La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).
La investigación fue financiada por el SECIHTI (Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación).
Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.
CICESE © 2025, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California

---

Doctorado en Ciencias
en Ciencias de la Tierra
con orientación en Geofísica Aplicada

Propiedades eléctricas y magnéticas en la señal de Radar de Penetración Terrestre: Modelado directo y planteamiento del problema inverso

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

Presenta:

Alejandra Ixchel Sánchez Martínez

Ensenada, Baja California, México

2025

Tesis defendida por

Alejandra Ixchel Sánchez Martínez

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado
Director de tesis

Dr. Carlos Francisco Flores Luna

Dr. Diego Ruiz Aguilar

Dr. Josué Tago Pacheco

Dr. Diego Ruiz Aguilar
Coordinador del Posgrado en Ciencias de la Tierra

Dra. Ana Denise Re Araujo
Directora de Estudios de Posgrado

Copyright © 2025, Todos los Derechos Reservados, CICESE
Prohibida su reproducción parcial o total sin la autorización por escrito del CICESE

Resumen de la tesis que presenta Alejandra Ixchel Sánchez Martínez como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

Propiedades eléctricas y magnéticas en la señal de Radar de Penetración Terrestre: Modelado directo y planteamiento del problema inverso

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado
Director de tesis

El radar de penetración terrestre o georradar (GPR) es un método de prospección geofísica versátil y altamente resolutivo cuya señal se ve afectada por tres propiedades físicas: permitividad dieléctrica (ε), conductividad eléctrica (σ) y permeabilidad magnética (μ); sin embargo, es común considerar solamente la permitividad dieléctrica (en escasos casos la conductividad), y asumir que la permeabilidad magnética tiene una influencia poco significativa en los campos electromagnéticos (EM) en aplicaciones geofísicas. En este trabajo, analizamos el efecto distintivo de las tres propiedades, y con mayor detalle, el que tiene la permeabilidad magnética en la señal del radar más allá de la interpretación convencional. Para el modelado directo desarrollamos un algoritmo de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD), que considera heterogeneidades en ε, μ y σ para evaluar el tránsito de la onda electromagnética en distintos medios. Para los casos en una dimensión (1D) utilizamos modelos homogéneos. Para los ejemplos en 2D modelamos un ejemplo hipotético de medios equivalentes y modelos considerando un prospecto arqueológico hipotético. Para aproximar el problema inverso, planteamos una función objetivo restringida utilizando operadores de Lagrange y estimamos las derivadas de cada propiedad utilizando el método de campo adjunto. Del análisis de la señal EM considerando las tres propiedades, concluimos que la permeabilidad magnética no solo es tan relevante como otras variaciones de propiedades, sino que también es la única que afecta simultáneamente la velocidad y la atenuación de la onda electromagnética, e incluso puede producir una distribución de energía única, que se traduce en cambios en la polaridad de la señal del campo eléctrico o magnético, dependiendo de qué propiedad es la que está cambiando. Estos efectos son impredecibles por cualquier combinación de las otras dos propiedades EM, lo que aumenta la capacidad del GPR para caracterizar con mayor precisión los materiales del subsuelo.

Palabras clave: conductividad eléctrica, georradar, GPR, permitividad, permeabilidad, susceptibilidad magnética

Abstract of the thesis presented by Alejandra Ixchel Sánchez Martínez as a partial requirement to obtain the Doctor of Science degree in Doctor Applied Geophysics.

Electrical and magnetic properties in the Ground-Penetrating Radar signal: Forward modeling and inverse problem statement

Abstract approved by:

Ph.D. Luis Alonso Gallardo Delgado
Thesis Director

Ground-Penetrating Radar (GPR) is a versatile and highly resolving geophysical survey method whose signal is affected by three physical properties: dielectric permittivity (ε), electrical conductivity (σ), and magnetic permeability (μ); however, it is common to consider only the dielectric permittivity (in rare cases, conductivity), and to assume that magnetic permeability has little influence on electromagnetic (EM) fields in geophysical applications. In this work, we analyze the distinctive effect of the three properties, and in more detail, that of magnetic permeability on the radar signal, beyond the conventional interpretation. For forward modeling, we develop a Finite Difference Time-Domain (FDTD) algorithm, which considers heterogeneities in ε, μ, and σ to evaluate the electromagnetic wave transit in different media. For the one-dimensional (1D) cases, we use homogeneous models. For the 2D examples, we model a hypothetical coupled-layer example and a hypothetical archaeological prospect. To approximate the inverse problem, we pose a restricted objective function using Lagrangian operators and estimate the derivatives of each property using the Adjoint Field Method. From the analysis of the EM signal considering the three properties, we conclude that magnetic permeability is not only as relevant as other property variations, but it is also the only one that simultaneously affects the speed and attenuation of the electromagnetic wave, and can even produce a unique energy distribution, which translates into changes in the polarity of the electric or magnetic field signal, depending on which property is changing. These effects are unpredictable by any combination of the other two EM properties, which increases the ability of the GPR to characterize subsurface materials more accurately.

Keywords: Electrical conductivity, Ground-Penetrating Radar, permittivity, permeability, magnetic susceptibility

Dedicatoria

“Sé fuerte y valiente. No tengas miedo ni te desanimes. Porque el Señor tu Dios te acompañará dondequiera que vayas”

(Jsh 1:9)

Agradecimientos

Al pueblo de México, por proporcionar el financiamiento necesario para el desarrollo de este trabajo a través del SECIHTI (Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación), y al SECIHTI por gestionar los fondos para la beca doctoral.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, por facilitar el andamiaje necesario para hacer ciencia.

Al Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado, por su mentoría y paciente acompañamiento en el quehacer de la investigación: ¡Gracias profesor!.

A los miembros de mi comité de tesis: Dr. Carlos Francisco Flores, Dr. Josué Tago Pacheco y Dr. Diego Ruiz Aguilar por su guía y sus comentarios siempre oportunos.

Al personal de biblioteca, administrativo y técnico del CICESE, especialmente a Daniel Oviedo, Oscar Peña, Enid Morán, Magdalena Chávez, José Mojarro, Humberto Benítez y Yahaira Castañeda por el apoyo durante estos años: CICESE es un lugar más grato con su presencia.

A los profesores que influyeron en mi formación profesional al compartirme su conocimiento, pero sobre todo el tesón en su quehacer: Mtro. Manuel Paz Makiko, Mtro. Alfonso Vázquez E., Mtro. Raúl Soriano, Mtro. Melesio Reynoso, Lic. Tonantzin Fernández, Dra. Margarita Teutli, Dr. Nicolás Grijalva, Dr. Enrique Gómez Treviño y Dr. José Manuel Romo: "la palabra convence, el ejemplo arrastra".

A mi abuela Gloria, por ser ejemplo de fortaleza, tenacidad y amor: eres el pilar de nuestra familia.

A mis padres Lilia y Roberto, por *profesarme* de muchas maneras su amor: ¡lo logramos!.

A Musa y Migue, por su camaradería y sus consejos de media noche: son un faro en medio del mar.

A mi familia, porque en la distancia sus buenos deseos y oraciones me impulsaron.

A los amigos y colegas que me acompañaron en el proceso: Raúl-San, Sagahón, Gonzalo, Nancy, Viridiana, Daniela, Almendra, Fernando, Baltazar, Adelfo, Ollin, Zitlal, Cirilo, Jenny, José, Ananda, Thalia, Ana,

Jessica, Beatriz, Francy, Augus, y Zyan. Su presencia es una brisa suave que reconforta.

A la familia Acosta Angulo, especialmente a Miguel, con quien entendí el significado de la frase de Machado "Caminante no hay camino, se hace camino al andar".

A mi abuelo Andrés C. Oso, quien trascendió antes de ver culminado este proyecto pero que sabía mejor que yo que lo lograría.

A mis maestros y compañeros de la escuela Diocesana de Teología, en especial al profesor Vidal, porque sus aportes en clase me ayudaron a construir un puente entre dos mundos.

A mis compañeritos más amorosos, los rescatados, en especial a Secun... al final del día ellos terminaron rescatándome a mi con su dulzura.

A todos los que confiaron y caminaron conmigo: quienes estuvieron, quienes están... y a los que trascendieron en el camino: ¡gracias!.

Tabla de contenido

Página

Resumen en español ... ii

Resumen en inglés ... iii

Dedicatoria ... iv

Agradecimientos ... v

Lista de figuras ... ix

Capítulo 1. Introducción

1.1. Antecedentes ... 1
1.2. Justificación ... 3
1.3. Hipótesis ... 4
1.4. Objetivos ... 4
1.4.1. Objetivo general ... 4
1.4.2. Objetivos específicos ... 5
1.5. Estructura de la tesis ... 5

Capítulo 2. Fundamentos teóricos

2.1. Ecuaciones de Maxwell ... 6
2.2. Propiedades electromagnéticas ... 9
2.3. Generalidades del método de radar de penetración terrestre (GPR) ... 15

Capítulo 3. Modelado numérico de la señal de radar

3.1. Parametrización del modelo ... 23
3.2. Discretización de las ecuaciones de Maxwell ... 25
3.3. Solución numérica de las ecuaciones de Maxwell ... 27
3.4. Condiciones iniciales, términos de fuente y condiciones de frontera ... 30

Capítulo 4. Análisis de sensibilidad y teoría inversa

4.1. Teoría del campo adjunto ... 44
4.2. Ecuaciones de estado adjunto ... 50

Capítulo 5. Resultados

5.1. Caso unidimensional ... 55
5.1.1. Medios homogéneos ... 55
5.1.2. Medios heterogéneos ... 59
5.2. Caso bidimensional ... 63
5.2.1. Verificación numérica ... 63
5.2.2. Ejemplos de radar de pozo en medios con contrastes. ... 64
5.2.3. Medios acoplados: evaluando la ecuación de Helmholtz. ... 68
5.2.4. Aproximación arqueológica: el caso de la cabeza Olmeca ... 75

Capítulo 6. Discusión

6.1. Del análisis los ejemplos considerando variaciones en cada propiedad en medios homogéneos y con contraste 80
6.2. Acerca de la calibración con gprMax y los ejemplos considerando medios acoplados 81
6.3. Acerca del ejemplo modelando un prospecto arqueológico con una capa conductora 82
6.4. Acerca de la formulación del campo adjunto para el esquema de inversión de datos considerando las tres propiedades del radar 82
6.5. Respecto a la calibración de las derivadas 83
6.6. Acerca de aplicaciones específicas al considerar variaciones en la permeabilidad magnética 83
6.7. Trabajo futuro 84

Capítulo 7. Conclusiones

Literatura citada 87

Anexos 96

Lista de figuras

Figura Página

1. Representación del proceso de erosión en las rocas debido a cuñas de hielo; cuando el agua que entra en grietas y fracturas se congela y expande, ejerce una fuerza lo bastante fuerte como para disgregar la roca. Estos procesos erosivos alteran las propiedades físicas de las rocas de manera importante. Modificado de Essentials of Geology (Marshak, 2016). 9

2. Rangos de valores de permitividad eléctrica, datos recabados de Reynolds (1997); Butler (2005) y Reichard (2020). Note la coincidencia de los valores de permitividad para la mayoría de los materiales y que los valores abarcan dos órdenes de magnitud. 10

3. Rangos de conductividad eléctrica adaptados de Palacky (1987). Nótese el amplio rango (ocho órdenes de magnitud) de variaciones de conductividad para materiales individuales dependiendo de las condiciones específicas del material. 11

4. Rangos de susceptibilidad magnética adaptados de Paranis (1963), Reynols (1997), Sears (2018) y Reichard (2020). Nótese el rango de variación y la distinción entre los grupos dominantes identificados como magnéticos y no magnéticos. 13

5. Rangos de frecuencias típicas de radar. Observe que muchas de estas frecuencias pueden interferir con aparatos comúnmente utilizados (Figura de la izquierda). La imagen de la derecha presenta un esquema sencillo de las principales componentes del radar. Modificada de Annan (2009). 16

6. Ejemplo de traza idealizada de una señal de radar (arriba), una traza con ruido ambiental (en medio) y de un radargrama típico (abajo). Modificado de Conyers (2015). 18

7. Diagrama de la distribución de los patrones de ondas al incidir sobre una superficie. Se registran al menos 3 ondas: la onda de aire, la onda terrestre que viaja en la interfaz aire-tierra, y la onda reflejada, generada cuando la onda incidente interactúa con la interfaz en el subsuelo. 21

8. Diagrama esquemático de la celda de Yee. Las componentes de campo eléctrico se representan con flechas azules, mientras que las de campo magnético se localizan en el centro de las caras con flechas anaranjadas. Se muestran las componentes en tres, dos y una dimensión. Note que en 2D y 1D podemos tener dos modos para el modelado. Modificado de Sullivan (2013). 23

9. Modos de polarización de la señal EM, a la izquierda el campo eléctrico es paralelo al perfil (Modo TM o polarización H), a la derecha el campo eléctrico es perpendicular al perfil (modo TE o polarización E). Tx y Rx se refieren a la antena transmisora y receptora. 26

10. Ejemplos de formas de onda que pueden ser utilizados como fuente. Se muestra un ejemplo para una Gaussiana (izquierda), un pulso modulado (centro) y una onda de Ricker (derecha). En todas las figuras el eje horizontal es el tiempo (segundos) y el eje vertical la amplitud de la onda. 31

11. Pulso Gaussiano viajando en el medio numérico $1D$ para una ventana temporal de cien pasos. Se muestran las componentes Ex y Hy. 32

12. Condiciones de frontera absorbentes aplicadas a un modelado FDTD, note como el pulso va desplazándose por el espacio numérico y es absorbido al llegar a las orillas del dominio. 34

13. Diagrama esquemático de las condiciones PML. 35

Figura Página

14. Modelos ejemplificativos de los fundamentos de la teoría de imágenes de Claerbout. La figura superior izquierda se refiere a una geometría de offset zero, la superior derecha a el caso de reflectores explosivos. Las figuras inferiores muestran ejemplos de tres 'reflectores explosivos' para tiempos de viaje de offset cero. Modificada de Yilmaz, 2001. 53

15. Diagrama de flujo del algoritmo. 54

16. Imágenes instantáneas de campo eléctrico (columna izquierda) y magnético (columna derecha). En todos los ejemplos la permeabilidad ($\mu_r = 1$) y conductividad eléctrica ($\sigma = 0$ S/m) son constantes. En esta figura, se resaltan las variaciones en la permitividad dieléctrica. Note el cambio en la velocidad de propagación de la señal y en la amplitud entre la curva anaranjada vs la azul. 55

17. Imágenes instantáneas de campo eléctrico con valores de permeabilidad y conductividad constantes, en esta figura se resaltan los efectos en la señal debido a la permitividad. Note el evidente cambio en la velocidad y amplitud de la señal con el aumento de ε, la señal en a) y b) viaja mucho más rápido que en e) y f), debido al incremento en ε, también podemos notar un cambio en la amplitud de la onda. 56

18. Imágenes instantáneas de campo eléctrico y magnético para dos valores de permeabilidad magnética. Los valores se seleccionaron pequeños, para ejemplificar el cambio en la señal considerando variaciones en μ. 57

19. Imágenes instantáneas de campo eléctrico y magnético donde $\varepsilon_r = 1$ y $\sigma = 0.00$ S/m en todos los ejemplos. Se muestran variaciones en permeabilidad magnética. 58

20. Imágenes instantáneas para cambios en la conductividad eléctrica. $\varepsilon_r = 1$ y $\mu_r = 1$. Los valores de la conductividad eléctrica se muestran en las gráficas. 59

21. Campos eléctricos (columna izquierda) y magnéticos (columna derecha) para un medio con dos capas contrastantes respecto a ε en distintos instantes de tiempo. En la transición entre los medio hay efectos de reflexión de la onda EM. El cambio en la polaridad de la onda reflejada solo ocurre en la componente de campo eléctrico Ex. 60

22. Campos eléctricos (columna izquierda) y magnéticos (columna derecha) para un medio con dos capas contrastando los valores de μ. Los valores de los otros parámetros físicos son $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 3$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.0001$ S/m. Tenga en cuenta que para este ejemplo, un cambio en la polaridad ocurre solo en el campo magnético. 61

23. Campos eléctricos (columna izquierda) y magnéticos (columna derecha) para un medio con dos capas con contrastes en σ. Los valores de los demás parámetros físicos son: $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 3$ y $\mu_1 = \mu_2 = 1.1$. Para la primera capa: $\sigma_1 = 0.0001$ S/m y $\sigma_2 = 0.01$ S/m para la capa dos. Tenga en cuenta el efecto sobre la atenuación de la señal en campos eléctricos y magnéticos. 62

24. Trazas seleccionadas del campo eléctrico (izquierda) y magnético (derecha) estimados. Las respuestas de nuestro algoritmo se muestran en azul, la traza en rojo corresponde al modelo de gprMax. Las figuras de los páneles superiores corresponden a la propagación en un medio homogéneo, mientras que los páneles inferiores pertenecen a una propagación a través de dos medios con distintas propiedades. 64

Figura Página

25. Diagrama de distribución de las antenas transmisoras y receptoras para algunos ejemplos de radar de pozo. El plano de observación se encuentra en x-z. 65

26. Conjunto de trazas bidimensionales para un ejemplo de radar de pozo. La columna de la izquierda corresponde a la componente Ey (campo eléctrico). La columna de la derecha muestra, en todos los casos, la componente del campo magnético Hz. Para los incisos en a) y b): $\varepsilon_{r1} = 3$, $\varepsilon_{r2} = 8$, $\mu_{r1} = \mu_{r2}$, $\sigma_1 = \sigma_2$. Para -c) y d)- el modelo incluye variaciones en σ, por lo que ε y μ son constantes. Las imágenes e) y f) representan la variación de $\mu_{r1} = 1.1$ en el primer medio y $\mu_{r2} = 3$ para el segundo medio. 66

27. Instantáneas bidimensionales para diferentes pasos de tiempo para el componente Ey. Los ejemplos corresponden a variaciones en la permitividad eléctrica (primera fila), conductividad eléctrica (segunda fila) y permeabilidad magnética (tercera fila). 67

28. Lista de las propiedades para los modelos de medios acoplados, considerando dos constantes: la velocidad de propagación -c-, y el factor de atenuación -α_t-. 68

29. Trazas 2D para diferentes pasos de tiempo para las componentes de campo Ey y Hz. Los ejemplos corresponden a modelos equivalentes respecto a la velocidad de onda (cte c): $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2$. La conductividad eléctrica permanece constante en todo el volumen: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.001$ S/m. 69

30. Trazas 2D para diferentes pasos de tiempo para las componentes de campo Ey y Hz. Los ejemplos corresponden a modelos acoplados respecto a la constante de atenuación donde: $\sigma_1\mu_{r1} = \sigma_2\mu_{r2}$. La permitividad eléctrica es $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 1$ en los dos medios. . . 70

31. Trazas 2D para diferentes pasos de tiempo, se muestran las componentes Ey y Hz. Estos modelos incluyen variaciones en los tres parámetros para condiciones de medios completamente acoplados, de manera que $\varepsilon_{r1}\mu_{r1} = \varepsilon_{r2}\mu_{r2}$ and $\sigma_1\mu_{r1} = \sigma_2\mu_{r2}$, para las componentes eléctricas y magnéticas. 71

32. Análisis de la impedancia para el ejemplo de los medios acoplados. Los paneles a) y b) corresponden a una propagación sin cambios en las propiedades; en c) y d), la permitividad presenta una variación muy pequeña, mientras que en e) y f) se han acoplado los valores de impedancia en ambos medios de modo si no se considera μ en el modelado, hay efectos no predichos en la señal EM. 73

33. Fotografía histórica (izquierda) y diagrama esquemático para los parámetros seleccionados para el modelo(derecha). Crédito de la imagen: Richard Hewitt Stewart/National Geographic Creative, Cabeza Colosal Olmeca, Monumento 1, San Lorenzo, 1946, en Matthew Stirling, NationalGeographic, Washington. 75

34. Snapshots seleccionadas de la componente Ez para el ejemplo de Los Tuxtlas. El círculo indica la ubicación de la cabeza Olmeca. 76

35. Radargramas bidimensionales de las componentes Ez (izquierda) y Hy (derecha) del ejemplo de Los Tuxtlas. Los paneles a) y b) corresponden a $\mu_r = 1$. Observe el efecto de los paneles c) a h) debido al incremento de la permeabilidad, resaltado con círculos rojos. 77

36. Radargramas bidimensionales de los componentes Ez (izquierda) y Hy (derecha) del ejemplo de Los Tuxtlas, incluyendo una capa de arcilla. Los paneles a) y d) corresponden a los diagramas que muestran la posición de la capa de arcilla (capa amarilla). Los paneles b, c, e y f corresponden a los radargramas de las componentes de campo eléctrico (b y e) y magnético (c y f). Observe el efecto de la capa de arcilla en la señal de radar; en las figuras b y c se puede observar un efecto de atenuación esperado. 78

Capítulo 1. Introducción

El desarrollo de la vida humana depende de su integración con el entorno natural y con ello del acceso a sus recursos; sin embargo, la identificación de la existencia y abundancia de estos recursos debajo del suelo es una tarea difícil y demandante.

En la actualidad, los métodos geofísicos constituyen una de las herramientas más efectivas y económicas para investigar los materiales del subsuelo sin necesidad de excavaciones directas; para ello, podemos utilizar los distintos tipos de interacciones mecánicas y electromagnéticas (EM) que ocurren entre los materiales del subsuelo y diversos dispositivos geofísicos de medición.

Dentro de los métodos geofísicos, la familia de métodos electromagnéticos constituyen una herramienta valiosa, pues permite analizar las cargas eléctricas que suelen ser transportadas a través del agua contenida en el subsuelo.

El radar de penetración terrestre o GPR (por su acrónimo en inglés), es especial entre los métodos electromagnéticos de prospección geofísica ya que por la rapidez de sus oscilaciones, no solo detecta las cargas circundantes, sino que también capta el momento en que las cargas son retenidas en su viaje, llegando a distinguir materiales de unos cuantos centímetros de espesor. Es por esto que las aplicaciones del georradar son muy variadas.

1.1. Antecedentes

Algunas de las aplicaciones más conocidas del GPR son la búsqueda de objetos enterrados de civilizaciones antiguas, montículos y patrones de asentamiento, vestigios de edificios antiguos, tumbas mortuorias, entre otros (Conyers, 2015; Conyers et al., 2019; Verdonck et al., 2020; Ebraheem & Ibrahim, 2021). En geotecnia, se utiliza para ubicar y evaluar el estado de tuberías de agua y de drenaje; así como para determinar las condiciones del concreto y del pavimento en edificios y caminos (Cassidy et al., 2011; Liu et al., 2020; Zhou & Zhu, 2021; Almalki & Khalid, 2024). Recientemente, se ha implementado en geofísica forense para identificar objetos y restos humanos enterrados (Schultz et al., 2006; Schultz & Martin, 2012; Aditama et al., 2015; Pringle et al., 2020). Se ha empleado también para localizar minas y restos de bombas de guerra sin explotar conocidas como UXO por su acrónimo en inglés -Unexploded Ordnance- (Arcone et al., 2010; Giannakis, 2016).

Otro de los usos comunes de este método es el estudio de glaciares, nieves perpetuas y permafrost

(Hamran et al., 1998; Murray et al., 2007; Woodward & Burke, 2007; Boisson et al., 2011), y en contextos geohidrológicos, para mapear el contenido de agua en las rocas e identificar la transición entre la zona saturada y la no saturada (zona vadosa). También se ha utilizado para determinar plumas contaminantes en distintos ambientes (Strobbia & Cassiani, 2007; Minet et al., 2010; Klotzsche et al., 2018; Zhou et al., 2019) entre otras aplicaciones.

Para la implementación del método, es necesario analizar la propagación de la onda electromagnética en el medio. Usualmente la onda EM, que es emitida por una antena transmisora, se propaga de manera uniforme hasta que encuentra alguna discontinuidad en el medio; esta heterogeneidad puede ser provocada por un cambio litológico natural o bien por la ocurrencia de cuerpos antropogénicos. La onda es reflejada y regresa a la superficie donde es detectada por una antena receptora.

La señal captada por la antena receptora contiene los registros de las amplitudes de la señal EM y se organiza en perfiles yuxtapuestos conocidos como radargramas. Usualmente esta señal está en el dominio del tiempo y registra la distancia recorrida por el radar en superficie vs el tiempo que tardó en regresar, el cuál es un indicio de la profundidad de penetración de la señal. Además de la profundidad, estos radargramas contienen información sobre las estructuras subterráneas como cambios litológicos, cavidades, tuberías, discontinuidades en el medio, objetos enterrados, entre otros. Para identificar la presencia de estos rasgos, es necesario hacer un análisis de la señal con el fin de mejorar la calidad de los radargramas.

En la práctica es común que, a pesar de haber realizado un procesamiento a los registros de radar, resulte complicado interpretar la señal, o bien, se necesita identificar con mayor certidumbre, rasgos que el procesado convencional de datos no puede resolver; en estos casos, el modelado numérico permite recrear el medio y la propagación de la onda controlando sus características en un esquema computacional.

Los métodos numéricos resuelven computacionalmente las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de propagación de las ondas, realizando una discretización espacio/temporal del medio y la señal EM; es decir, pasamos de un medio continuo a uno discreto. Dependiendo cómo se realiza esta discretización, estos métodos se dividen en familias distintas, entre las más comúnmente empleadas están los métodos de volumen finito (Eymard et al., 2000; Versteeg & Malalasekera, 2007; Fumeaux et al., 2008), elemento finito (Zienkiewicz et al., 1993; Mogi, 1996; Farquharson & Miensopust, 2011; Gallardo-Romero & Ruiz-Aguilar,) y diferencias finitas (Taflove et al., 2005; Leveque, 2007; Sullivan, 2013). Todos ellos discretizan el dominio y pueden ser desarrollados en el dominio del tiempo o de la frecuencia. La elección del método adecuado para modelar cada caso de estudio, dependerá de las capacidades computacionales que se

tengan a disposición, las características particulares del problema y algunas consideraciones adicionales.

