

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el SECIHTI (Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Doctorado en Ciencias
en Ciencias de la Tierra con
orientación en Geofísica Aplicada**

**Estimación de parámetros hidráulicos a partir del modelado
conjunto de datos geohidrológicos y de resistividad en
corriente directa**

Tesis
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Doctor en Ciencias

Presenta:

Jessica Jazmin Salas Ariza

Ensenada, Baja California, México
2025

Tesis defendida por
Jessica Jazmin Salas Ariza

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado
Director de tesis

Dr. José Manuel Romo Jones

Dr. Juan Contreras Pérez

Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez



Dr. Diego Ruiz Aguilar
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

Dra. Ana Denise Re Araujo
Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta **Jessica Jazmin Salas Ariza** como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

Estimación de parámetros hidráulicos a partir del modelado conjunto de datos geohidrológicos y de resistividad en corriente directa

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado
Director de tesis

Uno de los principales objetivos en la exploración geohidrológica es determinar la permeabilidad hidráulica del espacio poroso, ya que de ésta depende en gran medida el movimiento o la posibilidad de extracción de agua subterránea. Para caracterizarla, actualmente es común asimilar conjuntamente datos hidráulicos de piezómetros y geofísicos. En especial, la combinación con datos geoeléctricos permite hacer inferencias sobre el contenido de fluido en el medio poroso, visibles a través de variaciones de la conductividad eléctrica, ésta combinación permite aprovechar la similitud entre los procesos físicos detrás de los flujos eléctricos e hidráulicos, sin embargo, no permite determinar parámetros hidráulicos directamente. Además, la mayoría de estos enfoques excluyen una transición completa en un medio variablemente saturado así como sus fluctuaciones, usuales en la exploración de acuíferos no confinados o tipo libres. Nuestra hipótesis es que las variaciones espacio-temporales en la saturación, registradas en las mediciones hidráulicas y geoeléctricas, se pueden utilizar conjuntamente para mejorar las estimaciones de la permeabilidad hidráulica. En este trabajo, utilizamos una función de saturación, impulsada por el campo de presión hidráulica, como factor de conjunción y estimamos simultáneamente el potencial eléctrico e hidráulico variablemente saturado a partir de la solución acoplada de las ecuaciones no lineales. Siguiendo el formalismo del estado adjunto, desarrollamos el marco teórico inverso conjunto de datos hidráulicos y eléctricos. Este desarrollo permitió unificar y enfocar la sensibilidad de ambos tipos de datos a la conductividad eléctrica y a la permeabilidad hidráulica, principalmente, en la interfase saturada/no-saturada. El gradiente de la función de desajuste, el cual contiene la sensibilidad acoplada de ambos tipos de datos se utilizó en el proceso de optimización empleando un algoritmo de gradientes conjugados no lineales para obtener conjuntamente la conductividad eléctrica saturada y la permeabilidad hidráulica saturada. Aplicamos este marco en escenarios que simulan acuíferos tridimensionales en cuencas sedimentarias de granulometría variable y se simuló en diferentes condiciones de saturación. A partir de estos experimentos, observamos que los datos eléctricos son particularmente sensibles a la permeabilidad hidráulica en la zona no saturada, complementando así la falta de sensibilidad de los datos de piezómetros en esta zona. También descubrimos que esta sensibilidad es máxima en las inmediaciones del nivel freático, el cual actúa como un escáner de permeabilidad natural cuando se realizan mediciones acumuladas para épocas expuestas a diferentes estreses hídricos a lo largo del tiempo.

Palabras clave: Modelado geohidrológico; medio saturado-no saturado; permeabilidad hidráulica, gradientes conjugados no lineales, inversión conjunta.

Abstract of the thesis presented by Jessica Jazmin Salas Ariza as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics.

Hydraulic parameter estimation through of joint model of geohydraulic and direct current resistivity data

Abstract approved by:

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado
Thesis Director

One of the main goals of geohydrological exploration is to determine the hydraulic permeability of the pore space since it largely determines groundwater's movement or extraction potential. It is currently common to combine hydraulic data from piezometers and geophysical data to characterize this permeability. In particular, the combination with geoelectrical data allows making inferences about the fluid content in the porous medium, visible through variations in electrical conductivity. This combination uses the similarity between the physical processes underlying electrical and hydraulic flows; however, it does not allow direct determination of hydraulic parameters. Furthermore, most of these approaches exclude a complete transition in a variably saturated medium, as well as its fluctuations, which are common in the exploration of unconfined aquifers. We hypothesize that spatiotemporal variations in saturation, recorded in hydraulic and geoelectrical measurements, can be used together to improve estimates of hydraulic permeability. In this work, we use a saturation function driven by the hydraulic pressure field as a conjunction factor and simultaneously estimate the electric and hydraulic potential from the coupled solution of the nonlinear equations. Following the adjoint state formalism, we developed a joint inversion theoretical framework for hydraulic and electrical data. This development allowed us to unify and focus the sensitivity of both data types to electrical conductivity and hydraulic permeability, mainly at the saturated/unsaturated interface. The gradient of the objective function, which contains the data coupled sensitivity, is used in the optimization process, based on a nonlinear conjugate gradient algorithm, to obtain the saturated electrical conductivity and saturated hydraulic permeability jointly. We apply this framework in scenarios that simulate three-dimensional aquifers in sedimentary basins with various grain sizes under different saturation conditions. From these experiments, we observed that electrical data are susceptible to hydraulic permeability in the unsaturated zone, thus complementing the lack of sensitivity of piezometer data in this area. We also found that this sensitivity is most significant in the vicinity of the water table, which acts as a natural permeability scanner when cumulative measurements are recorded under different water stress conditions over time.

Keywords: groundwater modeling; saturated-unsaturated medium; hydraulic permeability; non-linear conjugate gradient, joint inversion

Dedicatoria

A mi compañero de viaje, con el que he compartido grandes experiencias, desde ser estudiantes, esposos y ahora ser padres de nuestras dos bellas hijas, a mi esposo Favio.

A mis grandes amores Jimena y Mariana, gracias por darme sus sonrisas, abrazos y todo su amor incondicional.

A mis padres Víctor Salas González y María Ariza Rendón, que me dieron la confianza para creer que podía lograr lo que me propusiera en la vida.

A mi madre y mis hermanos Silvia y Víctor, por ser ejemplo de crecimiento, lucha y ganas de seguir aprendiendo toda la vida. Gracias por su apoyo, ánimos y oraciones.

A mis sobrinos Vale, Víctor y Eduardo que siempre han sido mi inspiración para ser una mejor persona. A la memoria de Jesús Antonio, estás en mi corazón siempre.

A mis ahijados, Vale, Lalo, Emilio y Miguelito.

A mis maestros, que desde la universidad, maestría y ahora doctorado me han inculcado el amor por la geofísica.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, por recibirme desde la maestría, darme trabajo y la oportunidad de crecer y desarrollarme de forma integral en mis estudios de doctorado.

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por la beca otorgada durante el periodo 2019 al 2023 (número de apoyo 757117, CVU-342150). Al CICESE, por la beca otorgada el mes de septiembre 2023.

A mi director de tesis el Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado, gracias por aceptarme como su estudiante, por brindarme visión, dirección y apoyarme con sus conocimientos en el desarrollo de esta investigación y por incrementar mi agrado por el modelado y la inversión de datos geofísicos. Siempre con alegría, paciencia, respeto y compromiso.

A los miembros de mi comité de tesis por darme su respaldo y apoyo. Al Dr. Juan Contreras Pérez, por su análisis crítico que nos permitió encontrar nuevos enfoques al trabajo. Al Dr. José Manuel Romo Jones, por sus revisiones metódicas y claras al proyecto. Al Dr. Miguel Ángel Moreles Vázquez, por estar siempre disponible y facilitarme la comprensión de varios conceptos. Gracias a todos por sus comentarios y sugerencias que mejoraron de forma sustancial este trabajo.

Al Dr. Ricardo Antonio Carpio y sus trabajos de exploración geofísica en acuíferos libres que sirvieran como estímulo para este trabajo. Al Dr. Favio Cruz Hernández, que siempre ha estado disponible para platicar de mi proyecto de doctorado, por darme una recordada de programación, por explicarme en muchas ocasiones y de diversas formas los gradientes conjugados no lineales y por su apoyo económico durante mi periodo sin beca.

A mis maestros que me han formado desde que empecé mi maestría en CICESE y ahora que continué con el Doctorado, muchas gracias por tener siempre su puerta abierta y compartir sus conocimientos. A mis profesores Ing. David Camargo Guzmán, Dr. Rogelio Vázquez González, al Dr. Roger Benito Pacheco Castro y al Dr. Jaime Herrera Barrientos, que me han inculcado el gusto por la geohidrología y la hidrogeofísica. Al Maestro Juan Manuel Espinoza Cardeña, por donarme su legado de libros de geohidrología, me han sido de mucha utilidad. Al Dr. Efraín Gómez Arias, por darme la oportunidad impartir la materia de geotermia y por su apoyo para asistir a congresos y cursos. Al Dr.

Gallardo, por invitarme a impartir la clase de simulación de fluidos geofísicos, cursos y presentaciones. Gracias a mis alumnos por permitirme transmitir mis conocimientos y continuar con mi interés por la docencia. Al M. en C. Luis Mendoza Garcilazo y Dra. Ena Gámez por la confianza que me han brindado para colaborar con ustedes.

Al personal administrativo y técnico. En especial a Melissa Corral Sánchez, por apoyarme en todos los trámites ante el posgrado, Enid Araceli Moran Valdés, Helena Yannick Anaya Uribe, Mónica Sánchez Oliveros, Magdalena Chávez Solís, Adriana Mendoza y Célica Cuevas V., por facilitarme los espacios de trabajo y apoyarme con trámites; a Humberto Santana Benítez Pérez, José De Jesús Mojarro Bermúdez, Alejandro Díaz Fernández, Daniel Peralta, Enrique Castillo Guerrero por el apoyo y la asesoría brindada en muchas ocasiones. A todos gracias por su amistad.

A todo el personal de la guardería de CICESE en especial a la Directora Marcela Padilla y a las profesoras Gaby, Karla y Georgina que permitieron cursar la educación preescolar de mi hija Mariana transmitiéndole sus conocimientos con mucho amor y paciencia. Al departamento de bienestar estudiantil, en especial a Laura Rebeca por hacer las diligencias necesarias cuando me quedé sin beca. A la psicóloga Yahaira Castañeda Sidón, por su apoyo, acompañamiento durante el doctorado. Al personal de biblioteca en especial a Daniel Oviedo por apoyar mis solicitudes de préstamo. Al personal de servicios escolares por su apoyo en todos los trámites. A Nadua Yamile Dajlala Spingler, por las revisiones a este trabajo.

A Laura Verónica Vélez Andrade, por su grata amistad, por ser un respaldo para mí y por el amor brindado a mis hijas. A mis compañeras de generación, gracias por transmitirme su amor a la ciencia, Ana Lucia, Bety, Alejandra, Franci, Thalia y a mi geocomadre Mariana, gracias a todas por su amistad.

A mi familia de origen por sus oraciones y estar siempre presentes.

A mi familia adoptiva de Ensenada, en especial a mis compadres Sandra y Juan Carlos, Selene y Carpio, Miguel y Elizabeth, Luis Murcia y Andrea. Y a los que no son, pero como si fueran, Euclides y Elvia y Violeta y Alex. A mi familia espiritual del MFC. Gracias a todos por su amistad brindada por su apoyo incondicional, por estar presentes en los momentos importantes de nuestra vida y permitirnos como familia ser parte de la suya. Y a todos los que de forma anónima han influido en mi vida.

A Dios por permitirme concluir satisfactoriamente este trabajo.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español.....	ii
Resumen en inglés.....	.iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos.....	v
Lista de figuras.....	x
Lista de tablas	xvi
Capítulo 1. Introducción.....	1
1.1 Modelado conjunto de datos geoelectrónicos e hidráulicos	1
1.2 Flujo de agua y corriente eléctrica	3
1.2.1 Flujo de sustancias en el medio poroso	3
1.2.2 Propiedades intrínsecas en un medio poroso	5
1.2.3 Preguntas de investigación	7
1.3 Hipótesis.....	8
1.4 Objetivos	8
1.4.1 Objetivo general	8
1.4.2 Objetivos específicos.....	8
Capítulo 2. Parámetros eléctricos e hidráulicos acoplados por el campo de presión	10
2.1 La fuerza: el campo de presión en un medio poroso variablemente saturado	10
2.2 El fluido: saturación de agua (S_w)	11
2.2.1 Aproximación matemática simple.....	12
2.2.2 Las curvas de retención de agua del subsuelo	13
2.3 El medio: conductividad hidráulica y eléctrica en medios parcialmente saturados.....	14
Capítulo 3. Ecuaciones fundamentales.....	17
3.1 Ecuación de flujo	17

3.2	Ecuación de conservación de masa.....	18
3.3	Ecuación de difusión para modelado hidráulico.....	18
3.4	Ecuación de difusión para modelado eléctrico.....	20
Capítulo 4. Modelado numérico de procesos difusivos.....		22
4.1	Discretización.....	22
4.2	Modelado hidráulico estacionario.....	24
4.3	Modelo eléctrico.....	27
4.4	Solución del sistema de ecuaciones.....	29
4.5	Pruebas de desempeño de los algoritmos de modelado directo.....	30
4.5.1	Caso 1. Modelado directo de un acuífero tipo libre sin gradiente hidráulico.....	31
4.5.2	Caso 2. Modelado directo de un acuífero tipo libre con gradiente hidráulico.....	33
4.5.3	Validación.....	36
Capítulo 5. Definición del desajuste y formulación del estado adjunto.....		37
5.1	Función objetivo.....	37
5.2	Formulación del estado adjunto.....	38
5.2.1	Operador adjunto.....	38
5.2.2	Método adjunto para calcular la sensibilidad.....	38
5.2.3	Ecuaciones de estado adjunto acopladas.....	40
5.2.4	Derivada de la función objetivo respecto a la conductividad y permeabilidad saturada.....	41
5.3	Modelado numérico del estado adjunto.....	42
5.3.1	Diagrama de flujo para el cálculo de la sensibilidad completamente acoplada.....	43
5.4	Respecto de la sensibilidad acoplada, completamente acoplada y la presión.....	47
5.5	Conclusiones estado adjunto.....	47
Capítulo 6. Análisis de sensibilidad en la simulación de un acuífero libre.....		48
6.1	Modelos con curvas $S_w(P)$ atan.....	49
6.1.1	Acuífero no confinado en un medio homogéneo (sensibilidad al nivel freático).....	49
6.1.2	Modelo heterogéneo.....	54

6.1.3	Mediciones en episodios de tiempo para mejorar la estimación de parámetros.	56
6.2	Modelos con curvas de retención SWR.....	58
6.2.1	Caso 1: Determinación colaborativa del nivel freático (modelo homogéneo)	58
6.2.2	Caso 2: Determinación colaborativa del nivel freático (modelo heterogéneo).....	61
6.2.3	Caso 3: Fluctuaciones del nivel freático como fuente natural para determinar propiedades del medio.	63
6.2.4	Caso 4: Estimaciones en diferentes episodios de tiempo para mejorar la identificación de parámetros.....	68
6.3	Conclusiones de experimentos sintéticos.....	69
Capítulo 7. Formulación del problema inverso acoplado por el campo de presión.....		70
7.1	Introducción al problema inverso	70
7.2	Formulación de problema inverso	72
7.2.1	Función objetivo completa.....	73
7.3	Solución numérica a través de gradientes conjugados no lineales.....	73
7.3.1	Método de gradientes conjugados no lineales	74
7.4	Pruebas preliminares	77
7.5	Experimentos de modelado inverso	79
7.5.1	Caso 1: Recuperación de la conductividad eléctrica y la permeabilidad hidráulica en un medio homogéneo.....	79
7.5.2	Caso 2: Recuperación de la conductividad eléctrica y la permeabilidad hidráulica en un medio heterogéneo en tres episodios de tiempo.....	84
7.1	Resumen capítulo 7.....	89
Capítulo 8. Conclusiones		90
Literatura citada		96
Anexos		99

Lista de figuras

Figura	Página
Figura 1. Ilustración de algunas características intrínsecas del medio poroso y su dependencia al contenido de fluido. Así como propiedades extrínsecas y su relación con el flujo de corriente eléctrica y corriente hidráulica.....	4
Figura 2. Comparación de los fenómenos eléctricos en las paredes del poro y su interacción del fluido: a) Doble capa eléctrica (Modificado de Revil et al. (2003)). b) capilaridad que se da en el proceso de drenaje (Tomado de Luo et al. (2022))......	4
Figura 3. Ilustración de la posible correspondencia de los parámetros más comunes que determinan la capacidad de flujo eléctrico e hidráulico, en un medio variablemente saturado.....	6
Figura 4. Esquema de los componentes de carga hidráulica y su relación con el campo de presiones medido en un pozo de observación.	11
Figura 5. Curva de saturación obtenida con la función arco tangente dada por la ecuación (3).	12
Figura 6. Curvas de saturación para diferentes texturas de suelo obtenida a partir de parámetros de suelo para funciones hidráulicas no saturadas (Carsel & Parrish, 1988; Nemes et al., 2001).	14
Figura 7. Ilustración del papel del campo de presión en procesos de flujo hidráulico y eléctrico. En un medio completamente saturado (a) y en un medio continuo no saturado saturado (b).	15
Figura 8. Flujo de una propiedad a través de un volumen de control.	18
Figura 9. Ilustración de la discretización de volumen finito Ω y los subdominios $\Omega_{\iota,\gamma,\zeta}$, que corresponden con los volúmenes vecinos, los índices ι, γ, ζ indican la dirección perpendicular de los vectores unitarios a cada una de las superficies del volumen (a). Representación de los seis volúmenes adyacentes al volumen central (b). Y detalle de la notación de las superficies A_s en cada dirección.	22
Figura 10. Esta ilustración muestra de forma generalizada los principales elementos en una dirección (y) para: (a) discretización en el caso hidráulico y (b) caso eléctrico.....	23
Figura 11. Algoritmo para el cálculo del esquema iterativo por punto fijo.	26
Figura 12. Condiciones de frontera utilizadas para todos los modelos 3D.....	30
Figura 13. Diagrama esquemático del modelo 3D y sección transversal (Sur-norte) representativa del modelo. Los triángulos invertidos muestran la profundidad del nivel freático (10 m) en ambos extremos del modelo (común en ambos modelados), en la parte superficial se muestra la localización de los electrodos de corriente (i_{Ai}, i_{Bi}) y de potencial (M, N) (flechas rojas y azules). El círculo rojo indica el punto de observación para la presión en el modelo hidráulico.	31
Figura 14. a) Campo de presiones calculada para un modelo homogéneo simple. b) RMS calculado entre dos modelos consecutivos.....	32

Figura 15. Sección transversal del modelo de saturación S_w obtenida del modelado directo hidráulico.....	32
Figura 16. a) Potencial eléctrico calculado para un modelo homogéneo simple, la línea punteada indica el nivel de saturación del modelo directo. b) RMS calculado entre dos modelos consecutivos.....	33
Figura 17. Sección transversal (Dirección Y) representativa del modelo.....	34
Figura 18. a) Campo de presiones calculada para un modelo homogéneo simple. b) RMS calculado entre dos modelos consecutivos.....	34
Figura 19. Modelo 3D de saturación S_w obtenida del modelado directo hidráulico.....	35
Figura 20. a) Potencial eléctrico calculado para un modelo homogéneo simple, la línea punteada indica el nivel de saturación obtenido del modelo hidráulico. b) RMS calculado entre dos modelos consecutivos.....	35
Figura 21. Diagrama de flujo para el cálculo de las derivadas eléctricas e hidráulicas. Nótese que el paso en color amarillo y las flechas indica la información que se intercambia de un método al otro.....	44
Figura 22. Elementos principales para la obtención del campo adjunto y las derivadas de la función objetivo. a) Caso hidráulico; b) eléctrico.....	45
Figura 23. Derivada acoplada de la función objetivo de: (a) datos eléctricos respecto de la conductividad eléctrica saturada (b) datos hidráulicos respecto de la permeabilidad hidráulica. c) Derivada completamente acoplada de la función objetivo de los datos eléctricos e hidráulicos respecto de la permeabilidad hidráulica. (d) Comparación de (b), (c) y el cálculo convencional con un modelo hidráulico perturbado.....	51
Figura 24. Sección vertical de las derivadas de la función objetivo de datos eléctricos respecto de la conductividad eléctrica saturada (a), y de la función objetivo de datos hidráulicos respecto de la permeabilidad hidráulica (b). Obtenidos por el método adjunto semi-acoplado e independiente respectivamente (ver Tabla 3).	52
Figura 25. Sección vertical de las derivadas del misfit del dato hidráulico independiente (a) y del misfit de los datos eléctricos e hidráulicos completamente acopladas (b), con respecto a la permeabilidad hidráulica obtenida por el método adjunto, asociadas al campo de presiones PL	53
Figura 26. Sección transversal (a) y vista en planta (b) de nuestro modelo de prueba heterogéneo. Los círculos vacíos indican las ubicaciones de los piezómetros y los triángulos negros el nivel freático. Las pequeñas estrellas negras indican la ubicación de los centros nueve sondeos eléctricos y los triángulos invertidos grises cada una de las posiciones reales de los electrodos. Nótese que las condiciones de contorno son las mismas que las de la Figura 12.....	54
Figura 27. Vistas en sección vertical (a y c) y horizontal (b y d) de la sensibilidad de los datos eléctricos e hidráulicos acoplados por la presión a la conductividad eléctrica saturada (paneles superiores) y la permeabilidad hidráulica (paneles inferiores).....	55

- Figura 28. Ilustración de la sensibilidad debida al uso agregado de datos eléctricos e hidráulicos medidos en dos épocas diferentes. Nótese que las diferencias en el nivel freático para ambos episodios resultan en una mayor sensibilidad a las propiedades intrínsecas de la conductividad eléctrica saturada (a y b) y la permeabilidad hidráulica (c y d)..... 57
- Figura 29. Sección vertical del modelo sintético homogéneo 3D y la distribución de las fuentes y receptores eléctricos y la localización de la observación hidráulica..... 59
- Figura 30. Sección vertical de derivadas de la función objetivo: a) semi acoplada (eléctricos); b) independiente (hidráulicos); y c) sensibilidad completamente acoplada de la función objetivo de datos eléctricos e hidráulicos con respecto a la permeabilidad hidráulica obtenida por la formulación adjunta..... 60
- Figura 31. Vista en planta de derivadas semi-acoplada de datos eléctricos respecto a la conductividad eléctrica (a) y completamente acoplada de datos eléctricos e hidráulicos respecto a la permeabilidad hidráulica obtenida por la formulación de estado adjunto (b)..... 60
- Figura 32. Diagrama esquemático de la sección transversal del modelo de prueba. Las flechas negras muestran los centros de los arreglos tetraelectródicos, los círculos azules y verdes la ubicación de los electrodos receptores y fuentes eléctricos respectivamente únicamente para el primer arreglo (los demás están localizados cada 10 m respecto al contiguo). Los puntos rojos indican los sitios de observación de presión hidráulica..... 61
- Figura 33. Sección vertical de la derivada de la función objetivo a) de los datos eléctricos a la conductividad eléctrica; b) de los datos hidráulicos y eléctricos a la permeabilidad hidráulica. Como se puede observar se incrementa la sensibilidad a lo largo del nivel freático y dentro del cuerpo inmerso en el medio homogéneo..... 62
- Figura 34. Sección horizontal de las derivadas de la función objetivo de los datos eléctricos a la conductividad eléctrica (izquierda) y derivada de la función objetivo de los datos eléctricos e hidráulicos respecto de la permeabilidad (derecha). Como se puede observar se incrementa la sensibilidad al nivel freático dentro del cuerpo inmerso en el medio homogéneo. 62
- Figura 35. Sección transversal de nuestro modelo de prueba heterogéneo. El cilindro indica la ubicación de los pozos de muestreo y los triángulos negros representan el nivel freático. La pequeña flecha negra indica la ubicación del centro de los 33 arreglos tetraelectródicos. Nótese que las condiciones de contorno son las mismas que las de la Figura 12. 63
- Figura 36. Perfil vertical de la función de saturación para la celda central del modelo 3D, para cada uno de los episodios de tiempos calculados (ξ_1 a ξ_5). Cada gráfica muestra el modelo sintético y homogéneo de referencia de saturación estimada para cada tiempo. Nótese, el comportamiento de la curva sintética al contacto con el nivel freático y al atravesar cada litología planteada en el modelo de la Figura 35..... 65
- Figura 37. Derivada de la función objetivo de datos eléctricos con respecto a la conductividad eléctrica para los escenarios ξ_1 (somero) y ξ_4 (profundo). 66
- Figura 38. Derivada de la función objetivo de datos de piezómetro con respecto a la permeabilidad para los escenarios ξ_1 (somero) y ξ_4 (profundo). 66

- Figura 39. Derivada de la función objetivo de datos eléctricos y de piezómetro con respecto a la permeabilidad para los escenarios ξ_1 (somero) y ξ_4 (profundo)..... 67
- Figura 40. Ilustración de las sensibilidades agregadas para los cinco episodios de tiempo presentados en la Tabla 9. (a) presenta la suma de las sensibilidades de los datos eléctricos a la conductividad eléctrica. (b) representa la suma de la sensibilidad de los datos de pozo a la permeabilidad hidráulica. (c) representa la suma de la sensibilidad completamente acoplada de los datos eléctricos e hidráulicos a la permeabilidad hidráulica. 69
- Figura 41. Metodología para la identificación de los parámetros de la permeabilidad hidráulica y la conductividad y el posible seguimiento de otros factores del medio poroso a través de relaciones petrofísicas..... 70
- Figura 42. Esquema de modelado inverso y parametrización del medio. 71
- Figura 43. Esquema de los elementos para el cálculo de un valor mínimo de la función objetivo Φ siguiendo direcciones locales a partir de su gradiente. 74
- Figura 44. Algoritmo de gradientes conjugados no lineales implementado para la identificación de la conductividad eléctrica y la permeabilidad hidráulica. La evolución del desajuste y las derivadas se calculan con los parámetros en escala logarítmica (Newman & Alumbaugh, 2000) dentro del algoritmo. 77
- Figura 45. Ilustración de las pruebas para recuperar un modelo de conductividad. Fila superior, primera etapa: a) modelo a priori, b) modelo recuperado después de 1 iteración. Fila inferior, 2da etapa: (c) modelos recuperados con suavidades de $\chi = 40$ y (d) $\chi = 70$ ambos después de 50 iteraciones. 78
- Figura 46. Diagrama esquemático de la sección transversal del modelo de prueba homogéneo. Las flechas negras muestran los centros de los arreglos tetraelectródicos y los puntos rojos los sitios de observación hidráulica. 80
- Figura 47. a) Modelo de conductividad eléctrica saturada (σ_o) recuperado después de 160 iteraciones. b) Modelo de conductividad eléctrica variablemente saturada ($\sigma(P)$) dada por la expresión (8) y obtenida a partir del modelo recuperado (a) y el modelo de saturación S_w . Las flechas en los extremos señalan el nivel de saturación del modelo sintético. Nótese, que el modelo se presenta en la horizontal de 150 a 450 m, en donde se localizan los centros de los arreglos (tipo Schlumberger). 80
- Figura 48. Ejemplo del ajuste de los datos observados y calculados de un sondeo central..... 81
- Figura 49. RMS de residuales de los datos eléctricos para 180 iteraciones, alcanzando valor de 1.43, nótese, que el algoritmo de gradientes conjugados se reinició a las 80 iteraciones para mejorar el ajuste. 81
- Figura 50. Modelo hidráulico recuperado con el ajuste de datos hidráulicos, la línea punteada muestra el nivel de saturación. Nótese, que el valor objetivo (sintético) se alcanzó principalmente en las cercanías de los pozos de observación propuestos. 82

- Figura 51. RMS de residuales hidráulicos para 180 iteraciones (a). Comparativo de los datos calculados y observados del modelo de la iteración 180 (ver Figura 50), (b). Valor del residual para cada dato hidráulico (c)..... 82
- Figura 52. Evolución de cada uno de los elementos de la función objetivo completa (desajuste, suavidad y modelo a priori) para cada tipo de dato (eléctrico e hidráulico). Nótese que el salto en la iteración 80 se debió a un reinicio del algoritmo para mejorar el ajuste. 83
- Figura 53. Diagrama esquemático de la sección transversal del modelo de prueba. Las flechas negras muestran los centros de los arreglos tetraeléctricos y los puntos rojos los sitios de observación. 84
- Figura 54. Modelo eléctrico recuperado después de 80 iteraciones a) para un ξ_1 , b) para un ξ_2 y c) para un ξ_3 85
- Figura 55. RMS de residuales por iteración para la inversión de datos eléctricos, en los tres episodios de tiempo. 86
- Figura 56. Pseudo sección de datos eléctricos sintéticos (a), datos calculados para la iteración 36 (b) y su respectivo mapa de residuales obtenidos del proceso de inversión de datos eléctricos para el episodio de tiempo ξ_1 (Figura 54a). La información del ajuste para los episodios ξ_2 y ξ_3 se presentan en el Anexo G. 86
- Figura 57. Modelo hidráulico recuperado después de 80 iteraciones a) para un ξ_1 . b) para un ξ_2 y c) para un ξ_3 88
- Figura 58. a) Detalle del ajuste de datos observados y calculados para la iteración 26, 64, 114 de los episodios ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 respectivamente y b) residuales para cada punto ajustado en la iteración presentada en (a). 88
- Figura 59. a) RMS de los residuales por iteración para la inversión de datos hidráulicos, para los tres episodios de tiempo. 89
- Figura 60. Flujo a través de una franja infinita delimitada a ambos lados por agua abierta. 100
- Figura 61. Respuesta de un modelo analítico simple comparado con MODFLOW y los resultados de este trabajo. En la parte superior de la gráfica se observa la comparación de las superficies freáticas obtenidas con MODFLOW, la solución analítica y el modelado numérico de este trabajo. En la parte inferior se observa las diferencias relativas con el modelo numérico desarrollado en este trabajo. 101
- Figura 62. Comparación de la solución analítica (izquierda) y discreta del potencial eléctrico (derecha). 101
- Figura 63. Esquema general del cálculo del gradiente de la función objetivo a partir del método tradicional de perturbaciones aplicado a perturbaciones de la permeabilidad hidráulica. 106
- Figura 64. Sección transversal de las derivadas de la función objetivo de datos eléctricos respecto de la conductividad eléctrica saturada (fila superior) y de la función objetivo de datos hidráulicos respecto de la permeabilidad hidráulica (fila inferior) obtenidas por el método convencional de

- adjunto simple (columna izquierda) y por la teoría de perturbaciones (columna derecha) para un modelo homogéneo con gradiente hidráulico lateral, asociado a presiones locales..... 107
- Figura 65. Sección transversal de las derivadas de la función objetivo de datos eléctricos con respecto a la conductividad eléctrica saturada para los escenarios ξ_1 (más superficial) al escenario ξ_5 (más profundo)..... 109
- Figura 66. Sensibilidad de los datos hidráulicos con respecto a la permeabilidad hidráulica obtenida por el método adjunto separado convencional resolviendo el tercer término de la ecuación (Ecuación(52)). 110
- Figura 67. La sensibilidad conjunta de los datos hidráulicos y eléctricos con respecto a la permeabilidad hidráulica se obtiene mediante el método adjunto completamente acoplado dado por la ecuación (51). Para los 5 escenarios propuestos en la Tabla 9, cabe destacar que la contribución de los datos eléctricos a la sensibilidad es igual, e incluso superior, a la de los datos hidráulicos con respecto a la permeabilidad hidráulica. 111
- Figura 68. Pseudo sección de datos eléctricos sintéticos (a), datos calculados para la iteración 46 (b) y su respectivo mapa de residuales obtenidos del proceso de inversión de datos eléctricos para el episodio de tiempo ξ_2 (Figura 54b)..... 112
- Figura 69. Pseudo sección de datos eléctricos sintéticos (a), datos calculados para la iteración 115 (b) y su respectivo mapa de residuales obtenidos del proceso de inversión de datos eléctricos para el episodio de tiempo ξ_3 (Figura 54c). 112

Lista de tablas

Tabla	Página
Tabla 1. Correlación del flujo de corriente eléctrica y masa.....	17
Tabla 2. Resumen de los elementos obtenidos a partir de la variación de la función objetivo (44)....	42
Tabla 3. Formas en que funciona la metodología desarrollada para el cálculo de las sensibilidades..	47
Tabla 4. Resumen de modelos generados para el análisis de sensibilidad.....	48
Tabla 5. Propiedades eléctricas e hidráulicas usadas en el modelo sintético 6.1.2 y de referencia. ...	55
Tabla 6. Propiedades eléctricas, hidráulicas y parámetros de suelo usadas en el modelo sintético 6.2.1 y de referencia (los parámetros de suelo se tomaron de Carsel & Parrish (1988).	59
Tabla 7. Propiedades eléctricas, hidráulicas y parámetros de suelo usadas en el modelo sintético 6.2.2 y de referencia (los parámetros de suelo se tomaron de Carsel & Parrish (1988).	61
Tabla 8. Propiedades eléctricas, hidráulicas y parámetros de suelo usadas en el modelo sintético (6.2.3) y de referencia (los parámetros de suelo se tomaron de Carsel & Parrish, 1988).	64
Tabla 9. Profundidades de los niveles freáticos utilizadas para cinco escenarios ξ en las Secciones 5.2 y 5.3. W_1 para los bordes izquierdo y W_2 para los derechos (ver Figura 35).	64
Tabla 10. Propiedades eléctricas, hidráulicas y parámetros de suelo usadas en el modelo sintético (7.5.1) e inicial (los parámetros de suelo se tomaron de Carsel & Parrish (1988).....	79
Tabla 11. Propiedades eléctricas, hidráulicas y parámetros de suelo usadas en el modelo sintético (7.5.2) e inicial (los parámetros de suelo se tomaron de Carsel & Parrish (1988).....	84
Tabla 12. Profundidades de los niveles freáticos utilizadas para tres escenarios ξ en el modelado inverso. W_1 para los bordes izquierdo y W_2 para los derechos (ver Figura 53).	85
Tabla 13. Principales símbolos utilizados	113

Capítulo 1. Introducción

El objetivo esencial de la exploración geohidrológica es caracterizar el movimiento, almacenamiento y la capacidad de extracción del agua subterránea. Estas características dependen del medio geológico donde se presentan las condiciones para el flujo de agua y se pueden cuantificar a través de parámetros hidráulicos. Dentro de estos parámetros, se encuentra el espacio vacío no mineralizado de una roca, mejor conocido como porosidad. Esta puede albergar diferentes fluidos, entre ellos aire y agua. Un hecho conocido es que la presencia y movimiento de agua en las rocas, no depende solamente del espacio poroso, sino también de la conexión entre los espacios vacíos disponibles (permeabilidad hidráulica). Además, en un medio parcialmente saturado, depende también de la capacidad de retención (potencial matricial) del espacio poroso. Estas características se pueden determinar de forma directa mediante inspecciones y pruebas mecánicas empleando excavaciones o pozos. Entre las que destacan: las mediciones de niveles piezométricos (nivel al cual se encuentra presente el agua en forma libre), las pruebas de bombeo (nivel del agua en el pozo sujeta a una presión externa), mediciones de presión en pozo, mediciones con trazadores químicos, etc. Lamentablemente, sólo se puede acceder a este conocimiento en aquellos pozos que alcanzan el nivel del agua a profundidad (Carrera et al., 2005), por lo que esta información solo se conoce localmente y no en toda la extensión del acuífero. Dentro de estos parámetros, identificar la permeabilidad hidráulica es trascendental para la caracterización de un acuífero. Como una manera de suplementar el carácter local de la información de pozos, los estudios de exploración de agua subterránea se apoyan de métodos indirectos de la prospección geofísica; destacando entre ellos, los métodos basados en la propagación de corrientes eléctricas en el interior de la Tierra. Esto debido a que, por mucho, la sustancia más abundante en el subsuelo que permite el tránsito de cargas eléctricas es, precisamente, el agua. Desafortunadamente las relaciones petrofísicas desarrolladas hasta el momento no permiten medir, por sí solas, la permeabilidad o la conductividad hidráulica, a pesar de su dependencia a la presencia de agua y al desplazamiento iónico en el espacio poroso.

1.1 Modelado conjunto de datos geoelectrónicos e hidráulicos

Considerando, que tanto las mediciones geohidrológicas como electromagnéticas en geofísica dependen de la presencia del agua en el subsuelo, es natural que desde su origen hayan sido usadas de manera combinada en trabajos geohidrológicos. Esto ha trascendido, más recientemente, en metodologías que

asimilan simultáneamente ambos tipos de información. En la actualidad, el modelado conjunto de datos geoelectrónicos de corriente directa (D.C.) y datos hidráulicos es una estrategia usada para generar modelos que representen mejor las características de un acuífero (Commer et al., 2020; González-Quirós & Comte, 2021; Linde & Doetsch, 2016). Este modelado conjunto requiere de al menos una característica cuantificable que sea común en ambos procesos de flujo (hidráulico y eléctrico). De acuerdo al tipo de característica propuesta, comúnmente se clasifica el modelado conjunto en: a) estructural, basado en la morfología del medio (e.g. la estructura geológica) (Steklova & Haber, 2019) o b) petrofísico, basado en las propiedades del medio (e.g. a través de relaciones petrofísicas). En esta última vertiente, muchos autores han recurrido a relaciones empíricas del flujo eléctrico (Archie, 1942; Moreno, 2022; Purvance & Andricevic, 2000; Slater, 2007), para suministrar a los datos geoelectrónicos el efecto de procesos hidráulicos dinámicos como la saturación-tránsito (infiltración, inyección), así como el efecto de variaciones composicionales (i.e. contenido de solutos).

Un caso especial se presenta cuando exploramos un acuífero libre, donde la gravedad drena la parte superior del medio (i.e. el fluido está prácticamente ausente). Este tipo de acuífero está limitado por una superficie libre en movimiento, conocida como nivel freático. Su altura general la determina el volumen del agua contenida en el acuífero, mientras que su forma depende principalmente de las heterogeneidades del medio poroso. Debido a la irregularidad de la superficie freática y a la escasa presencia del fluido en la parte drenada muchos autores evitan trabajar esta zona y se centran únicamente en realizar sus experimentos en la zona saturada del medio; asumiendo flujos predominantemente horizontales y utilizando ecuaciones desarrolladas para medios completamente saturados (Camporese et al., 2015; Irving & Singha, 2010; Jardani et al., 2013; Pollock & Cirpka, 2010; Steklova & Haber, 2019). Otros autores, en cambio, se limitan a estudiar solamente la zona vadosa (zona drenada) para realizar experimentos de infiltración e inyección, utilizando ecuaciones exclusivas para estos medios como la de Richards (Hinnell et al., 2010; Huisman et al., 2010; Mboh et al., 2012).

Mientras que estas aproximaciones pueden ser válidas para estudios netamente geohidrológicos, para los métodos geoelectrónicos esta separación en zonas no es posible, ya que el escaso contenido de humedad de la parte drenada generalmente es suficiente para permitir el tránsito de las cargas eléctricas en el medio y, por ende, aunque con menor densidad de corriente en la zona vadosa, la corriente eléctrica se distribuye en ambas zonas, y el efecto medido en la superficie (variación del potencial eléctrico) se registra para ambas. Es así que, aún en estos medios variablemente saturados, los datos geoelectrónicos e hidráulicos combinados deberían capturar los procesos de flujo del agua subterránea (Kowalsky et al., 2011).

De los trabajos existentes sobre modelado conjunto de datos geoeléctricos e hidráulicos se puede resumir que: a) todos los autores utilizan la resistividad en conjunto con algún parámetro hidráulico, destacando la proporción y disposición de los poros y b) que la capacidad del desplazamiento del fluido casi siempre se evalúa con experimentos controlados, por ejemplo con trazadores salinos. Pocos estudian medios variablemente saturados en sus condiciones naturales; el cual es el escenario más común en trabajos de exploración de agua subterránea. Más aun, después de décadas del uso combinado no existe un marco teórico para transferir la información geoeléctrica en una estimación cuantitativa del recurso hídrico y viceversa, la información geohidrológica no es asimilada en la interpretación de datos geofísicos.

1.2 Flujo de agua y corriente eléctrica

1.2.1 Flujo de sustancias en el medio poroso

Es ampliamente conocido que el movimiento de los iones existentes en el agua misma conforma el flujo de corriente eléctrica en el subsuelo, por lo que es de esperar que la intensidad de esta corriente dependa del tipo y disponibilidad de iones en el agua (propiedad intrínseca de la sustancia), de la presión ejercida por otras cargas confinantes, conocida como diferencia de potencial eléctrico (intensidad y disposición de la fuente del movimiento) y de los obstáculos que se encuentran durante su tránsito (propiedad intrínseca del medio). De manera análoga, el flujo de agua depende de propiedades intrínsecas de la sustancia (como su densidad y viscosidad), de la presión ejercida por la fuerza de gravedad u otra fuente externa como el vacío de una bomba hidráulica y de los obstáculos que conforman el medio donde transita, cuantificados con valores de porosidad, conectividad, tortuosidad, forma de poro, entre muchos otros (Figura 1).

De aquí se puede hacer notar lo siguiente:

- a) Dado el tamaño comparable de los iones (e.g. $\text{Cl}^- \sim 1.81 \text{ \AA}$, $\text{Na}^+ \sim 0.98 \text{ \AA}$), con las moléculas de agua ($\sim 2.75 \text{ \AA}$), es de esperar que estos iones sorteen los mismos obstáculos que el agua en su tránsito a través del medio poroso, por lo que las propiedades intrínsecas del medio deberían ser compartidas por ambos procesos. Esto, salvo algunos procesos electroquímicos presentes a estas escalas.

- b) La proporción de cargas confinantes por sobre aquellas cargas disponibles en el medio permiten establecer diferencias de potencial eléctrico sobre los iones mucho mayores que aquellas originadas en las moléculas de agua por la gravedad u otros medios mecánicos. Esto facilita la ejecución de múltiples experimentos controlados de flujo eléctrico, incluyendo en medios parcialmente saturados de agua. Por el contrario, para el caso hidráulico estos experimentos no son abundantes ya que sólo se pueden realizar al interior de pozos que alcancen el medio saturado, lo que los hacen altamente costosos.

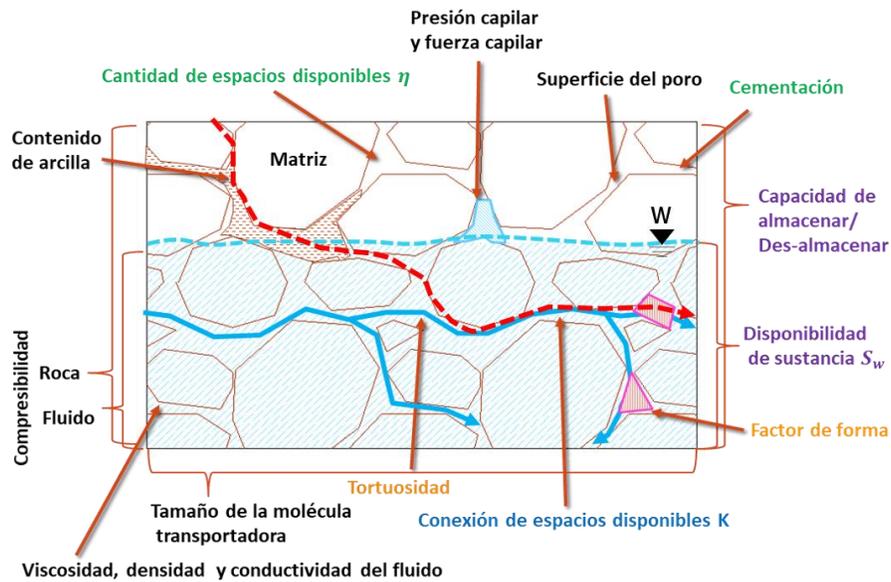


Figura 1. Ilustración de algunas características intrínsecas del medio poroso y su dependencia al contenido de fluido. Así como propiedades extrínsecas y su relación con el flujo de corriente eléctrica y corriente hidráulica.

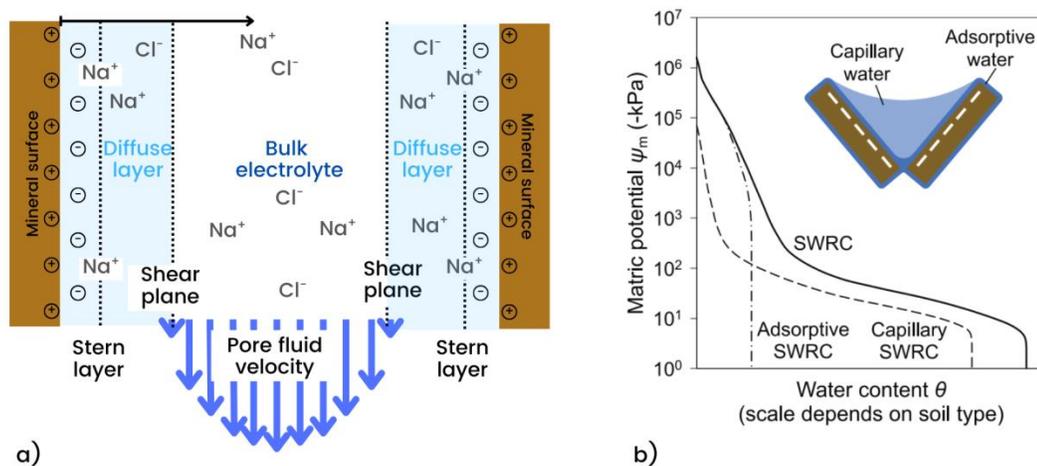


Figura 2. Comparación de los fenómenos eléctricos en las paredes del poro y la interacción del fluido: a) Doble capa eléctrica (Modificado de Revil et al. (2003)). b) capilaridad que se da en el proceso de drenaje (Tomado de Luo et al. (2022)).

Analizando con un mayor detalle, podemos contar algunas diferencias entre el comportamiento de los flujos eléctricos e hidráulicos. Entre los más notables, está el hecho de que la conductividad eléctrica resulta de dos procesos: la conducción iónica que ocurre en el interior de los poros y la migración iónica en la doble capa desarrollada en las inmediaciones de la interfase fluido-grano (Figura 2a). Este último proceso no requiere una saturación total del espacio poroso y, en ese caso, actúa sobre el fluido que se adhiere a la fase sólida o irreducible cuando es sometido a fuerzas de succión y adsorción, mismas que dependen de la granulometría del medio (Figura 2b). En el caso de un acuífero libre, este escenario siempre está presente, por lo que debe ser considerado con detalle.

1.2.2 Propiedades intrínsecas en un medio poroso

Dentro de los factores mencionados que controlan tanto el flujo eléctrico como hidráulico, se destacan dos: la existencia del agua en el espacio poroso y la geometría de este espacio. En ambos procesos existen varias relaciones, mayormente empíricas, que involucran parámetros relacionados a estos dos factores.

