes números de Reynolds. La posición inicial de la carga puntual de las partículas es $r_0 = (R_{max}, R_{max})/\sqrt{2}$ (como en la Figura 3). La curva gris corresponde al vórtice no viscoso ($Re \rightarrow \infty$). Ajustes en potencias de $t^{2.1}$ y $t^{2.5}$ en los tiempos iniciales para $Re \approx 1310$ (curva verde) y para $Re \rightarrow \infty$ (curva turquesa) respectivamente. La recta discontinua en los tiempos posteriores corresponde a la dispersión estándar (29). (c) Razón entre las curvas de dispersión para diferentes Re y el caso no viscoso ($Re \rightarrow \infty$).

2.2.2. Advección angular y radial

2.2.2.1. Sólo fricción de fondo: $E \neq 0$, $Re \rightarrow \infty$

En esta sección, cuantificamos los efectos de la capa inferior de Ekman sobre la propagación horizontal de partículas utilizando las componentes de velocidad angular y radial (u_θ, u_r). En este caso, consideramos que $E \neq 0$ y $Re \rightarrow \infty$, por lo que despreciamos la viscosidad lateral. A diferencia de la sección anterior, al agregar los efectos de la capa de Ekman de fondo, el comportamiento entre ciclones y anticiclones cambia. Lo anterior se debe a la relación directa entre u_r y u_θ dada por (9), esto es, $u_r > 0$ ($u_r < 0$) para un vórtice ciclónico (anticiclónico). Así, las partículas dentro de los ciclones tienden a ser expulsadas del remolino, mientras que en los anticiclones se desplazan hacia el interior.

Las Figuras 5 (a)-(b) muestran la dispersión relativa respecto al centro de masa para diferentes números de Ekman cuando $Re \rightarrow \infty$, considerando ciclones y anticiclones. Al igual que en la Figura 4(a), comparamos con el caso no viscoso $E = 0$ (curvas grises en ambos paneles). En forma similar al caso de pura advección angular, las curvas de dispersión con $u_r \neq 0$ presentan dos fases principales. Al inicio, tanto para ciclones como para anticiclones, la dispersión crece rápidamente debido a la redistribución inicial de partículas, equivalente a la sección 2.2. En esta etapa, el papel de la velocidad radial es

secundario debido a la baja magnitud de E . La segunda fase ocurre cuando las partículas se distribuyen alrededor del origen del vórtice. Aquí, la velocidad radial provoca expulsión o acumulación de partículas, dependiendo del signo del vórtice. La dispersión resultante crece (decae) linealmente en el caso de los ciclones (anticiclones). En los ciclones, los valores de las curvas de dispersión en la etapa de caminata aleatoria son mayores que en el caso del remolino estacionario (Figura 5a). En los anticiclones ocurre lo contrario (Figura 5b).

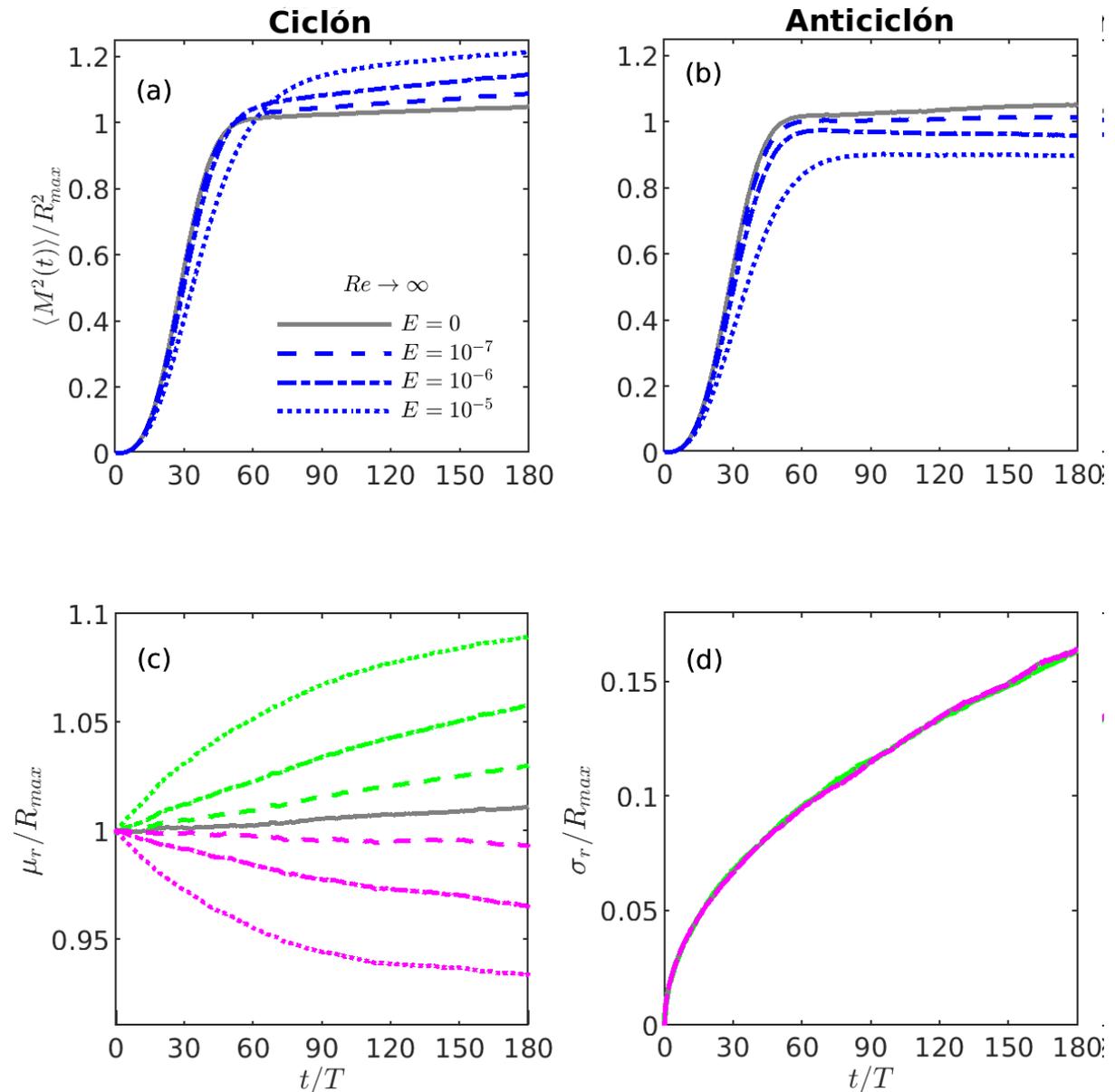


Figura 5. Evolución temporal de la dispersión respecto al centro de masa, (a) ciclones ($\Gamma > 0$) y (b) anticiclones ($\Gamma < 0$) para diferentes valores del número de Ekman (con $Re \rightarrow \infty$). La posición inicial de la carga puntual de las partículas es $r_0 = (R_{max}, R_{max})/\sqrt{2}$. Las curvas grises corresponden al vórtice no viscoso ($E = 0$, $Re \rightarrow \infty$). (c) Posición radial promedio del conjunto de partículas para cada número de Ekman (las curvas verdes son para $\Gamma > 0$ y las magenta para $\Gamma < 0$); (d) desviación estándar en la dirección radial para cada número de Ekman.

Otra forma de cuantificar los efectos de u_r es calculando el promedio en la dirección radial μ_r , ecuación (26), como función del tiempo. La Figura 5(c) muestra μ_r en función del tiempo para diferentes valores de E . Las curvas están normalizadas con R_{max} (la posición radial en $t = 0$), por lo que el valor inicial es 1. Las curvas indican que los ciclones y anticiclones distribuyen partículas en direcciones radiales opuestas de manera equitativa. Este comportamiento se debe a la proporcionalidad entre la velocidad radial y la velocidad azimutal dada por (9), así como al hecho de que la tasa de decaimiento de ciclones y anticiclones es la misma. La separación de las curvas de $\mu_r = R_{max}$ (es decir, de la posición inicial) demuestra que u_r actúa desde los tiempos iniciales de la simulación, pero como se mencionó anteriormente, su papel en la distribución inicial de partículas es secundario. Por otro lado, la Figura 5(d) muestra que todas las curvas de la desviación estándar radial (27), incluido $u_r = 0$, colapsan en una sola. Este resultado indica que la dispersión radial de partículas se comporta como una caminata aleatoria ($\sigma_r \sim \sqrt{t}$) sin influencia apreciable de la fricción del fondo.

2.2.2.2. Fricción de fondo y lateral: $E \neq 0$, $Re < \infty$

En este apartado analizamos la dispersión horizontal de partículas bajo los efectos de la fricción lateral y de fondo actuando juntas, y comparamos las diferencias entre ciclones y anticiclones. En este caso, las curvas de dispersión respecto al centro de masa se muestran en las Figuras 6(a)-(b). A diferencia de las secciones anteriores, estas curvas no presentan los dos regímenes de crecimiento [comparar con las Figuras 5 (a)-(b)]. Esto ocurre porque la acción conjunta de la fricción horizontal y la fricción de Ekman del fondo hacen decaer lo suficiente al monopolo de manera que su movimiento azimutal no logra redistribuir a las partículas alrededor del centro. No obstante, persiste la tendencia de expulsar partículas en los ciclones y de acumularse en los anticiclones.

En el caso de los ciclones, cuando $E = 10^{-5}$ y $Re \approx 1970$ o $Re \approx 1310$, las curvas de dispersión muestran valores más pequeños que el vórtice de referencia ($E = 0$, $Re \rightarrow \infty$) durante todo el tiempo de simulación de 180 días, como se observa en la Figura 6(a). Por el contrario, para $Re \approx 3940$ la curva de dispersión supera al caso de referencia alrededor de $t/T > 90$, ya que la tasa de decaimiento de las velocidades angulares y radiales es más lenta. De manera similar al caso de pura advección azimutal con Reynolds variable, cuando el radio de máxima velocidad azimutal comienza a expandirse, las partículas permanecen más cerca de la zona de rotación de cuerpo rígido (e.g. Figura 3, paneles de la derecha) y no logran escapar porque $u_r \ll u_\theta$. Por otro lado, los valores de las curvas de dispersión en los anticiclones

son menores cuando Re disminuye, como se muestra en la Figura 6(b). Este decremento está asociado a la advección radial negativa y a la débil redistribución angular inicial. La tendencia a acumular partículas en monopolos con $\Gamma < 0$ a causa de la fricción de fondo guarda similitudes con la capacidad de retención observada en vórtices anticiclónicos oceánicos (e.g., Cetina-Heredia et al., 2019).

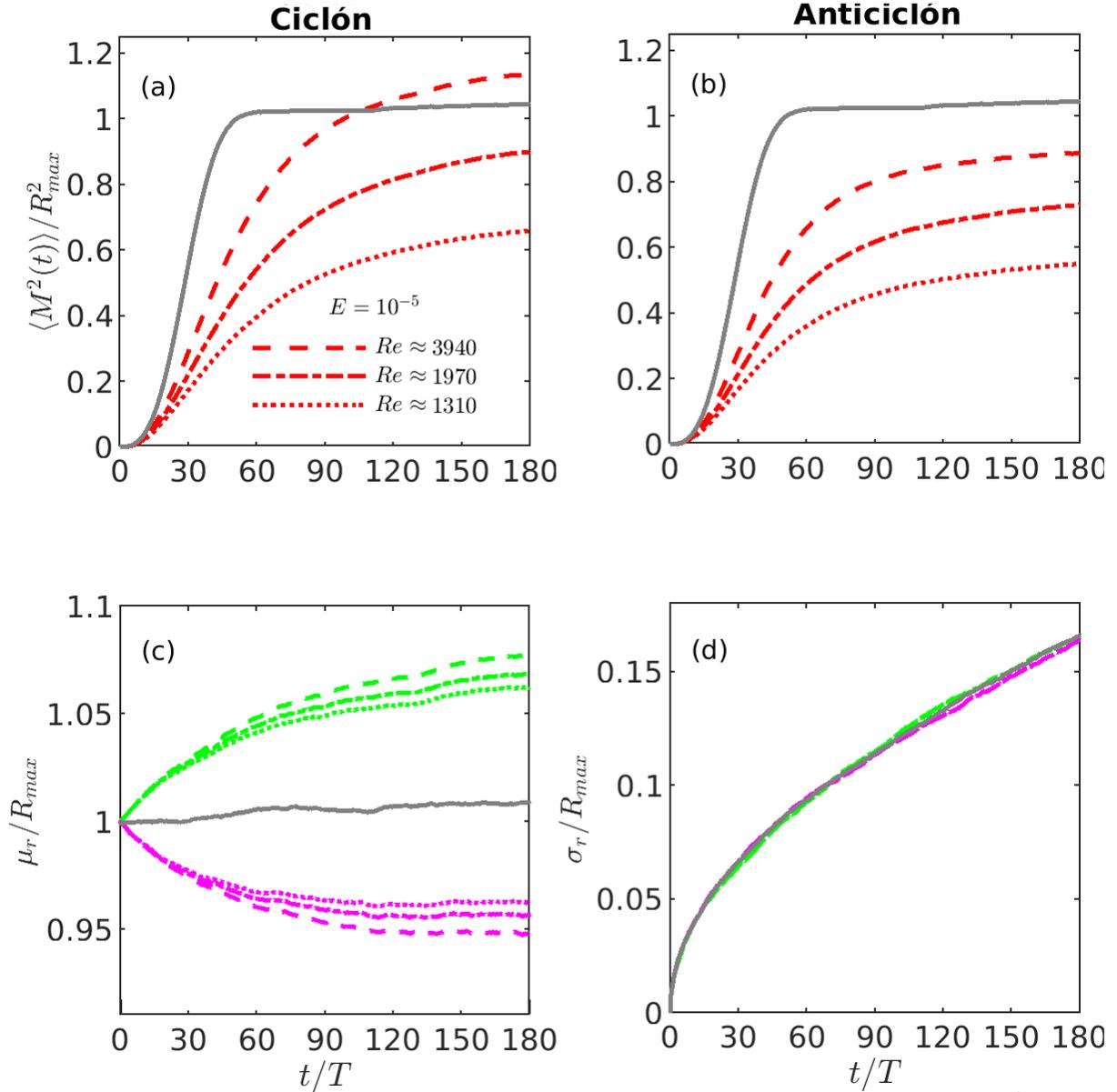


Figura 6. Evolución temporal de la dispersión relativa respecto al centro de masa para (a) ciclones ($\Gamma > 0$) y (b) anticiclones ($\Gamma < 0$) con diferentes números de Reynolds (y $E = 10^{-5}$). La posición inicial de la carga puntual de las partículas es $r_0 = (R_{max}, R_{max})/\sqrt{2}$. Las curvas grises corresponden al vórtice no viscoso ($E = 0$, $Re \rightarrow \infty$). (c) Posición radial promedio del conjunto de partículas para cada número de Reynolds (las curvas verdes son para $\Gamma > 0$ y las magenta para $\Gamma < 0$). (d) Desviación estándar en la dirección radial para cada número de Reynolds.

Finalmente, la Figura 6(c) muestra que la posición radial promedio μ_r difiere de R_{max} solo en unos pocos kilómetros, con $\mu_r > R_{max}$ ($\mu_r < R_{max}$) para los ciclones (anticiclones). Sin embargo, existe

una diferencia cualitativa esencial respecto a la sección anterior [Figura 5(c)]: los valores de μ_r son prácticamente los mismos alrededor del primer mes para los diferentes Re . Esto sugiere que el valor de Re finito no es relevante en las etapas iniciales de la dispersión radial de partículas. Respecto a las curvas de la desviación estándar radial de la Figura 6(d), estas colapsan de manera similar a lo observado en la sección anterior [ver Figura 5(d)].

2.3. Dispersión vertical

Esta sección está enfocada en la dispersión vertical de partículas provocada por el bombeo de Ekman del fondo, que involucra a la velocidad vertical y radial del remolino. Tomamos como condición inicial a una región circular con 5000 partículas distribuidas aleatoriamente, en un radio de $2.5 R_{max}$ a un nivel dado z_0 . Realizamos dos experimentos en ciclones y anticiclones: (i) con $E = 10^{-5}$ y $Re \rightarrow \infty$ (vórtices que decaen únicamente por fricción en el fondo) y (ii) con $E = 10^{-5}$ y $Re \approx 1310$ (vórtices que decaen por fricción lateral y en el fondo).

2.3.1. Distribución vertical en ciclones y anticiclones

Para iniciar, comparamos la distribución vertical de partículas en un ciclón cuando la cama circular de partículas inicia en el fondo. Las Figuras 7(a)-(b) muestran la distribución final de partículas después de 180 días para los dos experimentos. Es evidente que las partículas del panel (a), sujetas únicamente a la fricción del fondo, se elevan más que las del panel (b), bajo fricción del fondo y fricción lateral. Este comportamiento se debe a la relación proporcional entre u_z y el campo de vorticidad, ecuación (10), y al hecho de que la vorticidad decae más rápido en el caso del panel (b). La forma cónica surge debido a que ω es máxima en $r = 0$, y por lo tanto también u_z . Las estructuras cónicas que se forman en los experimentos son semejantes a las observadas en experimentos de laboratorio sobre transporte de sedimentos en vórtices submarinos (ver Figura 8 de González-Vera et al., 2020).

Las Figuras 7 (c)-(d) contienen los histogramas del número de partículas en la vertical al final de cada experimento. Las barras confirman que el vórtice en decaimiento por fricción del fondo eleva más partículas. También, se puede observar un cúmulo de partículas alrededor de $z = H/4$ para ese caso (panel c). Sin embargo, al comparar el tamaño de la primera barra (desde abajo) de cada histograma,

se observa que el del caso de $Re \approx 1310$ (vórtice rojo) es más pequeño que cuando $Re \rightarrow \infty$ (vórtice azul). En otras palabras, a pesar de que el vórtice rojo decae por los dos efectos de fricción, deja una menor cantidad de partículas en el fondo.

El cúmulo de partículas alrededor de $H/4$ en la Figura 7(c) se debe al comportamiento de u_z y u_r cerca del origen. Dado que u_z (proporcional a la vorticidad) alcanza su máximo en $r = 0$, las partículas en esa zona se elevan más. En contraste, u_r (proporcional a u_θ) tiende a cero si $r \rightarrow 0$, impidiendo la expulsión de partículas hacia radios mayores. La combinación de ambos mecanismos crea una región de retención donde la velocidad vertical es más significativa.

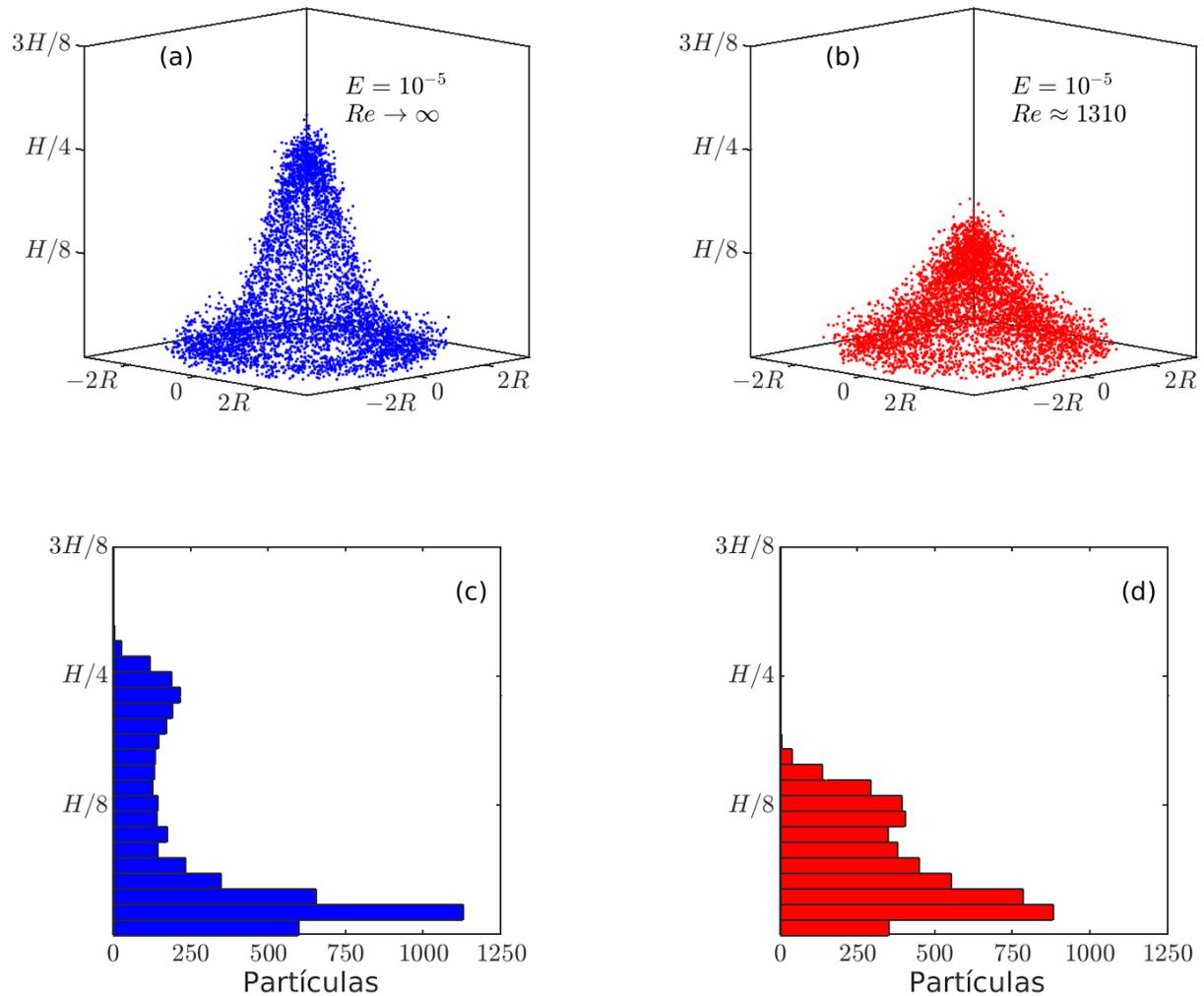


Figura 7. Posición vertical y horizontal de 5000 partículas en vórtices ciclónicos a $t/T = 180$. (a) Sólo con viscosidad del fondo (puntos azules), y (b) con viscosidad del fondo más viscosidad lateral (puntos rojos). Los trazadores parten del fondo distribuidas aleatoriamente en una cama circular con radio $2.5R_{max}$. (c)-(d) Distribución de partículas en la dirección z de las simulaciones de los paneles (a)-(b). Las barras tienen un ancho constante de $0.015H$.

La diferencia observada en las primeras barras, adyacentes a la base, de los histogramas de las Figuras

7 (c)-(d) surge de las variaciones espaciales del bombeo de Ekman en diferentes distancias radiales. En efecto, el bombeo de Ekman u_z (proporcional a la vorticidad relativa) en una región interna del vórtice azul es mayor que en el vórtice rojo, debido a que el decaimiento del primero es más lento. Sin embargo, debido a la expansión radial del vórtice rojo (causada por la fricción lateral), la vorticidad relativa en una región externa es mayor que en el vórtice azul, como se observa en los perfiles radiales mostrados en la Figura 8(a). La intersección de ambas curvas define las regiones interna y externa. Utilizando las soluciones correspondientes de los perfiles de vorticidad, la posición radial de la intersección está dada por

$$R_i = \left[\ln \left(\frac{R^2}{R^2 + 4\nu t} \right) \left(\frac{1}{R^2 + 4\nu t} - \frac{1}{R^2} \right)^{-1} \right]^{1/2}, \quad t > 0. \quad (30)$$

La Figura 8(b) muestra la evolución de esta escala radial en función del tiempo. Aquí, $R_i \rightarrow R$ cuando $t \rightarrow 0$, ya que el perfil inicial de vorticidad es el mismo para ambos vórtices.