El método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD por su acrónimo en inglés) es una aproximación a la solución de las derivadas de las ecuaciones diferenciales, utilizando relaciones matemáticas sencillas para un medio discreto en tiempo y en espacio. Esta discretización permite modelar las ondas electromagnéticas en su paso a través de un medio heterogéneo caracterizado por su permitividad dieléctrica, conductividad eléctrica y permeabilidad magnética. Diferente a otras aplicaciones, en geofísica comúnmente se desprecian las variaciones en la permeabilidad magnética en el modelado de la señal de radar por considerar su influencia poco significativa; sin embargo, solo hay un puñado de publicaciones científicas que justifican esta suposición comúnmente aceptada.

1.2. Justificación

A la fecha, solamente algunos autores han analizado el efecto de la permeabilidad magnética en la señal de radar, tanto en estudios de laboratorio (Olhoeft, 1998; Cassidy, 2008; Van Dam et al., 2013), como en modelado numérico ya sea utilizando una solución por integrales u otras aproximaciones (Lazaro Mancilla, 1999; Pettinelli et al., 2007; Cassidy & Millington, 2009; Persico et al., 2012), o bien usando FDTD como los trabajos de Daniels et al. (2009), Holliger et al. (2003), Chen et al. (1998), Texeira et al. (1998), entre otros.

También es cierto que, en los últimos años, el efecto de las propiedades magnéticas en la señal del radar ha ganado un renovado interés debido a los efectos que muchos objetos antropológicos provocan en la señal electromagnética. Por ejemplo, en ingeniería civil y estudios geotécnicos (Liu et al., 2020; Almalki & Khalid, 2024; Ali et al., 2024), modelando minas de guerra (Takahashi et al., 2011; Giannakis, 2016; Onyebueke et al., 2024), en misiones a otros planetas o satélites (Hamran et al., 2015, 2020; Paige et al., 2024; Guan et al., 2024), entre otros. En estos objetos se distingue una fuerte respuesta magnética, la cuál es mucho más marcada incluso que su respuesta eléctrica.

En los rangos de frecuencia del radar, la experiencia indica que el efecto de los materiales ferromagnéticos e incluso paramagnéticos puede tener una respuesta considerable en la señal, pero ¿es posible determinar individualmente la contribución de la permeabilidad magnética en la señal de radar?, ¿se puede distinguir más fácilmente la permeabilidad por su respuesta magnética que por la eléctrica?, ¿incluir la permeabilidad magnética en el modelado es ventajoso para la interpretación de los registros de radar?

1.3. Hipótesis

Dado que la influencia de la permeabilidad magnética se suma a la de otras propiedades electromagnéticas, surge la pregunta de si los contrastes en esta propiedad podrían tener un impacto significativo en la señal de radar y por ende, en el modelado de datos geofísicos. Además, considerando las diversas aplicaciones del radar en materiales naturales y de ingeniería, resulta interesante intentar incorporar los efectos de μ en el modelado electromagnético.

Si consideramos que las señales de radar operan en un rango de frecuencias relativamente altas, analizar la influencia de la permeabilidad magnética en conjunto con las variaciones de la permitividad y la conductividad eléctrica dentro de este rango de frecuencia podría arrojar información valiosa. Postulamos que la permeabilidad magnética afecta las observaciones de manera distinta a la permitividad o la conductividad, y por tanto, puede aportar información complementaria en el proceso de modelado e inversión de datos de radar.

1.4. Objetivos

Con el fin de estudiar cada propiedad por separado en la señal de radar así como su contribución acoplada, se plantean los objetivos que a continuación se enlistan:

1.4.1. Objetivo general

Analizar la influencia de las tres propiedades electromagnéticas y, más particularmente, la de la permeabilidad magnética en la propagación de ondas para el rango de frecuencia de las señales de radar y sus implicaciones en la formulación del problema inverso, implementando un modelado de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD).

1.4.2. Objetivos específicos

- Analizar la contribución de la permitividad dieléctrica, la conductividad y la permeabilidad magnética de la señal de radar en distintas componentes de campo eléctrico y de campo magnético.
- Analizar si es posible distinguir una firma de cada una de las propiedades en la señal de radar.
- Desarrollar los elementos necesarios para plantear una aproximación al problema de inversión de datos de radar de penetración considerando las tres propiedades.

1.5. Estructura de la tesis

Nuestra investigación se describe en este texto en cinco capítulos. El primero abarca algunos estudios que se han hecho en radar considerando la importancia de la permeabilidad magnética, y nuestra justificación para querer estudiar más a profundidad su influencia en la señal del radar. El segundo capítulo estudia los fundamentos teóricos del modelado electromagnético, con un énfasis teórico/experimental de las propiedades físicas a las que es sensible la señal de radar. El capítulo tres establece la formulación matemática del método de diferencias finitas y describe parámetros importantes a tener en consideración para el modelado numérico. El capítulo cuatro describe el planteamiento del problema de inversión buscando determinar las tres propiedades electromagnéticas de un medio heterogéneo. El quinto capítulo contiene los resultados del modelado directo en una y dos dimensiones. Finalmente los últimos dos capítulos incluyen algunas conclusiones y discusiones de esta investigación así como algunas perspectivas de trabajo futuro.

Capítulo 2. Fundamentos teóricos

En los métodos electromagnéticos de prospección geofísica, la propagación de las ondas electromagnéticas en los medios está descrita por las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo; estas ecuaciones pueden plantearse tanto en el dominio del tiempo o en el dominio de la frecuencia; mientras que ambas ecuaciones son válidas, la conveniencia de usar una o la otra depende de la naturaleza del fenómeno que queremos estudiar. Estas ecuaciones solamente incluyen relaciones entre campos de fuerza o bien relaciones entre movimiento, por lo que además, se deben plantear ecuaciones que las relacionen de acuerdo a los materiales por los que estos campos están propagándose (relaciones constitutivas); el conjunto de todas estas ecuaciones son la base en el modelado de las ondas emitidas por el radar en su tránsito a través del subsuelo.

En este capítulo, se describirán las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo, su relación con las propiedades electromagnéticas en materiales comúnmente estudiados en geofísica, tanto en medios naturales como fabricados artificialmente (de ingeniería). Finalmente, se describirán los elementos teóricos más particulares para la realización de experimentos del radar de penetración terrestre.

2.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell describen la propagación espacio-temporal de los campos electromagnéticos. En el dominio del tiempo y en su forma diferencial se expresan como:

1. Ley de Gauss para campos eléctricos:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \tag{1}$$

2. Ley de Gauss para campos magnéticos:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

3. Ley de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{3}$$

y

4. Ley de Ampere:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \tag{4}$$

En estas ecuaciones **E** es la intensidad del campo eléctrico, ρ es la densidad de carga eléctrica, **H** es la intensidad del campo magnético, **J** es la densidad de corriente eléctrica, **B** es la densidad de flujo magnético y **D** es el desplazamiento eléctrico.

Las relaciones constitutivas definen las relaciones entre la fuerza y el movimiento a través de la materia y es así que nos permiten relacionar los campos EM con las características del medio. En el caso más simple, se asume que el flujo es directamente proporcional al campo que lo impulsa y la constante correspondiente describe así el grado en el cuál la materia permite este movimiento. Si además se asume que en el medio no varía la facilidad de tránsito de los campos con el tiempo, entonces estas relaciones constitutivas toman la forma:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \tag{5}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \tag{6}$$

y

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \tag{7}$$

donde ε, μ y σ se denominan permitividad eléctrica, permeabilidad magnética y conductividad eléctrica respectivamente.

Reescribimos las ecuaciones 3 y 4 como:

$$\nabla \times \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{s}, \tag{8}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0, \tag{9}$$

donde $\mathbf{s}$, corresponde al término de fuente.

A diferencia de lo que ocurre en el aire, la alta disponibilidad de cargas libres en un medio como la tierra hace que el transporte de cargas por arrastre (**J**) sea mucho mayor que por desplazamiento dipolar, por lo que es usual considerar en geofísica solamente la parte difusiva (primer término del lado derecho) de la ecuación 4; sin embargo, en radar dada la rapidez de las oscilaciones de la señal utilizamos todos los términos de la ley de Ampere.

Si consideramos un medio magnéticamente homogéneo (aseveración usual en el modelado electromagnético) podemos acoplar las ecuaciones 8 y 9 en una sola expresión conocida como la *ecuación de Helmholtz* y expresarla ya sea en términos de campo eléctrico o campo magnético formando una ecuación de onda atenuada. La ecuación de Helmholtz en el dominio del tiempo en términos de campo eléctrico y sin ninguna fuente externa es:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 0 \tag{10}$$

En la ecuación 10, el segundo término corresponde a la parte dispersiva de la onda, mientras que el tercer término corresponde a la parte difusiva o de disipación de la energía de la señal. La señal de radar de penetración terrestre viaja mayores distancias cuando la disipación de la energía por difusión es baja.

En el dominio de la frecuencia la ecuación 10 se convierte en:

$$\nabla^2\mathbf{E} + (\mu\varepsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega)\mathbf{E} = 0, \tag{11}$$

la cuál se suele expresar como:

$$\nabla^2\mathbf{E} + \gamma^2\mathbf{E} = 0. \tag{12}$$

Donde $\omega = 2\pi f$ (f es la frecuencia angular) y γ es la constante de propagación (siendo $\gamma^2 = \varepsilon\mu i\omega^2(i + \frac{\sigma}{\omega\varepsilon})$).

La constante de propagación puede expresarse en términos de la atenuación (Np/m) y la fase (rad/m), de manera que:

$$\gamma = \alpha + i\beta \tag{13}$$

siendo:

$$\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}\right)^{1/2} - 1\right]^{1/2}\right\} \tag{14}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}\right)^{1/2} + 1\right]^{1/2}\right\} \tag{15}$$

Estos términos están relacionados a las tres propiedades del medio. En particular, el término β se refiere al *skin depth* que es la distancia (m) que tiene que viajar una onda antes de que su amplitud se reduzca

en un factor equivalente a e^{-1} o aproximadamente el $37\,\%$ (Reynolds, 1997), de modo que:

$$e^{\beta\delta} = e^{-1} \tag{16}$$

i.e. $\delta = \frac{1}{\beta}$.

Al pasar de un medio homogéneo a otro, o bien al considerar los límites finitos de un medio, las ecuaciones de Maxwell deben cumplir simples condiciones de continuidad donde: 1) los campos tangenciales son continuos en las fronteras, tanto del campo eléctrico como del magnético, y 2) las componentes normales de la corriente total y del flujo magnético son continuos en las interfaces entre medios.

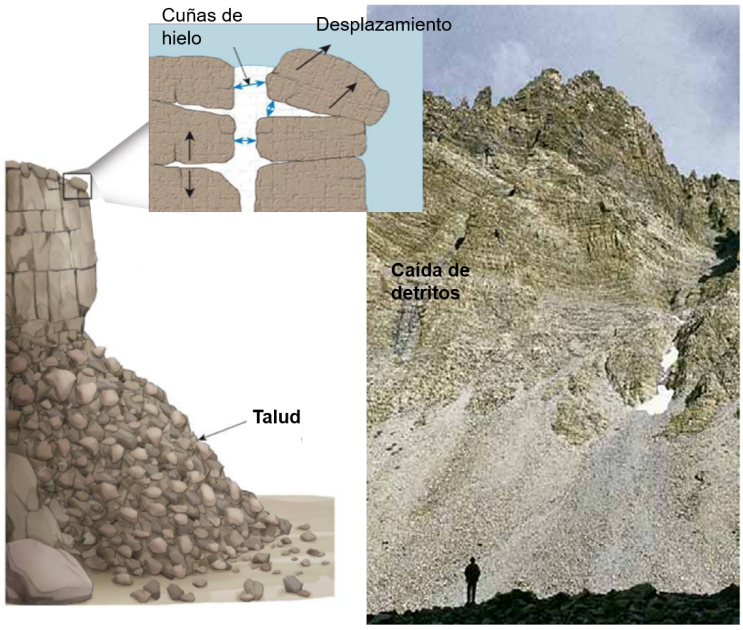

Figura 1. Representación del proceso de erosión en las rocas debido a cuñas de hielo; cuando el agua que entra en grietas y fracturas se congela y expande, ejerce una fuerza lo bastante fuerte como para disgregar la roca. Estos procesos erosivos alteran las propiedades físicas de las rocas de manera importante. Modificado de Essentials of Geology (Marshak, 2016).

2.2. Propiedades electromagnéticas

Los materiales que constituyen nuestro planeta, tienen un amplio rango de variaciones respecto a sus propiedades electromagnéticas, estas variaciones dependen de distintos factores por ejemplo, de su contenido de agua, grado de erosión de los materiales, contenido mineral, entre otros (ver figura 1). Como se explicó anteriormente, las relaciones constitutivas nos permiten definir las propiedades electromagnéticas de los materiales a partir de los campos de fuerza y el movimiento a través de la materia.

El radar de penetración terrestre transmite señales electromagnéticas de muy alta frecuencia que generan movimiento de cargas por desplazamiento y rotación. La intensidad de estas corrientes depende de ε, μ y σ respectivamente.

De estas propiedades, la más sensible a la señal del radar es la permitividad, seguida de la conductividad mientras que usualmente μ se desprecia por considerar que afecta poco la señal GPR; sin embargo es interesante analizar la contribución de cada una de estas propiedades en la señal EM.

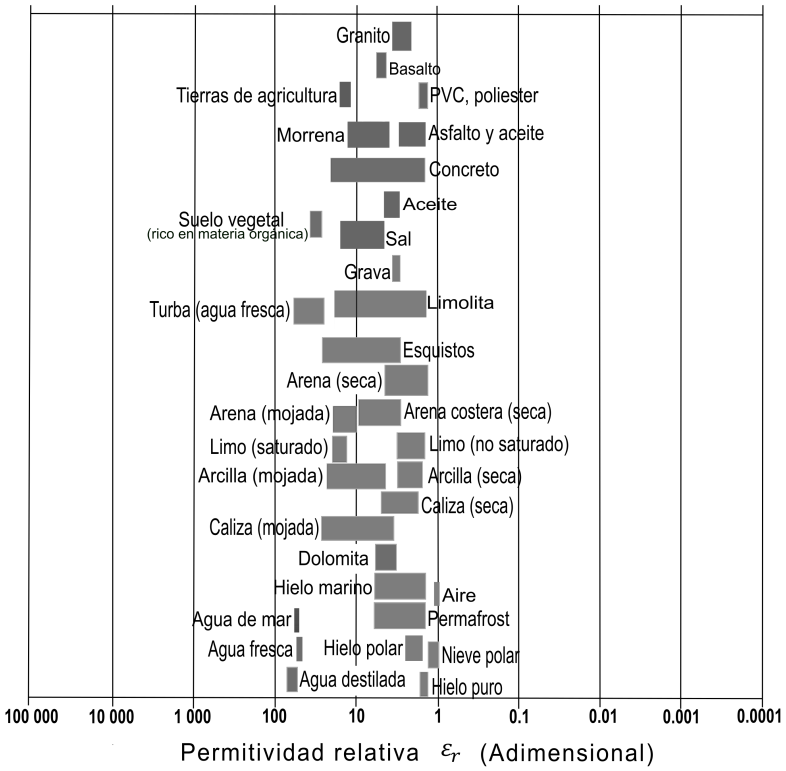

Figura 2. Rangos de valores de permitividad eléctrica, datos recabados de Reynolds (1997); Butler (2005) y Reichard (2020). Note la coincidencia de los valores de permitividad para la mayoría de los materiales y que los valores abarcan dos órdenes de magnitud.

Permitividad eléctrica.

La permitividad eléctrica -ε- analiza la capacidad de polarización de un material en respuesta a un campo eléctrico. En el Sistema Internacional (SI) se mide en F/m, sin embargo es común expresar esta propiedad como permitividad relativa ε_r de modo que:

$$\varepsilon = \varepsilon_o \varepsilon_r = (1 + \chi_e)\varepsilon_o \tag{17}$$

donde ε_o es la permitividad en el vacío que equivale a 8.8542×10^{-12} F/m, y ε_r es la permitividad

relativa que es adimensional, mientras que χ_e es la susceptibilidad eléctrica del material. En el vacío la susceptibilidad es cero por lo que la permitividad será igual a ε_o, por esta razón se le conoce también como permitividad del espacio libre. Los valores de la permitividad eléctrica varían de manera importante dependiendo principalmente de la presencial de agua en los materiales. Los valores de ε_r oscilan entre $\varepsilon_r = 1$ para el aire a $\varepsilon_r = 81$ en el agua (a 20° centígrados). La figura 2 muestra un compendio de algunos valores típicos de permitividad para materiales comúnmente estudiados en geofísica. Nótese que el rango de variación de ε_r es de dos órdenes de magnitud.

Conductividad eléctrica.

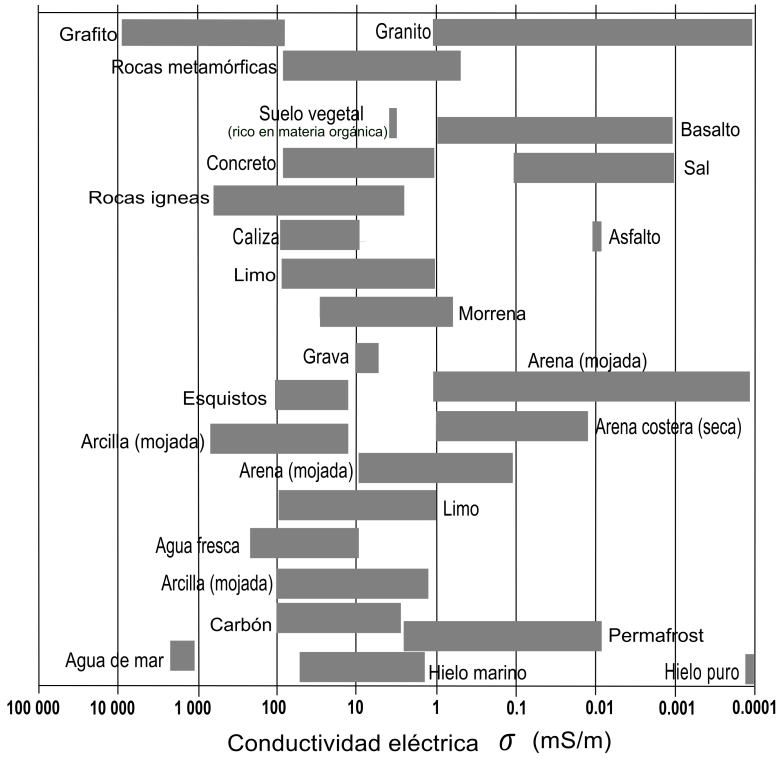

Figura 3. Rangos de conductividad eléctrica adaptados de Palacky (1987). Nótese el amplio rango (ocho órdenes de magnitud) de variaciones de conductividad para materiales individuales dependiendo de las condiciones específicas del material.

A diferencia de otros métodos electromagnéticos, el mecanismo de transporte de energía dominante en la señal de radar es el dispersivo; por lo que, la permitividad dieléctrica juega un papel importante. Este último parámetro no juega ningún papel, por ejemplo, en el método de inducción EM donde las mediciones responden casi por completo a la conductividad eléctrica del subsuelo, particularmente a la distribución espacial de zonas conductoras (Everett & Meju, 2005).

La conductividad eléctrica -σ - es la capacidad que tiene un material de permitir el flujo de corriente eléctrica a través de él cuando se aplica un campo EM. En los metales, estas cargas están relacionadas con los electrones libres, en los fluidos están relacionadas a las cargas de los aniones y cationes disueltos, por ejemplo Na^{+}, Ca^{2+}, Cl^{-} (Olhoeft, 1998) . En el SI la conductividad se mide en Siemens por metro (S/m), siendo su inverso la resistividad (Ω·m).

La efectividad del paso de la corriente en los materiales dependerá por ejemplo de la estructura molecular del material, la temperatura, el contenido de líquidos en su fracción porosa, entre otras consideraciones. De las tres propiedades EM, la conductividad eléctrica es la que tiene un mayor rango de variación; la figura 3 muestra algunos rangos de conductividad para distintos materiales.

Permeabilidad magnética.

Las dos propiedades anteriores se enfocan en variaciones eléctricas, estrechamente relacionadas a: *i)* los procesos de transporte de cargas por conducción iónica (Kai, 1973), *ii)* la orientación de la polarización en la molécula dipolar de agua, y su relación con iones en solución que interactúan con las paredes de los poros en las rocas (Zettlemoyer et al., 1975; Hasted, 1995), y *iii)* procesos electro-químicos, por ejemplo, reacciones de oxidación-reducción u otros procesos de transferencia de carga a través de interfaces sólido-líquido (Kai, 1973); en general, todos estos procesos están altamente relacionados al contenido de agua en las rocas y los materiales. A diferencia de ε y σ, la permeabilidad magnética tiene una relación muy estrecha con el contenido mineralógico en las rocas, que a nivel molecular, está ligado a la respuesta de los espines a un campo magnético externo.

Los espines y órbitas de los electrones en los materiales crean momentos magnéticos equivalentes, así un conjunto de espines genera momentos magnéticos netos apuntando en la misma dirección, esto se conoce como dominio magnético. Cuando estos espines se reorientan (debido a un campo externo), provoca un movimiento entre los dominios en regiones donde los momentos magnéticos tienen diferente dirección (Olhoeft, 1998). A la facilidad que tienen los materiales de reorientar estos dominios magnéticos y de permitir el flujo de campos magnéticos a través de los materiales se le conoce como permeabilidad magnética -μ-. De manera análoga a la permitividad, puede ser expresada en términos de permeabilidad relativa (μ_r), que a su vez está ligada a la susceptibilidad magnética de los materiales (χ_m), cantidad adimensional que varía de una substancia a otra (positiva para los materiales paramagnéticos y negativa para los diamagnéticos):

$$\mu = \mu_o \mu_r = (1 + \chi_m)\mu_o \tag{18}$$

donde $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

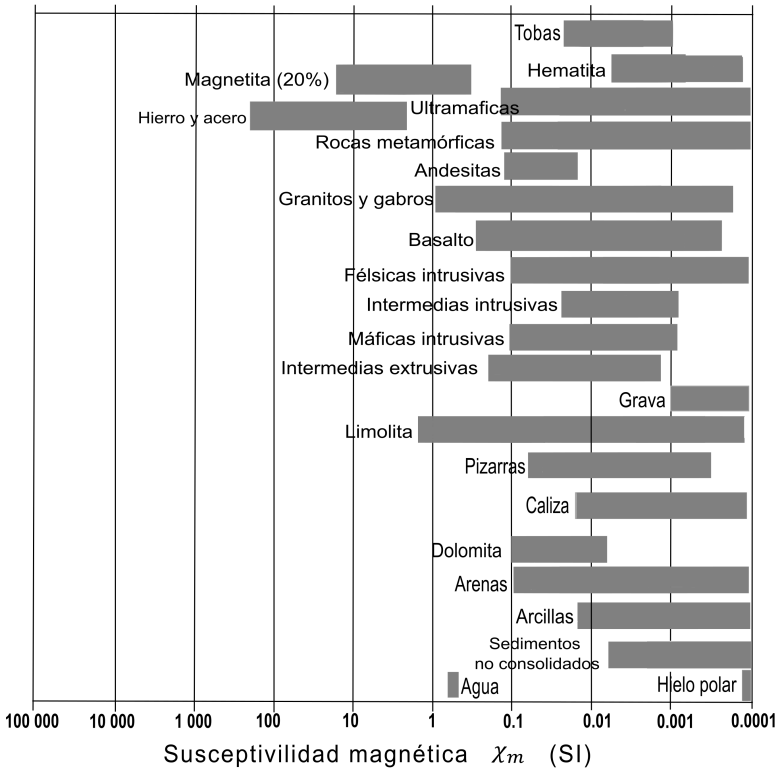

Figura 4. Rangos de Susceptibilidad magnética adaptados de Paranis (1963), Reynols (1997), Sears (Sears & Mark, 2018) y Reichard (2020). Nótese el rango de variación y la distinción entre los grupos dominantes identificados como magnéticos y no magnéticos.

En el vacío donde no hay materia que pueda magnetizarse $\chi_m = 0$ y $\mu = \mu_o$, por lo que μ_o se define como permeabilidad del espacio libre. Si se induce un campo magnético y sus dipolos se orientan en la misma dirección que el campo aplicado, se le considera un material con alta permeabilidad o ferromagnético (incluso puede ser superparamagnético si la magnetización es muy grande). Ejemplos comunes de estos materiales son el hierro, el níquel y el cobalto. Por el contrario, si la magnetización es débil se dice que el material es diamagnético ya que tiene una respuesta negativa al campo magnético externo, por ejemplo el bismuto y el grafito.

Existen materiales intermedios entre estos dos, los paramagnéticos, en ellos sus moléculas se alinean débilmente al campo externo y esta alineación desaparece al desaparecer el campo externo. Ejemplos de estos materiales son el platino y el aluminio. Estas variedades de propiedades magnéticas (ferromagnetismo, diamagnetismo, superparamagnetismo, etc.), estarán determinadas por sus dominios magnéticos y sus espines de manera que dependerá de la distribución del tamaño de grano magnético (el volumen afectado por el desplazamiento de la pared de dominio) y la temperatura de los materiales (Hunt et al., 1995; Dunlop & Özdemir, 1997); esto es análogo al fenómeno de pérdida y almacenamiento en las cargas eléctricas solo que ahora, nada tiene que ver con el posible contenido de agua en los materiales.

De este modo, la susceptibilidad magnética de las rocas está determinada casi por completo por la presencia de minerales ferromagnéticos, así como por su tamaño de grano, modo de distribución y otras características texturales, lo que la vuelve altamente variable. Aunque se han propuesto diversos modelos para describir su dependencia en contextos ferromagnéticos, no existe una relación simple y universalmente aplicable. Para ciertos grupos de rocas o intervalos específicos de susceptibilidad, es posible establecer una correlación estadística entre el contenido de óxidos de hierro (por ejemplo, FeO) y la susceptibilidad (Paranis, 1963).