Para el caso hidráulico es ampliamente popular la analogía de tubos capilares para aproximar el medio poroso (destacando la relación de Kozeny-Carman KC); sin embargo existen muchas otras aproximaciones, una de ellas la compilada por (Slater, 2007) es:

$$k_s = \eta G, \quad (1)$$

las cuales involucran múltiples parámetros como la porosidad η , y factores relacionados con la geometría y disposición de los poros $G = \frac{r^2}{aT}$; es decir, la tortuosidad T , el radio hidráulico r y la geometría del poro a . La permeabilidad (ecuación (1)) puede normalizarse por las propiedades del fluido (densidad del agua ρ_w y su viscosidad dinámica Υ) y ser convertida en el parámetro conocido como conductividad hidráulica, donde $K = k_s \frac{\rho_w g}{\Upsilon}$, donde g es la constante de gravedad.

Aunque el comportamiento de ambos tipos de flujos en un medio completamente saturado ha sido mucho más estudiado que el correspondiente a un medio parcialmente saturado, es un hecho que casi todos estos estudios se han llevado a cabo en cada medio por separado. Por lo que, en esta sección, nos enfocaremos en su generalización a un medio variablemente saturado empleando el concepto de permeabilidad relativa $k_r = k(P)/k_s = S_w^n$. Siguiendo la notación para un medio bifásico, $k(P)$ hace

referencia a la permeabilidad parcialmente saturada (aire-agua) y k_s a la permeabilidad del medio completamente saturado ($S_w = 1$).

En el caso del flujo eléctrico, el trabajo fundamental de Archie (1942) descrito por:

$$\sigma_o = \sigma_w \eta^\zeta \quad (2)$$

que relaciona los parámetros de porosidad η , factor de cementación ζ , la conductividad eléctrica del fluido σ_w , con la conductividad eléctrica del medio (σ_o). Similar al caso hidráulico, en un medio variablemente saturado, la conductividad se denota como $\sigma(P) = \sigma_o S_w^n$. Donde S_w^n es la saturación de agua y el exponente de saturación n depende de la granulometría de la roca y de la facilidad de adhesión de un fluido a la pared mineral; para una distribución homogénea de fluidos se asocia con el aspecto de las burbujas de aire en los poros (Han et al., 2021).

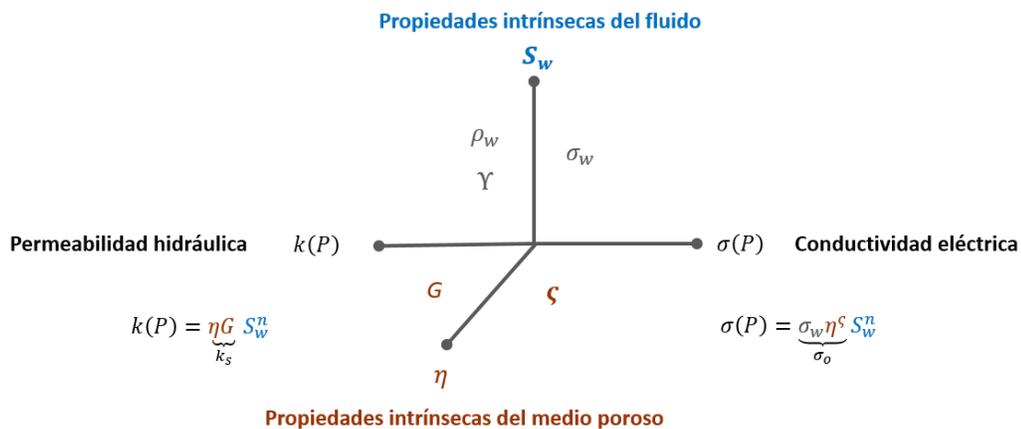


Figura 3. Ilustración de la posible correspondencia de los parámetros más comunes que determinan la capacidad de flujo eléctrico e hidráulico, en un medio variablemente saturado.

En ambas fórmulas básicas ((1) y (2)) el único factor que explícitamente se repite es la porosidad, esto explica por qué la inmensa mayoría de los trabajos existentes que analizan combinadamente ambos procesos se basan en este factor (η). A pesar de presentar una gran similitud, no corresponden exactamente, es decir, ambas formulaciones contienen parámetros relacionados con la forma del espacio poroso (factor geométrico en la ecuación (1) y la cementación en la ecuación (2)) y con las características propias del fluido (conductividad eléctrica del agua, densidad y viscosidad) como se muestra en la Figura 3. También es notable que solamente la ecuación (2) tiene un término relacionado con el contenido de agua.

Estas interrelaciones (Figura 3) han incentivado que, al menos a nivel experimental, se hayan desarrollado ecuaciones que combinen relaciones de propiedades de flujo eléctrico con relaciones de flujo hidráulico, por ejemplo la obtenida por Purvance & Andricevic (2000) que relaciona la conductividad eléctrica (σ_E) con la conductividad hidráulica (K), que transformados a su forma logarítmica (log-log) tienen un comportamiento lineal, es decir, $K = a(\sigma_E)^b$ donde a y b son parámetros relacionados con la porosidad y su estimación depende de la comparación de datos geoelectrónicos con valores de conductividad hidráulica medidos en campo o laboratorio. Otra relación, es la que combina las relaciones Kozeny-Carman modificadas, para incluir a la parte imaginaria de la conductividad a bajas frecuencias σ'' (obtenida con polarización inducida): $K = \frac{a}{F(\sigma'')^c}$ donde a y c son parámetros relacionados con la porosidad y F es el factor de formación ($F = \eta^{-\zeta}$), (Slater, 2007).

1.2.3 Preguntas de investigación

Además de ser relaciones mayormente empíricas, el uso de ecuaciones como (1) y (2) para un análisis combinado de los procesos de flujo eléctrico e hidráulico, tiene el reto adicional de que los valores para dichos parámetros provienen principalmente de estudios de laboratorio, en lugar de mediciones geoelectrónicas en superficie y mediciones de niveles piezométricos convencionales. En el mejor de los casos, aunque se hicieran dichas pruebas de laboratorio, los valores obtenidos normalmente son tan dependientes del sitio de muestreo que es prácticamente imposible trascenderlos a la escala de un acuífero. Resulta así deseable obtener una estrategia de análisis que permita el uso combinado de datos geoelectrónicos e hidráulicos a nivel de mediciones de campo para evaluar propiedades de flujo relevantes a la escala de un reservorio hídrico subterráneo. En la actualidad esta estrategia no existe y el uso de datos geoelectrónicos de superficie y geohidrológicos de pozo en acuíferos libres se sigue haciendo de manera independiente; pero ¿Cuáles son los factores que han limitado este desarrollo?, ¿Es posible que la definición de los principales factores relacionados con la composición del agua, su proporción o la forma del espacio poroso confinante estén mal planteados y que eso no permita unificar ambos tipos de flujo? Profundizando un poco al nivel de escala de un acuífero libre ¿Será que existen otros factores clave que han sido ignorados y que no están presentes en las relaciones de flujo o que quizás estén ahí y simplemente no se han aprovechado para hacer un uso combinado de los datos geoelectrónicos y geohidrológicos en estos acuíferos? ¿Será también que el objetivo unificado de exploración cuando se usan ambos tipos de datos ha sido mal enfocado y estamos buscando los parámetros incorrectos?

1.3 Hipótesis

El espacio poroso saturado donde ocurren los procesos eléctricos e hidráulicos, es el mismo. Sin embargo las investigaciones eléctricas lo analizan en función de la geometría de sus poros (exclusivamente en litologías simples) o a través de su reducción o cementación, ya que dependiendo del contenido de minerales arcillosos presentes, se incrementa la facilidad de conducción; en la exploración geohidrológica se indaga en la geometría que facilita el tránsito de un fluido en el mismo espacio. De estudios previos, sabemos que en un medio variablemente saturado, el espacio poroso tiene la propiedad de retener el agua en sus paredes cuando existen fluctuaciones de agua, este tránsito depende principalmente del tamaño de la fase mineral, además, es un hecho que el flujo de corriente eléctrica se da principalmente en esta capa de agua adherida. Creemos que estas variaciones espacio-temporales naturales del contenido de agua en la interfase saturada/no-saturada influyen simultáneamente en los datos geoeléctricos e hidráulicos. Planteamos que estas fluctuaciones en el nivel de saturación impulsadas por la presión hidráulica son compatibles y aumentan la sensibilidad reciproca de ambos procesos. Se espera además que esta compatibilidad permita la identificación de la permeabilidad y la conductividad eléctrica saturadas del medio poroso. En este trabajo se propone dar respuesta a algunas de estas interrogantes planteando los siguientes objetivos.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Estudiar los procesos o factores geohidrológicos que determinan simultáneamente el flujo de agua subterránea y el flujo de corriente eléctrica, en un medio poroso variablemente saturado y trascenderlos en un algoritmo de modelado combinado de datos geoeléctricos de superficie y geohidrológicos de pozo para estudios de cuencas geohidrológicas.

1.4.2 Objetivos específicos

1. Analizar el marco teórico existente de las relaciones entre parámetros comúnmente aceptados de la fuente, medio y sustancia en los procesos de flujo hidráulico y eléctrico.

2. Revisar las estrategias existentes de modelado de procesos difusivos y su relación con los parámetros involucrados en las relaciones de flujo tanto eléctrico como hidráulico.
3. Desarrollar un algoritmo de modelado combinado eléctrico e hidráulico basado en ambas relaciones de flujo.
4. Identificar y desarrollar los elementos necesarios para plantear el problema inverso conjunto de datos geoelectrónicos e hidráulicos acoplados por relaciones de flujo.
5. Demostrar el funcionamiento de los esquemas de modelado directo e inverso conjuntos desarrollados a través de experimentos numéricos controlados.

El desarrollo de esta investigación se presenta resumido en los siguientes capítulos:

El capítulo 2, como parte central de la investigación, se enfoca en el vínculo entre los procesos de flujo eléctrico e hidráulico, esto, a través de una curva de saturación que representa el contenido de agua en el medio poroso. El capítulo 3, muestra las ecuaciones fundamentales de difusión acopladas en función de la curva de saturación para el modelado eléctrico e hidráulico en un medio variablemente saturado, planteadas en términos de los principios de conservación de masa, carga y momento. El capítulo 4, presenta el desarrollo numérico en términos de volumen finito para cada proceso difusivo. El desarrollo teórico de sensibilidades a partir de la formulación de estado adjunto se presenta en el capítulo 5, con el objetivo de cuantificar las variaciones en los datos geofísicos e hidrológicos debido a las propiedades intrínsecas del fluido y del medio poroso, promovidas por los cambios de presión. El capítulo 6 muestra cómo los datos eléctricos e hidráulicos acoplados aumentan la sensibilidad a la permeabilidad hidráulica en varios escenarios, simulando diferentes niveles freáticos. En el capítulo 7 presentamos la formulación del problema inverso completo para la identificación de la conductividad eléctrica saturada y la permeabilidad hidráulica saturada de forma semi-acoplada y acoplada, además en este capítulo se muestra, a través de experimentos sintéticos, la identificación de parámetros de forma colaborativa. El capítulo 8 concluye con nuestras observaciones finales.

Capítulo 2. Parámetros eléctricos e hidráulicos acoplados por el campo de presión

Los fenómenos de flujo eléctrico y flujo de agua en un medio poroso, en estado estacionario presentan la misma naturaleza difusiva. Podemos estudiar ambos fenómenos asumiendo que se propagan en el mismo medio y sortean los mismos obstáculos, tomando en cuenta las siguientes primicias: el flujo de agua tiene un comportamiento laminar, es incompresible y el medio poroso no es deformable. En lo siguiente detallamos el razonamiento para poder hacer un estudio análogo de ambos fenómenos en un medio poroso variablemente saturado (saturado/no-saturado) y la posibilidad de describir ambos procesos de una manera unificada. Además, describimos las propiedades de los tres elementos fundamentales involucrados: la fuerza que origina el movimiento, el fluido que se desplaza y el medio por donde viaja.

2.1 La fuerza: el campo de presión en un medio poroso variablemente saturado

El medio poroso no saturado se localiza entre la superficie libre del subsuelo y la interfase con la zona saturada, conocida como nivel freático. En este medio, el contenido de humedad es parcial y la mayor parte del espacio es ocupado por aire. Por su ubicación es una zona de transición sujeta a diversos estreses hídricos originados por diversos procesos físicos, químicos y biológicos, que resultan en el movimiento tanto lateral, como vertical del agua. Dado que el rasgo más prominente es el nivel freático, sus diferencias de elevación se transforman en la mayor fuente de presión que hace posible el desplazamiento lateral del fluido. Por lo que a la elevación a la que se encuentra este nivel freático a partir de un datum de referencia se le conoce como carga hidráulica (h):

$$h = \frac{P}{\rho_w g} + z. \quad (3)$$

La carga hidráulica es la altura de la columna de agua generada por la carga de presión ($P/\rho_w g$) sumada a una altura de nivel o punto de medida z (Figura 4). De esta relación podemos deducir el comportamiento que tiene el campo de presiones hidráulicas en un medio poroso variablemente saturado. Es decir, el nivel freático se localiza a presión atmosférica, por lo que este valor corresponde al

nivel de presión hidráulica $P = 0$, (Bear & Cheng, 2010) bajo esta referencia, los valores de presión hidráulica sobre el nivel freático serán negativas y debajo de este, positivas.

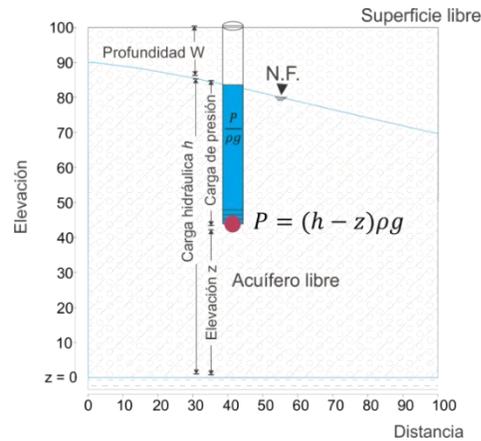


Figura 4. Esquema de los componentes de carga hidráulica y su relación con el campo de presiones medido en un pozo de observación.

2.2 El fluido: saturación de agua (S_w)

Cuando hablamos de un medio variablemente saturado nos referimos a que una parte está ocupada por fluido y otra por aire (medio bifásico), por lo que debemos conocer la cantidad relativa de cierta sustancia (aire o agua) en los poros, en nuestro caso es de interés la saturación de agua S_w :

$$S_w = \frac{\text{Volumen de agua}}{\text{Volumen de espacios porosos}} \quad (4)$$

donde $0 < S_w \leq 1$. El grado de saturación o el contenido de humedad dependen internamente de la capacidad de la retención de agua en el medio poroso, es decir, de la granulometría y de la matriz mineral.

El nivel de saturación determina la fracción de agua contenida en el medio y al ser este mismo fluido el portador de iones, se convierte en el elemento más importante en ambos procesos y la clave para acoplar mediciones eléctricas e hidráulicas. Este nivel de saturación existe tanto en un medio poroso saturado como no saturado, así que, su valor debe influir notablemente tanto en la conductividad eléctrica como en la permeabilidad en todo el medio. A continuación se presentan dos funciones que se utilizaron para presentar su comportamiento y trasladar su efecto a los procesos tanto eléctrico como hidráulico.

2.2.1 Aproximación matemática simple

Como una primera aproximación recurrimos a una función matemática simple basada en una transición monotónica, antisimétrica y asintótica, tanto hacia el medio completamente drenado, como al medio completamente saturado, ubicando al nivel freático como el punto de inflexión. Aunque existen muchas funciones con estas características, por ejemplo una función error o una función escalón, por practicidad y fácil manipulación recurrimos a una función arco tangente, dada por:

$$S_w(P) = c_1 + c_2 * \operatorname{atan}\left(\frac{P - c_3}{c_4}\right), \quad (5)$$

donde P representa el campo de presión en función de la profundidad.

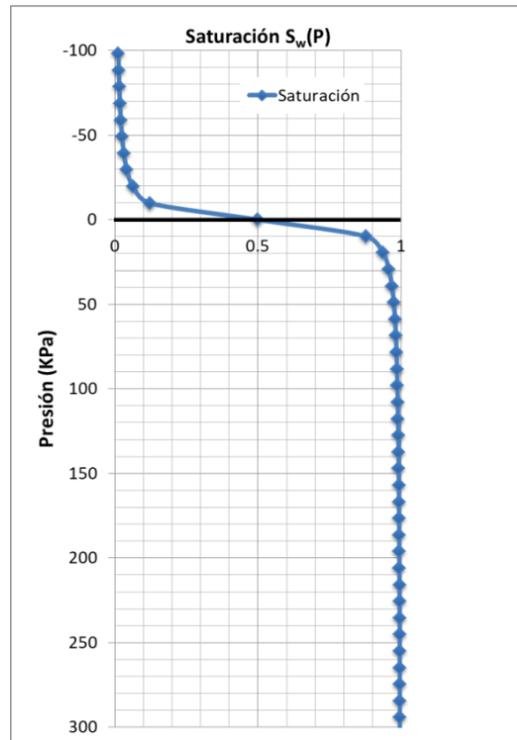


Figura 5. Curva de saturación obtenida con la función arco tangente dada por la ecuación (5).

Los valores de las constantes se seleccionaron como se describe a continuación: $c_1 = 0.5$ y $c_2 = 2/\pi$, para obtener el rango requerido entre $0 < S_w \leq 1$; se seleccionó $c_3 = 0$ para fijar el nivel de freático en la presión de referencia $P = 0$; c_4 se utiliza para adelgazar o engrosar la zona de transición argumentando que su valor depende principalmente de la granulometría presente en las inmediaciones del nivel freático. Esta constante debe así calibrarse in situ.

2.2.2 Las curvas de retención de agua del subsuelo

Mientras que la función arco tangente es simple y fácil de implementar en un algoritmo numérico, las pequeñas diferencias que tienen con algunas relaciones empíricas ya empleadas pueden conducir a grandes diferencias en los campos de presión hidráulica y eléctricos observados particularmente en la zona no saturada.

Las curvas de retención de agua del subsuelo (SWRC por sus siglas en inglés), son regularmente usadas para el estudio de procesos de flujo, están definidas como la relación entre el contenido de agua del suelo y el potencial matricial, este último representa el grado de retención de agua debida a la acción integrada de fuerzas de adsorción y capilaridad.

Si nos enfocamos en que el potencial matricial es el responsable de las presiones hidráulicas negativas arriba del nivel freático, podemos usar la SWRC como una función de saturación continua, asumiendo que la zona completamente saturada es igual a 1. Una de estas curvas de retención de agua es, el modelo de van Genuchten (Van Genuchten, 1980), que es ampliamente aceptada y está dada por:

$$S_w(P) = \begin{cases} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{P}{\alpha_w}\right)^{\beta_w}} \right]^{\gamma_w} & \text{zona no saturada,} \\ 1, & \text{zona saturada,} \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Siendo } \gamma_w = 1 - \frac{1}{\beta_w}.$$

La ecuación (6) reproduce una curva de saturación en un medio continuo desde la zona no saturada (potencial matricial o succión), la zona de interface (donde predomina la presión capilar) y la zona completamente saturada.

En la zona variablemente saturada α_w y β_w son conocidos como parámetros de suelo; el primero asociado a la entrada de aire en el medio poroso y el segundo depende de la tasa de drenaje del suelo (parámetro de distribución del tamaño de los poros). El parámetro γ_w es el parámetro del suelo que

depende del contenido de agua residual. Por lo que esta relación unifica el nivel de humedad del medio saturado y el no saturado a través del campo de presión de los poros.

En la práctica, sólo se pueden construir curvas precisas de retención de agua en el suelo después de meticulosos experimentos de laboratorio, que dependen en gran medida del lugar y, por lo tanto, sólo son válidos localmente. Sin embargo podemos recurrir a bases de datos de parámetros de suelos como UNSODA (Nemes et al., 2001) o regresiones múltiples estadísticas para estimar estos parámetros (Carsel & Parrish, 1988). La Figura 6 muestra la importancia de la granulometría en un medio variablemente saturado, en el cual para granos finos (arcillas) la retención de fluido es mayor y para granos más gruesos la retención es menor (arenas).

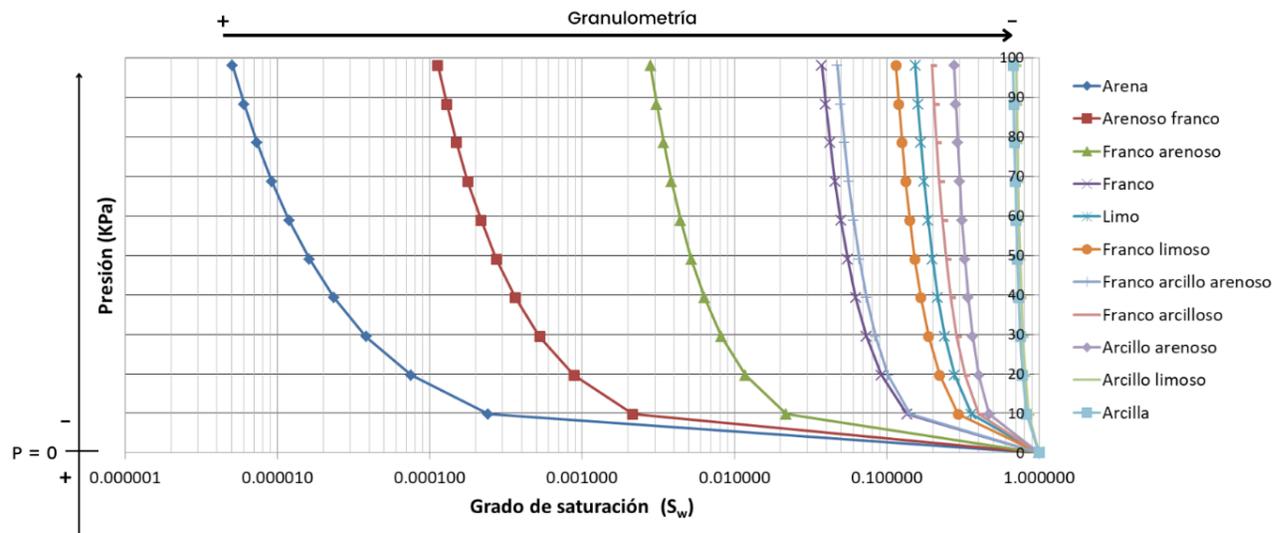


Figura 6. Curvas de saturación para diferentes texturas de suelo obtenida a partir de parámetros de suelo para funciones hidráulicas no saturadas (Carsel & Parrish, 1988; Nemes et al., 2001).

2.3 El medio: conductividad hidráulica y eléctrica en medios parcialmente saturados

En un medio sin materia que transportar ($S_w = 0$) la conductividad eléctrica y la conductividad hidráulica son nulas. Por otro lado en un medio completamente saturado la conductividad depende de dos tipos de factores: aquellos atribuibles a la sustancia que viaja y aquellos atribuibles a las demás sustancias que se lo impiden. En el caso hidráulico es común separar ambos tipos de factores, siendo el segundo el que lleva al concepto de permeabilidad hidráulica, mientras que, para el caso eléctrico es más

común separar el primero como conductividad del fluido. En nuestro caso adoptaremos los conceptos de permeabilidad hidráulica saturada y conductividad eléctrica saturada, es decir, a una $S_w = 1$ (Figura 7a). Debido a la dependencia al grado de saturación en un medio variablemente saturado las propiedades intrínsecas (conductividad eléctrica y permeabilidad) son relativas. Por lo que es necesario expresarlas en función de la propiedad intrínseca saturada y de la saturación, como se muestra en la Figura 7b.

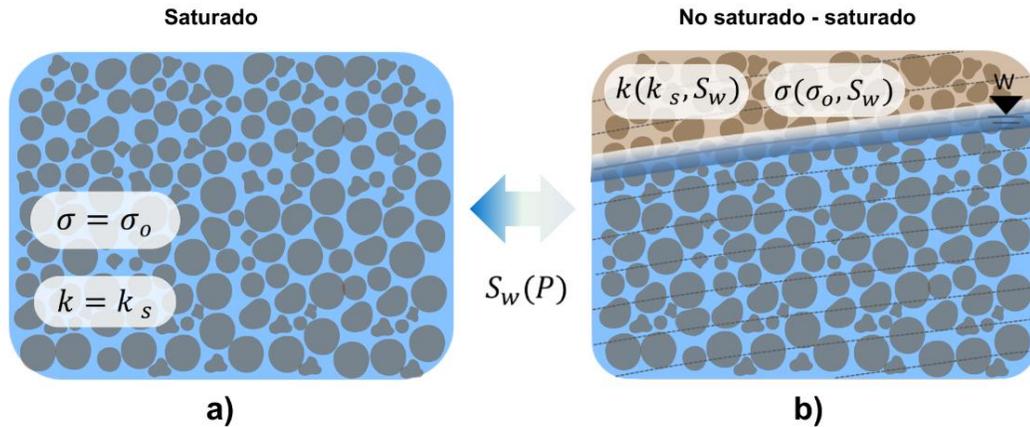


Figura 7. Ilustración del papel del campo de presión en procesos de flujo hidráulico y eléctrico. En un medio completamente saturado (a) y en un medio continuo saturado/no-saturado (b).

Permeabilidad hidráulica variablemente saturada

La permeabilidad en el modelado hidráulico mide la facilidad del medio para permitir el paso de un fluido, dada por la relación (1). Como se mencionó en el Capítulo 1, para caracterizarla en un medio variablemente saturado, seguiremos la notación para un medio bifásico, en donde la ecuación (1) se traduce a una permeabilidad relativa, en la cual $k(P)$ es conocida como la permeabilidad parcialmente saturada de agua (o efectiva) en (7). Esta es dependiente de la permeabilidad saturada k_s (i.e. la permeabilidad a una saturación $S_w = 1$, también conocida como permeabilidad intrínseca) y del grado de saturación S_w descrito en las ecuaciones saturación (5) o (6).

$$k(P) = \begin{cases} k_s S_w^n(P), & P < 0 \\ k_s, & P \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

En esta expresión, n es un parámetro que puede ser estimado por calibración. Como lo indica Dogan & Motz, (2005) el valor de n es pequeño para suelos arenosos (de 2 a 5) y alto para suelos arcillosos (de 10 a 20), para los experimentos realizados en este trabajo lo utilizamos con un valor de 2.5 fijo.

Conductividad eléctrica

La conductividad eléctrica saturada σ_o mide la facilidad del medio para transmitir una corriente en un medio completamente saturado dada en la ecuación (2). En analogía con la permeabilidad hidráulica, la conductividad eléctrica efectiva para un medio variablemente saturado de agua $\sigma(P)$, está dada por:

$$\sigma(P) = \begin{cases} \sigma_o S_w^n (P), & P < 0 \\ \sigma_o, & P \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Esta ecuación es similar a aquella propuesta para la permeabilidad. En este caso, el parámetro n lo utilizamos con un valor de 2.5 fijo para nuestros experimentos como lo sugiere originalmente Archie (1942).

Capítulo 3. Ecuaciones fundamentales

Los procesos de flujo eléctrico y de agua subterránea son de carácter difusivo, en los cuales las cargas y la masa de agua se mueven de zonas de alta a baja energía. En el caso de la corriente eléctrica en el subsuelo, los iones de las moléculas de agua son quienes se desplazan ya sea en la zona completamente saturada o en la película superficial y el agua irreducible en la zona no saturada (Figura 2a); por otro lado, el agua subterránea se mueve a través del espacio poroso, asumiendo un flujo laminar Darciano. Las ecuaciones que gobiernan ambos fenómenos nacen de la ley de conservación de masa-carga y de las relaciones constitutivas entre las propiedades del medio variablemente saturado con el fenómeno de flujo.

Como observamos a continuación, ambas relaciones constitutivas son dependientes del grado de saturación. Esta saturación, a su vez es función del campo de presiones. Si realizamos experimentos simultáneos, ambos procesos estarían sujetos a las mismas condiciones de presión y con ello, de saturación. Este hecho es de relevancia para una formulación interrelacionada empleando ecuaciones fundamentales eléctrica e hidráulica como se muestra a continuación.

3.1 Ecuación de flujo

El flujo se define como la cantidad de sustancia (masa o carga) que pasa a través de una superficie de control S por unidad de tiempo. La Tabla 1 muestra un comparativo de esta definición de flujo aplicada en ambos fenómenos, así como la descripción del campo vectorial de velocidades (\vec{v}) en cada caso.

Tabla 1. Correlación del flujo de corriente eléctrica y masa.

Flujo de agua subterránea		Flujo de carga (corriente eléctrica)	
$\varphi_w = \int_S \eta \rho_w \vec{v} \cdot d\vec{S}$	(9)	$\varphi_E = \int_S q \vec{v} \cdot d\vec{S}$	(10)
$\vec{w} = \eta \vec{v}$	(11)	$J = q \vec{v}$	(12)

Para el caso hidráulico φ_w es el flujo de agua que atraviesa la superficie S , ρ_w es la densidad del agua, \vec{v} es el promedio de la velocidad de las partículas en movimiento, \vec{w} es la descarga específica, es decir el volumen de agua que fluye a través de un área transversal A por unidad de tiempo; η es la porosidad.

El caudal o gasto (Q) se puede calcular a través de su definición como $Q = \int_S \vec{w} \cdot d\vec{S}$. Para el caso de la corriente eléctrica, φ_E es el flujo de campo eléctrico a través de una superficie Gaussiana, \vec{v} [m/s] es la velocidad de arrastre, J es la densidad de corriente y q es la densidad de carga.

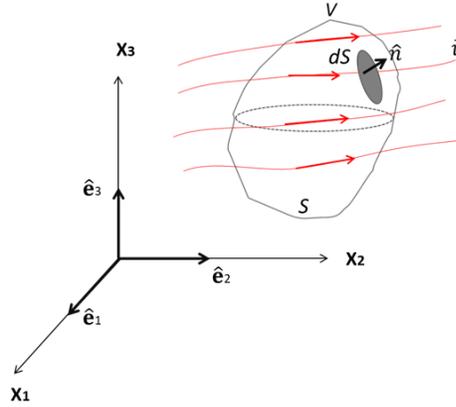


Figura 8. Flujo de una propiedad a través de un volumen de control.

3.2 Ecuación de conservación de masa

El principio de conservación de masa – carga (Figura 8) indica, de forma general, que el flujo neto de sustancia (μ) fuera de un volumen de control (V) a través de una superficie (S), es igual a la variación de esta sustancia dentro del mismo volumen de control, como se muestra en la siguiente ecuación:

$$-\int_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\partial \mu}{\partial t} \cdot dV, \quad (13)$$

la cual en su forma diferencial está dada por:

$$-\nabla \cdot (\mu(x, t) \vec{v}) = \frac{\partial \mu(x, t)}{\partial t}. \quad (14)$$

3.3 Ecuación de difusión para modelado hidráulico

En el caso de flujo de agua subterránea consideramos que el fluido atraviesa a un medio poroso, por lo que la densidad efectiva de sustancia μ (en la ecuación (14)) es $\mu = \eta(x, t) \rho_w(x, t)$, por lo que si la sustituimos en la forma diferencial de la ecuación de continuidad (14) obtenemos:

$$-\nabla \cdot (\eta \rho_w \vec{v}) = \frac{\partial \eta \rho_w}{\partial t} \quad (15)$$

O bien en términos de la descarga específica \vec{w} descrita en la expresión (11):

$$-\nabla \cdot (\rho_w \vec{w}) = \frac{\partial \eta \rho_w}{\partial t}. \quad (16)$$

En nuestro estudio asumimos que la densidad del fluido no depende de la presión ya que estamos modelando un fluido incompresible (ρ_w es constante), además que el medio no es deformable (η constante). Por otro lado, en un medio variablemente saturado la masa depende del contenido de saturación (S_w) por lo que $\mu = \eta \rho_w S_w$ y la descarga específica también depende de la saturación $\vec{w} = \eta S_w \vec{v}$ como se expresa en la siguiente relación:

$$-\nabla \cdot (\rho_w \vec{w}) = \frac{\partial \eta \rho_w S_w}{\partial t} = \eta \rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t}. \quad (17)$$

Ahora bien, para el caso no estacionario (derivadas temporales), sí S_w es expresada en función de la presión tenemos que $\frac{\eta \rho_w \partial S_w}{\partial t} = \frac{\eta \rho_w \partial S_w}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial t} = C \frac{\partial P}{\partial t}$, entonces:

$$-\nabla \cdot (\rho_w \vec{w}) = C \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (18)$$

En esta expresión podemos considerar al coeficiente de almacenamiento $C = \eta \rho_w \frac{\partial S_w}{\partial P}$ para un acuífero libre. Para expresar (17) en términos del campo escalar de presión P en el medio; empleamos la ley de Darcy, la cual relaciona la descarga específica con la fuerza que la impulsa a través de una proporción. Esta constante de proporcionalidad es formada por un término que depende del “permiso” para fluir del medio (permeabilidad k) y la “facilidad” del fluido de fluir ($\frac{1}{\gamma}$) donde γ es la viscosidad dinámica.

$$\vec{w} = -\frac{k}{\gamma} \cdot f_p. \quad (19)$$

Si \vec{f}_p es la derivada potencial escalar del campo de presión (P) entonces $\vec{w} = -\frac{k}{\gamma} \cdot \nabla P$. Cuando la presión del medio se descompone en un potencial gravitacional $-\rho_w g z$ y un potencial de presión local P_L (i.e. $-\nabla P = -\nabla(P_L + P_g) = -\nabla P_L + \rho g \nabla z$), la ley de Darcy se expresa como:

$$\vec{w} = -\frac{k}{\gamma} \cdot (\nabla P_L + \rho_w g \nabla z). \quad (20)$$

Sustituyendo la ecuación (20) en (18) y asumiendo una densidad constante obtenemos la ecuación general de flujo de agua subterránea para un medio variablemente saturado. En esta expresión, ya se ha asimilado la permeabilidad relativa en función de la saturación de agua (7).

Esta ecuación de flujo está sujeta a resolver la función de saturación dada por (5) (o bien, por (6)), resultando en el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \left(\frac{k_s S_w^n(P)}{\gamma} (\nabla P_L + \rho_w g \nabla z) \right) + N = C \frac{\partial P}{\partial t}, \\ P|_{\Gamma_D} = f_1, \\ \nabla P \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0, \\ S_w(P) = c_1 + c_2 * \text{atan} \left(\frac{P - c_3}{c_4} \right). \end{cases} \quad (21)$$

Donde N es una fuente de flujo externo. Para obtener el campo de presiones P , se debe resolver el sistema de ecuaciones (21) sujeta a las condiciones de frontera dadas por $P|_{\Gamma_D} = f_1$ en los bordes laterales Dirichlet y $\nabla P \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0$ en los bordes lateral superior e inferior Neumann, Figura 12.

Debido a que los experimentos están planteados como un problema de borde, las fronteras Dirichlet Γ_D corresponden con $f_1 = (Z_h - Z_D) * \rho g$, esta función simula el campo de presiones hidráulicas, dado un nivel de saturación Z_h y un nivel de referencia Z_D . Para el resto, se asumieron fronteras tipo Neumann Γ_N de flujo cero. En nuestros experimentos, nos enfocamos solo en la parte espacial de la ecuación (21).

3.4 Ecuación de difusión para modelado eléctrico

La relación constitutiva entre el flujo eléctrico (\vec{j}) y su fuerza impulsora (\vec{E}), al igual que el caso hidráulico se asume proporcional a una constante. Esta constante de proporcionalidad se denomina conductividad eléctrica (σ). La ecuación de continuidad está dada por $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. La conductividad resume los parámetros de medio para un campo eléctrico conservativo, se puede emplear el potencial eléctrico escalar y definir la ley de Ohm como:

$$\vec{j} = -\sigma \nabla V, \quad (22)$$

donde \vec{j} densidad es la de corriente y es reemplazada en la ecuación (14) asumiendo que las corrientes son instantáneas eliminamos el término temporal y la generalizamos para dos fuentes puntuales de corriente entrante (en \vec{x}_A) y saliente (en \vec{x}_B):

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\sigma_o S_w^n (P) \nabla V_{AB_i}) = (i_{vA_i} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{A_i}) - i_{vB_i} \delta(\vec{x} - \vec{x}_{B_i})), \\ V_{AB_i}|_{\Gamma_D} = 0, \\ \nabla V_{AB_i} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0, \end{array} \right. \quad (23)$$

aquí sustituimos a la conductividad eléctrica siguiendo la ecuación (8) ($\sigma(P) = \sigma_o S_w^n (P)$). V_{AB_i} es el potencial eléctrico generado por las dos fuentes eléctricas (i_{vA_i} y i_{vB_i}) localizadas en los puntos \vec{x}_{A_i} y \vec{x}_{B_i} y δ es la delta de Dirac. Este problema también está sujeto a condiciones de frontera tipo Dirichlet $V_{AB_i}|_{\Gamma_D} = 0$ en una distancia lejana a los electrodos y una condición Neumann de flujo cero $\nabla V_{AB_i} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0$ en la superficie del terreno.

Resistividad aparente

En los métodos geoelectrónicos es común normalizar las lecturas de diferencia de potencial por la corriente y separaciones electrónicas y denominarlas resistividad aparente. Cuando se asume un medio homogéneo hipotético la resistividad aparente (ρ_{cal}) de un arreglo tetraelectrónico está dada por:

$$\rho_{cal_i} = \frac{c_i}{i_{AB_i}} [V_{AB_i}(\mathbf{x}_{M_i}) - V_{AB_i}(\mathbf{x}_{N_i})], \quad (24)$$

donde c_i es la constante geométrica del i -ésimo arreglo tetraelectrónico ubicado en $\vec{x}_{A_i}, \vec{x}_{B_i}, \vec{x}_{M_i}, \vec{x}_{N_i}$ y i_{AB_i} es la corriente eléctrica que se aplica en los electrodos.

Capítulo 4. Modelado numérico de procesos difusivos

En este capítulo se muestra el desarrollo numérico para resolver las ecuaciones gobernantes de los fenómenos eléctricos e hidráulicos (ecuaciones (21) y (23)) ambas en estado estacionario. Utilizamos para ambos fenómenos un esquema de volumen finito, debido a que representa naturalmente el fenómeno de flujo entre volúmenes adyacentes, también, presenta menos problemas de convergencia e inestabilidad que las metodologías tradicionales (i.e. diferencias finitas o elemento finito) y es ampliamente utilizado para resolver problemas en flujo subterráneo en un medio variablemente saturado (e.g. Dey & Dhar, 2022). Ya que ambos modelos comparten la misma discretización, a continuación se presenta una generalización del modelado por volumen finito, este sirve como base para presentar el desarrollo numérico en las secciones 4.2 y 4.3. Además, en las secciones restantes, se presentan pruebas de desempeño aplicadas a un acuífero tipo libre. La discretización de las derivadas temporales de la ecuación (21) se presentan en el Anexo A.

4.1 Discretización

Para obtener una discretización en volumen finito, el medio Ω debe ser subdividido en M subdominios (volúmenes) $\Omega_{i,\gamma,\zeta}$, donde estos subdominios no se pueden traslapar y están poligonalmente acotados. En nuestro problema, utilizamos hexaedros homogéneos, rectangulares alineados a los ejes cartesianos (Le Dret & Lucquin, 2016).

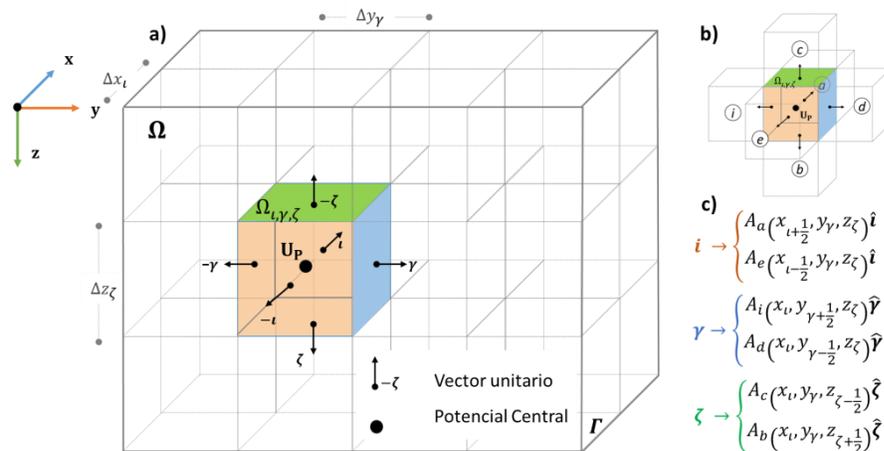


Figura 9. Ilustración de la discretización de volumen finito Ω y los subdominios $\Omega_{i,\gamma,\zeta}$, que corresponden con los volúmenes vecinos, los índices i, γ, ζ indican la dirección perpendicular de los vectores unitarios a cada una de las superficies del volumen (a). Representación de los seis volúmenes adyacentes al volumen central (b). Y detalle de la notación de las superficies A_s en cada dirección.

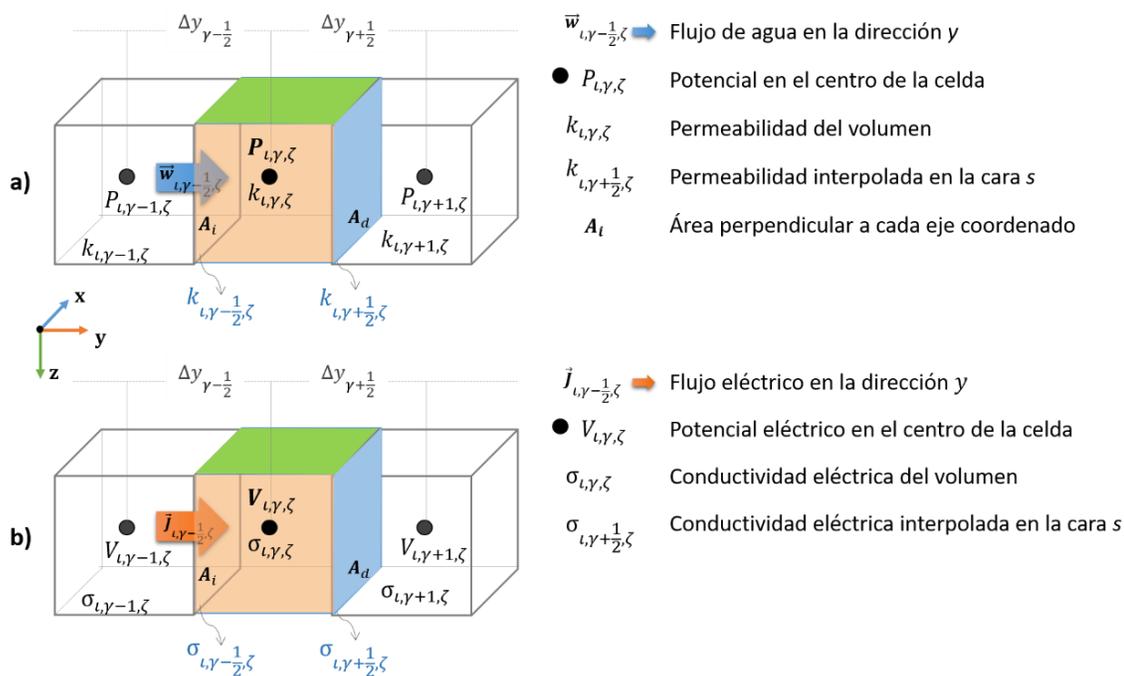
Cada volumen tiene una dimensión $\Omega_{l,\gamma,\zeta} = \Delta x_l * \Delta y_\gamma * \Delta Z_{\zeta_l}$ (ver Figura 9). La interacción con los volúmenes vecinos se da a través de las caras o superficies colindantes A_s en donde el subíndice $s = \{a, e, i, d, c, b\}$ corresponde con las direcciones (atrás, enfrente, izquierda, derecha, cima y base).

Volúmenes

Cada uno de estos volúmenes se caracteriza por: a) su potencial central (hidráulico (P) o eléctrico (V_{ABi})) medido en el centro de cada volumen, este potencial es calculado a través de un balance integral de flujos en todo el dominio; b) por su capacidad de transmitir la sustancia (permeabilidad hidráulica ($k_{l,\gamma,\zeta}$) o conductividad eléctrica ($\sigma_{l,\gamma,\zeta}$)) (ver Figura 10).

Superficies

Por otro lado, en las superficies es necesario conocer el volumen de sustancia (descarga específica (\vec{w}) o flujo eléctrico (\vec{j}_s), que entra (o sale) en dirección perpendicular a cada cara del volumen central. También es necesario conocer las propiedades del medio (es decir $k_{l,\gamma+\frac{1}{2},\zeta}$ o $\sigma_{l,\gamma+\frac{1}{2},\zeta}$) en cada interfase, por lo que en nuestra notación se añade el término $\pm \frac{1}{2}$ a los índices, estos indican la interacción con los volúmenes contiguos (ver Figura 10).



Por ejemplo, la distancia entre el centro del volumen y el vecino en la dirección γ , se obtiene a partir de la relación $\Delta y_{\gamma-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta y_{\gamma-1}}{2} + \frac{\Delta y_{\gamma}}{2}$; la dimensión del área de la cara izquierda sería $A_i = \Delta z * \Delta x$; estas relaciones son similares en el resto de los volúmenes. El valor de la permeabilidad o conductividad eléctrica en cada interface se calcularía interpolando la propiedad del volumen central con el volumen contiguo, esto se muestra en el siguiente apartado.