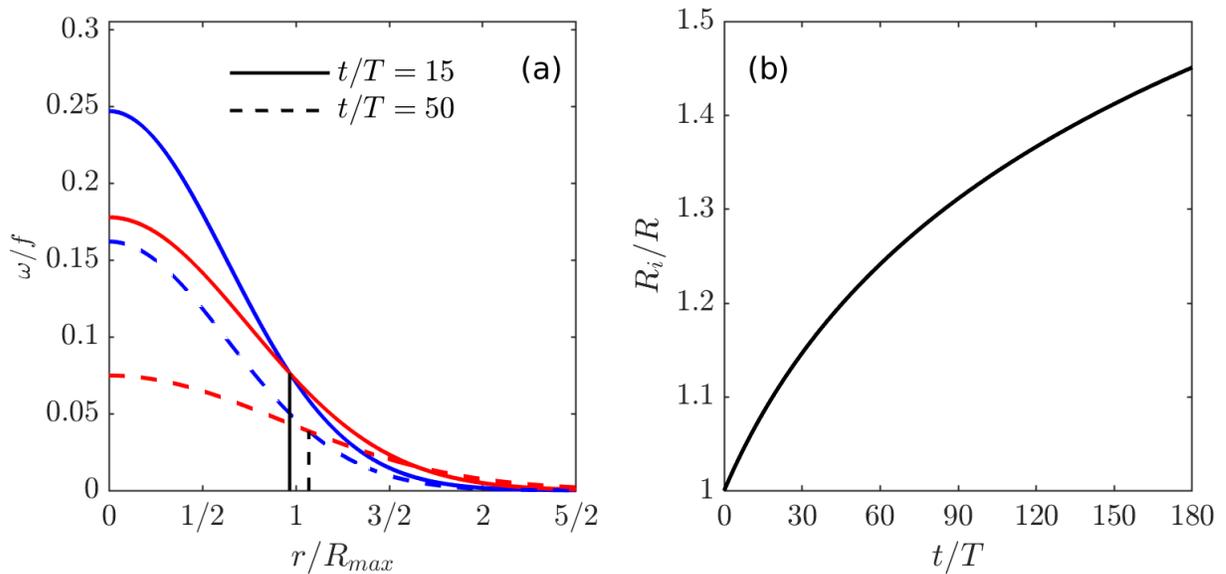


Figura 8. (a) Perfiles de vorticidad relativa de los remolinos utilizados en los experimentos de la Figura 7, a $t/T = 15$ (líneas continuas) y $t/T = 30$ (líneas discontinuas). Las líneas negras verticales denotan el radio de intersección R_i . (b) Evolución temporal de R_i normalizada con la escala radial inicial R .

Para ilustrar el resultado anterior, en la Figura 9 mostramos la distribución vertical final de las partículas en la región interna ($r < R_i$, paneles izquierdos) y en la región externa ($r > R_i$, paneles derechos). Se puede observar que hay un mayor ascenso de partículas en el remolino azul cuando $r < R_i$; sin embargo, en ambos monopolos, el fondo queda vacío (paneles a y b). En contraste, cuando $r > R_i$, las partículas ascienden más rápido en el vórtice rojo que en el azul. Como resultado, la primera barra adyacente a la

base del vórtice rojo contiene menos partículas (ver paneles c y d), a pesar de que su decaimiento es más rápido. Por lo tanto, la región exterior es la que regula el ascenso de partículas en el fondo.

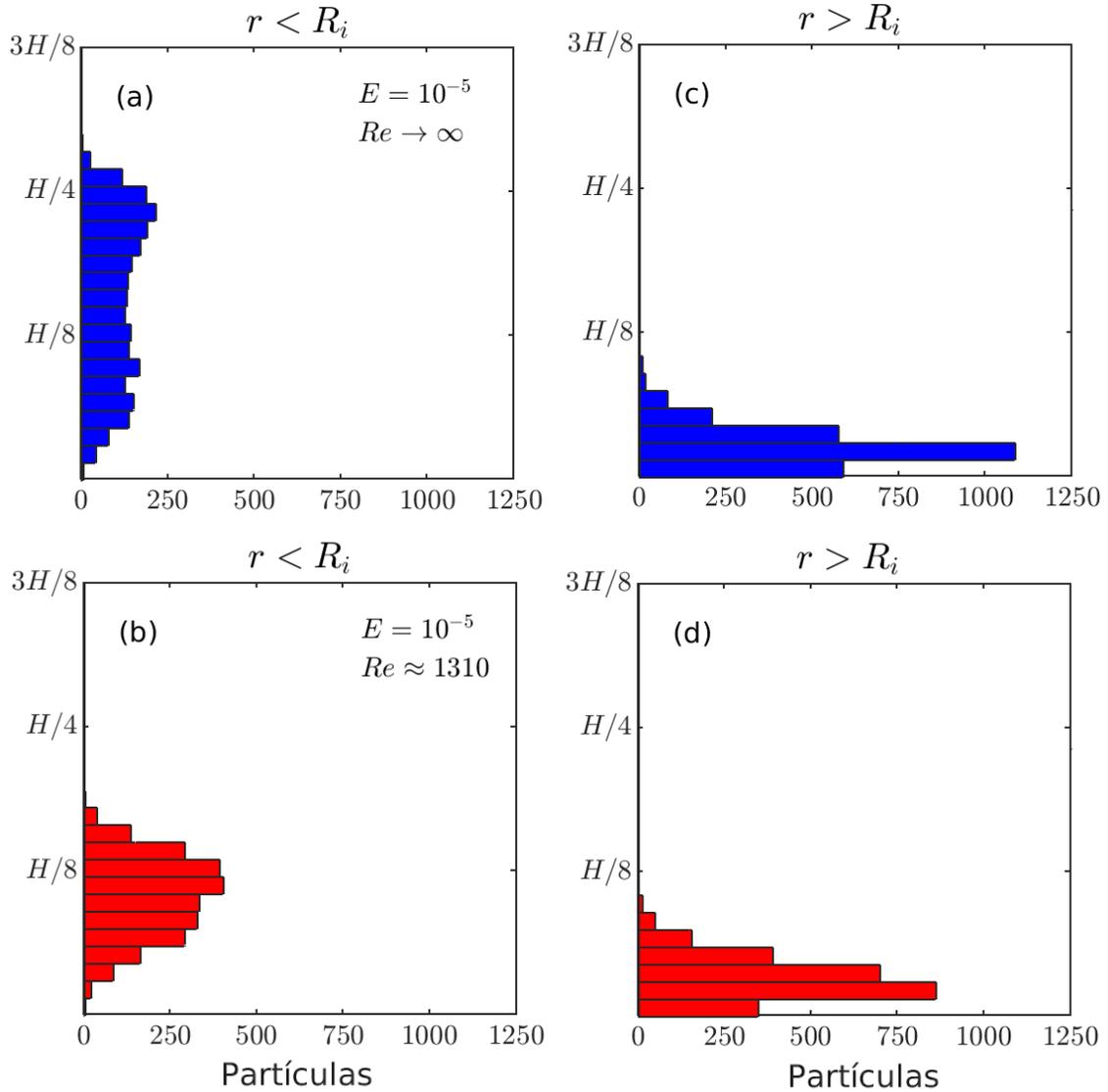


Figura 9. Distribución regional de las simulaciones de la Figura 7 (el código de colores es el mismo). (a)-(b) $r < R_i$ y (c)-(d) $r > R_i$.

Finalmente, presentamos la distribución de partículas en un anticiclón ($\Gamma < 0$). En este análisis, la cama circular de partículas comienza en $z_0 = H/4$ y su redistribución final a $t/T = 180$ se encuentra en las Figuras 10(a)-(b). Al comparar los paneles, se observa que el remolino en decaimiento sólo por fricción de fondo (panel a) hunde más trazadores que el afectado por la viscosidad lateral y de fondo (panel b), por las mismas razones expuestas anteriormente. En este caso, la difusión turbulenta hace que las partículas alcancen regiones arriba de $z_0 = H/4$, dado que $u_z \leq 0$ en toda la columna. El comportamiento de

las partículas en estos experimentos es similar a lo observado en modelos de remolinos, tales como el *sink-vortex* (e.g., Tan et al., 2020). Por otra parte, los histogramas en las Figuras 10(c)-(d) confirman que hay más hundimiento de partículas en el vórtice azul (sólo con fricción de fondo) que en el rojo (con fricción de fondo y lateral). Las partículas en el vórtice azul logran llegar al fondo y acumularse ahí. En contraste, las del anticiclón rojo no lo hacen debido a que su decaimiento es mayor.

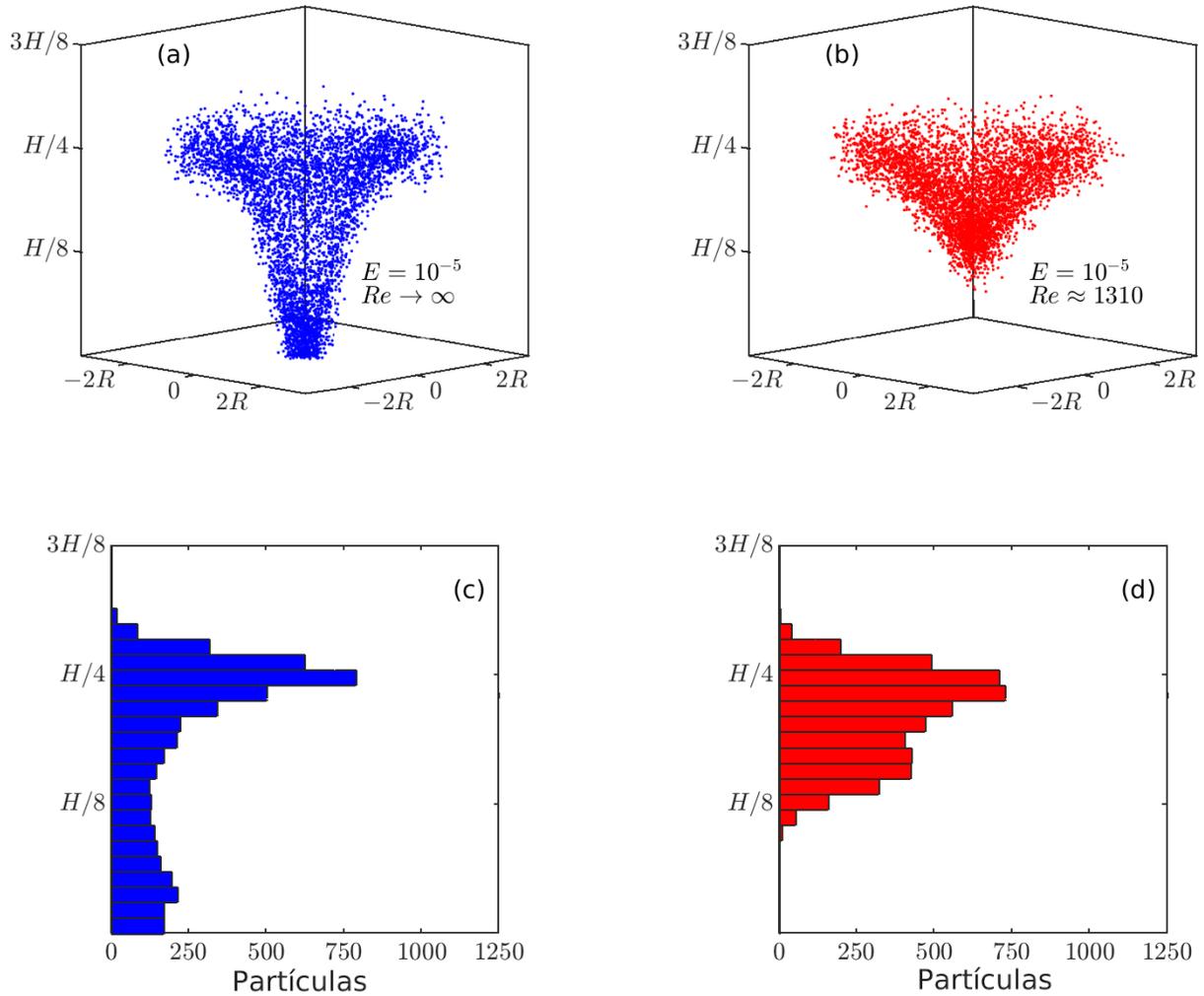


Figura 10. Posición vertical y horizontal final de 5000 partículas en vórtices anticiclónicos a $t/T = 180$. (a) Solo con viscosidad del fondo (puntos azules), y (b) con viscosidad en el fondo más viscosidad lateral (puntos rojos). Los trazadores parten de $z_0 = H/4$ distribuidos aleatoriamente en una cama circular con radio $2.5R_{max}$. (c)-(d) Distribución de partículas en la dirección z de las simulaciones de los paneles (a)-(b). Las barras tienen un ancho constante de $0.015H$.

2.3.2. Dispersión absoluta vertical

En esta última parte calculamos la raíz cuadrada de la dispersión absoluta en la dirección vertical, $\sqrt{\langle A_z^2(t) \rangle}$, a partir de (28). El objetivo es cuantificar el desplazamiento vertical promedio de las descargas

puntuales de partículas que comienzan a diferentes radios de los remolinos analizados anteriormente. Realizamos tres experimentos con cargas puntuales de partículas, cada una iniciando a una altura $z_0 = H/4$ y desde una posición diferente en la dirección radial: $r_0 = R_{max}/2$, $r_0 = R_{max}$ y $r_0 = 3R_{max}/2$. Las Figuras 11(a)-(c) muestran los resultados para vórtices ciclónicos en decaimiento por pura fricción del fondo (curvas azules) y por fricción del fondo y lateral (curvas rojas). Cuando $r_0 = R_{max}/2$ (panel a) y $r_0 = R_{max}$ (panel b) la mayoría de las partículas circulan dentro de la región interna $r < R_i$. En consecuencia, la curva de dispersión vertical azul es superior a la roja, ya que la vorticidad del remolino en decaimiento solo por fricción de fondo es mayor. Sin embargo, para $r_0 = 3R_{max}/2$ (panel c) la curva roja está ligeramente por encima de la azul. Como mencionamos en la sección pasada, esto ocurre por la forma de la vorticidad de los remolinos. En los anticiclones ocurre algo similar [ver Figuras 11(d)-(f)]. En general, las curvas de $\sqrt{\langle A_z^2(t) \rangle}$ siempre son mayores en los anticiclones que en los ciclones, ya que $|u_z|$ aumenta cuando $z \rightarrow 0$ y disminuye cuando $z \rightarrow H$.

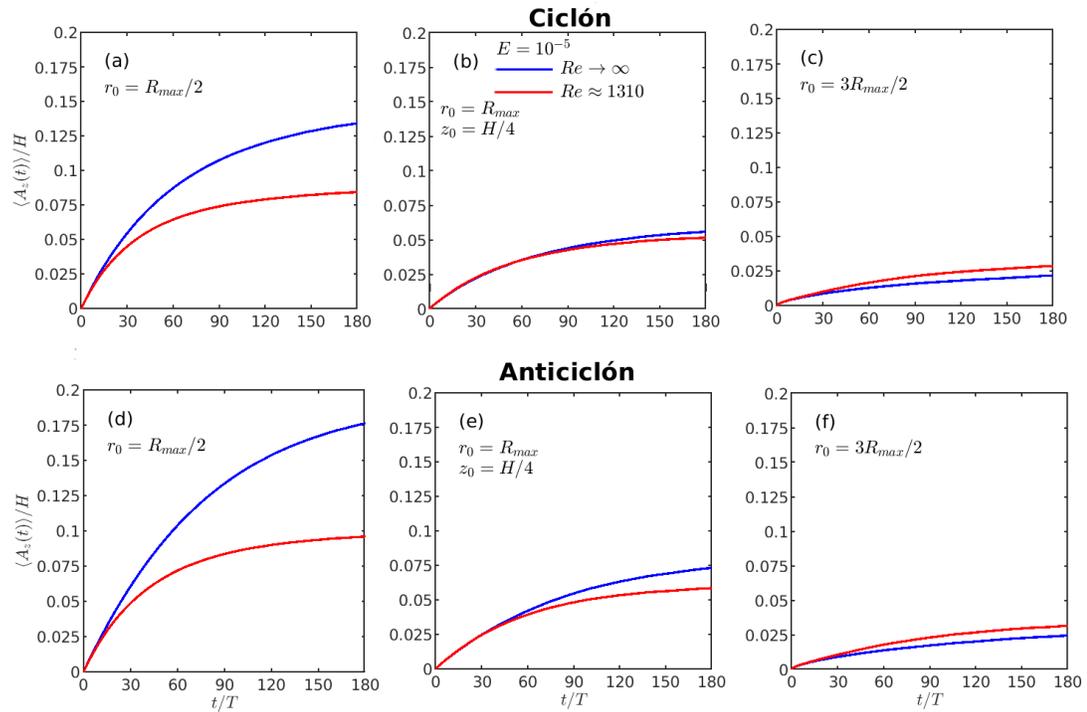


Figura 11. Raíz cuadrada de la dispersión absoluta en la dirección z de una carga puntual de 2500 partículas en ciclones (paneles superiores) y anticiclones (paneles inferiores). Las partículas parten de $z_0 = H/4$ desde distintas posiciones radiales: a $r_0 = R_{max}/2$ en los paneles (a) y (d); a $r_0 = R_{max}$ en los paneles (b) y (e); y a $r_0 = 3R_{max}/2$ en los paneles (c) y (f). Las curvas azules corresponden a vórtices que decaen sólo por efectos Ekman, y las rojas por efectos Ekman y de fricción lateral.

2.4. Discusión y conclusiones

En este capítulo investigamos la dispersión horizontal y vertical de partículas en remolinos monopolares en un sistema en rotación. Los remolinos decaen por efectos de fricción lateral y del fondo. Las ecuaciones de trayectoria incluyen perturbaciones estocásticas que representan fluctuaciones turbulentas y, en general, de pequeña escala. El modelo determinista se basa en el vórtice de Oseen, un remolino circular que decae lentamente debido a la fricción lateral. Incorporamos los efectos de la fricción del fondo considerando la condición de Ekman en la capa límite inferior, lo que proporciona una velocidad vertical u_z (10) y una radial u_r (9). La velocidad azimutal u_θ bajo la influencia de la fricción lateral y de Ekman está dada por (19). Dado que los efectos de fricción son débiles, el vórtice permanece circular y la velocidad angular es mucho mayor que las componentes vertical y radial, es decir, $u_\theta \gg u_z, u_r$. La principal novedad de esta investigación, en comparación con los resultados presentados en Graef et al. (2020) y Ocampo Jaimes et al. (2022), es la inclusión de las componentes de velocidad radial y vertical, dependientes del tiempo, a medida que el vórtice decae por efectos de la fricción lateral y de fondo.

El modelo analítico permite examinar los efectos viscosos de manera separada. En la sección 2.2.1, analizamos partículas moviéndose únicamente en la dirección horizontal bajo la influencia de la velocidad azimutal u_θ (junto con las perturbaciones estocásticas), considerando que el vórtice decae solo por efectos de fricción lateral. En ausencia de efectos de Ekman, no hay distinción entre ciclones y anticiclones. Mediante experimentos con distintos números de Reynolds, identificamos dos patrones en la dispersión respecto al centro de masa de partículas que parten desde el radio de máxima velocidad. Primero, la dispersión crece en potencias del tiempo mientras las partículas se distribuyen en la periferia del vórtice y, posteriormente, evoluciona lentamente de manera lineal, como en el régimen de dispersión estándar. El crecimiento anómalo inicial se debe al efecto combinado del corte radial de velocidad y las perturbaciones aleatorias. Los experimentos mostraron que la viscosidad horizontal atenúa el corte de velocidad, menguando la distribución angular de las partículas y retrasando la transición entre el régimen de potencias del tiempo y el régimen lineal. Los efectos del corte de velocidad en vórtices han sido reportados en estudios previos (Graef et al., 2020; Ocampo Jaimes et al., 2022) y pueden desempeñar un papel clave en la redistribución de trazadores pasivos en remolinos oceánicos (Martin et al., 2001; Cetina-Heredia et al., 2019).

En la sección 2.2.2.1, incorporamos la componente radial de la velocidad inducida por la capa de Ekman del fondo, de modo que las partículas son advectadas por el campo de velocidad bidimensional horizontal (u_r, u_θ). El signo de la componente radial depende de la polaridad del vórtice: hacia afuera en ciclones

y hacia adentro en anticiclones. Sin embargo, dado que los términos no lineales fueron despreciados en el modelo del vórtice, la tasa de decaimiento debido a la fricción del fondo es la misma para ciclones y anticiclones. Por lo tanto, nuestro objetivo fue cuantificar las diferencias en la dispersión de vórtices con estructuras idénticas pero circulación opuesta. Los experimentos mostraron que al inicio, una carga puntual de partículas se redistribuye alrededor del vórtice, haciendo que la dispersión crezca rápidamente, de manera similar al caso descrito en el párrafo anterior. En esta etapa, la velocidad radial no juega un papel significativo. En tiempos más largos, cuando las partículas se redistribuyen alrededor del centro del vórtice, la dispersión tiende a un crecimiento lineal, cuya pendiente depende del signo del vórtice: es positiva en ciclones (debido al flujo radial hacia afuera) y negativa en anticiclones (donde las partículas se desplazan hacia el centro). Este último resultado concuerda con la capacidad de retener materia de los vórtices oceánicos anticiclónicos (e.g. Cetina-Heredia et al., 2019). Estos hallazgos sugieren que la componente de velocidad u_r influye en la redistribución radial de trazadores. Sin embargo, el valor de la desviación estándar de la posición radial de las partículas es relativamente modesto (menos del 10% del radio del vórtice después de 180 días; ver Figuras 5c y 6c).

En la sección 2.3, analizamos la dispersión horizontal y vertical generada por el campo de velocidades tridimensional (u_r, u_θ, u_z) . La magnitud de la componente vertical inducida por el bombeo de Ekman decrece linealmente en la dirección z . En ciclones, u_z es positiva, lo que provoca que las partículas ubicadas en el fondo asciendan a diferentes niveles según su posición horizontal inicial dentro del vórtice. A medida que las partículas se elevan, la velocidad vertical disminuye, dando lugar a una estructura cónica. Identificamos similitudes entre este patrón y la distribución de sedimentos observada en experimentos de laboratorio con vórtices intensos de tipo "tornado" (González-Vera et al., 2020), donde la acumulación de trazadores se debe al flujo radial hacia el interior en la capa límite inferior, independientemente de la polaridad del vórtice. En contraste, en nuestro modelo vortical lineal en un sistema en rotación, el flujo radial depende del signo del vórtice. Los resultados sugieren que los ciclones pueden modificar la morfología del lecho marino al elevar trazadores a alturas significativas y contribuir a la erosión del fondo oceánico. También, en caso que hubiera contaminantes en el fondo, los ciclones contribuirían a dispersarlos en la columna de agua.

Nuestra formulación permite comparar la distribución vertical de partículas elevadas por ciclones cuyo decaimiento se debe únicamente a la fricción de Ekman del fondo, o incluyendo la fricción lateral. En particular, encontramos que, para un número de Ekman fijo, las partículas dentro de un vórtice ciclónico sin fricción lateral (Reynolds infinito) alcanzan mayores alturas en comparación con un vórtice con un número de Reynolds finito (Figuras 7a,b). Sin embargo, al considerar a la fricción lateral, el vórtice

remueve más partículas de la base de la columna (primera barra de los histogramas de las Figuras 7c,d). Esto se debe a que la expansión radial provocada por los efectos de la viscosidad lateral permite que las partículas que están rotando lejos del origen se eleven más, lo que da lugar a un fondo más limpio. Lo anterior es consecuencia de la proporcionalidad entre u_z y la vorticidad del remolino [Ecuación (10)] y de que la vorticidad con viscosidad lateral es mayor lejos del origen (Figura 8).

En los anticiclones, la componente vertical de velocidad es negativa, y provoca que los trazadores se muevan hacia el fondo, favoreciendo la acumulación de sedimentos e impidiendo su elevación. Aquí, las partículas que descienden desde una profundidad inicial forman una estructura cónica invertida, similar a los patrones del *sink-vortex* (e.g. Tan et al., 2020). Al igual que en los ciclones, la magnitud de los efectos viscosos inducen mayor o menor grado de hundimiento de partículas en diferentes zonas.

De manera más general, podemos concluir que la dispersión de trazadores dentro de remolinos en un sistema en rotación está influenciada fuertemente por la fricción de fondo y lateral. Los resultados sugieren que los modelos oceánicos utilizados para estudiar la dispersión horizontal y vertical en los vórtices de mesoescala deben considerar parametrizaciones adecuadas de los agentes de fricción, incluso cuando estos efectos sean secundarios en relación con el movimiento predominante del vórtice. Nuestros hallazgos implican que un razonamiento similar puede aplicarse a los movimientos verticales derivados de la capa de Ekman superficial, donde el vórtice puede debilitarse o intensificarse de acuerdo al rozamiento del viento en la superficie (Zavala Sansón et al., 2023). Además, las perturbaciones estocásticas, que representan a los movimientos de submesoescala y la turbulencia, influyen significativamente en la dispersión a corto plazo, ya que provocan que las partículas se desvíen de las líneas de corriente deterministas. No obstante, a largo plazo, las propiedades de dispersión dependen principalmente del campo del vórtice y su evolución temporal.

Capítulo 3. Dispersión de partículas en remolinos oceánicos en balance ciclogeostrófico

En este capítulo abordamos el problema de la dispersión horizontal de partículas en remolinos en balance ciclogeostrófico/viento gradiente, el cual está fundamentado en estudios previos que destacan el papel de la aceleración centrífuga en el campo de velocidad de remolinos de mesoescala intensos. Por ejemplo, Penven et al. (2014) demostraron que los vórtices del canal de Mozambique se ajustan bien a este balance, un fenómeno también observado en remolinos del mar Mediterráneo (Ioannou et al., 2019) y en la corriente de Lazo (Hiron et al., 2020). Resultados similares se han registrado en remolinos del Golfo de Tehuantepec influenciados por el viento (Larrañaga et al., 2023). En nuestro caso, abordamos el problema desde un punto de vista Lagrangiano, con el objetivo de caracterizar el comportamiento de la distribución de materia dentro de este tipo de remolinos.