En muchos de los casos, se cree que el efecto magnético en los materiales (ferromagnéticos, paramagnéticos, diamagnéticos, etc.) tiene una influencia pequeña en la señal EM, por lo que en radar es común considerar la permeabilidad magnética igual a la del espacio libre: $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} = 1.26 \times 10^{-6}$ H/m. Sin embargo los materiales ferromagnéticos pueden tener un efecto considerable en la señal de radar (Von Hippel & Labounsky, 1954; Olhoeft, 1998). Materiales con alto contenido de magnetita, maghemita o hematita, pueden encontrarse en rocas ígneas, arenas enriquecidas y suelos y provocar cambios fuertes en la señal (Olhoeft & Strangway, 1974; Cassidy, 2008). El hierro, por ejemplo, en combinación con azufre, titanio y oxígeno, forma diversos materiales ferromagnéticos y paramagnéticos naturales (Dunlop & Özdemir, 1997), mediciones en arenas sintéticas y naturales con hierro en el laboratorio confirman la presencia de pérdidas significativas por el efecto de la relajación magnética en materiales en frecuencia de radar (Olhoeft & Strangway, 1974).

El análisis de propiedades magnéticas en muestra sin presencia y con contenido de hierro muestra un amplio abanico de valores de las propiedades magnéticas de los materiales. Aunque de manera natural algunos de estos valores suelen tener valores de susceptibilidad magnética pequeños, por ejemplo $\chi_{lutita} = 0.13, \chi_{dacita} = 0.12, \chi_{peridotita} = 0.17, \chi_{diabasas} = 0.15$, etc. (Dobrin & Savit, 1988; Telford et al., 1990); aplicaciones comunes del radar están relacionadas a estructuras antropogénicas en las que hay materiales con altos valores de χ, como es el caso de edificios y estructuras con hierro o acero (Sears & Mark, 2018). Sin embargo, usualmente y a la fecha no se miden las propiedades magnéticas en los materiales en el rango de frecuencia de radar, por lo que modelar la señal EM considerando cambios en las tres propiedades resulta interesante. La figura 4 muestra algunos valores típicos de la susceptibilidad magnética en algunos materiales.

Teóricamente, el cambio en el valor de cualquiera de estas propiedades produce una respuesta EM, es así que analizar estas variaciones en las respuestas EM, nos pueda dar información sobre las tres propiedades de los materiales.

Del análisis comparativo de las figuras 2, 3 y 4, podemos destacar lo siguiente:
1) La permitividad dieléctrica del material varía dentro de un rango mucho más estrecho que la conductividad y la permeabilidad magnética, incluso bajo la influencia de varias concentraciones de fluidos (agua o aire). Las variaciones se deben a condiciones particulares de la muestra, como su porosidad, la presencia de agua, su grado de compactación, entre otros factores.

2) Dentro de sus rangos de variación, la presencia de agua influye notablemente tanto en la permitividad como en la conductividad eléctrica; mientras que la permeabilidad magnética es particularmente independiente del contenido de agua.

3) Por el contrario, la permeabilidad magnética es la propiedad electromagnética más influenciada directamente por la composición mineral, teniendo un amplio rango de variación, información que la permitividad eléctrica y la conductividad no pueden proporcionar.

4) Algunos materiales, en particular, pueden caracterizarse unívocamente por los valores combinados de las tres propiedades (por ejemplo, basalto, hielo polar, etc.); lo que debería convertirlos en un objetivo interesante en la exploración de radar.

5) Para los materiales de nuestro planeta, el rango de variación de estas tres propiedades oscila de dos a diez ordenes de magnitud: la permitividad eléctrica varía en dos ordenes mientras que la conductividad y la susceptibilidad magnética presentan un mayor rango de variaciones.

Para los materiales de la Tierra, la suposición de la existencia de heterogeneidades en las tres propiedades EM es relevante, por lo que un desafío interesante es estimar su influencia en los datos de radar utilizando directamente las ecuaciones 1 a 4 para el modelado. Para ello, es importante entender tanto los fundamentos teóricos del GPR, como el proceso de adquisición de la señal.

2.3. Generalidades del método de radar de penetración terrestre (GPR)

La característica más importante del georradar respecto a otros métodos EM son los rangos de frecuencia que emplea, que oscilan entre 100 MHz a 3.5 GHz, lo que hace de este método una de las técnicas geofísicas con mayor resolución vertical (de hasta unos cuantos centímetros en las frecuencias más altas); sin embargo, las distancias efectivas que las cargas eléctricas recorren son proporcionales a la frecuencia, por lo que la pérdida por fricción de las corrientes de arrastre hacen que se atenúen

rápidamente alcanzando poca profundidad de penetración, resultando en que a mayor profundidad de penetración (más bajas frecuencias) se tiene menor resolución en la señal.

Cuando se realiza un sondeo, el análisis de la resolución y la frecuencia es fundamental para seleccionar el tipo de antena y los parámetros de la señal a transmitir que permitirán observar las estructuras que queremos caracterizar; por ejemplo, para una frecuencia de 100 MHz la profundidad puede llegar al orden de los 10 m, para 500 MHz 4 m aprox. y para 1000 MHz (que corresponde a una alta frecuencia) solamente 1 m.

Estos rangos de penetración dependerán del tipo de material por el que viaja la señal, así una señal con una frecuencia de 100 MHz alcanzará sus valores de penetración máximos en granito y piedra caliza alcanzará hasta 60 m de profundidad, mientras que en arcillas saturadas con agua, esa misma señal apenas alcanzará 1 metro de profundidad (Reynolds, 1997). La imagen de la izquierda de la figura 5 muestra los rangos típicos de frecuencias que se utilizan en GPR.

El equipo GPR esta constituido de un par de antenas (una transmisora -Tx-y una receptora -Rx-), una unidad de cómputo donde se guarda la señal, un monitor para la visualización de imágenes, un odómetro y, adicionalmente, puede tener un carro o soporte que permita movilizar todos estos elementos. En la imagen de la derecha de la figura 5 se observa un diagrama con los principales componentes de un radar terrestre.

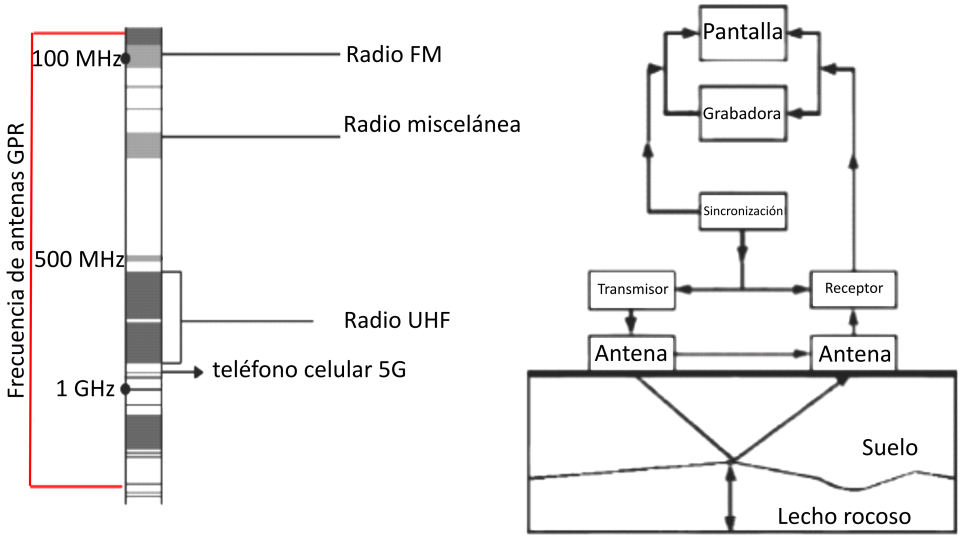

Figura 5. Rangos de frecuencias típicas de radar. Observe que muchas de estas frecuencias pueden interferir con aparatos comúnmente utilizados (Figura de la izquierda). La imagen de la derecha presenta un esquema sencillo de las principales componentes del radar. Modificada de Annan (2009).

Las antenas tienen distintas configuraciones, pueden acoplarse en una misma estructura (configuración monoestática) o ser independientes una antena de la otra (configuración biestática). Además las antenas pueden orientarse en distintas configuraciones que permitan 'iluminar' con más detalle los objetivos que queremos estudiar. Existen trabajos donde se investiga, en particular, los efectos de la polarización de la señal de radar, por ejemplo el de Villela y Mendoza (2013). En ambas configuraciones de antena (monoestática y biestática), la antena transmisora envía un pulso de ondas electromagnéticas de alta frecuencia que en realidad no es una señal continua, sino más bien un pulso que contiene un conjunto de ondas que oscilan cerca de una frecuencia particular, conocida como frecuencia central (las antenas transmisoras pueden emitir pulsos EM en distintos rangos de frecuencias).

A medida que las ondas EM se propagan en el medio además de atenuarse, particionan su energía cuando se reflejan, transmiten y/o refractan. La reflexión, transmisión y refracción de las ondas depende de las propiedades electromagnéticas que tienen los medios en cada lado de una interfaz y la forma de incidencia de la señal. En su regreso a la superficie, la señal es captada por la antena receptora trayendo consigo la información de los materiales tanto naturales como antropogénicos por los que transitó.

A los registros de la señal en la antena receptora se les conoce como radargramas. Los radargramas contienen información de los materiales y su acomodo en el interior de la tierra. Usualmente, el eje horizontal en el radargrama corresponde a la distancia (en metros) a lo largo de un perfil, mientras que el eje vertical refiere al tiempo que viajó como un aproximado de la profundidad de penetración. Un ejemplo típico de un radargrama puede verse en la figura 6.

Comúnmente, los datos de radar al igual que en otros métodos geofísicos, suelen requerir un tratamiento posterior con el fin de resaltar la señal de interés. Para esto, es común la aplicación de filtros de paso de banda para la eliminación de frecuencias no deseadas además de procesamientos adicionales, tales como deconvolución, análisis de velocidades, migración, etc. Muchos de estos procedimientos de análisis de señales son adaptados de los métodos de procesado de datos de reflexión sísmica.

Estas correcciones a los datos se realizan porque las trazas suelen presentar ruido ambiental como consecuencia del entorno, este ruido será mayor si el acoplamiento entre la antena transmisora y el suelo no es adecuado. Otros factores que pueden aumentar el ruido en la señal pueden ser la vegetación abundante, fuentes electromagnéticas cercanas (como una antena de radio) e incluso las mismas características del subsuelo; por ejemplo, un alto contenido de agua amplifica el efecto difusivo de la señal. La figura 6 muestra una traza típica de radar con un pulso idealizado sin ruido contra un pulso real con ruido ambiental.

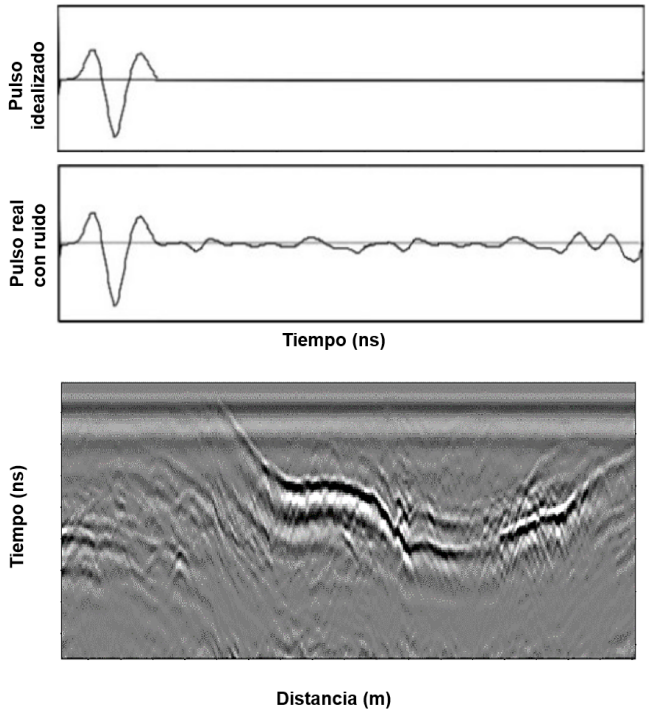

Figura 6. Ejemplo de traza idealizada de una señal de radar (arriba), una traza con ruido ambiental (en medio) y de un radargrama típico (abajo). Modificado de Conyers (2015).

Características de la onda EM y la señal

Las ondas EM se propagan a través de los materiales, algunas de sus principales características son: *i)* la velocidad de propagación (V), *ii)* la longitud de la onda (λ) y *iii)* la impedancia electromagnética (Z) (Annan, 2009). En el espacio libre, la velocidad de la onda es igual a la velocidad de la luz (c).

i) Velocidad de propagación. En general, considerando una aproximación del régimen de ondas, la velocidad de la onda EM a través de un material homogéneo viene dada por:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \tag{19}$$

donde μ_r es la permeabilidad relativa, ε_r es la permitividad relativa y $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_o \varepsilon_o}} \cong 3.00 \times 10^8$ m/s. Usualmente el término de permeabilidad relativa se toma como constante en el modelado electromagnético, por lo que es común asumir que la velocidad de propagación se ve influenciada únicamente por la permitividad eléctrica.

ii) Longitud de onda. Así como la velocidad es diferente a medida que la onda viaja a través de los materiales, la longitud de onda también varía de acuerdo a las propiedades del medio; en una ondícula

con frecuencia central f_c que se mueve a velocidad V, la longitud de onda λ viene dada por:

$$\lambda = \frac{V}{f_c} \tag{20}$$

donde en el SI la velocidad está dada en m/s y la frecuencia en Hz. De acuerdo a la expresión 20 la longitud de onda estará definida inversamente en función de la frecuencia.

Otra consideración importante de la onda como una función del espacio y el tiempo, es el muestreo de la señal. Los sondeos deben diseñarse de acuerdo a los principios fundamentales de muestreo, es decir, para una frecuencia sinusoidal f, los intervalos de muestreo en tiempo y espacio Δt y Δx respectivamente, deben satisfacer las siguientes expresiones, conocidas como criterios de muestreo de Nyquist:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2f} \tag{21}$$

$$\Delta x \leq \frac{v}{2f} \tag{22}$$

Si los criterios de las expresiones 21 y 22 no se cumplen, se producirá una pérdida de la información de la señal provocando efectos indeseados en ella, por ejemplo el aliasing que es cuando aparecen componentes de frecuencia falsa en los datos muestreados.

iii) Impedancia electromagnética. Para ilustrar los efectos más importantes que ocurren a la onda EM en su incidencia sobre una superficie podemos enunciar que el contraste en las propiedades EM entre medios adyacentes provoca reflexiones más intensas cuanto más fuerte es dicho contraste. La Ley de Snell (ecuación 23) estudia estos fenómenos de reflexión, refracción y difracción con las velocidades de propagación de las ondas en los medios y cuantifica el ángulo de refracción entre medios:

$$sin(\theta_2) = \frac{n_1}{n_2} sin(\theta_1) \tag{23}$$

donde n_1 y n_2 corresponden a los índices de refracción del medio 1 y 2 respectivamente, θ_1 es el ángulo de incidencia en el primer medio y θ_2 el ángulo del segundo medio; la razón entre ambos índices se conoce como **impedancia**, y se relaciona con los campos eléctrico y magnético como:

$$Z = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{H}} = \sqrt{\frac{\mu_o \mu_r}{\varepsilon_o \varepsilon_r}}; \tag{24}$$

si tomamos un caso particular en que la propagación en uno de los planos de propagación (perpendicular a una dirección fija) es constante, es decir, tenemos una propagación de onda plana. La impedancia en el espacio libre se define como:

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}}. \tag{25}$$

En un dieléctrico isótropo, homogéneo y con propiedades magnéticas semejantes a las de μ_o, es decir $\mu = \mu_o$, el valor de la impedancia es:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_o \mu_r}{\varepsilon_o \varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o \varepsilon_r}} = \frac{Z_o}{\sqrt{\varepsilon_r}} \approx \frac{377}{\sqrt{\varepsilon_r}}\Omega \tag{26}$$

A partir de la impedancia podemos calcular los coeficientes de reflexión y transmisión de la energía:

$$R_{1-2} = \frac{Z_2 cos(\theta_2) - Z_1 cos(\theta_1)}{Z_2 cos(\theta_2) + Z_1 cos(\theta_1)} \tag{27}$$

$$T_{1-2} = \frac{2 Z_2 cos(\theta_2)}{Z_1 cos(\theta_1) + Z_2 cos(\theta_2)} \tag{28}$$

donde θ_1 es el ángulo de la onda incidente, θ_2 es el ángulo de la onda transmitida, Z es la impedancia, R_{1-2} se denomina coeficiente de reflexión de Fresnel y T_{1-2} se conoce como coeficiente de transmisión de Fresnel entre los medios superior (1) e inferior (2). Las ecuaciones de Fresnel cuantifican la cantidad de reflexión y transmisión de las ondas en su paso por dos medios distintos. La figura 7 muestra un diagrama de estos rayos reflejados y refractados.

Cuando la onda EM incide verticalmente en la interfase, entonces $\theta_1 = \theta_2 = 0°$, que corresponde a una incidencia normal, típicamente utilizada en radar.

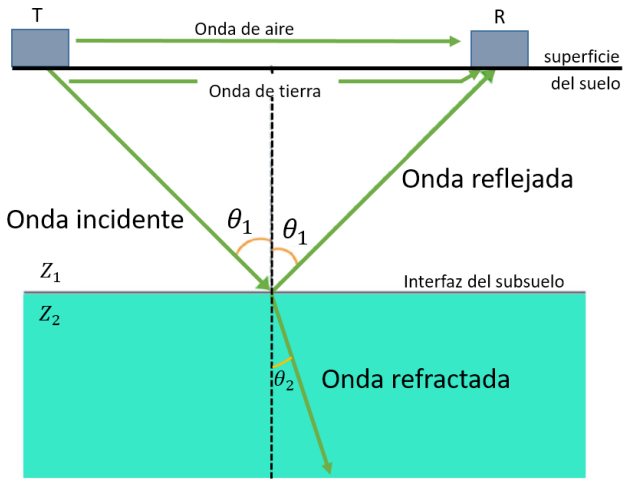

Figura 7. Diagrama de la distribución de los patrones de ondas al incidir sobre una superficie. Se registran al menos 3 ondas: la onda de aire, la onda terrestre que viaja en la interfaz aire-tierra, y la onda reflejada, generada cuando la onda incidente interactúa con la interfaz en el subsuelo.

Capítulo 3. Modelado numérico de la señal de radar

Los métodos numéricos son técnicas computacionales que dan solución a problemas matemáticos. Estos métodos permiten replantear un problema matemático para obtener soluciones particulares cuantificables con la lógica digital de un equipo de computo, donde usualmente pasamos de un problema continuo a uno discreto.

Muchos de los problemas que queremos estudiar en ciencia, están relacionados a fenómenos que aunque los podemos expresar matemáticamente resultan difíciles de resolver analíticamente. En estos casos los métodos numéricos se convierten en la única manera de resolverlos. El fenómeno electromagnético es uno de estos casos, por lo que es común aplicar estos métodos con el fin de analizar la evolución espacio-temporal de las ondas en su viaje en el medio.

En el estudio de la propagación de ondas EM se han utilizado diferentes métodos numéricos; entre los más populares se encuentran *a)* el método de -Ecuación Integral-, el cuál reduce el fenómeno al efecto EM aportado por una suma de elementos infinitamente pequeños (integral), el efecto de la suma en la frontera del dominio del problema puede ser aproximado por métodos numéricos (e.g. Davis & Rabinowitz, 2007), *b)* el método de -Elementos finitos-, que discretiza el espacio en un número finito de subdominios denominados elementos, donde se asume que la onda se comporta de una manera prescrita, y que este comportamiento es estable en todos los elementos del medio (Gallardo-Romero & Ruiz-Aguilar, ; Liu et al., 2022), y *c)* el método de -Diferencias finitas- que discretiza el dominio de las ecuaciones diferenciales que representan el fenómeno, por valores en posiciones cercanas en tiempo y espacio (e.g. Virieux and Madariaga, 1982).

En el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD) se divide el medio en una malla espacial y se colocan los componentes del campo eléctrico y magnético en posiciones discretas en el espacio y se resuelven las ecuaciones de Maxwell en instantes de tiempo discretos.

En este capítulo se describe como se realizó la parametrización de los modelos, la discretización de las ecuaciones de Maxwell utilizando un esquema de diferencias-finitas, consideraciones importantes para el modelado y la solución numérica de las ecuaciones en una, dos y tres dimensiones.

3.1. Parametrización del modelo

El método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD por sus siglas en inglés) se basa en una aproximación de los operadores de derivada de las ecuaciones diferenciales, utilizando relaciones matemáticas sencillas para un medio discreto en tiempo y en espacio. Existen varios métodos de aproximación, por ejemplo, el método aplicado por Yee (1966), quien en su artículo más icónico desarrolló un conjunto de ecuaciones para operadores rotacionales, basados en una discretización de campos desplazados. El método de diferencias finitas aplicado aquí, utiliza esta discretización para aproximar las derivadas de las ecuaciones 3 y 4, utilizando cocientes diferenciales en puntos de una cuadrícula rectangular equiespaciada. Tanto las derivadas espaciales como las temporales se calculan entonces en pasos de tiempo equidistantes.

Esta metodología se ha empleado ampliamente en sismología, en trabajos de Madariaga (1976), Virieux & Madariaga (1982) y Komatitsch & Martin (2007), entre otros. En modelado electromagnético se popularizó con el trabajo de Yee (Yee, 1966); en años posteriores Chen et al. (1996), Bergmann et al. (1996), Lampe (2003), Cabrer et al. (2022), entre otros, han empleado esta metodología.

En teoría EM, cada componente de campo magnético está rodeado por cuatro vectores desplazados de campo eléctrico E y de la misma manera, cada vector de campo eléctrico está rodeado por cuatro vectores desplazados de campo magnético H, lo que hace del esquema de Yee, una forma muy compacta y elegante de modelar la propagación electromagnética (ver figura 8).

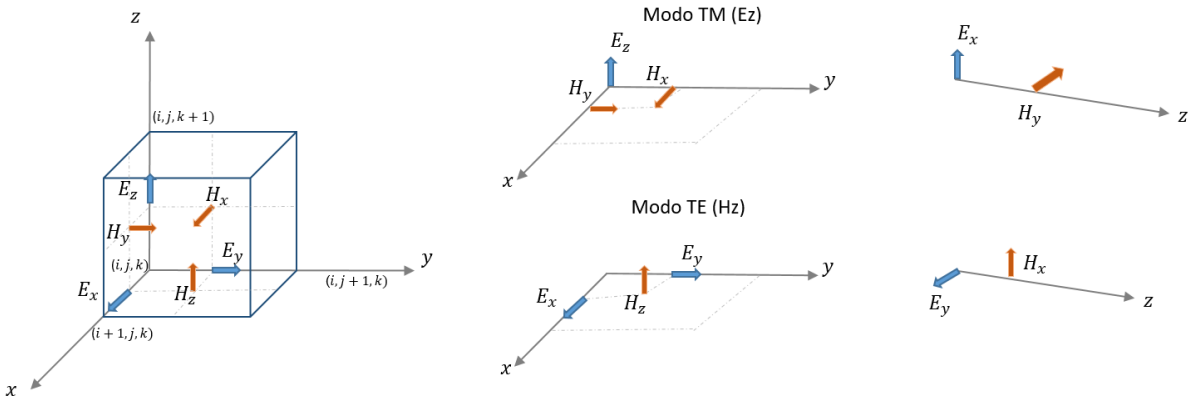

Figura 8. Diagrama esquemático de la celda de Yee. Las componentes de campo eléctrico se representan con flechas azules, mientras que las de campo magnético se localizan en el centro de las caras con flechas anaranjadas. Se muestran las componentes en tres, dos y una dimensión. Note que en 2D y 1D podemos tener dos modos para el modelado. Modificado de Sullivan, 2013.

En el modelado EM de aplicación en GPR, solo necesitamos considerar las ecuaciones rotacionales para el esquema FDTD, ya que las ecuaciones de divergencia se satisfacen en las ecuaciones de actualización de los campos. En su versión discreta, los componentes del campo deben ser referidos no sólo por índices que indican sus posiciones en el espacio; sino también por un índice que indica su instante de tiempo.

En el modelado de radar, el FDTD ha sido utilizado en múltiples trabajos (Bergmann et al., 1996; Lampe et al., 2003; Daniels et al., 2009; Howlader & Sattar, 2015; Ferguson et al., 2021), entre otros; no obstante, en estos trabajos se toma en cuenta la permeabilidad magnética como una constante. De hecho, solamente algunos autores han estudiado el efecto de la permeabilidad magnética en la señal de radar. Olhoeft (1998) demostró la importancia de las propiedades eléctricas y magnéticas y su distribución geométrica en el modelado electromagnético de radar. Lazaro-Mancilla (1999) consideró variaciones en las tres propiedades electromagnéticas en capas horizontales en el dominio de la frecuencia y utilizó matrices de propagación para obtener el campo eléctrico superficial; estos autores concluyeron que es imposible recuperar simultáneamente los perfiles verticales de las tres propiedades electromagnéticas. Pettinelli et al. (2007) analizaron el efecto de las propiedades eléctricas y magnéticas sobre la atenuación de ondas para diferentes escenarios de la superficie marciana.

En un trabajo bastante minucioso Cassidy (2008) investigó las características de atenuación y propagación de la señal GPR para una gama de mezclas minerales de cuarzo/magnetita en escala nanométrica a microscópica, este autor determinó que incluso con cantidades relativamente bajas de magnetita, los materiales magnéticos pueden tener un efecto considerable en la atenuación de la señal por lo que es importante considerar las propiedades magnéticas de los materiales. Cassidy & Millington (2009), desarrollaron un esquema que denominaron 'permitividad efectiva compleja generalizada' para el modelado de las propiedades eléctricas y magnéticas de los materiales en radar, incorporando efectos dispersivos y difusivos en un esquema híbrido entre FDTD y el modelo de Debye. Concluyeron que considerar las características de los materiales magnéticos en el modelado producía cambio sutiles pero identificables en el espectro de potencia de la señal y que esto podría utilizarse como herramienta para la identificación de zonas de corrosión en tuberías, pues mejoraba los atributos de la señal.