4.2 Modelado hidráulico estacionario

Para conocer el volumen de agua que ingresa o sale del volumen central (balance de masa), se implementa la discretización de la ecuación (20) y (21), en donde la descarga específica w se calcula en cada una de las caras del hexaedro, resultando las ecuaciones (25) a (27), para cada una de las direcciones del volumen finito. En el cual las componentes horizontales del flujo ($x - y$, ecuaciones (25) y (26)) difieren de las verticales (z , ecuación (27)) por la componente del campo de la gravedad (vertical).

$$x \rightarrow \begin{cases} w_x^{m+1} \left(l - \frac{1}{2}, \gamma, \zeta \right) = \frac{k(P^m)_{l-\frac{1}{2}, \gamma, \zeta}}{\Upsilon} A_e \frac{P_{l, \gamma, \zeta}^{m+1} - P_{l-1, \gamma, \zeta}^{m+1}}{\Delta x_{l-\frac{1}{2}}} \\ w_x^{m+1} \left(l + \frac{1}{2}, \gamma, \zeta \right) = \frac{k(P^m)_{l+\frac{1}{2}, \gamma, \zeta}}{\Upsilon} A_a \frac{P_{l, \gamma, \zeta}^{m+1} - P_{l+1, \gamma, \zeta}^{m+1}}{\Delta x_{l+\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (25)$$

$$y \rightarrow \begin{cases} w_y^{m+1} \left(l, \gamma - \frac{1}{2}, \zeta \right) = \frac{k(P^m)_{l, \gamma-\frac{1}{2}, \zeta}}{\Upsilon} A_d \frac{P_{l, \gamma, \zeta}^{m+1} - P_{l, \gamma-1, \zeta}^{m+1}}{\Delta y_{\gamma-\frac{1}{2}}} \\ w_y^{m+1} \left(l, \gamma + \frac{1}{2}, \zeta \right) = \frac{k(P^m)_{l, \gamma+\frac{1}{2}, \zeta}}{\Upsilon} A_i \frac{P_{l, \gamma, \zeta}^{m+1} - P_{l, \gamma+1, \zeta}^{m+1}}{\Delta y_{\gamma+\frac{1}{2}}} \end{cases} \quad (26)$$

$$z \rightarrow \begin{cases} w_z^{m+1} \left(l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2} \right) = \frac{k(P^m)_{l, \gamma, \zeta-\frac{1}{2}}}{\Upsilon} A_c \frac{P_{l, \gamma, \zeta}^{m+1} - P_{l, \gamma, \zeta-1}^{m+1}}{\Delta z_{\zeta-\frac{1}{2}}} - k(P^m)_{l, \gamma, \zeta-\frac{1}{2}} A_c \rho_w g \\ w_z^{m+1} \left(l, \gamma, \zeta + \frac{1}{2} \right) = \frac{k(P^m)_{l, \gamma, \zeta+\frac{1}{2}}}{\Upsilon} A_b \frac{P_{l, \gamma, \zeta}^{m+1} - P_{l, \gamma, \zeta+1}^{m+1}}{\Delta z_{\zeta+\frac{1}{2}}} - k(P^m)_{l, \gamma, \zeta+\frac{1}{2}} A_b \rho_w g \end{cases} \quad (27)$$

De acuerdo con Dogan & Motz, (2005), la interpolación de la permeabilidad en cada interfase (promedio entre celdas contiguas) es: a) para volúmenes no-saturados, calculada como una media aritmética

pesada por la distancia entre los nodos, por ejemplo (28), para la celda central y el volumen izquierdo l, γ, ζ y $l, \gamma - 1, \zeta$ y b) para las celdas saturadas, como la media armónica pesada por la distancia entre los nodos l, γ, ζ y $l, \gamma - 1, \zeta$ (29) como se presenta a continuación:

$$k(P^m)_{l, \gamma - \frac{1}{2}, \zeta} = \frac{\Delta y_\gamma k(P^m)_{l, \gamma, \zeta} + \Delta y_{\gamma-1} k(P^m)_{l, \gamma-1, \zeta}}{\Delta y_\gamma + \Delta y_{\gamma-1}}, \quad (28)$$

$$k(P^m)_{l, \gamma - \frac{1}{2}, \zeta} = \frac{\Delta y_\gamma + \Delta y_{\gamma-1}}{\frac{\Delta y_\gamma}{k(P^m)_{l, \gamma, \zeta}} + \frac{\Delta y_{\gamma-1}}{k(P^m)_{l, \gamma-1, \zeta}}}. \quad (29)$$

Para la suma de los flujos de las relaciones (25), (26) y (27), los términos de permeabilidad (utilizando la ecuación (7)), área y distancia entre volúmenes se simplifican y serán nombrados como coeficientes CH , para cada una de las direcciones, como se muestra en (30):

$$\begin{aligned} CHa^m &= \frac{k_{s_{l-\frac{1}{2}, \gamma, \zeta}} S_w^n(P^m)}{\Upsilon} A_e, & CHE^m &= \frac{k_{s_{l+\frac{1}{2}, \gamma, \zeta}} S_w^n(P^m)}{\Upsilon} A_a, \\ CHI^m &= \frac{k_{s_{l, \gamma - \frac{1}{2}, \zeta}} S_w^n(P^m)}{\Upsilon} A_d, & CHd^m &= \frac{k_{s_{l, \gamma + \frac{1}{2}, \zeta}} S_w^n(P^m)}{\Upsilon} A_i, \\ CHc^m &= \frac{k_{s_{l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2}}} S_w^n(P^m)}{\Upsilon} A_c, & CHb^m &= \frac{k_{s_{l, \gamma, \zeta + \frac{1}{2}}} S_w^n(P^m)}{\Upsilon} A_b, \end{aligned} \quad (30)$$

y la suma de estos coeficientes será $CH_{tot} = CHa^m + CHE^m + CHI^m + CHd^m + CHc^m + CHb^m$. Por lo que el volumen central será calculado mediante la ecuación (31).

$$P_{l, \gamma, \zeta}^{m+1} = \left(+ \left\{ \begin{array}{l} CHa^m P_{l-1, \gamma, \zeta}^{m+1} + CHE^m P_{l+1, \gamma, \zeta}^{m+1} \\ CHI^m P_{l, \gamma-1, \zeta}^{m+1} + CHd^m P_{l, \gamma+1, \zeta}^{m+1} \\ CHc^m P_{l, \gamma, \zeta-1}^{m+1} + CHb^m P_{l, \gamma, \zeta+1}^{m+1} \end{array} \right\} / CH_{tot} \right. \\ \left. + \left(\frac{\Delta x \Delta y \rho_w \mathbf{g}}{\Upsilon} \left(k(P^m)_{l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2}} + k(P^m)_{l, \gamma, \zeta + \frac{1}{2}} \right) + N \right) \right) \quad (31)$$

Debido a la dependencia no lineal de la saturación $S_w^n(P)$ con el campo de presión en la ecuación (21) optamos por resolverla usando un esquema de iterativo de punto fijo, empleando el campo de presiones de la iteración previa.

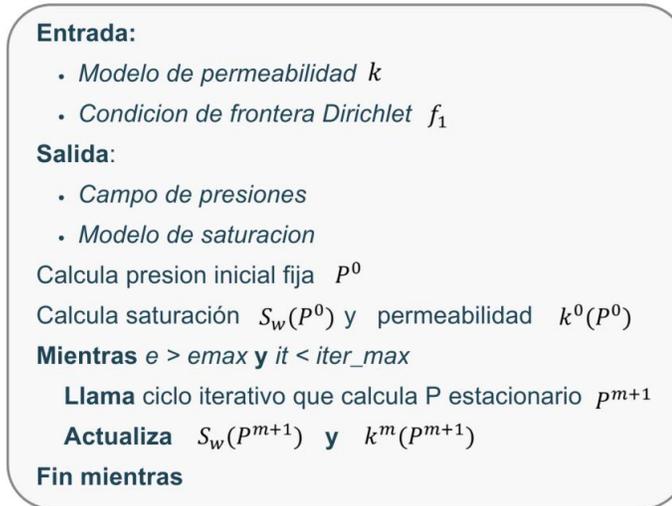


Figura 11. Algoritmo para el cálculo del esquema iterativo por punto fijo.

Es decir, partimos de una presión inicial para una iteración P^m (donde m es el índice para la iteración por punto fijo), en el volumen central para calcular $k(P^m)$ (obtenida de la ecuación (7)), mientras que el campo de presión en el resto de la ecuación se resuelve para la iteración P^{m+1} . Actualizando iterativamente hasta que el problema converge. El campo de presión $P_{i,y,\zeta}^{m+1}$ (iteración $m+1$), es el insumo para el cálculo iterativo de la función de saturación $S_w^n(P^{m+1})$ utilizando las expresiones (5) o (6). La Figura 11 muestra el algoritmo implementado para el cálculo del esquema iterativo de punto fijo. La saturación obtenida en la iteración final es transferida al modelado eléctrico para calcular en potencial eléctrico y la resistividad aparente del medio variablemente saturado.

Condiciones de frontera modelo hidráulico

En el caso hidráulico solo se imponen fronteras tipo Dirichlet ($P|_{\Gamma_D} = f_1$) en las fronteras izquierda y derecha del modelo (ver Figura 9 y Figura 12). Para implementarlas se cambia el término de presión del volumen adyacente en estas fronteras ($s = \{i, d\}$) por el potencial impuesto:

$$\frac{k^{(P^m)_s}}{\gamma} \nabla P \cdot \mathbf{A}_s = \frac{2k^{(P^m)_s}}{\frac{\gamma \Delta d_c}{CHs^m}} A_s \left(P_{central}^{m+1} - \bar{P}_s \right), \quad (32)$$

el subíndice s indica las caras que comparten el valor de potencial f_1 (Sección 3.3), el potencial impuesto es \bar{P}_s se localiza a una distancia $\frac{\Delta d_c}{2}$ del último volumen de potencial calculado ($P_{central}^{m+1}$), con esta información obtenemos un nuevo coeficiente $\overline{CHs^m}$, para los nodos de la frontera.

Por otro lado, en la implementación de las fronteras tipo Neumann ($\nabla P \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0$) se impone un valor de flujo normal \bar{w} en las fronteras s , es decir, $\left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\right)_s$ y está dado de forma generalizada por la siguiente expresión:

$$\frac{k(P^m)_s}{\Upsilon} \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}\right)_s = \frac{k(P^m)_s}{\Upsilon} \nabla P_s = \bar{w}. \quad (33)$$

Sustituyendo (33) en la ecuación de difusión ((27) y (28)) en las caras $s = \{a, e, c, b\}$, (ver Figura 9 y Figura 12):

$$\frac{k(P^m)_s}{\Upsilon} \nabla P_s \cdot \mathbf{A}_s = \bar{w} A_s, \quad (34)$$

De forma similar que los volúmenes centrales (31), las expresiones (32) y (34) deben ser incluidos dentro del esquema iterativo, para calcular el potencial central $P_{l,\gamma,\zeta}^{m+1}$ en las fronteras.

4.3 Modelo eléctrico

El modelado eléctrico es un caso simple de difusión que se puede representar como la suma de la densidad de corriente en las direcciones J_x , J_y y J_z , como se presenta en las ecuaciones (35), (36) y (37) a diferencia del modelado hidráulico, el cálculo de los flujos es similar en las tres direcciones:

$$x = \begin{cases} J_x \left(l - \frac{1}{2}, \gamma, \zeta \right) = \sigma(P)_{l-\frac{1}{2},\gamma,\zeta} A_e \frac{V_{AB_{i,l,\gamma,\zeta}} - V_{AB_{i,l-1,\gamma,\zeta}}}{\Delta x_{l-\frac{1}{2}}}, \\ J_x \left(l + \frac{1}{2}, \gamma, \zeta \right) = \sigma(P)_{l+\frac{1}{2},\gamma,\zeta} A_a \frac{V_{AB_{i,l,\gamma,\zeta}} - V_{AB_{i,l+1,\gamma,\zeta}}}{\Delta x_{l+\frac{1}{2}}}, \end{cases} \quad (35)$$

$$y = \begin{cases} J_y \left(l, \gamma - \frac{1}{2}, \zeta \right) = \sigma(P)_{l,\gamma-\frac{1}{2},\zeta} A_d \frac{V_{AB_{i,l,\gamma,\zeta}} - V_{AB_{i,l,\gamma-1,\zeta}}}{\Delta y_{\gamma-\frac{1}{2}}}, \\ J_y \left(l, \gamma + \frac{1}{2}, \zeta \right) = \sigma(P)_{l,\gamma+\frac{1}{2},\zeta} A_i \frac{V_{AB_{i,l,\gamma,\zeta}} - V_{AB_{i,l,\gamma+1,\zeta}}}{\Delta y_{\gamma+\frac{1}{2}}}, \end{cases} \quad (36)$$

$$z = \begin{cases} J_z \left(l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2} \right) = \sigma(P)_{l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2}} A_c \frac{V_{ABi, l, \gamma, \zeta} - V_{ABi, l, \gamma, \zeta - 1}}{\Delta z_{\zeta - \frac{1}{2}}}, \\ J_z \left(l, \gamma, \zeta + \frac{1}{2} \right) = \sigma(P)_{l, \gamma, \zeta + \frac{1}{2}} A_b \frac{V_{ABi, l, \gamma, \zeta} - V_{ABi, l, \gamma, \zeta + 1}}{\Delta z_{\zeta + \frac{1}{2}}}. \end{cases} \quad (37)$$

Las conductividades eléctricas en las interfases se simplifican en las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} CEa &= \frac{\sigma_{o, l - \frac{1}{2}, \gamma, \zeta} S_w^n(P) A_e}{\Delta x_{l - \frac{1}{2}}}, & CEE &= \frac{\sigma_{o, l + \frac{1}{2}, \gamma, \zeta} S_w^n(P) A_a}{\Delta x_{l + \frac{1}{2}}}, \\ CEi &= \frac{\sigma_{o, l, \gamma - \frac{1}{2}, \zeta} S_w^n(P) A_d}{\Delta y_{\gamma - \frac{1}{2}}}, & CED &= \frac{\sigma_{o, l, \gamma + \frac{1}{2}, \zeta} S_w^n(P) A_i}{\Delta y_{\gamma + \frac{1}{2}}}, \\ CEC &= \frac{\sigma_{o, l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2}} S_w^n(P) A_c}{\Delta z_{\zeta - \frac{1}{2}}}, & CEB &= \frac{\sigma_{o, l, \gamma, \zeta + \frac{1}{2}} S_w^n(P) A_b}{\Delta z_{\zeta + \frac{1}{2}}}, \end{aligned} \quad (38)$$

y la suma de los coeficientes de cada dirección está dada por CE_{tot} y la solución para el potencial eléctrico del volumen central dado por:

$$V_{AB, l, \gamma, \zeta} = \left(+ \begin{pmatrix} CEaV_{AB, l-1, \gamma, \zeta} + CEEV_{AB, l+1, \gamma, \zeta} \\ CEiV_{AB, l, \gamma-1, \zeta} + CEDV_{AB, l, \gamma+1, \zeta} \\ CECV_{AB, l, \gamma, \zeta-1} + CEBV_{AB, l, \gamma, \zeta+1} \\ + i_{l, \gamma, \zeta} \end{pmatrix} \right) / CE_{tot}. \quad (39)$$

Condiciones de frontera modelo eléctrico

Similar al caso hidráulico las fronteras tipo Dirichlet ($V_{ABi}|_{\Gamma_D} = 0$) se implementan cambiando el término difusivo por el potencial impuesto en la frontera, recordando que el subíndice s corresponde con cada una de las caras del volumen:

$$\sigma(P) \nabla V_{AB} \cdot \mathbf{A}_s = \frac{\sigma(P)}{\underbrace{\Delta d_c}_{CE_s}} A_s (V_{AB, central} - \bar{V}_{AB}), \quad s = \{a, e, i, d, b\}, \quad (40)$$

el potencial impuesto es \bar{V}_{AB} se localiza a una distancia $\frac{\Delta d_c}{2}$ del último volumen de potencial calculado ($V_{AB, central}$), con esta información obtenemos un nuevo coeficiente \overline{CE}_s en las fronteras.

En las fronteras tipo Neumann ($\nabla V_{ABi} \cdot \mathbf{n}|_{FN} = 0$) imponemos un valor de flujo normal \bar{J} en la frontera de la superficie libre (cima), es decir, $\left(\frac{\partial V_{AB}}{\partial n}\right)_c$. Por lo que el flujo en esta frontera está dado por la siguiente expresión.

$$\sigma(P)\nabla V_{AB} \cdot \mathbf{A}_c = \bar{J}A_c. \quad (41)$$

Las expresiones (40) y (41) deben ser incluidos dentro el esquema iterativo, para calcular ∇V_{ABi} de todos los volúmenes.

4.4 Solución del sistema de ecuaciones

Para resolver el sistema de ecuaciones de ambos procesos se empleó la técnica iterativa de Gauss-Seidel con un “Sobre Relajamiento Sucesivo” (SOR, por sus siglas en inglés) para acelerar la convergencia de la solución.

En este esquema se utilizó el nodo central para calcular iterativamente su campo de presiones $P_{i,\gamma,\zeta}^{m+1}$ (Figura 10a) y su potencial eléctrico $V_{i,\gamma,\zeta}$ (Figura 10b). Ambos campos los representaremos de forma generalizada como U :

$$U_{act} = U_{ant} + \omega(U_{i,\gamma,\zeta}^{GS} - U_{ant}), \quad (42)$$

donde U_{act} es el potencial calculado a partir de la solución previa y la solución iterativa de Gauss Seidel pesado por el parámetro ω de sobre relajación. En nuestro programa este valor varía de 1.5 a 1.9 para mejorar la tasa de convergencia. El criterio de paro se da por número máximo de iteraciones o cuando el rms es menor a 0.0001 entre dos modelos de iteraciones consecutivas, dado por:

$$rms = \left(\frac{(U_{act} - U_{ant})^2}{U_{ant}^2 + eps} \right)^{1/2}, \quad (43)$$

donde $eps = 0.00001$ y es utilizado para evitar que el denominador sea igual a 0.

4.5 Pruebas de desempeño de los algoritmos de modelado directo

En este trabajo tanto los modelos físicos del terreno (distribuciones de conductividad eléctrica y permeabilidad) como los campos modelados (presión y potencial eléctrico) serán tratados como completamente tridimensionales. Para el modelado hidráulico se simuló un flujo bidimensional generado por fronteras tipo Dirichlet en dos caras opuestas con niveles freáticos horizontales a diferentes elevaciones. Todos los modelos sintéticos desarrollados en las siguientes secciones fueron generados con el tipo de fronteras que se muestran en la Figura 12.

Los modelos rectangulares del dominio modelado fueron construidos con $60 \times 59 \times 30$ hexaedros en las direcciones x, y, z respectivamente. Cada elemento hexaédrico tiene una dimensión de 1m por lado. Y los parámetros fijos (agua) son: la densidad de 1000 kg/m^3 y la viscosidad dinámica de $0.00152 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$.

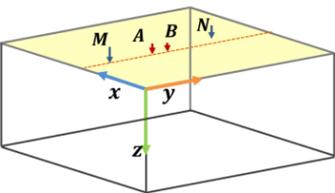
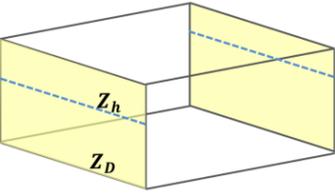
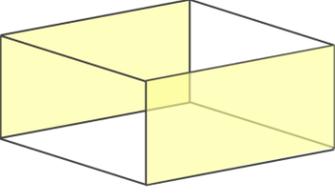
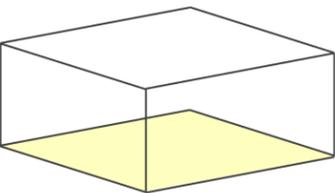
Cara	Campo hidráulico	Campo eléctrico
	Flujo hidráulico cero $\frac{\partial P}{\partial Z} = 0$	Flujo eléctrico cero $\frac{\partial V_{AB}}{\partial Z} = 0$
	Presión hidráulica específica $P = (Z_h - Z_D) * \rho g$	Potencial eléctrico específico $V_{AB} = 0$
	Flujo hidráulico cero $\frac{\partial P}{\partial y} = 0$	Potencial eléctrico específico $V_{AB} = 0$
	Flujo hidráulico cero $\frac{\partial P}{\partial Z} = 0$	Potencial eléctrico específico $V_{AB} = 0$

Figura 12. Condiciones de frontera utilizadas para todos los modelos 3D.

4.5.1 Caso 1. Modelado directo de un acuífero tipo libre sin gradiente hidráulico

En esta sección mostramos el resultado del modelado directo, para una distribución homogénea de conductividad y permeabilidad, en el cual no se generó un gradiente de presiones. Este modelo tiene el objetivo de corroborar el correcto funcionamiento del código elaborado, usando la respuesta a un modelo homogéneo simple.

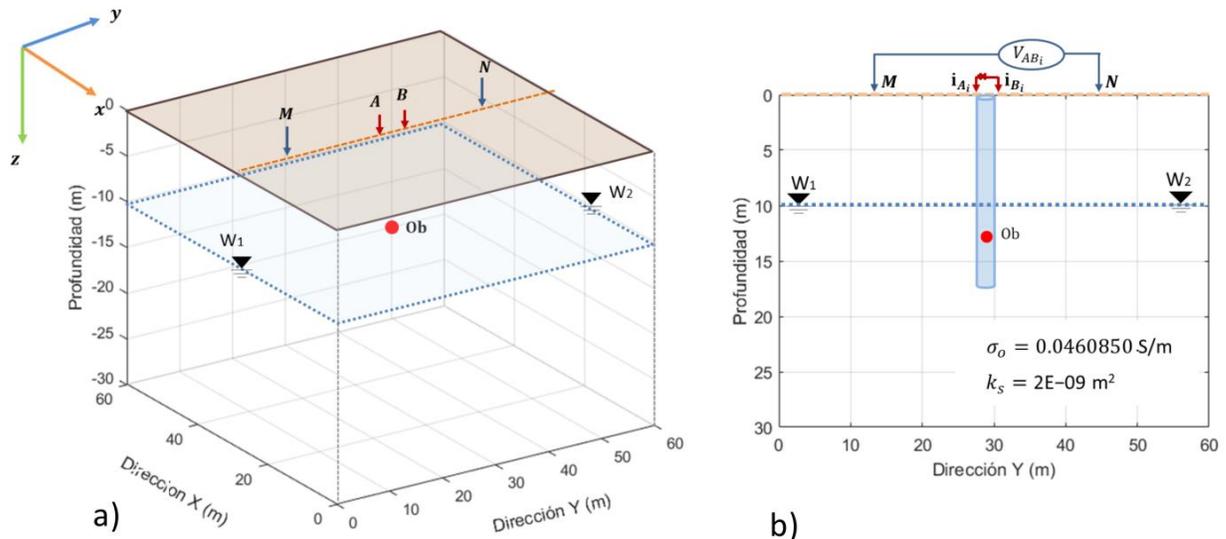


Figura 13. Diagrama esquemático del modelo 3D y sección transversal (Sur-norte) representativa del modelo. Los triángulos invertidos muestran la profundidad del nivel freático (10 m) en ambos extremos del modelo (común en ambos modelados), en la parte superficial se muestra la localización de los electrodos de corriente (i_{A_i} , i_{B_i}) y de potencial (M , N) (flechas rojas y azules). El círculo rojo indica el punto de observación para la presión en el modelo hidráulico.

El modelo sintético se generó con una conductividad eléctrica de $\sigma_o = 0.0460850 \text{ S/m}$ y una permeabilidad de $k_s = 2\text{E}-09 \text{ m}^2$ y con las condiciones de frontera que se presentan en la Figura 12. La profundidad del nivel freático es: $W_1 = W_2 = 10 \text{ m}$. El modelo de saturación S_w se generó con la ecuación (5).

Modelo directo hidráulico

La Figura 14a muestra el modelo de presiones calculado, el cual presenta un nivel freático plano, como era de esperar. Sobre este nivel se observan las presiones negativas y por debajo las presiones positivas.

La Figura 14b muestra el valor del RMS calculado con la ecuación (43) entre dos iteraciones consecutivas mostrando una convergencia después de 720 iteraciones, con el nivel de tolerancia impuesto de 0.0001.

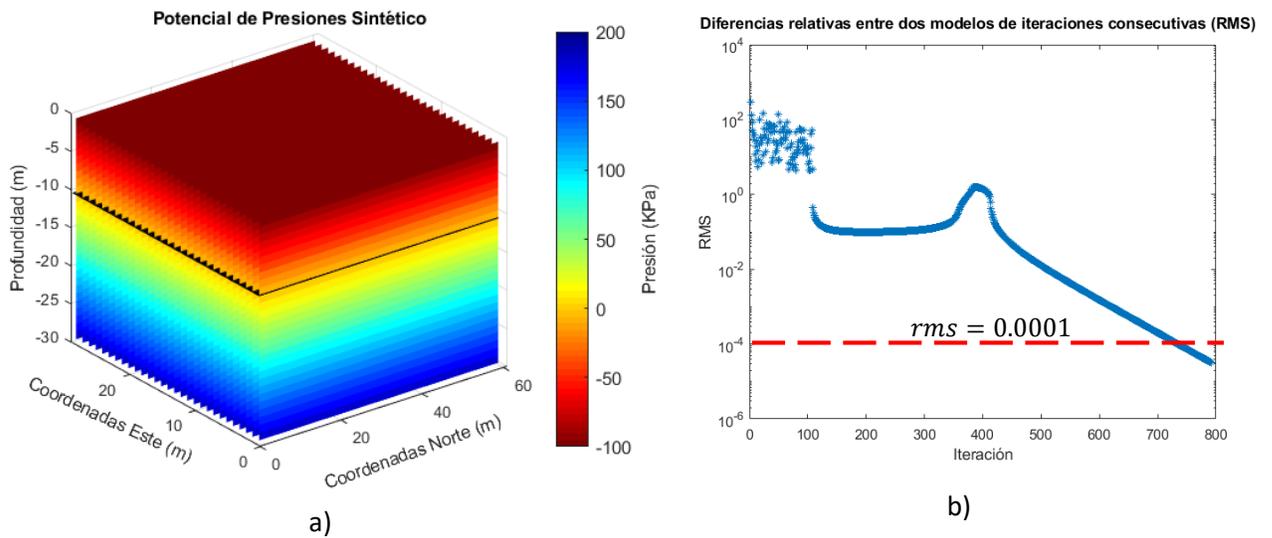


Figura 14. a) Campo de presiones calculada para un modelo homogéneo simple. b) RMS calculado entre dos modelos consecutivos.

La Figura 15 muestra una sección transversal del modelo final de saturaciones S_w observándose el comportamiento esperado.

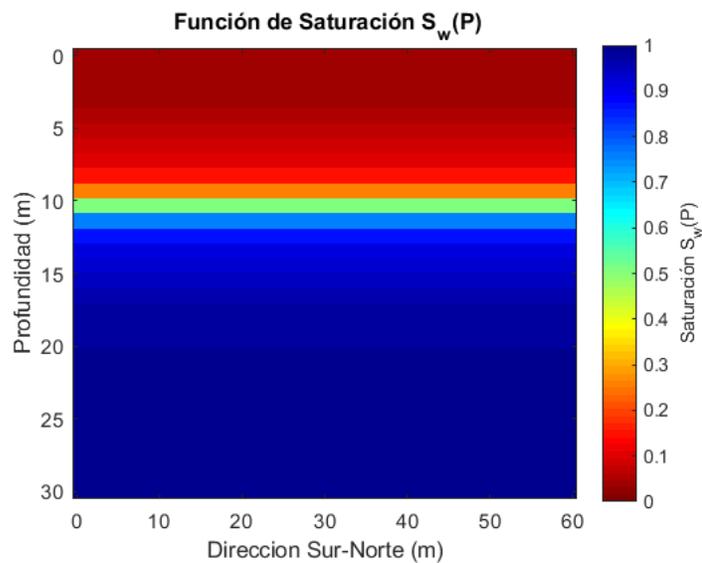


Figura 15. Sección transversal del modelo de saturación S_w obtenida del modelado directo hidráulico.

Modelo directo eléctrico

Utilizando la expresión (8), la conductividad eléctrica homogénea saturada σ_o y el modelo de saturación $S_w^n(P)$ mostrado en la Figura 15, se obtiene el modelo de conductividades eléctricas para un medio variablemente saturado $\sigma(P)$ utilizando en el cálculo del potencial central $V_{AB,l,y,\zeta}$.

La Figura 16a muestra el potencial eléctrico en la sección transversal donde se colocaron las fuentes y los receptores de prueba. Los tonos rojos y azules representan el potencial generado por las fuentes positivas y negativas (i_{A_i}, i_{B_i}). Como se observa el potencial decrece a la distancia y es atenuado por el nivel de saturación (línea punteada negra en la Figura 16). El rms calculado entre dos iteraciones consecutivas se presenta en la Figura 16b, en el cual el modelo convergió después de 500 iteraciones, con el umbral de tolerancia de 0.0001.

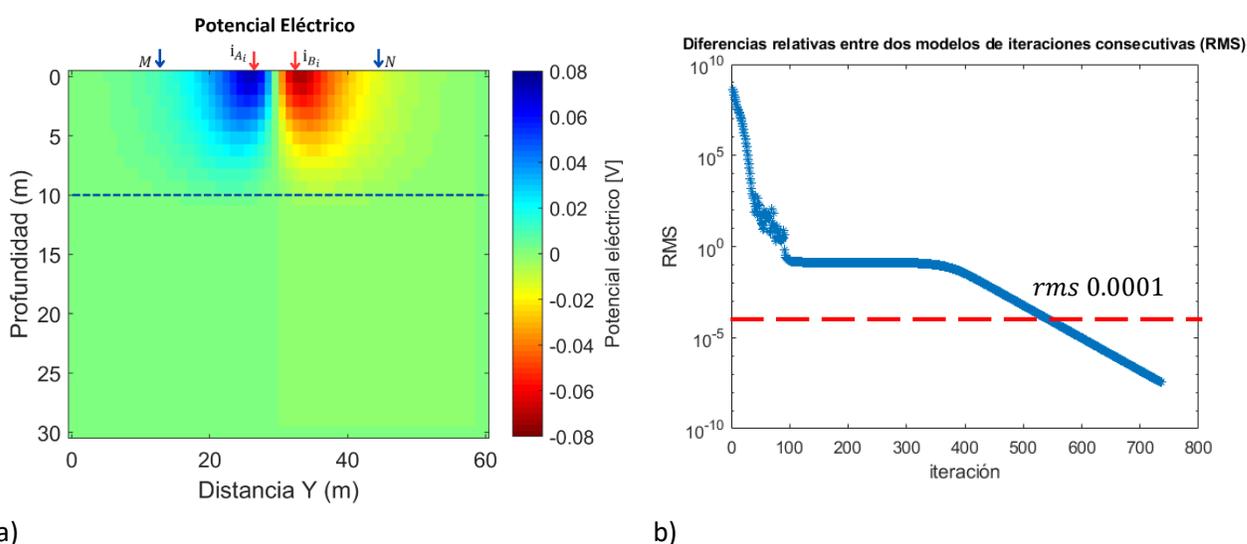


Figura 16. a) Potencial eléctrico calculado para un modelo homogéneo simple, la línea punteada indica el nivel de saturación del modelo directo. b) RMS calculado entre dos modelos consecutivos.

4.5.2 Caso 2. Modelado directo de un acuífero tipo libre con gradiente hidráulico

Al igual que el modelo previo, la finalidad de este modelo es corroborar el funcionamiento del código elaborado, ahora, ante la presencia de un gradiente hidráulico pronunciado. Para generar este gradiente hidráulico se modificaron los niveles de saturación impuestos en las fronteras $W_1 = 15$ y $W_2 = 5$ (Figura 17). Los modelos de conductividad eléctrica y de permeabilidad son los mismos que el ejemplo previo, así, como la disposición de las fuentes y puntos de observación.

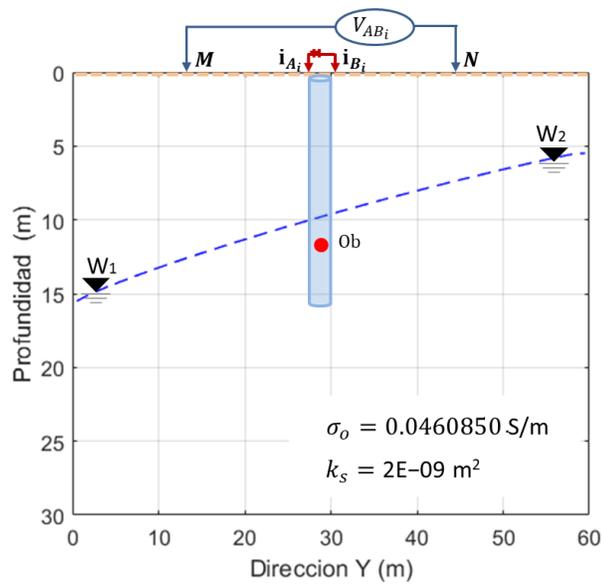


Figura 17. Sección transversal (Dirección Y) representativa del modelo.

Modelo directo hidráulico

La Figura 18a muestra el modelo de presiones calculado para un modelo homogéneo simple generado con un pronunciado gradiente de presiones, por lo cual la respuesta esperada para el nivel freático es una superficie que forma una semi-parábola en dirección del gradiente (línea negra a de 15 a 5 metros de profundidad). Sobre esta superficie se observan las presiones negativas y por debajo las positivas.

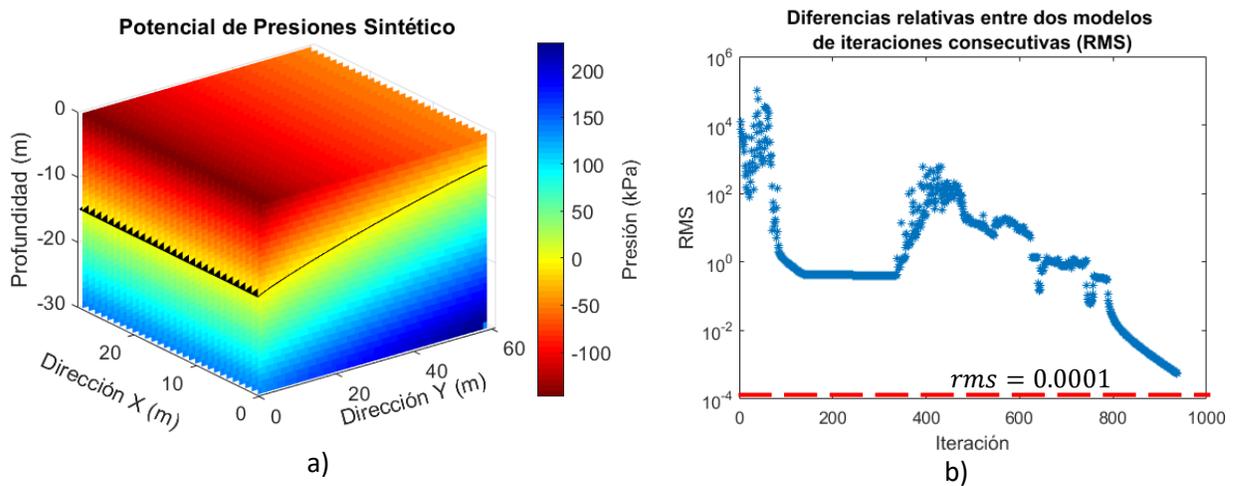


Figura 18. a) Campo de presiones calculada para un modelo homogéneo simple. b) RMS calculado entre dos modelos consecutivos.

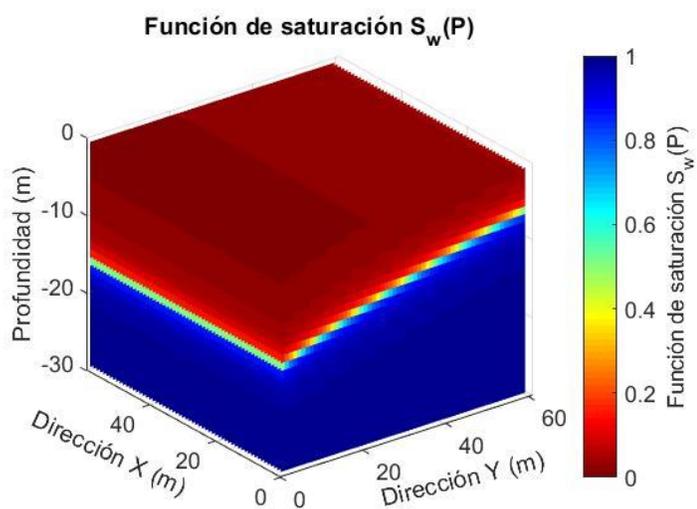


Figura 19. Modelo 3D de saturación S_w obtenida del modelado directo hidráulico.

La Figura 18b muestra el valor del rms entre dos iteraciones consecutivas mostrando una convergencia después de 900 iteraciones, aunque no alcanza el nivel de tolerancia de 0.0001. La Figura 19 muestra el volumen completo 3D del modelo final de saturaciones S_w .

Modelo directo eléctrico

Como en el caso previo, utilizando la expresión (8) se generó un modelo de conductividades de un medio variablemente saturado (utilizando el modelo de saturación obtenido del modelo directo hidráulico de S_w , que se muestra en la Figura 19).

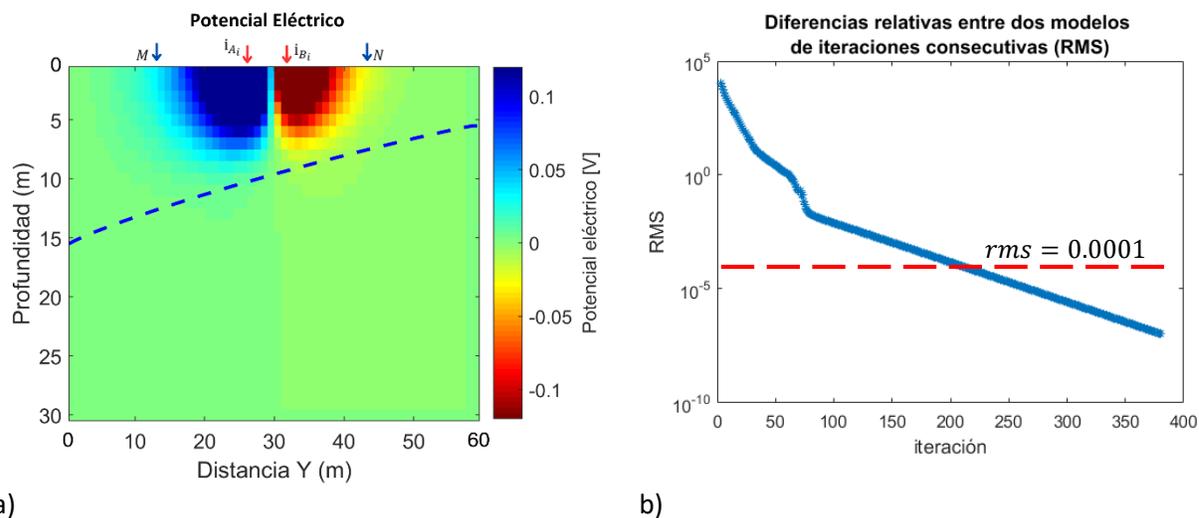


Figura 20. a) Potencial eléctrico calculado para un modelo homogéneo simple, la línea punteada indica el nivel de saturación obtenido del modelo hidráulico. b) RMS calculado entre dos modelos consecutivos.

La Figura 20a muestra el potencial eléctrico asimétrico, afectado por el nivel de saturación, este tiene un gradiente inclinado (a diferencia del mostrado en Figura 16a). El rms calculado entre dos iteraciones consecutivas se presenta en la Figura 20b, en el cual el modelo convergió después de 200 iteraciones, con el umbral de tolerancia de 0.0001.

4.5.3 Validación

La respuesta hidráulica de nuestro algoritmo se comparó con la superficie freática de una solución analítica para un medio homogéneo (Bruggeman, 1999), obteniendo una diferencia porcentual relativa de 0.002%. Esta respuesta también se comparó con el software geohidrológico MODFLOW 2005 (Harbaugh, 2005), lo que dio como resultado una diferencia porcentual relativa de 0.11%. Para el modelo eléctrico, la respuesta numérica se comparó con una solución analítica para un modelo homogéneo con una fuente eléctrica puntual (véase por ejemplo Li & Uren, 1998), y obtuvimos una diferencia porcentual relativa global de 0.018%. Con esto, consideramos que nuestro algoritmo es lo suficientemente preciso para nuestros experimentos de prueba. Los detalles de estas pruebas se muestran en el Anexo B.

Capítulo 5. Definición del desajuste y formulación del estado adjunto

En el modelado de fenómenos físicos, es una tarea común medir cuánto afecta un pequeño cambio de los parámetros (perturbación) en los campos que se producen, y que se pueden llegar a observar. Esto se conoce como análisis de sensibilidad. Este análisis es un componente esencial de la inversión en donde el modelo se va modificando siguiendo estos pequeños cambios. En este caso se puede hablar de pequeños cambios en la saturación, propiedades eléctricas o propiedades hidráulicas del medio poroso.

En este trabajo recurrimos a la formulación del llamado estado adjunto y a los datos asimilados en lo que se conoce como función objetivo. A continuación se presenta la formulación del estado adjunto, los detalles matemáticos se pueden consultar en los apéndices y en el artículo "*Permeability sensitivity of coupled electrical and hydraulic data in unconfined aquifers*" (Salas-Ariza et al., 2024) producto de esta investigación.

5.1 Función objetivo

Recurrimos a una norma cuadrática de la diferencia entre datos observados (*ob*) y aquellos calculados (*cal*) como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_E = \sum_{i=1}^I \left[\left(\frac{\rho_{ob_i} - \rho_{cal_i}}{s_{e_i}} \right)^2 \right], \\ \Phi_H = \sum_{j=1}^J \left[\left(\frac{P_{ob_j} - P_{cal_j}}{s_{H_j}} \right)^2 \right], \end{array} \right. \quad (44)$$

para definir una función de desajuste para los datos eléctricos Φ_E y los datos hidráulicos Φ_H .

Para el caso eléctrico se utiliza la *i*-ésima lectura de potencial normalizado en forma de resistividad aparente (24) para cada arreglo tetraeléctrico; s_{e_i} es la desviación estándar asumida para el *ith* dato, en el caso hidráulico se considera la *i*-ésima presión observada P_{ob_j} y su correspondiente valor predicho para el modelo P_{cal_j} . s_{H_j} es la desviación estándar asumida para el *jth* sitio de observación.

5.2 Formulación del estado adjunto

La formulación del estado adjunto permite obtener el gradiente de la función objetivo empleando técnicas de cálculo variacional como se detalla a continuación.

5.2.1 Operador adjunto

Para explicar el concepto de un operador adjunto podemos partir de un espacio vectorial V donde se define el producto interno $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_{\Omega} = \int_{\Omega} (\bar{u} \cdot \bar{v}) d\Omega$ para todo $\forall \bar{u}, \bar{v} \in V$ y de los operadores lineales $S: V \rightarrow V$ y $T: V \rightarrow V$. Debido a que las imágenes $S(\bar{u})$ y $T(\bar{v})$ son vectores de V , y combinado con el producto interno obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle S(\bar{u}) \cdot \bar{v} \rangle &= \alpha, \\ \langle \bar{u} \cdot T(\bar{v}) \rangle &= \beta. \end{aligned} \tag{45}$$

Si $\alpha = \beta$, entonces $\langle S(\bar{u}) \cdot \bar{v} \rangle = \langle \bar{u} \cdot T(\bar{v}) \rangle$. Al operador T se le conoce como operador adjunto de S y se denota como $T = S^*$ es decir obtenemos la siguiente identidad:

$$\langle S(\bar{u}) \cdot \bar{v} \rangle = \langle \bar{u} \cdot S^*(\bar{v}) \rangle, \quad \forall \bar{u}, \bar{v} \in V, \tag{46}$$

si $S^* = S$ se dice que el operador es auto adjunto.

5.2.2 Método adjunto para calcular la sensibilidad

Para el cálculo del estado adjunto los planteamos como problemas de optimización bajo restricciones de igualdad, minimizando las funciones de desajuste Φ_E y Φ_H (44) sujetas a resolver el problema directo para cada problema (descrito en las ecuaciones (21) y (23)). Para esto se plantean funciones lagrangianas nuevas, con dos variables, conocidas como multiplicadores de Lagrange (e.g. Menke, 2018; Nocedal & Wright, 2006). Para homogenizar los campos, con el cálculo del modelo adjunto hidráulico la ecuación (21) se planteó solamente en términos de variaciones respecto de la presión P_L (omitiendo el gradiente vertical $\rho g \nabla Z_D$), en lo siguiente solo se nombrará como P .

Lagrangiano hidráulico

$$\mathcal{L}_G(k_s, \lambda) = \sum_{j=1}^J \left[\left(\frac{P_{obj_j} - P_{cal_j}}{s_{H_j}} \right)^2 \right] + \int_{\Omega} \lambda \left(\nabla \cdot \frac{k_s S_w^n(P)}{\mu} \nabla P \right) d\Omega, \quad (47)$$

Lagrangiano eléctrico

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F(\sigma_o, \epsilon_{AB_i}) = & \sum_{i=1}^I \left[\left(\frac{\rho_{ob_i} - \rho_{cal_i}}{s_{e_i}} \right)^2 \right] \\ & + \sum_{i=1}^J \left[\int_{\Omega} \epsilon_{AB_i} \left(\nabla \cdot \sigma_o S_w^n(P) \nabla V_{AB_i} + \left(i_{v_{A_i}} \delta_D(x - x_{A_i}) - i_{v_{B_i}} \delta_D(x - x_{B_i}) \right) \right) d\Omega \right] \end{aligned} \quad (48)$$

El caso hidráulico está sujeto a las condiciones de frontera (21) y el multiplicador asociado es λ ; Mientras que, el caso eléctrico está sujeto a las condiciones de frontera (23) y el multiplicador asociado es ϵ_{AB_i} .

Dado que existen variables comunes (P) en ambas funciones objetivo, éstas se deben minimizar simultáneamente en una función lagrangiana combinada.

$$\mathcal{L}(\sigma_o, k_s, \epsilon_{AB}, \lambda) = \mathcal{L}_G(k_s, \lambda) + \mathcal{L}_F(\sigma_o, \epsilon_{AB_i}) \quad (49)$$

Para obtener $\min(\mathcal{L}(\sigma_o, k_s, \epsilon_{AB}, \lambda))$ podemos enumerar los pasos (Salas-Ariza et al., 2024):

1. Expresar las variaciones de \mathcal{L} ante variaciones de cada variable dependiente en (49); Las cuales incluyen: (caso A) los parámetros del modelo ($\delta\sigma_o, \delta k_s$), (caso B) los campos físicos (δV_{AB_i} y δP) y (caso C) los multiplicadores de Lagrange ($\delta\epsilon_{AB_i}, \delta\lambda$).
2. Se agrupan todos los términos según la variable perturbada y se igualan todos a cero. Los términos del caso C corresponden a las ecuaciones de estado original, las cuales se resuelven con las ecuaciones (21) y (23).
3. En las expresiones asociadas al caso B se transfiere el multiplicador de Lagrange utilizando diferentes identidades matemáticas, como los teoremas de Green. Esto resulta en la ecuación de estado adjunto que normalmente también se puede resolver directamente.

4. El resto de los elementos (caso A), generalmente son no lineales y no se pueden resolver directamente, por lo que se resuelven con métodos iterativos. Estos incluyen los términos que multiplican a las variaciones de los parámetros.

5.2.3 Ecuaciones de estado adjunto acopladas

En este apartado se presentan las ecuaciones de estado adjunto, incluyendo sus respectivas condiciones de contorno, obtenidas después de encontrar un punto estacionario de los términos del caso B (que multiplican a δV_{AB_i} y δP).

Ecuación de estado adjunto eléctrico

En esta ecuación, el multiplicador de lagrange ϵ_{AB} se convierte en la variable de estado adjunto. El lado derecho de la ecuación (50) es conocida como fuente adjunta; en este caso, aplicada en donde se localizan los receptores de potencial (M_i, N_i).

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot (\sigma_o S_w^n(P) \nabla \epsilon_{AB_i}) = \frac{2}{s_{e_i}^2} \frac{c_i}{i_{AB_i}} R_{e_i} [-\delta_D(x - x_{M_i}) + \delta_D(x - x_{N_i})] \\ \epsilon_{AB_i}|_{\Gamma_D} = 0 \\ \nabla \epsilon_{AB_i} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0 \end{array} \right. \quad (50)$$

Ecuación de estado adjunto hidráulica

De igual manera, al encontrar el estado estacionario en P , λ se convierte en la variable adjunta del problema hidráulico, esta variable es producida por la fuente adjunta que presenta tres términos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \left(\frac{k_s S_w^n(P)}{Y} \nabla \lambda \right) = \overbrace{\sum_{i=1}^I \left[\frac{nd S_w^{n-1}(P)}{dP} \sigma_o (\nabla \epsilon_{AB_i} \cdot \nabla V_{AB_i}) \right]}^1 - \overbrace{\frac{2}{s_{H_j}^2} \sum_{j=1}^J R_{H_j} \delta_D(x - x_j)}^2 + \overbrace{\frac{nd S_w^{n-1}(P) k_s}{dP} \frac{1}{Y} (\nabla \lambda \cdot \nabla P)}^3 \\ \lambda|_{\Gamma_D} = 0 \\ \nabla \lambda \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0 \end{array} \right. \quad (51)$$

1. El primero contiene información de la componente eléctrica debido a la dependencia del problema original al campo de saturación, este resultado permite un acoplamiento completo en la formulación, i.e. integra la respuesta de ambos tipos de datos en el campo adjunto,
2. El segundo término está asociado con el residual del ajuste de los datos observados a los calculados aplicados en la localización de las observaciones hidráulicas,
3. El tercer término corresponde con la sensibilidad del método hidráulico y está asociado con la no linealidad del modelo directo.