El efecto no lineal de la aceleración centrífuga, introducida por la corrección ciclostrófica, modifica la intensidad de los remolinos geostróficos, fortaleciendo a los anticiclones y debilitando a los ciclones. En este estudio, analizamos dicho efecto sobre la dispersión de partículas en ambos tipos de remolinos. Para identificar la señal geostrófica, empleamos datos de altimetría satelital del nivel del mar correspondientes a dos giros en el Golfo de México: el anticiclón Kraken (Beron-Vera et al., 2018) y el ciclón de Campeche (Pérez-Brunius et al., 2013). Empleamos un modelo estocástico Lagrangiano para calcular las trayectorias de partículas pasivas advectadas por el campo de velocidad geostrófico y ciclogeostrófico y así obtener promedios de sus posiciones. Además, en el caso del Kraken, comparamos trayectorias de boyas a la deriva con las de las partículas artificiales.

3.1. Datos

Los campos de velocidad geostrófica utilizados en este estudio provienen de superficies de topografía dinámica absoluta con resolución temporal de 1 día y resolución espacial de 0.25° de longitud \times 0.25° de latitud. Este producto es distribuido por *Copernicus Marine and Environment Monitoring Service* (CMEMS; <https://www.copernicus.eu/en>). El periodo seleccionado para los experimentos con el ciclón de Campeche y el anticiclón Kraken corresponde al año 2013 en la región del Golfo de México. Las velocidades geostróficas se relacionan con la anomalía del nivel mar como

$$u_g = -\frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (31)$$

donde u_g y v_g son las componentes zonal y meridional de la velocidad geostrófica, respectivamente; f el parámetro de Coriolis, g la aceleración de la gravedad de la Tierra, y η representa la altura del nivel del mar.

Tabla 2. Información sobre el lanzamiento de las boyas en el anticiclón Kraken en el Golfo de México.

Boyas tipo <i>Far Horizon Drifter</i>			
Número de boya	Fecha de lanzamiento	Latitud °	Longitud °
1	25-05-2013	25.72	-86.86
2	25-05-2013	25.48	-87.93
3	27-05-2013	26.58	-89.21
4	03-06-2013	27.03	-89.73
5	23-06-2013	26.02	-88.54
6	25-06-2013	26.03	-89.72
7	30-07-2013	26.18	-90.29
8	30-07-2013	25.85	-90.81

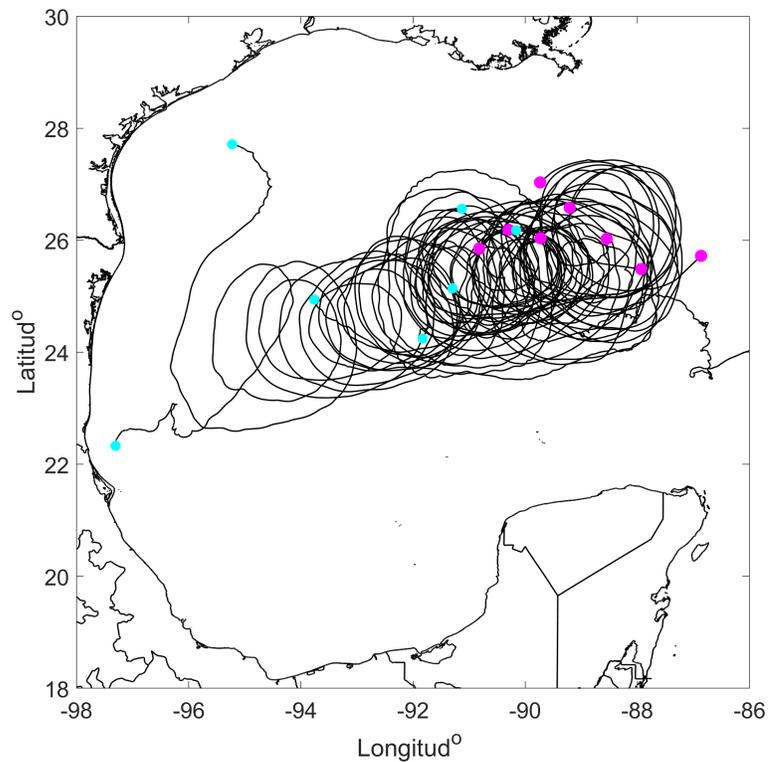


Figura 12. Trayectorias (en negro) de las 8 boyas tipo *Far Horizon Drifter* desplegadas en el Kraken. Cada trazador inicia desde (finaliza en) el punto magenta (turquesa). Las fechas y posiciones de lanzamiento se encuentran detalladas en la Tabla 2.

Para el análisis de las trayectorias sintéticas comparadas con trayectorias observadas, seleccionamos ocho boyas que fueron desplegadas en el Kraken en distintos puntos y fechas, como se detalla en la Tabla 2.

Las trayectorias fueron interpoladas usando la función *spline* de matlab y se muestran en la Figura 12. Las boyas son del tipo *Far Horizon Drifter* desplegadas por *Horizon Marine Inc.* como parte del programa *EddyWatch*. Cada dispositivo consiste en una boya cilíndrica de 96.5cm de largo, conectada mediante una cuerda de 45 m a un sistema de arrastre de 1.2 m. Las posiciones se registran cada hora utilizando un receptor GPS que transmite los datos a través del sistema *Argos* (Sharma et al., 2010; Beron-Vera et al., 2018).

3.2. Balance ciclogeográfico/viento gradiente

El equilibrio entre la fuerza de Coriolis, (menos) el gradiente de presión y la fuerza centrífuga recibe el nombre de viento gradiente (Holton & Hakim, 2013). Este balance proporciona una solución más general que el equilibrio geográfico, ya que incluye los efectos no lineales de la curvatura en el flujo. En flujos oceánicos, este equilibrio suele denominarse balance ciclogeográfico (e.g., Penven et al., 2014). La descripción del viento gradiente en un plano se basa en una ecuación formulada en un sistema de coordenadas naturales, en el que el movimiento se analiza en términos de dos vectores unitarios: \hat{t} , un vector tangencial que apunta en la dirección del flujo, y \hat{n} , un vector perpendicular que es definido positivo a la izquierda del flujo. La Figura 13(a) muestra un vector de velocidad arbitrario en coordenadas naturales.

En coordenadas naturales, el efecto del gradiente de presión en la dirección tangencial es despreciable, mientras que en la dirección normal el equilibrio de fuerzas puede expresarse mediante la siguiente ecuación (Holton & Hakim, 2013; Knox & Ohmann, 2006):

$$\frac{V_{gr}^2}{R_c} + fV_{gr} = fV_g, \quad (32)$$

donde f se considera constante, y V_{gr} y V_g representan las componentes de la velocidad ciclogeográfica (o viento gradiente) y geográfica en la dirección tangencial al flujo, respectivamente. En coordenadas cartesianas, sus componentes son (u_{gr}, v_{gr}) para la velocidad ciclogeográfica y (u_g, v_g) para la geográfica, por lo que $|V_{gr}| = \sqrt{u_{gr}^2 + v_{gr}^2}$ y $|V_g| = \sqrt{u_g^2 + v_g^2}$. R_c es el radio de curvatura, definido positivo cuando el centro de curvatura del flujo está en la dirección de \hat{n} . El término cuadrático corresponde a la aceleración centrípeta hacia el centro de curvatura, el cual se puede interpretar desde el punto de vista del flujo como la aceleración centrífuga hacia afuera de dicho centro. La solución de la ecuación (32) en

términos de V_g (Knox & Ohmann, 2006) es:

$$V_{gr} = \frac{2V_g}{1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{4V_g}{fR_c}\right)}}. \quad (33)$$

La solución de esta ecuación depende del signo (dado por el gradiente de presión en coordenadas naturales) y magnitud de la velocidad geostrófica, así como del radio de curvatura. En nuestro trabajo consideramos únicamente raíces positivas que generan ciclones y anticiclones regulares, que son los más comunes en flujos geofísicos (Knox & Ohmann, 2006; Holton & Hakim, 2013). Las Figuras 13(b)-(c) muestran los diagramas de fuerza correspondientes a giros ciclónicos y anticiclónicos regulares en el hemisferio norte ($f > 0$). Por lo tanto, no se tomará en cuenta las raíces negativas, que están asociadas a remolinos anómalos, en los cuales la fuerza centrífuga supera a la fuerza del gradiente de presión (Holton & Hakim, 2013). Por supuesto, tampoco se considera las soluciones que no son reales. Por ejemplo, si $R_c < 0$ tal que $1 + 4V_g/fR_c < 0$, la solución del viento gradiente resulta ser imaginaria.

Para calcular el radio de curvatura usamos la definición propuesta por Cohen et al. (2019) y utilizada por Hiron et al. (2020), la cual parte de expresar el rotacional de un vector de velocidad \mathbf{V} en coordenadas naturales como la suma del corte más la curvatura:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \left(\frac{\partial V}{\partial \hat{\mathbf{n}}} + \frac{V}{R_c} \right) \hat{\mathbf{k}},$$

donde V es la magnitud del vector y $\hat{\mathbf{k}}$ el vector unitario en la dirección vertical. Si se considera el vector unitario \mathbf{V}/V , el corte o cambio espacial es cero, i.e. la derivada en la dirección normal desaparece, resultando en que

$$R_c^{-1} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla \times \left(\frac{\mathbf{V}}{V} \right). \quad (34)$$

Dado que la velocidad del viento gradiente y la velocidad geostrófica tienen la misma dirección, las componentes en coordenadas cartesianas de la primera pueden expresarse como (Hiron et al., 2020):

$$u_{gr} = u_g \frac{V_{gr}}{V_g}, \quad v_{gr} = v_g \frac{V_{gr}}{V_g}. \quad (35)$$

El cálculo de la velocidad ciclogeostrófica V_{gr} se realiza a partir de la normalización de las componentes de la velocidad geostrófica, con el fin de obtener el radio de curvatura mediante la ecuación (34). Luego, utilizando dicho radio, el parámetro de Coriolis y la magnitud de la velocidad geostrófica en cada punto de la malla, se calcula la velocidad del viento gradiente conforme a la ecuación (33). Finalmente, las componentes cartesianas de la velocidad ciclogeostrófica se obtienen aplicando la ecuación (35). Este procedimiento se repite para cada instante del periodo de análisis.

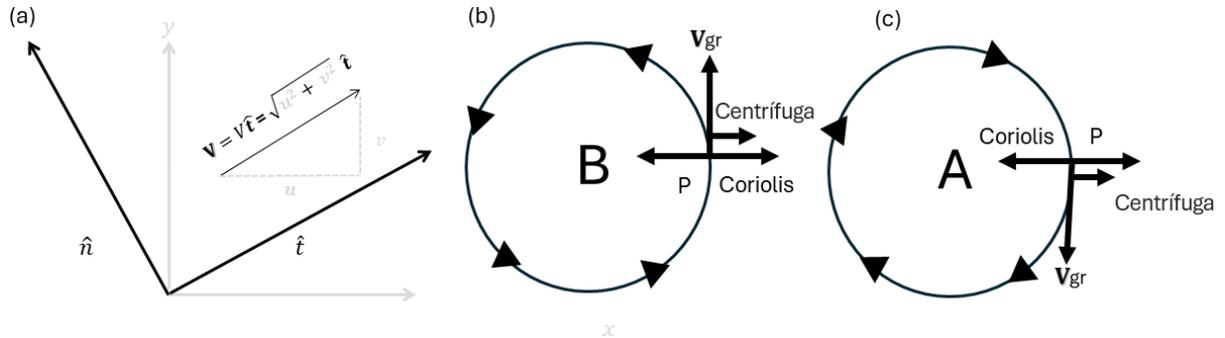


Figura 13. (a) Representación de un vector de velocidad arbitrario \mathbf{V} , en coordenadas naturales \hat{t} y \hat{n} junto con las coordenadas cartesianas (x, y) . (b)-(c) Balance de fuerzas del viento gradiente en giros ciclónicos y anticiclónicos regulares en el hemisferio norte. Las letras A y B indican presiones altas y bajas, respectivamente.

3.2.1. Método de detección de remolinos

Una forma común de detectar remolinos oceánicos es mediante métodos Eulerianos, como aquellos que identifican contornos cerrados del campo de altura del nivel del mar (SSH) o aplican el criterio de Okubo–Weiss, el cual compara la deformación y la rotación del flujo. Sin embargo, estos métodos dependen del sistema de referencia empleado, ya que se basan en cantidades físicas no objetivas, como la vorticidad o la función corriente. En este contexto, el término *objetividad* se refiere a la propiedad de ciertas cantidades de permanecer invariantes bajo transformaciones del marco de referencia, tales como rotaciones o traslaciones (Haller, 2023). El Anexo C presenta la definición formal de objetividad de vectores y tensores.

Existen métodos objetivos de detección Lagrangianos que definen a los remolinos desde un enfoque geométrico, como los descritos en Andrade-Canto et al. (2020), que incluyen el denominado *Null-Geodesic Rings* y el de *Diffusion-Barriers*. El primero identifica remolinos como cinturones materiales impermeables que desafían el estiramiento exponencial típico que experimentan los bucles en flujos turbulentos. El segundo detecta regiones que desafían a la difusión. Ambos métodos utilizan el tensor de Cauchy–Green,

lo que permite una detección objetiva de vórtices.

En este trabajo utilizamos el método Lagrangiano *Rotationally Coherent Rings* (RCR) (Haller et al., 2016; Tarshish et al., 2018; Andrade-Canto et al., 2020), el cual se basa en la idea de que los remolinos son regiones con alta concentración de vorticidad donde el fluido gira de manera organizada alrededor de un centro. Para el cálculo se usa el *Lagrangian Averaged Vorticity Deviation* (LAVD), un campo asociado a la rotación del flujo (Haller et al., 2016; Tarshish et al., 2018; Andrade-Canto et al., 2020). La objetividad del LAVD se fundamenta mediante la expresión (55) del Anexo C, que demuestra que la diferencia entre el tensor de rotación y su promedio es invariante ante cambios de marco de referencia.

El LAVD se calcula a partir de la anomalía del promedio de la vorticidad experimentada por un conjunto de partículas advectadas por el campo de velocidad. En el campo LAVD, los centros de los remolinos se identifican como los máximos locales, y sus bordes como las curvas de nivel convexas más externas que rodean dichos máximos. La definición de LAVD viene dada por (Haller et al., 2016; Andrade-Canto et al., 2020)

$$\text{LAVD} = \int_{t_0}^{T+t_0} |\omega(\mathbf{x}, t) - \bar{\omega}(t)| dt. \quad (36)$$

donde t_0 y T representan el tiempo inicial y el período de integración, respectivamente. La función $\omega(\mathbf{x}, t)$ es la vorticidad en cada punto del espacio \mathbf{x} donde están las partículas al tiempo t , mientras que $\bar{\omega}(t)$ corresponde a la vorticidad promedio sobre el área del ensamble de trazadores en el mismo instante.

La detección de remolinos comienza estableciendo las condiciones iniciales necesarias para calcular el campo LAVD. En el caso de la velocidad geostrófica, se selecciona el campo de velocidad al día t_0 y se posiciona una malla de partículas cubriendo el dominio de interés. La Figura 14(a) ilustra esquemáticamente la distribución inicial de partículas sobre un remolino. Posteriormente, las partículas son advectadas por el campo de velocidad durante el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + T]$. En cada paso de tiempo Δt se extrae el valor de la vorticidad de los puntos donde están posicionadas las partículas y se promedian. Con la diferencia entre los valores de la vorticidad en cada punto donde están las partículas y su promedio, se procede a hacer la integración temporal para calcular el LAVD. La Figura 14(b) ilustra esquemáticamente el campo de vorticidad (en amarillo) y las partículas advectadas para calcular el LAVD.

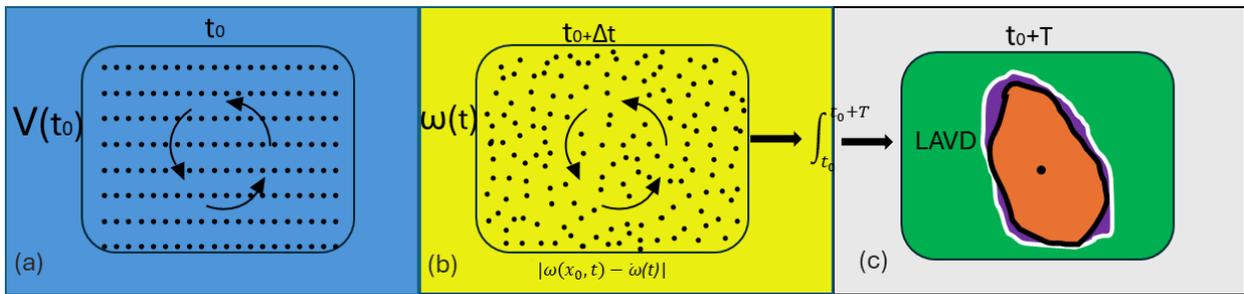


Figura 14. Esquema del método de detección de remolinos *Rotationally Coherent Rings* (RCR). (a) Condición inicial al tiempo t_0 ; el color azul representa el campo de velocidad, las flechas negras al remolino a definir y los puntos negros la malla de partículas iniciales. (b) Extracción de la vorticidad (amarillo) de cada punto donde están las partículas al paso de tiempo Δt . (c) Campo LAVD (color verde) al tiempo de integración T . El color naranja representa el área del remolino, el contorno negro su frontera, el contorno blanco es la curva más convexa que envuelve al remolino y el color morado representa el área entre el contorno negro y blanco. El punto negro representa el máximo local de LAVD o centro del remolino.

En el campo LAVD, los remolinos se conforman por un conjunto de curvas de nivel convexas que rodean un punto máximo de este campo escalar, siendo el contorno más externo el que define su frontera. La convexidad de este contorno se cuantifica mediante el parámetro *Convexity Deficiency* (CD). De acuerdo al esquema mostrado en la Figura 14(c), el CD se obtiene dividiendo el área morada entre el área naranja. La primera corresponde a la región comprendida entre el contorno del remolino (negro) y la envolvente convexa más pequeña que lo contiene por completo (blanco). Un valor bajo del CD indica que el contorno del remolino es casi convexo o que el área morada es reducida.

3.2.2. Campos de velocidad

En esta subsección se muestra los campos geostrofico y ciclogeostrofico del remolino anticiclónico de interés, así como su detección mediante el método RCR. El Kraken es un remolino anticiclónico de mesoescala que se desprendió de la corriente de Lazo en la primera mitad de 2013, con un tiempo de vida aproximado de siete meses (Beron-Vera et al., 2018). En la Figura 15 se muestran los campos de LAVD resultantes de la velocidad geostrofica (panel a) y ciclogeostrofica (panel b), junto con el contorno convexo más externo y el centro (punto máximo de LAVD) del Kraken. El contorno está formado por partículas materiales que, al ser advectadas por el campo de velocidad, permiten seguir la evolución del remolino en el tiempo. Para la detección usamos la función `rvc.mat` de Matlab construida por F.J. Beron-Vera, con última revisión el 23/10/2023. La malla inicial se compuso de 256×256 partículas para t_0 del 10 de junio de 2013, $T = 30$ días, $\Delta t = 0.1$ día y un $CD = 0.001$.

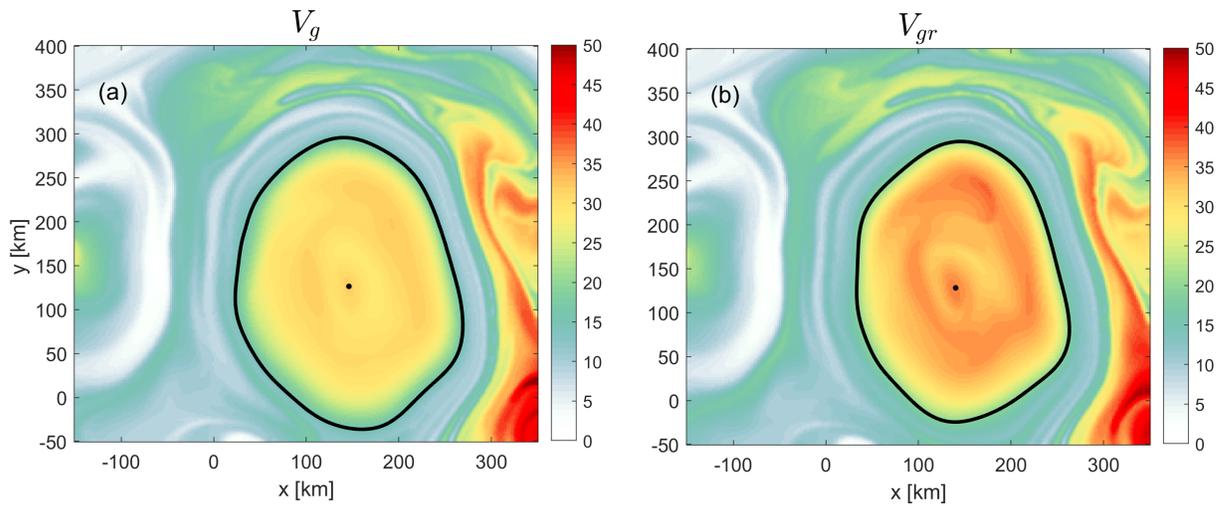


Figura 15. Campo LAVD en el remolino Kraken obtenido con la velocidad (a) geostrófica, y (b) ciclogeostrófica. Los contornos negros son las curvas externas más convexas que rodean al Kraken y el punto negro el máximo local de LAVD o centro del remolino.

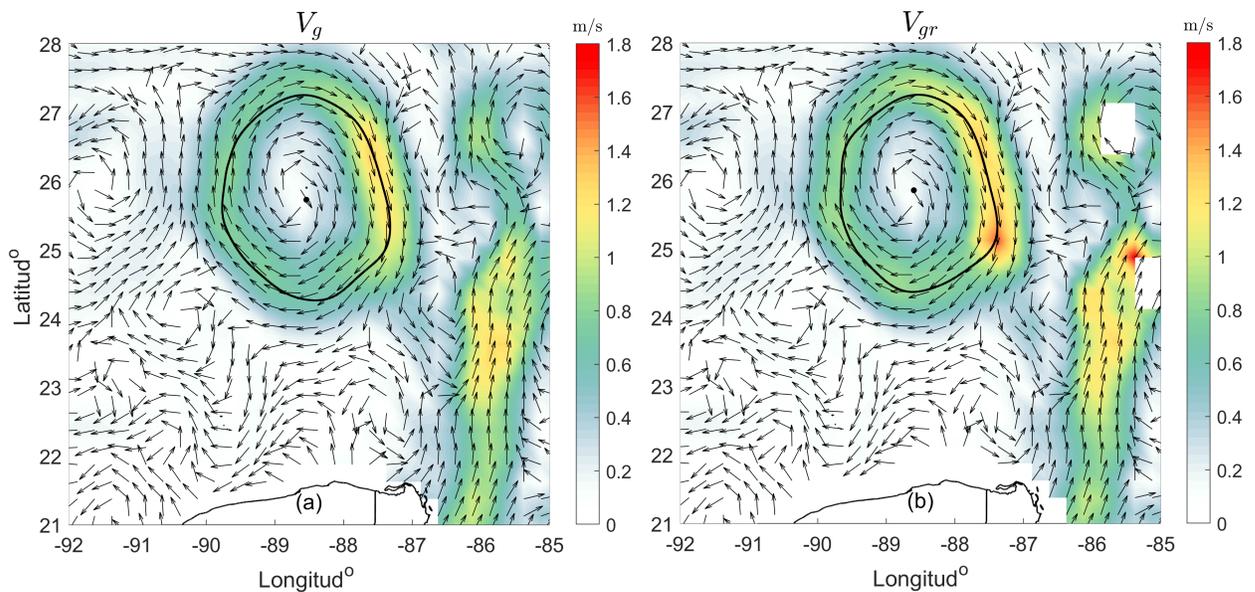


Figura 16. Magnitud y dirección de la velocidad (a) geostrófica (b) ciclogeostrófica para el 10 de junio de 2013. Los contornos y puntos negro en el centro, calculados a partir del LAVD, delimitan al Kraken. Las flechas son vectores unitarios que indican la dirección del flujo.

La Figura 16 muestra la ubicación del Kraken el 10 de junio de 2013 sobre los campos de velocidad geostrófica (a) y ciclogeostrófica (b). Los tonos rojos más intensos de los mapas de velocidad indican que el campo ciclogeostrófico en el Kraken es más intenso que el geostrófico. Esto se confirma en los mapas de la Figura 17, donde se muestra la diferencia de la magnitud de ambos campos. Además, la diferencia relativa entre estos campos, panel (b), indica que la velocidad ciclogeostrófica del Kraken es entre un

30 % a 40 % superior a la geostrófica dentro del remolino y en la parte este del dominio escogido. Por el contrario, las tonalidades azules corresponden a giros ciclónicos e indican que la magnitud del campo ciclogeostrófico es más débil que el geostrófico. Las áreas blancas corresponden a flujos sin curvatura o en equilibrio geostrófico. Cuando V_{gr} , ecuación (33), es imaginaria se le asigna un valor de cero, aunque son pocas las áreas donde esto ocurre. La intensificación (debilitamiento) de los anticiclones (ciclones) por efectos centrífugos es análogo a lo que ocurre en los remolinos idealizados bajo efectos no lineales en decaimiento por la capa de Ekman del fondo, descritos en el Anexo A.