Pérsico et al. (2012) utilizaron datos experimentales en 3D y una aproximación de Born bidimensional para explorar la influencia de las propiedades dieléctricas y magnéticas en la señal del radar. Señalaron una relación interesante entre la permitividad y la permeabilidad. En un experimento de laboratorio, Van Dam et al. (2013) describieron el efecto de la magnetita en la señal de radar y concluyeron que la magnetita reduce significativamente la velocidad de las ondas de radar.

En los últimos años, el efecto de las propiedades magnéticas en la señal del radar ha ganado interés; por ejemplo, en ingeniería civil y estudios geotécnicos, con el fin de determinar daños en edificaciones y carreteras, identificación de procesos de corrosión en tuberías, o malformaciones debido a fenómenos de subsidencia (Liu et al., 2020; Almalki & Khalid, 2024; Ksenija et al., 2024), incluso en estudios más detallados donde es necesario reconocer tuberías con distintos diámetros (Lahlal et al., 2020; Ali et al., 2024; Sadrmohammadi et al., 2024). La Organización de las Naciones Unidas (ONU) ha implementado el GPR para la detección de artefactos de guerra que no detonaron, modelando minas de distintas formas y diámetros (O'Neill & Fernández, 2008; Arcone et al., 2010; Takahashi et al., 2011; Giannakis, 2016; Onyebueke et al., 2024), teniendo buenos resultados inclusive con radares montados en drones, especialmente en áreas donde recabar datos en tierra puede resultar peligroso para el operador del radar. Recientemente se estudia la influencia de las propiedades magnéticas en misiones a otros planetas o satélites del sistema solar, e incluso en emulación de condiciones extraterrestres (Hamran et al., 2015, 2020; Guan et al., 2024) entre otros estudios, de ellos se determina la influencia de las propiedades magnéticas en la señal de radar.

En nuestro caso, asumimos ε, μ y σ como propiedades heterogéneas y, por lo tanto, las ecuaciones 3 y 4 no pueden ser fusionados en una sola ecuación matemática, por lo que planteamos su solución numérica como un sistema acoplado de ecuaciones de Maxwell. Comenzamos nuestro desarrollo a partir de las ecuaciones 3 y 4, utilizando un esquema conocido para aproximar las derivadas temporales.

3.2. Discretización de las ecuaciones de Maxwell

Para el caso en tres dimensiones, las leyes de Faraday y Ampere pueden ser expresadas como:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_{xx}} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_{xx} E_x - s_x \right), \tag{29}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_{yy}} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_{yy} E_y - s_y \right), \tag{30}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_{zz}} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_{zz} E_z - s_z \right), \tag{31}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_{xx}} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \tag{32}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_{yy}} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \tag{33}$$

y

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_{zz}} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \tag{34}$$

que corresponden a las ecuaciones discretas de Maxwell para las componentes x, y y z del campo eléctrico (ecuaciones 29, 30 y 31) y magnético (ecuaciones 32, 33 y 34).

Como casos particulares, es factible considerar una o dos direcciones invariantes, de manera que resulte suficiente con determinar una o dos componentes de los campos E y H en modelado numérico. Es usual aplicar esta consideración a fin de simplificar el problema y consumir menos recursos computacionales.

Para un caso bidimensional para una antena de longitud 'infinita', los campos EM se propagan en dos modos completamente desacoplados: el modo transversal eléctrico (TE) y el modo transversal magnético (TM); la figura 9 muestra un diagrama esquemático de la distribución de las antenas respecto a estos dos modos de polarización.

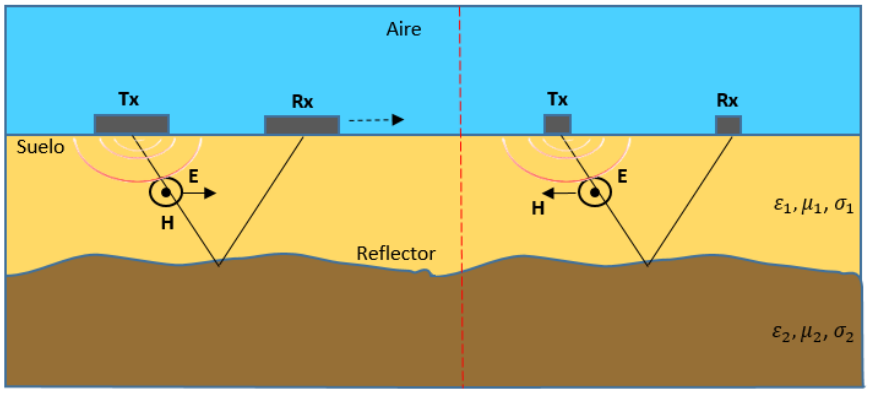

Figura 9. Modos de polarización de la señal EM, a la izquierda el campo eléctrico es paralelo al perfil (Modo TM o polarización H), a la derecha el campo eléctrico es perpendicular al perfil (modo TE o polarización E). Tx y Rx se refieren a la antena transmisora y receptora respectivamente.

Desarrollamos nuestra aproximación para el modo TM, de manera que se tiene una componente en la dirección z para el campo eléctrico (E_z), y dos componentes para el campo magnético (H_x y H_y); además, a diferencia de las ecuaciones 29 a 34, donde las propiedades físicas tiene subíndices que indican posible anisotropía, para las ecuaciones en 2D consideramos que las propiedades tienen condiciones de isotropía, por lo que para las siguientes expresiones no necesitamos incluir en las propiedades subíndices, de modo que:

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z - s_z\right), \tag{35}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \tag{36}$$

y

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \tag{37}$$

que representan las ecuaciones discretas para el caso TM en dos dimensiones.

De manera similar, las ecuaciones de Maxwell se reducen a dos componentes para el caso unidimensional, una componente x para el campo eléctrico y una componente en y para el magnético:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial z} + \sigma E_x + s_x\right), \tag{38}$$

y

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right), \tag{39}$$

que corresponden a las versiones discretas del caso 1D, las ecuaciones en 2D y 1D describen una onda plana viajando en la dirección z en el medio, para el caso 1D, el campo eléctrico estará orientado en la dirección x y el campo magnético en la dirección y.

3.3. Solución numérica de las ecuaciones de Maxwell

El esquema de Yee (1966) fue propuesto en 1966 para resolver las ecuaciones de Maxwell mediante el método de Diferencias Finitas en el Dominio del Tiempo (FDTD). Su estructura se basa en:

1. Diferencias centradas en el espacio:

   Para calcular una derivada espacial en una dirección (por ejemplo, ∂H/∂x), se usan los puntos

$j+1, j-1$, es decir: $\frac{\partial H}{\partial x}|_j \approx \frac{H_{j+1/2}-H_{j-1/2}}{\Delta x}$

2. Diferencias centradas en el tiempo ('leap-frog'):

   Los campos eléctricos y magnéticos se actualizan en tiempos intercalado: el campo eléctrico E en $t = n\Delta t$, y el magnético H en $t = (n+1/2)\Delta t$, donde n, es un número entero que representa el avance discreto en tiempo en una simulación. Esto evita resolver sistemas de ecuaciones, pues permite que la actualización de un campo use valores ya calculados del otro campo.

De este modo, los campos se discretizan espacialmente con un desfase de media celda entre sí y se actualizan en tiempos alternos (integración en el tiempo del tipo 'leap-frog'), por lo que al estimar los campos se cuenta de forma explícita con toda la información necesaria para su actualización en cada paso de tiempo.

Aplicando el método de diferencias finitas en el dominio del tiempo a las ecuaciones 29 a la 34, obtendremos una aproximación de diferencia centrada para las derivadas espaciales y temporales. Las componentes x, y y z, de la Ley de Ampere para el caso en tres dimensiones son:

$$E_x|^{i,j,k}_{t+\Delta t} = \frac{(1-\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})} E_x|^{i,j,k}_t + \frac{1}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})} \frac{\Delta t}{\varepsilon|^{i,j,k}\Delta y}\left(H_z|^{i,j,k}_{t+\Delta t/2} - H_z|^{i,j-1,k}_{t+\Delta t/2}\right) - \frac{1}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})} \frac{\Delta t}{\varepsilon|^{i,j,k}\Delta z}\left(H_y|^{i,j,k}_{t+\Delta t/2} - H_y|^{i,j,k-1}_{t+\Delta t/2}\right), \quad (40)$$

$$E_y|^{i,j,k}_{t+\Delta t} = \frac{(1-\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})} E_y|^{i,j,k}_t + \frac{1}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})} \frac{\Delta t}{\varepsilon|^{i,j,k}\Delta z}\left(H_x|^{i,j,k}_{t+\Delta t/2} - H_x|^{i,j,k-1}_{t+\Delta t/2}\right) - \frac{1}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})} \frac{\Delta t}{\varepsilon|^{i,j,k}\Delta x}\left(H_z|^{i,j,k}_{t+\Delta t/2} - H_z|^{i-1,j,k}_{t+\Delta t/2}\right), \quad (41)$$

y

$$E_z|^{i,j,k}_{t+\Delta t} = \frac{(1-\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})} E_x|^{i,j,k}_t + \frac{1}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})} \frac{\Delta t}{\varepsilon|^{i,j,k}\Delta x}\left(H_y|^{i,j,k}_{t+\Delta t/2} - H_y|^{i-1,j,k}_{t+\Delta t/2}\right) - \frac{1}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}})} \frac{\Delta t}{\varepsilon|^{i,j,k}\Delta y}\left(H_x|^{i,j,k}_{t+\Delta t/2} - H_x|^{i,j-1,k}_{t+\Delta t/2}\right). \quad (42)$$

De manera similar, para la ley de Faraday tenemos:

$$H_x|^{i,j,k}_{t+\Delta t/2} = H_x|^{i,j,k}_{t-\Delta t/2} - \frac{\mu|^{i,j,k}\Delta t}{\Delta y}\left(E_z|^{i,j+1,k}_t - E_z|^{i,j,k}_t\right) + \frac{\mu|^{i,j,k}\Delta t}{\Delta z}\left(E_y|^{i,j,k+1}_t - E_y|^{i,j,k}_t\right), \quad (43)$$

$$H_y|^{i,j,k}_{t+\Delta t/2} = H_y|^{i,j,k}_{t-\Delta t/2} - \frac{\mu|^{i,j,k}\Delta t}{\Delta z}\left(E_x|^{i,j,k+1}_t - E_x|^{i,j,k}_t\right) + \frac{\mu|^{i,j,k}\Delta t}{\Delta x}\left(E_z|^{i+1,j,k}_t - E_z|^{i,j,k}_t\right), \quad (44)$$

y

$$H_z|^{i,j,k}_{t+\Delta t/2} = H_z|^{i,j,k}_{t-\Delta t/2} - \frac{\mu|^{i,j,k}\Delta t}{\Delta x}\left(E_y|^{i+1,j,k}_t - E_y|^{i,j,k}_t\right) + \frac{\mu|^{i,j,k}\Delta t}{\Delta y}\left(E_x|^{i,j+1,k}_t - E_x|^{i,j,k}_t\right). \quad (45)$$

Note que para la actualización explícita de todas las componentes de un campo, se requiere el estatus del otro campo en un medio paso de tiempo anterior. Además, las propiedades del medio ε, μ y σ, se discretizan a la mitad de cada celda, considerando que los medios son isotrópicos.

Similarmente, las ecuaciones de actualización en dos dimensiones, para el modo transversal magnético considerando un esquema de onda plana, son:

$$E_z|^{i,k}_{t+\Delta t} = \frac{(1-\frac{\Delta t\sigma|^{i,k}}{2\varepsilon|^{i,k}})}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,k}}{2\varepsilon|^{i,k}})}E_z|^{i,k}_t + \frac{1}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,k}}{2\varepsilon|^{i,k}})}\frac{\Delta t}{\varepsilon|^{i,k}\Delta x}\left(H_y|^{i,k}_{t+\Delta t/2} - H_y|^{i-1,k}_{t+\Delta t/2}\right) - \frac{1}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{i,k}}{2\varepsilon|^{i,k}})}\frac{\Delta t}{\varepsilon|^{i,k}\Delta y}\left(H_x|^{i,k}_{t+\Delta t/2} - H_x|^{i,k-1}_{t+\Delta t/2}\right), \quad (46)$$

$$H_x|^{i,k}_{t+\Delta t/2} = H_x|^{i,k}_{t-\Delta t/2} - \frac{\Delta t}{\mu|^{i,k}\Delta y}\left(E_z|^{i,k+1}_t - E_z|^{i,k}_t\right), \quad (47)$$

y

$$H_y|^{i,k}_{t+\Delta t/2} = H_y|^{i,k}_{t-\Delta t/2} + \frac{\Delta t}{\mu|^{i,k}\Delta x}\left(E_z|^{i+1,k}_t - E_z|^{i,k}_t\right). \quad (48)$$

De igual manera, las expresiones discretas de las leyes de Faraday y Ampere para el caso unidimensional se reducen a las siguientes dos expresiones:

$$E_x|^{k}_{t+\Delta t} = \frac{(1-\frac{\Delta t\sigma|^{k}}{2\varepsilon|^{k}})}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{k}}{2\varepsilon|^{k}})}E_x|^{k}_t - \frac{1}{(1+\frac{\Delta t\sigma|^{k}}{2\varepsilon|^{k}})}\frac{\Delta t}{\varepsilon|^{k}\Delta z}\left(H_y|^{k}_{t+\Delta t/2} - H_y|^{k-1}_{t+\Delta t/2}\right), \quad (49)$$

y

$$H_y|^{k}_{t+\Delta t/2} = H_y|^{k}_{t-\Delta t/2} - \frac{\Delta t}{\mu|^{k}\Delta z}\left(E_x|^{k+1}_t - E_x|^{k}_t\right). \quad (50)$$

Estas ecuaciones son las que se utilizarán para modelar la propagación de los campos en 3D, 2D y 1D en el siguiente capítulo.

3.4. Condiciones iniciales, términos de fuente y condiciones de frontera

Para hacer estable la modelación numérica debemos considerar que los pasos de tiempo deben capturar el tránsito de la onda electromagnética propagándose en el medio a una velocidad no mayor a la velocidad de la luz; de manera que para capturar ese tránsito en una celda, se necesita un tiempo mínimo de $\Delta t = \Delta x/c_o$ (donde c_o es la velocidad de la luz). En dos dimensiones hay que considerar la propagación en diagonal de modo que $\Delta t = \Delta x/\sqrt{2c_o}$, en tres dimensiones $\Delta t = \Delta x/\sqrt{3c_o}$. Una manera general de expresarlo es mediante la conocida condición de estabilidad de Courant o CFL (por las iniciales de sus precursores Courant-Freidrichs, Lewy):

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{n} \cdot c_o}, \tag{51}$$

donde $\sqrt{n} = \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}$.

Una condición de estabilidad más restrictiva para la dimensión espacial más pequeña es: $\Delta_{min} = min[\Delta x, \Delta y, \Delta z]$, que además incluya casos materiales dispersivos en el medio:

$$\Delta t \leq \frac{n_r \Delta_{min}}{2c_o}, \tag{52}$$

donde n_r corresponde al índice de refracción del medio. Además de la estabilidad del esquema numérico, es importante determinar las condiciones iniciales del problema. A diferencia de otros métodos en que se consideran componentes de la fuente en tiempos $t < t_o$, nosotros suponemos como es usual en modelado de radar, que la fuente no emite ninguna señal antes del tiempo inicial $t = t_o$, es decir, que las condiciones iniciales del problema se reducen a que no hay excitación antes del tiempo inicial; teniendo esto en cuenta, se asume que todas las componentes del campo eléctrico son iguales a cero en un inicio; de manera similar, todas las componentes del campo magnético en un tiempo $t = t_o + \Delta t_o/2$ serán $\mathbf{H} = 0$.

Modelado de la fuente

Como definimos en el capítulo 2, la antena emisora envía un pulso de ondas al subsuelo, el cuál se conforma por un conjunto de ondas EM sinusoidales de frecuencias similares para crear una ondícula.

La ondícula para la fuente es generada por una antena transmisora que conforma un dipolo eléctrico polarizado. En una señal, el ancho de banda nos permite definir en qué rangos de frecuencia podemos recuperar la señal analógica con precisión.

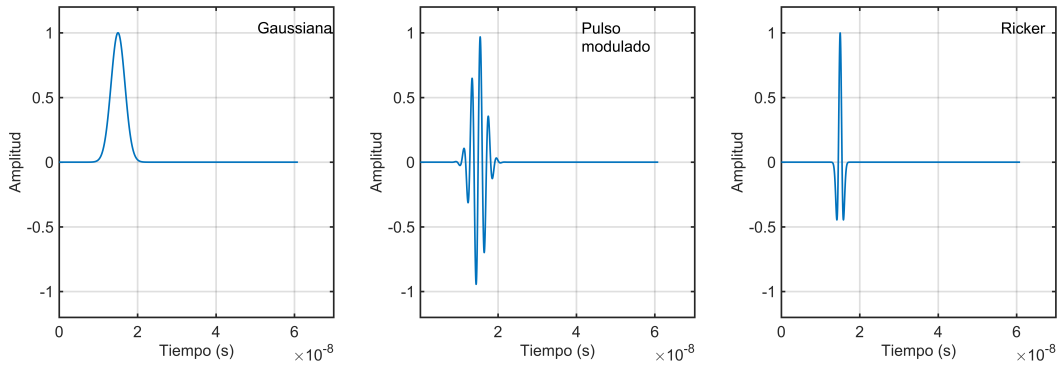

Figura 10. Ejemplos de formas de onda que pueden ser utilizados como fuente. Se muestra un ejemplo para una Gaussiana (izquierda), un pulso modulado (centro) y una onda de Ricker (derecha). En todas las figuras el eje horizontal es el tiempo (segundos) y el eje vertical la amplitud de la onda.

Usualmente al ancho de banda se le define como la frecuencia a la que la señal de entrada se atenúa en un $70.7\,\%$ respecto a su amplitud original (también llamado punto $-3dB$). En esta ondícula, existen dos frecuencias en las que la señal de salida alcanza el voltaje idóneo respecto al ancho de banda y el voltaje de entrada. Estas frecuencias se conocen como frecuencias de esquina f_1 y f_2. También se les conoce como frecuencia de corte, de media potencia, etc. A la media geométrica de f_1 y f_2 se le denomina frecuencia central (f_o):

$$f_o = \sqrt{f_1 f_2}. \tag{53}$$

mientras que a la diferencia de las frecuencias de esquina se les denomina ancho de banda (BW):

$$BW = f_2 - f_1. \tag{54}$$

La frecuencia central, el ancho de banda y la frecuencia de esquina están relacionadas y es importante considerarlas cuando elegimos el tipo de pulso-fuente con el que vamos a trabajar. Este pulso se puede modelar considerando distintas formas de onda por ejemplo, sinusoidal, Gaussiana, primera derivada de la Gaussiana, ondícula de Ricker, onda cosenoidal, entre otras. La ondícula de Ricker por ejemplo (también llamada ondícula de fase cero o sombrero mexicano) es comúnmente utilizada en esquemas de modelado numérico como pulso para la fuente. La figura 10 muestra un ejemplo de estos tipos de pulso que pueden ser empleados como fuente.

Para los ejemplos numéricos de este trabajo, se utilizó como fuente un pulso Gaussiano en un rango de frecuencias usuales en radar (100 MHz - 3.5 GHz) lo que resulta en anchos de pulso de la fuente de

alrededor de 1 ns a 10 ns. La función para dicho pulso está definida por:

$$gaussiana = exp\left[-\left(\frac{t-to}{\tau}\right)^2\right], \tag{55}$$

donde $\tau \leq \frac{1}{\pi f_{max}} \cong \frac{0.5}{f_{max}}$ donde f_{max} es la frecuencia central de la onda, $to = 6\tau$ y t es el tiempo de modelado.

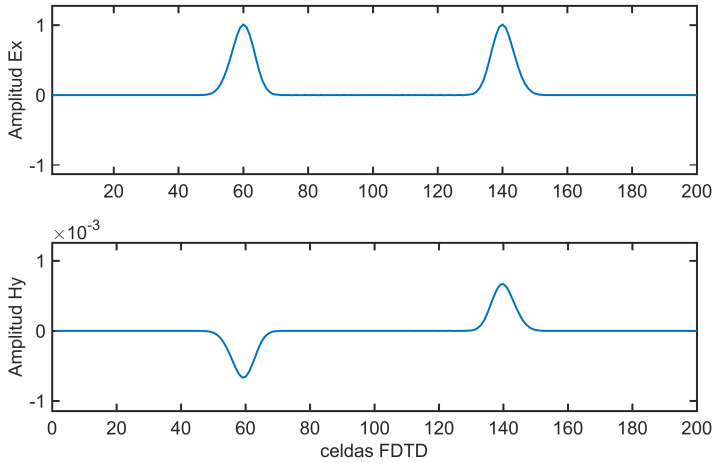

Figura 11. Pulso Gaussiano viajando en el medio numérico $1D$ para una ventana temporal de cien pasos. Se muestran las componentes Ex y Hy.

En el modelado numérico esta fuente se puede añadir como un término multiplicativo en alguna componente del campo eléctrico o sumándola en alguna posición específica. En el primer caso en que multiplica una componente del campo **E**, se le conoce como 'fuente dura' y no resulta la forma más idónea de añadir la fuente, pues produce un cambio muy grande en el valor de campo eléctrico que multiplica (Sullivan, 2013). En contraste, una 'fuente suave' se suma, ocasionando un cambio gradual en la componente del campo donde se inyecta, lo que genera una propagación más suave del pulso-fuente:

$$ex[10] = ex[10] + gaussiana, \tag{56}$$

en la expresión 56 se inyecta como fuente un pulso Gaussiano en la componente x del campo eléctrico E, en la posición 10 del espacio numérico. La expresión discreta del campo eléctrico para este ejemplo, corresponde a la ecuación 38.

En el modelado en tres dimensiones el pulso-fuente viaja por todo el espacio numérico distribuyéndose en todas direcciones, sin embargo, para los modelos 2D y 1D en que hay direcciones en las cuáles las

propiedades físicas son invariantes, es conveniente considerar que también la antena se extiende en esas direcciones del espacio y que sus frentes de onda son invariantes en dichas direcciones. Obteniendo frentes de onda cilíndricos y planos. Un frente de onda plano, en términos de las constantes de atenuación y fase (ecuaciones 14 y 15) se representa como:

$$\mathbf{E}e^{i(\gamma z-\omega t)} = \mathbf{E}e^{i(\alpha+i\beta)z}e^{-i\omega t} = \mathbf{E}e^{i\alpha z}e^{-\beta z}e^{-i\omega t} = \mathbf{E}e^{-\beta z}e^{i(\alpha z-\omega t)}, \tag{57}$$

donde el comportamiento armónico de la onda y la atenuación de su amplitud están relacionados a la constante de fase y de atenuación respectivamente.

La figura 11 muestra un pulso Gaussiano generado con un pulso de onda plana para una dimensión.

Condiciones de frontera

Además de estas consideraciones debemos determinar las condiciones de propagación en los límites del dominio. En un caso real de propagación, las ondas viajan a través de los medios atravesando distintas interfaces produciendo reflexiones, refracciones y difracciones así como pérdidas graduales de la señal, que se conocen como efectos de dispersión y difusión de la energía. Gracias a estos procesos, la señal va perdiéndose gradualmente conforme se aleja de la fuente hasta anularse completamente a la distancia.

En el espacio computacional, la distancia modelada no puede extenderse indefinidamente por lo que la señal viajará hasta alcanzar las fronteras del modelo y al llegar a ellas regresará al interior del espacio del modelo (cosa que no ocurriría en una propagación real); estas fronteras finitas ocasionan un efecto de interfaz provocando ondas numéricas espurias al interior del modelo, lo que hace difícil determinar cuáles ondas son reflejo de contraste entre medios y cuáles provienen artificialmente de las fronteras del modelo. A fin de evitar estos efectos indeseados ocasionados como consecuencia de usar un modelo finito, es común utilizar condiciones de frontera absorbentes en el modelado.

Se han implementado distintas técnicas para simular el comportamiento de la onda al alcanzar los límites del modelo. Una aproximación es considerar condiciones de frontera tipo Dirichlet, con valor igual a cero, que corresponde al valor de ocurrencia natural si las fronteras reales se encontraran suficientemente alejadas de la fuente; de igual manera, se suelen especificar valores hipotéticos en las fronteras del dominio, generalmente resultado de la idealización nuestro problema. Otra aproximación es la condición tipo Newmann, en la que los valores de las fronteras corresponden al flujo normal del campo de salida. La condición tipo Robin resulta de una combinación de las dos anteriores.

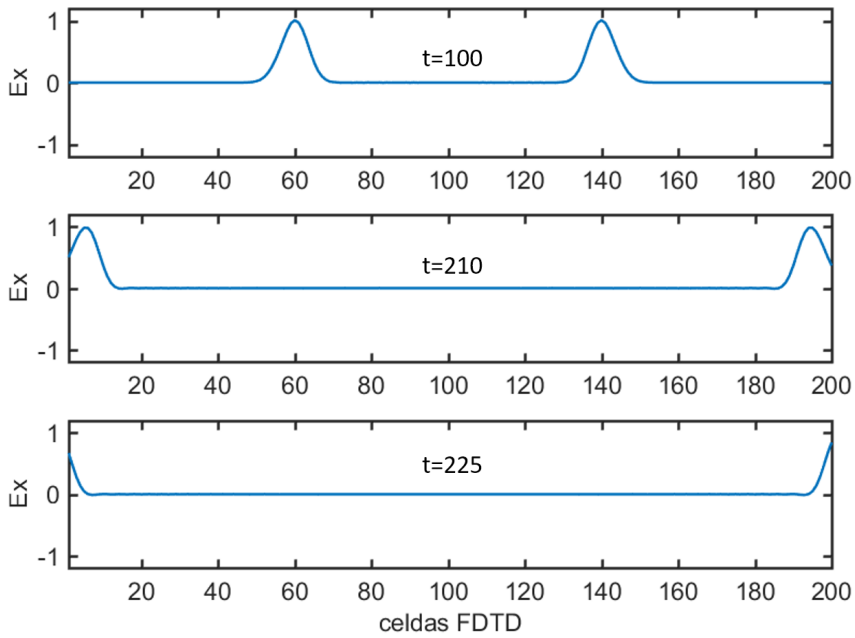

Figura 12. Condiciones de frontera absorbentes aplicadas a un modelado FDTD, note como el pulso va desplazándose por el espacio numérico y es absorbido al llegar a las orillas del dominio.