Si de la ecuación de estado adjunta eliminamos el término de contribución eléctrica, se obtiene la ecuación de estado adjunta asociada solo a los datos hidráulicos, es decir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \left(\frac{k_s S_w^n(P)}{Y} \nabla \lambda \right) = - \frac{2}{S_{Hj}^2} \sum_{j=1}^J R_{Hj} \delta_D(x - x_j) + \frac{ndS_w^{n-1}(P) k_s}{dP} \frac{1}{Y} (\nabla \lambda \cdot \nabla P) \\ \lambda|_{\Gamma_D} = 0 \\ \nabla \lambda \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0. \end{array} \right. \quad (52)$$

5.2.4 Derivada de la función objetivo respecto a la conductividad y permeabilidad saturada

Los elementos restantes de la ecuación (49) corresponden con la derivada de la función objetivo, como podemos observar corresponde con la proyección de los gradientes de las variables de estado adjunto con las variables de estado del campo original. A esta proyección, Liu & Tromp (2006), le llama sensibilidad o Kernel de sensibilidad:

$$\delta \Phi(\sigma_o, k_s) = \int_{\Omega} \left[\delta \sigma_o S_w^n(P) \sum_{i=1}^I (\nabla_{\epsilon_{ABi}} \cdot \nabla V_{ABi}) \right] d\Omega + \int_{\Omega} \delta k_s \frac{S_w^n(P)}{Y} (\nabla \lambda \cdot \nabla P) d\Omega. \quad (53)$$

Si los modelos $\sigma_o(x)$ y $k_s(x)$ son construidos con un conjunto de N funciones base (φ) ortonormales, como:

$$\sigma_o(x) = \sum_{q=1}^N \sigma_{oq} \varphi_q(x) \quad \text{y} \quad k_s(x) = \sum_{q=1}^N k_{sq} \varphi_q(x), \quad (54)$$

σ_{oq} y k_q son valores discretos de la conductividad eléctrica saturada y permeabilidad hidráulica aplicados a la q-ésima función base. Sustituyendo (54) en (53), obtenemos las derivadas de la función objetivo respecto a la q-ésima conductividad y permeabilidad discretas.

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi(\sigma_o, k_s)}{\partial \sigma_{oq}} = \int_{\Omega} S_w^n(P) \sum_{i=1}^I (\nabla \epsilon_{ABi} \cdot \nabla V_{ABi}) \varphi_q d\Omega, \\ \frac{\partial \Phi(\sigma_o, k_s)}{\partial k_{sq}} = \int_{\Omega} \frac{S_w^n(P)}{Y} (\nabla \lambda \cdot \nabla P) \varphi_q d\Omega. \end{cases} \quad (55)$$

A modo de resumen:

Una forma resumida de lo que se requiere para minimizar o llegar a un punto estacionario (mínimo) de la función Lagrangiana conjunta (49) se encuentra en la Tabla 2.

Tabla 2. Resumen de los elementos obtenidos a partir de la variación de la función objetivo (49).

	Modelado directo: <i>Se resuelve directamente</i>	Modelado adjunto <i>Se resuelve directamente</i>	Derivadas <i>Se resuelve iterativamente</i>
Eléctrico	$\frac{\partial \Phi(\sigma_o, k_s)}{\partial \epsilon_{ABi_i}} = 0$	$\frac{\partial \Phi(\sigma_o, k_s)}{\partial V_{ABi}} = 0$	$\frac{\partial \Phi(\sigma_o, k_s)}{\partial \sigma_{oq}} = 0$
Hidráulico	$\frac{\partial \Phi(\sigma_o, k_s)}{\partial \lambda} = 0$	$\frac{\partial \Phi(\sigma_o, k_s)}{\partial P} = 0$	$\frac{\partial \Phi(\sigma_o, k_s)}{\partial k_{sq}} = 0$

5.3 Modelado numérico del estado adjunto

De manera similar al modelado numérico eléctrico e hidráulico, utilizamos un esquema de volumen finito para resolver las variables de estado adjuntas (ϵ_{AB} , λ) con las ecuaciones correspondientes (50) y (51). En el caso eléctrico, el problema es autoadjunto, por lo que el campo ϵ_{AB} adjunto se calcula exactamente con el mismo esquema de discretización del modelo directo eléctrico (sección 4.3), sujeto a las condiciones de contorno de la ecuación (50). En este caso, los residuos de datos ubicados en los puntos del receptor actúan directamente como la fuente en la ecuación de estado adjunto y los campos muestran la reciprocidad conocida de la fuente al receptor.

En el caso hidráulico el campo resultante no es autoadjunto. Para resolver (51) utilizamos un esquema similar al procedimiento eléctrico con las condiciones de contorno apropiadas, sin embargo debido a la no linealidad, λ aparece tanto en la ecuación diferencial como en la fuente de la ecuación de estado adjunto. De forma similar al modelado hidráulico directo, implementamos un esquema iterativo, comenzando con un campo adjunto nulo ($\lambda = 0$), mientras que los otros términos de la fuente se mantienen constantes (la aportación de la sensibilidad eléctrica y el residual entre la presión calculada y la observada). Este campo se actualiza en cada iteración hasta que se satisface un criterio de convergencia similar al modelado eléctrico. Esto se explica en el diagrama de flujo (Figura 21) que se presenta en la siguiente sección.

5.3.1 Diagrama de flujo para el cálculo de la sensibilidad completamente acoplada.

El proceso para el cálculo de las derivadas se presenta en el diagrama de la Figura 21 y se puede describir en los siguientes pasos:

Paso 1 en hidráulico.

- a) Cálculo iterativo del modelado directo P (campo de presiones) y del modelo de saturación S_w . En cada paso iterativo se calcula la permeabilidad para un medio variablemente saturado (7).
- b) Se calcula la diferencia entre el campo de presión observado y el calculado en el modelo directo $R_{Hj} = (P_{obj} - P(x_j))$ para aplicarlo en el paso 3.

Paso 2 en eléctrica.

- a) El modelo de saturación S_w se incorpora al modelo eléctrico a través de la ecuación (8) para calcular la diferencia de potencial eléctrico en un medio variablemente saturado ∇V_{ABi} .
- b) Se calcula la resta entre la diferencia de potencial observado (expresado en términos de resistividad aparente) y el calculado en el modelo directo $R_{ei} = (\rho_{appi} - \rho_{cali}(x))$ para aplicarlo en el punto c.
- c) Se calcula el campo adjunto ϵ_{ABi} (adjunto eléctrico) y se guarda el archivo de su gradiente $\nabla \epsilon_{ABi}$.

- d) Se genera un archivo de las proyecciones de los campos $\nabla \epsilon_{ABi} \cdot \nabla V_{ABi}$.
- e) Se calcula la derivada de la función objetivo respecto a la conductividad eléctrica saturada $\left(\frac{\partial \Phi_E(\sigma_o, k_s)}{\partial \sigma_{oq}}\right)$ usando (55).

Paso 3. Hidráulica

- a) Cálculo iterativo del modelo adjunto hidráulico λ . En la fuente adjunta, se inicia con un valor $\lambda = 0$, se ingresa la contribución del problema eléctrico ($\nabla \epsilon_{ABi} \cdot \nabla V_{ABi}$) y el R_{Hj} . Para la derivada independiente $\frac{\partial \Phi_H}{\partial k_{sq}}$ se omite la contribución de la información eléctrica ($\nabla \epsilon_{ABi} \cdot \nabla V_{ABi}$), en la fuente (ver 52).
- b) Se calcula la proyección de $\nabla \lambda \cdot \nabla P$ para el cálculo de la sensibilidad acoplada electrohidráulica a la permeabilidad hidráulica.
- c) Se calcula la derivada de la función objetivo respecto a la permeabilidad hidráulica saturada $\left(\frac{\partial \Phi_{AC}(\sigma_o, k_s)}{\partial k_{sq}}\right)$ usando (55).

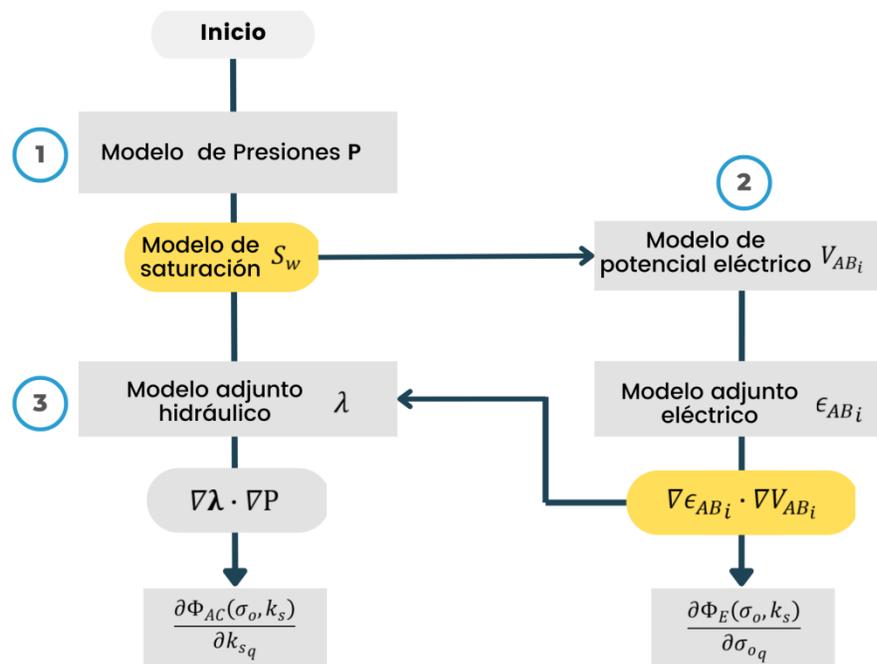


Figura 21. Diagrama de flujo para el cálculo de las derivadas eléctricas e hidráulicas. Nótese que el paso en color amarillo y las flechas indica la información que se intercambia de un método al otro.

Usamos este flujo de trabajo en los experimentos de prueba de la siguiente sección para medir y validar nuestra formulación acoplada.

La Figura 22 presenta un experimento sencillo en un medio homogéneo variablemente saturado, para ilustrar los principales elementos involucrados en el cálculo de sensibilidades descritas por las ecuaciones dadas en la expresión (55) y el diagrama de flujo de la Figura 21.

El modelo hidráulico sintético se generó como un problema de frontera y se propuso un punto de observación hidráulica (Ob); de forma general podemos indicar que el modelo sintético (k_s) es mayor que el de referencia (k_r), entonces, ($k_r < k_s$). Para el modelo eléctrico, se utilizó una fuente i_{vA_i} y un receptor eléctrico x_{M_i} ; además, el modelo sintético (σ_s) es menor que el modelo de referencia (σ_r), entonces, ($\sigma_r > \sigma_s$). En ambas figuras se presenta la línea de presión $P = 0$ (línea discontinua azul), obtenida a partir del modelado directo hidráulico, esta indica el nivel de saturación o nivel freático.

La Figura 22a para el caso hidráulico muestra los siguientes elementos: a) iso-líneas de igual presión (P) (resultado del modelado directo, generada por el cambio de presión en las fronteras), arriba del nivel de saturación ($P = 0$) son negativas, y abajo son positivas; b) En líneas de color rosa se presenta el potencial adjunto (λ), generado por la fuente adjunta aplicada en el punto de observación (obs), suministrada por los términos del lado derecho de la ecuación (52), nótese que es concéntrica al punto de observación y su forma es similar a la respuesta de una fuente puntual; c) la escala de colores al fondo corresponde con la proyección del gradiente de los campos directo y adjunto $\nabla\lambda \cdot \nabla P$.

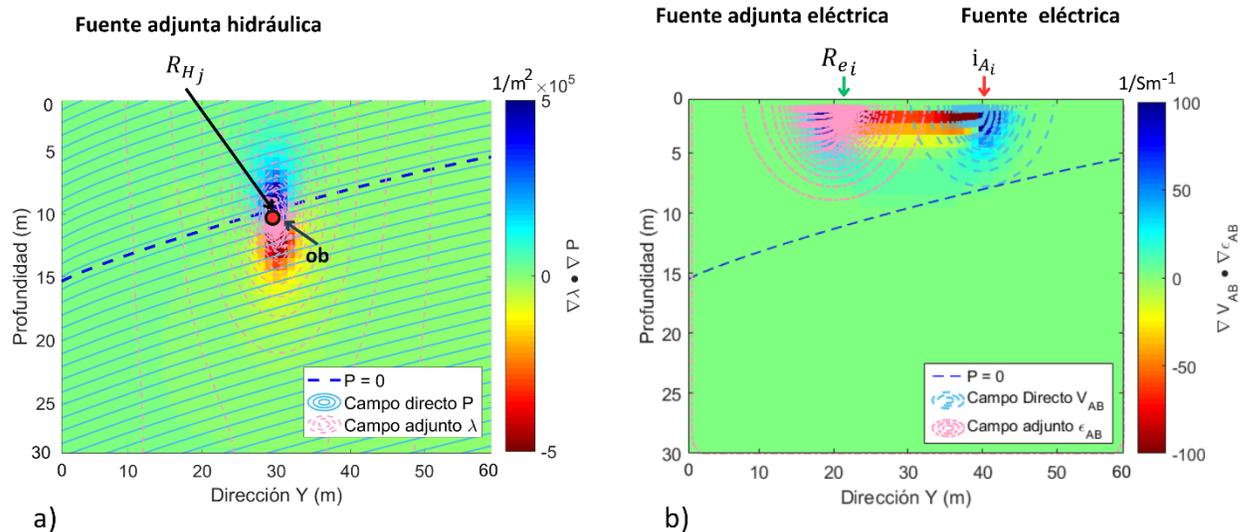


Figura 22. Elementos principales para la obtención del campo adjunto y las derivadas de la función objetivo. a) Caso hidráulico; b) eléctrico.

Similarmente, la Figura 22b, muestra los principales elementos involucrados en el cálculo de la sensibilidad, descrita por la ecuación (55) para la conductividad eléctrica saturada. a) El campo eléctrico directo (V_{AB_i} , dado por (23), en líneas punteadas azules), este es generado por la fuente eléctrica aplicada en el electrodo de corriente i_{vA_i} ; b) el campo adjunto ϵ_{AB_i} calculado con la expresión (50), es generado por el residual (R_{e_i}) aplicado ahora en el punto del donde se localizó el receptor x_{M_i} (modelo directo), se presenta en líneas discontinuas rosas; c) la escala de colores representa la proyección del gradiente de los campos eléctricos directo y adjunto ($\nabla\epsilon_{AB_i} \cdot \nabla V_{AB_i}$). De la Figura 22, podemos observar lo siguiente:

- a) En ambos casos se presentan proyecciones negativas y positivas: a) formando dipolos (hidráulica, Figura 22a), o zonas positivas/negativas en la eléctrica (Figura 22b), estas se generan en las vecindades de las fuentes del problema directo y problema adjunto. Fuera de las zonas altamente influenciadas por las fuentes, podemos anticipar que valores positivos o negativos se presentarán en donde existen heterogeneidades; y cero donde no existe sensibilidad.
- b) La disposición de estos patrones espaciales de sensibilidad positiva y negativa, depende del campo observado (generado con el modelo sintético) con respecto a su campo calculado (con el modelo de referencia). Dado que los datos se generaron a partir de un modelo de prueba conocido, esta derivada debería indicar la diferencia entre el modelo de prueba y el de referencia.
- c) La intensidad de la sensibilidad dependerá del desajuste de los datos (R_{e_i} y R_{H_j}), mientras más alejado se encuentre el modelo de referencia del modelo sintético, la intensidad será mayor. Además, un valor grande de sensibilidad, requiere tanto de una alta intensidad de los campos asociados como de un paralelismo entre ellos.
- d) En el caso hidráulico si $k_r < k_s$ (Figura 22a), un incremento en la permeabilidad en una zona de sensibilidad negativa producirá un decremento en el campo de presiones hidráulicas en el punto de observación, mientras, que en una zona de sensibilidad positiva, producirá un aumento en la presión en el punto de observación.
- e) En el caso eléctrico si $\sigma_r < \sigma_s$ la sensibilidad negativa localizada en el centro superior de la Figura 22b indica que un decremento en la conductividad eléctrica producirá un incremento en la diferencia de potencial eléctrico; mientras que, las zonas de sensibilidad positiva (en los

extremos) indican que un decremento de la conductividad generará una disminución en la diferencia de potencial.

5.4 Respecto de la sensibilidad acoplada, completamente acoplada y la presión.

El desarrollo de esta formulación permite calcular las derivadas individuales, es decir, sin la influencia combinada de los datos eléctricos e hidráulicos, también permite el cálculo de las derivadas de la conductividad eléctrica incluyendo la información hidráulica; así como también las derivadas completamente acopladas donde ambos datos comparten información. Con nuestra formulación las derivadas se pueden calcular de forma independiente y se tienen las siguientes opciones para el cálculo:

Tabla 3. Formas en que funciona la metodología desarrollada para el cálculo de las sensibilidades.

	Independiente	Semi-coplada	Completamente acoplada
Eléctrica	$S_w = 1$ $\sigma_o = \sigma_{Bulk}$ $\frac{\partial \Phi_E(\sigma_{Bulk})}{\partial \sigma_o}$	S_w variable obtenida del modelo hidráulico $\frac{\partial \Phi_E(\sigma_o)}{\partial \sigma_{oq}}$	Utiliza información de los datos eléctricos e hidráulicos $\frac{\partial \Phi_{AC}(\sigma_o, k_s)}{\partial k_{sq}}$
Hidráulica	$\frac{\partial \Phi_H(k_s)}{\partial k_{sq}}$		

Los ejemplos que se muestran en el siguiente capítulo son de tipo semi-acoplado y completamente acoplado.

5.5 Conclusiones estado adjunto

En este capítulo se desarrolló un nuevo sistema de ecuaciones de estado adjunto para el problema electrohidráulico; donde se resolvió una nueva variable adjunta que contiene información (residual) de la respuesta del modelo eléctrico ante una variación del parámetro hidráulico esto gracias a que el problema está acoplado desde las ecuaciones fundamentales a través del campo de presiones hidráulicas.

Capítulo 6. Análisis de sensibilidad en la simulación de un acuífero libre

Existen diversos factores que pueden afectar a las mediciones hidráulicas y eléctricas en acuíferos no confinados, entre ellos están: los que actúan directamente sobre el fluido que satura el medio poroso (salinidad, temperatura), la fracción que ocupa en el medio poroso (grado de saturación) y otros factores que tienen que ver directamente con la estructura física del medio. Para detectar las variaciones de los datos eléctricos e hidráulicos debidas a la saturación y al medio, así como para analizar su sensibilidad a una variación en la presión hidráulica se procedió a realizar modelos sintéticos. Bajo el principio de que, para medios parcialmente saturados, cambios en la presión hidráulica, promueven cambios en la saturación del agua principalmente en el nivel freático y, con ello, cambios en la conductividad eléctrica y permeabilidad hidráulica.

Para generar los cambios de presión se construyeron los modelos como un problema de frontera, en donde se especificaron dos fronteras sujetas a una carga hidráulica fija convertida a valores de presión hidráulica, en el resto del medio se utilizaron fronteras de flujo cero (ver sección 4.5). Los modelos sintéticos se construyeron utilizando dos tipos de funciones de saturación S_w (sección 2.2). La Tabla 4 muestra un resumen de la geometría de la saturación, las dimensiones del modelo, el medio y objetivo del experimento.

Tabla 4. Resumen de modelos generados para el análisis de sensibilidad.

S_w	Sección	Gradiente hidráulico	Modelo	Medio	Objetivo
Atan	6.1.1	Plano	Local	Homogéneo	Validación
		Pronunciado	Local	Homogéneo	Validación Presiones – locales vs regionales
	6.1.2	Pronunciado	Local	Heterogéneo	Identificación de parámetros
Curva de retención	6.2.1	Suave	Regional	Homogéneo	Análisis de respuesta de derivadas
	6.2.2	Suave	Regional	Heterogéneo	Identificación de parámetros
	6.2.3	Suave	Regional	Heterogéneo	Modelo realista, identificación de parámetros

Respecto a las curvas de saturación, cabe recordar que la primera es una función matemática simple que relaciona de forma continua el campo de presión con el grado de saturación dada por la ecuación (5); en el segundo caso, se utiliza una curva de retención (SWR) para calcular el grado de saturación en la zona vadosa, y asigna un valor de 1 debajo del nivel freático (ecuación (6)).

Los modelos homogéneos buscan mostrar la sensibilidad al nivel de saturación a través del cambio que inducen en las propiedades eléctricas e hidráulicas. En los medios heterogéneos se busca entender la sensibilidad de ambas metodologías a los parámetros del medio. En los modelos se simplificó el número de observaciones tanto para separar y entender los efectos de ambos tipos de información, así como para investigar la contribución de la información eléctrica en la determinación de la permeabilidad hidráulica.

Finalmente el análisis de sensibilidad permite entender el proceso de inversión de los datos; sobre todo cuando se realiza en las inmediaciones de un modelo de referencia a través del gradiente de la función objetivo con las ecuaciones (55). Este análisis, visto como primer paso del proceso de inversión, evidencia los cambios requeridos en el parámetro (ya sea en la conductividad eléctrica o en la permeabilidad hidráulica) para generar un mejor ajuste de los datos. Al partir de un modelo de referencia, podemos también observar la sensibilidad de los datos a cambios de otros factores como lo son el nivel freático y las heterogeneidades del medio.

6.1 Modelos con curvas $S_w(P)$ atan

En esta sección, utilizamos la función basada en el arco tangente (ver ecuación (5)) con los parámetros presentados en la sección (2.2) para simular acuíferos libres homogéneos y heterogéneos. Los dos primeros se utilizaron para validar los modelos mediante el método tradicional de teoría de perturbaciones que se presenta en el anexo D. La comparación de los modelos obtenidos con el método adjunto y con la teoría de perturbaciones, se presenta en el anexo E.

6.1.1 Acuífero no confinado en un medio homogéneo (sensibilidad al nivel freático)

En este ejemplo utilizamos un modelo homogéneo para analizar la sensibilidad del medio poroso a cambios en la saturación. El primer caso utiliza un gradiente hidráulico igual a cero. Lo que permite

determinar la sensibilidad en un estado estático sin influencia de un gradiente de presión. Así la respuesta es a un nivel freático horizontal y generado con un sitio de observación hidráulica y un arreglo tetraelectrónico. En el segundo caso proponemos calcular la sensibilidad induciendo un gradiente hidráulico en una dirección de flujo y generamos datos nuevos. Esto permite evaluar el papel de las presiones locales del medio sobre la presión hidrostática regional del primer caso.

a) Modelo sin gradiente hidráulico

El modelo de este ejemplo comparte la misma estructura y parámetros que el modelo presentado en la sección 4.5.1 (Figura 13). Los modelos sintéticos generados con esta distribución se muestran en la Figura 14a para el modelo hidráulico y en la Figura 16a para el eléctrico. El objetivo en este primer ejemplo es conocer y validar la respuesta de las derivadas de la función objetivo (sensibilidad) respecto a la conductividad eléctrica y permeabilidad hidráulica, inducidas por un cambio en la saturación en el medio (modelo de referencia, $\sigma_o = 0.0645767 \text{ S/m}$ y $k_s = 9E - 10 \text{ m}^2$). En este ejemplo se probaron las derivadas semi-acopladas y completamente acopladas (Tabla 3).

La Figura 23a es la derivada del misfit (función objetivo) de los datos eléctricos respecto de la conductividad eléctrica ($d\Phi_E/d\sigma_o$). La figura muestra una anomalía de sensibilidad típica en arreglos tetraelectrónicos (Loke, 2024). La mayor sensibilidad se observa bajo las celdas donde se ubican los electrodos de corriente y los receptores de potencial. Estos ejercen una influencia máxima en el centro del arreglo y se extienden hacia los receptores, es decir, se vincula simétricamente desde los electrodos de corriente-potencial hacia ambos lados del centro del modelo. En estas gráficas, la máxima sensibilidad se observa en la zona no saturada del modelo y es influenciada principalmente por la cercanía de los electrodos.

La Figura 23b presenta la sensibilidad del misfit (función objetivo) de los datos hidráulicos, en un punto de observación ubicado en la celda ($x = 30, z = 12$), a la permeabilidad calculada por el método adjunto. Esta anomalía es similar a las sensibilidades de carga hidráulica, sujetas a un gradiente hidráulico constante presentadas por B. Li & Yeh, (1998) y Lu & Vesselinov, (2015). Esta anomalía tiene un carácter dipolar, en el que la sensibilidad positiva se presenta en dirección a la zona no saturada del medio, indicando que un aumento de la permeabilidad hacia la zona no saturada aumentará el campo de presiones y, viceversa, un aumento de la permeabilidad en la zona saturada disminuirá el campo de presiones en el sitio de observación. Es claro que la sensibilidad a cambios en la permeabilidad decae rápidamente cuando nos alejamos del punto de observación.

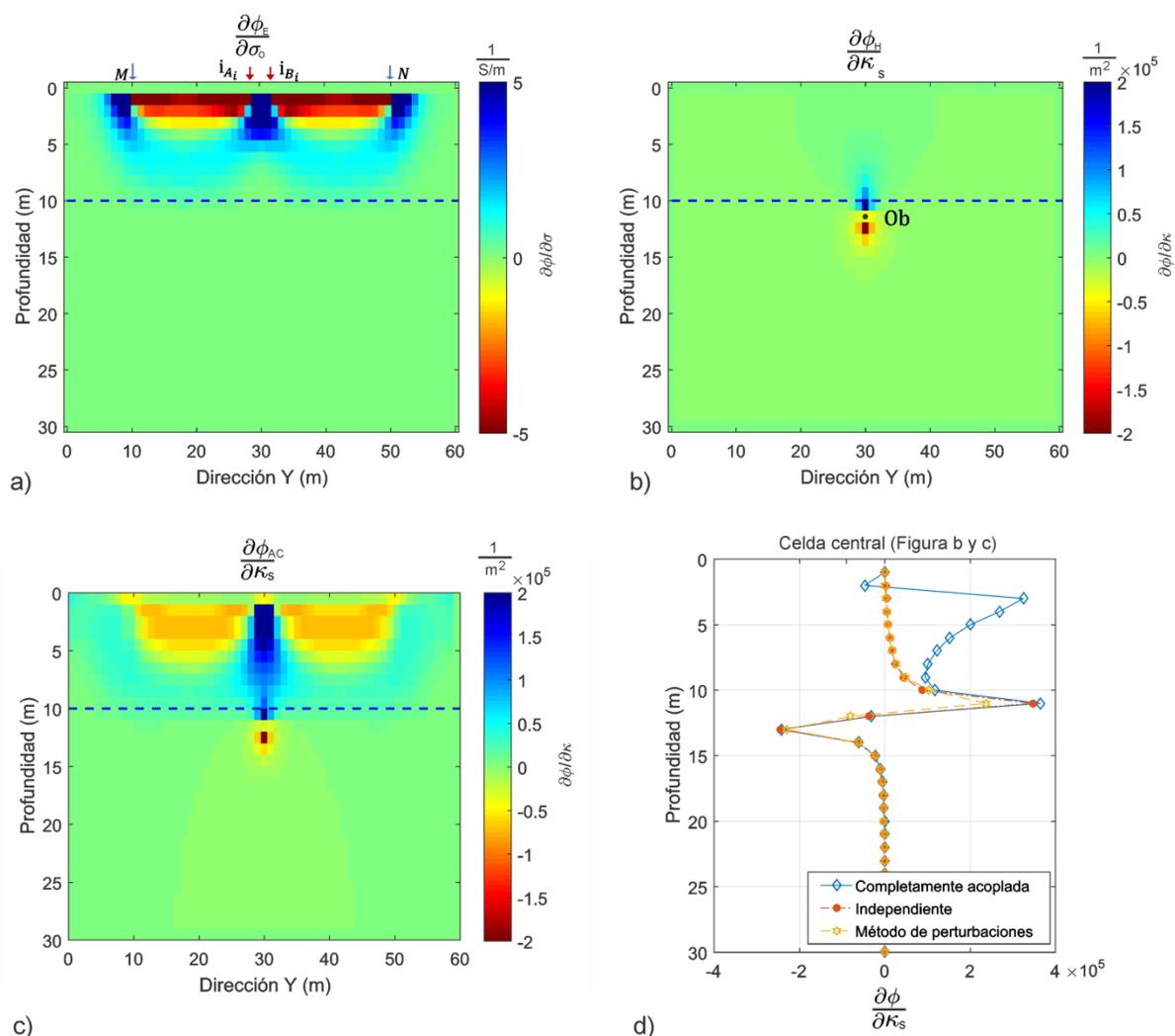


Figura 23. Derivada acoplada de la función objetivo de: (a) datos eléctricos respecto de la conductividad eléctrica saturada (b) datos hidráulicos respecto de la permeabilidad hidráulica. c) Derivada completamente acoplada de la función objetivo de los datos eléctricos e hidráulicos respecto de la permeabilidad hidráulica. (d) Comparación de (b), (c) y el cálculo convencional con un modelo hidráulico perturbado.

La sensibilidad a la permeabilidad de ambos tipos de datos cuando están completamente acoplados por la presión hidráulica se muestra en la Figura 23c. Esta sensibilidad aumenta significativamente en la parte no saturada y conserva valores positivos, indicando que se requiere un aumento de la permeabilidad para aumentar el campo de presiones y consecuentemente variar el nivel de saturación. El aumento de la sensibilidad en la parte central del modelo se debe a la simetría en la disposición de los sensores eléctricos e hidráulicos. La comparación de un perfil central de los tres tipos de sensibilidad a la permeabilidad obtenidos (completamente acoplada, independiente, método de perturbaciones) se observan en la Figura 23d. Es notable el aumento a la sensibilidad en la zona no saturada debido a la marcada influencia del cambio de saturación en las mediciones eléctricas.

b) Modelo con gradiente hidráulico

En este ejemplo, proponemos un gradiente hidráulico lateral para conocer cómo ambos tipos de datos detectan este gradiente de presiones, en preparación al estudio de casos más complejos en medios hidráulicamente heterogéneos. Este ejemplo comparte los mismos parámetros que el modelo presentado en la sección 4.5.2 (Figura 17). Los modelos sintéticos del campo de presión se muestran en la Figura 18 y del potencial eléctrico de un arreglo dipolar en la Figura 20a. En este experimento se probaron las derivadas independientes, semi-acopladas y completamente acopladas (Tabla 3).

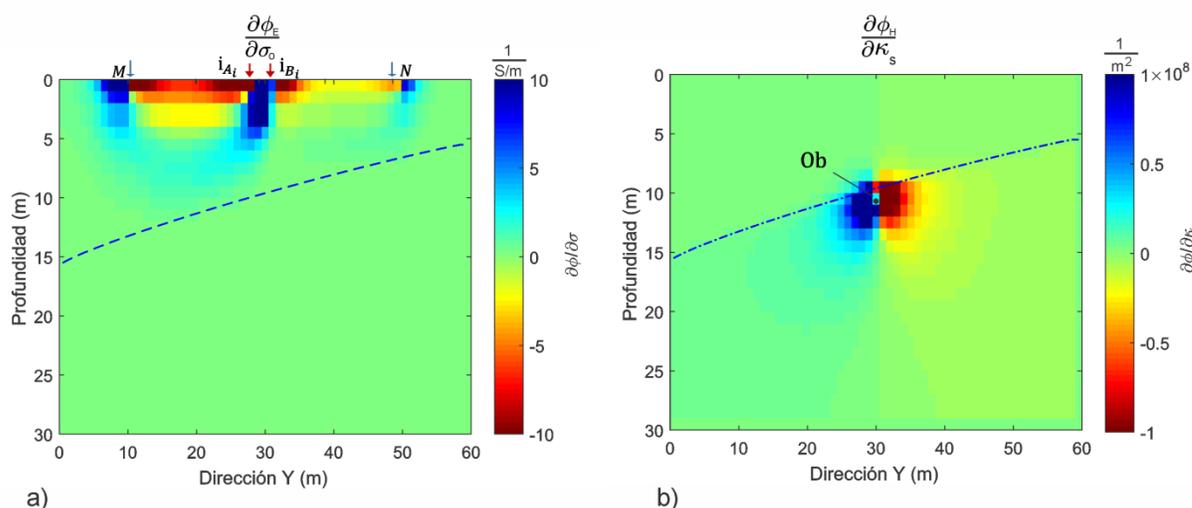


Figura 24. Sección vertical de las derivadas de la función objetivo de datos eléctricos respecto de la conductividad eléctrica saturada (a), y de la función objetivo de datos hidráulicos respecto de la permeabilidad hidráulica (b). Obtenidos por el método adjunto semi-acoplado e independiente respectivamente (ver Tabla 3).

En este caso la derivada de un dato eléctrico cuadrupolar a la conductividad eléctrica saturada $\left(\frac{d\Phi_E}{d\sigma_o}\right)$ tiene un comportamiento similar al de la sección anterior (nivel freático horizontal). La derivada muestra una anomalía de típica de sensibilidad (por ejemplo, Loke, 2024), con la sensibilidad más alta cerca de los electrodos pero asimétrico siguiendo el nivel freático actual (Figura 24a).

La derivada del misfit de los datos hidráulicos $\left(\frac{d\Phi_H}{d\kappa_s}\right)$ respecto de la permeabilidad ahora está influenciada no solo por el nivel de saturación vertical, sino también por la componente de los flujos regionales generados por el gradiente horizontal de presiones impuesto, es decir, la pérdida de carga es horizontal y la derivada que se presenta en la Figura 24b es debida a la variación lateral de presiones en

los extremos del modelo (carga hidráulica $h\rho g$, ((3)) por lo que el dipolo que se forma en esta derivada es prácticamente horizontal. Como se puede observar, respecto a la sensibilidad sin gradiente (Figura 23b), ésta aumenta de 10^5 a 10^8 unidades, este cambio se asocia a que en este experimento existe un alto gradiente hidráulico que modifica los datos observados debido a la permeabilidad variablemente saturada $k(P)$ dentro del modelado (ver ecuaciones (7) y (21)).

Cabe recordar que las fronteras están propuestas como un límite hidrostático e incluyen el potencial ∇z (sumando la componente de flujos verticales). Por lo que, la Figura 24b, corresponde con los cambios de presión regionales. Caso contrario, si eliminamos de la formulación adjunta la componente asociada $\rho g \nabla z$ podemos obtener la derivada asociada con el campo de presiones locales y ocurre principalmente en la vecindad del pozo; el resultado es un dipolo semi-vertical centrado cerca del punto de observación (Figura 25a). Respecto a la magnitud de esta derivada podemos observar que ésta se incrementa de 1×10^8 a 1×10^9 unidades, este aumento está asociado a que la sensibilidad está centrada en la variación que ocurre en las inmediaciones del punto de observación, y a que la proyección de los gradientes es máxima en esta dirección.

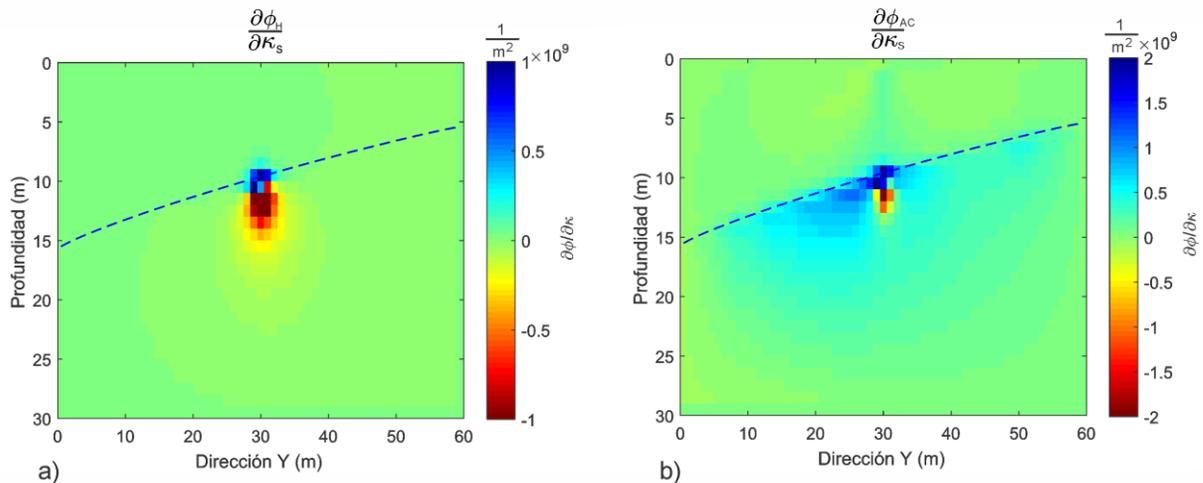


Figura 25. Sección vertical de las derivadas del misfit del dato hidráulico independiente (a) y del misfit de los datos eléctricos e hidráulicos completamente acopladas (b), con respecto a la permeabilidad hidráulica obtenida por el método adjunto, asociadas al campo de presiones P_L .

La Figura 25b muestra la derivada de la función objetivo respecto a la permeabilidad saturada completamente acoplada. En este caso, la derivada está compuesta por los residuales de los datos eléctricos e hidráulicos completamente acoplados por la presión.

El resultado muestra que la sensibilidad se extiende lateralmente y delinea el contacto con la superficie del agua freática y muestra valores positivos por debajo del este nivel. Este aumento de la sensibilidad (de 1×10^9 a 2×10^9) se debe a que los datos eléctricos en su interacción en la zona no saturada y en el contacto con el nivel freático funcionan como una fuente en la formulación del campo adjunto hidráulico (primer término de la ecuación, del lado derecho de la ecuación (51)) incrementando notablemente el valor del campo adjunto (λ) y su gradiente. Nuevamente esta sensibilidad se asocia con los cambios de permeabilidad requeridos para reproducir mejor, tanto los datos eléctricos como los hidráulicos. Este experimento demuestra que en el esquema integrado es necesario el uso de las presiones locales P_L en el método adjunto.

6.1.2 Modelo heterogéneo

En este ejemplo, pretendemos medir la sensibilidad a un medio heterogéneo en sus propiedades eléctricas e hidráulicas intrínsecas además de probar el papel del nivel freático como un potenciador natural de la sensibilidad. Para esto incorporamos una heterogeneidad rectangular (con σ_{o2} y k_{s2}) en un semiespacio homogéneo (con σ_{o1} y k_{s1}), ver Tabla 5.

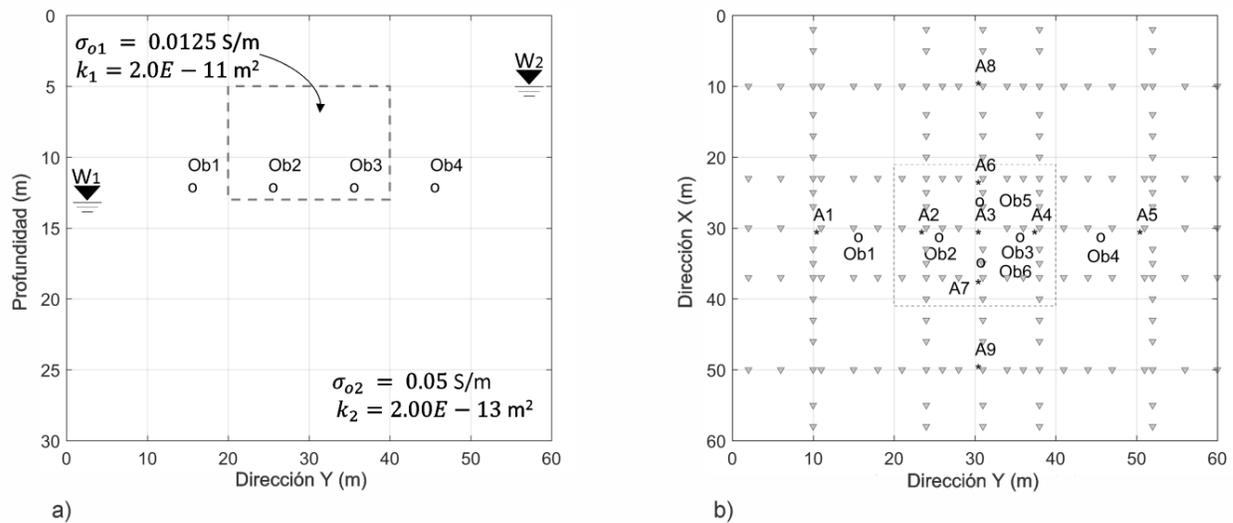
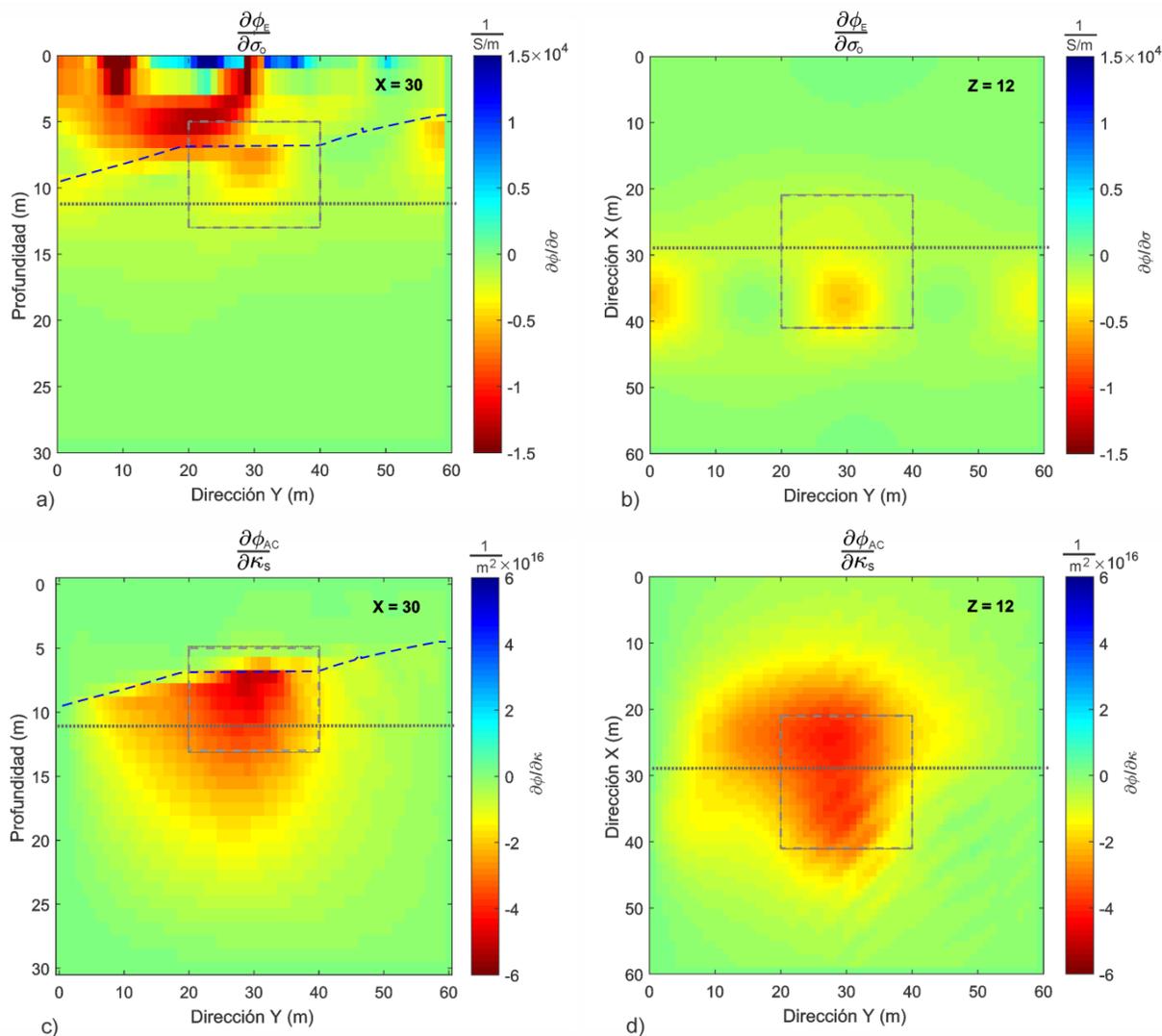


Figura 26. Sección transversal (a) y vista en planta (b) de nuestro modelo de prueba heterogéneo. Los círculos vacíos indican las ubicaciones de los piezómetros y los triángulos negros el nivel freático. Las pequeñas estrellas negras indican la ubicación de los centros nueve sondeos eléctricos y los triángulos invertidos grises cada una de las posiciones reales de los electrodos. Nótese que las condiciones de contorno son las mismas que las de la Figura 12.

Tabla 5. Propiedades eléctricas e hidráulicas usadas en el modelo sintético 6.1.2 y de referencia.

Modelo	Conductividad eléctrica saturada (σ_o)	Permeabilidad saturada (k_s)
	(S/m)	(m ²)
Cuerpo inmerso	$\sigma_{o1} = 0.0125$	$k_{s1} = 2.0 \times 10^{-11}$
Medio homogéneo	$\sigma_{o2} = 0.05$	$k_{s2} = 2.0 \times 10^{-13}$
Referencia	$\sigma_o = 0.0125$	$k_s = 2.0 \times 10^{-11}$

**Figura 27.** Vistas en sección vertical (a y c) y horizontal (b y d) de la sensibilidad de los datos eléctricos e hidráulicos acoplados por la presión a la conductividad eléctrica saturada (paneles superiores) y la permeabilidad hidráulica (paneles inferiores).

Establecimos un gradiente hidráulico lateral usando $W_1 = 9$ m y $W_2 = 4$ m en los extremos del modelo, y propusimos seis sitios de observación de presión hidráulica y nueve sondeos eléctricos tipo

Schulumberger como se muestra en la Figura 26. Para calcular la derivada de la función objetivo a la conductividad eléctrica y a la permeabilidad hidráulica de acuerdo con nuestra formulación adjunta, establecimos el modelo homogéneo de referencia como el semi-espacio, σ_o y k_s , estos son modificados según las relaciones (7) y (8) para establecer un medio variablemente saturado y con ello calcular los modelos adjuntos. Las sensibilidades resultantes se muestran en la Figura 27.

La sensibilidad de los datos eléctricos a la conductividad eléctrica saturada ($d\Phi_E/d\sigma_o$), como se esperaba (Figura 27a y b), está impulsada no solo por las variaciones laterales de la conductividad eléctrica saturada, sino también por el nivel freático vinculado a las variaciones de presión hidráulica. La sensibilidad de todos los datos eléctricos e hidráulicos a la permeabilidad hidráulica ($d\Phi_{AC}/dk_s$) también depende notablemente de la heterogeneidad y la configuración real del nivel freático (Figura 27c y d). Un valor negativo general indica la necesidad de una mayor permeabilidad donde se espera la heterogeneidad. Es interesante notar que los datos eléctricos aumentan la sensibilidad a la permeabilidad incluso por encima de la zona saturada, donde los piezómetros por sí solos no pueden proporcionar ninguna información. También podemos notar que esta derivada de la permeabilidad no es dipolar e identifica la ubicación del cuerpo.