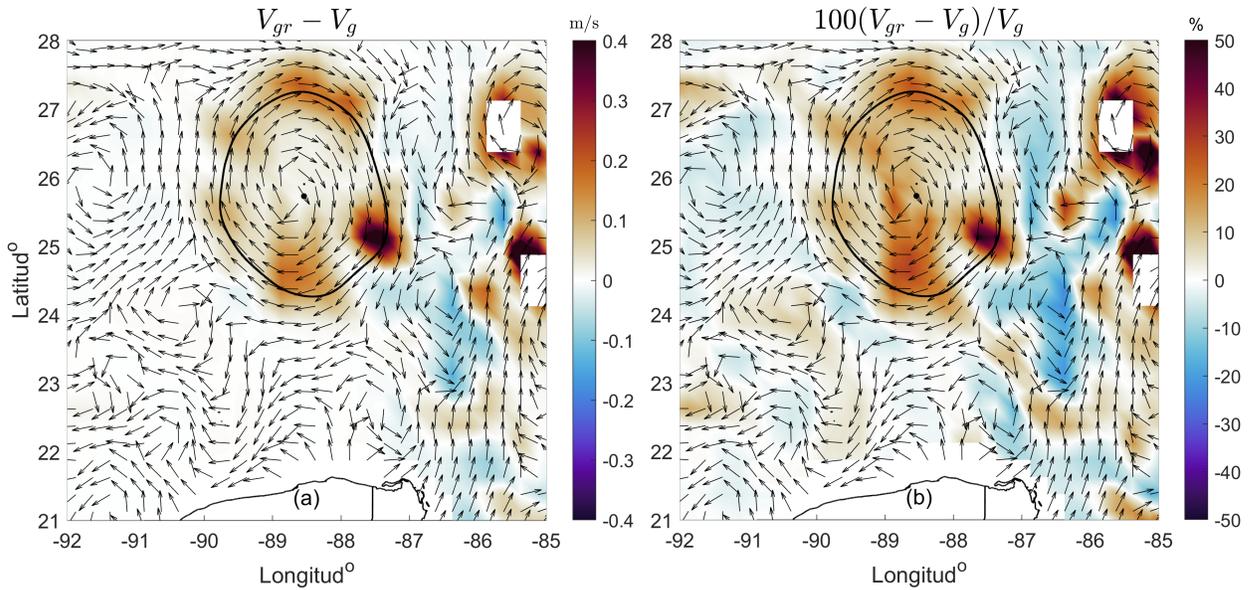


Figura 17. (a) Diferencia absoluta y (b) diferencia relativa entre la magnitud de las velocidades ciclogeostrófica y geostrófica del remolino Kraken. Ambos paneles corresponden al 10 de junio de 2013. Los contornos y el punto negro central, calculados a partir del LAVD, delimitan al remolino. Las flechas representan vectores unitarios que indican la dirección del flujo.

3.3. Dispersión de partículas en el Kraken

3.3.1. Dispersión horizontal

Los experimentos de dispersión consisten en adveccionar cargas puntuales de 2500 partículas partiendo desde una posición inicial dada dentro del remolino. Para obtener las trayectorias de las partículas seguimos un procedimiento similar al descrito en la sección 2.1.1, pero en coordenadas cartesianas (x, y) . De esta forma la ecuaciones de trayectoria se definen como

$$\left. \begin{aligned} dx &= u(x, y)dt + u_a(t)dt, \\ dy &= v(x, y)dt + v_a(t)dt. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Aquí u y v representan las componentes de velocidad en dicho sistema coordenado, y u_a, v_a son las componentes estocásticas correspondientes. La difusividad horizontal K asociada se escoge bajo los mismos criterios utilizados en la subsección 2.1.1.

La Figura 18 muestra dos secuencias de imágenes que ilustran la dispersión de una carga puntual de partículas dentro del Kraken a distintos tiempos. Los paneles (a)-(d) en la primera columna muestran partículas advectadas por el campo geostrófico (puntos rojos), mientras que los paneles (e)-(h) corresponden a los trazadores advectados por el campo ciclogeostrófico (puntos azules). Los vectores indican los correspondientes campos de velocidad y las superficies en gris su magnitud. Las cargas parten el 10 de junio de 2013 a 75 km al este del centro del remolino (punto verde). El paso de tiempo es de una hora con una difusividad de $K = 22 \text{ m}^2/\text{s}$ (Martin et al., 2001). Cada panel contiene la evolución del centro y el contorno del Kraken (en negro), así como la trayectoria del centro de masa o posición promedio de las partículas, en amarillo para el caso geostrófico y en turquesa para el ciclogeostrófico.

Entre las principales diferencias de los experimentos de la Figura 18, se encuentra el desfase de las trayectorias del centro de masa en cada campo de velocidad. Este desfase se vuelve evidente desde la primera semana (paneles a y e), y se vuelve más evidente a los 12 y 19 días de advección, cuando las partículas rojas y su centro de masa quedan rezagados con respecto a las partículas azules. Una tendencia similar se observa a los 30 días, después de un mayor número de giros completados. Este comportamiento resulta de la corrección ciclostrófica, que incrementa la velocidad dentro de los anticiclones. No obstante, para estos tiempos, la nube de partículas no experimenta una dispersión significativa en ninguno de los remolinos. Un alargamiento notable en la nube de partículas no inicia sino hasta después de aproximadamente 100 días (no ilustrado). Esto se debe posiblemente a que la descarga se realizó en un radio menor a la región de máxima velocidad azimutal.

La Figura 19(a) muestra las gráficas de la evolución temporal del centro de masa de las partículas respecto a su posición inicial, basada en las ecuaciones (21)-(22), correspondiente a los experimentos de la Figura 18. Ambas curvas tienen un comportamiento oscilatorio, donde cada oscilación está asociada a una vuelta del centro de masa alrededor del núcleo del remolino. Las curvas azules alcanzan sus máximos (o cualquier otro punto) antes que las rojas, lo que confirma que el centro de masa en el campo ciclogeostrófico se desplaza más rápido que en el geostrófico. A partir de los máximos de cada

curva, el período de oscilación promedio del centro de masa de cada caso es

$$T_{V_g} \approx 13 \text{ días}, \quad T_{V_{gr}} \approx 10.8 \text{ días}.$$

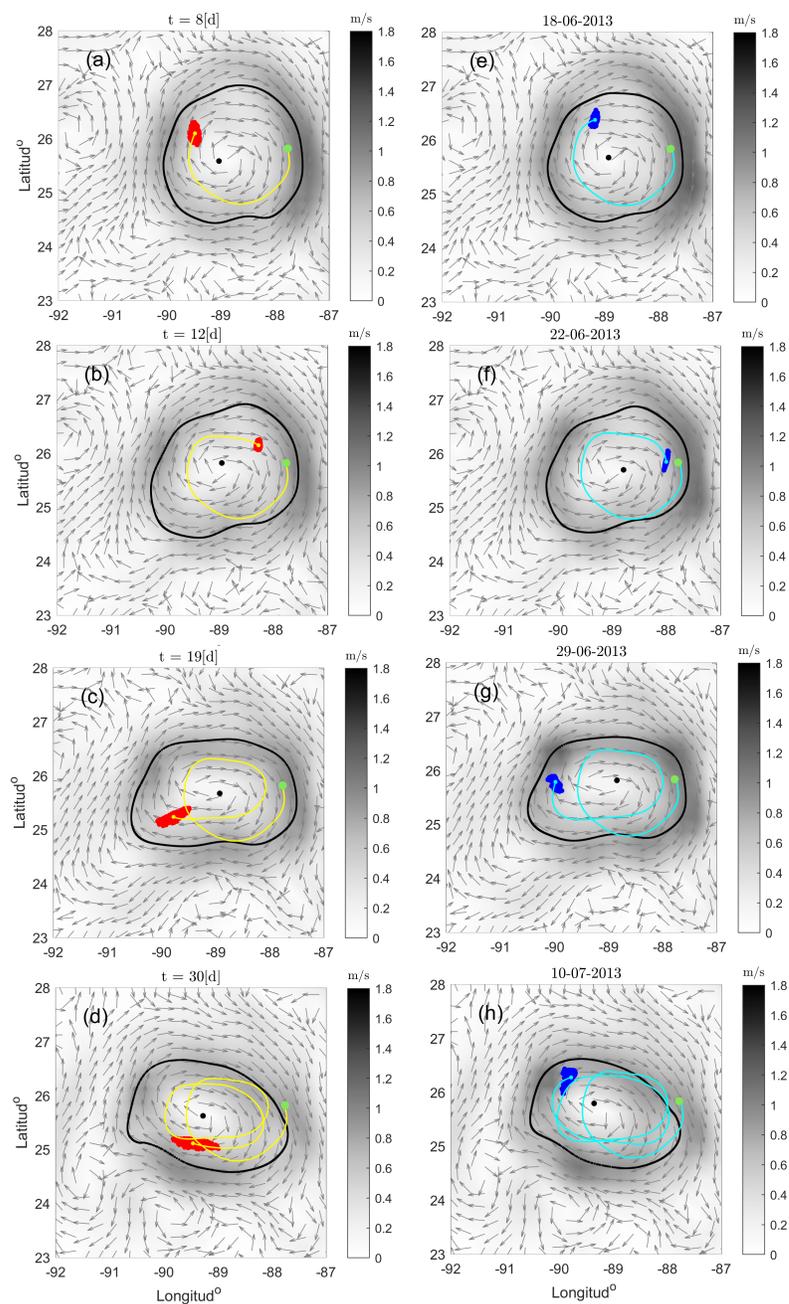


Figura 18. Redistribución de 2500 partículas en distintos tiempos dentro del Kraken. (a)–(d) velocidad geostrófica (rojo) y (f)–(h) velocidad ciclogeostrófica (azul). El punto verde marca la posición inicial de las partículas, mientras que las curvas amarilla y turquesa representan la trayectoria de sus centros de masa. Los contornos y puntos negros delimitan al remolino. Las flechas indican la dirección del flujo.

Estos valores significan que tras 40 días de simulación, la aceleración centrífuga reduce el período de rotación en aproximadamente 2.2 días (≈ 53 horas).

Para calcular la distancia recorrida por los centros de masa, utilizamos la suma acumulativa de los segmentos que se han desplazado en cada paso de tiempo:

$$\ell(t) = \sum_n \left[\left(\langle X \rangle_{n+1} - \langle X \rangle_n \right)^2 + \left(\langle Y \rangle_{n+1} - \langle Y \rangle_n \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (38)$$

donde n es el paso de tiempo. La evolución temporal de esta cantidad se presenta en el panel (b) de la Figura 19. En estas curvas se observa que la trayectoria acumulada del centro de masa en el remolino ciclogeográfico es mayor que la del geostrófico (cerca de 400 km, aproximadamente).

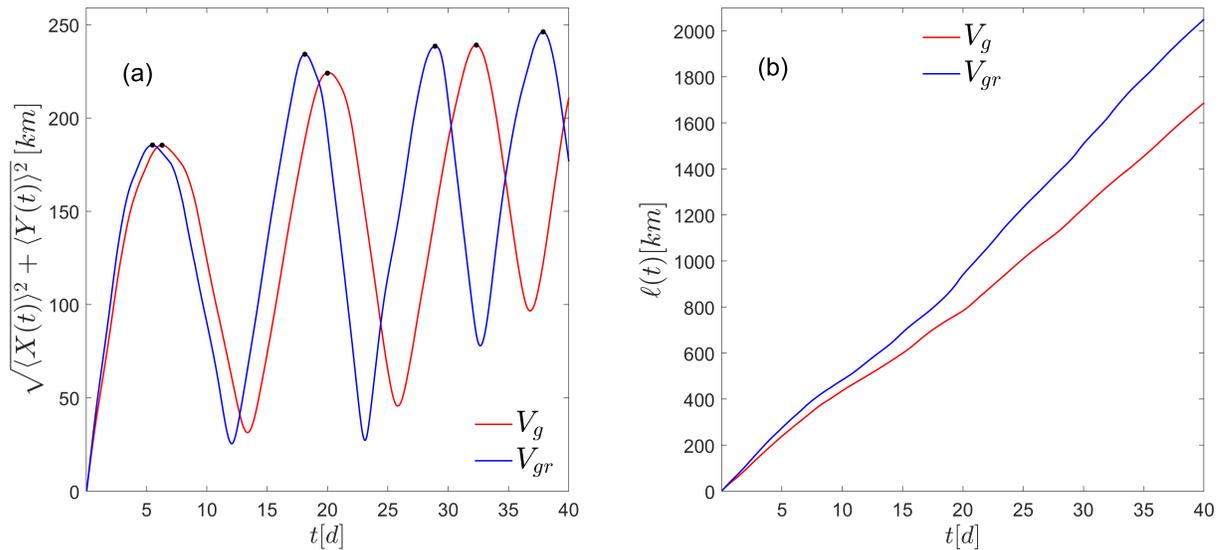


Figura 19. (a) Evolución temporal del centro de masa de las partículas mostradas en los experimentos de la Figura 18 calculado con las ecuaciones (21)-(22). En rojo el caso geostrófico y en azul el ciclogeográfico. Los puntos negros indican los máximos locales de las curvas. (b) Suma acumulativa de la distancia recorrida por el centro de masa a cada paso de tiempo, ecuación (38).

La redistribución espacial de las partículas en el interior del remolino Kraken (Figura 18) da lugar a oscilaciones en las curvas de dispersión respecto al centro de masa calculado con la ecuación (25), como se aprecia en la Figura 20 para dos valores de difusividad ($K = 22 \text{ m}^2/\text{s}$ y $K = 44 \text{ m}^2/\text{s}$). Al comparar las curvas de dispersión geostrófica y ciclogeográfica (líneas roja y azul, respectivamente), se observa un desfase en los máximos locales. Por ejemplo, alrededor del día 8 en la Figura 20(a), la dispersión asociada al campo geostrófico supera a la del ciclogeográfico. Esta diferencia se refleja en las Figuras 18(a) y (e), donde la nube roja presenta una mayor extensión que la azul. En cambio, cerca del día 12,

la curva de dispersión ciclogeostrófica sobrepasa a la geostrófica, debido a la forma más compacta de la nube roja en comparación con la azul en las Figuras 18(b) y (f). Esta alternancia continúa hacia el día 20, cuando la dispersión geostrófica vuelve a ser dominante, como se evidencia en la mayor elongación de la nube correspondiente en las Figuras 18(c) y (g). Una situación similar ocurre hacia el día 30, donde la curva roja persiste por encima de la azul [Figuras 18(d) y (h)].

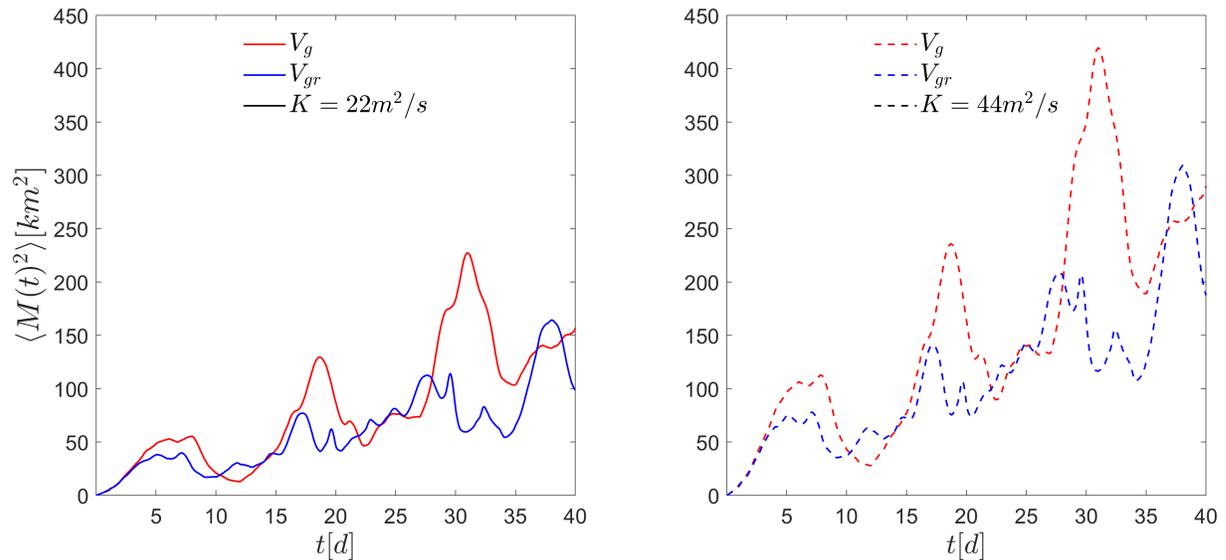


Figura 20. Evolución temporal de la dispersión respecto al centro de masa dentro del Kraken en balance geostrófico (rojo) y en balance ciclogeostrófico (azul). (a) $K = 22 \text{ m}^2/\text{s}$, experimentos de la Figura 18. (b) $K = 44 \text{ m}^2/\text{s}$.

Resumiendo, las curvas de la Figura 20 indican que el campo geostrófico dispersa más a una nube de partículas que el ciclogeostrófico, aunque este último las distribuye más rápido, ya que los máximos azules ocurren antes que los rojos. Además, cuando la difusividad aumenta al doble, la dispersión respecto al centro de masa también duplica sus valores; sin embargo, el comportamiento oscilatorio es el mismo [comparar los paneles (a) y (b) de la Figura 20]. Los experimentos del Anexo B sugieren que las oscilaciones en las curvas de dispersión se deben a la forma del remolino, coincidiendo con lo observado en el dipolo de Chaplygin (Ocampo Jaimes et al., 2022).

3.4. Dispersión de partículas en el giro de Campeche

Esta sección está dedicada a describir la dispersión de partículas en el giro de Campeche, un ciclón semipermanente que se forma en el suroeste del Golfo de México (Pérez-Brunius et al., 2013). Como se hizo con el Kraken anticiclónico, se compara los efectos dispersivos de las velocidades gesotrófica y

ciclogeográfica. En las siguientes figuras que contienen estos campos se mantiene la misma barra de colores que en el caso anticiclónico para fines de comparación.

En la Figura 21(a) se presentan los campos de velocidad geográfica y en la Figura 21(b) los de la ciclogeográfica correspondientes al 9 de septiembre del 2013 en la zona del giro de Campeche. Al igual que en el caso del Kraken, el ciclón se delimita por medio del campo LAVD. A diferencia de los anticiclones, en los ciclones la corrección ciclostrófica reduce la magnitud de la velocidad. Esta diferencia se puede apreciar sutilmente en la magnitud de las velocidades indicadas en los tonos azul claro. La discrepancia es más evidente en la Figura 22(a), donde se presenta la diferencia entre la magnitud de la velocidad geográfica y la ciclogeográfica. En particular, la Figura 22(b) indica que, en el giro de Campeche, la velocidad geográfica es entre un 10% y un 15% mayor que la ciclogeográfica.

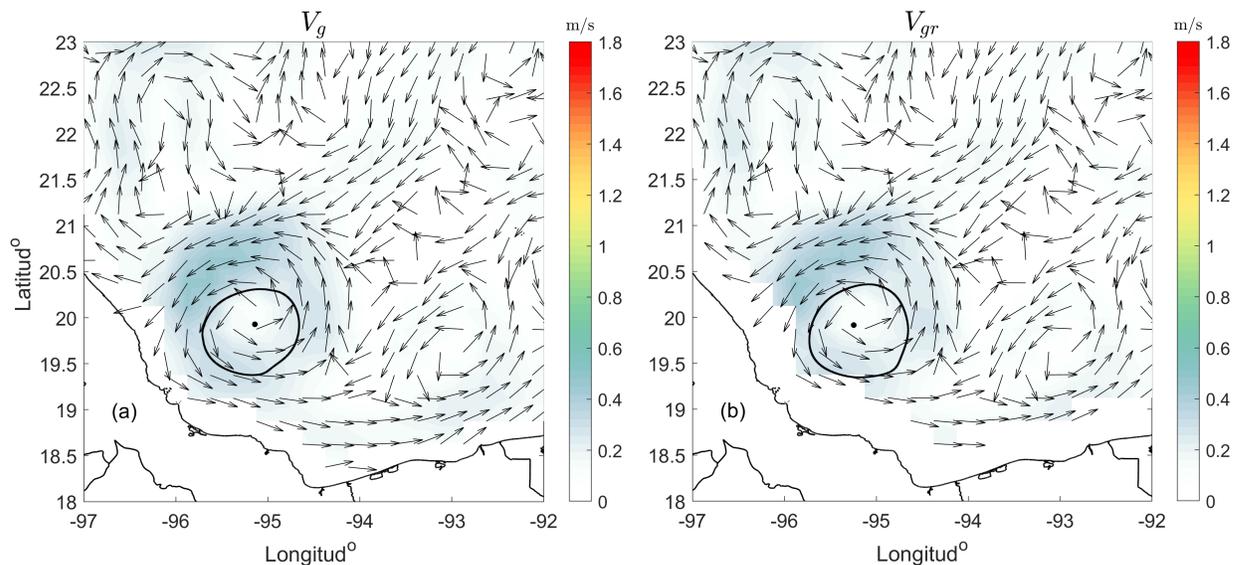


Figura 21. Igual que la Figura 16, pero en el ciclón de Campeche.

La Figura 23 contiene secuencias de imágenes que ilustran la redistribución de cargas puntuales de partículas, junto con la trayectoria de su posición promedio o centro de masa, dentro del giro de Campeche. En rojo se presenta el caso geográfico y en azul el ciclogeográfico. En ambos experimentos, las partículas inician a 32 kilómetros al este del centro del giro el 9 de septiembre del 2013. Esta condición inicial permite que las partículas giren el tiempo suficiente antes de acercarse a la costa, donde no se cuenta con datos de velocidad. Si alguna alcanza esas regiones, recibe un impulso dirigido hacia el este. De nuevo, usamos una difusividad turbulenta de $K = 22 \text{ m}^2/\text{s}$.

Al igual que en el caso anticiclónico, al comparar los paneles de la Figura 23 se aprecia un desfase

entre las manchas de partículas gesotróficas y ciclogeotróficas (rojas y azules, respectivamente). Sin embargo, la propagación de la nube de partículas azul es más lenta, como era de esperar considerando el debilitamiento del campo ciclogeotrófico. Además, en el día 33 se observa una franja alargada de partículas en el campo geotrófico y también en el ciclogeotrófico, lo cual se asocia con la deformación y alargamiento del remolino. Este comportamiento influye en la redistribución angular de partículas en el giro de Campeche, como también se observó en el Kraken (comparar paneles finales de las Figuras 18 y 23).

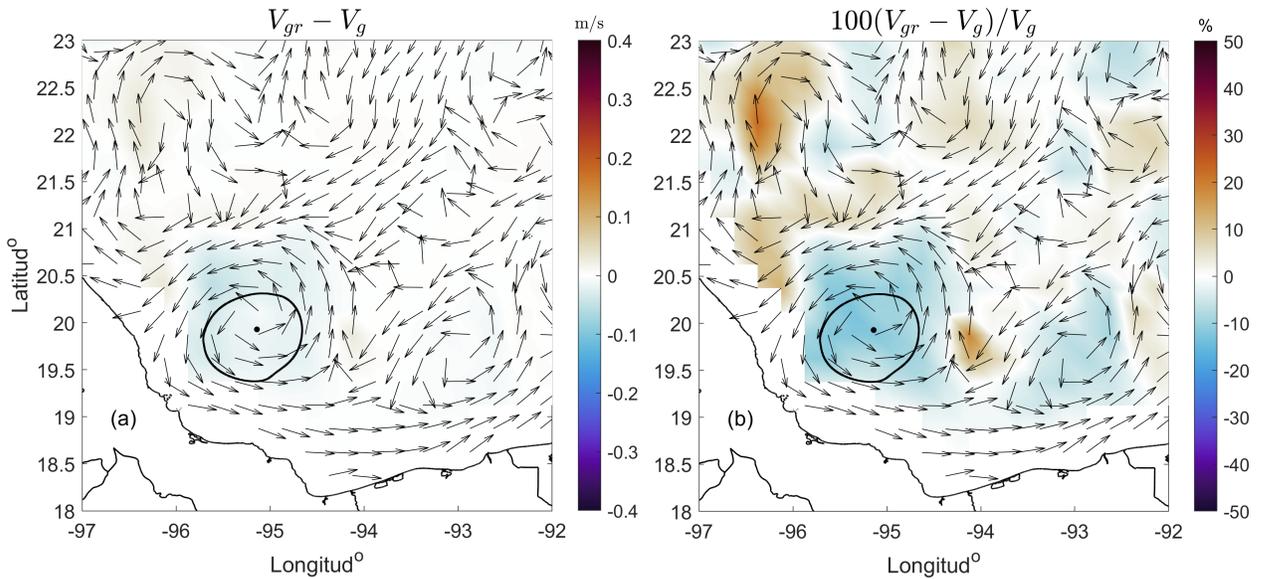


Figura 22. Igual que la Figura 17, pero en el ciclón de Campeche.