En FDTD para estimar el campo E necesitamos los valores circundantes del campo H en todo el espacio numérico, pero sabemos que la propagación en el espacio real continuaría hasta atenuarse de manera natural. Para el modelado, si tomamos en cuenta la condición de Courant (ecuación 51), es fácil notar que en el espacio libre necesitamos dos pasos de tiempo para que la onda cruce una celda espacial, por lo que es una aproximación aceptable determinar como condición de borde es:

$$\mathbf{E}_x^n(0) = \mathbf{E}_x^{n-2}(1). \tag{58}$$

Esto es simple de implementar, ya que únicamente necesitamos guardar el valor de $\mathbf{E}_x(1)$ en dos pasos de tiempo y sustituir por $\mathbf{E}_x$ (0). Este tipo de frontera corresponde a la condición tipo Dirichlet.

Un tipo de condiciones de borde ampliamente utilizadas son las 'Condiciones de Frontera Absorbente' (ABC´s por sus siglas en inglés) (Engquist & Majda, 1977; Mur, 1981; Marcus & Joseph, 1998). En la figura 12 se muestra un modelo donde se observa un pulso inyectado en el centro del espacio numérico desplazándose hacia las orillas. Para este ejemplo se utilizaron condiciones ABC's en los bordes. El eje horizontal representa las celdas discretizadas, y el eje vertical la amplitud del campo eléctrico, en tres pasos de tiempo distintos $t = 100, t = 210$ y $t = 225$.

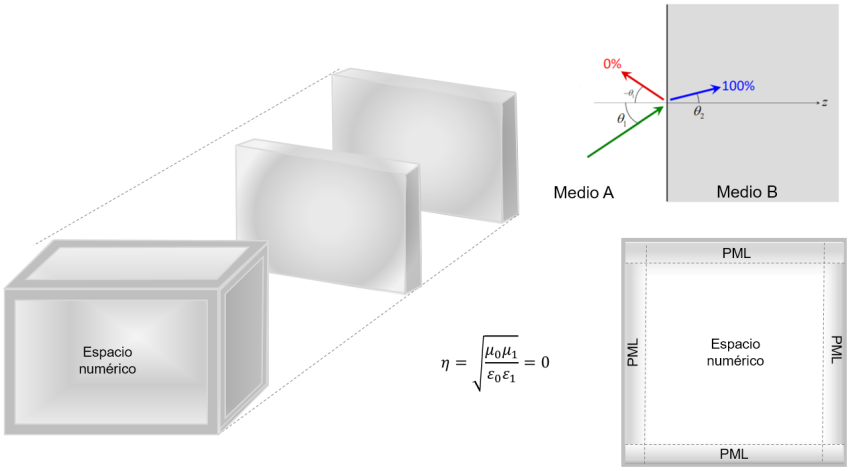

Figura 13. Diagrama esquemático de las condiciones PML.

Condiciones PML.

En 1D condiciones de frontera como las ABC's solucionan el problema de las ondas espurias al interior del espacio numérico, en 2D existen complicaciones adicionales debido a los ángulos de incidencia que pueden tener las ondas al llegar a las fronteras. Existen metodologías más finas para solucionar este problema, una de ellas son las PML por sus siglas en inglés -Perfectly Matched Layer- (Berenger, 1994) y la técnica de super-absorción (Mei & Fang, 1992), ambas ampliamente implementadas debido a su alta efectividad.

La idea básica es considerar fronteras absorbentes de modo que los bordes numéricos funcionen como un medio que disipe gradualmente la energía, para que la señal se atenúe sin provocar reflexiones al interior del modelo. En las PML's la idea básica es la siguiente: si una onda se propaga en el medio A e incide sobre el medio B, la cantidad de reflexión está determinada por la impedancia intrínseca de los dos medios (ecuación 24), que están determinados por sus valores de permitividad y permeabilidad. Si en la ecuación 24 el producto $\mu\varepsilon$ es cero no se produciría ninguna reflexión, estas condiciones de cero reflexión se implementan en todas las orillas del modelo (ver figura 13), considerando para ello valores ficticios de ε, μ y σ, específicamente diseñados para generar un efecto de perfecta disipación de la onda. El *ANEXO A* contiene las ecuaciones para al implementación PML para nuestro problema 2D. Aplicando el esquema FDTD considerando las PML, obtenemos la versión discreta de la Ley de Faraday y Ampere,

donde:

$$\frac{H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} - H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k}}{\Delta t} + \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k} + \sigma_z^{'}|^{i,j,k}}{\varepsilon_o} \frac{H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} + H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k}}{2} + \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k}\sigma_z^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o^2} \left(\frac{H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} + H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k}}{4} + \sum_{T=\Delta t/2}^{t-\Delta t/2} H_x|_T^{i,j,k} \right) = -\frac{1}{\mu|^{i,j,k}} C_x^E|_t^{i,j,k} - \frac{\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o \mu|^{i,j,k}} \sum_{T=0}^{t} C_x^E|_T^{i,j,k}, \tag{59}$$

es la versión discreta para la Ley de Faraday, y:

$$\frac{E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k} - E_x|_t^{i,j,k}}{\Delta t} + \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k} + \sigma_z^{'}|^{i,j,k}}{\varepsilon_o} \frac{E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k} + E_x|_t^{i,j,k}}{2} + \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k}\sigma_z^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o^2} \left(\frac{E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k} + E_x|_t^{i,j,k}}{4} + \sum_{T=0}^{t} E_x|_T^{i,j,k} \right) = \frac{1}{\varepsilon|^{i,j,k}} C_x^H|_t^{i,j,k} - \frac{\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o \varepsilon|^{i,j,k}} \sum_{T=\Delta t/2}^{t-\Delta t/2} C_x^H|_T^{i,j,k} - \frac{\sigma|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon|^{i,j,k}} \frac{E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k} + E_x|_t^{i,j,k}}{2} - \frac{\sigma|^{i,j,k}\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o \varepsilon|^{i,j,k}} \left(\frac{E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k} + E_x|_t^{i,j,k}}{4} + \sum_{T=0}^{t} E_x|_T^{i,j,k} \right), \tag{60}$$

la discretización de la Ley de Ampere.

Las ecuaciones numéricas se solucionan para el paso de tiempo futuro de los campos **E** y **H**. Agrupando los términos $H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k}$ y $E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k}$ en las ecuaciones 59 y 60, y después de algunas operaciones algebraicas, tenemos para la componente de campo magnético H_x:

$$H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} = \left(m_{Hx1}|^{i,j,k}\right) H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k} + \left(m_{Hx2}|^{i,j,k}\right) C_x^E|_t^{i,j,k} + \left(m_{Hx3}|^{i,j,k}\right) IC_{Ex}|_t^{i,j,k} + \left(m_{Hx4}|^{i,j,k}\right) IH_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k}, \tag{61}$$

donde:

$$m_{Hx1}|^{i,j,k} = \frac{\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k} + \sigma_z^{'}|^{i,j,k}}{2\varepsilon_o} - \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k}\sigma_z^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{4\varepsilon_o^2}}{m_{Hx0}|^{i,j,k}}, \tag{62}$$

$$m_{Hx0}|^{i,j,k} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k} + \sigma_z^{'}|^{i,j,k}}{2\varepsilon_o} + \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k}\sigma_z^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{4\varepsilon_o^2}, \tag{63}$$

$$m_{Hx2}|^{i,j,k} = -\frac{\frac{1}{\mu|^{i,j,k}}}{m_{Hx0}|^{i,j,k}}, \tag{64}$$

$$m_{Hx3}|^{i,j,k} = -\frac{\frac{\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o \mu|^{i,j,k}}}{m_{Hx0}|^{i,j,k}}, \tag{65}$$

y

$$m_{Hx4}|^{i,j,k} = -\frac{\frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k}\sigma_z^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o^2}}{m_{Hx0}|^{i,j,k}}. \tag{66}$$

Los términos de integración son:

$$IC_{Ex}|_t^{i,j,k} = \sum_{T=0}^{t} C_x^E|_t^{i,j,k} \tag{67}$$

y

$$IH_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k} = \sum_{T=\Delta t/2}^{t-\Delta t/2} H_x|_T^{i,j,k}, \tag{68}$$

donde el coeficiente $C_x^E|_t^{i,j,k}$: en su forma discreta se reescribe como:

$$C_x^E|_t^{i,j,k} = \frac{E_z|_t^{i,j+1,k} - E_z|_t^{i,j,k}}{\Delta y} - \frac{E_y|_t^{i,j,k+1} - E_y|_t^{i,j,k}}{\Delta z}. \tag{69}$$

La ecuación 61 (junto con las subsecuentes ecuaciones 62 a la 79) es calculada dentro del loop principal inmediatamente después de haber estimado los términos de integración.

De manera análoga que para el campo magnético, estimamos la discretización de la componente x para la ecuación discreta del campo eléctrico E_x(ec. 60), para un tiempo $\Delta t + t$. La ecuación de actualización del campo es:

$$\begin{aligned} E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k} = \left(m_{Ex1}|^{i,j,k}\right) E_x|_t^{i,j,k} + \left(m_{Ex2}|^{i,j,k}\right) C_x^H|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} + \left(m_{Ex3}|^{i,j,k}\right) IC_{Hx}|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k} \\ + \left(m_{Ex4}|^{i,j,k}\right) IE_x|_t^{i,j,k} + \left(m_{Ex5}|^{i,j,k}\right) IE_x|_t^{i,j,k}, \end{aligned} \tag{70}$$

donde, los coeficientes $m_{Exn}|^{i,j,k}$ son:

$$m_{Ex1}|^{i,j,k} = \frac{\frac{1}{\Delta t} - \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k} + \sigma_z^{'}|^{i,j,k}}{2\varepsilon_o} - \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k}\sigma_z^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{4\varepsilon_o^2} - \frac{\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}} - \frac{\sigma|^{i,j,k}\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{4\varepsilon_o\varepsilon|^{i,j,k}}}{m_{Ex0}|^{i,j,k}}, \tag{71}$$

$$m_{Ex0}|^{i,j,k} = \frac{1}{\Delta t} + \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k} + \sigma_z^{'}|^{i,j,k}}{2\varepsilon_o} + \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k}\sigma_z^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{4\varepsilon_o^2} + \frac{\sigma|^{i,j,k}}{2\varepsilon|^{i,j,k}} + \frac{\sigma|^{i,j,k}\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{4\varepsilon_o\varepsilon|^{i,j,k}}, \tag{72}$$

$$m_{Ex2}|^{i,j,k} = -\frac{\frac{1}{\varepsilon|^{i,j,k}}}{m_{Ex0}|^{i,j,k}}, \tag{73}$$

$$m_{Ex3}|^{i,j,k} = -\frac{\frac{\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o\varepsilon|^{i,j,k}}}{m_{Ex0}|^{i,j,k}}, \tag{74}$$

$$m_{Ex4}|^{i,j,k} = -\frac{\frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k}\sigma_z^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o^2}}{m_{Ex0}|^{i,j,k}}, \tag{75}$$

$$m_{Ex5}|^{i,j,k} = -\frac{\frac{\sigma|^{i,j,k}\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o\varepsilon|^{i,j,k}}}{m_{Ex0}|^{i,j,k}}, \tag{76}$$

y los coeficientes de integración:

$$IC_{Hx}|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k} = \sum_{T=\Delta t/2}^{t-\Delta t/2} C_x^H|_T^{i,j,k}, \tag{77}$$

$$IE_x|_t^{i,j,k} = \sum_{T=0}^{t} E_x|_t^{i,j,k}, \tag{78}$$

donde $C_x^H|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k}$ en su forma discreta se reescribe como:

$$C_x^H|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} = \frac{H_z|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} - H_z|_{t+\Delta t/2}^{i,j-1,k}}{\Delta y} - \frac{H_y|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} - H_y|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k-1}}{\Delta z}, \tag{79}$$

que corresponden a la componente x de actualización del rotacional del campo eléctrico.

PML en dos dimensiones.

Para el caso en dos dimensiones en que una dirección se considera invariante, las ecuaciones para el modo TM únicamente incluyen las componentes E_z, H_x y H_y.

Re-ordenando términos, tenemos para la componente H_x:

$$H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,k} = m_{Hx1} H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,k} + \frac{1}{d_{Hx}}\left(-\frac{\Delta t}{\mu|^{i,k}} C_x^E|_t^{i,k}\right) + \frac{1}{d_{Hx}}\left(-\frac{\sigma_x^{'}|^{i,k}\Delta t^2}{\varepsilon_o \mu} I_{CEx}|_t^{i,k}\right), \tag{80}$$

siendo sus coeficientes:

$$m_{Hx1} = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_y^{'}|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon_o}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_y^{'}|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon_o}\right]}; \quad d_{Hx} = 1 + \frac{\sigma_y^{'}|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon_o}; \quad I_{CEx}|_t^{i,k} = \sum_{T=0}^{t} C_x^E|_t^{i,k}; \tag{81}$$

$$C_x^E|_t^{i,k} = \frac{E_z|_t^{i,k+1} - E_z|_t^{i,k}}{\Delta y}. \tag{82}$$

La ecuación de actualización del campo magnético para la componente y es:

$$H_y|_{t+\Delta t/2}^{i,k} = m_{Hy1} H_y|_{t-\Delta t/2}^{i,k} + \frac{1}{d_{Hy}}\left(-\frac{\Delta t}{\mu|^{i,k}} C_y^E|_t^{i,k}\right) + \frac{1}{d_{Hy}}\left(-\frac{\sigma_y^{'}|^{i,k}\Delta t^2}{\varepsilon_o \mu} I_{CEy}|_t^{i,k}\right), \tag{83}$$

siendo sus coeficientes:

$$m_{Hy1} = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x^{'}|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon_o}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x^{'}|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon_o}\right]}; \quad d_{Hy} = 1 + \frac{\sigma_x^{'}|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon_o}; \quad I_{CEy}|_t^{i,k} = \sum_{T=0}^{t} C_y^E|_t^{i,k}; \tag{84}$$

$$C_y^E|_t^{i,k} = -\left[\frac{E_z|_t^{i+1,k} - E_z|_t^{i,k}}{\Delta x}\right]. \tag{85}$$

La ecuación de actualización en dos dimensiones para la componente z del campo eléctrico es:

$$E_z|_{t+\Delta t}^{i,k} = m_{Ez1} E_z|_t^{i,k} + \frac{1}{d_{Ez}}\left(\frac{\Delta t}{\varepsilon|^{i,k}} C_z^H|_{t+\Delta t/2}^{i,k}\right) + \frac{1}{d_{Ez}}\left(-\frac{\sigma_x^{'}|^{i,k}\sigma_y^{'}|^{i,k}\Delta t^2}{\varepsilon_o^2} I E_z|_t^{i,k}\right), \tag{86}$$

donde:

$$m_{Ez1} = \frac{\left[1 - \frac{\sigma_x^{'}|^{i,k} + \sigma_y^{'}|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon_o} - \frac{\sigma_x^{'}|^{i,k}\sigma_y^{'}|^{i,k}\Delta t^2}{4\varepsilon_o^2} - \frac{\sigma_{zz}|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon_{zz}|^{i,k}}\right]}{\left[1 + \frac{\sigma_x^{'}|^{i,k} + \sigma_y^{'}|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon_o} + \frac{\sigma_x^{'}|^{i,k}\sigma_y^{'}|^{i,k}\Delta t^2}{4\varepsilon_o^2} + \frac{\sigma|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon|^{i,k}}\right]}, \tag{87}$$

$$d_{Ez} = \left[1 + \frac{\sigma_x^{'}|^{i,k} + \sigma_y^{'}|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon_o} + \frac{\sigma_x^{'}|^{i,k}\sigma_y^{'}|^{i,k}\Delta t^2}{4\varepsilon_o^2} + \frac{\sigma|^{i,k}\Delta t}{2\varepsilon|^{i,k}}\right], \tag{88}$$

$$IE_z|_t^{i,k} = \sum_{T=0}^{t} E_z|_t^{i,k}; \quad C_z^H|_{t+\Delta t/2}^{i,k} = \frac{H_y|_{t+\Delta t/2}^{i,k} - H_y|_{t+\Delta t/2}^{i-1,k}}{\Delta x} - \frac{H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,k} - H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,k-1}}{\Delta y}. \tag{89}$$

En este punto es importante preguntarnos si existe alguna manera de corroborar que la implementación de las PML's sea correcta. Una manera simple de verificarlo, es definir los parámetros de las PML's iguales a cero y revisar si las ecuaciones de actualización de los campos se reducen a las ecuaciones 40 y 43. Sin PML's tenemos:

$$m_{Hx1}|^{i,j,k} = \frac{\frac{1}{\Delta t}}{\frac{1}{\Delta t}}, \qquad m_{Hx2}|^{i,j,k} = -\frac{\frac{1}{}}{\frac{1}{\mu}} = -\frac{\Delta t}{\mu}, \qquad m_{Hx3}|^{i,j,k} = 0, \qquad m_{Hx4}|^{i,j,k} = 0, \tag{90}$$

De modo que aplicando estas simplificaciones a la ecuación 80 tendremos:

$$H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,k} = H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,k} - \frac{\Delta t}{\mu|^{i,k}\Delta y}\left(E_z|_t^{i,k+1} - E_z|_t^{i,k}\right),$$

que corresponde a la ecuación de actualización para dos dimensiones sin PML (ecuación 36).

En general el esquema FDTD tiene, como muchos métodos, ventajas y desventajas que a continuación se enlistan:

Ventajas:

- La solución de los campos evoluciona en el tiempo y el espacio sin necesidad de criterios matemáticos adicionales como en el caso de otros métodos, por ejemplo, el método de momentos (MoM) o de residuos ponderados, en el que es necesarios encontrar la función de Green que mejor define una aproximación a la estructura que queremos modelar (Apaydin & Sevgi, 2012).
- Las ecuaciones de Maxwell pueden ser resueltas de manera explícita en tiempo y espacio y sin necesidad de almacenar matrices volumétricas de la propagación de los campos en el espacio.
- El método es más robusto y estable que otras aproximaciones puesto que es independiente de las

aproximaciones físicas que puedan hacerse respecto al problema, lo que hace de este método una aproximación versátil.

- La solución corresponde a una aproximación de segundo orden, lo cuál es aceptable en modelado numérico.
- Produce una solución de campo total, operando en ambos campos eléctrico y magnético, simultáneamente.
- Pueden implementarse en materiales de distintas características: capacitivos, polarizables, permanentemente magnetizados o con condiciones no lineales, por ejemplo, un medio de Lorentz (Chen, 2020).
- Pueden incluirse sub-grids en casos especiales donde se requiera mayor detalle en el mallado.
- Permite recuperar la propagación de los campos en tiempo y espacio a manera de radargramas.
- Para muchas aplicaciones prácticas, se necesitan de $1-2$ Gb de memoria RAM para el modelado, capacidad de cualquier computadora convencional.

Desventajas:

- Se debe cumplir la condición de Courant para asegurar la estabilidad, lo que implica que la propagación debe realizarse en pasos de tiempo muy pequeños, por lo que para un modelado de grandes dimensiones se requerirá una gran demanda de recursos computacionales.
- Requiere un incremento espacial pequeño, para obtener una solución robusta ($1/15$ de la longitud de la onda, de acuerdo a Cassidy et al. (2008).
- Las mallas son regulares lo que hace difícil modelar algunas formas geométricas o superficies topográficas.
- Condiciones de frontera como las PML exige más recursos computacionales, mientras que condiciones tipo Dirichlet (que son relativamente fáciles de implementar) pueden introducir ondas espurias al modelo.

Capítulo 4. Análisis de sensibilidad y teoría inversa

La Tierra es un ambiente complejo, como geofísicos estamos interesados en determinar propiedades físicas de las rocas, pues conociéndolas podemos inferir los materiales existentes y su distribución en el subsuelo ya sea por un interés económico o científico.

Existe una relación entre estas propiedades y los campos que inducimos en geofísica (eléctricos, magnéticos, sísmicos, electromagnéticos, etc.); aprovechando esta relación y el hecho de que podemos medir los campos en la distancia, es posible obtener información indirecta del subsuelo, a esta información le llamamos -datos geofísicos-.

En general, podemos realizar el proceso de interpretación de datos geofísicos siguiendo dos enfoques: el problema directo y el problema inverso. El problema directo, consiste en reproducir la propagación de los campos utilizando nuestro conocimiento del fenómeno. Matemáticamente, el problema directo puede representarse como (McGillivray & Oldenburg, 1990):

$$e_j = f_j(\boldsymbol{m}), \qquad j = 1, 2, ..., N, \tag{91}$$

donde $\boldsymbol{m}$ corresponde a aquellos aspectos que definen nuestra representación simplificada de la realidad (modelo), que se pueden cuantificar en términos de un vector $\boldsymbol{m} = m_1, m_2, ..., m_N$. Si el aspecto a analizar corresponde a la distribución espacial de alguna característica, entonces $\boldsymbol{m}(r)$ se puede definir a partir de valores discretos cuantificables como:

$$\boldsymbol{m}(\mathrm{r}) = \sum_j^N m_l \varphi_l(r), \tag{92}$$

siendo φ un conjunto de funciones base que nos permiten discretizar el dominio del problema (parametrizar el problema), y $f_j(\boldsymbol{m})$ es una función que relaciona a dicho modelo $\boldsymbol{m}$ con el *j*-ésimo dato e_j. La función $f_j(\boldsymbol{m})$ puede describir un comportamiento lineal si existe una relación exacta entre e_j y los parámetros en $\boldsymbol{m}$ (algunas veces solo variando en un factor de escala); el problema será no lineal si por el contrario, no hay una correspondencia observaciones/parámetros (Meju, 1994). Si el problema es lineal entonces la expresión 91 puede ser escrita como:

$$e_j = \int_{\Omega} \boldsymbol{K}_j(r) \boldsymbol{m}(r) d^3 r, \qquad j = 1, 2, ..., N, \tag{93}$$

donde Ω es el dominio del problema y $\boldsymbol{K}_j(r)$ es el kernel de la función asociado al *j*-ésimo dato. En

el capítulo tres describimos a detalle cómo se realiza el modelado computacional para un esquema de datos de radar, lo cuál corresponde al problema directo.

El segundo enfoque es el problema inverso en el cuál teniendo un conjunto de observaciones, estimamos el modelo $\boldsymbol{m}^*$ que mejor justifique el valor de esas observaciones (Gallardo, 1997). Matemáticamente, podemos expresarlo como:

$$e_j^{obs} \cong f_j(\boldsymbol{m}^*), \qquad j = 1, 2, ...N, \tag{94}$$

donde e_j^{obs} es la *j*-ésima observación realizada y $f_j(\boldsymbol{m}^*)$es la mejor solución estimada. Si el problema es lineal, existe una gran variedad de técnicas de álgebra lineal para determinar m^* a partir de la ecuación 94; sin embargo, muchos de los problemas en geofísica son no lineales como es el caso del problema en 2D para el radar y llevan a técnicas más elaboradas.

En la inversión de datos geofísicos, partimos de las observaciones e_j^{obs} y las traducimos en mapas de la distribución de las propiedades del terreno; utilizamos, por ejemplo, datos de resistividad por corriente directa y con ello inferimos la distribución de la conductividad eléctrica en el subsuelo. Cada tipo de dato geofísico nos permite inferir algún tipo de distribución, por ejemplo, la porosidad de los materiales o su densidad, su conductividad eléctrica, sus propiedades magnéticas, etc.

En problemas no lineales en geofísica, una estrategia comúnmente empleada es iniciar con un modelo de prueba $\boldsymbol{m}_o(r)$ y resolver con este modelo el problema directo para obtener un conjunto de datos predichos. La diferencia entre los datos observados y los predichos proporciona indicios de las modificaciones $\delta\boldsymbol{m}(r)$ necesarias para cambiar el modelo de prueba por un nuevo modelo que reproduzca mejor los datos observados.

Para relacionar estos elementos se pueden expresar los datos a través de una expansión en series de Taylor, como:

$$e_j^{obs} = f_j(\boldsymbol{m}_o) + f_j^1(\boldsymbol{m}_o)\delta m + \frac{1}{2!}f_j^2(\boldsymbol{m}_o)\delta m^2 + ..., \tag{95}$$

donde el término $f_j^1(m)$ de la expresión 95 corresponde a la derivada de primer orden de $f_j(\boldsymbol{m})$, conocida típicamente como la derivada de Fréchet (Chave, 1984).

Para encontrar el mejor ajuste entre las observaciones e_j^{obs} (datos geofísicos) y la respuesta del modelo $f_j(\boldsymbol{m}^*)$, planteamos una función matemática que cuantifique la disparidad global entre ambos elementos. A esta función matemática se le conoce como *función objetivo*, ya que es deseable que su valor sea lo más pequeño posible (mínimo), se busca encontrar el modelo $\boldsymbol{m}^*$ que mejor predice las observaciones.

Esta función se puede proponer a partir de la diferencia entre los datos observados y predichos como:

$$\delta e_j = e_j^{obs} - f_j(\boldsymbol{m}_o), \tag{96}$$

reescribimos 95 como:

$$\delta e_j = f_j^1(\boldsymbol{m}_o)\delta m + O(\|\delta(\boldsymbol{m})\|^2), \tag{97}$$

en donde usualmente el término $O(\|\delta(\boldsymbol{m})\|^2)$, que representa los términos de orden superiores es descartado. La ecuación 97 puede reescribirse como:

$$\delta e_j \approx \int_\Omega \boldsymbol{K}_j(r, m_o)\delta m(r) d^3 r, \tag{98}$$

donde el término $\boldsymbol{K}_j(r, m)$ corresponde al kernel asociado a la derivada de Fréchet de la *j*-ésima observación; este término es importante ya que establece la relación entre la perturbación de primer orden del modelo respecto al pequeño cambio que genera en el dato correspondiente.

De este modo, un paso importante del problema inverso será encontrar una solución a la expresión 98.