6.1.3 Mediciones en episodios de tiempo para mejorar la estimación de parámetros.

Un elemento natural no estacionario en los acuíferos libres es el nivel freático. El conocimiento detallado de este nivel transitorio es fundamental para los estudios de balance de acuíferos; sin embargo, su variación a menudo dificulta la determinación de las propiedades intrínsecas del acuífero cuando se utilizan datos geoelectrónicos de diferentes épocas. En el siguiente experimento, nos propusimos monitorear los procesos de flujo en el subsuelo mediante mediciones repetidas (cf. Karaoulis et al., 2012) e ilustramos cómo los cambios en el nivel del agua hacen más evidentes las propiedades del medio poroso en los datos geoelectrónicos. Para simular un experimento con datos de dos épocas diferentes, supusimos el mismo modelo de acuífero heterogéneo de la sección anterior para una primera época de medición (ξ_1) y un nuevo nivel de saturación ($W_1 = 13$ m y $W_1 = 5$ m) para una segunda época. En nuestro ejemplo utilizamos la misma configuración de datos eléctricos e hidráulicos para ambas épocas.

Dado que asumimos que la conductividad eléctrica saturada y la permeabilidad hidráulica no cambian con el tiempo, las funciones de desajuste correspondientes (y sus sensibilidades) para dos épocas diferentes se pueden sumar de manera sencilla.

Las sensibilidades acumuladas de los datos y de ambas épocas a los parámetros del modelo se muestran en la Figura 28. En comparación con la Figura 27, resulta evidente que las observaciones múltiples en diferentes momentos aumentan la sensibilidad a la conductividad eléctrica saturada (Figura 28a y b) y la permeabilidad hidráulica (Figura 28c y d) en términos de su distribución y valores. La sensibilidad eléctrica aumenta considerablemente en la zona no saturada y se concentra sobre la heterogeneidad. En la hidráulica, el incremento en la sensibilidad a la permeabilidad se localiza por debajo del nivel freático dentro de la heterogeneidad. Podemos entonces destacar que nuestro marco teórico no sólo nos permite utilizar registros históricos de estudios de balance hídrico, sino también mejora continuamente nuestro conocimiento de las propiedades eléctricas e hidráulicas intrínsecas de los acuíferos libres a lo largo del tiempo aprovechando temporadas, de lluvias, como de estiaje.

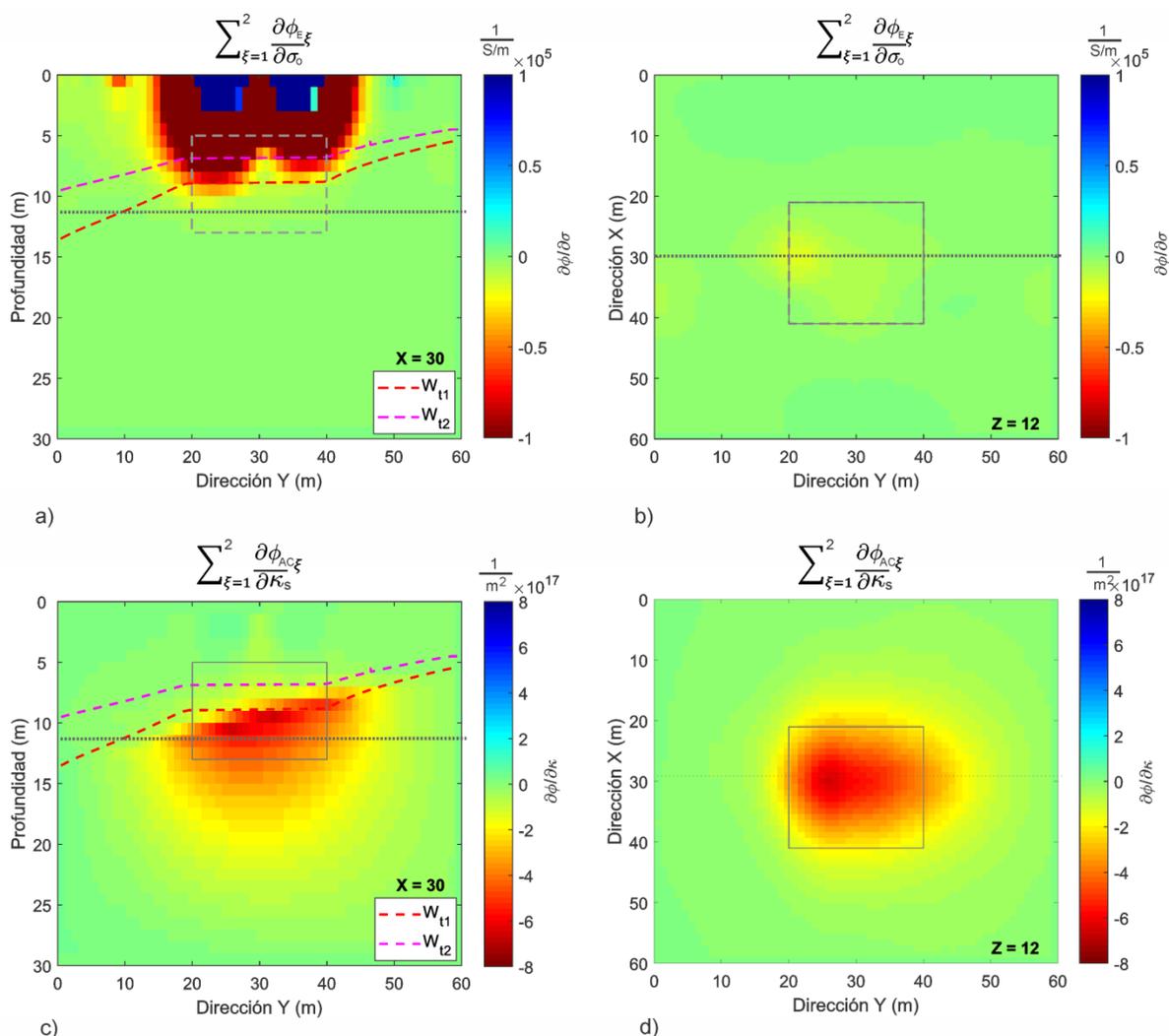


Figura 28. Ilustración de la sensibilidad debida al uso agregado de datos eléctricos e hidráulicos medidos en dos épocas diferentes. Nótese que las diferencias en el nivel freático para ambos episodios resultan en una mayor sensibilidad a las propiedades intrínsecas de la conductividad eléctrica saturada (a y b) y la permeabilidad hidráulica (c y d).

6.2 Modelos con curvas de retención SWR

Los experimentos de esta sección tienen como objetivo probar el desempeño de la curva de retención de agua (SWRC) presentada en la sección 2.2.2 (ecuación (6)) en nuestra formulación. Estas curvas han sido ampliamente probadas para problemas de infiltración e inyección de fluidos en la zona vadosa, y la estamos complementando para que funcione en un medio variablemente saturado. Este tipo de curva tiene como particularidad que utiliza parámetros de suelo de mediciones in-situ y en su caso a través de bases de datos como la UNSODA (Nemes et al., 2001), en donde se determinan los parámetros del suelo a partir de muchas estimaciones.

Como en las secciones previas, partimos de modelos homogéneos simples para probar que la interfase saturada/no-saturada provee mayor sensibilidad a los datos eléctricos e hidráulicos en las inmediaciones del nivel freático y vamos agregando heterogeneidades para observar cómo se comporta la sensibilidad a las propiedades del medio. Considerando que las propiedades intrínsecas del medio no cambian con el tiempo, las sensibilidades de ambos tipos de datos en diferentes niveles de saturación (episodios de tiempo) se pueden sumar. Los ejemplos que presentamos en esta sección son escalados de los modelos previos para representar acuíferos regionales ($X = 600$ m, $Y = 590$ m y $Z = 60$ m); del mismo modo, los gradientes hidráulicos presentados son relativamente menores, hipotéticamente asociados con una granulometría más fina. Las condiciones de frontera utilizadas en los modelos de este apartado son las que se presentan en la Figura 12.

6.2.1 Caso 1: Determinación colaborativa del nivel freático (modelo homogéneo)

Este ejemplo presenta una distribución espacial similar a la presentada en el modelo de la sección 6.1.1 (modelo con gradiente hidráulico); en esta los niveles de saturación se localizaron en $W_1 = 18.5$ m y $W_2 = 15.5$ m. Se utilizó un arreglo tetraelectródico y un sitio de observación de presión en ($Y = 370$ m y $Z = 22$ m). Su distribución completa se muestra en la Figura 29, la simbología es la misma de la Figura 13b. La Tabla 6 muestra los parámetros de conductividad eléctrica y de permeabilidad del modelo sintético y del modelo de referencia, así como los parámetros de suelo utilizados para la construcción del modelo de saturación (dado por la ecuación (6)).

Una vez obtenidos los campos eléctricos y de presión hidráulica se calcularon las sensibilidades semi-acoplada, independiente y completamente acoplada (Tabla 3). En el caso de la derivada de la función

objetivo de los datos eléctricos respecto de la conductividad $\frac{\partial \Phi_E}{\partial \sigma_0}$, nuevamente, podemos observar que la sensibilidad decrece con la distancia a los electrodos, y que localmente vuelve a incrementarse inmediatamente debajo del nivel freático, como se observa en la sección vertical de la Figura 30a y en la sección horizontal de la Figura 31a. Este efecto es notorio en este experimento debido a la mayor separación electródica. En el caso de la derivada de la función objetivo de los datos hidráulicos respecto de la permeabilidad hidráulica $\frac{\partial \Phi_H}{\partial k_s}$, como era de esperarse, presenta una forma dipolar como los experimentos previos, con la anomalía negativa debajo del nivel de saturación, y la positiva en la zona no saturada. Nuevamente la amplitud decae con la distancia al punto de observación (Figura 30b).

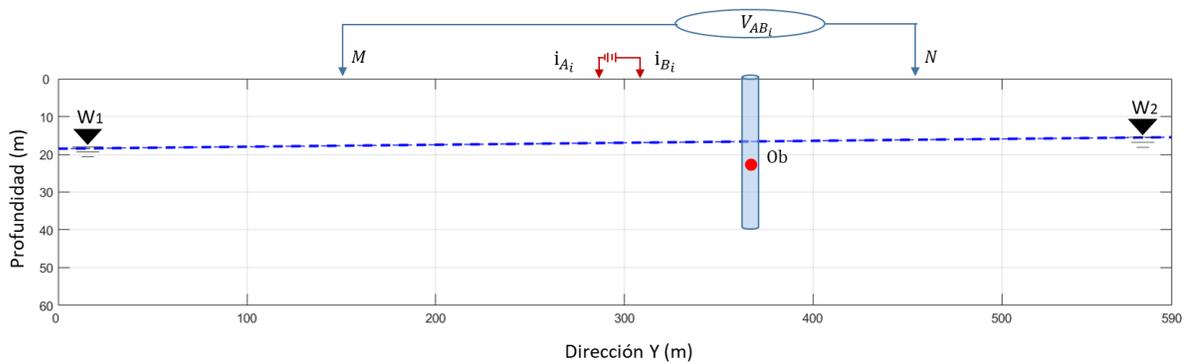


Figura 29. Sección vertical del modelo sintético homogéneo 3D y la distribución de las fuentes y receptores eléctricos y la localización de la observación hidráulica.

Tabla 6. Propiedades eléctricas, hidráulicas y parámetros de suelo usadas en el modelo sintético 6.2.1 y de referencia (los parámetros de suelo se tomaron de Carsel & Parrish (1988)).

Modelo	Conductividad eléctrica saturada (σ_0) S/m)	Permeabilidad saturada (k_s) (m^2)	Parámetros de suelo	
			α_w (KPa)	β_w
Sintético	0.005	5.0E-13	0.677	2.68
Referencia	0.02	5.0E-14	2.725	1.56

En este experimento, la derivada completamente acoplada $\partial \Phi_{AC} / \partial k_s$ muestra la información completa de la derivada independiente (en la localización de la observación) más los valores asociados con la contribución de datos eléctricos en la proximidad de la superficie freática (Figura 30c). En esta figura se observa que la sensibilidad, aumenta a lo largo del nivel freático a causa del posicionamiento de los electrodos. Esta sensibilidad también se observa en la vista horizontal de la Figura 31b en donde esta contribución también se presenta debajo del nivel freático y sigue su geometría.

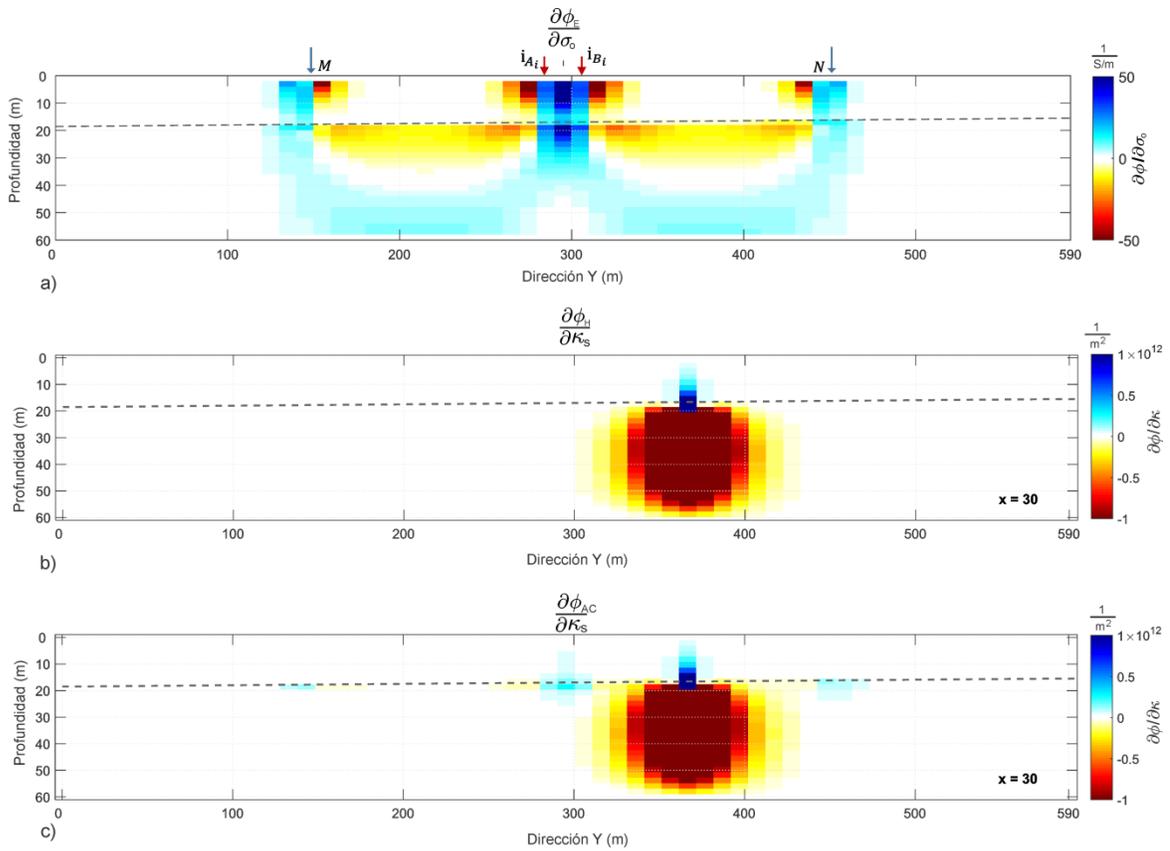


Figura 30. Sección vertical de derivadas de la función objetivo: a) semi acoplada (eléctricos); b) independiente (hidráulicos); y c) sensibilidad completamente acoplada de la función objetivo de datos eléctricos e hidráulicos con respecto a la permeabilidad hidráulica obtenida por la formulación adjunta.

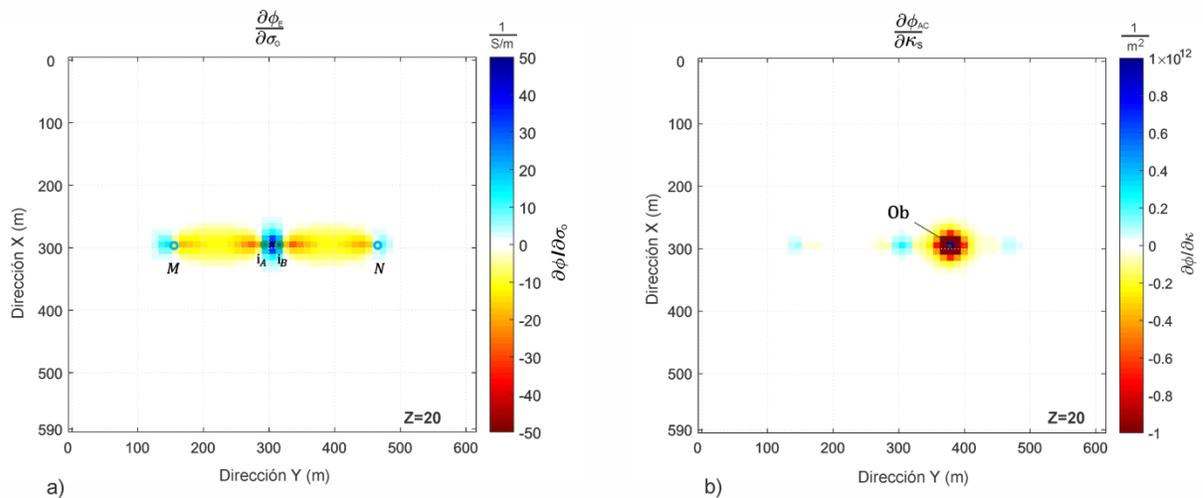


Figura 31. Vista en planta de derivadas semi-acoplada de datos eléctricos respecto a la conductividad eléctrica (a) y completamente acoplada de datos eléctricos e hidráulicos respecto a la permeabilidad hidráulica obtenida por la formulación de estado adjunto (b).

6.2.2 Caso 2: Determinación colaborativa del nivel freático (modelo heterogéneo)

El objetivo de este experimento es incrementar el número de observaciones eléctricas para el monitoreo del nivel freático en un medio heterogéneo. De forma similar al experimento 6.1.2, incorporamos una heterogeneidad rectangular (con σ_{o2} y k_{s2}) en un semiespacio homogéneo (con σ_{o1} y k_{s1}) además se les asignaron parámetros del suelo, mostrados en la Tabla 7. Para simular el movimiento de agua incorporamos un gradiente hidráulico suave ($W_1 = 17.3 \text{ m}$ y $W_2 = 15.0 \text{ m}$). Propusimos cuatro sitios de observación hidráulica y un barrido de 33 arreglos tetraelectródicos a una sola apertura (AB constante = 260 m y MN = 20 m) como se observa en el diagrama de la Figura 32.

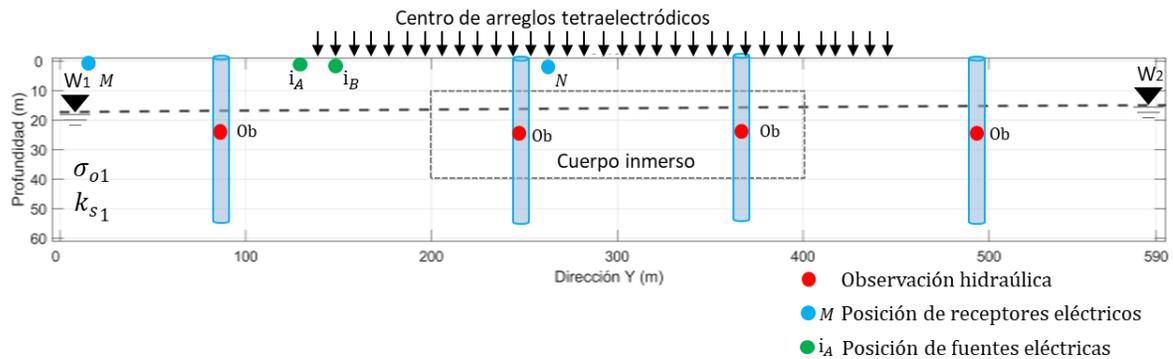


Figura 32. Diagrama esquemático de la sección transversal del modelo de prueba. Las flechas negras muestran los centros de los arreglos tetraelectródicos, los círculos azules y verdes la ubicación de los electrodos receptores y fuentes eléctricas respectivamente únicamente para el primer arreglo (los demás están localizados cada 10 m respecto al contiguo). Los puntos rojos indican los sitios de observación de presión hidráulica.

Tabla 7. Propiedades eléctricas, hidráulicas y parámetros de suelo usadas en el modelo sintético 6.2.2 y de referencia (los parámetros de suelo se tomaron de Carsel & Parrish (1988)).

	Conductividad eléctrica saturada (σ_o) (S/m)	Permeabilidad saturada (k_s) (m^2)	Parámetros de suelo	
			α_w (KPa)	β_w
Medio homogéneo	$\sigma_{o1} = 0.02$	$k_{s1} = 5.0 \times 10^{-14}$	2.725	1.56
Cuerpo inmerso	$\sigma_{o2} = 0.005$	$k_{s2} = 5.0 \times 10^{-13}$	0.677	2.68
Referencia	$\sigma_o = 0.02$	$k_s = 5.0 \times 10^{-14}$	2.725	1.56

De la Figura 33a podemos notar que, la derivada de la función objetivo $\frac{\partial \Phi_E}{\partial \sigma_o}$ de los datos eléctricos respecto a la conductividad eléctrica, forma zonas horizontales con sensibilidad positiva y negativa,

resultado de la contribución de la sensibilidad de cada arreglo individual (como se observa de forma individual en la Figura 30a), tanto en superficie como debajo del nivel freático. También se puede observar que la magnitud negativa es mayor en el volumen donde está inmersa la heterogeneidad, misma que está rodeada por una sensibilidad positiva, que marca las fronteras del cuerpo inmerso, Esto también se observa en la sección horizontal de la Figura 34.

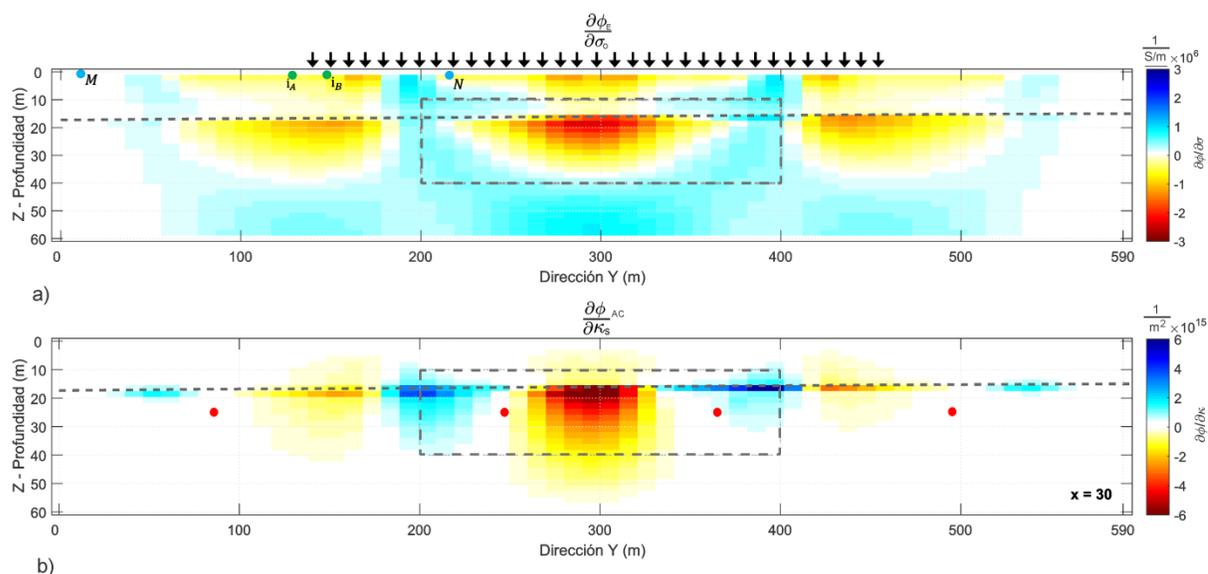


Figura 33. Sección vertical de la derivada de la función objetivo a) de los datos eléctricos a la conductividad eléctrica; b) de los datos hidráulicos y eléctricos a la permeabilidad hidráulica. Como se puede observar se incrementa la sensibilidad a lo largo del nivel freático y dentro del cuerpo inmerso en el medio homogéneo.

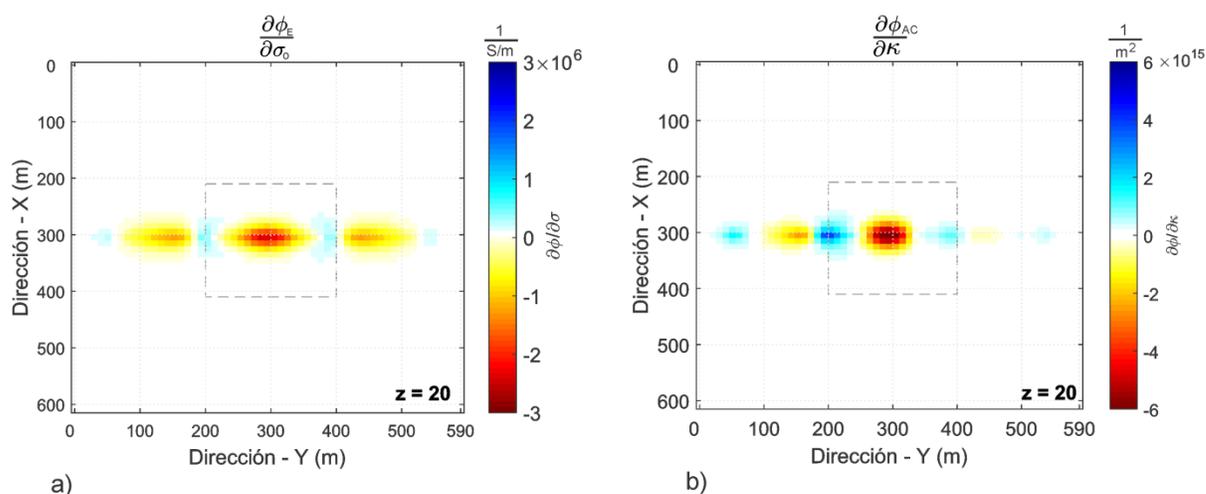


Figura 34. Sección horizontal de las derivadas de la función objetivo de los datos eléctricos a la conductividad eléctrica (izquierda) y derivada de la función objetivo de los datos eléctricos e hidráulicos respecto de la permeabilidad (derecha). Como se puede observar se incrementa la sensibilidad al nivel freático dentro del cuerpo inmerso en el medio homogéneo.

En la derivada de la función objetivo respecto de los datos hidráulicos y eléctricos a la permeabilidad hidráulica $\frac{d\Phi_{AC}}{dk_s}$ se puede observar que la contribución eléctrica es mayor que la hidráulica (pozos), debido a que, en la imagen de la Figura 33b predomina la respuesta eléctrica (zonas positivas y negativas) y no dipolos locales típicos de los datos hidráulicos (como se puede ver en las Figuras 25a y 30b), y que la sensibilidad combinada delinea perfectamente el nivel freático (Figura 33b), además, se incrementa en la zona donde se localiza el cuerpo inmerso, esto, también se observa en las secciones horizontales de la Figura 34. Este ejercicio nos permitió descubrir el comportamiento de la sensibilidad ante un cambio en las propiedades del medio debida a la interfase con el medio saturado (vertical) y al flujo horizontal debida a los cambios en la granulometría lateral en el medio poroso. Cabe recordar que la disposición de electrodos es a una sola apertura, lo que permite que la energía se concentre nuevamente en el nivel freático.

6.2.3 Caso 3: Fluctuaciones del nivel freático como fuente natural para determinar propiedades del medio.

El objetivo de este experimento es identificar el rol que tiene la interfase saturada/no-saturada para incrementar la sensibilidad a la conductividad hidráulica y a la permeabilidad saturada. Para desarrollar este experimento se simuló un medio estratificado, relleno de material detrítico de diferente granulometría, estas capas están delimitadas por líneas punteadas en la Figura 35. A cada una de estas capas se les asignó un valor de permeabilidad hidráulica, conductividad eléctrica y parámetros de suelo como se muestra en la Tabla 8.

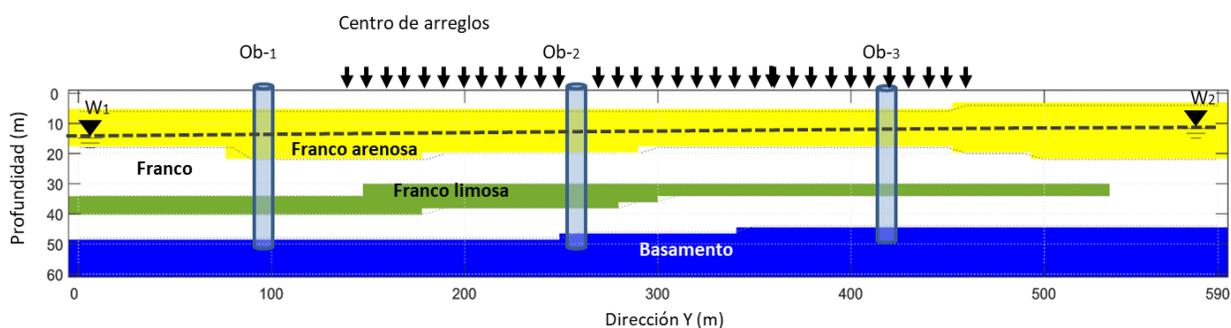


Figura 35. Sección transversal de nuestro modelo de prueba heterogéneo. El cilindro indica la ubicación de los pozos de muestreo y los triángulos negros representan el nivel freático. La pequeña flecha negra indica la ubicación del centro de los 33 arreglos tetraelectrónicos. Nótese que las condiciones de contorno son las mismas que las de la Figura 12.

Cabe indicar que las propiedades simulan capas que varían de permeables a semi-permeables, simulando acuíferos en materiales granulares comunes en la explotación geohidrológica. Para este modelado se propusieron tres sitios de observación de presión y se simularon datos eléctricos con 33 arreglos tetra electródicos (tipo Schlumberger) a una sola apertura (AB constante = 260 m y MN = 20 m), simulando una calicata eléctrica. Después se simularon cinco diferentes episodios de tiempo (Tabla 9) para estudiar la respuesta eléctrica e hidráulica del medio poroso estratificado ante el cambio en el nivel freático. Estos distintos niveles freáticos van cortando en diferentes tiempos (ξ_1 a ξ_5) a las principales unidades descritas en la Tabla 8.

Tabla 8. Propiedades eléctricas, hidráulicas y parámetros de suelo usadas en el modelo sintético (6.2.3) y de referencia (los parámetros de suelo se tomaron de Carsel & Parrish, 1988).

Modelo	Suelo	Conductividad eléctrica saturada (σ_0) S/m	Permeabilidad saturada (k_s) (m^2)	Parámetros de suelo	
				α_w (KPa)	β_w
Sintético	Franco arenoso	0.005	5.00E-13	1.308	1.89
	Franco	0.01	1.00E-13	2.725	1.56
	Franco limosa	0.05	1.00E-15	4.905	1.41
	Basamento	0.0005	1.00E-17	19.62	1.09
Referencia	--	0.01	1.00E-13	2.725	1.56

Tabla 9. Profundidades de los niveles freáticos utilizadas para cinco escenarios ξ en las Secciones 5.2 y 5.3. W_1 para los bordes izquierdo y W_2 para los derechos (ver Figura 35).

Profundidad al nivel de saturación (m)	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5
W_1	12.3	17.3	27.3	35.3	45.3
W_2	10	15	25	33	43

La Figura 36 muestra las curvas de saturación del modelo sintético (líneas continuas) y las utilizadas como modelo de referencia en el cálculo de las sensibilidades (línea punteada). Con estas curvas es posible incrementar el conocimiento de la saturación del medio geológico asociándolo con su curva de retención correspondiente, si conocemos previamente los parámetros del suelo o los identificamos a partir de tablas. Después de generar los datos sintéticos, de presión y de resistividad aparente para los cinco episodios de tiempo, empleamos un modelo homogéneo como referencia para calcular su sensibilidad. Para presentar los resultados, en este capítulo se presentan las derivadas de dos escenarios extremos (ξ_1 y ξ_4), el resto de los escenarios se muestran en el Anexo F.

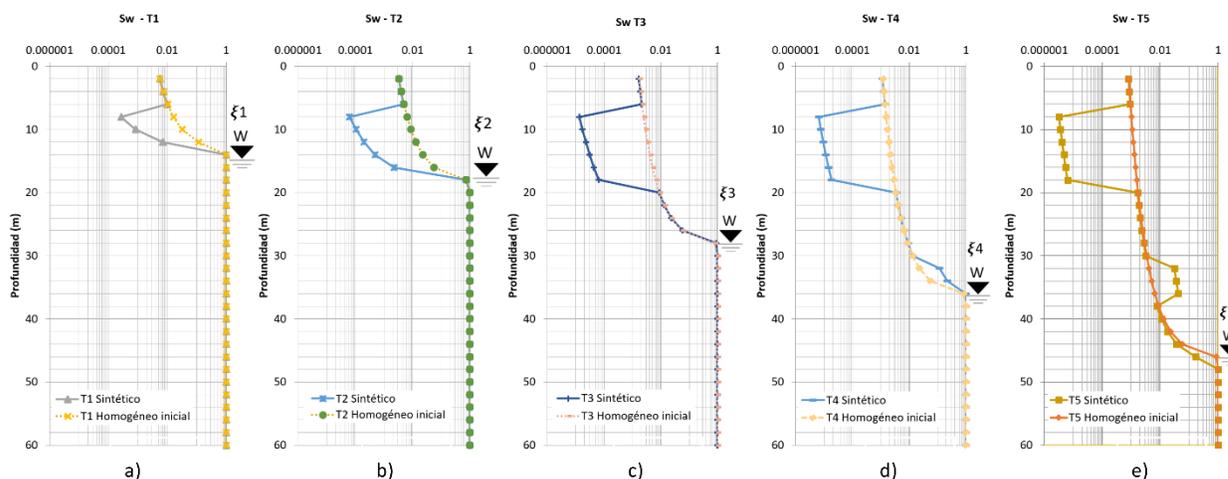


Figura 36. Perfil vertical de la función de saturación para la celda central del modelo 3D, para cada uno de los episodios de tiempos calculados (ξ_1 a ξ_5). Cada gráfica muestra el modelo sintético y homogéneo de referencia de saturación estimada para cada tiempo. Nótese, el comportamiento de la curva sintética al contacto con el nivel freático y al atravesar cada litología planteada en el modelo de la Figura 35.

i) **Sensibilidad de los datos eléctricos a la conductividad eléctrica** $\left(\frac{d\Phi_E}{d\sigma_o}\right)$

La Figura 37 muestra la sensibilidad de los datos eléctricos a la conductividad, recordando que los datos observados son una calicata eléctrica en superficie, esta figura muestra principalmente el aporte de la información del nivel de saturación. Como en los casos anteriores, la respuesta de la sensibilidad muestra un cambio de polaridad en la zona no saturada, y otro cambio de polaridad por debajo del nivel freático. La Figura 37a muestra la sensibilidad al nivel freático somero ubicado sobre la unidad más permeable y de conductividad más baja. En la primera capa muestra una sensibilidad débil y negativa que cambia a débil y positiva en la zona no saturada, asociada con el cambio requerido en la conductividad para reproducir el modelo real de conductividad. Por debajo del nivel freático la sensibilidad aumenta y también se observa un cambio de polaridad que coincide con la unidad de suelo franco limoso. En el caso de la Figura 37b el nivel freático se encuentra más profundo, la sensibilidad es más intensa en la zona no saturada y los cambios de polaridad parecen delinear las fronteras de las primeras capas del modelo, además, se marca ligeramente negativo debajo del nivel freático, esto debido a la profundidad de penetración y a la apertura eléctrica equiespaciada, del mismo modo, corta una unidad con una conductividad mayor (que la somera), por eso su intensidad también es menor. También es importante observar que cada decremento del nivel de saturación en cada episodio de tiempo (ξ_1 a ξ_5), generó un aumento en la sensibilidad en la zona drenada, enmascarando la sensibilidad en la zona saturada, este aumento se puede observar en la Figura 65 del anexo F.

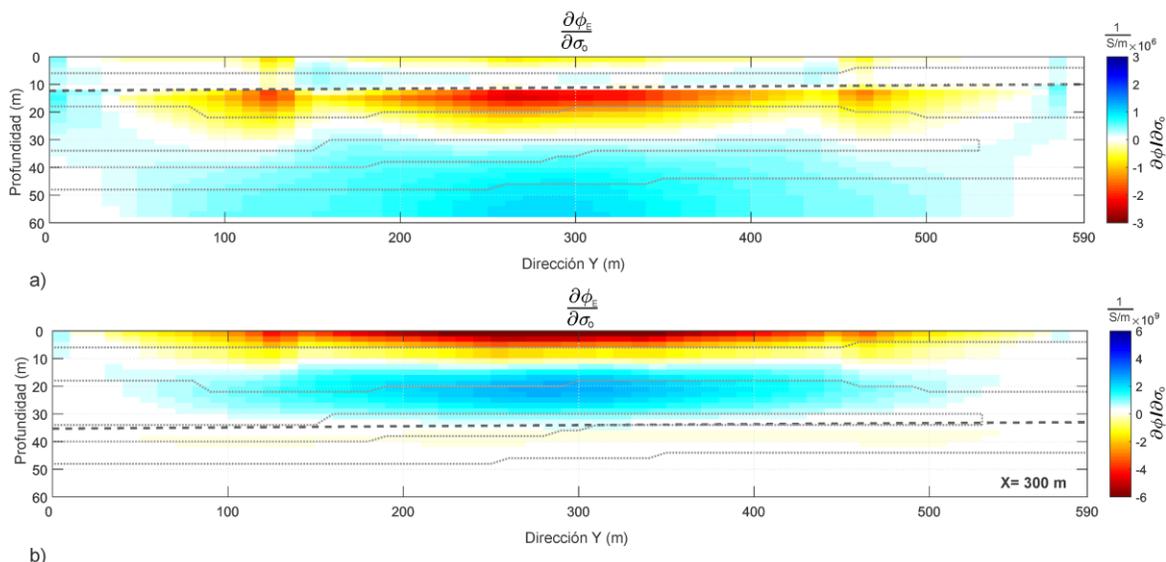


Figura 37. Derivada de la función objetivo de datos eléctricos con respecto a la conductividad eléctrica para los escenarios ξ_1 (somero) y ξ_4 (profundo).

ii) **Sensibilidad de los datos de pozo a la permeabilidad hidráulica $\left(\frac{d\Phi_H}{dk_s}\right)$**

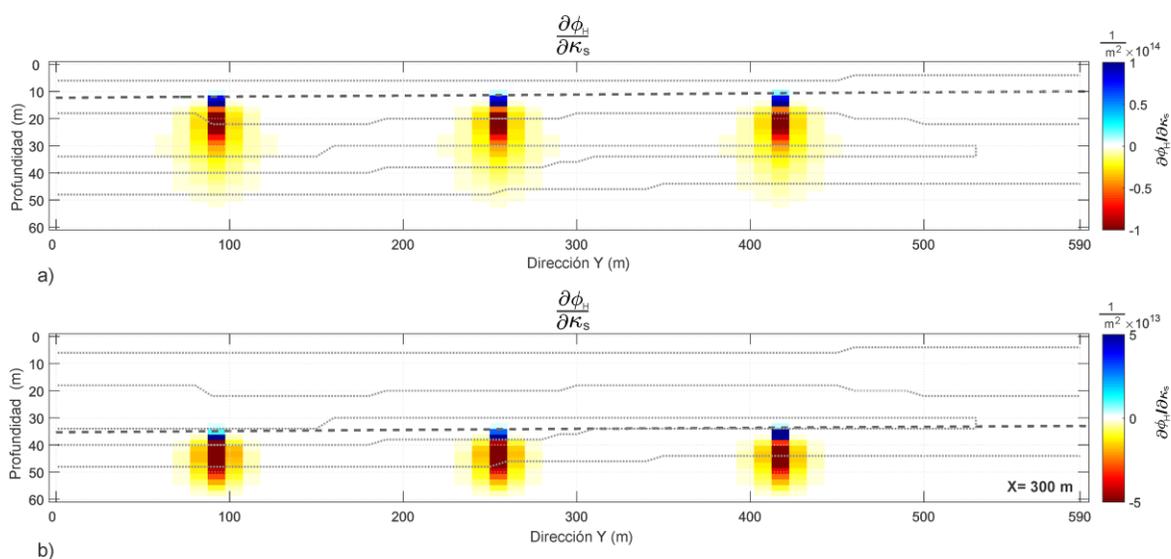


Figura 38. Derivada de la función objetivo de datos de piezómetro con respecto a la permeabilidad para los escenarios ξ_1 (somero) y ξ_4 (profundo).

La Figura 38 muestra las derivadas de la función objetivo de los datos de pozo respecto de la permeabilidad eléctrica para los escenarios ξ_1 y ξ_4 . Como era de esperarse, las sensibilidades solo se presentan en las cercanías del pozo en la zona saturada. En ambas predomina una polaridad negativa

debajo del pozo. Por lo que se infiere que la información de pozo resulta deficiente para un modelado fuera de la vertical del pozo.

iii) Sensibilidad de los datos eléctricos y de pozo a la permeabilidad hidráulica $\left(\frac{d\Phi_{AC}}{dk_s}\right)$

Los escenarios ξ_1 y ξ_4 para la sensibilidad completamente acoplada se presentan en la Figura 39. En este caso, podemos observar que la sensibilidad aportada por los datos eléctricos es considerablemente mayor que la de datos de piezómetro.

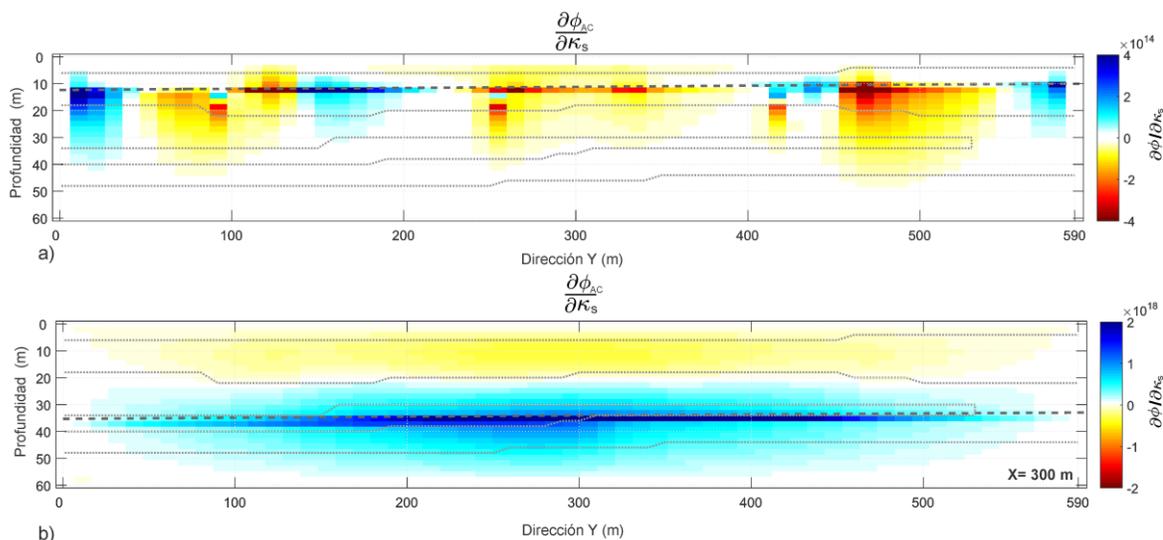


Figura 39. Derivada de la función objetivo de datos eléctricos y de piezómetro con respecto a la permeabilidad para los escenarios ξ_1 (somero) y ξ_4 (profundo).

En el escenario ξ_1 la sensibilidad es mayor en donde se espera que se localice el nivel freático, formando zonas positivas y negativas, esta variación se debe principalmente a la cercanía con los electrodos de superficie (Figura 39a). En el nivel ξ_4 , se delinea el nivel de saturación con una derivada positiva continua sobre la unidad que corta al nivel freático, por lo que podemos inferir que la magnitud de la sensibilidad depende también de la permeabilidad del medio que cruza (Figura 39b). En el modelo profundo, se observa un cambio de polaridad (cambio a valores positivos), a diferencia del modelo eléctrico, principalmente en la zona de contacto con el nivel freático, este cambio se asocia principalmente a los cambios de permeabilidad que simula el modelo sintético. Nótese también, que el efecto de los datos de los piezómetros disminuyó notablemente, tanto que a diferencia de la Figura 39a, no se observa claramente el efecto (respecto a la Figura 38). De este nivel más profundo también podemos observar que los datos eléctricos aportan sensibilidad a las capas que se esperan no saturadas (tonos amarillos a

una profundidad de 10 a 20 m aproximadamente). Por lo que podemos inferir que las derivadas acopladas, aportan la sensibilidad en la zona no saturada. Estos cambios se pueden seguir claramente para los cinco episodios de tiempo en las Figura 66 y Figura 67 del anexo F.

6.2.4 Caso 4: Estimaciones en diferentes episodios de tiempo para mejorar la identificación de parámetros

El monitoreo temporal de los niveles de saturación es una tarea común en la exploración y administración de acuíferos, ésta se realiza principalmente para el estudio de balance y disponibilidad de aguas subterráneas, sin embargo, las variaciones temporales del fluido en ocasiones impiden caracterizar el medio poroso de forma eficiente. En este estudio pretendemos utilizar las fluctuaciones del nivel freático como fuente adicional de información para determinar las propiedades intrínsecas del medio poroso utilizando información geofísica y geohidrológica de diferentes épocas. Utilizando la información del experimento previo, pretendemos establecer una relación entre las fluctuaciones del nivel freático y su interacción con la litología que cruza, asumiendo que ésta actúa como una fuente natural para enfocar la sensibilidad al nivel freático de los datos de pozo y eléctricos, permitiendo acumular la sensibilidad en cada estado de saturación.

Asumiendo que las propiedades eléctricas e hidráulicas no varían en el tiempo, podemos sumar las sensibilidades para los 5 episodios de tiempo previos (simulando la recolección de datos en cinco épocas diferentes) y podemos observar lo siguiente: a) En la suma de sensibilidad de los cinco episodios de tiempo a la conductividad eléctrica (Figura 40a) predominan dos zonas, la superior de valores negativos cerca de la superficie y debajo valores positivos que llegan hasta el último nivel de saturación ξ_5 , sin influencia evidente de los niveles de saturación (nivel freático) en la zona superior, como se esperaba. b) Información vertical de las variaciones de presión de los datos hidráulicos (Figura 40b): los datos de pozo solo detectan los valores de permeabilidad en la zona próxima al pozo y no manifiestan resolución lateral entre ellos; c) La Figura 40c muestra la información acumulada de la sensibilidad de los datos eléctricos al cruce de cada unidad litológica (Figura 40a), sumada a la sensibilidad de los datos de pozo (Figura 40b). En este caso como era de esperarse no solo obtenemos información del nivel freático (en cada derivada por cada episodio de tiempo), además, obtenemos información de las unidades “litológicas” atravesadas por este, en los diferentes episodios de tiempo simulados. Lo que indica que en la etapa de inversión esta inversión, permitirá identificar la permeabilidad intrínseca del medio, es decir k_s .