En la Figura 24(a) se muestran las gráficas de la evolución temporal del centro de masa, respecto a la posición inicial de las partículas, resultante de los experimentos de la Figura 23. De nuevo, las oscilaciones de las curvas están desfasadas a causa de la ralentización que genera la aceleración centrífuga en el campo ciclogeotrófico. En este caso, las curvas rojas (balance geotrófico) alcanzan su punto máximo antes que las azules (balance ciclogeotrófico), indicando que el remolino geotrófico gira más rápido. A partir de los máximos de las curvas, el periodo promedio de rotación del giro de Campeche resulta en

$$T_{V_g} \approx 8.5 \text{ días}, \quad T_{V_{gr}} \approx 9.8 \text{ días}.$$

La diferencia entre los periodos de rotación a los 40 días es de aproximadamente 1.2 días (28.8 horas). Las curvas de la distancia recorrida por los centros de masa, según la ecuación (38) y mostradas en la Figura 24(b), indican que en el balance ciclogeotrófico (azul), el centro de masa recorre menos distancia

que en el geostrófico (rojo).

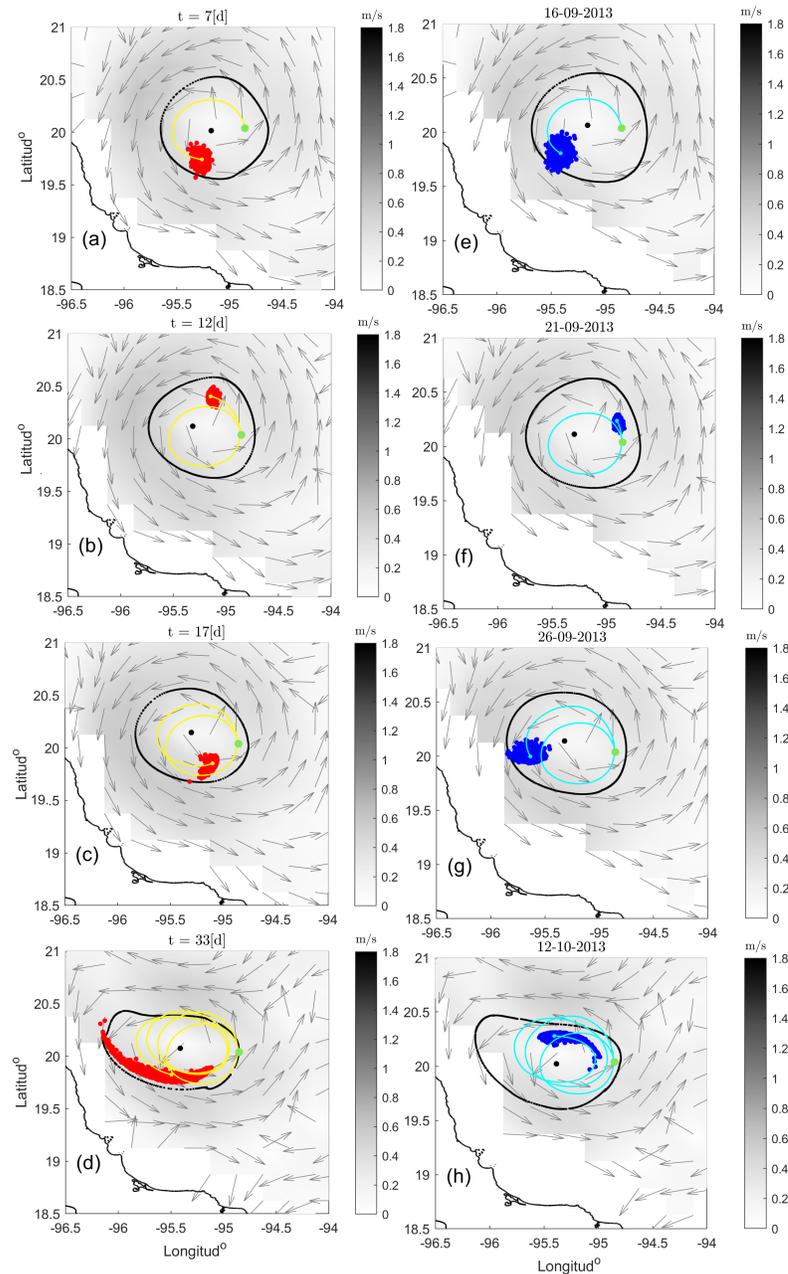


Figura 23. Igual que la Figura 18, pero en el ciclón de Campeche.

Finalmente, al igual que en el Kraken, la redistribución de partículas conforme se trasladan alrededor del remolino en los experimentos de la Figura 23, genera oscilaciones en la dispersión respecto al centro de masa, como se aprecia en la Figura 25. Este fenómeno se observa independientemente del valor de la difusividad turbulenta utilizado, ya sea para $K = 22 \text{ m}^2/\text{s}$ (panel a) o $K = 44 \text{ m}^2/\text{s}$ (panel b). Sin embargo, a diferencia del anticiclón, en el giro de Campeche las curvas rojas alcanzan sus máximos locales

antes que las azules, debido a que la intensidad de la velocidad geostrófica supera a la ciclogeostrófica. Este efecto es muy sutil, pero se puede apreciar en los tres primeros máximos relativos de las curvas rojas y azules (antes del día 30) en ambos paneles. Poco después del día 30, el valor de la curva geostrófica se dispara, lo cual está directamente relacionado con el alargamiento de la mancha de partículas observado en la Figura 23(d). Un aumento similar ocurre en el caso ciclogeostrófico pero hasta poco antes del día 40.

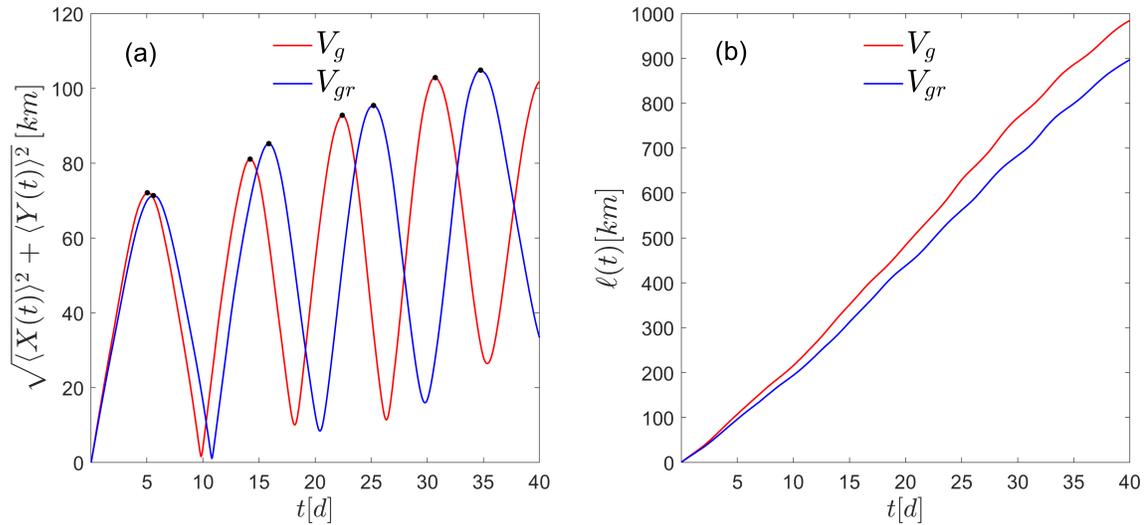


Figura 24. Igual que la Figura 19, pero en el ciclón de Campeche.

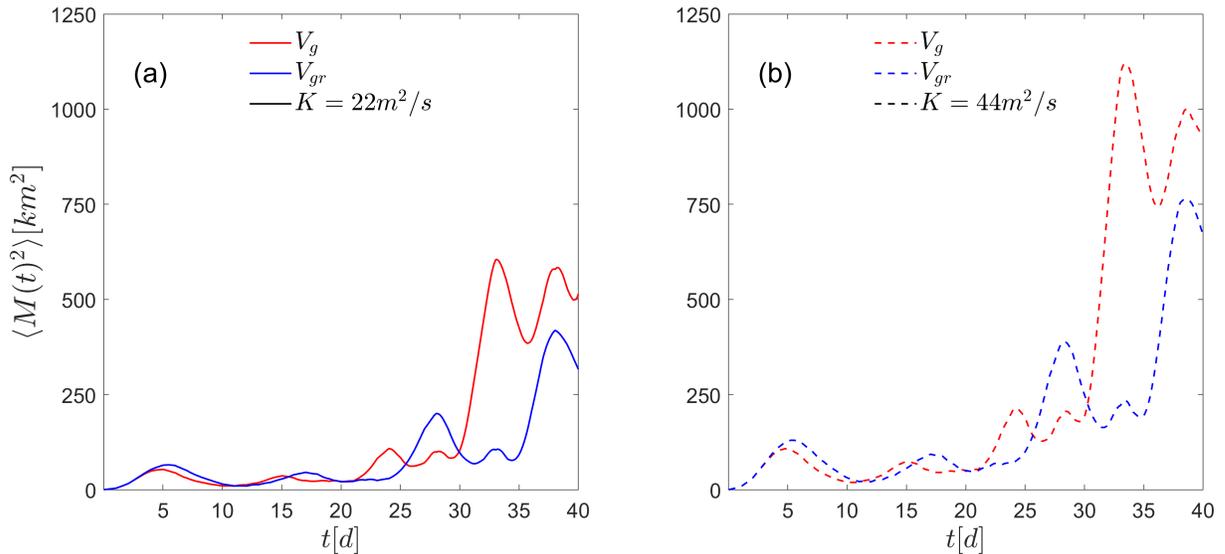


Figura 25. Igual que la Figura 20, pero en el ciclón de Campeche.

3.5. Comparación entre trayectorias sintéticas y boyas en el Kraken

En esta sección se comparan las trayectorias de boyas a la deriva con las de partículas individuales advectadas por los campos de velocidad geostrófica y ciclogeostrófica dentro del Kraken. El objetivo de los experimentos es determinar qué balance y difusividad reproduce mejor el desplazamiento registrado por las boyas. Para ello, se emplearon ocho boyas, divididas en dos conjuntos: *Kraken-Intenso*, que agrupa las boyas que rotan en el remolino cuando presenta mayor intensidad (Figura 26); *Kraken-Débil*, que incluye aquellas que lo hacen cuando la intensidad del anticiclón ha disminuido (Figura 27). Las partículas individuales parten de las mismas posiciones y fechas de lanzamiento de las boyas. El coeficiente de difusividad elegido fue $K = 22 \text{ m}^2/\text{s}$.

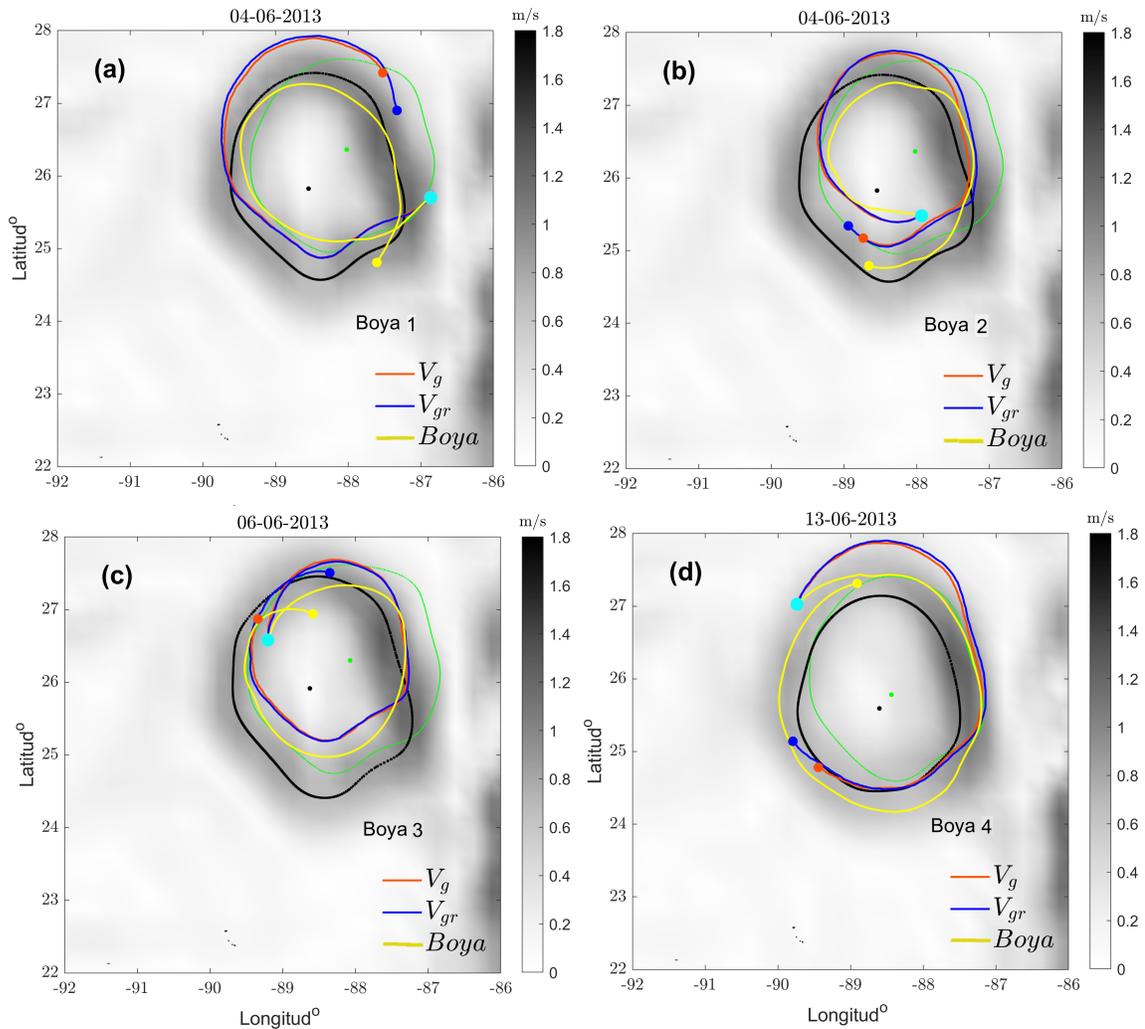


Figura 26. Trayectorias de cada una de las boyas (amarillo) del conjunto Kraken-Intenso y las de la partícula geostrófica (rojo) y ciclogeostrófica (azul) asociadas, tras 10 días de advección. Cada panel muestra el número de la boya correspondiente. Todos los trazadores parten desde el punto turquesa. El contorno y el punto verde (negro) indican la posición inicial (final) del borde y centro del remolino geostrófico, respectivamente

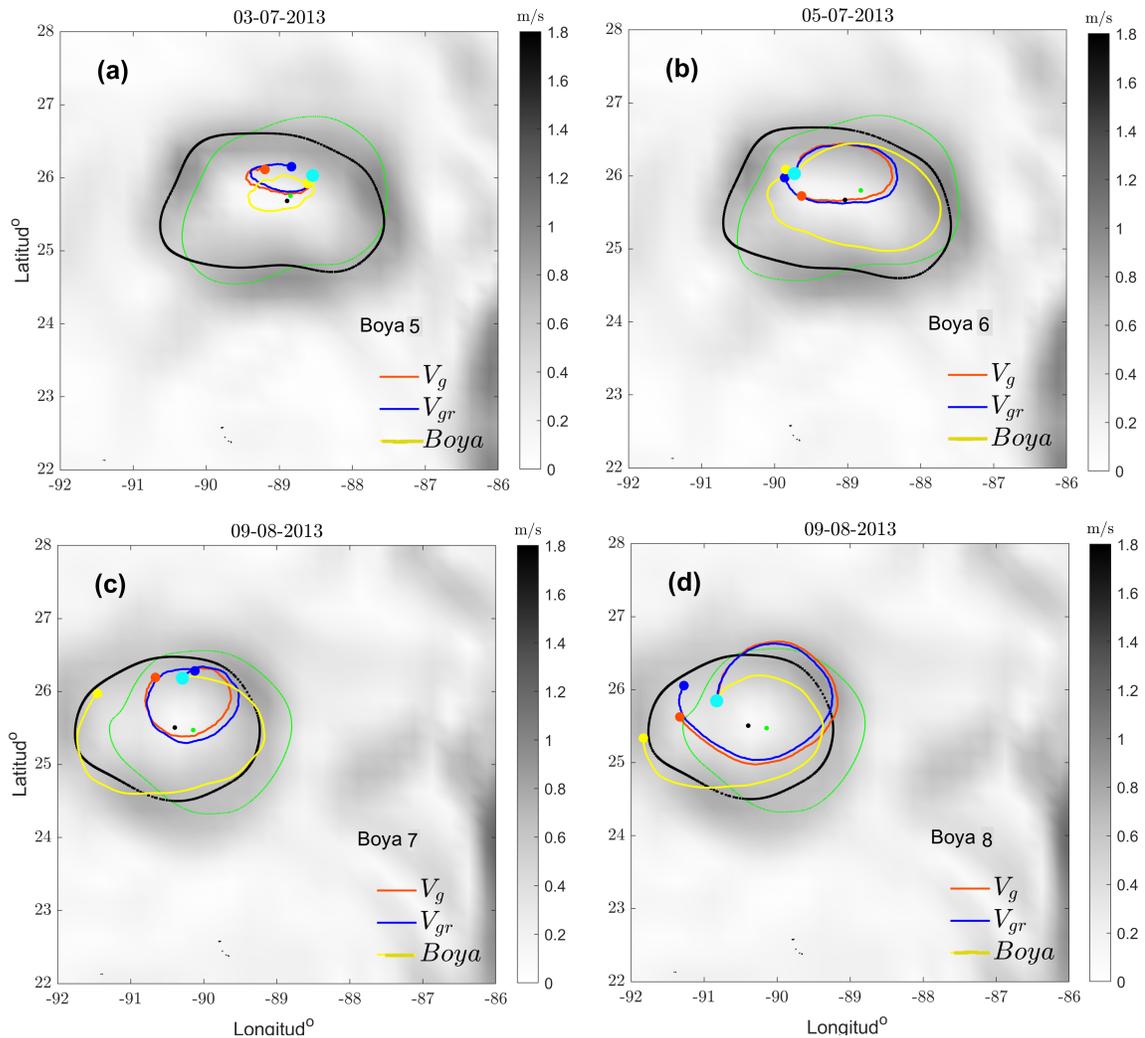


Figura 27. Igual que la Figura 26, pero para cada boya del conjunto Kraken-Débil.

La Figura 26 presenta las trayectorias reales y sintéticas del conjunto Kraken-Intenso, calculadas a los 10 días de deriva desde sus posiciones iniciales. Los trazadores en los paneles (a), (b), (c) y (d) parten desde aproximadamente 136, 97, 117 y 189 km del centro del remolino inicial (indicado con un punto verde), respectivamente. Estas distancias son lo suficientemente grandes como para que las partículas artificiales se mantengan rotando en la región de máxima velocidad durante los primeros 10 días, describiendo órbitas amplias similares a las de las boyas, aunque más cortas. Por su parte, la Figura 27 muestra las trayectorias de los trazadores del conjunto Kraken-Débil. A diferencia del conjunto Kraken-Intenso, todos los trazadores de este grupo parten desde el interior del contorno verde que delimita el remolino inicial. En particular, los trazadores de los paneles (a), (b), (c) y (d) se ubican aproximadamente a 42, 94, 80 y 79 km del centro del remolino, respectivamente. En este caso, las partículas describen órbitas más cerradas y el empalme con las trayectorias de las boyas es menor, ya que estas (específicamente las

boyas 6, 7 y 8) se van hacia la periferia del remolino.

Las Figuras 28 y 29 muestran la distancia recorrida, $\ell(t)$ [ecuación (38)], del conjunto Kraken-Intenso y Kraken-Débil, respectivamente, durante un periodo de 40 días. Mientras las boyas y partículas se encuentren rotando anticiclónicamente, podemos considerar que $\ell(t)$ es una medida adecuada para comparar sus recorridos. En general, las curvas del conjunto Kraken-Intenso tienen valores superiores a las del Kraken-Débil. Además, las curvas de las partículas tienen un mejor empalme en el conjunto Kraken-Intenso, lo cual indica la importancia de la posición de liberación y la intensidad del remolino.

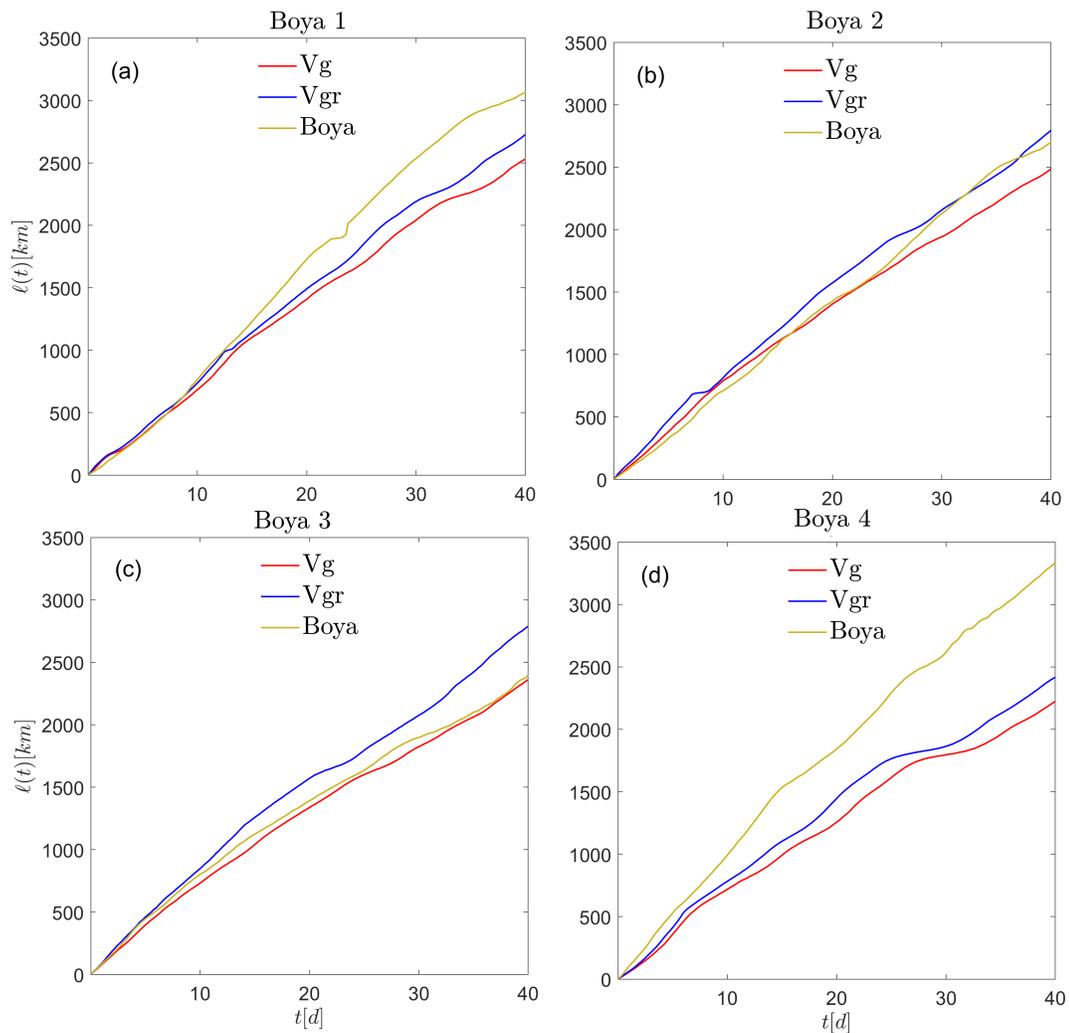


Figura 28. Suma acumulativa de la distancia recorrida, ecuación 38, de cada una de las boyas (amarillo) del conjunto Kraken-Intenso y de la partícula geostrófica (rojo) y ciclogeostrófica (azul) asociada.

Las Figuras 30(a) y (b), contienen el promedio de la distancia recorrida correspondiente a los trazadores del conjunto Kraken-Intenso y el Kraken-Débil, respectivamente. También incluyen los casos con difusividad: $K = 0$, $K = 22$ y $K = 44$ m^2/s . En términos generales, las partículas ciclogeostróficas representan

mejor las trayectorias de las boyas en ambos conjuntos. No obstante, se ve un mejor empalme en el caso Kraken-Intenso [Figura 30(a)]. En ambos casos, la variación en la difusividad no genera diferencias significativas dentro de este intervalo temporal. Sin embargo, cada análisis se basa en solo cuatro boyas, por lo que los resultados deben considerarse sugerentes más que concluyentes. Además, la metodología utilizada para obtener la velocidad geostrofica a partir de datos de altimetría, así como la resolución espacial de dichos datos, puede subestimar la velocidad geostrofica del océano, como se muestra en Hiron et al. (2020).