4.1. Teoría del campo adjunto

Es común que cuando el problema directo es expresado como un problema de valores en la frontera, las derivadas de Fréchet (sensibilidades) puedan ser estimadas resolviendo un problema auxiliar sujeto a condiciones en la frontera de manera similar (incluso idénticas) a las planteadas en el problema original. Al igual que el problema directo, este problema auxiliar puede ser resuelto de muchas maneras: por ejemplo, utilizando algún método discreto que resuelva las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno (diferencias finitas, elemento finito, volumen finito, etc); comúnmente reduciéndolas a una aproximación algebraica.

Una vez que hemos planteado el problema directo y auxiliar como aproximaciones de valores en la frontera, podemos considerar distintas metodologías y emplearlas para calcular las derivadas de Fréchet y finalmente resolver el problema inverso (ecuación 94). Una de las metodologías más sencillas para calcular estas derivadas es el *Método de las perturbaciones*; sin embargo, es exigente computacionalmente pues requiere calcular el problema directo para cada parámetro en cada actualización del modelo (Parker,

1977a,b). Otro enfoque para el cálculo de las derivadas de Fréchet es el *Método de Aproximación a la Ecuación de Sensibilidad*, el cuál ha sido abordado por Rodi (1976), Oristaglio & Worthington (1980) y otros, en el problema inverso EM. En él, las sensibilidades son resueltas directamente pero con un costo computacional semejante al del cálculo de las sensibilidades con perturbaciones.

El método del campo adjunto es un método eficiente para calcular las derivadas de Fréchet y su proyección para la solución del problema inverso (Smith & Vozoff, 1984; Tarantola, 2005; Egbert & Kelbert, 2012). En este caso, no es necesario calcular un problema auxiliar para cada parámetro, sino que solamente se resuelve un problema directo para determinar la matriz de sensibilidades, y otro problema directo para determinar el vector gradiente que nos lleva a la solución.

Para plantear el problema adjunto consideremos una aproximación electromagnética, donde el medio es caracterizado por la permitividad dieléctrica -$\varepsilon(\mathbf{r})$-, la conductividad eléctrica -$\sigma(\mathbf{r})$- y la permeabilidad magnética -$\mu(\mathbf{r})$-, dada una fuente $s(\mathbf{r},t)$, planteamos una función $\boldsymbol{G}$ de modo que:

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{G}(r,r') = \delta(r-r'), \tag{99}$$

donde $\boldsymbol{G}(r,r')$ se denomina *función de Green*, y $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(r)$ corresponde a un operador diferencial lineal actuando en un espacio Euclidiano R^n en el punto r, mientras que δ corresponde a la función delta de Dirac. La función de Green nos permiten resolver ecuaciones diferenciales tales como:

$$\boldsymbol{L}u(r) = \boldsymbol{s}(r), \tag{100}$$

donde teniendo ciertas condiciones iniciales y de frontera, es posible encontrar una función de Green para algunos modelos de geometría simple. De este modo, la función $\boldsymbol{G}(r,r')$ ligada al operador $\boldsymbol{L}$ es diseñada para que cumpla con 99; con esto en mente, si multiplicamos 99 por $\boldsymbol{s}(r')$ e integramos respecto a r', obtenemos:

$$\int \boldsymbol{L}\boldsymbol{G}(r,r')\boldsymbol{s}(r')dr' = \int \delta(r-r')s(r')dr' = \boldsymbol{s}(r) \tag{101}$$

debido a que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(r)$ es lineal y solo actúa en r, reescribimos:

$$\boldsymbol{L}\left(\int \boldsymbol{G}(r,r')\boldsymbol{s}(r')dr'\right) = \boldsymbol{s}(r), \tag{102}$$

de manera que

$$u(r) = \int \boldsymbol{G}(r,r')\boldsymbol{s}(r')dr', \tag{103}$$

que corresponde a una solución a la ecuación 100. Por lo tanto, una aproximación a la solución de 100 se centra en hallar la función de Green relacionada al operador $\boldsymbol{L}$.

En este punto, retomamos las Leyes de Ampere y de Faraday (ecuaciones 8 y 9) y aplicamos, para cada una, un operador análogo a las funciones de Green:

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{r},t)\cdot\left[\nabla\times\mathbf{H}(\mathbf{r},\mathbf{t})-\sigma(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r},\mathbf{t})-\varepsilon(\mathbf{r})\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},\mathbf{t})}{\partial t}=\boldsymbol{s}(\mathbf{r},t)\right] \tag{104}$$

y

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r},t)\cdot\left[\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},\mathbf{t})+\mu(\mathbf{r})\frac{\partial\mathbf{H}(\mathbf{r},\mathbf{t})}{\partial t}=\boldsymbol{p}(\mathbf{r},t)\right], \tag{105}$$

Ahora, para cuantificar el residual entre datos, adoptamos una estimación de mínimos cuadrados de la forma:

$$\phi_E=\frac{1}{2}\sum_j\int_0^T\left[\boldsymbol{E}_j^{obs}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_j,t)\right]^2dt, \tag{106}$$

donde $\boldsymbol{E}_j^{obs}$ representa el campo eléctrico observado al tiempo t, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_j,t)$ es el campo calculado, $[0,T]$ corresponde al intervalo de la serie de tiempo de interés, y j representa el número de observaciones.

Dado que la relación entre $\boldsymbol{E}_j^{obs}$ y $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_j,t)$ es una relación no lineal, la inversión debe resolverse de manera iterativa, de modo que nuestro problema se convierte en un problema de optimización, entendiendo por optimización al proceso de seleccionar el mejor elemento de un conjunto de elementos disponibles con respecto a algún criterio (Nocedal & Wright, 2000). Además, para resolver debemos restringir la solución de acuerdo al problema EM; considerando los operadores de Green de las ecuaciones 104 y 105, podemos reescribir en términos de una aproximación restringida:

$$\begin{aligned}\phi_E=&\frac{1}{2}\sum_j\int_0^T\left[\boldsymbol{E}_j^{obs}-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_j,t)\right]^2dt\\&-\int_0^T\int_\Omega\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left[\nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)-\sigma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon(\boldsymbol{r})\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r},t)\right]d^3rdt\\&-\int_0^T\int_\Omega\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left[\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\mu(\boldsymbol{r})\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t)\right]d^3rdt,\end{aligned} \tag{107}$$

escribimos en una notación más corta:

$$\begin{aligned}\phi_E =& \frac{1}{2}\sum_j \int_0^T \left[\boldsymbol{E}_j^{obs} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_j, t)\right]^2 dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \left[\nabla \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) - \sigma(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) - \varepsilon(\boldsymbol{r})\partial_t \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}, t)\right] d^3 r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \left[\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \mu(\boldsymbol{r})\partial_t \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) - \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}, t)\right] d^3 r dt.\end{aligned} \tag{108}$$

Dado que buscamos un punto estacionario de 108, calculamos $\delta\phi_E$ de la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\delta\phi_E =& \int_0^T \int_\Omega \sum_j 2\left[\boldsymbol{E}_j^{obs} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\right] \cdot \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j, t - t_j) \cdot \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) d^3 r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \{\nabla \times \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) - \delta\left[\sigma(\boldsymbol{r})\right] \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) - \sigma(\boldsymbol{r})\delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \\ &- \delta\left[\varepsilon(\boldsymbol{r})\right] \partial_t \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) - \varepsilon(\boldsymbol{r})\partial_t \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) - \delta\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r}, t)\} d^3 r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \delta\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r}, t) d^3 r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \{\nabla \times \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) + \delta\left[\mu(\boldsymbol{r})\right] \partial_t \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) + \mu(\boldsymbol{r})\partial_t \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) - \delta\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}, t)\} d^3 r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \delta\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r}, t) d^3 r dt.\end{aligned} \tag{109}$$

El valor mínimo se encuentra en el punto estacionario $\delta\phi_E = 0$.

Para resolver la ecuación 109, reordenamos los términos, aplicando después algunas identidades y operaciones. El desarrollo completo de la solución se incluye en el *ANEXO B*.

La expresión desarrollada y reagrupada es:

$$
\begin{aligned}
\delta\phi_E = &\int_0^T \int_\Omega \sum_j \left[\boldsymbol{E}_j^{obs} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j, t-t_j) \cdot \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \left\{-\delta\left[\sigma(\boldsymbol{r})\right] \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \delta\left[\varepsilon(\boldsymbol{r})\right] \partial_t \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \delta\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r},t)\right\} d^3r dt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \left\{\left[\nabla \times \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t)\right] \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \sigma(\boldsymbol{r}) \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right\} d^3r dt \\
&+ \int_\Omega \left[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \varepsilon(\boldsymbol{r}) \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]_0^T d^3r - \int_0^T \int_\Omega \partial_t \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \varepsilon(\boldsymbol{r}) \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \left[\nabla \times \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt \\
&- \int_\Omega \left[\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \mu(\boldsymbol{r}) \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\right]_0^T d^3r + \int_0^T \int_\Omega \partial_t \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \cdot \mu(\boldsymbol{r}) \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \cdot \left\{\delta\left[\mu(\boldsymbol{r})\right] \partial_t \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \delta\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t)\right\} d^3r dt.
\end{aligned}
\tag{110}
$$

Consideramos ahora las siguientes condiciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},0) &= 0, \\
\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},0) &= 0, \\
\delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},0) &= 0, \\
\delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},0) &= 0,
\end{aligned}
\tag{111}
$$

además, las condiciones para la distribución al tiempo T son:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},T) &= 0, \\
\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},T) &= 0, \\
\delta_t\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},T) &= 0, \\
\delta\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},T) &= 0,
\end{aligned}
\tag{112}
$$

reescribimos 110:

$$\begin{aligned}\delta\phi_E = &\int_0^T \int_\Omega \sum_j \left[\boldsymbol{E}_j^{obs} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j, t-t_j) \cdot \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \left\{-\delta\left[\sigma(\boldsymbol{r})\right] \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \delta\left[\varepsilon(\boldsymbol{r})\right] \partial_t \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \delta\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r},t)\right\} d^3r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \left\{\left[\nabla \times \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t)\right] \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \sigma(\boldsymbol{r}) \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right\} d^3r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \partial_t \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \varepsilon(\boldsymbol{r}) \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \left[\nabla \times \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega \partial_t \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \cdot \mu(\boldsymbol{r}) \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \cdot \left\{\delta\left[\mu(\boldsymbol{r})\right] \partial_t \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \delta\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t)\right\} d^3r dt.\end{aligned} \tag{113}$$

Si agrupamos los términos $-\delta\boldsymbol{E}$ y $\delta\boldsymbol{H}-$ tenemos:

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega \sum_j \left[\boldsymbol{E}_j^{obs} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j, t-t_j) \cdot \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt \\ &\quad = \int_0^T \int_\Omega \left[\nabla \times \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) - \mu(\boldsymbol{r}) \partial_t \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt \\ &\quad + \int_0^T \int_\Omega \left[\nabla \times \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) - \sigma(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) + \varepsilon(\boldsymbol{r}) \cdot \partial_t \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt\end{aligned} \tag{114}$$

reordenamos términos,

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) - \sigma(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) + \varepsilon(\boldsymbol{r}) \cdot \partial_t \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) &= \sum_j \left[\boldsymbol{E}_j^{obs} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j, t-t_j) \\ \nabla \times \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) - \mu(\boldsymbol{r}) \partial_t \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) &= 0,\end{aligned} \tag{115}$$

los términos respecto a $\delta\boldsymbol{H}$ se igualan a cero dado que no hay datos magnéticos, mientras que los términos respecto de $\delta\boldsymbol{E}$ se igualan al residual entre los datos observados y los calculados. El único término de $\delta\phi_E$ que no se puede resolver directamente una vez igualada a cero es:

$$\begin{aligned}\delta\phi_E = &- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \left\{-\delta\left[\sigma(\boldsymbol{r})\right] \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \delta\left[\varepsilon(\boldsymbol{r})\right] \partial_t \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \delta\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r},t)\right\} d^3r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \cdot \left\{\delta\left[\mu(\boldsymbol{r})\right] \partial_t \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \delta\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t)\right\} d^3r dt.\end{aligned} \tag{116}$$

Esta expresión provee las derivadas de ϕ_E respecto a cada parámetro:

$$\delta\phi_{E(\varepsilon)} = \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t)\cdot\partial_t\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\delta_{\varepsilon(\boldsymbol{r})}d^3tdt, \tag{117}$$

$$\delta\phi_{E(\sigma)} = \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\delta_{\sigma(\boldsymbol{r})}d^3rdt \tag{118}$$

y

$$\delta\phi_{E(\mu)} = -\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)\cdot\partial_t\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\delta_{\mu(\boldsymbol{r})}d^3rdt. \tag{119}$$

Las expresiones 117, 118 y 119 corresponden a las variaciones en $\delta\phi_E$ para cada parámetro EM. Para resolver el problema de optimización se deben igualar a cero y resolver por un método comúnmente iterativo.

4.2. Ecuaciones de estado adjunto

Para entender la relación entre las funciones de Green y la teoría de campo adjunto, un buen comienzo es analizar el principio de formación de imágenes de Claerbout, quien en 1971 postuló una de las contribuciones más valiosas a la industria de exploración sísmica, (contribución que después se extrapolaría a otros métodos). Claerbout enumeró tres principios: i) un modelo de 'reflector explosivo', puede utilizarse en datos apilados o con desplazamiento cero, ii) las ondas propagadas de la fuente hacia abajo en el subsuelo inciden en un reflector generando una onda reflejada ascendente, de este modo existe una coincidencia espacio-temporal de las ondas ascendentes y descendentes y iii) la obtención de imágenes comienza con datos fuente-receptor (en superficie) y predice lo que una fuente y un receptor registrarían dentro de la tierra, dicho de otro modo, se puede organizar la fuente-receptor para que sean coincidentes de modo que la relación entre ambas pueda predecir la distribución sub-superficialmente de los campos (Claerbout, 1986). En la figura 14 se sintetiza el razonamiento de los principios i) a iii), la figura superior izquierda representa una propagación donde transmisor (Tx) y receptor(Rx) son coincidentes (offset cero), mientras que a la derecha se representa el modelo de 'reflector explosivo'. Note que en esta última, Tx se localiza en el reflector. El patrón de reflexión en ambas imágenes, es idéntico. En las figuras *a- d* los 'reflectores explosivos' se localizan en distintas posiciones (capa$1, 2$ y 3). La superposición de -*a, b y c*- ocasiona el efecto combinado en d. Esta teoría justifica el relacionar tiempos de viaje retropropagados.

De tal manera, en las ecuaciones 117, 118 y 119 podemos estimar la relación entre las ondas directas y las recíprocas; por lo tanto, la trayectoria donde estas ondas puedan ser relacionadas (espacial y temporalmente respecto a su tiempo de propagación y amplitud de la onda), indicará los cambios requeridos en los valores en ε, μ y σ.

Podemos plantear un problema auxiliar, en el que la distribución espacio-temporal sea la misma pero la onda viaje del receptor a la fuente en tiempo reverso con el fin de correlacionar las trayectorias de viaje (respecto a una heterogeneidad en el subsuelo); dado que las funciones de Green son invariantes en el tiempo (t), podemos relacionar $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\xi}$ con operadores auxiliares invariantes en t:

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{\lambda}(r, T-t), \\ \tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t) &= \boldsymbol{\xi}(r, T-t), \end{aligned} \tag{120}$$

donde a $\tilde{\boldsymbol{E}}$ y $\tilde{\boldsymbol{H}}$ se les conoce como operadores de campo adjunto. Reescribimos entonces la ecuación 115 en términos de esos campos adjuntos:

$$\begin{aligned} \nabla \times \tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) - \sigma(\boldsymbol{r}) \cdot \tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) + \varepsilon(\boldsymbol{r}) \cdot \partial_t \tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) &= \sum_j \left[\boldsymbol{E}_j^{obs} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \right] \cdot \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j, t-t_j) \\ \nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) - \mu(\boldsymbol{r}) \partial_t \tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t) &= 0, \end{aligned} \tag{121}$$

es evidente la relación entre las ecuaciones que gobiernan la propagación directa y las ecuaciones en 121 en las que la propagación va en tiempo reverso, de T a t. Hay dos diferencias entre ambos tipos de propagación: i) el término de fuente y ii) un cambio de signo en las ecuaciones fundamentales.

Respecto a la primera diferencia, mientras que el problema -*directo*- tiene un término de fuente $s(r,t)$ en el problema auxiliar o de -*propagación reversa*-, la fuente es el residual entre los datos y se le conoce como *fuente adjunta*. Respecto a la segunda diferencia, debido al cambio de signo, la propagación reversa no es idéntica a la propagación hacia adelante, esto hace que nuestro problema *no sea auto-adjunto*. Lo que implica que el algoritmo numérico para solucionarlo difiere ligeramente del usado en el problema directo.

Podemos estimar las variaciones en las propiedades físicas, en términos de los operadores adjuntos:

$$\begin{aligned} \delta\phi_{E(r)} = &- \int_0^T \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, T-t) \cdot \{ -\delta\left[\sigma(\boldsymbol{r})\right] \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \delta\left[\varepsilon(\boldsymbol{r})\right] \partial_t \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \delta \boldsymbol{s}(\boldsymbol{r},t) \} d^3r dt \\ &- \int_0^T \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}, T-t) \cdot \{ \delta\left[\mu(\boldsymbol{r})\right] \partial_t \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \delta \boldsymbol{p}(\boldsymbol{r},t) \} d^3r dt. \end{aligned} \tag{122}$$

Estimación de derivadas para cada parámetro.

Si consideramos que los modelos pueden parametrizarse de acuerdo a la ecuación 92 para un dominio D, entonces podemos estimar las derivadas de las propiedades desde el planteamiento del problema adjunto a partir de 122; para la permitividad ε tenemos:

$$\delta\phi_E = -\int_0^T \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, T-t) \cdot \delta\varepsilon \partial_t \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) d^3 r dt, \tag{123}$$

respecto a una función base φ:

$$\varepsilon(r) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(r) \varepsilon_j, \tag{124}$$

reescribimos 123 considerando 124:

$$\frac{\delta\phi_E}{\partial\varepsilon_j} = -\int_0^T \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, T-t) \cdot \varphi_j(\boldsymbol{r}) \partial_t \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) d^3 r dt, \tag{125}$$

si

$$\varphi_j = \begin{cases} 1, & \text{en } \Omega_j \\ 0, & \text{en cualquier otro lugar,} \end{cases} \tag{126}$$

la ecuación 125 respecto a ε_j es:

$$\frac{\partial\phi_E}{\partial\varepsilon_j} = -\int_0^T \int_{\Omega_j} \tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, T-t) \cdot \partial_t \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) d^3 r dt. \tag{127}$$

Del mismo modo, se plantean las derivadas de la conductividad y la permeabilidad magnética a partir de 123:

$$\frac{\partial\phi_E}{\partial\sigma_j} = -\int_0^T \int_\Omega \tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}, T-t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) d^3 r dt, \tag{128}$$

$$\frac{\partial\phi_E}{\partial\mu_j} = -\int_0^T \int_{\Omega_j} \tilde{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}, T-t) \cdot \partial_t \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) d^3 r dt. \tag{129}$$

Las ecuaciones 127, 128 y 129 corresponden a las derivadas de la función de desajuste respecto a cada una de las propiedades que queremos estimar. Una vez que tenemos una propagación directa y otra reversa (teniendo como fuente los residuales), correlacionamos los campos de acuerdo a 127, 128 y 129. En este punto, debido a la no-linealidad del problema, hace falta implementar un esquema iterativo que encuentre el modelo que haga estas derivadas igual a cero. Existen distintos métodos para lograr este objetivo: métodos de búsqueda aleatoria, búsqueda en rejilla, direcciones conjugadas, métodos de gradiente, de secante, etc. (Nocedal & Wright, 2000).

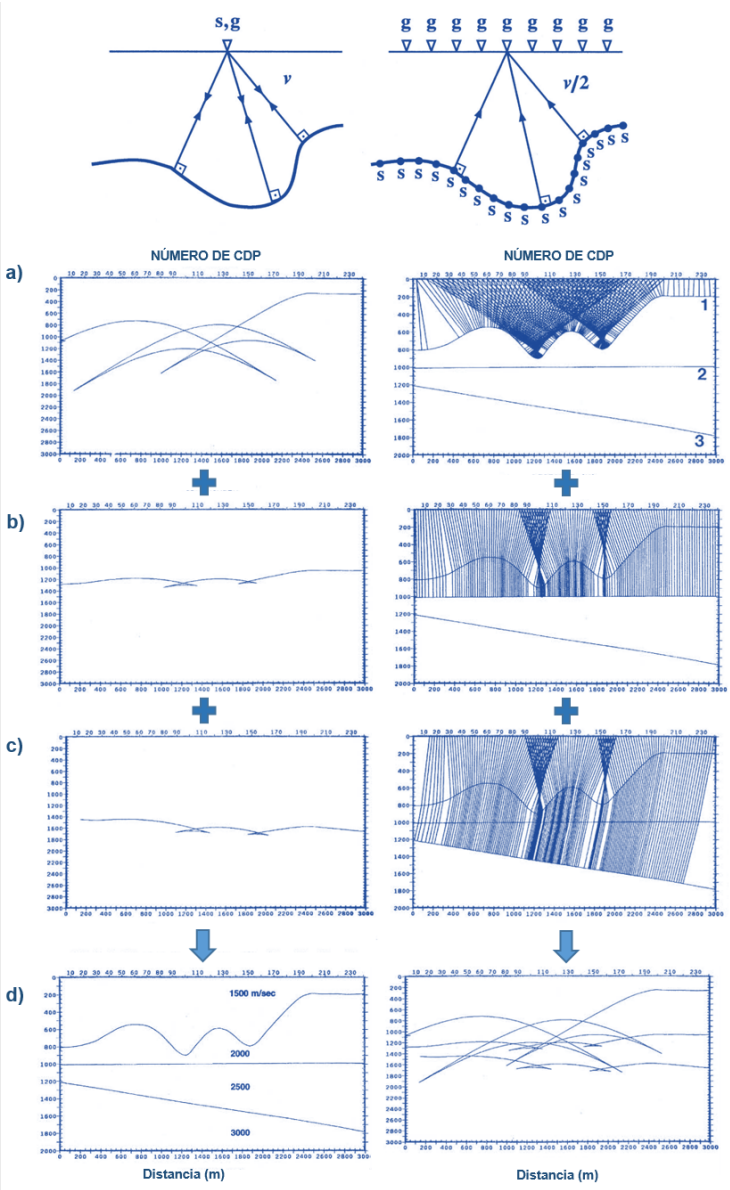

Figura 14. Modelos ejemplificativos de los fundamentos de la teoría de imágenes de Claerbout. La figura superior izquierda se refiere a una geometría de offset zero, la superior derecha a el caso de reflectores explosivos. Las figuras inferiores muestran ejemplos de tres 'reflectores explosivos' para tiempos de viaje de offset cero. Modificada de Yilmaz, 2001.

La mayor parte de los procesos de búsqueda basados en el gradiente de una función objetivo contemplan dos pasos: i) la elección de una dirección de búsqueda s^k y ii) el movimiento en esa dirección para encontrar un nuevo modelo $m^{k+1} = m^k + \Delta m^k$ donde Δm^k es el producto del tamaño de paso por la dirección de búsqueda s^k; además, es importante especificar un vector de valores iniciales y un criterio de convergencia para la terminación del proceso iterativo. La elección dependerá de las características del problema y de los tiempos de cómputo que exija la solución.

Capítulo 5. Resultados

Dado que la propagación del campo EM depende de la permitividad dieléctrica, la conductividad eléctrica y la permeabilidad magnética, esperamos que cada una de estas propiedades afecte de manera diferente a la señal del radar y, aunque sus efectos se combinan en una sola señal EM, aún pueden distinguirse individualmente. Por lo tanto, nuestro objetivo es identificar sus efectos individuales y combinados en la señal del radar. Para ese objetivo, recurrimos a modelos de una y dos dimensiones con diferentes propiedades físicas y calculamos los campos eléctricos y magnéticos a medida que se propagan a través de los medios.

Para esto, usamos las versiones discretas de las ecuaciones de Faraday y Ampere y resolvemos la propagación de los campos EM usando la formulación descrita en el capítulo 3; en nuestros experimentos, los pasos de tiempo se establecen muy pequeños (nanosegundos) y se restringen para satisfacer la condición de Courant. En los límites del modelo, se consideraron condiciones de frontera absorbentes para reducir las ondas espurias que se propagan hacia el interior desde los bordes.

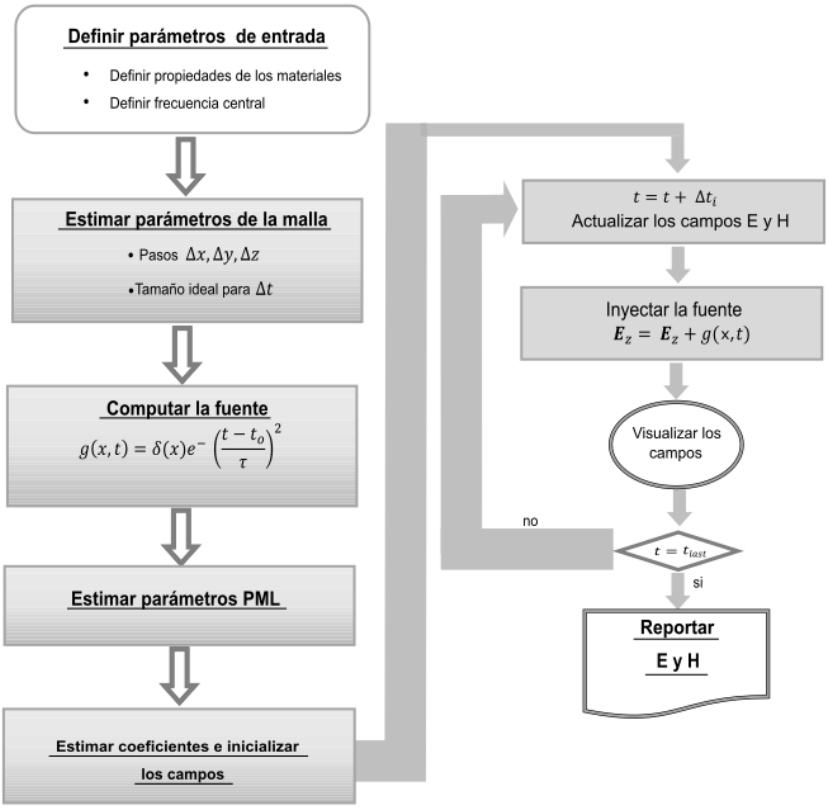

Figura 15. Diagrama de flujo del algoritmo.