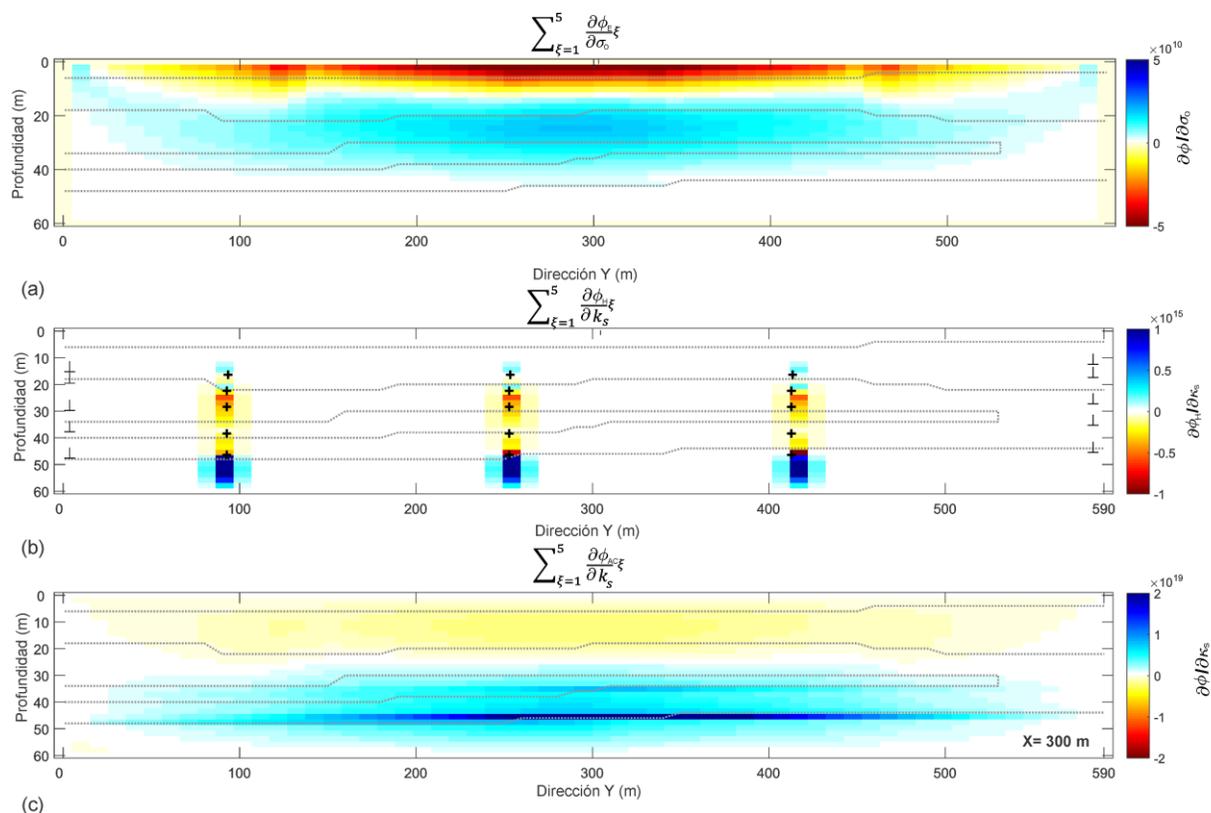


Figura 40. Ilustración de las sensibilidades agregadas para los cinco episodios de tiempo presentados en la Tabla 9. (a) presenta la suma de las sensibilidades de los datos eléctricos a la conductividad eléctrica. (b) representa la suma de la sensibilidad de los datos de pozo a la permeabilidad hidráulica. (c) representa la suma de la sensibilidad completamente acoplada de los datos eléctricos e hidráulicos a la permeabilidad hidráulica.

6.3 Conclusiones de experimentos sintéticos

Estos experimentos nos llevan a un conocimiento más claro del impacto que tiene la litología y su grado de retención de agua en las mediciones de conductividad eléctrica en un medio variablemente saturado y sujeto a estreses hídricos, ya que es un factor incluido pocas veces en la exploración geofísica. También observamos que la sensibilidad eléctrica es independiente de los datos de pozos, pero es dependiente del cambio de saturación, por lo que implícitamente contiene información de la saturación. Por otro lado, las sensibilidades del dato de pozo solo asimilan heterogeneidades en la proximidad y no tienen resolución lateral, siendo solo adecuados para un perfil vertical. En cambio, si utilizamos ambos tipos de información y los asimilamos en la metodología propuesta podemos obtener sensibilidad lateral en un caso simple y si tenemos registros temporales de lecturas eléctricas e hidráulicas podemos tener también resolución vertical en lecturas apiladas de sensibilidad.

Capítulo 7. Formulación del problema inverso acoplado por el campo de presión.

En este punto podemos revisar el camino recorrido y apuntar hacia la identificación de los parámetros de interés para un medio acuífero. Basados en la hipótesis de que ambos procesos (eléctrico e hidráulico) están influenciados por el contenido de fluido y que éste puede ser representado por una función de saturación; resolvimos las ecuaciones fundamentales para obtener los campos de presión y de potencial eléctrico; a través de la formulación de estado adjunto obtuvimos el gradiente de la función objetivo (desajuste). El próximo paso es, basados en un método de búsqueda por gradientes, resolver e identificar los parámetros del medio en el problema inverso. Los pasos previos son parte de la metodología propuesta. Finalmente, después de obtener los parámetros de interés podríamos indagar en cómo otros parámetros como la porosidad, el factor de cementación o la tortuosidad podrían influir en los procesos de flujo. La Figura 41 resume la metodología propuesta en este trabajo.

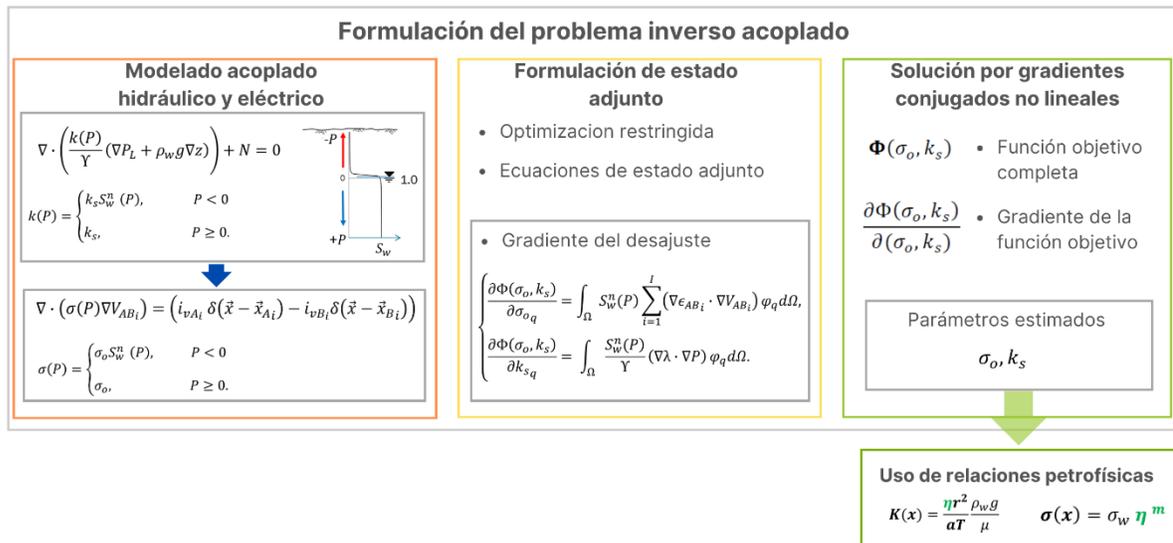


Figura 41. Metodología para la identificación de los parámetros de la permeabilidad hidráulica y la conductividad y el posible seguimiento de otros factores del medio poroso a través de relaciones petrofísicas.

7.1 Introducción al problema inverso

Debido al interés de caracterizar un medio acuífero buscamos, a partir de modelos matemáticos y numéricos, reproducir y predecir su comportamiento. Estos modelos están limitados a los datos que se pueden conocer a través de observaciones directas (mediciones de presión en pozos) e indirectas

(resistividad aparente); entonces, a través de las ecuaciones fundamentales y algoritmos de optimización, buscamos el modelo que represente de mejor manera nuestros datos observados y nuestra comprensión de la realidad.

En la etapa de inversión de datos buscamos la identificación de la permeabilidad hidráulica saturada y la conductividad eléctrica saturada, es decir, los parámetros del modelo que reproduzcan mejor nuestros datos observados en campo, en este caso de manera conjunta o acoplada por el campo de presión.

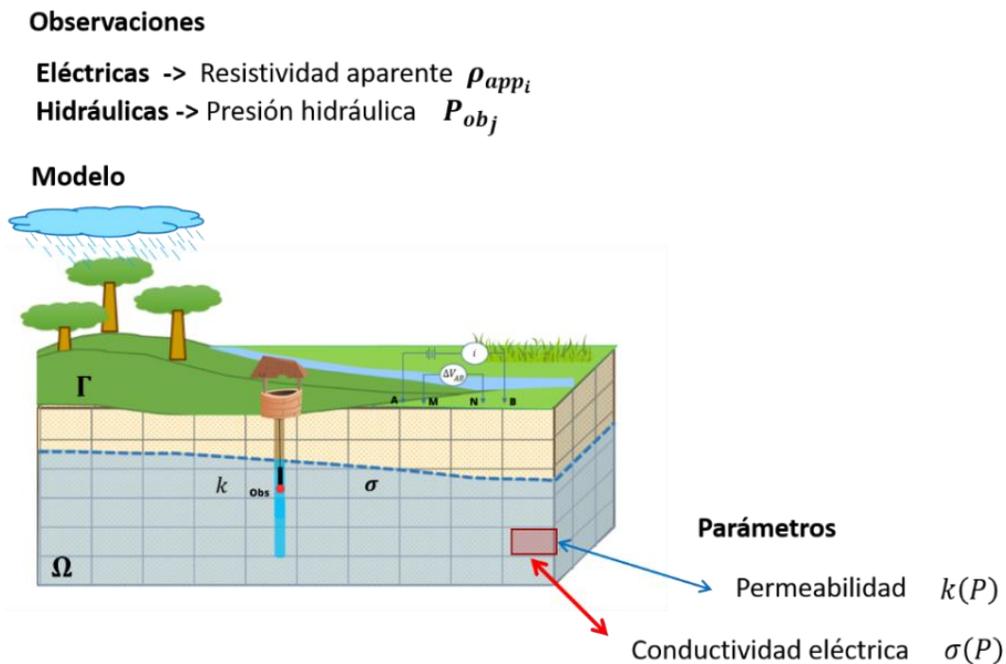


Figura 42. Esquema de modelado inverso y parametrización del medio.

Es de esperar que, la inversión conjunta de datos eléctricos de corriente directa y de información de pozos permita incrementar el conocimiento y la identificación de la distribución de las propiedades hidráulicas del medio. Dado que ya contamos con las relaciones matemáticas correspondientes, recurrimos a la teoría de optimización matemática, en donde a partir de técnicas numéricas buscamos obtener el modelo que mejor reproduzca los datos observados; en consecuencia, requerimos un criterio para obtener ese modelo. En nuestro caso este criterio implica: buscar simultáneamente el conjunto de conductividades eléctricas y permeabilidades hidráulicas (parámetros) que bajo un mismo campo de presión, ajusten mejor a las observaciones de resistividad aparente y presión hidráulica (datos).

7.2 Formulación de problema inverso

Aunque el objetivo principal es ajustar la respuesta de nuestro modelo a los datos observados, es necesario asegurar que la distribución de la conductividad eléctrica y la permeabilidad sea factible bajo perspectivas físicas, geológicas, y geohidrológicas. Ya que, como todo problema de optimización, los datos siempre son insuficientes para llegar a un modelo único.

En el capítulo cuatro planteamos una parte esencial de la función objetivo dada por la sensibilidad de los datos a los parámetros (desajuste, ecuación (44)), en lo próximo complementaremos esta función con otro tipo de información que nos permita llegar a un modelo mejor constreñido (regularización). Finalmente, para llevar a cabo la búsqueda recurrimos al desarrollo de un algoritmo basado en el método de gradientes conjugados no lineales.

Función de regularización 1; (suavidad (ϕ_D))

Este regularizador está formado por la norma cuadrática del operador de primera derivada que actúa sobre los parámetros del modelo (permeabilidad y conductividad hidráulica). El objetivo de este término es que ante la falta de información geoelectrónica o hidráulica, la variación de los parámetros del modelo sea suave. Este operador se aplica a ambos parámetros considerando un factor de ponderación para cada uno:

$$\phi_D = \|\chi_e D_e \sigma_o\|^2 + \|\chi_h D_h k_s\|^2, \quad (56)$$

donde χ_e y χ_h son los factores que regulan el grado suavidad deseado y aplica al operador de primera derivada (D) en todas las direcciones.

Función de regularización 2; (información a priori (ϕ_{APR}))

Para asimilar el conocimiento el previo en una zona de estudio o restringir la solución a un modelo cercano a las expectativas del modelador, se puede agregar la información en un modelo a priori. El término agregado, minimiza la diferencia entre el modelo calculado y el modelo a priori, en este caso pesado por la covarianza o estadística del conocimiento previo.

$$\phi_{APR} = \left\| \left(\sigma_o - \sigma_{o_{ap}} \right) \right\|_{S_{e_{ap}}}^2 + \left\| \left(k_s - k_{s_{ap}} \right) \right\|_{S_{H_{ap}}}^2, \quad (57)$$

σ_o y k_s son los modelos actualizados en la inversión, y $\sigma_{o_{ap}}$ es el conocimiento previo de la conductividad eléctrica pesada por la desviación estándar de esta información $S_{e_{ap}}$, de manera análoga, y $k_{s_{ap}}$ es el conocimiento previo de la permeabilidad hidráulica, pesada por la desviación estándar del modelo a priori $S_{H_{ap}}$.

7.2.1 Función objetivo completa

Tomando en cuenta el desajuste de ambos tipos de datos, proporcionado por la ecuación (44) añadimos los términos de regularización que determina la suavidad (56) o rugosidad del modelo y finalmente la inclusión de información a priori (57).

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma_o, k_s) = & \underbrace{\left\| \frac{\rho_{ob_i} - \rho_{cal_i}(\sigma_o)}{S_{e_i}} \right\|^2}_{\text{Desajuste}} + \underbrace{\|\chi_e D_e \sigma_o\|^2}_{\text{Suavidad}} + \underbrace{\left\| \frac{(\sigma_o - \sigma_{o_{ap}})}{S_{e_{ap}}} \right\|^2}_{\text{A priori}} \\ & + \underbrace{\left\| \frac{P_{ob_j} - P_{cal_j}(k_s)}{S_{H_j}} \right\|^2}_{\text{Desajuste}} + \underbrace{\|\chi_h D_h k_s\|^2}_{\text{Suavidad}} + \underbrace{\left\| \frac{(k_s - k_{s_{ap}})}{S_{H_{ap}}} \right\|^2}_{\text{A priori}}. \end{aligned} \quad (58)$$

Para encontrar el mínimo de la expresión (58) utilizamos el método de gradientes conjugados no lineales, como se presenta en la siguiente sección.

7.3 Solución numérica a través de gradientes conjugados no lineales

El método de gradientes conjugados no lineales es un método iterativo propuesto por Fletcher & Reeves (1964), el cual requiere de la evaluación de la función objetivo (58) y su gradiente dado por la siguiente expresión (59):

$$\frac{\partial \Phi(\sigma_o, k_s)}{\partial (\sigma_o, k_s)} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_E(\sigma_o, k_s)}{\partial \sigma_o} + 2\chi_e^2 D_e D_e \sigma_o - \frac{2}{s_{eap}^2} (\sigma_o - \sigma_{oap}), \\ + \\ \frac{\partial \Phi_{AC}(\sigma_o, k_s)}{\partial k_s} + 2\chi_h^2 D_h D_h k_s - \frac{2}{s_{hap}^2} (k_s - k_{sap}). \end{cases} \quad (59)$$

En la resolución numérica de los gradientes conjugados, los seis términos de la función objetivo completa y su gradiente son simplemente agregados, por lo que son tratados como módulos, de tal manera que pueden funcionar de forma independiente (sólo eléctrica o sólo hidráulica), así como aplicarles suavidad y utilizar, o no, la información a priori.

El primer término y el cuarto corresponden con el gradiente de la función objetivo, asociada al ajuste de los datos eléctricos e hidráulicos, respectivamente, los cuales son obtenidos a partir de la discretización de la ecuación(55) (sensibilidad o gradiente del desajuste). El segundo y quinto término son calculados a partir del operador de derivada aplicado directamente al operador de suavidad. El tercer y sexto término son la derivada de la diferencia del modelo a priori menos el obtenido en cada iteración.

7.3.1 Método de gradientes conjugados no lineales

En esta sección expondremos brevemente el funcionamiento de los gradientes conjugados, así como los elementos principales para su cálculo.

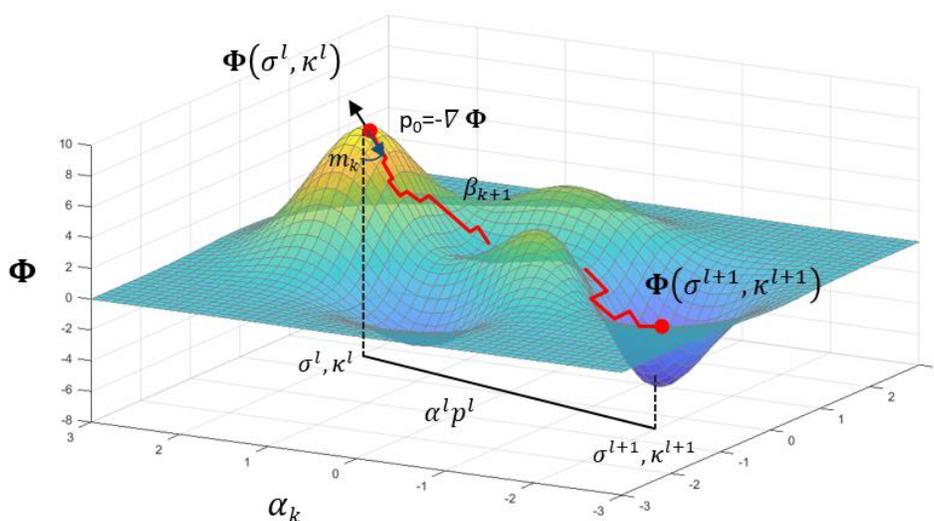


Figura 43. Esquema de los elementos para el cálculo de un valor mínimo de la función objetivo Φ siguiendo direcciones locales a partir de su gradiente.

Los gradientes conjugados forman parte de la familia de los métodos de descenso, que buscan obtener el menor valor de una función objetivo en pasos orientados por su gradiente. Como característica principal, el método de gradientes conjugados sigue direcciones conjugadas (ortogonales) para garantizar que no desciendan repetitivamente por una sola dirección como lo muestra la Figura 43.

En lo siguiente, mostraremos los elementos principales para llegar a un mínimo siguiendo la metodología de Nocedal & Wright, (2006) aplicada al modelado conjunto de datos de piezómetro y datos de resistividad aparente, guiándonos con el algoritmo de la Figura 44. El primer paso consiste en evaluar la función objetivo dada por la ecuación (58) y obtener un primer gradiente usando (59) a partir de un modelo inicial (comúnmente homogéneo) de conductividades eléctricas (σ^l) y permeabilidades (k^l). Después, siguiendo la metodología, cada actualización de conductividad y permeabilidad estará dada por:

$$\sigma^{l+1}(\alpha^l) = \sigma^l + \alpha^l p_\sigma^l, \quad (60)$$

$$k^{l+1}(\alpha^l) = k^l + \alpha^l p_k^l, \quad (61)$$

donde α^l es el tamaño de paso (común para ambas propiedades) y p_σ^l es la dirección de búsqueda del caso eléctrico y p_k^l es la dirección de búsqueda del modelo hidráulico.

Dirección de búsqueda global

Dado que vamos a invertir de forma conjunta datos eléctricos e hidráulicos, el tamaño de paso (α^l) es común en ambos, así como una dirección de búsqueda global construida a partir de las direcciones de búsqueda eléctrica e hidráulica ($p^l(p_\sigma^l, p_k^l)$). A diferencia de otros métodos de descenso, gradientes conjugados utiliza una secuencia de direcciones conjugadas de búsqueda (p^l), en este caso, la primera dirección de búsqueda es simplemente el negativo del gradiente de la función objetivo para garantizar que comience con un descenso ($p^0 = -\nabla\Phi$). Para asegurar la ortogonalidad de cada nueva dirección de búsqueda, ésta es construida a partir de la conjugación de los residuales y está dado por la siguiente expresión:

$$p^{l+1} = -\nabla\Phi(\sigma^{l+1}, k^{l+1}) + \beta^{l+1} p^l, \quad (62)$$

Donde β^{l+1} (Fletcher & Reeves, 1964) es dado por:

$$\beta^{l+1} = \frac{\|\nabla\Phi(\sigma^{l+1}, k^{l+1})\|}{\|\nabla\Phi(\sigma^l, k^l)\|}. \quad (63)$$

Tamaño de paso

Para aproximarnos a un mínimo en esta dirección de búsqueda, se identifica un tamaño de paso α . En un problema lineal este tamaño de paso tiene una dimensión calculable analíticamente. En problemas no lineales se parte de un tamaño de paso de prueba, comúnmente siguiendo alguna de las siguientes aproximaciones:

$$\alpha_{prueba} = \alpha^{l-1} \frac{\nabla\Phi(\sigma^{l+1}, k^{l+1})^T p^{l-1}}{\nabla\Phi(\sigma^l, k^l)^T p^l} \quad \text{ó} \quad (64)$$

$$\alpha_{prueba} = -\frac{2(\Phi(\sigma^l, k^l) - \Phi(\sigma^{l-1}, k^{l-1}))}{m_{l-1}}. \quad (65)$$

El paso debe ser eficiente sin ser demasiado largo, como para pasarnos del mínimo; ya que, en caso contrario, nos aproximaremos lentamente a la solución. Para calcular el tamaño de paso en las iteraciones posteriores recurrimos a las condiciones de Wolfe (condiciones de crecimiento suficiente y pendiente) garantizando que se tienen las condiciones suficientes para obtener un mínimo (Nocedal & Wright, 2006):

$$\Phi(\alpha^l) \leq \Phi(\alpha^{l-1}) + c1\alpha^l \nabla\Phi(\sigma^{l-1}, k^{l-1})^T p^{l-1}, \quad (66)$$

donde $c1 = 10^{-4}$ (Nocedal & Wright, 2006). Existen diferentes técnicas para la selección de la longitud de paso. Para determinar si se ha localizado una longitud de paso adecuada; en nuestro caso, recurrimos a la interpolación de valores conocidos de la función objetivo y de su derivada (gradiente).

El objetivo es que satisfaga la condición de suficiencia dada por la ecuación (66) sin ser demasiado pequeño (menos que su predecesor) de lo contrario, recurrimos a la interpolación sabiendo que el intervalo $[0, \alpha^0]$ contiene longitudes de paso aceptables. Una de las opciones es recurrir a una interpolación cuadrática dada por:

$$\alpha^l = -\frac{\nabla\Phi(\sigma^l, \kappa^l)^T p^l \alpha_{prueba}^2}{2[\Phi(\alpha_{prueba}) - \Phi(\sigma^l, k^l) - \nabla\Phi(\sigma^l, \kappa^l)^T p^l \alpha_{prueba}]} \quad (67)$$

La Figura 44 muestra de forma simple la implementación del algoritmo de gradientes conjugados:

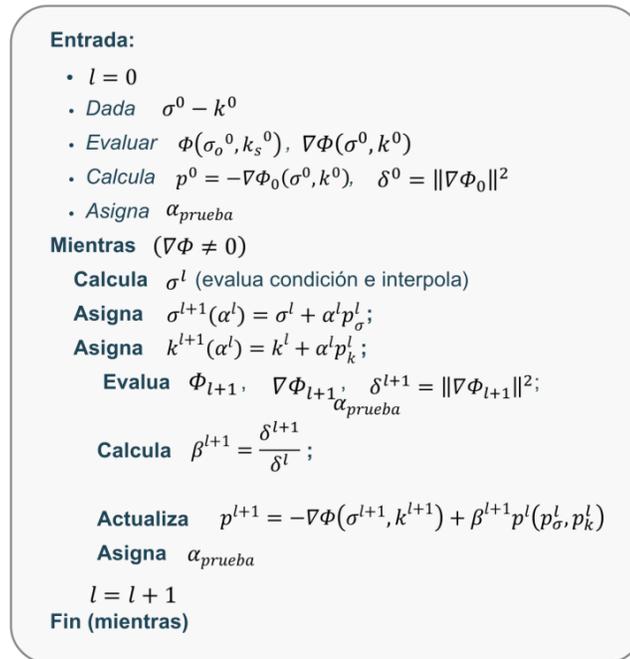


Figura 44. Algoritmo de gradientes conjugados no lineales implementado para la identificación de la conductividad eléctrica y la permeabilidad hidráulica. La evolución del desajuste y las derivadas se calculan con los parámetros en escala logarítmica (Newman & Alumbaugh, 2000) dentro del algoritmo.

El RMS de los residuales entre datos calculados y observados se calculó con la siguiente relación donde I y J son el número de observaciones:

$$RMS_e = \sqrt{\sum_{i=1}^I \left[\left(\frac{\rho_{obi} - \rho_{cali}}{s_{e_i}} \right)^2 \right] / I} \quad (68)$$

$$RMS_h = \sqrt{\sum_{j=1}^J \left[\left(\frac{P_{obj} - P_{calj}}{s_{H_j}} \right)^2 \right] / J}$$

7.4 Pruebas preliminares

El algoritmo de gradientes conjugados se programó por bloques, lo que permitió realizar pruebas de eficiencia. Las primeras se diseñaron para recuperar un modelo a priori, y a aplicar el operador de suavidad con diferentes factores de peso, con estas pruebas pretendemos probar el funcionamiento del

algoritmo de gradientes conjugados ante a) recuperar un modelo de prueba y b) aplicarle suavidad. La primera prueba de eficiencia se realizó definiendo la función objetivo como $\phi = \phi_{APR}$, la cual involucra la minimización de la diferencia del modelo con respecto a un modelo a priori (Figura 45a).

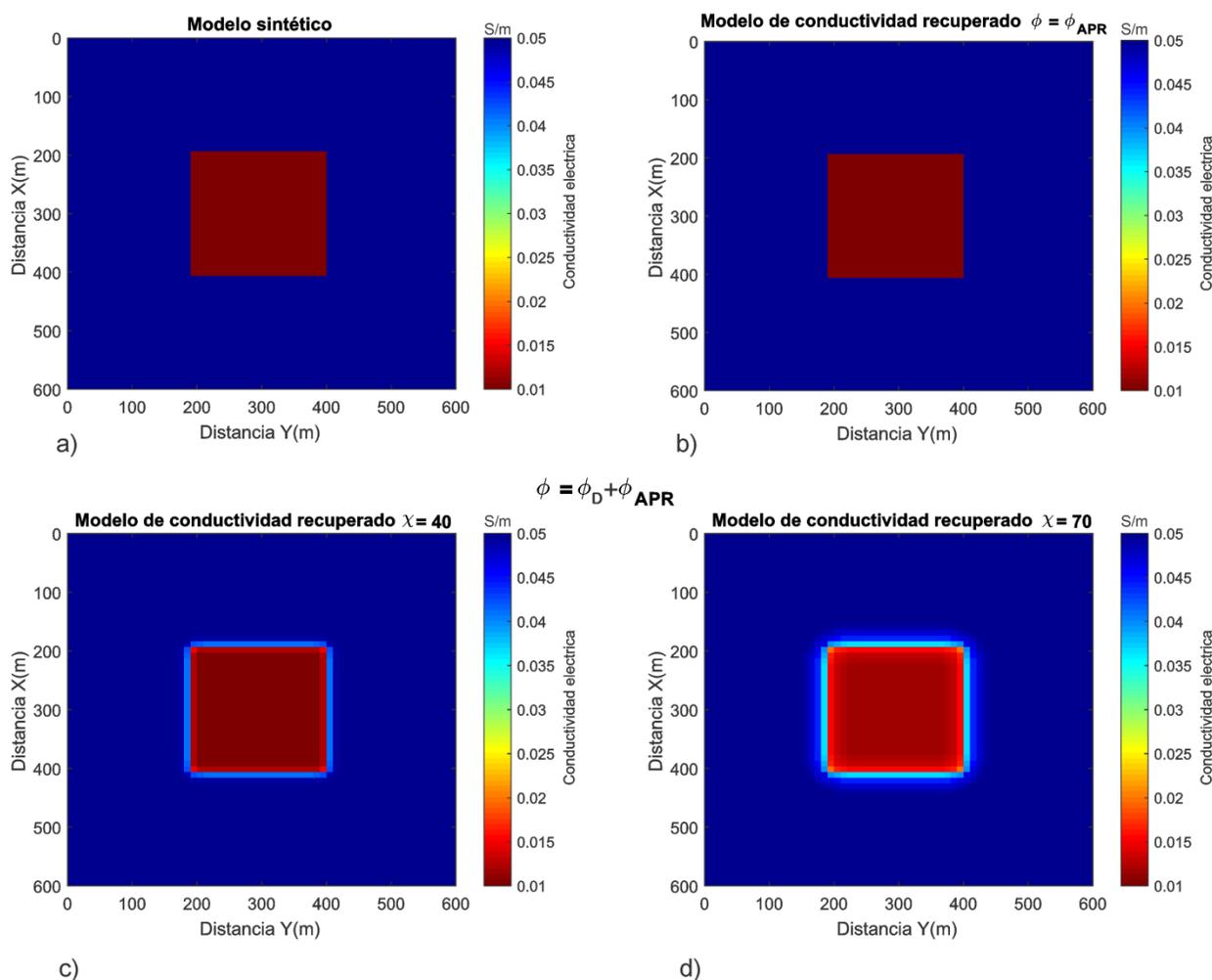


Figura 45. Ilustración de las pruebas para recuperar un modelo de conductividad. Fila superior, primera etapa: a) modelo a priori, b) modelo recuperado después de 1 iteración. Fila inferior, 2da etapa: (c) modelos recuperados con suavidades de $\chi = 40$ y (d) $\chi = 70$ ambos después de 50 iteraciones.

Este proceso se inició con un modelo homogéneo inicial donde $\sigma_0 = 0.05$ S/m. En este ejemplo el modelo recuperado después de dos iteraciones, efectivamente resulto igual al modelo a priori Figura 45b. En una segunda etapa se activó el modulo del operador de suavidad definiendo la función objetivo como: $\phi = \phi_D + \phi_{APR}$ y se realizaron pruebas variando el valor de χ para conocer cómo actúa el operador de la suavidad sobre el modelo actualizado, Figura 45c y d.

7.5 Experimentos de modelado inverso

En esta sección realizamos pruebas del funcionamiento del algoritmo de inversión considerando la función objetivo completa como $\phi = \phi_{AC} + \phi_D + \phi_{APR}$. Siguiendo el esquema de pruebas de la sensibilidad (Capítulo 6), se plantea realizar experimentos sintéticos simulando un acuífero tipo libre en un medio poroso homogéneo y en uno heterogéneo. Ambos casos se recuperan a partir de las derivadas semi-acopladas (eléctrica) y completamente acoplada hidráulica (Tabla 3). Cabe indicar que los modelos presentados se obtienen de forma conjunta. En estos experimentos, el criterio de paro consistió en un número máximo de iteraciones o bien por una tolerancia del RMS de residuales ≤ 10 . Los parámetros de suavidad (χ_e y χ_h) se obtuvieron a partir de pruebas con valores en un rango de 1 a 100, dependiendo del problema y se eligió el que producía un mejor equilibrio entre ajuste y suavidad.

7.5.1 Caso 1: Recuperación de la conductividad eléctrica y la permeabilidad hidráulica en un medio homogéneo

El objetivo de este experimento se centra en evaluar la eficiencia del algoritmo de inversión conjunta, así como la evaluación correcta de las derivadas de la función objetivo, y a su vez, en recuperar la conductividad eléctrica y permeabilidad hidráulica saturada de un medio homogéneo.

Tabla 10. Propiedades eléctricas, hidráulicas y parámetros de suelo usadas en el modelo sintético (7.5.1) e inicial (los parámetros de suelo se tomaron de Carsel & Parrish (1988)).

Modelo	Conductividad eléctrica saturada (σ_0) S/m)	Permeabilidad saturada (k_s) (m^2)	Parámetros de suelo	
			α_w (KPa)	β_w
Sintético	0.01	10^{-13}	3.633	1.23
Inicial	0.05	10^{-14}	5.163	1.31

La diferencia de presión hidráulica se generó con dos niveles de saturación $W_1 = 8.5$ m y $W_2 = 5.5$ m (Figura 46). Los parámetros de suelo empleados para el modelo sintético y el modelo homogéneo inicial se presentan en la Tabla 10. Los datos eléctricos sintéticos se obtuvieron utilizando 31 arreglos tetra electródicos, cada uno con 9 aperturas de electrodos AB de 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240 y 260 metros, acumulando un total de 279 observaciones. Para los datos hidráulicos se propusieron 8 sitios de

observación de presión hidráulica. A los datos eléctricos se les sumo un 5% ruido aleatorio gaussiano y a los datos hidráulicos un 0.5%.

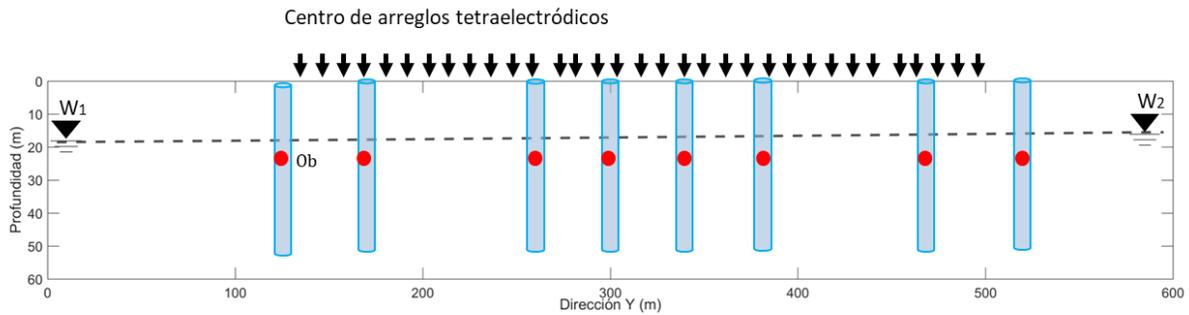


Figura 46. Diagrama esquemático de la sección transversal del modelo de prueba homogéneo. Las flechas negras muestran los centros de los arreglos tetraelectrónicos y los puntos rojos los sitios de observación hidráulica.

i. Modelado inverso eléctrico

En este apartado, mostramos el modelo de conductividad eléctrica saturada (σ_0), recuperado a partir del proceso de inversión. El medio homogéneo sintético es de 0.05 S/m (equivalente a $\text{Log}_{10}\sigma_0 = -2$ S/m).

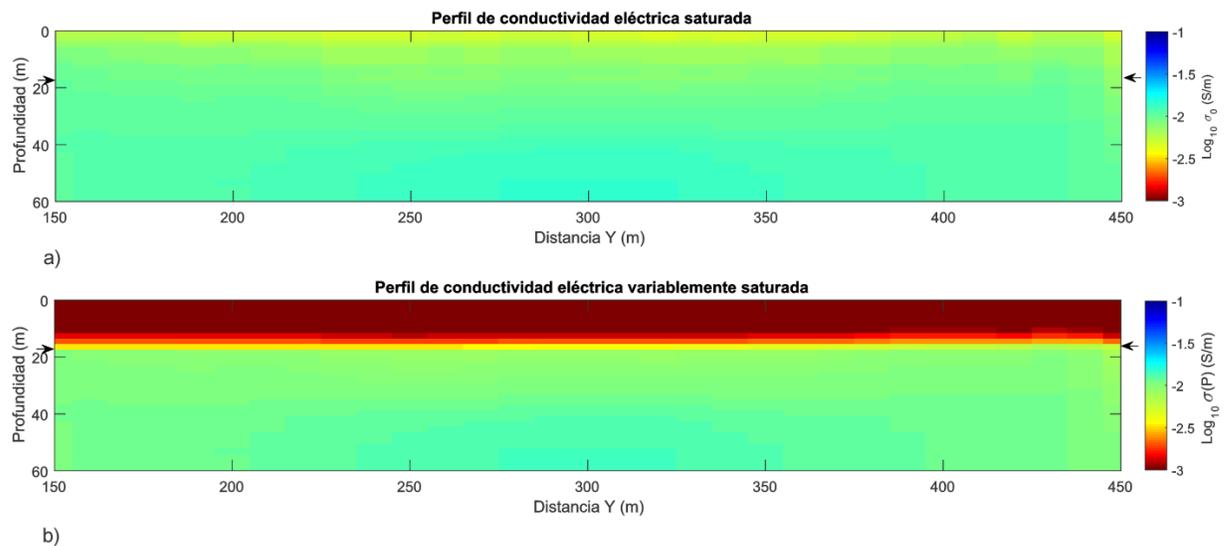


Figura 47. a) Modelo de conductividad eléctrica saturada (σ_0) recuperado después de 160 iteraciones. b) Modelo de conductividad eléctrica variablemente saturada ($\sigma(P)$) dada por la expresión (8) y obtenida a partir del modelo recuperado (a) y el modelo de saturación S_w . Las flechas en los extremos señalan el nivel de saturación del modelo sintético. Nótese, que el modelo se presenta en la horizontal de 150 a 450 m, en donde se localizan los centros de los arreglos (tipo Schlumberger).

La Figura 47a presenta el modelo recuperado de conductividad eléctrica saturada utilizando la derivada de la función objetivo semi-acoplada, en el cual se utiliza la información del nivel de saturación propuesto en las fronteras (modelo hidráulico).

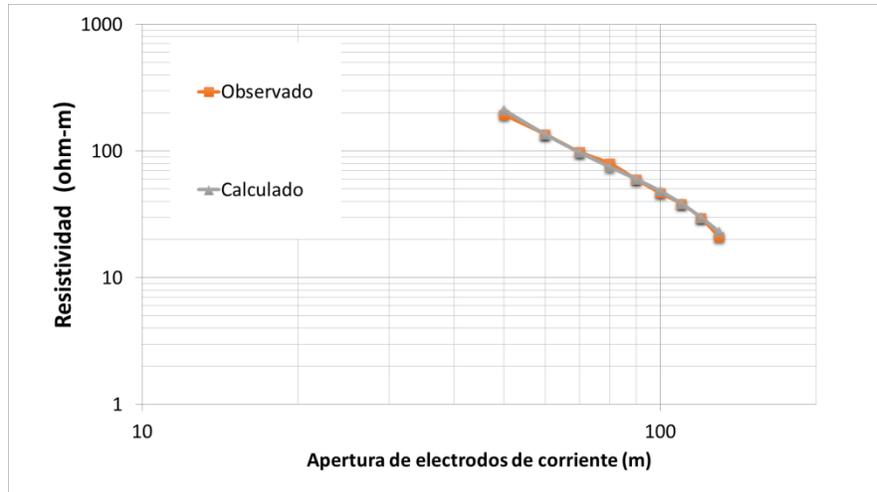


Figura 48. Ejemplo del ajuste de los datos observados y calculados de un sondeo central.

Con esta conductividad (σ_0) y el modelo de saturación (S_w) obtenido por la hidráulica, es fácil restaurar el modelo de conductividad eléctrica que generalmente se obtiene en el modelado geoelectrico común (ver Figura 47b). Ya que nuestro modelo es homogéneo, se eligió el sondeo eléctrico vertical central (Figura 46) para representar el ajuste entre los datos de resistividad observados (ρ_{app_i}) y calculados (ρ_{cal_i}) (Figura 48). La Figura 49 muestra la gráfica de residuales, ésta indica la evolución del ajuste de los datos en cada iteración.

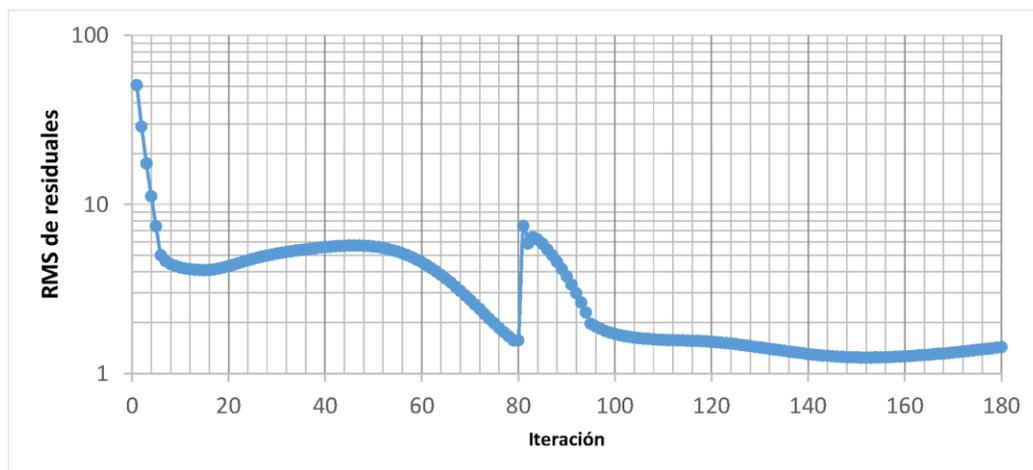


Figura 49. RMS de residuales de los datos eléctricos para 180 iteraciones, alcanzando valor de 1.43, nótese, que el algoritmo de gradientes conjugados se reinició a las 80 iteraciones para mejorar el ajuste.

ii. Modelado inverso hidráulico conjunto

La Figura 50 muestra el modelo hidráulico recuperado con una inversión conjunta. Debido a que, en un medio completamente homogéneo el nivel de saturación es altamente dependiente del nivel de las fronteras impuestas (y no de la permeabilidad del medio) y por la baja cantidad de datos disponibles aplicamos un mayor peso al término ϕ_{APR} de la función objetivo empleando el modelo sintético, como modelo a priori.

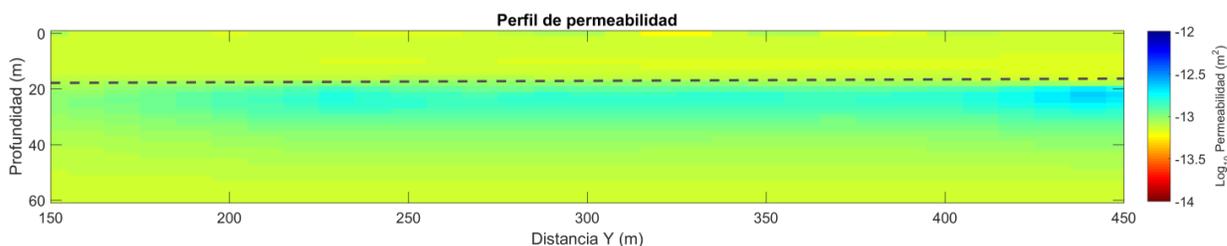


Figura 50. Modelo hidráulico recuperado con el ajuste de datos hidráulicos, la línea punteada muestra el nivel de saturación. Nótese, que el valor objetivo (sintético) se alcanzó principalmente en las cercanías de los pozos de observación propuestos.

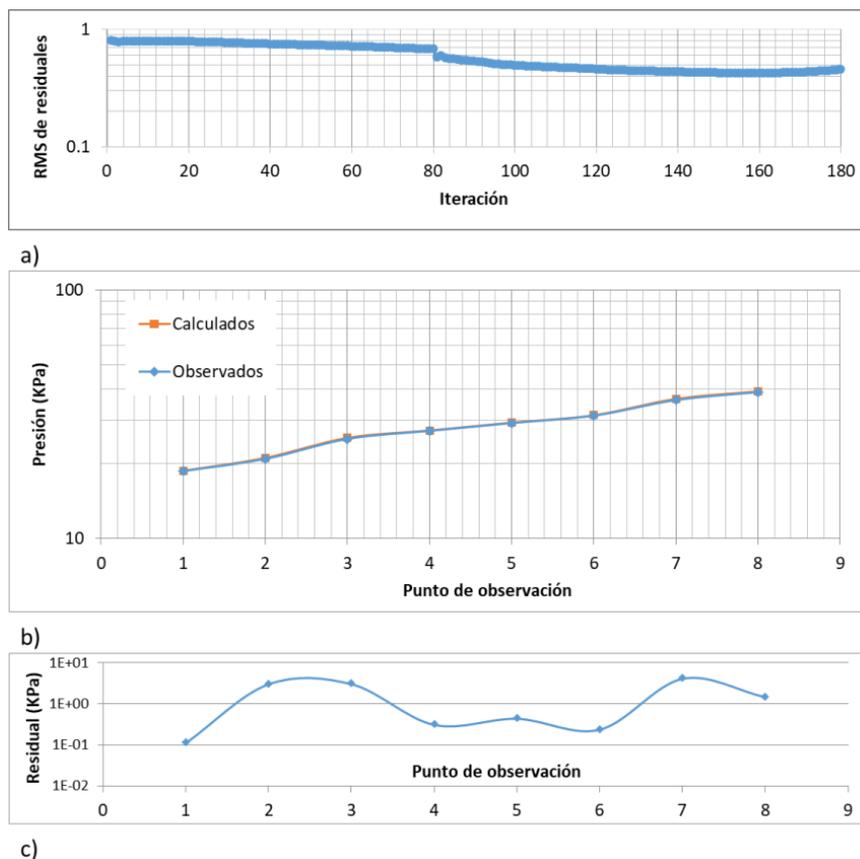


Figura 51. RMS de residuales hidráulicos para 180 iteraciones (a). Comparativo de los datos calculados y observados del modelo de la iteración 180 (ver Figura 50), (b). Valor del residual para cada dato hidráulico (c).

Como era de esperarse, un valor de permeabilidad cercano al hipotético, se dio principalmente en las zonas aledañas a las observaciones hidráulicas, y se resolvió principalmente por debajo del nivel freático. La Figura 51a muestra el RMS de los residuales del ajuste de los datos de presión, como se puede observar todos son menores a 1, garantizando un buen ajuste. La Figura 51b muestra el ajuste entre la presión observada P_{obj} y la presión calculada en el modelo inverso $P(x_j)$ para la iteración 180, en donde se observa que el ajuste de la presión en cada pozo está por debajo del umbral propuesto (Figura 51c).

Para evaluar la evolución de ambos tipos de modelos en la inversión conjunta, se realizó una gráfica de los valores de cada uno de los componentes de la función objetivo tanto para los datos eléctricos e hidráulicos (Figura 52). Como lo anticipábamos, en el caso hidráulico el modelo a priori $k_{s_{ap}}$ tiene el mayor el valor más alto de las seis componentes (para este modelo tiene un peso de 0.2) esto genera mayor estabilidad en la inversión. La suma de las seis componentes denotada como función objetivo presenta el comportamiento esperado de descenso en todas sus componentes al aumentar el número de iteraciones.