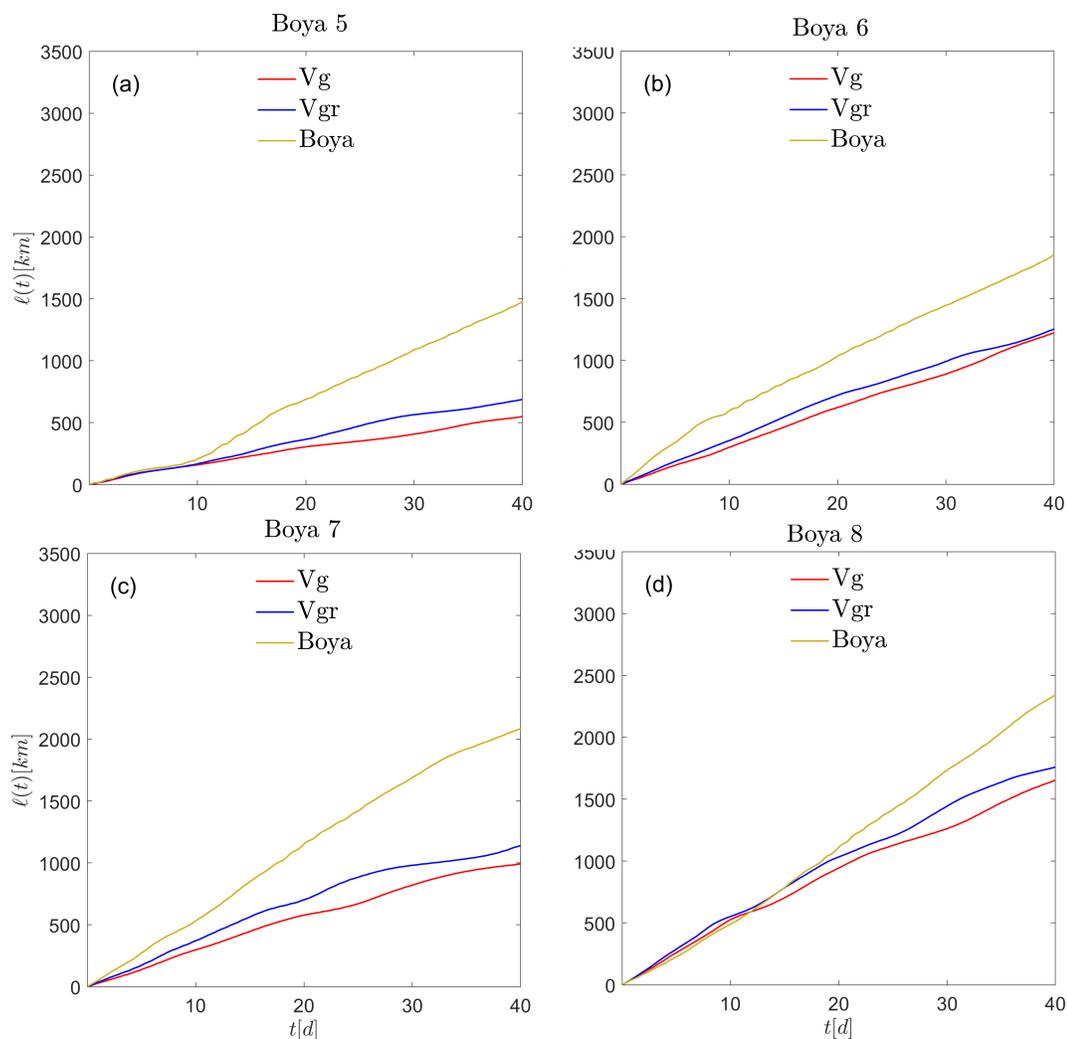


Figura 29. Igual que la Figura 28 pero para las boyas del conjunto Kraken-Débil.

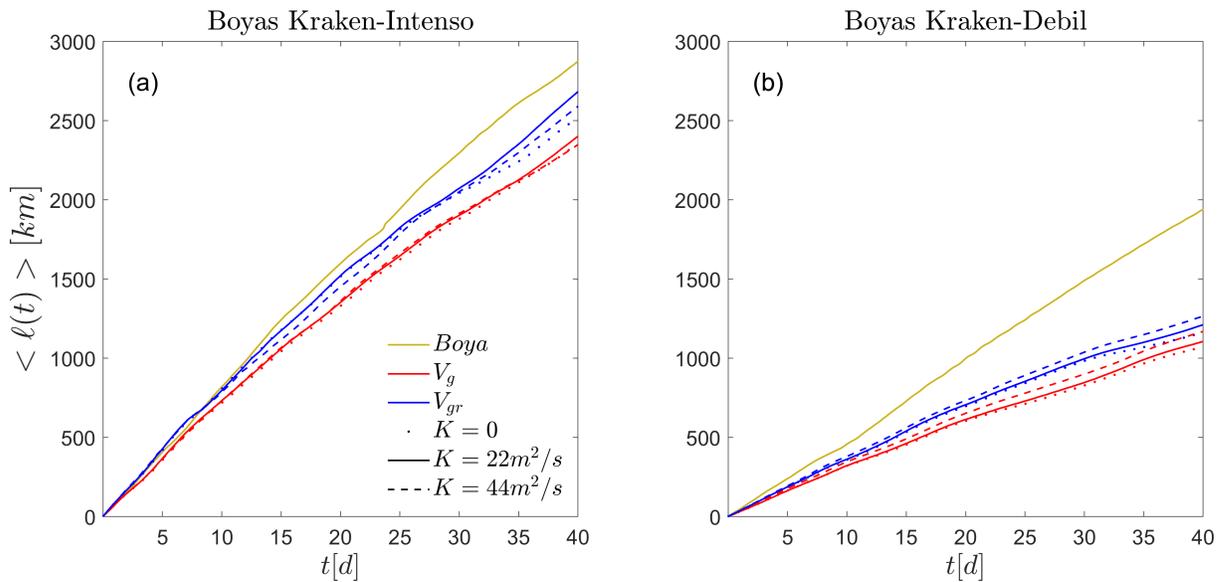


Figura 30. Promedio de la distancia acumulada recorrida por las boyas (amarillo), y por las partículas geostróficas (rojo) y ciclogeostróficas (azul) del conjunto (a) Kraken-Intenso (Figura 28) y (b) Kraken-Débil (Figura 29). Las líneas punteada, continua y discontinua corresponden a difusividades de $K = 0$, 22 y $44 \text{ m}^2/\text{s}$, respectivamente.

3.6. Discusión

3.6.1. Sobre la dispersión de partículas en el Kraken

Los resultados obtenidos en la sección 3.3 resaltan la influencia de la aceleración centrífuga en la dispersión de partículas dentro de remolinos oceánicos. En particular, el análisis del Kraken, un remolino anticiclónico desprendido de la corriente de Lazo en 2013 (Beron-Vera et al., 2018), muestra que la corrección ciclostrófica aumenta la velocidad geostrófica entre un 30 % y 40 %. Esta intensificación hace que la redistribución de partículas alrededor del vórtice sea más rápida, y que por lo tanto recorran una mayor distancia.

A diferencia de las curvas de dispersión respecto al centro de masa características de remolinos circulares idealizados presentadas en el Capítulo 2 de este trabajo, las curvas obtenidas para una nube de partículas dentro del Kraken hacen oscilaciones a lo largo del tiempo [ver Figura 20]. Este comportamiento parece estar asociado a la deformación del remolino respecto a la geometría circular. En efecto, para un vórtice asimétrico, las partículas tienden a separarse más en regiones de mayor velocidad y corte, lo que genera los máximos relativos de las curvas de dispersión. Un fenómeno similar se observó en la dispersión de partículas dentro de un dipolo de Chaplygin, en el que la curva calculada para una descarga de partículas

en uno de los polos mostró dichas oscilaciones (Ocampo Jaimes et al., 2022). En el Anexo B se presenta un ejemplo idealizado con un vórtice elíptico de Kirchoff.

Otro comportamiento observado es que la nube de partículas tiende a expandirse al desplazarse hacia el suroeste y a comprimirse al moverse hacia el noreste. Este patrón podría estar relacionado a la zona de liberación de las partículas y a la traslación del remolino: en el flanco sur del anticiclón, donde la velocidad de la nube coincide con la dirección del remolino, la dispersión sería mayor; mientras que en el flanco norte, donde ambas se oponen, se observaría una compresión. Sin embargo, no se obtuvieron resultados conclusivos sobre este posible mecanismo.

Aunque el balance ciclogeostrófico incrementa la velocidad del remolino, la dispersión resultante de este campo de velocidad es menor que la del balance geostrófico. Este comportamiento se debe a que un remolino más intenso induce un mayor corte, haciendo que la nube de partículas tienda a estirarse y no a expandirse como en la dispersión estándar. Si consideramos que la velocidad ciclogeostrófica es una mejor representación de la velocidad real del fluido, esto sugiere que el balance geostrófico sobrestima la capacidad de los anticiclones de mesoescala para distribuir materia. Este comportamiento es independiente del valor de la difusividad empleado [ver Figura 20]. Evidentemente, al aumentar la difusividad, la dispersión también se incrementa, lo que resalta la importancia de elegir adecuadamente este parámetro para modelar la difusión turbulenta y representar los movimientos no resueltos en los campos de velocidad derivados de altimetría geostrófica en el interior de remolinos de mesoescala (e.g. Essink et al., 2019).

En la sección 3.5, comparamos las trayectorias de partículas artificiales individuales advectadas por los campos de velocidad geostrófico y ciclogeostrófico con las de boyas a la deriva dentro del Kraken. El objetivo de estos experimentos fue evaluar cuál de estos dos campos de velocidad y qué valor de difusividad representa de manera más adecuada el movimiento de las boyas. Nuestros resultados muestran que la distancia recorrida por las partículas advectadas con la velocidad ciclogeostrófica se asemeja más a la de las boyas en la periferia del remolino [Figura 30 (a)], algo que no se observa tan claramente en el conjunto del Kraken-Débil [Figura 30 (b)]. Sin embargo, no se pudo determinar un coeficiente de difusividad adecuado para el modelo estocástico por la escasez de boyas.

Otro aspecto a considerar en los resultados de este capítulo son las limitaciones de los datos de altimetría, particularmente la resolución espacial de los datos de elevación del nivel mar. Se ha observado que la resolución puede contribuir a una subestimación de la intensidad de las velocidades geostróficas y ciclogeostróficas, en comparación con las estimaciones obtenidas mediante modelos numéricos de alta

resolución como HYCOM (Hiron et al., 2020). Estos aspectos resaltan la necesidad de complementar este tipo de análisis con datos derivados de otras técnicas de medición, como *gliders* (e.g. Meunier et al., 2021).

3.6.2. Sobre la dispersión de partículas en el ciclón de Campeche

Los resultados de la sección 3.4 demostraron que la corrección ciclostrófica reduce la velocidad geostrófica del giro de Campeche en aproximadamente un 10 % a 15 %. Esta disminución ralentiza la propagación de la nube de partículas (Figura 23). Las curvas de dispersión respecto al centro de masa presentan oscilaciones (Figura 25), con valores mayores a los del Kraken (comparar Figuras 20 y 25). Este resultado se observa a pesar de que en el giro de Campeche las partículas inician más cerca del centro del giro. Además, las curvas asociadas a la velocidad geostrófica del ciclón de Campeche son relativamente menores que las del caso ciclogeostrófico, lo que indica que el balance geostrófico tiende a subestimar la dispersión de partículas (de nuevo, considerando que el balance ciclogeostrófico es una mejor representación de la velocidad total del océano). Después de 40 días de simulación, el comportamiento de la nube de partículas no es claro, ya que gran parte de las partículas tienden a desplazarse hacia zonas cercanas a la costa, donde no hay datos de velocidad geostrófica derivados de altimetría satelital.

El análisis entre las manchas de partículas y de la dispersión respecto al centro de masa en el giro de Campeche muestra un patrón similar al observado en el Kraken: la nube de partículas tiende a expandirse en el suroeste, resultando en oscilaciones cóncavas en las curvas de dispersión, y se comprime en el noreste produciendo un efecto inverso en las curvas.

La falta de datos de velocidad geostrófica derivados del altimetría satelital cerca de la costa impidió realizar un análisis entre boyas y partículas en el ciclón de Campeche. Lo anterior a pesar de que en esa zona del Golfo de México existe una gran disponibilidad de datos de boyas a la deriva que han permitido calcular estadísticas Lagrangianas robustas (e.g. Zavala Sansón et al., 2018).

Capítulo 4. Conclusiones

Los resultados de esta tesis se derivaron de dos problemas independientes y están divididos en dos partes principales. La primera parte engloba al capítulo 2 y al anexo A, en donde estudiamos la dispersión de partículas en un remolino de Oseen (una solución a las ecuaciones de Navier-Stokes) en un sistema en rotación bajo efectos de la capa de Ekman del fondo, con y sin efectos no lineales. Se hizo el análisis teórico para determinar el decaimiento del remolino circular por fricción del fondo y viscosidad lateral, y el análisis de dispersión mediante simulaciones numéricas de las trayectorias de partículas con un modelo estocástico.

En la segunda parte, capítulo 3 y Anexo B, abordamos el problema de la dispersión de partículas en remolinos oceánicos en balance geostrofico y en balance ciclogeostrofico/viento gradiente. En este caso utilizamos datos de altimetría satelital para generar los campos de velocidad correspondientes, y en menor medida boyas a la deriva para comparar sus trayectorias con las generadas en forma sintética.

4.1. Conclusiones sobre los remolinos idealizados

En ausencia de efectos no lineales, la viscosidad lateral asociada al remolino de Oseen debilita la redistribución inicial de partículas dentro del monopolo, atenuando la etapa anómala de dispersión.

Los movimientos radiales inducidos por la capa de Ekman del fondo provocan la expulsión (convergencia) de partículas en la horizontal cuando el remolino de Oseen es ciclónico (anticiclónico). Sin embargo, este comportamiento no afecta a la redistribución inicial de cargas puntuales de partículas.

La capa de Ekman de fondo induce elevación (hundimiento) de partículas dentro de ciclones (anticiclones). En un remolino estacionario no aislado ciclónico, donde se desprecia la viscosidad lateral, hay mayor elevación de partículas en zonas cercanas al origen del vórtice. En contraste, cuando el remolino de Oseen con viscosidad lateral está sujeto a la fricción de Ekman del fondo, el transporte vertical de partículas es mayor en regiones alejadas del origen, lo que resulta en un fondo más limpio.

Los términos no lineales, junto con la fricción de Ekman del fondo, alteran la evolución del remolino de Oseen estacionario sin viscosidad lateral, acelerando (desacelerando) su decaimiento y expandiendo (comprimiendo) su radio cuando es ciclónico (anticiclónico). Este efecto es significativo sólo en las primeras etapas de la dispersión horizontal: en el ciclón la redistribución inicial se ralentiza, mientras que en el anticiclón se intensifica. Todo en comparación con un remolino sin términos no lineales.

Los efectos no lineales son especialmente relevantes en el transporte vertical de partículas cerca del centro del remolino, favoreciendo el hundimiento de partículas en anticiclones y limitando el ascenso en ciclones.

4.2. Conclusiones sobre los remolinos oceánicos

Al incorporar el efecto no lineal de la aceleración centrífuga mediante la corrección ciclostrófica en remolinos geostróficos, el campo de velocidad se intensifica en anticiclones y se atenúa en ciclones, haciendo que las partículas roten más rápido o más lento.

Las deformaciones que experimentan los remolinos durante su tiempo de vida, ya sea en balance geostrófico o ciclogeostrófico, provocan estiramientos y compresiones durante la evolución de grupos de partículas liberados dentro de los vórtices, generando oscilaciones en las curvas de dispersión respecto al centro de masa.

En el Golfo de México, el anticiclón Kraken dispersa más partículas en balance geostrófico, mientras que el ciclón de Campeche lo hace en balance ciclogeostrófico. Es decir, el balance geostrófico sobrestima la dispersión en el anticiclón y la subestima en el ciclón.

La baja cantidad de boyas atrapadas en el Kraken no permitió estimar un coeficiente de difusividad para el modelo estocástico que representara la dispersión turbulenta y los movimientos no resueltos en los campos de velocidad derivados de altimetría. No obstante, los resultados sugieren que la velocidad ciclogeostrófica reproduce de manera más adecuada la distancia recorrida por las trayectorias de partículas dentro del remolino. En el caso del ciclón de Campeche, la ausencia de datos de velocidad geostrófica cerca de la costa impidió realizar el análisis correspondiente. Otros factores como la resolución espacial de los campos de altura del nivel del mar, podrían estar asociados a las diferencias entre las trayectorias de partículas y boyas.

4.3. Trabajo futuro

4.3.1. Sobre los remolinos idealizados

El modelo teórico utilizado en la primera parte de este trabajo puede aplicarse a problemas más complejos que incluyen remolinos con cambios de la superficie libre (Maas, 1993; Kloosterziel & van Heijst, 1992) y topografía del fondo (Zavala Sansón et al., 2012). Otro problema interesante es cuantificar la dispersión vertical de partículas debido al bombeo de Ekman de superficie, causado por el rozamiento del viento en el tope de la columna (Zavala Sansón et al., 2023). Este problema podría extenderse al considerar la capa de Ekman del fondo. Por otro lado, los presentes resultados pueden servir como base para analizar distintas formas de parametrizar la viscosidad vertical asociada a la capa de Ekman del fondo (e.g., Cushman-Roisin & Malačič, 1997), así como el estudio del transporte vertical en monopolos aislados (van Heijst & Clercx, 2009).

4.3.2. Sobre los remolinos oceánicos

Uno de los objetivos principales de este trabajo fue desarrollar un modelo estocástico Lagrangiano capaz de describir la dispersión oceánica dentro de remolinos. La propuesta se basó en calcular estadísticas Lagrangianas a partir de trayectorias de partículas artificiales advectadas con velocidades geostróficas y ciclgeoestróficas (estimadas a partir de altimetría satelital) y compararlas con las de trayectorias de boyas a la deriva. Esto con la finalidad de estimar un coeficiente de difusividad, para el modelo estocástico, que describiera adecuadamente la dispersión turbulenta y representara los movimientos no resueltos por las velocidades provenientes de altimetría. Sin embargo, la escasa cantidad de boyas atrapadas en los remolinos, así como la falta de datos en regiones costeras, impidieron estimar dicho coeficiente. A esto se suman las incertidumbres asociadas a las velocidades obtenidas por altimetría, tanto por el método de medición como por su resolución espacial y temporal. En este contexto, se propone utilizar salidas de modelos numéricos de alta resolución para obtener campos de velocidad geostrófica y ciclgeoestrófica, aplicarlos al modelo estocástico y generar trayectorias sintéticas. El objetivo es compararlas con las trayectorias obtenidas a partir de la velocidad total del modelo, con el fin de estimar un coeficiente de difusión turbulenta que permita mejorar el desempeño del modelo estocástico Lagrangiano. Además, se buscará incorporar velocidades asociadas al viento para refinar el campo de velocidad determinista.

Literatura citada

- Andrade-Canto, F., Beron-Vera, F. J., Goni, G. J., Karrasch, D., Olascoaga, M. J., & Trinanes, J. (2022). Carriers of Sargassum and mechanism for coastal inundation in the Caribbean Sea. *Physics of Fluids*, *34*(1). <https://doi.org/https://doi.org/10.1063/5.0079055>.
- Andrade-Canto, F., Karrasch, D., & Beron-Vera, F. J. (2020). Genesis, evolution, and apocalypse of Loop Current rings. *Physics of Fluids*, *32*(11). <https://doi.org/10.1017/https://doi.org/10.1063/5.0030094>.
- Artale, V., Boffetta, G., Celani, A., Cencini, M., & Vulpiani, A. (1997). Dispersion of passive tracers in closed basins: Beyond the diffusion coefficient. *Physics of Fluids*, *9*(11), 3162–3171. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1063/1.869433>.
- Barrientos Valencia, J., Zavala Sansón, L., & Beron-Vera, F. (2024). Horizontal and vertical dispersion in a wind-driven oceanic gyre model. *Physics of Fluids*, *36*(10). <https://doi.org/https://doi.org/10.1063/5.0223344>.
- Beron-Vera, F. J., Olascoaga, M. J., Haller, G., Farazmand, M., Triñanes, J., & Wang, Y. (2015). Dissipative inertial transport patterns near coherent Lagrangian eddies in the ocean. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, *25*(8). <https://doi.org/https://doi.org/10.1063/1.4928693>.
- Beron-Vera, F. J., Olascoaga, M. J., Wang, Y., Triñanes, J., & Pérez-Brunius, P. (2018). Enduring Lagrangian coherence of a Loop Current ring assessed using independent observations. *Scientific Reports*, *8*(1). <https://doi.org/https://doi.org/10.1038/s41598-018-29582-5>.
- Brach, L., Deixonne, P., Bernard, M.-F., Durand, E., Desjean, M.-C., Perez, E., van Sebille, E., & ter Halle, A. (2018). Anticyclonic eddies increase accumulation of microplastic in the North Atlantic subtropical gyre. *Marine Pollution Bulletin*, *126*, 191–196. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.marpolbul.2017.10.077>.
- Busecke, J. J. & Abernathey, R. P. (2019). Ocean mesoscale mixing linked to climate variability. *Science Advances*, *5*(1). <https://doi.org/https://doi.org/10.1126/sciadv.aav5014>.
- Butcher, J. C. (2016). *Numerical methods for ordinary differential equations*. John Wiley & Sons. Archivo PDF.
- Cetina-Heredia, P., Roughan, M., van Sebille, E., Keating, S., & Brassington, G. B. (2019). Retention and Leakage of Water by Mesoscale Eddies in the East Australian Current System. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, *124*(4), 2485–2500. <https://doi.org/https://doi.org/10.1029/2018JC014482>.
- Chaigneau, A., Gizolme, A., & Grados, C. (2008). Mesoscale eddies off Peru in altimeter records: identification algorithms and eddy spatio-temporal patterns. *Progress in Oceanography*, *79*, 106–119. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.pocean.2008.10.013>.
- Chelton, D. B., Gaube, P., Schlax, M. G., Early, J. J., & Samelson, R. M. (2011). The Influence of Nonlinear Mesoscale Eddies on Near-Surface Oceanic Chlorophyll. *Science*, *334*, 328–332. <https://doi.org/https://doi.org/10.1126/science.1208897>.
- Chirikjian, G. S. (2009). *Stochastic Models, Information Theory, and Lie Groups, Volume 1: Classical Results and Geometric Methods*. Springer Science & Business Media. Archivo PDF.
- Cohen, Y., Durden, S. L., Harnik, N., & Heifetz, E. (2019). Relating observations of gradient nonbalance at the top of hurricanes with their warm core structures. *Geophysical Research Letters*, *46*(20), 11510–11519. <https://doi.org/https://doi.org/10.1029/2019GL084248>.

- Cushman-Roisin, B. & Malačič, V. (1997). Bottom Ekman Pumping with Stress-Dependent Eddy Viscosity. *Journal of Physical Oceanography*, 27(9), 1967–1975. [https://doi.org/https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1997\)027%3C1967:BEPWSD%3E2.0.CO;2](https://doi.org/https://doi.org/10.1175/1520-0485(1997)027%3C1967:BEPWSD%3E2.0.CO;2).
- Damien, P., Sheinbaum, J., Pasqueron de Fommervault, O., Jouanno, J., Linacre, L., & Duteil, O. (2021). Do Loop Current eddies stimulate productivity in the Gulf of Mexico? *Biogeosciences*, 18, 4281–4303. <https://doi.org/https://doi.org/10.5194/bg-18-4281-2021>.
- Drazin, P. G. & Riley, N. (2006). *The Navier-Stokes equations: a classification of flows and exact solutions*. Archivo PDF.
- D'Asaro, E. A., Shcherbina, A. Y., Klymak, J. M., Molemaker, J., Novelli, G., Guigand, C. M., Haza, A. C., Haus, B. K., Ryan, E. H., Jacobs, G. A., et al. (2018). Ocean convergence and the dispersion of flotsam. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(6), 1162–1167. <https://doi.org/https://doi.org/10.1073/pnas.1718453115>.
- Essink, S., Hormann, V., Centurioni, L. R., & Mahadevan, A. (2019). Can We Detect Submesoscale Motions in Drifter Pair Dispersion? *Journal of Physical Oceanography*, 49(9), 2237–2254. <https://doi.org/https://doi.org/10.1175/JPO-D-18-0181.1>.
- Estrada-Allis, S. N., Barceló-Llull, B., Pallàs-Sanz, E., Rodríguez-Santana, A., Souza, J. M. A. C., Mason, E., McWilliams, J. C., & Sangrà, P. (2019). Vertical Velocity Dynamics and Mixing in an Anticyclone near the Canary Islands. *Journal of Physical Oceanography*, 49(2), 431–451. <https://doi.org/https://doi.org/10.1175/JPO-D-17-0156.1>.
- Flierl, G. R. (1981). Particle Motions in Large-Amplitude wave Fields. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 18(1-2), 39–74. <https://doi.org/https://doi.org/10.1080/03091928108208773>.
- Flores Ramírez, L. & Zavala Sansón, L. (2019). Two-dimensional turbulence dispersion in a closed domain: Influence of confinement and geometry. *AIP Advances*, 9(3). <https://doi.org/https://doi.org/10.1063/1.5081848>.
- González-Vera, A. S., van Heijst, G. J. F., & Duran-Matute, M. (2020). Sediment Transport and Morphodynamics Induced by a Translating Monopolar Vortex. *Journal of Geophysical Research: Earth Surface*, 125(7). <https://doi.org/https://doi.org/10.1029/2019JF005300>.
- Graef, F., Zavala Sansón, L., Plata, L., & Ochoa, J. (2020). Dispersion of particles in two-dimensional circular vortices. *Physics of Fluids*, 32(3). <https://doi.org/https://doi.org/10.1063/1.5142498>.
- Griffa, A. (1996). *Applications of stochastic particle models to oceanographic problems*. Birkhäuser Boston. Archivo PDF.
- Haller, G. (2023). *Transport barriers and coherent structures in flow data: advective, diffusive, stochastic and active methods*. Cambridge University Press. Archivo PDF.
- Haller, G., Hadjighasem, A., Farazmand, M., & Huhn, F. (2016). Defining coherent vortices objectively from the vorticity. *Journal of Fluid Mechanics*, 795, 136–173. <https://doi.org/https://doi.org/10.1017/jfm.2016.151>.
- Hiron, L., Nolan, D. S., & Shay, L. K. (2020). Study of ageostrophy during strong, nonlinear eddy-front interaction in the Gulf of Mexico. *Journal of Physical Oceanography*, 51(3), 745–755. <https://doi.org/https://doi.org/10.1175/JPO-D-20-0182.1>.