El diagrama de flujo implementado en el algoritmo se muestra en la figura 15. En todos los experimentos, se utilizó una señal gaussiana como fuente. Para los siguientes ejemplos, la señal de entrada, tiene una frecuencia central de 200 MHz y se muestreó considerando satisfacer el criterio de discretización de longitud de onda mínima para tener una representación discreta adecuada (Hagness et al., 2005).

5.1. Caso unidimensional

5.1.1. Medios homogéneos

Para analizar la influencia de la señal electromagnética en cada una de las propiedades del radar, analizamos la propagación de los campos en un medio homogéneo, variando cada propiedad por separado. En las figuras de los siguientes ejemplos 1D- homogéneos (figura 16), el eje horizontal corresponde a unidades de grid, el vertical muestra amplitudes de las componentes Ex de campo eléctrico (columna izquierda) y Hy magnético (columna derecha), respectivamente. La figura 16 corresponde a variaciones de permitividad dieléctrica, los valores de permeabilidad y conductividad son constantes ($\mu_r = 1,\ \sigma = 0.000$ S/m).

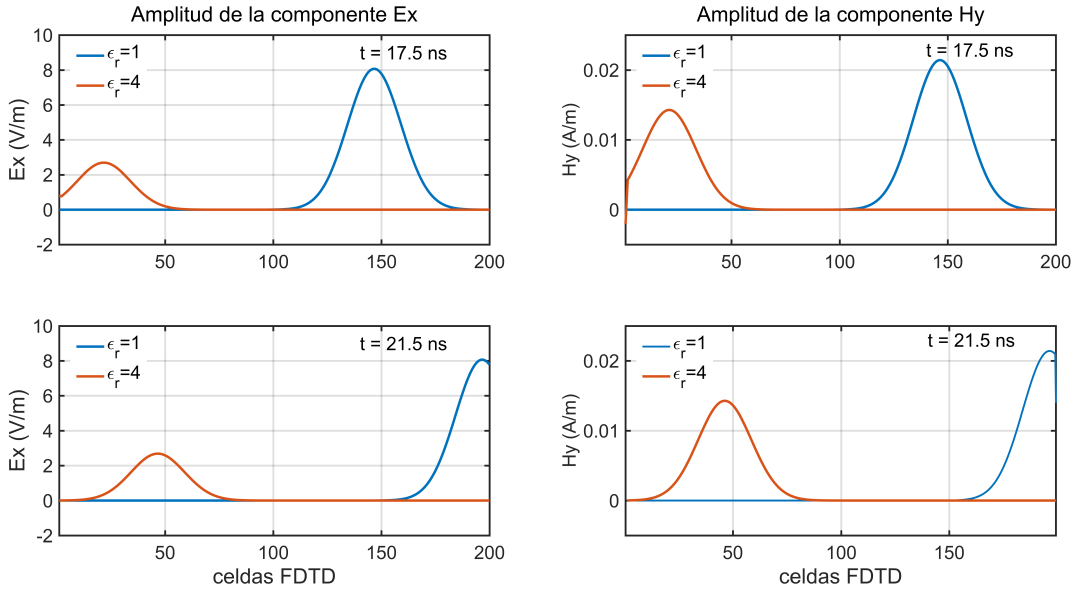

Figura 16. Imágenes instantáneas de campo eléctrico (columna izquierda) y magnético (columna derecha). En todos los ejemplos la permeabilidad ($\mu_r = 1$) y conductividad eléctrica ($\sigma = 0$ S/m) son constantes. En esta figura, se resaltan las variaciones en la permitividad dieléctrica. Note el cambio en la velocidad de propagación de la señal y en la amplitud entre la curva anaranjada vs la azul.

En la figura, la permitividad es $\varepsilon_r = 1$ para la línea azul, mientras que $\varepsilon_r = 8$ para la línea anaranjada, ambos casos para dos distintos instantes de tiempo $t = 17.5$ ns y $t = 21.5$ ns. En los paneles superiores donde $t = 17.5$ ns, la cresta azul que corresponde a $\varepsilon_r = 1$, tiene su máxima amplitud en la celda numérica 150, mientras que la traza anaranjada que corresponde a $\varepsilon_r = 8$, apenas alcanza la celda 30. En los paneles inferiores que corresponden a $t = 21.5$ ns, la onda para la propagación con $\varepsilon_r = 1$ ha alcanzado la frontera del espacio numérico, mientras que para el caso $\varepsilon_r = 8$, la señal se localiza poco antes de la celda 50, esto se debe al cambio en la velocidad de propagación de una señal respecto a la otra ($v = 1.49 \times 10^8$ m/s).

Otro fenómeno interesante de notar, es el cambio en amplitud de la señal debido a los contrastes entre $\varepsilon_r = 1$ y $\varepsilon_r = 8$, siendo la longitud de la onda en el primer caso de $\lambda = 1.5$ m y de $\lambda = 0.5303$ m para el segundo. La figura 17 muestra ejemplos de propagación con distintos valores de permitividad eléctrica.

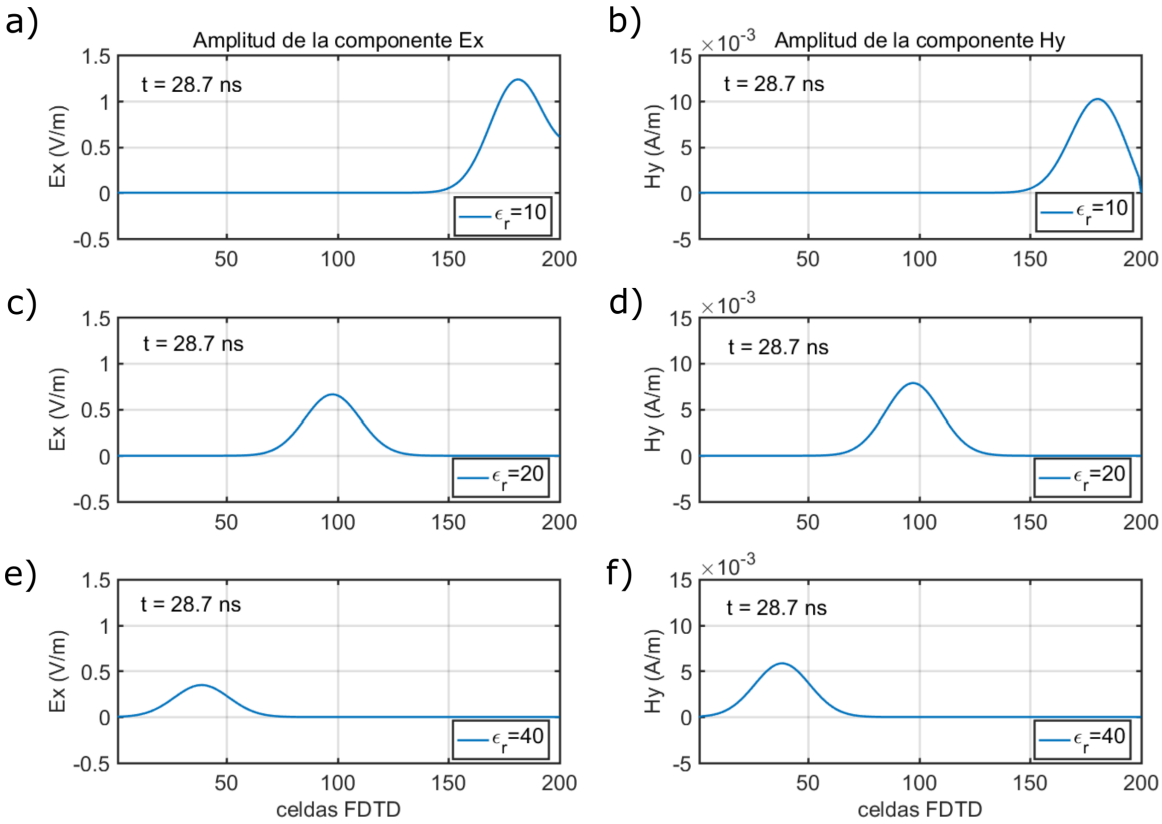

Figura 17. Imágenes instantáneas de campo eléctrico con valores de permeabilidad y conductividad constantes, en esta figura se resaltan los efectos en la señal debido a la permitividad. Note el evidente cambio en la velocidad y amplitud de la señal con el aumento de ε, la señal en a) y b) viaja mucho más rápido que en e) y f), debido al incremento en ε, también podemos notar un cambio en la amplitud de la onda.

Los valores en permitividad se seleccionaron de acuerdo a los rangos establecidos en la figura 2. En los

paneles a-b) $\varepsilon_r = 10$, para c-d) $\varepsilon_r = 20$, y en e-f) $\varepsilon_r = 40$. Con el aumento en el valor de permitividad, la señal viaja más lento y con una menor amplitud. Este efecto es visible en todos los paneles de la figura 17. De estas primeras figuras, podemos concluir que la permitividad dieléctrica tiene un efecto en la señal EM que se traduce en cambios en amplitud y velocidad de la señal, estos cambios pueden ser observados tanto en la componente del campo eléctrico como en la del campo magnético.

Para analizar ahora la influencia de la permeabilidad magnética, consideramos distintos rangos en μ. En la figura 18 la permeabilidad varía de $\mu_r = 1$ (linea en azul) a $\mu_r = 2$ (línea anaranjada). En esta figura se observan efectos en la amplitud y la velocidad de la señal en ambas componentes. En un radargrama convencional, lo que visualizamos son un conjunto de trazas empleando distintas posiciones del receptor; la figura 18- c), presenta 3 trazas de la componente Ex para todos los pasos de tiempo, de forma análoga como en un radargrama convencional, para $\mu_r = 1$.

Con el fin de observar con más claridad los cambios en la señal debido a μ, en la figura 19 se presentan ejemplos con 3 valores de μ_r, dejando constantes las otras dos propiedades. Las imágenes a-b) corresponden a $\mu_r = 1$ (caso convencional en el modelado EM), c-d) a $\mu_r = 1.5$, mientras que e-f) muestran el caso $\mu_r = 2$; estos valores se encuentran reportados en la literatura geofísica (figura 4).

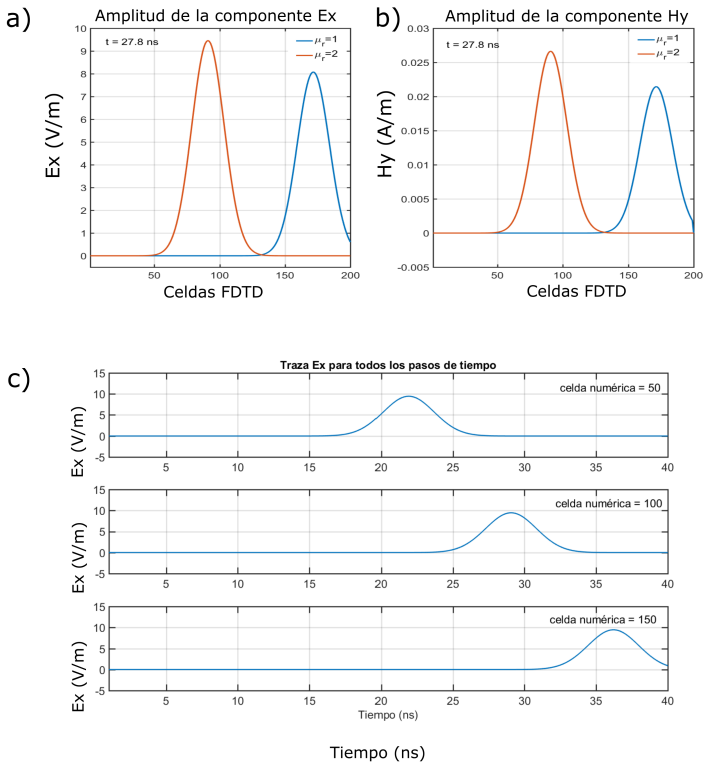

Figura 18. Imágenes instantáneas de campo eléctrico y magnético para dos valores de permeabilidad magnética. Los valores se seleccionaron pequeños, para ejemplificar el cambio en la señal considerando variaciones en μ.

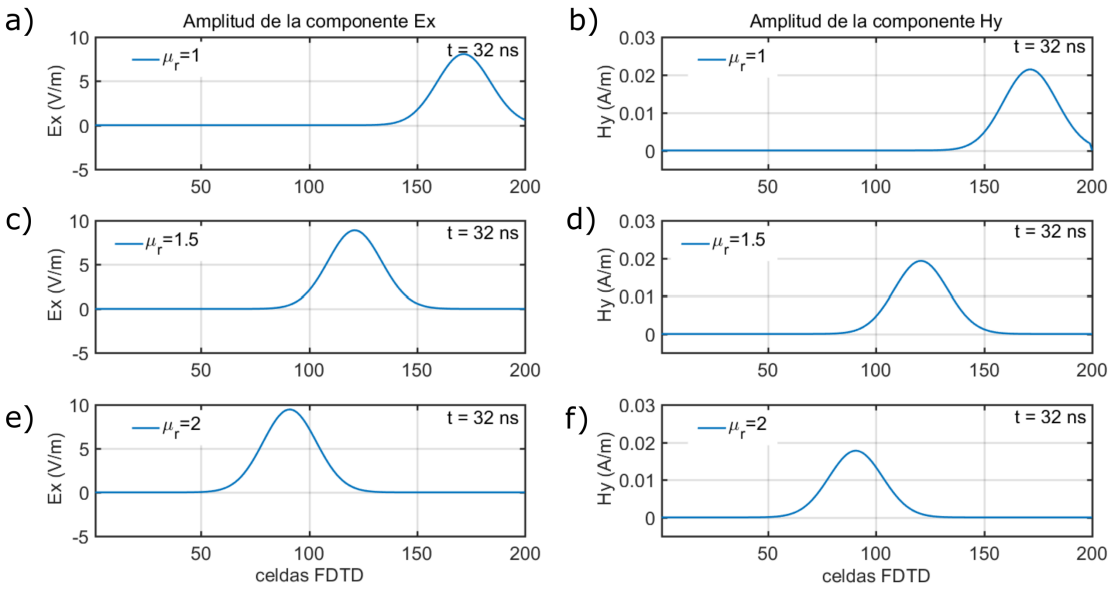

Figura 19. Imágenes instantáneas de campo eléctrico y magnético donde $\varepsilon_r = 1$ y $\sigma = 0.00$ S/m en todos los ejemplos. Se muestran variaciones en permeabilidad magnética.

En las figuras 18 y 19 , observamos cambios significativos en la señal debido a μ_r; estos cambios se acentúan conforme μ aumenta, pero pueden ser observados incluso en valores pequeños ($\mu_r = 1.2$) respecto al valor comúnmente utilizado en el modelado convencional de radar ($\mu_r = 1$).

De las tres propiedades EM que afectan la propagación de la señal de radar, la conductividad eléctrica σ es la propiedad EM con el rango de variaciones de más órdenes de magnitud (ver figuras 2, 3 y 4). Para evaluar su efecto en la señal electromagnética, ε y μ se mantendrán constantes y evaluaremos valores comunes de σ, puesto que en los modelos anteriores $\sigma = 0$ S/m.

En la figura 20 se observan tres trazas, con $\sigma = 0.01$ S/m, $\sigma = 0.001$ S/m y $\sigma = 0.0001$ S/m; a diferencia de las otras dos propiedades, σ no afecta la velocidad de propagación. Esto puede verse en los 4 paneles de la figura 20, donde en a-b), que corresponden a $t = 800$ s, las tres trazas se encuentran en la misma posición espacial, pero con distinta amplitud. Esto, además de corroborar el nulo efecto de σ en la velocidad de propagación, muestra un efecto de atenuación, que se incrementa con el aumento de la conductividad. Los mismos efectos son consistentes en $t = 1100$ s (incisos c y d).

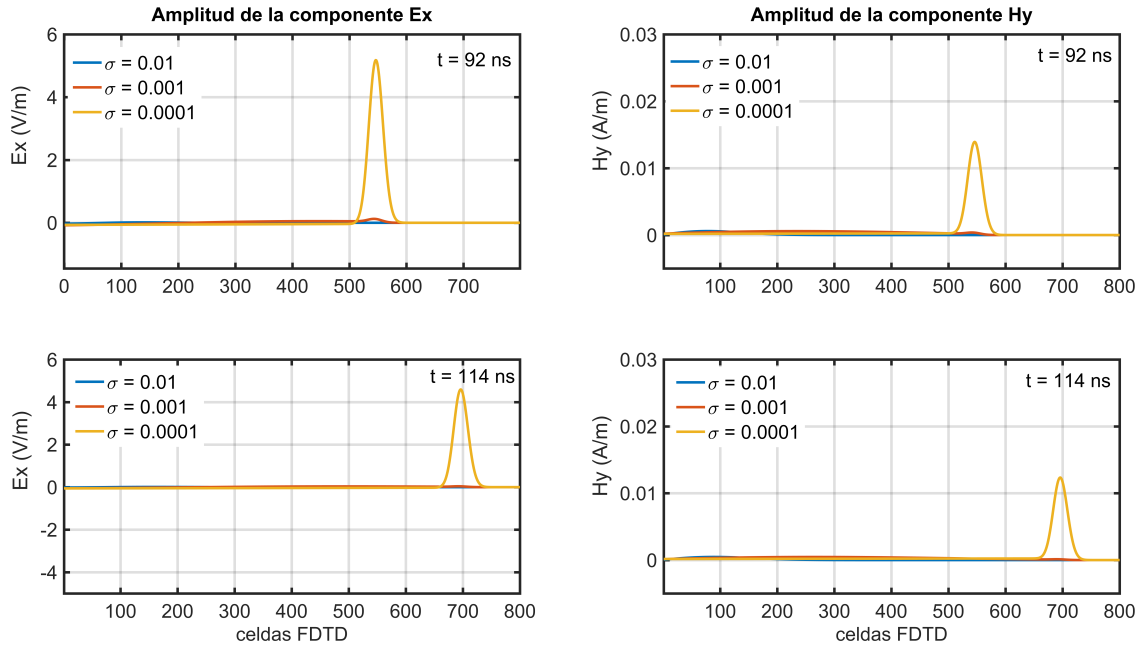

Figura 20. Imágenes instantáneas para cambios en la conductividad eléctrica. $\varepsilon_r = 1$ y $\mu_r = 1$. Los valores de la conductividad eléctrica se muestran en las gráficas.

De los ejemplos homogéneos que constituyen los experimentos más sencillos de propagación en un medio, podemos concluir que la permitividad y la permeabilidad determinan la velocidad de propagación y la amplitud de la señal EM, mientras que la conductividad eléctrica decrementa la amplitud de la señal conforme esta viaja a través del medio.

5.1.2. Medios heterogéneos

Para analizar los cambios en la señal electromagnética cuando existe algún contraste en las propiedades electromagnéticas, proponemos ejemplos con dos medios homogéneos en contacto. En las figuras siguientes, la columna de la izquierda corresponderá a la componente Ex de campo eléctrico, mientras que la columna de la derecha mostrará resultados para la propagación de la componente Hy de campo magnético. Los valores de las propiedades son $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1.1$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.0001$ S/m en ambos medios. En nuestro primer experimento, probamos el efecto de la permitividad eléctrica y establecemos $\varepsilon_{r1} = 3$ y $\varepsilon_{r2} = 8$. Al utilizar una frecuencia central de 200 MHz, la longitud de onda resultante es $\lambda = 0.8252$ m para el primer medio y $\lambda = 0.5053$ m para el segundo medio, y $\Delta x = 0.02$m para el primer medio y $\Delta x = 0.01$ m en el segundo (ecuación 22), y $\Delta t = 0.0714$ ns (ecuación 21).

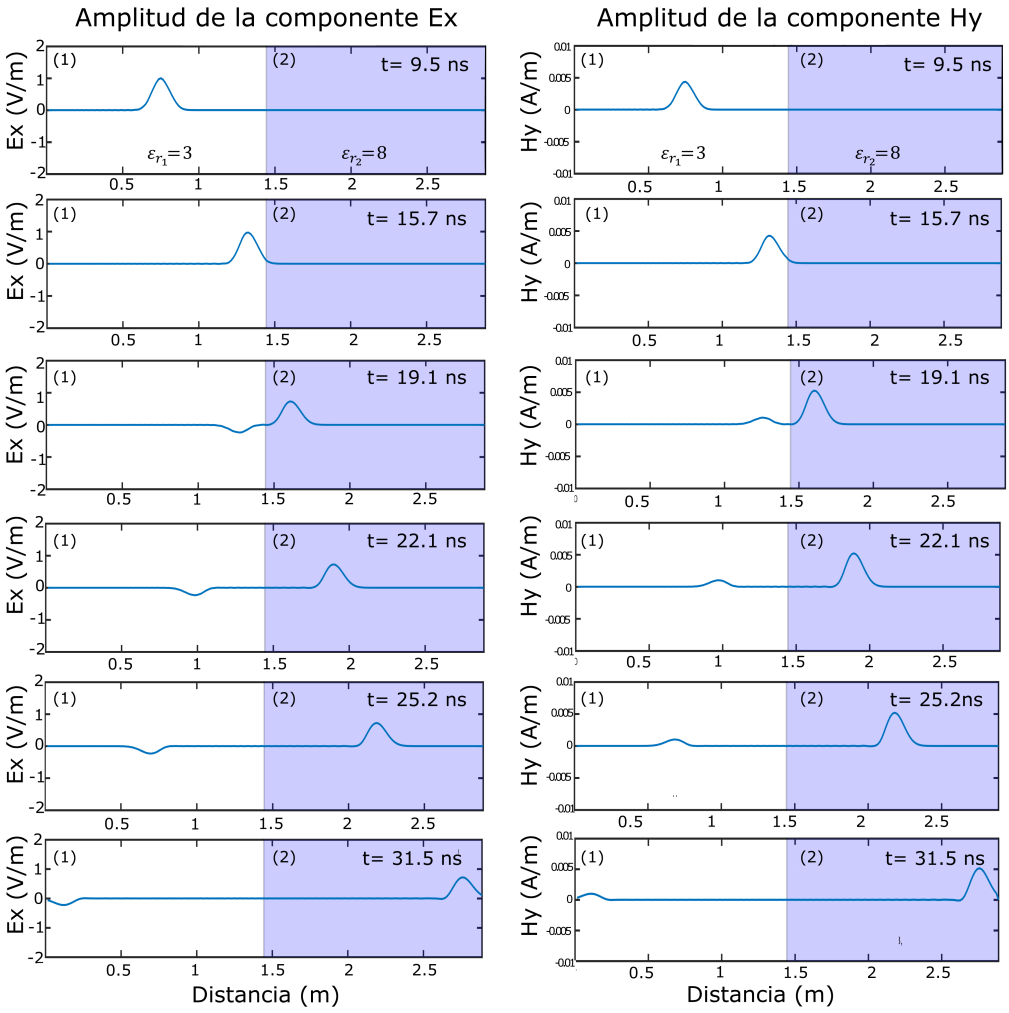

Figura 21. Campos eléctricos (columna izquierda) y magnéticos (columna derecha) para un medio con dos capas contrastantes respecto a ε en distintos instantes de tiempo. En la transición entre los medio hay efectos de reflexión de la onda EM. El cambio en la polaridad de la onda reflejada solo ocurre en la componente de campo eléctrico Ex.

En la figura 21, notamos la partición de energía en pulsos reflejados y transmitidos en la interfaz de contraste. Para Ex (columna izquierda) la onda reflejada invierte su polaridad (solo en campo eléctrico), mientras que para la componente Hy la onda reflejada no cambia su polaridad; este cambio en la polaridad normalmente no se percibe en los estudios de radar reales ya que solo se mide el campo eléctrico.

Para conocer el efecto de μ en medios heterogéneos, en la figura 22 evaluamos ahora contrastes en permeabilidad magnética teniendo $\mu_{r1} = 3$ y $\mu_{r2} = 8$. La longitud de onda es $\lambda = 0.82$ m para la primera capa y $\lambda = 0.49$ m para la segunda capa. El espaciado ideal de acuerdo a la ec. 22 es 0.02 m y 0.01 m para cada capa respectivamente y el paso de tiempo es 0.0714 ns. En este ejemplo, comparado

con nuestro experimento anterior, la principal diferencia resultante es que el cambio en la polaridad de la onda reflejada ocurre ahora en el campo magnético. También podemos notar que, en ambos ejemplos, la velocidad de onda de la primera capa es mayor que en la segunda capa. Los campos transmitidos cambian de forma, y se amplifica en la componente Ex pero disminuye en Hy.