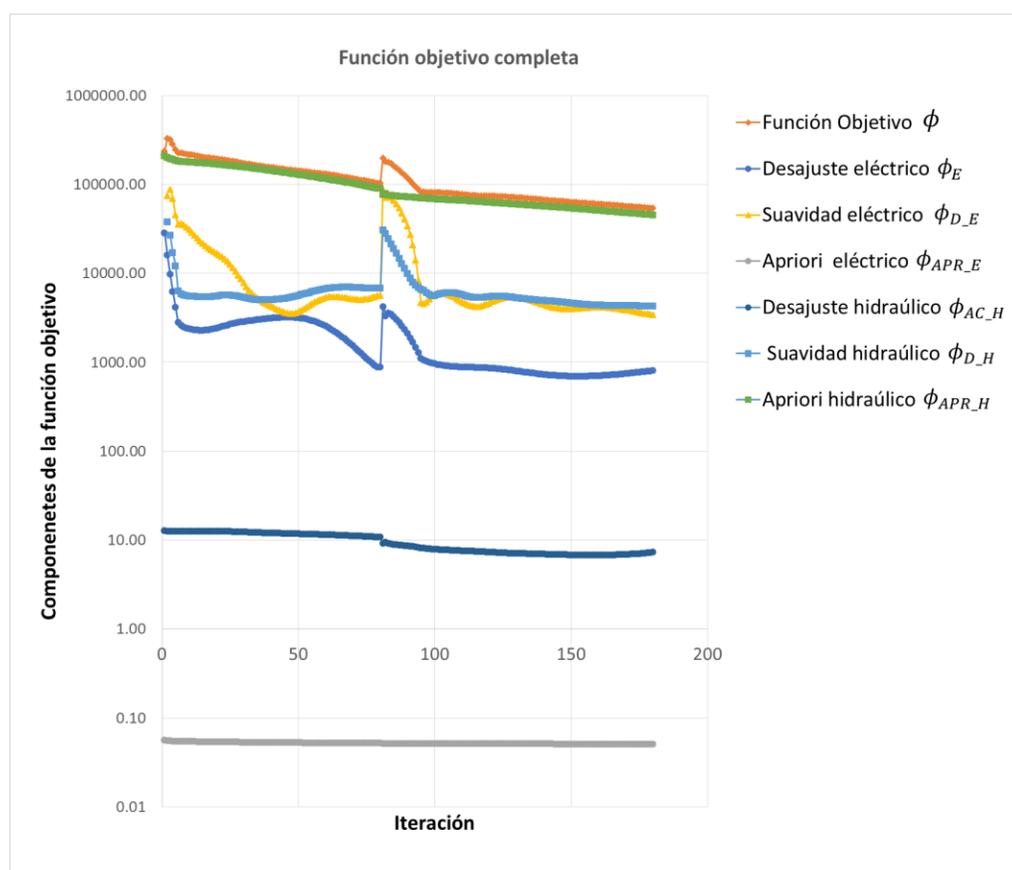


Figura 52. Evolución de cada uno de los elementos de la función objetivo completa (desajuste, suavidad y modelo a priori) para cada tipo de dato (eléctrico e hidráulico). Nótese que el salto en la iteración 80 se debió a un reinicio del algoritmo para mejorar el ajuste.

De este experimento podemos concluir, que el algoritmo de inversión conjunta está funcionando correctamente, que el desajuste de ambos tipos de datos desciende en cada iteración consecutiva. Por otro lado, este experimento nos mostró la necesidad de un modelo a priori hidráulico, como se puede observar en la Figura 52, el desajuste es mayor a 100,000, recordemos que esta dependencia se debe a la baja cantidad de datos hidráulicos; lo cual es el caso común en la exploración geohidrológica.

7.5.2 Caso 2: Recuperación de la conductividad eléctrica y la permeabilidad hidráulica en un medio heterogéneo en tres episodios de tiempo

Después de probar la eficiencia del algoritmo en un medio homogéneo, el siguiente experimento prueba el algoritmo de inversión con un modelo heterogéneo durante tres épocas con diferente saturación.

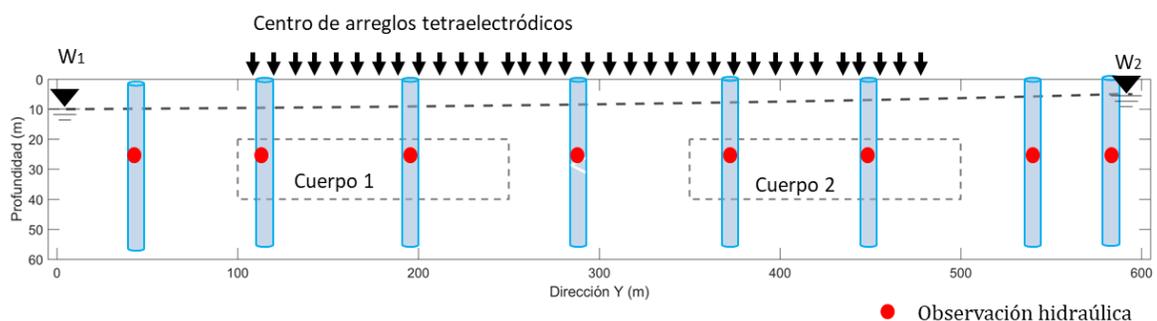


Figura 53. Diagrama esquemático de la sección transversal del modelo de prueba. Las flechas negras muestran los centros de los arreglos tetraelectrónicos y los puntos rojos los sitios de observación.

Tabla 11. Propiedades eléctricas, hidráulicas y parámetros de suelo usadas en el modelo sintético (7.5.2) e inicial (los parámetros de suelo se tomaron de Carsel & Parrish (1988)).

Modelo	Conductividad eléctrica saturada (σ_0) S/m)	Permeabilidad saturada (k_s) (m^2)	Parámetros de suelo	
			α_w (KPa)	β_w
Semiespacio (areno-arcillosos)	0.02	10^{-13}	3.633	1.23
Cuerpo 1 (franco arenoso)	0.005	5×10^{-13}	1.308	1.88
Cuerpo 2 (franco limoso)	0.05	10^{-14}	5.16	1.31
Inicial	0.02	10^{-13}	3.633	1.23

El modelo de prueba se diseñó simulando un medio granular homogéneo con dos cuerpos inmersos representando materiales arenosos (más permeables, cuerpo 1) y arcillosos (menos permeables, cuerpo 2), los valores de los parámetros eléctricos e hidráulicos se muestran en la Tabla 11 y en la Figura 53. En este experimento se simularon tres episodios de tiempo variando la saturación del medio. Los tres niveles de saturación para generar los datos sintéticos se enlistan en la Tabla 12. El número de aperturas eléctricas y puntos de observación hidráulica es similar al experimento anterior. A los datos eléctricos e hidráulicos se les agregó un 5% ruido aleatorio gaussiano.

Tabla 12. Profundidades de los niveles freáticos utilizadas para tres escenarios ξ en el modelado inverso. W_1 para los bordes izquierdo y W_2 para los derechos (ver Figura 53).

Profundidad al nivel de saturación (m)	ξ_1	ξ_2	ξ_3
W_1	10.0	30	35
W_2	5.0	25.0	30.0

i. Modelado inverso semiacoplado – eléctrico

Los modelos de conductividad eléctrica saturada, que se presentan a continuación son recuperados a partir de la inversión conjunta de datos eléctricos e hidráulicos.

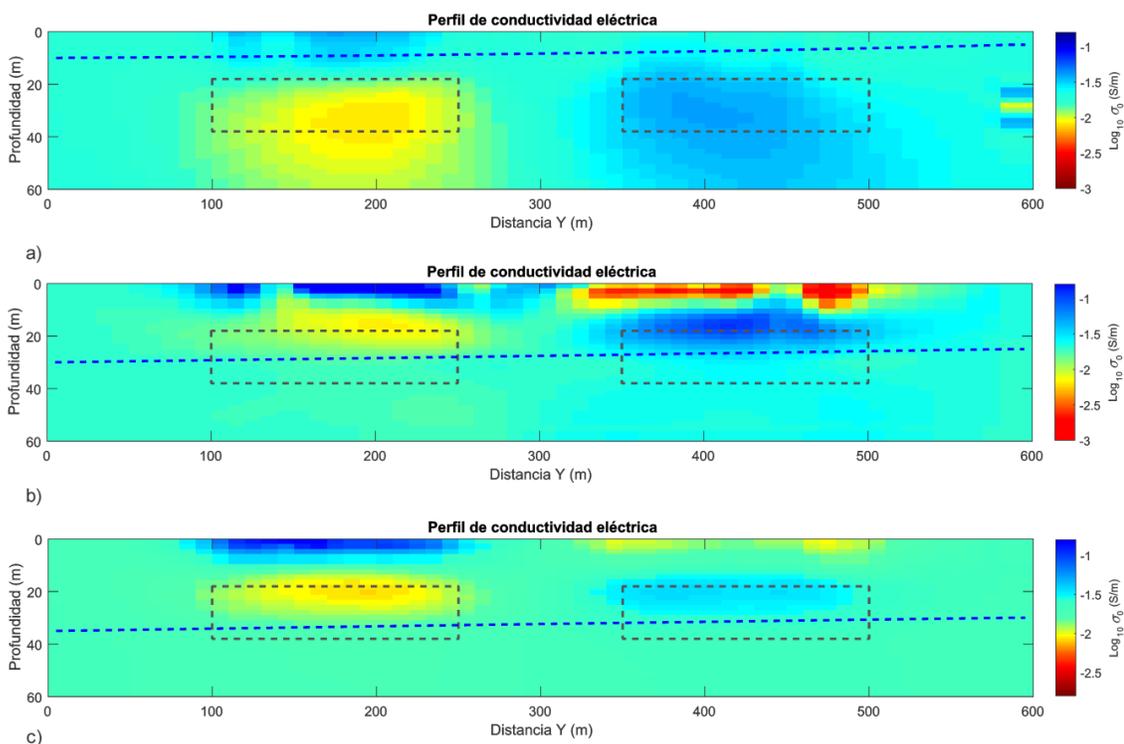


Figura 54. Modelo eléctrico recuperado después de 80 iteraciones a) para un ξ_1 , b) para un ξ_2 y c) para un ξ_3 .

La Figura 54 muestra el modelo de conductividad eléctrica recuperado para los tres diferentes niveles de saturación. En el primer episodio de tiempo (ξ_1 , Figura 54a), los cuerpos 1 y 2 se localizan en el medio completamente saturado. Para este nivel de saturación se obtuvo un RMS de 1.96 en 45 iteraciones, como se presenta en la Figura 55.

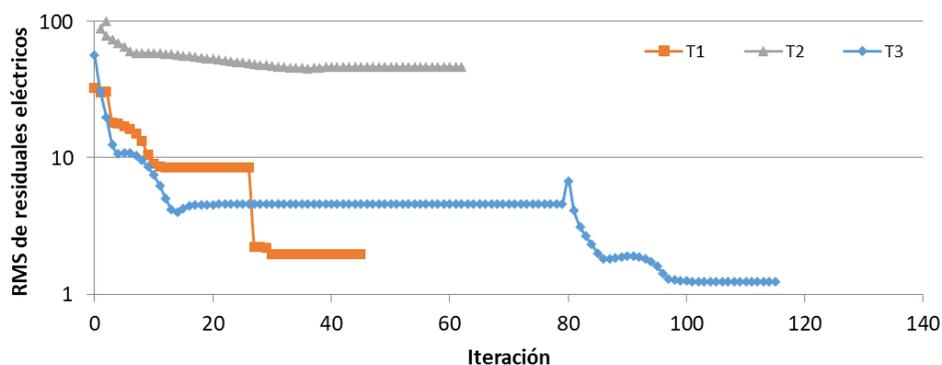


Figura 55. RMS de residuales por iteración para la inversión de datos eléctricos, en los tres episodios de tiempo.

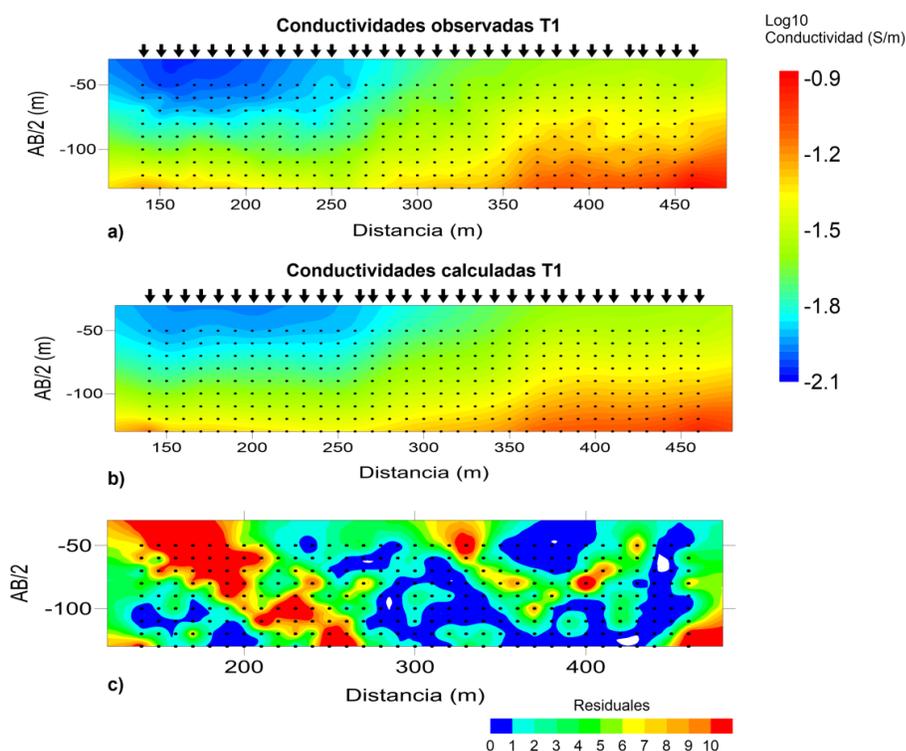


Figura 56. Pseudo sección de datos eléctricos sintéticos (a), datos calculados para la iteración 36 (b) y su respectivo mapa de residuales obtenidos del proceso de inversión de datos eléctricos para el episodio de tiempo ξ_1 (Figura 54a). La información del ajuste para los episodios ξ_2 y ξ_3 se presentan en el Anexo G.

Para el episodio dos, (ξ_2 , Figura 54b), el nivel freático atraviesa a ambos cuerpos casi a la mitad. Este modelo presenta un ajuste pobre (RMS de 46). Esto podría deberse a la marcada no linealidad del

proceso hidráulico en esta zona y al muestreo deficiente de los datos eléctricos para este ejemplo. Finalmente el episodio ξ_3 , presenta un mejor ajuste entre datos observados y calculados, mostrando un RMS de 1.23 en 115 iteraciones.

Para mostrar como fue el ajuste de los datos observados a los calculados en el episodio 1 (ξ_1), se presentan tres pseudo secciones en la Figura 56. Los datos observados se presentan en la Figura 56a, los datos calculados se presentan en la Figura 56b, ambas figuras muestran una similitud en los valores de conductividad, esta similitud se presenta numéricamente en la Figura 56c que representa el desajuste de cada dato observado vs calculado para la iteración 46 del episodio 1 de saturación, el resto de los episodios se muestran en el Anexo G. De estos experimentos podemos concluir, que el episodio 2, quedó atrapado en un mínimo local, y que es necesario mejorar la estrategia de búsqueda.

ii. Modelado inverso Hidráulico

Similar al caso homogéneo, debido a la poca cantidad de observaciones hidráulicas, y a la escasa variación que induce una permeabilidad constante al campo de presiones se debe recurrir al modelo a la información previa del medio, por lo que se suministró el mismo peso al desajuste de los datos y al modelo a priori (este es el 0.06% del modelo sintético). El resultado del modelo de permeabilidad para los tres episodios de tiempo se muestra en la Figura 57. En el ξ_1 el modelo de permeabilidad se recuperó después de la iteración 16, en donde las heterogeneidades se localizan completamente saturadas, y los valores recuperados son muy cercanos al modelo sintético (cuerpo 1 $k_1 = 4.89 \times 10^{-13} \text{ m}^2$ y $k_2 = 1.02 \times 10^{-14} \text{ m}^2$ y $k_{semiespacio} = 10^{-13} \text{ m}^2$).

Similar al caso eléctrico, los modelos hidráulicos de la Figura 57 que presentan los cuerpos variablemente saturados para los escenarios ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 , se obtienen después de 26, 64, 114 iteraciones respectivamente (Figura 59) logrando los ajuste 0.4, 3.08, 0.63 en cada caso. De estos resultados podemos concluir que para un medio heterogéneo, el nivel de ajuste depende de la cantidad de datos observados y del nivel de saturación (condiciones de frontera). Es notable que este caso depende en principalmente de la hipótesis plasmada en un modelo a priori.

Respecto a las derivadas completamente acopladas, se observó que se requiere un contraste fuerte entre las resistividades de la interfase saturada-no saturada para que esta información contribuya significativamente a la inversión de los datos hidráulicos.

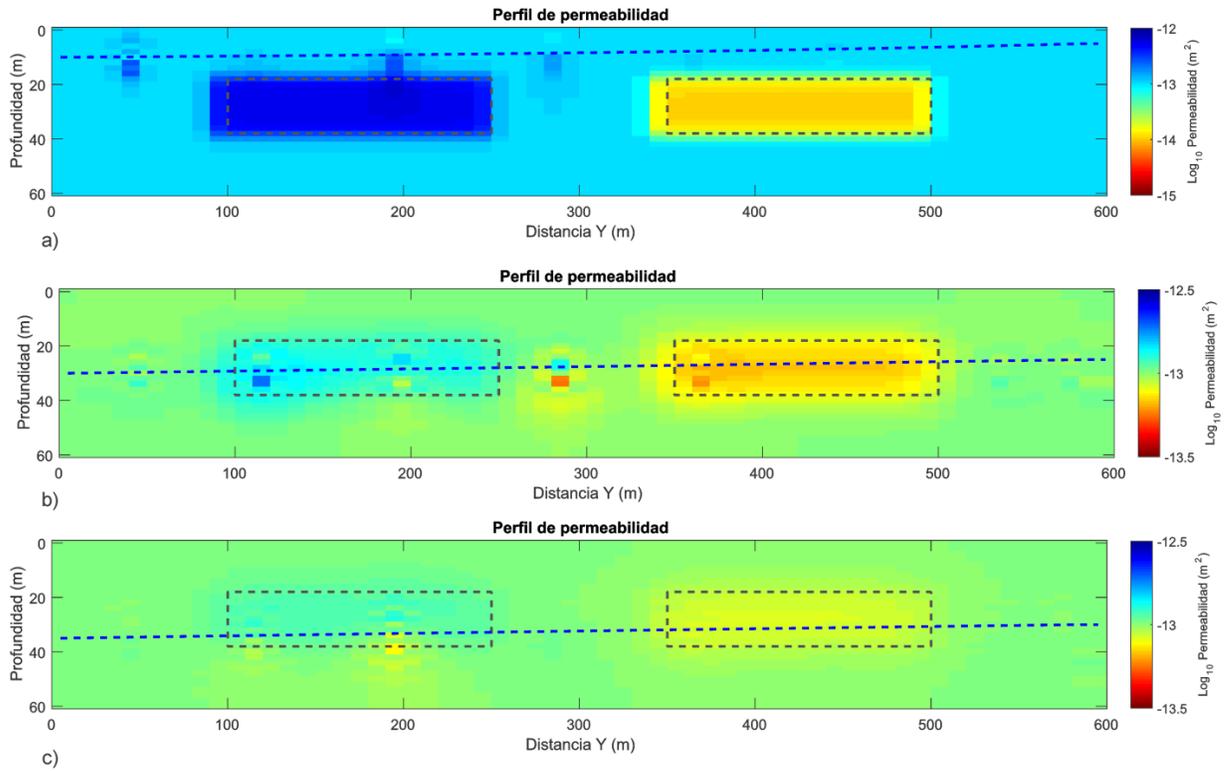


Figura 57. Modelo hidráulico recuperado después de 80 iteraciones a) para un ξ_1 , b) para un ξ_2 y c) para un ξ_3 .

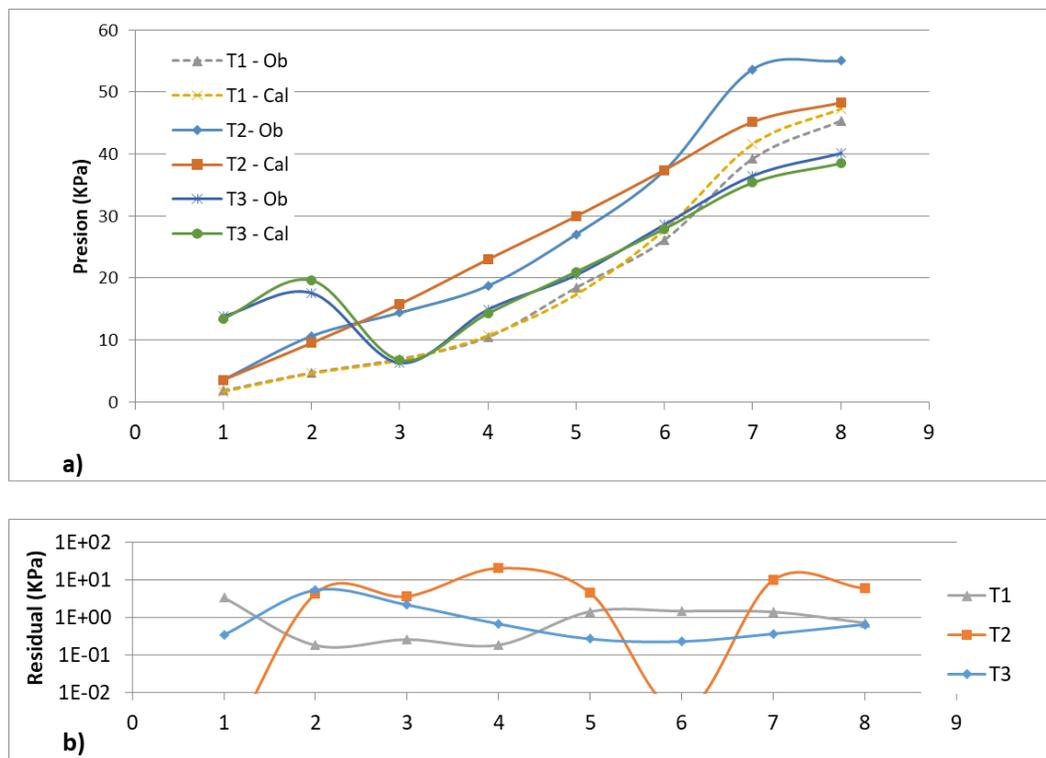


Figura 58. a) Detalle del ajuste de datos observados y calculados para la iteración 26, 64, 114 de los episodios ξ_1 , ξ_2 y ξ_3 respectivamente y b) residuales para cada punto ajustado en la iteración presentada en (a).

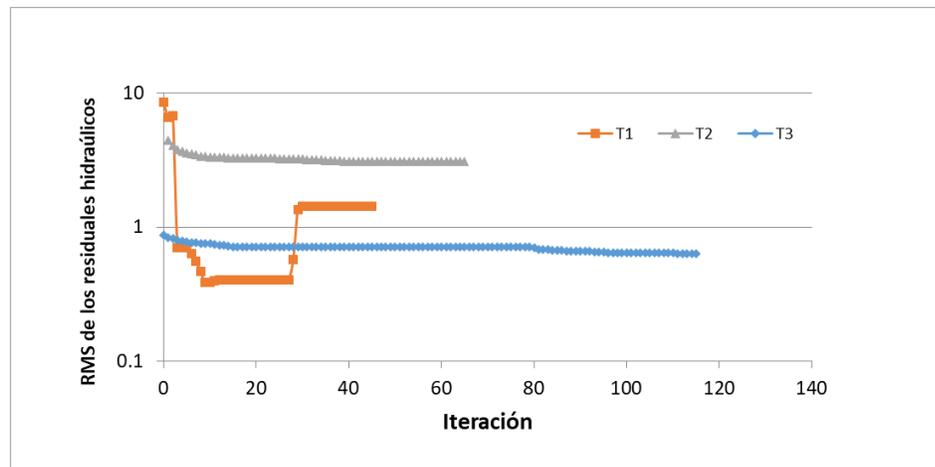


Figura 59. a) RMS de los residuales por iteración para la inversión de datos hidráulicos, para los tres episodios de tiempo.

7.1 Resumen capítulo 7

En este capítulo se desarrolló la formulación para el problema inverso electrohidráulico y se resolvió empleando un algoritmo de gradientes conjugados no lineales. El programa de inversión conjunta desarrollado utiliza como base las derivadas de la función objetivo desarrolladas en el capítulo 5. Debido a la naturaleza acoplada de ambas metodologías, el algoritmo inverso, resuelve el problema eléctrico utilizando información hidráulica (S_w) para obtener un modelo de resistividades eléctrica saturada, mientras que el modelo hidráulico recibe información del desajuste de los datos eléctricos para obtener el modelo de permeabilidad hidráulica saturada. Los modelos presentados en este capítulo se resuelven de forma conjunta, sin embargo, el algoritmo desarrollado puede trabajar cada problema de forma independiente.

Capítulo 8. Conclusiones

Los procesos que se presentan en un acuífero tipo libre son dinámicos. Como se ha mencionado anteriormente, el rasgo más notable en esta dinámica, es el nivel freático.

En este trabajo presentamos la evidencia de que los cambios que ocurren en la zona no saturada y en la interfase creada por el nivel freático, permiten aprovechar las observaciones de flujo eléctrico e hidráulico de forma acoplada para la identificación de propiedades intrínsecas del medio poroso, principalmente en las inmediaciones de esta interfase. A continuación presentamos las conclusiones principales:

De la fuerza

Las diferencias de presión hidráulica son las generadoras del movimiento de agua en cualquier tipo de acuífero. Estas diferencias de presión se pueden medir tanto en la zona no saturada, como la saturada, siendo más comunes las segundas en el modelado geohidrológico. En este trabajo se eligió para modelar el medio poroso como un continuo saturado/no-saturado utilizando las ecuaciones fundamentales en términos de la presión hidráulica. Esto permitió modelar los potenciales eléctricos e hidráulicos de una manera físicamente acoplada y con ello la inversión conjunta de la información eléctrica e hidráulica en medios variablemente saturados con una perspectiva completamente diferente a cualquier otra realizada hasta el momento.

Del fluido

Como se presentó en el Capítulo 2, la presencia de fluido en el medio poroso es responsable de los procesos de flujo tanto de agua subterránea como de corriente eléctrica. Se demostró que los cambios en saturación inducida por las variaciones de presión evidencian las propiedades eléctricas e hidráulicas intrínsecas del medio y por tanto es importante poner atención a la selección de curvas de retención de agua (SWRC) para el modelado de un medio variablemente saturado. Sin embargo ante una variación tan grande como lo es el mismo nivel freático una aproximación matemática simple podría reproducir satisfactoriamente la saturación del medio. En cualquier caso el valor de las constantes de saturación se puede calibrar dependiendo del conocimiento que se tenga de la litología de la zona de estudio y del conocimiento del potencial matricial de los suelos comunes.

Del medio

Al parametrizar las propiedades del medio en términos de alguna de las funciones de saturación propuestas, las ecuaciones fundamentales se plantearon en términos de la conductividad eléctrica y la permeabilidad hidráulica de un medio variablemente saturado (ligadas por la función de saturación). Al realizar lo anterior, en el proceso de inversión recuperamos las propiedades del medio saturadas (es decir, sin la influencia de la interfase saturada/no-saturada), como se presentó en el Capítulo 7; por lo que se pueden considerar estacionarias y aplicarse individual o conjuntamente empleando registros históricos de una cuenca geohidrológica, algo que comúnmente no se puede realizar sobre todo en mediciones eléctricas.

Del modelado directo

En la exploración geohidrológica tradicional, los programas de modelado de agua subterránea 3D parametrizan el medio en términos de carga hidráulica (h). Estos códigos están enfocados en la simulación de medios completamente saturados (e.g. MODFLOW, Harbaugh (2005)). En otros casos, lo modelan en términos de la carga de presión (Figura 4) (e.g. subsurfaceFlowFOAM, (Dey & Dhar, 2022) o SU3D, (Dogan & Motz, 2005).

En nuestro caso, parametrizamos el problema directo hidráulico en función del campo de presiones hidráulicas, lo cual permitió analizar el medio como un continuo, desde la zona no saturada a la completamente saturada, lo que permite aplicarlo a acuíferos de tipo libre. Además, en nuestro caso, el problema directo eléctrico asimila la información del contenido de agua ($S_w(P)$), generando el potencial eléctrico de un medio variablemente saturado. Este modelado es poco común en la exploración geoelectrica, en donde regularmente se asume que el medio se encuentra completamente saturado ($S_w(P) = 1$). Esta aportación abre la posibilidad de modelar conjuntamente datos geofísicos en medios variablemente saturados. Los experimentos numéricos con las condiciones de frontera propuestas presentaron estabilidad y convergencia. Notablemente, este es el primer programa de modelado que efectivamente, permite el modelado directo conjunto de ambos procesos.

De las derivadas de la función objetivo y sensibilidad

El desarrollo de la formulación de estado adjunto permitió obtener las derivadas de la función objetivo para el caso independiente (solo hidráulica), semi-acoplado (eléctrico) y completamente acoplado

(hidráulico). En estos tres casos, los experimentos numéricos nos mostraron que tanto los datos eléctricos, como hidráulicos dependen de las variaciones de saturación del medio y, por lo tanto, son sensibles a los parámetros hidráulicos y eléctricos en el medio. En la solución de los métodos eléctricos se observó que, la información del modelo de saturaciones obtenido del modelado hidráulico, beneficia el cambio de sensibilidad en la zona saturada/no-saturada. El cálculo de sensibilidades de la función objetivo a los parámetros evidenció que ambos tipos de datos contribuyen conjuntamente para:

1. delinear la zona no saturada (en particular la sensibilidad a la conductividad eléctrica);
2. determinar la permeabilidad hidráulica, más allá de la información del pozo (en particular el nivel freático);
3. detectar heterogeneidades hidráulicas a la altura del nivel freático histórico;
4. determinar la permeabilidad en la zona no saturada (debido a la aportación de los datos eléctricos).

Respecto al cálculo de las derivadas por medio del campo adjunto podemos mencionar que hereda el acoplamiento físico implícito en el modelado directo y con ello transfiere la información de un modelo al otro desde la solución misma de los problemas adjuntos asociados.

La metodología desarrollada demuestra la factibilidad del uso de mediciones eléctricas e hidráulicas en varios episodios de tiempo para estimar parámetros eléctricos e hidráulicos saturados estacionarios, como se muestra en los experimentos sintéticos realizados.

Del algoritmo de modelado inverso

Desarrollamos la formulación del problema inverso conjunto haciendo uso de: a) la estimación simultánea del potencial eléctrico e hidráulico a partir de la solución acoplada de las ecuaciones no lineales, b) el desarrollo de la teoría de campo adjunto (gradiente de la función de desajuste para ambos tipos de datos) y c) de regularizadores de suavidad y ajuste del conocimiento previo. El proceso de optimización se resolvió empleando un algoritmo de gradientes conjugados no lineales, estimando conjuntamente la conductividad eléctrica y la permeabilidad hidráulica del medio saturado. Para demostrar el correcto funcionamiento del algoritmo se propusieron dos experimentos sintéticos, estos

trataron de acercarse a la realidad en la exploración geohidrológica tanto en la disposición de las observaciones como el medio poroso simulado. Después de este desarrollo pudimos validar las derivadas obtenidas a partir del método adjunto. Se constató que el algoritmo de gradientes conjugados converge en cada paso iterativo, ambos a una solución.

Del modelado inverso eléctrico

En este trabajo, la formulación del problema inverso se realiza en términos de la conductividad eléctrica saturada, por lo que el modelo recuperado es de la conductividad del medio independiente del nivel de saturación.

De los experimentos podemos observar que el medio homogéneo se recuperó en pocas iteraciones, y que prácticamente los criterios más importantes son el desajuste de los datos y el término de suavidad, mientras que el término de ajuste del modelo a priori prácticamente no contribuyó, debido a la buena cobertura de datos eléctricos observados. En el experimento sintético del medio heterogéneo se recuperaron los cuerpos inmersos en un semiespacio homogéneo. En este caso, las variaciones de saturación inducidas, permitieron observar el impacto a los datos sintéticos cuando las heterogeneidades son atravesadas por el nivel freático. De los tres modelos propuestos podemos concluir que el modelo se recupera mejor si está completamente saturado o completamente desaturado. Recuperar un cuerpo parcialmente saturado con agua requirió un mayor número de iteraciones. En este caso, presenta una alta sensibilidad en la zona no saturada del medio. Este experimento se asemeja mucho a lo que ocurre en la exploración geoeléctrica realizada en diferentes épocas (estiaje o lluvias), por lo que la teoría propuesta de acumulación de sensibilidades de diferentes épocas se reafirma, y abre el camino para los siguientes pasos en esta investigación. En este caso, observamos que una alta densidad de datos apoya la recuperación de los modelos, sin embargo, parece prudente evocar a la sensibilidad de cada tipo de arreglo tetraelectrónico, es decir, como la literatura tradicional nos indica, dependiendo de la disposición y apertura de los electrodos receptores y de corriente, es la profundidad de penetración y la resolución lateral. Por lo que, en el futuro, se puede explorar la identificación de heterogeneidades utilizando nuevas disposiciones electrónicas.

Del modelado inverso hidráulico

A pesar de que no se presentaron los modelos inversos hidráulicos independientes, podemos indicar que los datos sintéticos solo representan una pequeña porción del acuífero. Como se presentó en los experimentos de sensibilidad, su aportación corresponde prácticamente a las inmediaciones del pozo. En

el módulo de inversión conjunta (acoplada), ambos procesos (eléctrico e hidráulico) convergieron ajustando ambos tipos de datos. De los modelos de permeabilidad obtenidos a partir del modelado inverso conjunto de datos hidráulicos y eléctricos podemos concluir lo siguiente:

En el caso homogéneo, se observó que el nivel de saturación es mucho más dependiente de las condiciones de frontera propuestas y no del modelo de permeabilidad, por lo que el ajuste de los datos observados estuvo dentro del rango de tolerancia; sin embargo, no se recuperó el modelo de permeabilidad. Como estrategia, se recurrió a dar un mayor peso al término del ajuste de la información a priori. Según nuestro conocimiento previo, la sensibilidad siempre es mayor debajo del nivel freático debido a que en esta zona se localizan las observaciones. Por el contrario, en la parte no saturada, la sensibilidad es muy baja. En esta misma línea, debido a las pocas observaciones se le agregó un mayor peso al ajuste del modelo a priori. Como se esperaba, se logró ajustar los datos observados a los calculados y se recuperó una buena proporción del modelo sintético. Justo en esta zona, es en donde actúa la sensibilidad eléctrica, sin embargo esta aportación fue baja en comparación a los cambios de la sensibilidad hidráulica.

De los experimentos realizados, también podemos concluir que la mayor contribución de los datos eléctricos se da cuando la curva de saturación tiene un cambio abrupto, debido a la poca capacidad del medio poroso a retener agua superficial (por ejemplo, arenas francas o arenas). Este cambio se asocia a valores de conductividad muy altos, que parecen generar inestabilidad en el problema inverso.

Trabajo a futuro, modelado inverso conjunto en episodios de tiempo

Las mediciones en tiempo, se utilizan como método para medir, monitorear y predecir procesos transitorios. En el caso de conductividad eléctrica se pueden relacionar sus cambios con transporte de fluidos, alteración geoquímica, etc. En nuestro caso, se espera que los cambios de la conductividad eléctrica en el tiempo se puedan ligar con los parámetros hidráulicos estacionarios como la permeabilidad, conductividad hidráulica; coeficiente de almacenamiento, estos se relacionarán en términos de cambios en los niveles de agua subterránea, es decir cambios de saturación en el tiempo.

El desarrollo de esta metodología es el siguiente paso natural a lo planteado en los Capítulos 6 y 7 en donde a partir de observaciones eléctricas e hidráulicas es posible acumular las sensibilidades que apoyan directamente a la recuperación del medio poroso sin el efecto del frente de saturación.

Trabajo a futuro, metodología a escala

La metodología planteada nació de la idea de poder utilizar mediciones históricas eléctricas e hidráulicas, comunes en la exploración geohidrológica a nivel acuífero (regional); sin embargo, creemos que esta metodología se puede desarrollar en experimentos locales dinámicos a corto plazo (pruebas de bombeo y monitoreo eléctrico) para detectar algunos otros parámetros hidráulicos (i.e. coeficiente de almacenamiento, porosidad, fuente), de la misma forma son conocidos los experimentos eléctricos e hidráulicos a nivel laboratorio, por lo que también es posible diseñar pruebas para obtener estos parámetros hidráulicos a partir de núcleos de pozo.

Trabajo a futuro, otro tipo de yacimientos, (acuíferos salinos, geotérmicos o petroleros)

Conocer la permeabilidad de un medio poroso es uno de los objetivos principales en la exploración de yacimientos. Sin importar el tipo fluido que albergue el pozo, resulta trascendental determinar la capacidad del medio a la extracción o inyección. Debido a que nuestro modelado incluye un medio bifásico, consideramos que es posible adecuarlo a un caso trifásico teniendo las consideraciones adecuadas (conocimiento previo de las presiones hidráulicas para asociarlas con algún tipo de fluido) o a un caso en donde la presión sea dependiente del grado de salinidad, en este caso se buscaría detectar las interfases agua dulce – agua salada o bien hidrocarburo – agua salada.

Literatura citada

- Archie, G. E. (1942). The Electrical Resistivity Log as an Aid in Determining Some Reservoir Characteristics. *Transactions of the AIME*, 146, 54–62. <https://doi.org/https://doi.org/10.2118/942054-G>
- Bear, J., & Cheng, A. H. D. (2010). *Modeling groundwater flow and contaminant transport*. Springer, Dordrecht. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6682-5>
- Bruggeman, G. A. (Ed.). (1999). *Volume 46: Analytical Solutions of Geohydrological Problems*. Elsevier. <https://www.sciencedirect.com/bookseries/developments-in-water-science/vol/46/suppl/C>
- Camporese, M., Cassiani, G., Deiana, R., Salandin, P., & Binley, A. (2015). Coupled and uncoupled hydrogeophysical inversions using ensemble Kalman filter assimilation of ERT- monitored tracer test data. *Water Resources Research*, 51(5), 3277–3291. <https://doi.org/10.1002/2014WR016017>
- Carrera, J., Alcolea, A., Medina, A., Hidalgo, J., & Slooten, L. J. (2005). Inverse problem in hydrogeology. *Hydrogeology Journal*, 13(1), 206–222. <https://doi.org/10.1007/s10040-004-0404-7>
- Carsel, R. F., & Parrish, R. S. (1988). Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics. *Water Resources Research*, 24(5), 755–769. <https://doi.org/10.1029/WR024i005p00755>
- Commer, M., Pride, S. R., Vasco, D. W., Finsterle, S., & Kowalsky, M. B. (2020). Imaging of a fluid injection process using geophysical data - A didactic example. *Geophysics*, 85(2), W1–W16. <https://doi.org/10.1190/geo2018-0787.1>
- Dey, S., & Dhar, A. (2022). Generalized mass-conservative finite volume framework for unified saturated–unsaturated subsurface flow. *Journal of Hydrology*, 605(2022), 1–20. <https://doi.org/10.1016/J.JHYDROL.2021.127309>
- Dogan, A., & Motz, L. H. (2005). Saturated-Unsaturated 3D Groundwater Model. I: Development. *Journal of Hydrologic Engineering*, 10(6), 492–504. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0699\(2005\)10:6\(492\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0699(2005)10:6(492))
- Fletcher, R., & Reeves, C. M. (1964). Function minimization by conjugate gradients. *The Computer Journal*, 7(2), 149–154. <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.2.149>
- González-Quirós, A., & Comte, J. C. (2021). Hydrogeophysical model calibration and uncertainty analysis via full integration of PEST/PEST++ and COMSOL. *Environmental Modelling and Software*, 145(2021), 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2021.105183>
- Han, T. C., Yan, H., & Fu, L. Y. (2021). A quantitative interpretation of the saturation exponent in Archie's equations. *Petroleum Science*, 18(2), 444–449. <https://doi.org/10.1007/s12182-021-00547-0>
- Harbaugh, A. W. (2005). *MODFLOW-2005, the US Geological Survey modular ground-water model: the ground-water flow process*. U.S. Geological Survey Techniques and Methods 6-A16. <https://doi.org/10.3133/tm6A16>
- Hinnell, A. C., Ferr, T. P. A., Vrugt, J. A., Huisman, J. A., Moysey, S., Rings, J., & Kowalsky, M. B. (2010). Improved extraction of hydrologic information from geophysical data through coupled hydrogeophysical inversion. *Water Resources Research*, 46(4), 1–14. <https://doi.org/10.1029/2008WR007060>

- Huisman, J. A., Rings, J., Vrugt, J. A., Sorg, J., & Vereecken, H. (2010). Hydraulic properties of a model dike from coupled Bayesian and multi-criteria hydrogeophysical inversion. *Journal of Hydrology*, 380(1–2), 62–73. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2009.10.023>
- Irving, J., & Singha, K. (2010). Stochastic inversion of tracer test and electrical geophysical data to estimate hydraulic conductivities. *Water Resources Research*, 46(11), 1–16. <https://doi.org/10.1029/2009WR008340>
- Jardani, A., Revil, A., & Dupont, J. P. (2013). Stochastic joint inversion of hydrogeophysical data for salt tracer test monitoring and hydraulic conductivity imaging. *Advances in Water Resources*, 52, 62–77. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2012.08.005>
- Karaoulis, M., Revil, A., Zhang, J., & Werkema, D. D. (2012). Time-lapse joint inversion of crosswell DC resistivity and seismic data: A numerical investigation. *Geophysics*, 77(4), D141–D157. <https://doi.org/10.1190/geo2012-0011.1>
- Kowalsky, M. B., Gasperikova, E., Finsterle, S., Watson, D., Baker, G., & Hubbard, S. S. (2011). Coupled modeling of hydrogeochemical and electrical resistivity data for exploring the impact of recharge on subsurface contamination. *Water Resources Research*, 47(2), 1–22. <https://doi.org/10.1029/2009WR008947>
- Le Dret, H., & Lucquin, B. (2016). The Finite Volume Method. In *Partial Differential Equations: Modeling, Analysis and Numerical Approximation* (Vol. 168, pp. 345–382). https://doi.org/10.1007/978-3-319-27067-8_10
- Li, B., & Yeh, T.-C. J. C. J. (1998). Sensitivity and moment analyses of head in variably saturated regimes. *Advances in Water Resources*, 21(6), 477–485. [https://doi.org/10.1016/S0309-1708\(97\)00011-0](https://doi.org/10.1016/S0309-1708(97)00011-0)
- Li, P., & Uren, N. F. (1998). Analytical solution for the electric potential due to a point source in an arbitrarily anisotropic half-space. *Journal of Engineering Mathematics*, 33(2), 129–140. <https://doi.org/10.1023/A:1004232111364>
- Linde, N., & Doetsch, J. (2016). Joint Inversion in Hydrogeophysics and Near-Surface Geophysics. In *Integrated Imaging of the Earth: Theory and Applications* (pp. 117–135). Wiley. <https://doi.org/10.1002/9781118929063.ch7>
- Liu, Q., & Tromp, J. (2006). Finite-frequency kernels based on adjoint methods. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 96(6), 2383–2397. <https://doi.org/10.1785/0120060041>
- Loke, M. H. (2024). *Tutorial: 2-D and 3-D Electrical Imaging Surveys* (Geotomo Software, Res2dinv 3.5 Software.). <https://www.geotomosoft.com/>
- Lu, Z., & Vesselinov, V. V. (2015). Analytical sensitivity analysis of transient groundwater flow in a bounded model domain using the adjoint method. *Water Resources Research*, 51(7), 5060–5080. <https://doi.org/10.1002/2014WR016819>
- Luo, S., Lu, N., Zhang, C., & Likos, W. (2022). Soil water potential: A historical perspective and recent breakthroughs. *Vadose Zone Journal*, 21(4), 1–39. <https://doi.org/10.1002/vzj2.20203>
- Mboh, C. M., Huisman, J. A., Van Gaalen, N., Rings, J., & Vereecken, H. (2012). Coupled hydrogeophysical inversion of electrical resistances and inflow measurements for topsoil hydraulic properties under constant head infiltration. *Near Surface Geophysics*, 10(5), 413–426. <https://doi.org/10.3997/1873-0604.2012009>
- Menke, W. (2012). *Geophysical data analysis discrete inverse theory* (3rd ed.). Academic press. <https://doi.org/10.1016/C2011-0-69765-0>

- Moreno, Z. (2022). Fine-scale heterogeneous structure impact on the scale-dependency of the effective hydro-electrical relations of unsaturated soils. *Advances in Water Resources*, 162(2022), 1–15. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2022.104156>
- Nemes, A., Schaap, M. G., Leij, F. J., & Wösten, J. H. M. (2001). Description of the unsaturated soil hydraulic database UNSODA version 2.0. *Journal of Hydrology*, 251(3–4), 151–162. [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(01\)00465-6](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(01)00465-6)
- Newman, G. A., & Alumbaugh, D. L. (2000). Three-dimensional magnetotelluric inversion using non-linear conjugate gradients. *Geophysical Journal International*, 140(2000), 410–424. <https://doi.org/10.1046/j.1365-246X.2000.00007.x>
- Nocedal, J., & Wright, S. J. (2006). *Numerical optimization*. Springer Science and Business Media LLC. <https://doi.org/10.1201/b19115-11>
- Pollock, D., & Cirpka, O. A. (2010). Fully coupled hydrogeophysical inversion of synthetic salt tracer experiments. *Water Resources Research*, 46(7), 1–12. <https://doi.org/10.1029/2009WR008575>
- Purvance, D. T., & Andricevic, R. (2000). On the electrical-hydraulic conductivity correlation in aquifers. *Water Resources Research*, 36(10), 2905–2913. <https://doi.org/10.1029/2000WR900165>
- Revil, A., Naudet, V., Nouzaret, J., & Pessel, M. (2003). Principles of electrography applied to self-potential electrokinetic sources and hydrogeological applications. *Water Resources Research*, 39(5), 1–15. <https://doi.org/10.1029/2001WR000916>
- Salas-Ariza, J. J., Gallardo, L. A., Moreles, M., Contreras, J., & Romo-Jones, J. M. (2024). Permeability Sensitivity of Coupled Electrical and Hydraulic Data in Unconfined Aquifers. *Mathematical Geosciences*, 57(2025), 393–418. <https://doi.org/10.1007/s11004-024-10166-1>
- Slater, L. (2007). Near surface electrical characterization of hydraulic conductivity: From petrophysical properties to aquifer geometries - A review. *Surveys in Geophysics*, 28(2–3), 169–197. <https://doi.org/10.1007/s10712-007-9022-y>
- Steklova, K., & Haber, E. (2019). 3D Joint hydrogeophysical inversion using similarity measures. *Applied Mathematics and Computation*, 357(2019), 338–356. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.09.025>
- Van Genuchten, M. T. (1980). A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils 1. *Soil Science Society of America Journal*, 44, 892–898. <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x>

Anexos

Anexo A. Discretización de las derivadas temporales del problema hidráulico

Para discretizar el término temporal de las derivadas parciales de la ecuación (21), se utilizó el esquema Crank-Nicolson, debido a que es implícito y numéricamente estable. La siguiente expresión, equivale al promedio de los tiempos, alrededor del campo de presión para $P(x, y, z, t + \frac{1}{2}\Delta t)$ y equivale al promedio de la suma de los flujos para un tiempo h y un $h + 1$ y se debe resolver para el nodo de $P^{h+1,m}$.

$$C(l, \gamma, \zeta) \left(\frac{P_{l, \gamma, \zeta}^{h+1, m+1} + P_{l, \gamma, \zeta}^{h+1, m+1}}{\Delta t} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} w_x^{h+1, m+1} \left(l - \frac{1}{2}, \gamma, \zeta \right) + w_x^{h+1, m+1} \left(l + \frac{1}{2}, \gamma, \zeta \right) \\ w_y^{h+1, m+1} \left(l, \gamma - \frac{1}{2}, \zeta \right) + w_y^{h+1, m+1} \left(l, \gamma + \frac{1}{2}, \zeta \right) \\ w_z^{h+1, m+1} \left(l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2} \right) + w_z^{h+1, m+1} \left(l, \gamma, \zeta + \frac{1}{2} \right) + N^{h+1} \end{array} \right. \\ \left. \left(\begin{array}{l} w_x^{h, m} \left(l - \frac{1}{2}, \gamma, \zeta \right) + w_x^{h, m} \left(l + \frac{1}{2}, \gamma, \zeta \right) \\ w_y^{h, m} \left(l, \gamma - \frac{1}{2}, \zeta \right) + w_y^{h, m} \left(l, \gamma + \frac{1}{2}, \zeta \right) \\ w_z^{h, m} \left(l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2} \right) + w_z^{h, m} \left(l, \gamma, \zeta + \frac{1}{2} \right) + N^h \end{array} \right) \right. \end{array} \right. \quad (69)$$

Donde $C(l, \gamma, \zeta)$ es el coeficiente de almacenamiento dado por la expresión (18). Y los flujos $q_x^{h,m}$ son similares a los discretizados en las ecuaciones (25) y (26) con su respectivo superíndice temporal. Por ejemplo para la componente vertical en una dirección para los dos tiempos obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} w_z^{h+1, m+1} \left(l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2} \right) = k_{s, l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2}} S_w^n (P^{h+1, m}) \Delta x \Delta y \frac{P_{l, \gamma, \zeta}^{h+1, m+1} - P_{l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2}}^{h+1, m+1}}{\Delta z_{\zeta - \frac{1}{2}}} - k_{s, l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2}} S_w^n (P^{h+1, m}) \Delta x \Delta y \rho g, \\ w_z^{h, m+1} \left(l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2} \right) = k_{s, l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2}} S_w^n (P^{h, m}) \Delta x \Delta y \frac{P_{l, \gamma, \zeta}^{h, m+1} - P_{l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2}}^{h, m+1}}{\Delta z_{\zeta - \frac{1}{2}}} - k_{s, l, \gamma, \zeta - \frac{1}{2}} S_w^n (P^{h, m}) \Delta x \Delta y \rho g. \end{array} \right. \quad (70)$$

Anexo B. Validación del modelado directo a través de soluciones analíticas

Solución analítica de un acuífero libre

En este caso utilizamos la solución analítica de un acuífero freático con un flujo horizontal, sin precipitación o infiltración para obtener la superficie piezométrica dada por la ecuación (71) en donde la superficie piezométrica es independiente de la permeabilidad y su forma es dependiente de las condiciones de frontera empleadas para un medio homogéneo.