- Holton, J. R. & Hakim, G. J. (2013). *An introduction to dynamic meteorology*, volume 88. Academic press. Archivo PDF.
- Ioannou, A., Stegner, A., Tuel, A., LeVu, B., Dumas, F., & Speich, S. (2019). Cyclostrophic corrections of AVISO/DUACS surface velocities and its application to mesoscale eddies in the Mediterranean Sea. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, *124*(12), 8913–8932. <https://doi.org/https://doi.org/10.1029/2019JC015031>.
- Klein, P. & Lapeyre, G. (2009). The Oceanic Vertical Pump Induced by Mesoscale and Submesoscale Turbulence. *Annual review of marine science*, *1*(1), 351–375. <https://doi.org/https://doi.org/10.1146/annurev.marine.010908.163704>.
- Kloosterziel, R. C. & van Heijst, G. J. F. (1992). The evolution of stable barotropic vortices in a rotating free-surface fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, *239*, 607–629. <https://doi.org/https://doi.org/10.1017/S0022112092004543>.
- Knox, J. A. & Ohmann, P. R. (2006). Iterative solutions of the gradient wind equation. *Computers & geosciences*, *32*(5), 656–662. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.cageo.2005.09.009>.
- LaCasce, J. H. (2008). Statistics from Lagrangian observations. *Progress in Oceanography*, *77*(1), 1–29. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.pocean.2008.02.002>.
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*, (6ta ed.). Cambridge University Press, Cambridge. <https://archive.org/details/hydrodynamics00lamb>.
- Larrañaga, M., Osuna, P., Esquivel-Trava, B., Ocampo-Torres, F. J., Rasclé, N., García-Nava, H., & Moulin, A. (2023). Comparing GlobCurrent dataset with numerical results from a high-resolution implementation of the POLCOMS-WAM coupled system under a strong gap wind over the Gulf of Tehuantepec. *Meteorology and Atmospheric Physics*, *135*(3). <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s00703-023-00967-0>.
- Lehahn, Y., Koren, I., Sharoni, S., d'Ovidio, F., Vardi, A., & Boss, E. (2017). Dispersion/dilution enhances phytoplankton blooms in low-nutrient waters. *Nature Communications*, *8*(1), 14868. <https://doi.org/https://doi.org/10.1038/ncomms14868>.
- Maas, L. R. M. (1993). Nonlinear and free-surface effects on the spin-down of barotropic axisymmetric vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, *246*, 117–141. <https://doi.org/https://doi.org/10.1017/S0022112093000060>.
- Mahadevan, A., Thomas, L., & Tandon, A. (2008). Comment on "Eddy/wind Interactions Stimulate Extraordinary Mid-Ocean Plankton Blooms". *Science*, *320*. <https://doi.org/https://doi.org/10.1126/science.1152111>.
- Marinone, S. G., Ulloa, M. J., Parés-Sierra, A., Lavín, M. F., & Cudney-Bueno, R. (2008). Connectivity in the northern Gulf of California from particle tracking in a three-dimensional numerical model. *Journal of Marine Systems*, *71*, 149–158. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jmarsys.2007.06.005>.
- Martin, A. P., Richards, K. J., Law, C. S., & Liddicoat, M. (2001). Horizontal dispersion within an anticyclonic mesoscale eddy. *Deep Sea Research Part II: Topical Studies in Oceanography*, *48*(4-5), 739–755. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0967-0645\(00\)00095-3](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0967-0645(00)00095-3).

- Meunier, T., Pallás Sanz, E., de Marez, C., Pérez, J., Tenreiro, M., Ruiz Angulo, A., & Bower, A. (2021). The dynamical structure of a warm core ring as inferred from glider observations and along-track altimetry. *Remote Sensing*, *13*(13). <https://doi.org/https://doi.org/10.3390/rs13132456>.
- Muñoz, S. (2021). Modulación de la distribución vertical de oxígeno disuelto por remolinos de mesoescala en el Golfo de México [Tesis de Maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California]. Repositorio Institucional. <https://biblioteca.cicese.mx/catalogo/tesis/ficha.php?id=25829>.
- Ocampo Jaimes, J., Graef, F., & Zavala Sansón, L. (2022). Dispersion of particles in two-dimensional monopolar and dipolar vortices using a Lagrangian stochastic model. *Physics of Fluids*, *34*(4). <https://doi.org/https://doi.org/10.1063/5.0084371>.
- Øksendal, B. (2007). *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer Science & Business Media. Archivo PDF.
- Pasquero, C., Provenzale, A., & Babiano, A. (2001). Parameterization of dispersion in two-dimensional turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, *439*, 279–303. <https://doi.org/https://doi.org/10.1017/S0022112001004499>.
- Pedlosky, J. (2013). *Geophysical fluid dynamics*. Springer Science & Business Media. Archivo PDF.
- Penven, P., Halo, I., Pous, S., & Marié, L. (2014). Cyclogeostrophic balance in the Mozambique Channel. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, *119*(2), 1054–1067. <https://doi.org/https://doi.org/10.1002/2013JC009528>.
- Pérez-Brunius, P., García-Carrillo, P., Dubranna, J., Sheinbaum, J., & Candela, J. (2013). Direct observations of the upper layer circulation in the southern Gulf of Mexico. *Deep Sea Research Part II: Topical Studies in Oceanography*, *85*, 182–194. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.dsr2.2012.07.020>.
- Provenzale, A. (1999). Transport by coherent barotropic vortices. *Annual review of fluid mechanics*, *31*(1), 55–93. <https://doi.org/https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.31.1.55>.
- Quintanilla, J. G., Herguera, J. C., & Sheinbaum, J. (2024). Oxygenation of the Gulf of Mexico thermocline linked to the detachment of Loop Current eddies. *Frontiers in Marine Science*, *11*. <https://doi.org/https://doi.org/10.3389/fmars.2024.1479837>.
- Richards, K. J., Jia, Y., & Rogers, C. F. (1995). Dispersion of Tracers by Ocean Gyres. *J. Phys. Oceanogr.*, *25*(5), 873–887. <https://doi.org/https://doi.org/10.1175/JPO-D-11-0191.1>.
- Roemmich, D. & Gilson, J. (2001). Eddy transport of heat and thermocline waters in the North Pacific: A key to interannual/decadal climate variability? *Journal of Physical Oceanography*, *31*(3), 675–687. [https://doi.org/https://doi.org/10.1175/1520-0485\(2001\)031%3C0675:ETOHAT%3E2.0.CO;2](https://doi.org/https://doi.org/10.1175/1520-0485(2001)031%3C0675:ETOHAT%3E2.0.CO;2).
- Rypina, I. I., Kamenkovich, I., Berloff, P., & Pratt, L. J. (2012). Eddy-induced particle dispersion in the near-surface North Atlantic. *Journal of Physical Oceanography*, *42*(12), 2206–2228. <https://doi.org/https://doi.org/10.1175/JPO-D-11-0191.1>.
- Salon, S., Crise, A., & van Loon, A. J. (2008). Dynamics of the bottom boundary layer. *Developments in Sedimentology*, *60*, 83–97. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0070-4571\(08\)10006-1](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0070-4571(08)10006-1).

- Sawford, B. (1991). Reynolds number effects in Lagrangian stochastic models of turbulent dispersion. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 3(6), 1577–1586. <https://doi.org/https://doi.org/10.1063/1.857937>.
- Sharma, N., Brickley, P., Owen, G., & Coholan, P. (2010). Use of air-deployed drogued drifting buoys for oil spill tracking. In *OCEANS 2010 MTS/IEEE SEATTLE*, 1–9. IEEE. Archivo PDF.
- Siegel, D. A., Peterson, P., McGillicuddy Jr, D. J., Maritorena, S., & Nelson, N. B. (2011). Bio-optical footprints created by mesoscale eddies in the Sargasso Sea. *Geophysical Research Letters*, 38(13). <https://doi.org/https://doi.org/10.1029/2011GL047660>.
- Tan, D., Li, L., Yin, Z., Li, D., Zhu, Y., & Zheng, S. (2020). Ekman boundary layer mass transfer mechanism of free sink vortex. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 150. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.119250>.
- Tarshish, N., Abernathey, R., Zhang, C., Dufour, C. O., Frenger, I., & Griffies, S. M. (2018). Identifying Lagrangian coherent vortices in a mesoscale ocean model. *Ocean Modelling*, 130, 15–28. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2018.07.001>.
- Vallis, G. K. (2017). *Atmospheric and oceanic fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- van Heijst, G. J. F. & Clercx, H. J. H. (2009). Laboratory modeling of Geophysical Vortices. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 41(1), 143–164. <https://doi.org/https://doi.org/10.1146/annurev.fluid.010908.165207>.
- Visser, A. W. (1997). Using random walk models to simulate the vertical distribution of particles in a turbulent water column. *Marine Ecology Progress Series*, 158, 275–281. <https://doi.org/doi:10.3354/meps158275>.
- Wang, Y., Zhang, H.-R., Chai, F., & Yuan, Y. (2018). Impact of mesoscale eddies on chlorophyll variability off the coast of Chile. *PloS One*, 13(9). <https://doi.org/https://doi.org/10.1371/journal.pone.0203598>.
- Zambianchi, E. & Griffa, A. (1994). Effects of finite scales of turbulence on dispersion estimates. *Journal of marine research*, 52(1), 129–148. https://elischolar.library.yale.edu/journal_of_marine_research/2090.
- Zavala Sansón, L. (2001). The asymmetric Ekman decay of cyclonic and anticyclonic vortices. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 20(4), 541–556. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0997-7546\(01\)01128-1](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/S0997-7546(01)01128-1).
- Zavala Sansón, L., Barbosa Aguiar, A. C., & van Heijst, G. J. F. (2012). Horizontal and vertical motions of barotropic vortices over a submarine mountain. *Journal of fluid mechanics*, 695, 173–198. <https://doi.org/https://doi.org/10.1017/jfm.2012.9>.
- Zavala Sansón, L., García-Martínez, I. M., & Sheinbaum, J. (2023). Nonlinear surface Ekman effects on cyclonic and anticyclonic vortices. *Journal of Fluid Mechanics*, 971. <https://doi.org/https://doi.org/10.1017/jfm.2023.688>.
- Zavala Sansón, L., Sheinbaum, J., & Pérez-Brunius, P. (2018). Single-particle statistics in the southern Gulf of Mexico. *Geofísica internacional*, 57(2), 139–150. <https://doi.org/https://doi.org/10.22201/igeof.00167169p.2018.57.2.1693>.
- Zavala Sansón, L. & van Heijst, G. J. F. (2000). Nonlinear Ekman effects in rotating barotropic flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 412, 75–91. <https://doi.org/https://doi.org/10.1017/S0022112000008193>.

- Zavala Sansón, L., van Heijst, G. J. F., & Backx, N. A. (2001). Ekman decay of a dipolar vortex in a rotating fluid. *Physics of Fluids*, *13*(2), 440–451. <https://doi.org/https://doi.org/10.1063/1.1335541>.
- Zavala Sansón, L. & van Heijst, G., J. F. (2002). Ekman effects in a rotating flow over bottom topography. *Journal of Fluid Mechanics*, *471*, 239–255. <https://doi.org/https://doi.org/10.1017/S0022112002002239>.
- Zhang, Z., Wang, W., & Qiu, B. (2014). Oceanic mass transport by mesoscale eddies. *Science*, *345*(6194), 322–324. <https://doi.org/https://doi.org/10.1126/science.1252418>.

Anexos

Anexo A: Dispersión en remolinos no lineales en decaimiento por fricción de fondo

Estudios previos han destacado el papel de los términos no lineales en la evolución de remolinos sujetos a la fricción de Ekman en el fondo (Kloosterziel & van Heijst, 1992; Maas, 1993; Zavala Sansón & van Heijst, 2000). Los resultados indican que el efecto no lineal influye tanto en la tasa de decaimiento como en la estructura de los monopolos, según su polaridad. En particular, los ciclones (anticiclones) decaen más rápido (lento) y tienden a expandir (comprimir) su estructura (Zavala Sansón, 2001). En este Anexo abordamos el problema de la dispersión de partículas, haciendo un análisis similar al del Capítulo 2, pero para remolinos bajo efectos no lineales y sin considerar a la viscosidad lateral.

Soluciones aproximadas de remolinos circulares no lineales

Partimos de la ecuación de momento azimutal en el sistema (3), pero ahora conservando los términos no lineales y omitiendo la viscosidad lateral, es decir, tomamos $\nu_h = 0$. Utilizando la definición de la vorticidad relativa ω y la escala de tiempo de Ekman T_E , se obtiene:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + \frac{u_\theta}{T_E} \left(\frac{\omega}{f} + 1 \right) = 0. \quad (39)$$

Para este caso, empleamos la solución analítica propuesta por Kloosterziel & van Heijst (1992), que proviene de adimensionalizar (39) utilizando las escalas de velocidad U y tiempo T_E , y hacer una expansión asintótica de u_θ y ω en términos del número de Rossby, $R_o = U/fL$. A orden R_o , la solución en su forma dimensional es

$$u_\theta = V(r) \exp(-t/T_E) \left\{ 1 + \frac{\tilde{\omega}}{f} \left[\exp(-t/T_E) - 1 \right] \right\}. \quad (40)$$

Aquí, $V(r)$ representa la velocidad angular de un remolino con simetría axial estacionario, mientras que $\tilde{\omega}(r)$ es su vorticidad. Para el remolino no aislado definido por (16), estas funciones son

$$V(r) \equiv \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right], \quad (41)$$

y

$$\tilde{\omega}(r) \equiv \frac{\Gamma}{\pi R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right). \quad (42)$$

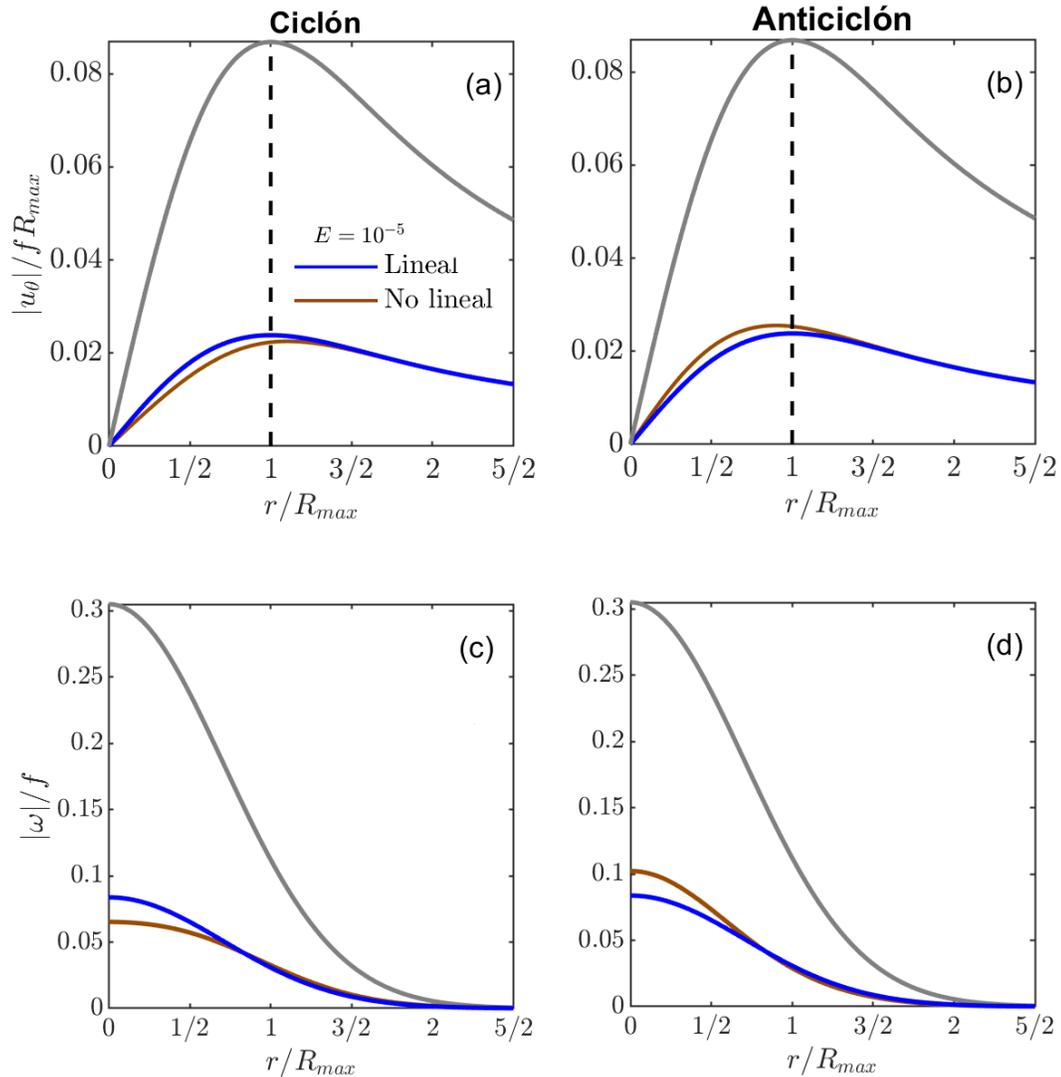


Figura 31. (a)-(b) Perfiles de velocidad azimutal, ecuación (43), de ciclones y anticiclones en decaimiento por fricción de Ekman con $E = 10^{-5}$, no lineales (en café), lineales (en azul) y vórtice estacionario (en gris). (c)-(d) Perfiles de vorticidad relativa, ecuación (45). Los perfiles corresponden a $t = 45$ días.

Sustituyendo estas expresiones en (40), la velocidad bajo efectos no lineales para un remolino no aislado queda como

$$u_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right] \exp\left(-\frac{t}{T_E}\right) \left\{ 1 + \frac{\Gamma}{f\pi R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \left[\exp\left(-\frac{t}{T_E}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (43)$$

La vorticidad relativa es

$$\omega = \frac{\Gamma}{\pi R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_E}\right) + \frac{\Gamma^2}{\pi^2 f R^4} \left[2 \exp\left(-\frac{2r^2}{R^2}\right) - \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \right] \times \left[\exp\left(-\frac{2t}{T_E}\right) - \exp\left(-\frac{t}{T_E}\right) \right]. \quad (44)$$

Nótese que al despreciar los términos entre llaves, (43) se reduce a (18), que es el remolino lineal que decae por fricción del fondo.

La Figura 31 contiene a los perfiles de velocidad (paneles a y b) y vorticidad (paneles c y d) bajo efectos no lineales (en color café) y lineales (en azul) para ciclones y anticiclones después de 45 días. Las curvas grises denotan los perfiles al tiempo inicial. Los perfiles de los remolinos no lineales decaen más rápido en el ciclón y más lento en el anticiclón con respecto a los vórtices lineales. Además, el ciclón no lineal tiende a expandir su radio de máxima velocidad, mientras que el remolino anticiclónico tiende a contraerse hacia el origen. Por el contrario, los remolinos lineales mantienen el mismo radio de máxima velocidad. El mayor decaimiento del vórtice ciclónico no lineal (respecto al lineal), así como la menor reducción del anticiclón, se refleja más claramente en los perfiles de vorticidad.

Dispersión horizontal

En esta sección se caracteriza la dispersión horizontal de partículas en vórtices ciclónicos y anticiclónicos en decaimiento por fricción de Ekman de fondo y bajo efectos no lineales [ecuación (43)]. Al tiempo inicial, el vórtice se reduce al remolino estacionario [ecuación (16)]. Para tiempos posteriores, el remolino lineal es descrito por la ecuación (18). Para los experimentos retomamos los parámetros descritos en la sección 2.1.5. En todos los casos, las partículas se liberan en $r_0 = R_{max}$.

La Figura 32 muestra las curvas de dispersión respecto al centro de masa en ciclones y anticiclones no

lineales (café) y lineales (azul) para $E = 10^{-5}$. En la etapa de rápido crecimiento inicial, los valores de dispersión del remolino no lineal ciclónico son menores que los del remolino lineal, mientras que en el anticiclón ocurre lo contrario. Esto se debe a que el remolino ciclónico no lineal decae más rápido que el lineal, lo que debilita la distribución angular inicial de partículas. En cambio, el remolino anticiclónico no lineal decae más lentamente que el lineal, permitiendo que las partículas se distribuyan más rápidamente en la dirección angular. Posteriormente, en la etapa lineal de crecimiento de la dispersión, en la que ya se han formado los anillos de partículas, tanto en el caso ciclónico como en el anticiclónico las curvas son prácticamente iguales. Esto indica que los efectos no lineales solo afectan la distribución angular inicial.

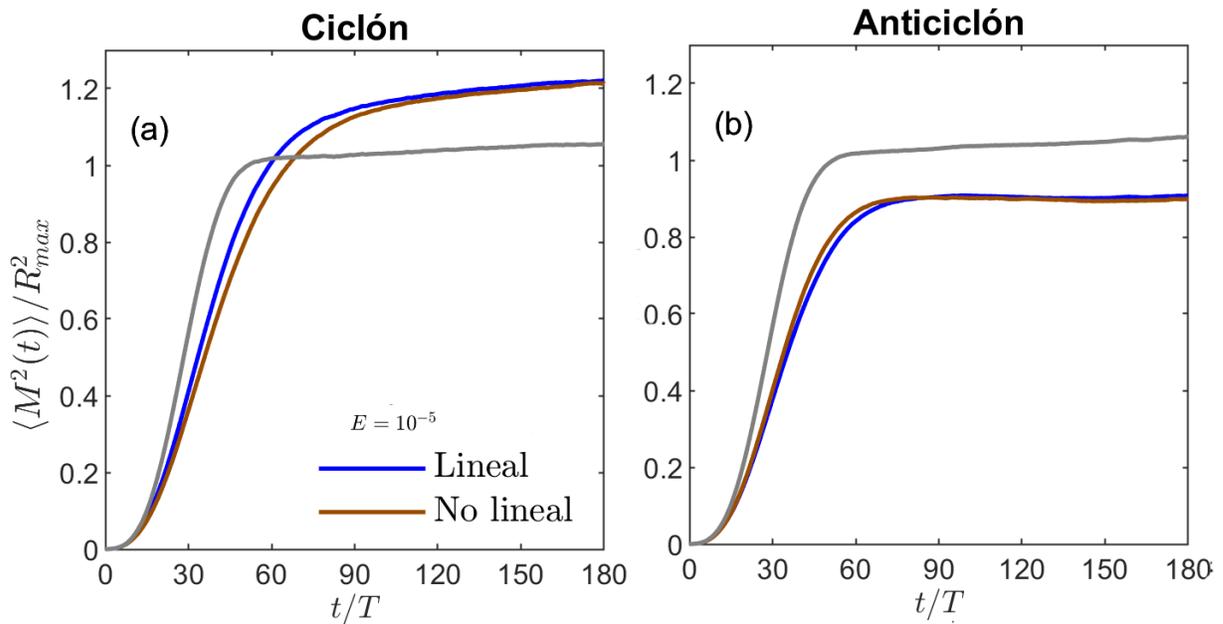


Figura 32. Evolución temporal de la dispersión respecto al centro de masa. Las curvas café corresponden a remolinos en decaimiento por fricción de fondo más efectos no lineales, ecuación (43) y las curvas azules a remolinos sin efectos no lineales, ecuación (16). Las curvas grises corresponden al remolino estacionario, ecuación (16). (a) ciclones ($\Gamma > 0$) y (b) anticiclones ($\Gamma < 0$). La posición inicial de la carga puntual de las partículas es $r_0 = (R_{max} \cdot R_{max} / \sqrt{2})$. En este caso $E = 10^{-5}$ y $R_o = 0.08$.

Dispersión vertical

Distribución vertical en ciclones y anticiclones

De manera análoga al capítulo 2, en esta sección describimos la distribución vertical de partículas bajo efectos no lineales, pero despreciando la viscosidad lateral. Nuevamente, hacemos evolucionar en el tiempo a una cama circular de 5000 partículas distribuidas aleatoriamente dentro de un radio de $2.5 R_{max}$

a un nivel de z_0 dado.