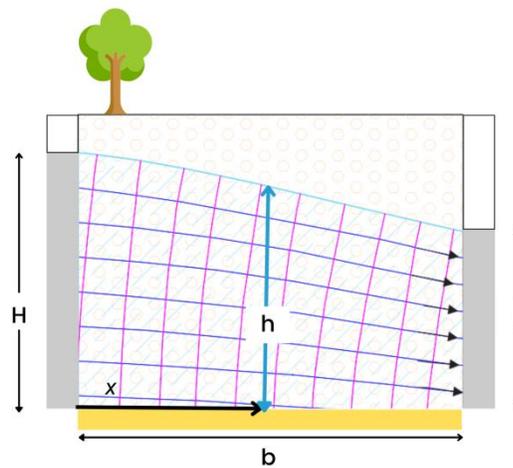


Figura 60. Flujo a través de una franja infinita delimitada a ambos lados por agua abierta.

$$h^2 = x \left(\frac{H^2 - L^2}{b} \right) + H^2. \quad (71)$$

Solución de MODFLOW, 2005 para un acuífero libre

Nuestra respuesta de modelado directo también se comparó con el software geohidrológico de MODFLOW 2005, debido a que las soluciones anteriores se muestran en términos de carga hidráulica (h) optamos por convertir la superficie piezométrica $P = 0$, obtenida del modelado numérico de la ecuación (21), a carga hidráulica a través de la relación (3) para la superficie freática de un acuífero libre. La comparación de las tres respuestas se muestra en la Figura 61.

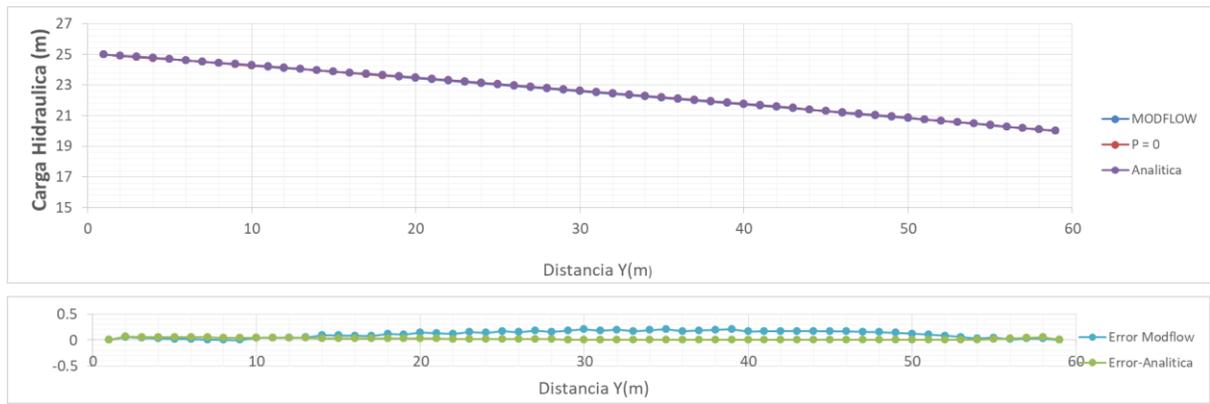


Figura 61. Respuesta de un modelo analítico simple comparado con MODFLOW y los resultados de este trabajo. En la parte superior de la gráfica se observa la comparación de las superficies freáticas obtenidas con MODFLOW, la solución analítica y el modelado numérico de este trabajo. En la parte inferior se observa las diferencias relativas con el modelo numérico desarrollado en este trabajo.

Potencial analítico para una fuente puntual:

Para la validación del modelado directo numérico se comparó el modelado numérico con la solución analítica de una fuente puntual para un medio homogéneo dada por la ecuación (72).

$$U(r) = \frac{I\rho}{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} \right], \tag{72}$$

$U(r)$ es el potencial eléctrico generado por la fuente $I(x, y, z)$ en un medio de resistividad homogénea ρ y h es la distancia a profundidad de la fuente. Ambas soluciones se comparan en la Figura 62.

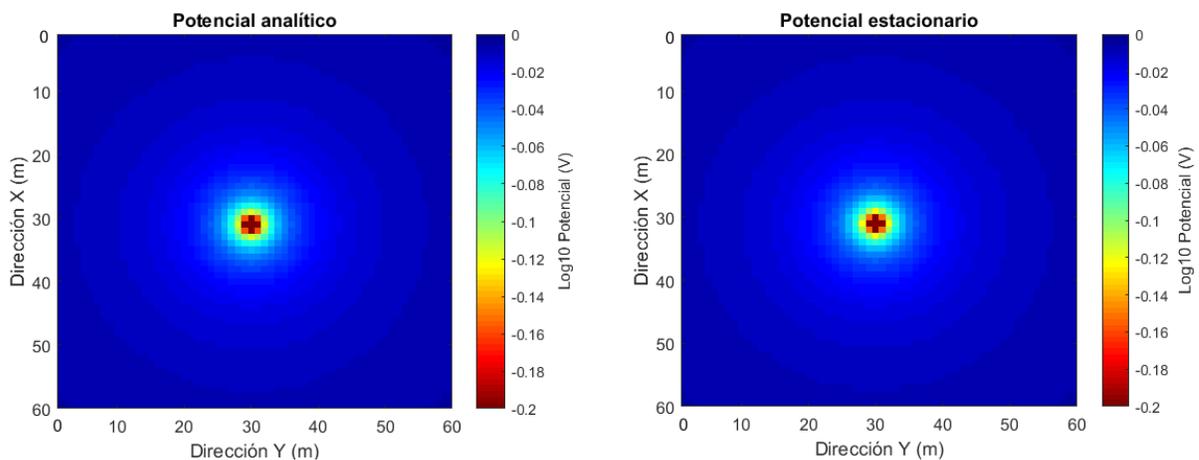


Figura 62. Comparación de la solución analítica (izquierda) y discreta del potencial eléctrico (derecha).

Anexo C. Desarrollo del método adjunto

Desarrollo de la ecuación de estado adjunta del campo de presión

La teoría adjunta para el campo de presión se puede desarrollar a partir de un problema de optimización restringida que extiende la función de desajuste convencional (Φ_H) mediante la ecuación restrictiva utilizando un multiplicador de Lagrange (λ) y minimizando la ecuación (47), como se presenta en lo siguiente:

$$\min \mathcal{L}_G(k_s, \lambda), \quad (73)$$

Φ_H corresponde a la función de desajuste de datos descrita en la ecuación (44) y, el término restrictivo, la ecuación de difusión en estado estacionario (21) y sujeta a sus condiciones de contorno. Un punto estacionario que satisface (21) puede definirse en términos de variaciones. Por lo tanto, primero tomamos la variación de Φ_H para obtener:

$$\delta \Phi_H = - \sum_{j=1}^J \frac{2}{S_{Hj}^2} (P_{obj} - P_{calj}) \int_{\Omega} \delta_D(x - x_j) \delta P d\Omega. \quad (74)$$

Luego calculamos la variación para el segundo término de la ecuación (47), es decir para las variables λ , P , y k_s esto resulta en:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \left(\frac{dS_w(P)}{dP} \delta P \frac{k_s}{Y} \nabla P \right) + \nabla \cdot \left(\delta k_s \frac{S_w(P)}{Y} \nabla P \right) + \nabla \cdot \left(\frac{k_s S_w(P)}{Y} \nabla \delta P \right) \right) d\Omega \\ + \int_{\Omega} \delta \lambda \left(\nabla \cdot \frac{k_s S_w(P)}{Y} \nabla P \right) d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (75)$$

Estas variaciones están sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

$$\delta P|_{\Gamma_D} = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{dS_w(P)}{dP} \delta P \frac{k_s}{Y} \nabla P + \delta k_s \frac{S_w(P)}{Y} \nabla P + \frac{k_s S_w(P)}{Y} \nabla \delta P \right) \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_N}. \quad (76)$$

Si definimos λ como un multiplicador escalar de Lagrange, como una función continua del espacio, entonces obtenemos:

$$\int_{\Omega} \left(\lambda \nabla \cdot \left(\frac{dS_w(P)}{dP} \delta P \frac{k_s}{Y} \nabla P \right) + \lambda \nabla \cdot \left(\delta k_s \frac{S_w(P)}{Y} \nabla P \right) + \lambda \nabla \cdot \left(\frac{k_s S_w(P)}{Y} \nabla \delta P \right) \right) d\Omega = 0. \quad (77)$$

Si no asumimos cambios en la dirección z y utilizamos la primera y la segunda identidad de Green para transferir el multiplicador de Lagrange a los términos de divergencia, obtenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta P \frac{dS_w(P)}{dP} \frac{k_s}{Y} (\nabla \lambda \cdot \nabla P) d\Omega + \int_{\Omega} \delta k_s \frac{S_w(P)}{Y} (\nabla \lambda \cdot \nabla P) d\Omega + \int_{\Omega} \delta P \nabla \cdot \left(\frac{k_s}{Y} S_w(P) \nabla \lambda \right) d\Omega \\ + \int_{\Gamma} \delta P \frac{dS_w(P)}{dP} \frac{k_s}{Y} \lambda \nabla P \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta k_s \frac{S_w(P)}{Y} \lambda \nabla P \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma} \frac{k_s S_w(P)}{Y} (\lambda \nabla \delta P - \delta P \nabla \lambda) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (78)$$

Definición de condiciones de contorno para la variable adjunta:

$$\lambda|_{\Gamma_D} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \lambda \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0. \quad (79)$$

En estas condiciones, las integrales a lo largo de las superficies límite desaparecen. El resto de las integrales se agrupan en las variaciones de P y k_s ; la variación de la función objetivo para el problema hidráulico $\delta \mathcal{L}_G(k_s, \lambda)$:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_G(k_s, \lambda) = \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot \left(\frac{k_s S_w(P)}{Y} \nabla \lambda \right) - \frac{2}{s_{H_j}^2} \sum_{j=1}^J R_{H_j} \delta_D(x - x_j) \right. \\ \left. + \frac{dS_w(P)}{dP} \frac{k_s}{Y} (\nabla \lambda \cdot \nabla P) \right] \delta P d\Omega + \int_{\Omega} \frac{S_w(P)}{Y} (\nabla \lambda \cdot \nabla P) \delta k_s d\Omega. \end{aligned} \quad (80)$$

Desarrollo de la ecuación de estado adjunta del campo eléctrico

En el caso del campo eléctrico, el desarrollo de la teoría del potencial adjunto es similar al del problema hidráulico. La función $\mathcal{L}_F(\sigma_o, \epsilon_{AB_i})$ es el operador Lagrangiano, formado por las funciones Φ_E que corresponden al ajuste de las resistividades observadas y calculadas. Se limita a resolver la ecuación de difusión para el problema eléctrico directo, sujeto a condiciones de contorno (23).

$$\min \mathcal{L}_F(\sigma_o, \epsilon_{AB_i}). \quad (81)$$

Como se mencionó en la Sección 5, el potencial eléctrico se normaliza en lo que conocemos como resistividad aparente, de modo que las variaciones en la resistividad calculada se asocian con las variaciones en el potencial perturbado en los puntos de observación. Como se puede observar en la variación de la función de desajuste $\delta\Phi_E$ en la forma continua, obtenemos:

$$\delta\Phi_E = \sum_{i=1}^I \left[\frac{2}{S_{ei}^2} \frac{c_i}{i_{ABi}} \left(\rho_{appi} - \left(\frac{c_i}{i_{ABi}} [V_{ABi}(x_{M_i}) - V_{ABi}(x_{N_i})] \right) \right) \int_{\Omega} [-\delta_D(x - x_{M_i}) + \delta_D(x - x_{N_i})] \delta V_{ABi} d\Omega \right]. \quad (82)$$

Desarrollando el variacional del segundo término de (82), obtenemos la expresión variacional del problema primario:

$$\sum_{i=1}^I \left[\int_{\Omega} \left[\nabla \cdot \left(\frac{dS_w(P)}{dP} \delta P \sigma_o \nabla V_{ABi} \right) + \nabla \cdot (S_w(P) \delta \sigma_o \nabla V_{ABi}) + \nabla \cdot (S_w(P) \sigma_o \nabla \delta V_{ABi}) \right] d\Omega \right] = 0, \quad (83)$$

sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} \delta P|_{\Gamma_D} &= 0, \\ \delta V_{ABi}|_{\Gamma_D} &= 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{dS_w(P)}{dP} \delta P \sigma_o \nabla V_{ABi} + S_w(P) \delta \sigma_o \nabla V_{ABi} + S_w(P) \sigma_o \nabla \delta V_{ABi} \right) \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_N} = 0. \end{aligned} \quad (84)$$

Si definimos el multiplicador de Lagrange $\epsilon_{ABi}(x)$ como un escalar como una función continua en el espacio:

$$\sum_{i=1}^I \left[\int_{\Omega} \left[\epsilon_{ABi} \nabla \cdot \left(\frac{dS_w(P)}{dP} \delta P \sigma_o \nabla V_{ABi} \right) + \epsilon_{ABi} \nabla \cdot (S_w(P) \delta \sigma_o \nabla V_{ABi}) + \epsilon_{ABi} \nabla \cdot (S_w(P) \sigma_o \nabla \delta V_{ABi}) \right] d\Omega \right] = 0, \quad (85)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \int_{\Omega} \nabla \cdot (S_w \sigma_o \nabla \epsilon_{ABi}) \delta V_{ABi} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{dS}{dP} \sigma_o (\nabla \epsilon_{ABi} \cdot \nabla V_{ABi}) \delta P d\Omega + \int_{\Omega} S_w (\nabla \epsilon_{ABi} \cdot \nabla V_{ABi}) \delta \sigma_o d\Omega \\ + \int_{\Gamma} \delta P \frac{dS}{dP} \sigma_o \epsilon_{ABi} \cdot \nabla V_{ABi} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta \sigma_o S_w \epsilon_{ABi} \nabla V_{ABi} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \\ + \int_{\Gamma} S_w \sigma_o (\epsilon_{ABi} \nabla \delta V_{ABi} - \delta V_{ABi} \nabla \epsilon_{ABi}) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (86)$$

y utilizamos la primera y la segunda identidad de Green para integrar los multiplicadores de Lagrange en los operadores de divergencia en la expresión (86).

Definiendo las condiciones de contorno para la variable adjunta:

$$\epsilon_{AB_i} \Big|_{\Gamma_D} = 0 \quad \text{y} \quad \nabla \epsilon_{AB_i} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Gamma_N} = 0. \quad (87)$$

De forma similar al problema hidráulico, las integrales a lo largo de las superficies desaparecen. El resto de las integrales se agrupan en las variaciones de V_{AB_i} , k_s , y P ; la variación de la función objetivo para el problema eléctrico $\delta \mathcal{L}_F(\sigma_o, \epsilon_{AB_i})$ es:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_F(\sigma_o, \epsilon_{AB_i}) = & \sum_{i=1}^I \left[\int_{\Omega} \nabla \cdot (S_w \sigma_o \nabla \epsilon_{AB_i}) d\Omega \right. \\ & + \frac{2}{S_{e_i}^2} \frac{c_i}{i_{AB_i}} R_{e_i} \int_{\Omega} [-\delta_D(x - x_{M_i}) + \delta_D(x - x_{N_i})] d\Omega \Big] \delta V_{AB_i} \\ & + \left. \sum_{i=1}^I \left[\int_{\Omega} \frac{dS_w}{dP} \sigma_o (\nabla \epsilon_{AB_i} \cdot \nabla V_{AB_i}) \delta P d\Omega + \int_{\Omega} S_w (\nabla \epsilon_{AB_i} \cdot \nabla V_{AB_i}) \delta \sigma_o d\Omega \right] \right]. \end{aligned} \quad (88)$$

Desarrollo de la ecuación de estado adjunta acoplada

Los dos desarrollos anteriores obtienen las variaciones de forma independiente, en lo siguiente nos referimos al aporte principal de este trabajo realizando la variación de la función objetivo acoplada (ecuación (49), y su variación corresponde con:

$$\begin{aligned} \delta \Phi(\sigma_o, k_s, \epsilon_{AB}, \lambda) = & \sum_{i=1}^I \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot (S_w^n \sigma_o(P) \nabla \epsilon_{AB_i}) + \frac{2}{S_{e_i}^2} \frac{c_i}{i_{AB_i}} R_{e_i} [-\delta_D(x - x_{M_i}) + \delta_D(x - x_{N_i})] \right] \delta V_{AB_i} d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left[\nabla \cdot \left(\frac{k_s S_w^n(P)}{\Upsilon} \nabla \lambda \right) + \frac{nd S_w^{n-1}(P)}{dP} \sigma_o (\nabla \epsilon_{AB_i} \cdot \nabla V_{AB_i}) - \sum_{j=1}^J \frac{2}{S_{H_j}^2} R_{H_j} \delta_D(x - x_j) \right. \\ & + \left. \frac{nd S_w^{n-1}(P)}{dP} \frac{k_s}{\Upsilon} (\nabla \lambda \cdot \nabla P) \right] \delta P d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \left(\frac{S_w^n(P)}{\Upsilon} (\nabla \lambda \cdot \nabla P) \delta k_s + S_w^n(P) (\nabla \epsilon_{AB_i} \cdot \nabla V_{AB_i}) \delta \sigma_o \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (89)$$

Agrupando las variaciones respecto al potencial eléctrico δV_{AB_i} , a la presión δP y a las variaciones de la conductividad eléctrica $\delta \sigma_o$ y permeabilidad hidráulica δk_s obtenemos las expresiones mostradas en el Capítulo 5.

Anexo D. Método tradicional de perturbaciones para calcular la sensibilidad

Para cuantificar la sensibilidad real de los datos acoplados a la presión, primero definimos un único valor objetivo sumando:

$$\Phi(\sigma_o, k_s) = \Phi_E + \Phi_H. \quad (90)$$

El cambio en este valor inducido por un cambio en un parámetro individual define la sensibilidad de los datos. Siguiendo esta definición, podemos aplicar el conocido método de perturbación, añadiendo un valor pequeño (perturbador) a cada parámetro y calculando su diferencia de datos como:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta\sigma_o} = \frac{\Phi_E(\sigma_o + \delta\sigma_o, k_s)}{\delta\sigma_o} + \frac{\Phi_H(\sigma_o + \delta\sigma_o, k_s)}{\delta\sigma_o}, \quad (91)$$

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta k_s} = \frac{\Phi_E(\sigma_o, k_s + \delta k_s)}{\delta k_s} + \frac{\Phi_H(\sigma_o, k_s + \delta k_s)}{\delta k_s}. \quad (92)$$

A pesar de su simplicidad, esta metodología resulta computacionalmente costosa (y poco práctica) para modelos tridimensionales. Una mejor opción es recurrir a los principios de reciprocidad implícitos en la teoría formal de estados adjuntos para calcular la sensibilidad a todos los parámetros simultáneamente.

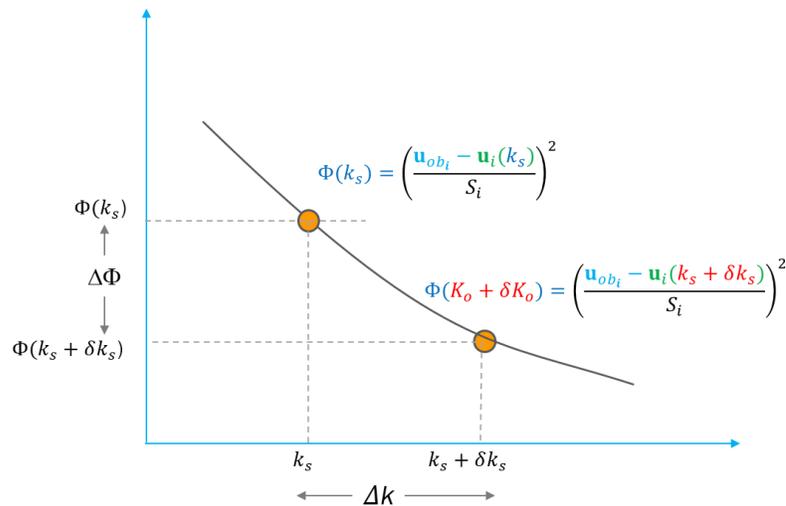


Figura 63. Esquema general del cálculo del gradiente de la función objetivo a partir del método tradicional de perturbaciones aplicado a perturbaciones de la permeabilidad hidráulica.

Anexo E. Validación del método de perturbaciones con el método adjunto

La Figura 64 muestra una comparación del resultado de aplicar las derivadas a la función objetivo según el método adjunto (lado izquierdo) y la derivada mediante la teoría de perturbaciones (derecha) para los modelos con gradiente hidráulico de la sección 6.1.1. La sensibilidad de la función objetivo a la conductividad eléctrica (véanse las Figura 64a y 64b) muestran una anomalía de sensibilidad típica en arreglos de tetraelectrodos (cf, e.g. Loke, 2024). Como es habitual, la mayor sensibilidad se produce cerca de los electrodos y de los receptores de potencial. Más allá de estas posiciones de los electrodos, la máxima influencia se produce en el centro del arreglo y se extiende hacia los receptores.

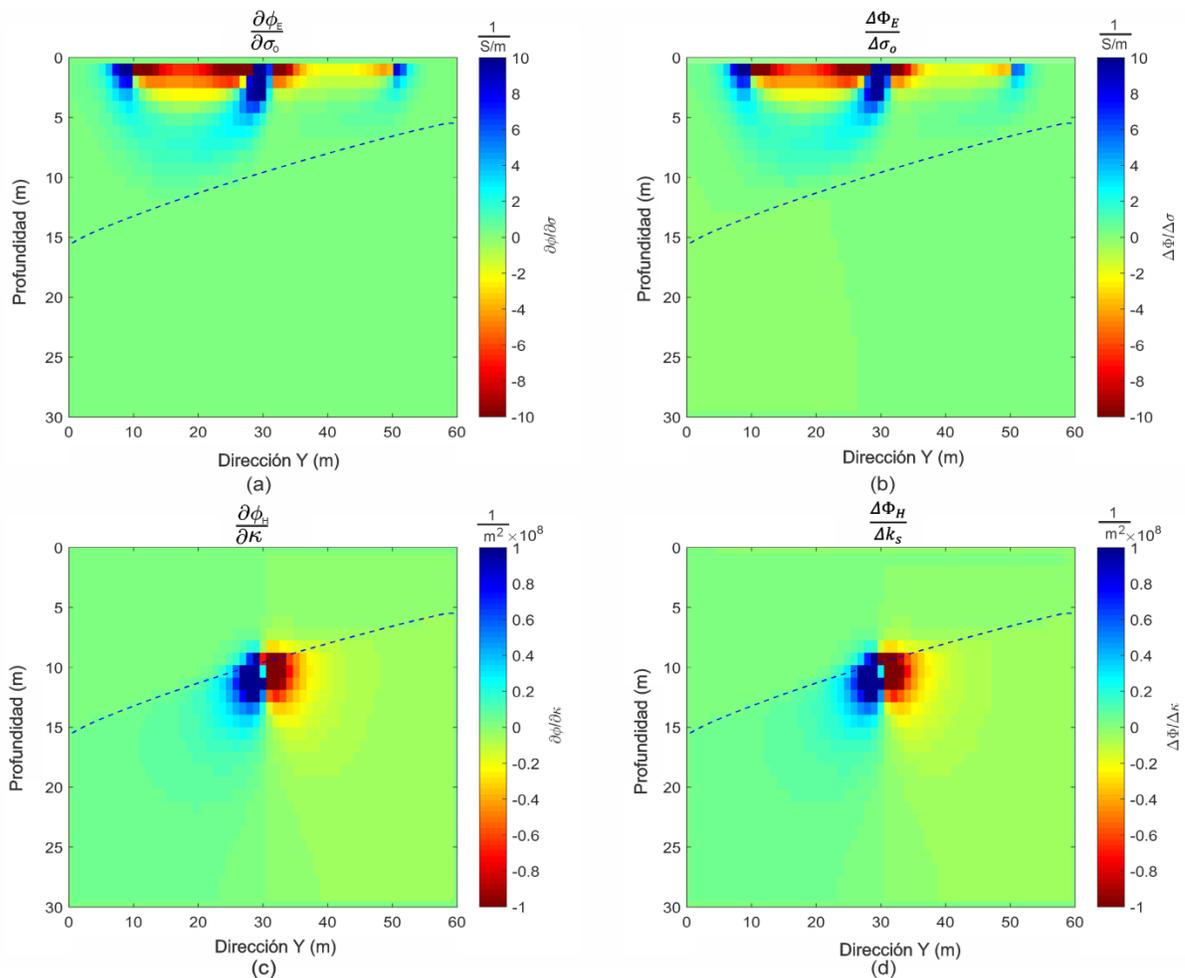


Figura 64. Sección transversal de las derivadas de la función objetivo de datos eléctricos respecto de la conductividad eléctrica saturada (fila superior) y de la función objetivo de datos hidráulicos respecto de la permeabilidad hidráulica (fila inferior) obtenidas por el método convencional de adjunto simple (columna izquierda) y por la teoría de perturbaciones (columna derecha) para un modelo homogéneo con gradiente hidráulico lateral, asociado a presiones locales.

En esta figura, la máxima sensibilidad se observa en la zona no saturada del modelo, influenciado principalmente por la ubicación de los electrodos en la superficie. La penetración disminuye debido a la intersección con el nivel freático.

La Figura 64 también presenta la sensibilidad de la función objetivo a la permeabilidad calculada mediante el método adjunto (Figura 64c) y la teoría de perturbaciones (Figura 64d) en un punto de observación ubicado en la celda ($x = 30$ m, $z = 11$ m). La sensibilidad es similar a la sensibilidad de la carga hidráulica, sujeta a un gradiente hidráulico constante, presentada por Lu & Vesselinov (2015). Muestra un dipolo horizontal con un lóbulo positivo en la dirección del gradiente, como el observado en la Figura 24b.

Anexo F. Derivadas para 5 episodios de tiempo caso 3,

En este apartado se muestran el resultado de los 5 episodios de tiempo para el ejemplo de la sección 6.2.3. (Tabla 9).

Sensibilidad de los datos eléctricos a la conductividad eléctrica

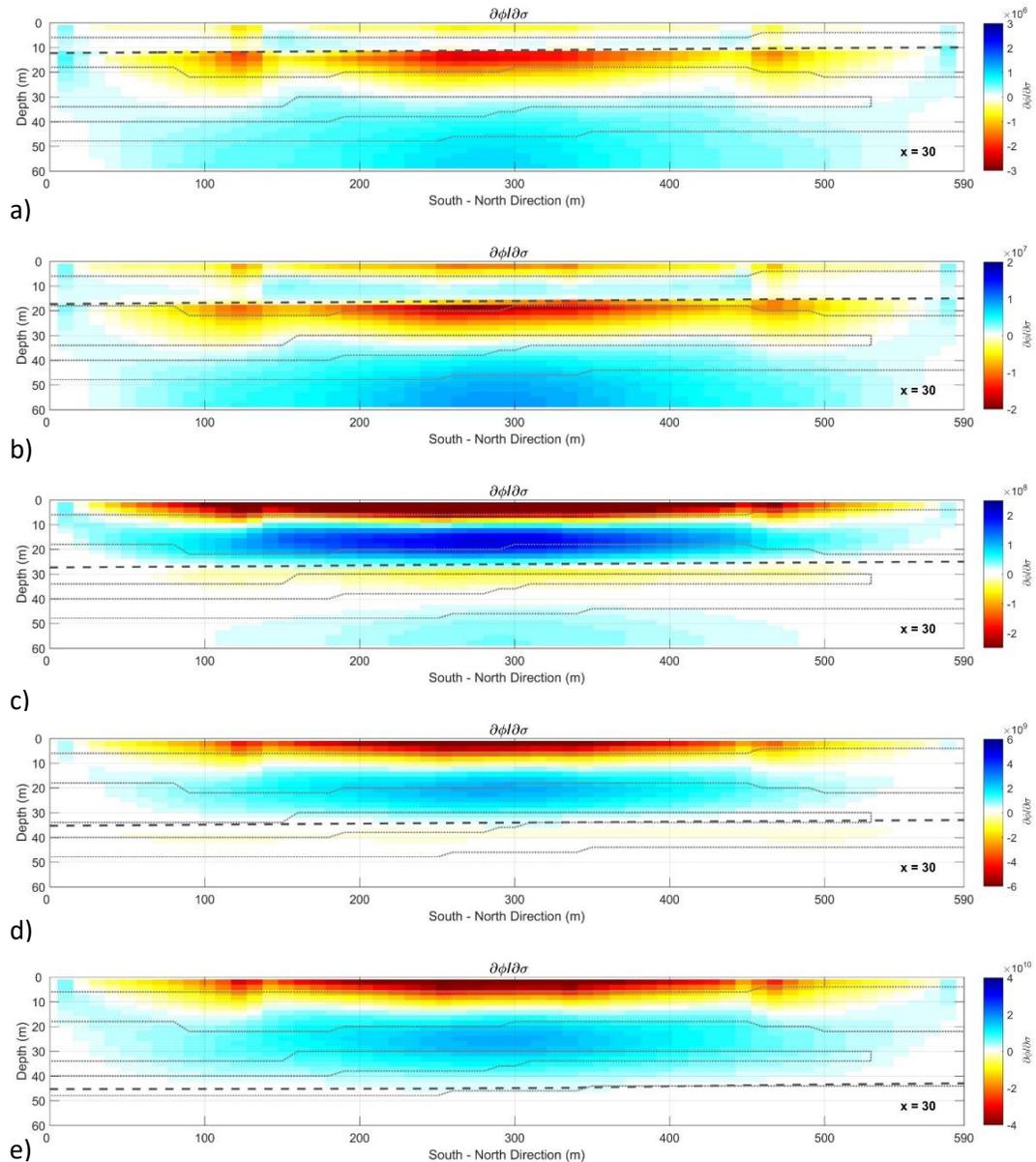


Figura 65. Sección transversal de las derivadas de la función objetivo de datos eléctricos con respecto a la conductividad eléctrica saturada para los escenarios ξ_1 (más superficial) al escenario ξ_5 (más profundo).

Sensibilidad de los datos del piezómetro de pozo a la permeabilidad hidráulica saturada $\left(\frac{d\Phi_H}{dk_s}\right)$

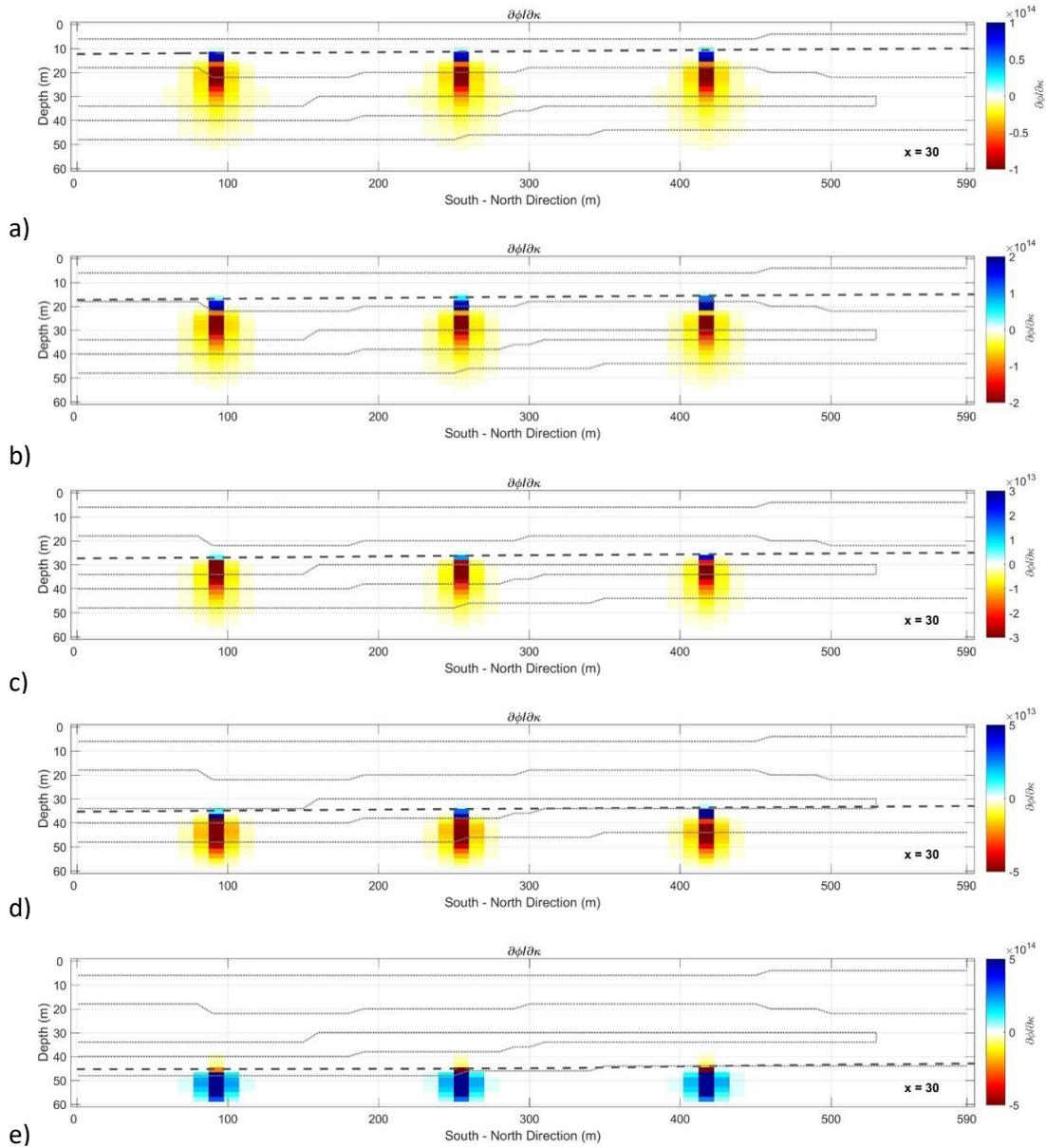


Figura 66. Sensibilidad de los datos hidráulicos con respecto a la permeabilidad hidráulica obtenida por el método adjunto separado convencional resolviendo el tercer término de la ecuación (Ecuación(52)). Para los 5 escenarios propuestos en la Tabla 9.

Sensibilidad acoplada de los datos eléctricos y de presión a la permeabilidad hidráulica saturada

$$\left(\frac{\partial \Phi_{AC}}{\partial k_s}\right)$$

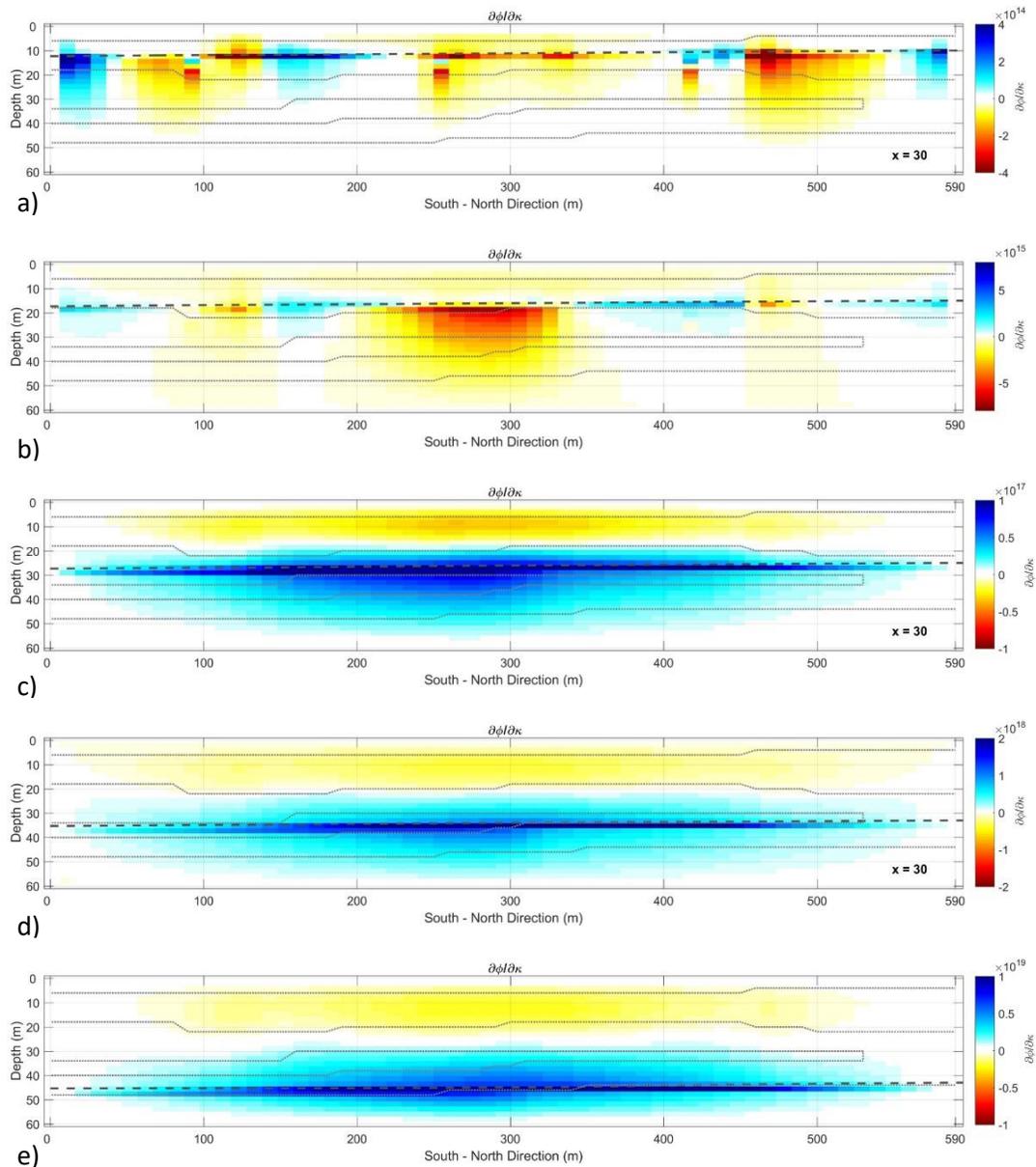


Figura 67. La sensibilidad conjunta de los datos hidráulicos y eléctricos con respecto a la permeabilidad hidráulica se obtiene mediante el método adjunto completamente acoplado dado por la ecuación (51). Para los 5 escenarios propuestos en la Tabla 9, cabe destacar que la contribución de los datos eléctricos a la sensibilidad es igual, e incluso superior, a la de los datos hidráulicos con respecto a la permeabilidad hidráulica.

Anexo G. Ajustes para los episodios de tiempo ξ_2 y ξ_3

En este apartado se muestra la información del ajuste de los datos observados, calculados y residuales del proceso de inversión para los episodios de tiempo ξ_2 y ξ_3 de la sección 7.5.2 (Figura 54).

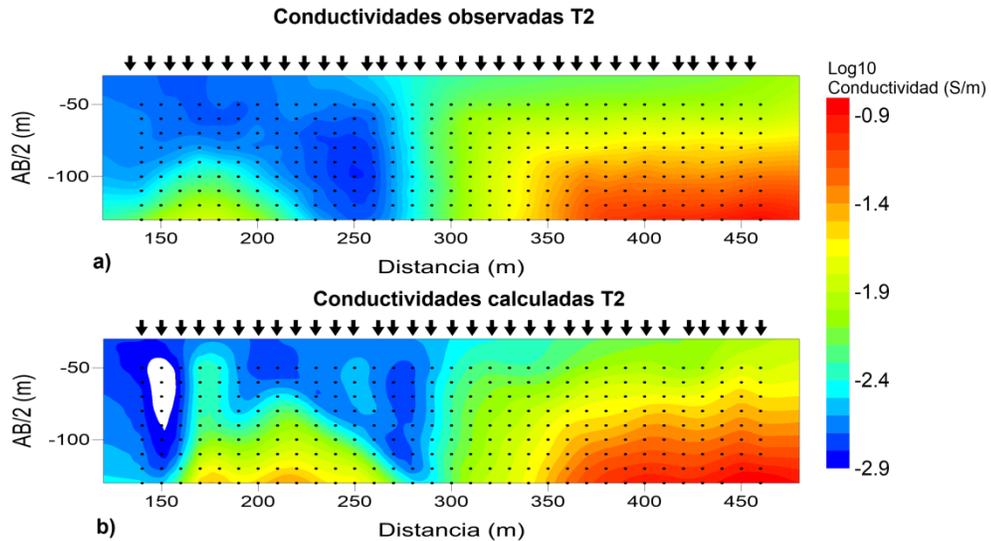


Figura 68. Pseudo sección de datos eléctricos sintéticos (a), datos calculados para la iteración 46 (b) y su respectivo mapa de residuales obtenidos del proceso de inversión de datos eléctricos para el episodio de tiempo ξ_2 (Figura 54b).

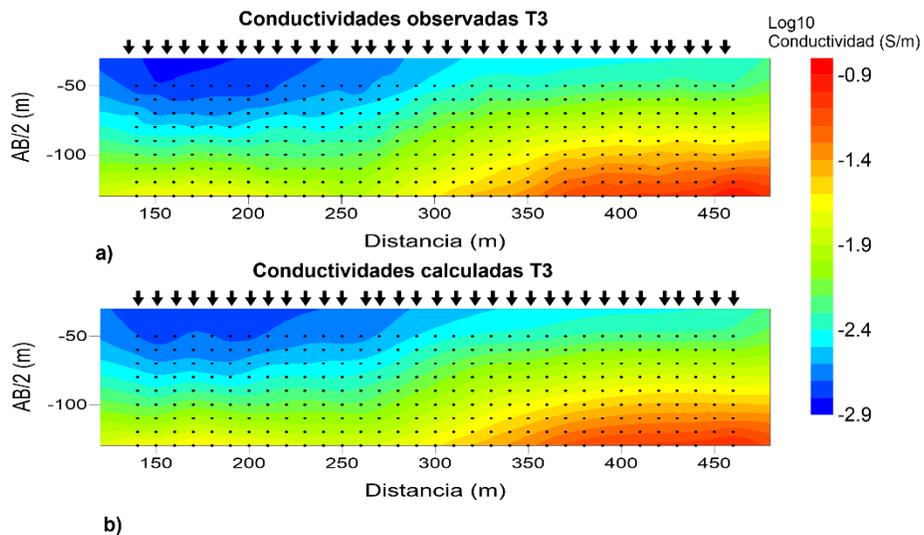


Figura 69. Pseudo sección de datos eléctricos sintéticos (a), datos calculados para la iteración 115 (b) y su respectivo mapa de residuales obtenidos del proceso de inversión de datos eléctricos para el episodio de tiempo ξ_3 (Figura 54c).

Anexo H. Lista de símbolos principales

Tabla 13. Principales símbolos utilizados

Propiedad	Símbolo	Unidades
Carga hidráulica	h	m
Caudal o gasto	Q	[m ³ /s]
Conductividad eléctrica (electrolítica)	σ_{El}	S/m
Conductividad eléctrica compleja (parte imaginaria)	σ''	S/m
Conductividad eléctrica del fluido	σ_w	S/m
Conductividad eléctrica saturada	σ_o	S/m
Conductividad eléctrica en un medio bifásico (variablemente saturada o efectiva)	$\sigma(P)$	S/m
Conductividad hidráulica	K	m/s
Densidad del agua	ρ_w	kg/m ³
Descarga específica	\vec{w}	m/s
Elevación	z	m
Factor de formación	F	Adimensional
Parámetro de suelo en SWRC	α_w	KPa
Parámetro de suelo en SWRC	β_w	Adimensional
Parámetro de suelo en SWRC	γ_w	Adimensional
Permeabilidad en un medio bifásico (variablemente saturada o efectiva)	$k(P)$	m ²
Permeabilidad hidráulica saturada	k_s	m ²
Permeabilidad relativa	k_r	Adimensional
Porosidad	η	Adimensional
Potencial eléctrico generado por las dos fuentes eléctricas	V_{ABi}	V
Presión hidráulica	P	KPa
Resistividad aparente calculada	ρ_{cal_i}	Ohm – m
Resistividad aparente observada	ρ_{ob_i}	Ohm – m
Saturación de agua en función de la presión hidráulica	$S_w(P)$	Adimensional
Viscosidad dinámica	Υ	kg/m · s