Para iniciar, describimos la distribución vertical de partículas en un remolino ciclónico lineal y no lineal, y hacemos la comparación. Recordemos que los ciclones advectan partículas verticalmente hacia arriba, por lo que las partículas se colocan inicialmente en el fondo. En la Figura 33 se encuentra la posición final de las 5000 partículas después de 180 días en el remolino lineal (azul) y en el remolino no lineal (café). La similitud entre los resultados es un indicio de que los términos no lineales tienen poca influencia en la distribución de partículas dentro de ciclones. Sin embargo, a pesar de que la forma cónica de los paneles (a) y (b) es prácticamente igual, la altura del caso no lineal es ligeramente menor. Esto ocurre porque el ciclón no lineal decae más rápido, lo cual inhibe la dispersión vertical en la parte central. Lo anterior es confirmado al analizar las barras de los histogramas de las Figuras 33(c)-(d), ya que las barras azules arriba de $H/4$ indican un mayor número de partículas que las cafés. Sin embargo, la barra azul adyacente a la base es ligeramente menor que la café. Esta mínima diferencia puede ser atribuida a la expansión radial que generan los términos no lineales; algo similar a lo que ocurre con presencia de la viscosidad lateral en los experimentos de la sección 2.3 pero con menor intensidad.

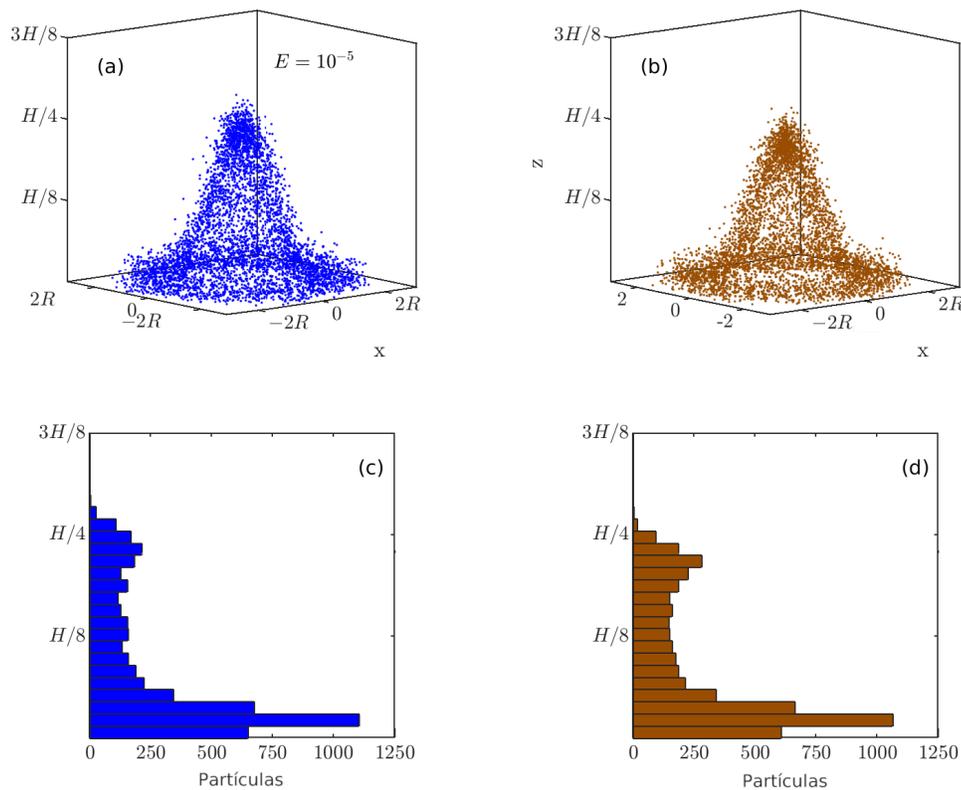


Figura 33. Posición vertical y horizontal final de 5000 partículas en vórtices ciclónicos en decaimiento por pura fricción del fondo a $t/T = 180$. (a) Sin efectos no lineales (puntos azules), y (b) con efectos no lineales (puntos café). Los trazadores parten del fondo distribuido aleatoriamente en una cama circular de radio $2.5R_{max}$. (c)-(d) Distribución de partículas en la dirección z de las simulaciones de los paneles (a)-(b). Las barras tienen un ancho constante de $0.015H$.

Ahora presentamos un análisis equivalente para anticiclones. En este caso, los remolinos hunden a los trazadores. La Figura 34 muestra la distribución final de la cama de partículas iniciando en $z_0 = H/4$. A primera vista no se logran apreciar diferencias entre las estructuras cónicas de los paneles (a) y (b). Sin embargo, al comparar el tamaño de las barras adyacentes a la base $z = 0$ en los histogramas de los paneles (c) y (d), se observa claramente que la barra café es más grande que la azul. Es decir, los efectos no lineales provocan mayor hundimiento de partículas. Esto se debe a que cerca de $r = 0$, la vorticidad del remolino no lineal decae más lento que la del lineal [ver Figura 31(d)]. Y dada la proporcionalidad entre u_z y ω , el transporte de partículas es más intenso cerca del origen en el caso no lineal.

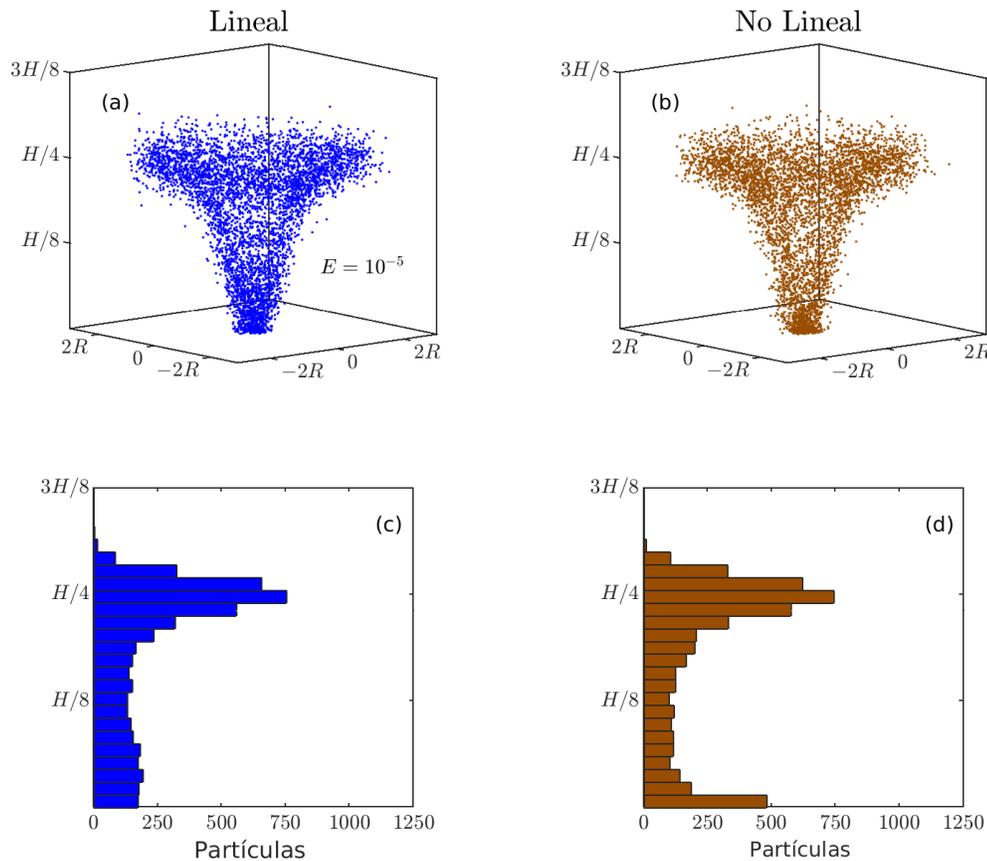


Figura 34. Posición vertical y horizontal final de 5000 partículas en vórtices anticiclónicos en decaimiento por pura fricción de fondo a $t/T = 180$. (a) Sin efectos no lineales (puntos azules), y (b) con efectos no lineales (puntos café). Los trazadores parten de $z_0 = H/4$ distribuidos aleatoriamente en una cama circular con radio $2.5R_{max}$. (c)-(d) Distribución de partículas en la dirección z de las simulaciones de los paneles (a)-(b). Las barras tienen un ancho constante de $0.015H$

Siguiendo la lógica del capítulo 2, ahora calculamos la raíz cuadrada de la dispersión absoluta en la dirección vertical, ecuación (28), para cargas puntuales ubicadas a diferentes radios. Las partículas inician a una altura de $z_0 = H/4$ en $r_0 = R_{max}/2$, $r_0 = R_{max}$ y $r_0 = 3R_{max}/2$. Los paneles superiores de la Figura 35 muestran los resultados en ciclones. En el panel (a), la curva asociada al remolino no lineal es ligeramente menor que la del lineal, confirmando que los términos no lineales limitan la elevación de

partículas cerca del origen. En los paneles (b) y (c), no hay diferencias significativas. En los anticiclones (paneles inferiores), la tendencia se invierte. En el panel (d), la curva correspondiente al anticiclón no lineal está por encima de la del lineal, lo que indica un mayor hundimiento de partículas. Sin embargo, en los paneles (e)-(f), las curvas son prácticamente iguales. En resumen, los efectos no lineales solo son significativos en la dispersión vertical de materia cerca del origen, tanto en ciclones como en anticiclones y su impacto se diluye en regiones más alejadas.

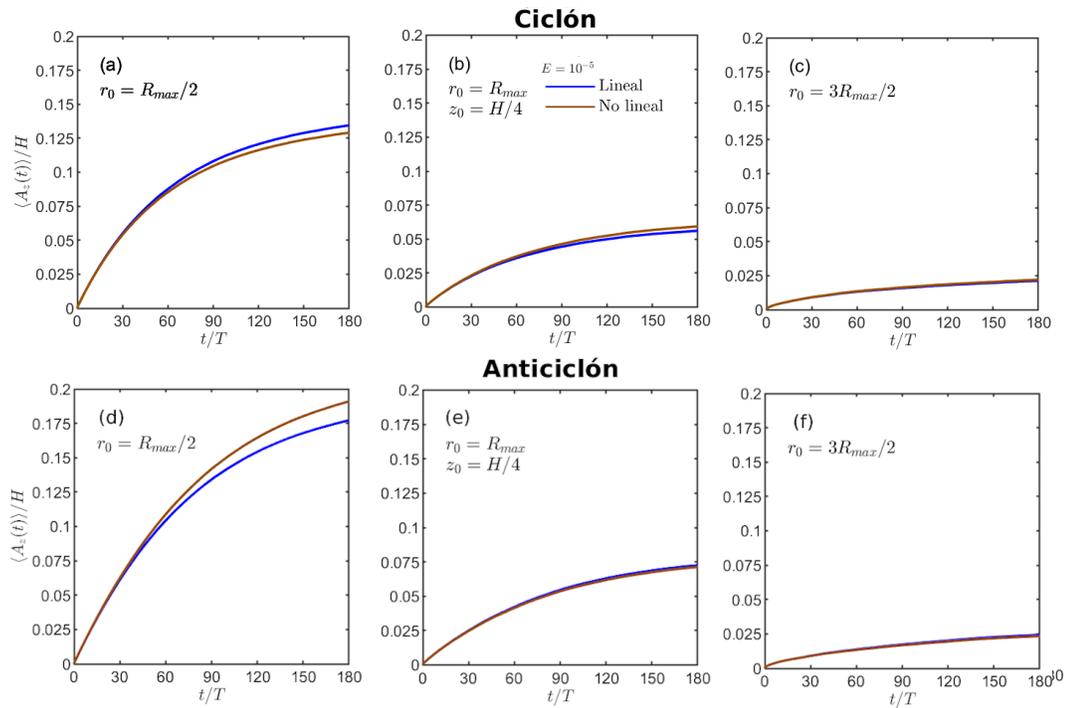


Figura 35. Raíz cuadrada de la dispersión absoluta en la dirección z de una carga puntual de 2500 partículas en ciclones (paneles superiores) y anticiclones (paneles inferiores). Las partículas parten de $z_0 = H/4$ desde distintas posiciones radiales: a $r_0 = R_{max}/2$ en los paneles (a) y (d); a $r_0 = R_{max}$ en los paneles (b) y (e); y a $r_0 = 3R_{max}/2$ en los paneles (c) y (f). Las curvas azules corresponden a vórtices lineales, mientras que las cafés a remolinos no lineales. Ambos tipos de vórtices decaen solo por efectos de Ekman de fondo.

Discusión y conclusiones

Entre las consecuencias de agregar efectos no lineales a remolinos en decaimiento por fricción de Ekman del fondo, se encuentra la diferencia en el decaimiento entre ciclones y anticiclones. Específicamente, el decaimiento del ciclón es más lento que el de anticiclón (ver Figura 31). Además, el radio de máxima velocidad del ciclón (anticiclón) se expande (contrae), aunque de manera muy lenta.

La variación del decaimiento entre remolinos lineales y no lineales hace que la redistribución horizontal

inicial de una carga puntual de partículas se intensifique o debilite dependiendo del sentido de circulación de los vórtices. Al comparar los resultados de la dispersión horizontal en remolinos con y sin términos no lineales, encontramos que el ciclón no lineal redistribuye más lentamente a las partículas en la etapa de crecimiento anómalo de la dispersión. Por el contrario, el anticiclón no lineal intensifica la dispersión inicial. Esto se puede observar claramente en la Figura 32. En conclusión, los términos no lineales sólo son importantes en la distribución angular inicial.

Cuando se incluyen los términos no lineales en el campo de velocidad tridimensional, de nuevo aparecen las estructuras cónicas de partículas tanto en ciclones y anticiclones (Figuras 33-34). Los experimentos muestran que el remolino ciclónico no lineal eleva menos partículas a lo largo de la columna, en comparación con el ciclón lineal (Figura 33). Por el contrario, el remolino anticiclónico no lineal hunde más partículas que el lineal (Figura 34). Estos resultados son causados por la manera en que los vórtices decaen en la región central. Cerca del origen, la vorticidad del remolino no lineal ciclónico es menor que la del lineal, mientras que lejos del origen los perfiles son prácticamente iguales [ver Figuras 31 (c)-(d)]. Como consecuencia, los trazadores en el centro se elevan a menor altura en el ciclón no lineal. En el anticiclón ocurre lo contrario: en la parte central, el remolino no lineal es más intenso, por lo que genera mayor hundimiento en esa región que el caso lineal. En conclusión, descartar los términos no lineales sobrestima la capacidad de elevar partículas en remolinos ciclónicos y subestima la capacidad de hundirlas en anticiclones.

Anexo B: Dispersión de partículas en un remolino de Kirchhoff

Este anexo busca explicar el origen de las oscilaciones en las curvas de dispersión respecto al centro de masa en el Kraken y el giro de Campeche que fueron presentadas en las Figuras 20, y 25, de las subsecciones 3.3 y 3.4.

Para investigar si la geometría elongada de los remolinos influye en el comportamiento de la dispersión, diseñamos un experimento con partículas en el remolino de Kirchhoff, el cual es un monopolo elíptico (o parche de vorticidad) que gira con rapidez angular constante. Una solución analítica estacionaria del campo de velocidad, en coordenadas cartesianas (x, y) , es (Lamb, 1932, p. 232)

$$u = -\omega_0 \frac{a^2}{(a+b)^2} y, \quad v = \omega_0 \frac{b^2}{(a+b)^2} x, \quad (45)$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse en las coordenadas x y y , respectivamente, y ω_0 es la vorticidad interior. Para los experimentos tomamos a $\omega_0 = -5 \times 10^{-5} \text{ 1/s}$, $a = 125 \text{ km}$ y $b = 75 \text{ km}$.

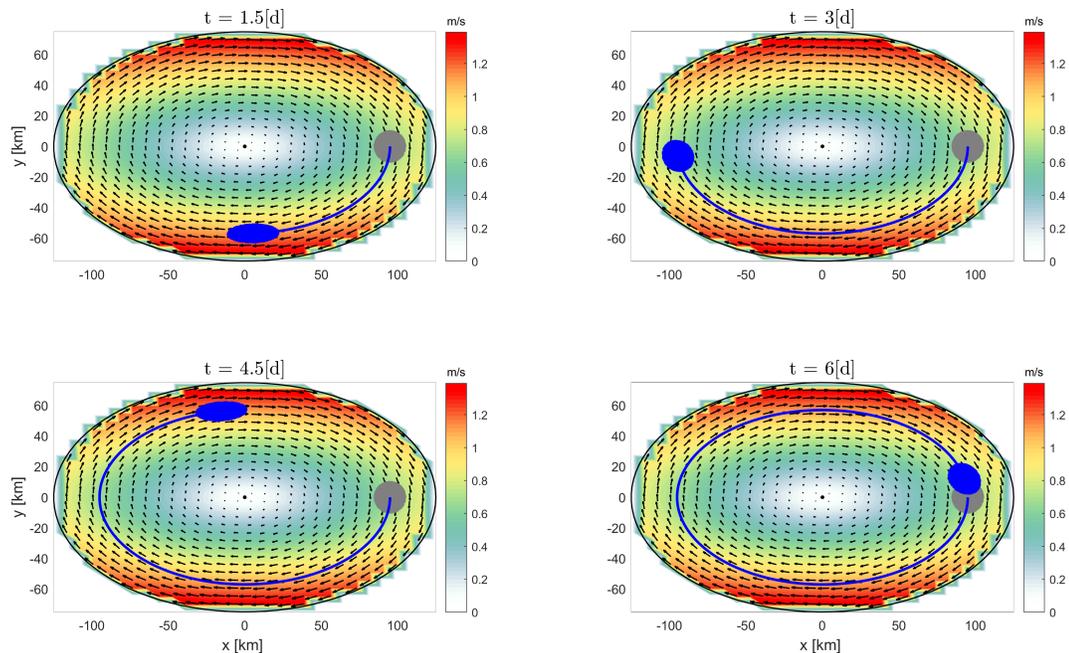


Figura 36. Redistribución de partículas (azul) para diferentes tiempos en el remolino de Kirchhoff (cuyo campo de velocidad se indica con flechas negras y su magnitud en superficies de color). El círculo gris representa la posición inicial del ensamble de partículas y la curva azul la trayectoria del centro de masa.

La Figura 36 muestra la redistribución de un grupo de 2500 partículas inicialmente colocadas en una

región circular de radio de 10 km centrada en (95,0) km, tras una vuelta completa dentro del remolino de Kirchhoff. En este experimento la difusividad es cero para apreciar la deformación de la nube de partículas en distintos sectores del vórtice. Se observa que la mancha se estira en la zona sur y norte del remolino y recupera su forma circular en el oeste y este. Este patrón se refleja en la gráfica de la dispersión respecto al centro de masa mostrada en la Figura 37. La dispersión alcanza un máximo alrededor de 1.5 días, cuando las partículas pasan por la parte sur, y un mínimo cerca del día 3, cuando la nube llega al oeste. Este patrón se repite con un nuevo máximo hacia los 4.5 días, cuando las partículas recorren la región norte del remolino, y un mínimo alrededor del día 6, al llegar a la región este.

Los resultados de este experimento, junto con los observados en el polo superior del dipolo de Chaplygin (Ocampo Jaimes et al., 2022), muestran que la geometría elongada de los remolinos influye en el comportamiento de la dispersión. En ambos casos, las oscilaciones en la varianza respecto al centro de masa están asociadas con el estiramiento y la compresión de un conjunto partículas rotando dentro de los remolinos.

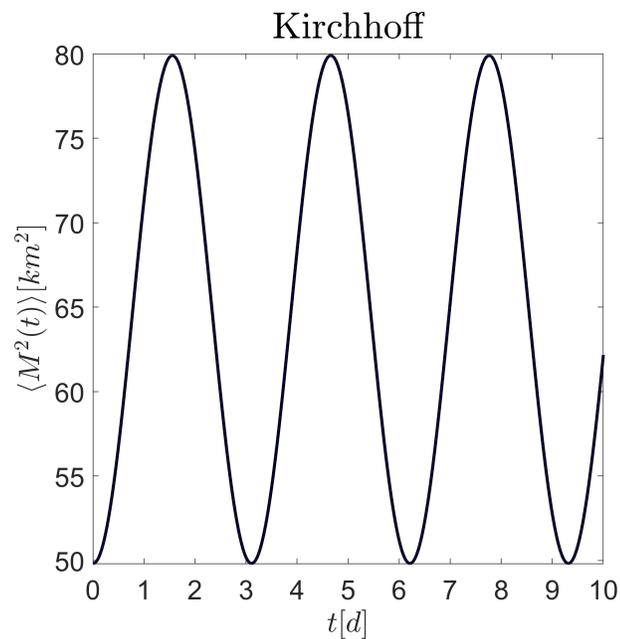


Figura 37. Evolución temporal de la dispersión respecto al centro de masa en el experimento de la Figura 36. El periodo alrededor del remolino es de poco más de 6 días.

Anexo C: Objetividad en vectores y tensores

En este anexo se presenta la definición formal de objetividad para vectores y tensores. En particular, se analiza el vector de velocidad, el gradiente del campo de velocidad, el tensor de deformación y el tensor de rotación bajo un cambio de coordenadas. El análisis se basa en el curso *Lagrangian Coherent Structures Part 1. Geodesic theory* impartido por F.J. Beron-Vera.

Consideremos la siguiente transformación de coordenadas

$$\mathbf{x} \mapsto \bar{\mathbf{x}}(t) = Q(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad t \mapsto \bar{t} = t + \alpha, \quad (46)$$

donde \mathbf{x} representa la posición en el sistema original y $\bar{\mathbf{x}}(t)$ la posición en el nuevo marco de referencia. Aquí, $Q(t)$ es una matriz de rotación ortogonal con determinante uno, $\mathbf{b}(t)$ es un vector de traslación y α una constante. Un vector \mathbf{a} es objetivo si

$$\bar{\mathbf{a}} = Q\mathbf{a}. \quad (47)$$

Un tensor C es objetivo si mapea vectores objetivos en vectores objetivos si cumple con

$$\bar{C} = QCQ^T. \quad (48)$$

En efecto, en ese caso se verifica que

$$\bar{C}\bar{\mathbf{a}} = \bar{C}Q\mathbf{a} = QCQ^TQ\mathbf{a} = Q\mathbf{C}\mathbf{a}.$$

Comencemos analizando el vector de velocidad $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, el cual se transforma como

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{v}} &= \frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\bar{t}} \\
&= \frac{d}{dt}(Q\mathbf{x} + \mathbf{b}) \\
&= Q\mathbf{v} + \dot{Q}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{b}}.
\end{aligned}$$

Como \mathbf{v} no cumple con la condición (47), no es objetivo. A partir de esto, se puede demostrar que el gradiente del campo de velocidad tampoco es objetivo, ya que

$$\bar{\nabla}\bar{\mathbf{v}} = Q\nabla\mathbf{v}Q^T + \dot{Q}Q^T \neq Q\nabla\mathbf{v}Q^T. \quad (49)$$

Ahora consideremos el tensor de deformación:

$$S = \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T). \quad (50)$$

Sustituyendo (49) en (50) y bajo la condición (48) se tiene que

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= \frac{1}{2} \left(Q\nabla\mathbf{v}Q^T + Q(\nabla\mathbf{v})^TQ^T + \dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T \right), \\
&= Q \left(\frac{1}{2} (\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T) \right) Q^T + \frac{1}{2} (\dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T).
\end{aligned}$$

Usando la siguiente identidad

$$\dot{Q}Q^T + Q\dot{Q}^T = \frac{d}{dt}QQ^T = \frac{d}{dt}I = 0,$$

se concluye que

$$\bar{S} = Q \left(\frac{1}{2} (\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T) \right) Q^T, \quad (51)$$

lo cual demuestra que el tensor de deformación S es objetivo. Ahora, consideremos el tensor de rotación:

$$\Omega = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T). \quad (52)$$

De nuevo, sustituyendo (49) en (52) y bajo la transformación (48) se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \frac{1}{2} \left(Q \nabla \mathbf{v} Q^T + \dot{Q} Q^T - (Q \nabla \mathbf{v} Q^T)^T - (\dot{Q} Q^T)^T \right) \\ &= Q \Omega Q^T + \frac{1}{2} \left(\dot{Q} Q^T - Q \dot{Q}^T \right), \end{aligned}$$

y como $\dot{Q} Q^T = -Q \dot{Q}^T$, entonces

$$\bar{\Omega} = Q \Omega Q^T + \dot{Q} Q^T. \quad (53)$$

Por lo tanto, $\bar{\Omega} \neq Q \Omega Q^T$, es decir, Ω no es objetivo. Sin embargo, la desviación respecto a su promedio espacial:

$$\bar{\Omega} = \Omega - \langle \Omega \rangle, \quad (54)$$

sí es una cantidad objetiva, ya que

$$\bar{\Omega} - \langle \bar{\Omega} \rangle = \left(Q \Omega Q^T + \dot{Q} Q^T \right) - \left(Q \langle \Omega \rangle Q^T + \dot{Q} Q^T \right) = Q (\Omega - \langle \Omega \rangle) Q^T. \quad (55)$$