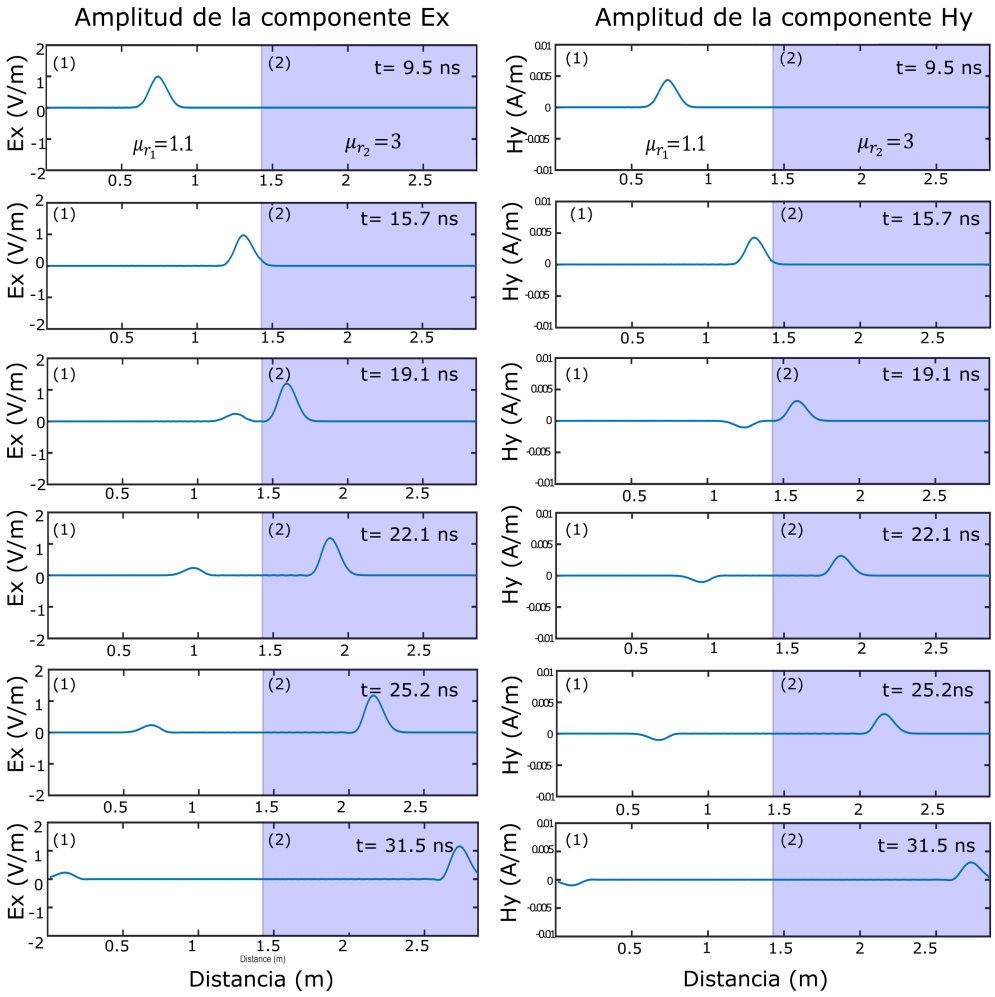

Figura 22. Campos eléctricos (columna izquierda) y magnéticos (columna derecha) para un medio con dos capas contrastando los valores de μ. Los valores de los otros parámetros físicos son $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 3$ y $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.0001$ S/m. Tenga en cuenta que para este ejemplo, un cambio en la polaridad ocurre solo en el campo magnético.

Esta característica es interesante puesto que el reflejo en la zona de transición nos da una pauta para saber qué propiedad física es la que está cambiando.

En nuestro tercer experimento, variamos la conductividad eléctrica en ambos medios de contraste; notamos que la amplitud de los campos propagados disminuye sustancialmente con la distancia (figura 23), además observamos una onda reflejada débilmente. No hay cambio en la velocidad de la onda, el efecto

más significativo es la atenuación de la señal. Este efecto puede observarse claramente en la figura 23, donde en $t = 9.5$ ns la amplitud de la señal es 1 V/m para la componente Ex, mientras que para $t = 31.5$ ns (panel inferior izquierdo), la señal ha decaído por completo.

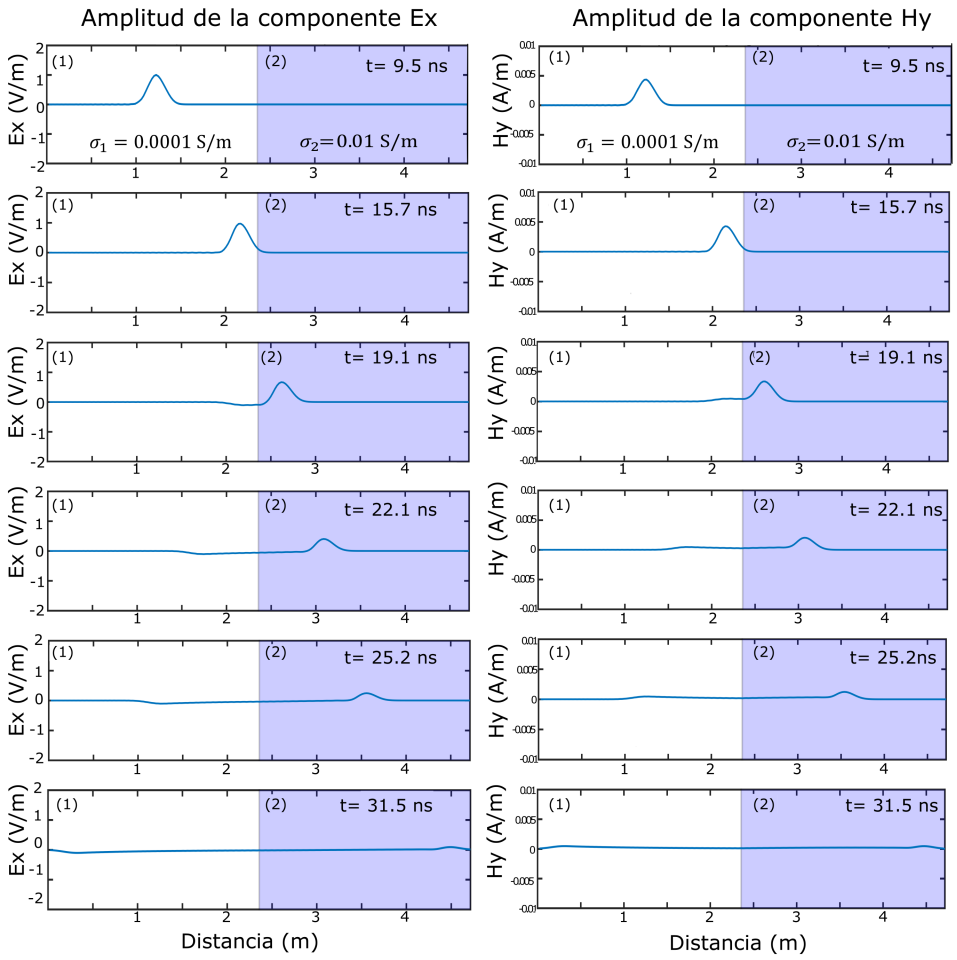

Figura 23. Campos eléctricos (columna izquierda) y magnéticos (columna derecha) para un medio con dos capas con contrastes en σ. Los valores de los demás parámetros físicos son: $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 3$ y $\mu_1 = \mu_2 = 1.1$. Para la primera capa: $\sigma_1 = 0.0001$ S/m y $\sigma_2 = 0.01$ S/m para la capa dos. Tenga en cuenta el efecto sobre la atenuación de la señal en campos eléctricos y magnéticos.

Conclusiones preliminares 1D.

En nuestros resultados, se hace evidente que es posible distinguir un cambio característico de cada propiedad física en la señal electromagnética. En los ejemplos no homogéneos, se observa una onda reflejada que lleva parte de la energía original de regreso a la superficie. Estos cambios pueden ser visualizados si analizamos al menos una componente de campo eléctrico y una de campo magnético.

Observamos que un cambio en cualquiera de las propiedades produce una partición de energía en ondas

reflejadas y transmitidas con diferente fase y formas de onda tanto para el campo E como para el campo H; sin embargo, a partir de estos experimentos 1D, no podemos observar ninguna implicación relacionada con la divergencia geométrica. Para ello, llevamos a cabo los experimentos bidimensionales de la siguiente sección.

5.2. Caso bidimensional

En dos dimensiones, los campos EM pueden propagarse en dos modos desacoplados: el transversal eléctrico (TE) y el transversal magnético (TM). Para los ejemplos de calibración con gprMax, ilustraremos nuestro desarrollo para el modo TM, de modo que los campos estarán definidos por las componentes Ez, Hx y Hy.

Utilizamos el mismo número de cuadrícula por longitud de onda, y como fuente una onda plana de manera similar que en el caso 1D (Ver apartado 3.4- Modelado de la Fuente), presentamos algunas trazas de la propagación de la onda, como es usual en radar. Al igual que en los modelos 1D, consideramos variaciones en ε, μ y σ y una respuesta combinada que varía las tres propiedades. Los siguientes ejemplos numéricos muestran las componentes Ez (columna izquierda) y Hx (columna derecha). Los pasos ideales de espacio y tiempo que satisfacen las condiciones de Courant son adaptativas y dependen de las propiedades del medio.

5.2.1. Verificación numérica

A diferencia de otros esquemas de modelado para radar en que únicamente consideran variaciones en dos de las tres propiedades físicas, nuestro algoritmo evalúa la propagación considerando variación en las tres propiedades EM: ε, μ y σ, sin embargo, un paso importante es realizar una verificación de los resultados, ya sea mediante una aproximación analítica o numérica. Para ello, evaluamos los resultados utilizando el software *gprMax*, el cuál es un software libre que simula la propagación de ondas EM, desarrollado en los 90's por Giannopolus y colaboradores (Giannopoulos, 2005).

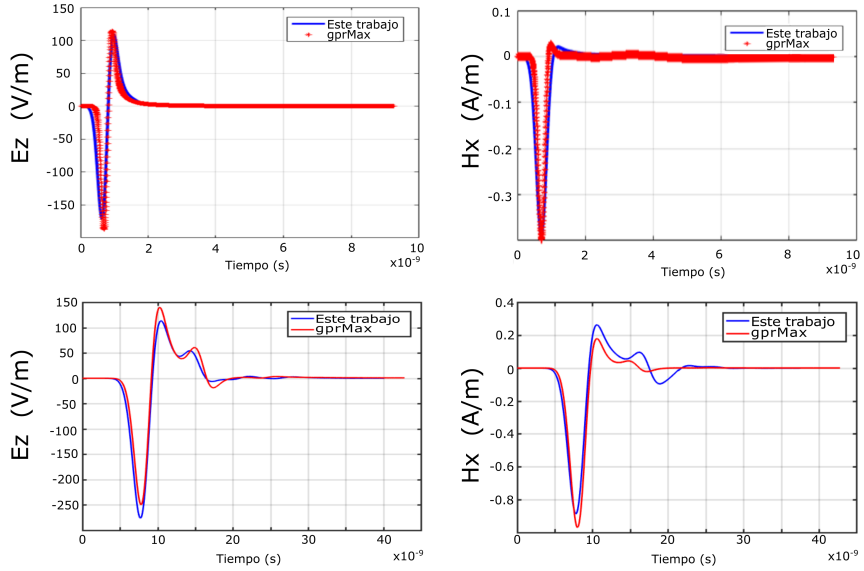

Figura 24. Trazas seleccionadas del campo eléctrico (izquierda) y magnético (derecha) estimados. Las respuestas de nuestro algoritmo se muestran en azul, la traza en rojo corresponde al modelo de gprMax. Las figuras de los páneles superiores corresponden a la propagación en un medio homogéneo, mientras que los páneles inferiores pertenecen a una propagación a través de dos medios con distintas propiedades.

En la figura 24, comparamos las trazas generadas con nuestro algoritmo vs aquellas que resultan del conocido software gprMax; estos datos se generaron para un total de 2500 pasos en tiempo, una ventana espacial de 230 unidades de rejilla y una frecuencia central de 1500 MHz. Se compararon dos distintos tipos de propagación: i) en un medio homogéneo y ii) en un medio con transición, utilizando distintos valores de ε; las diferencias entre ambos modelos, especialmente en los medios con transición, pueden deberse a pequeñas diferencias en el tamaño de paso dt entre ambos modelos. Sin embargo, las trazas son equiparables en un orden de magnitud tanto en la componente eléctrica como en la magnética, por lo que pueden ser consideradas como una buena aproximación de modelado numérico.

5.2.2. Ejemplos de radar de pozo en medios con contrastes.

De manera similar al escenario unidimensional, los siguientes ejemplos numéricos de radar de pozo se desarrollan para analizar la contribución de cada propiedad en la señal. En la figura 25 se presenta un diagrama de la distribución de la fuente y los receptores para los siguientes ejemplos. Los seis conjuntos de trazas en la figura 26, que se desarrollan para el modo TE, se componen con un total de 50 ns pasos de tiempo.

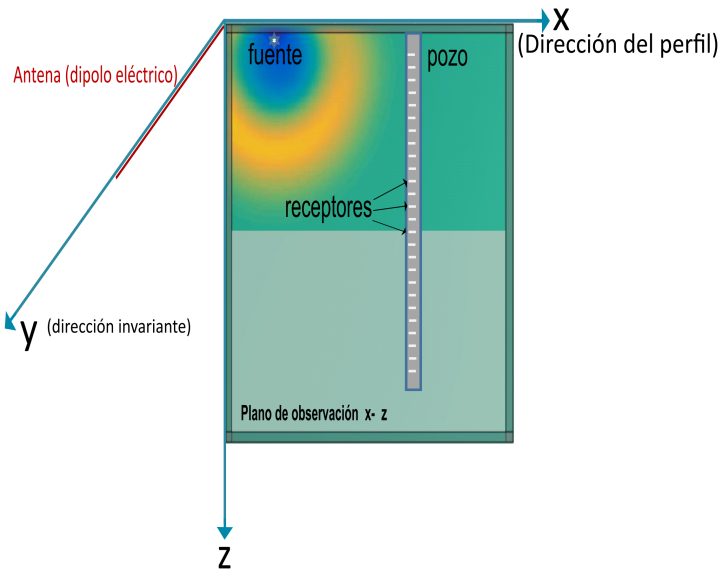

Figura 25. Diagrama de distribución de las antenas transmisoras y receptoras para algunos ejemplos de radar de pozo. El plano de observación se encuentra en x-z.

La columna izquierda corresponde a la componente Ey del campo eléctrico, mientras que la columna a la derecha muestra la componente Hz del campo magnético. Las figuras 26-a) y 26-b) resultan de un cambio en los valores de permitividad dieléctrica ($\varepsilon_{r1} = 3$ y $\varepsilon_{r2} = 8$). Es hasta el paso de tiempo $t = 28$ ns cuando la onda alcanza el segundo medio, que corresponde al sitio donde los receptores muestran cambios de velocidad, así como las interacciones de reflexión-transmisión en los campos Ey y Hz. Nótese que la amplitud de la onda Hz reflejada es muy pequeña (figura 26-b), por lo que el contraste en la permitividad se distingue principalmente en la componente de campo eléctrico.

Las trazas en las figuras 26-c) y 26-d) resultan de variaciones en la conductividad eléctrica, siendo $\sigma_1 = 0.001$ S/m y $\sigma_2 = 0.01$ S/m. En este ejemplo, los efectos de difusión impiden notar reflexiones; para este escenario, el fenómeno que predomina es la atenuación de la señal.

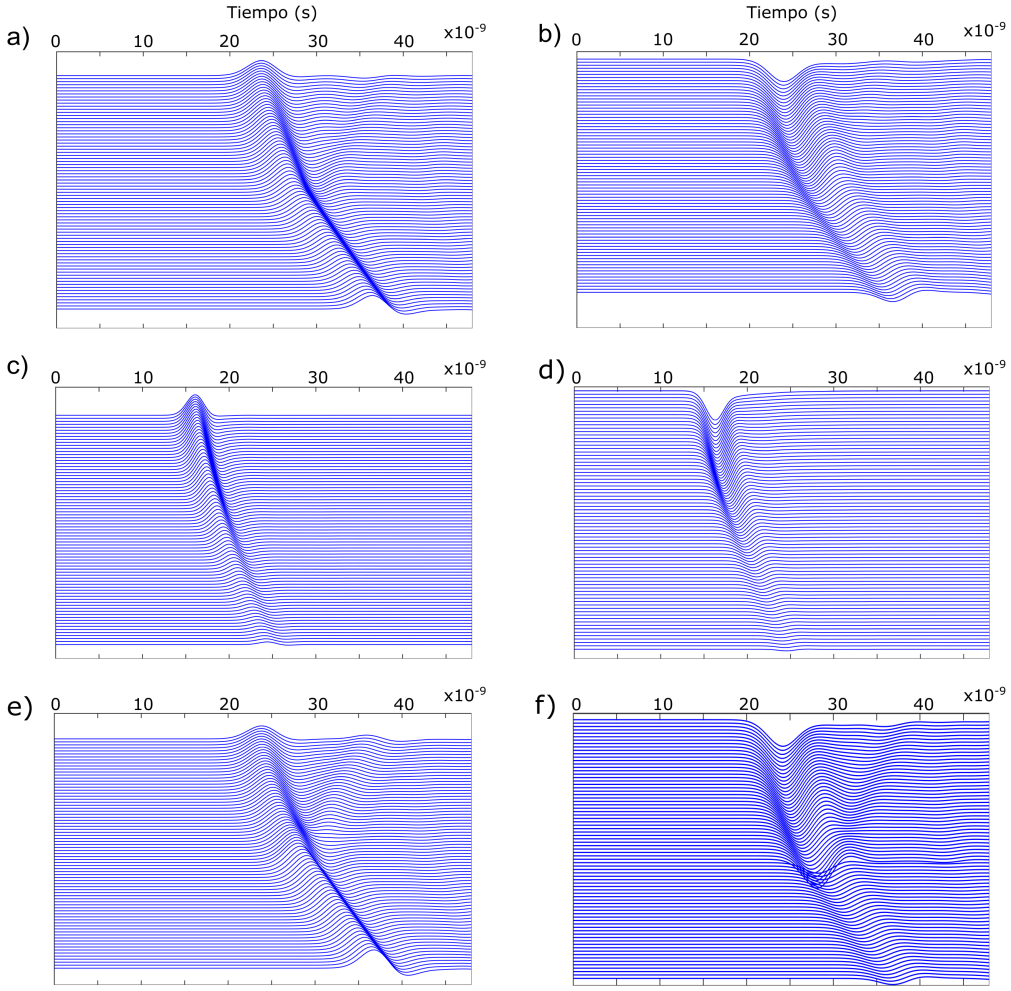

Figura 26. Conjunto de trazas bidimensionales para un ejemplo de radar de pozo. La columna de la izquierda corresponde a la componente Ey (campo eléctrico). La columna de la derecha muestra, en todos los casos, la componente del campo magnético Hz. Para los incisos en a) y b): $\varepsilon_{r1} = 3$, $\varepsilon_{r2} = 8$, $\mu_{r1} = \mu_{r2}$, $\sigma_1 = \sigma_2$. Para -c) y d)- el modelo incluye variaciones en σ, por lo que ε y μ son constantes. Las imágenes e) y f) representan la variación de $\mu_{r1} = 1.1$ en el primer medio y $\mu_{r2} = 3$ para el segundo medio.

Los conjuntos de trazas de la figura 26-e) y 26-f) resultan de una simulación numérica en un modelo con un cambio en la permeabilidad magnética, mientras que los valores de ε y σ son constantes, donde $\mu_{r1} = 1.1$ y $\mu_{r2} = 3$. En este ejemplo, la amplitud de las ondas reflejadas E y H es mayor que cuando cambia ε. También se nota un cambio en la polaridad de la señal Hz reflejada. En el ejemplo, los cambios en la amplitud del campo magnético transmitido son notablemente claros (figura 26-f), pues inmediatamente después de que la onda EM transita por la capa superior, produce un efecto marcado en la interfaz de contacto de ambos medios. Además, del análisis de la componente Ey (columna izquierda en la figura 26-a), notamos que la onda reflejada cambia su polaridad debido al cambio en permitividad. Por el contrario, en la figura 26-e), donde cambia la permeabilidad magnética, la onda reflejada en el

campo eléctrico no se invierte. Esta diferencia se puede utilizar para identificar cuál de estas propiedades es la que está cambiando.

La figura 27, muestra instantáneas de la propagación de la componente del campo eléctrico. La fila superior corresponde a un modelo donde la permitividad eléctrica cambia de $\varepsilon_{r1} = 3$ a $\varepsilon_{r2} = 8$. La respuesta característica es un débil reflejo y una onda transmitida viajando con un cambio en la velocidad. La fila del medio muestra la propagación del campo eléctrico a través de un modelo con un cambio en conductividad; donde la señal se atenúa significativamente. La tercera fila, representa el campo E cuando la onda viaja a través de un medio con cambios en la permeabilidad magnética, observamos ambos efectos, variaciones de velocidad y amplitud cuando la onda alcanza la interfase de contraste.

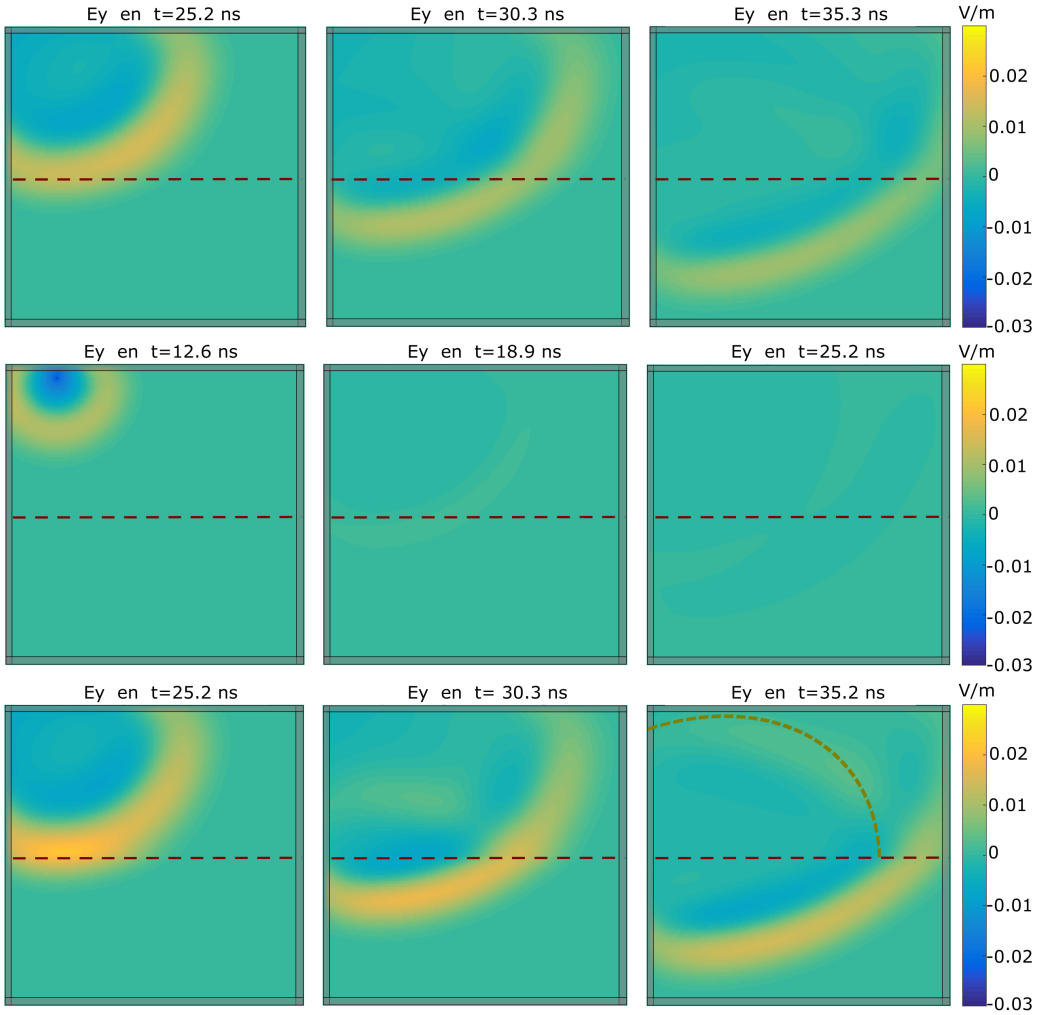

Figura 27. Instantáneas bidimensionales para diferentes pasos de tiempo para el componente Ey. Los ejemplos corresponden a variaciones en la permitividad eléctrica (primera fila), conductividad eléctrica (segunda fila) y permeabilidad magnética (tercera fila).

A partir de estos ejemplos numéricos, podemos concluir que es posible distinguir cambios en la señal característicos de una de las tres propiedades físicas. Observamos, que las variaciones en la permitividad dieléctrica y la permeabilidad afectan la velocidad de la onda, pero la permeabilidad magnética además causará atenuación, disminuyendo o aumentando la profundidad de penetración. Es interesante también observar el efecto en los cambios de fase en la onda reflejada en ambos campos, respecto a los cambios en permitividad y permeabilidad.

5.2.3. Medios acoplados: evaluando la ecuación de Helmholtz.

En nuestros experimentos, hemos observado la contribución individual de las tres propiedades en la señal. Planteamos ahora un escenario en donde dos medios homogéneos tengan condiciones idénticas en sus propiedades combinadas de propagación. Para estos ejemplos, consideraremos dos constantes de propagación: la velocidad de propagación de la onda (c), y el factor de atenuación (α_t). Estos parámetros están relacionados con la conocida ecuación de Helmholtz (ecuación 10), que es comúnmente utilizada en modelado electromagnético. Para visualizar con mayor claridad la relación entre las propiedades físicas y estas dos constantes (c y α_t), la figura 28 enlista las características principales de los siguientes ejemplos de medios equivalentes, donde las propiedades del radar se seleccionaron para reproducir los mismos valores de c y α_t.

	RELACIÓN ENTRE CTES	**RELACIÓN ENTRE PROPIEDADES**
Velocidad equilalente	Igual velocidad de propagación - c -	$\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2$
Atenuación equilalente	Igual factor de atenuación - α_t -	$\sigma_1\mu_1 = \sigma_2\mu_2$
Helmholtz equilalente	Igual velocidad de propagación y factor de atenuación - c - y - α_t -	$\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2$ y $\sigma_1\mu_1 = \sigma_2\mu_2$

Figura 28. Lista de las propiedades para los modelos de medios acoplados, considerando dos constantes: la velocidad de propagación -c-, y el factor de atenuación -α_t-.

Dos medios con la misma velocidad de onda EM (-c-).

En la figura 29 mostramos imágenes de la onda EM viajando a través de dos medios con igual velocidad de onda EM, pero diferente permitividad y permeabilidad magnética, de modo que $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2$. Para este ejemplo, definimos $\varepsilon_{r1} = 1,\ \mu_{r1} = 10$, y $\varepsilon_{r2} = 10,\ \mu_{r2} = 1$, teniendo $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.001$ S/m. La velocidad y la longitud de la onda en los dos medios son las mismas ($v = 9.4803 \times 10^7$ m/s y $\lambda = 0.4740$ m).

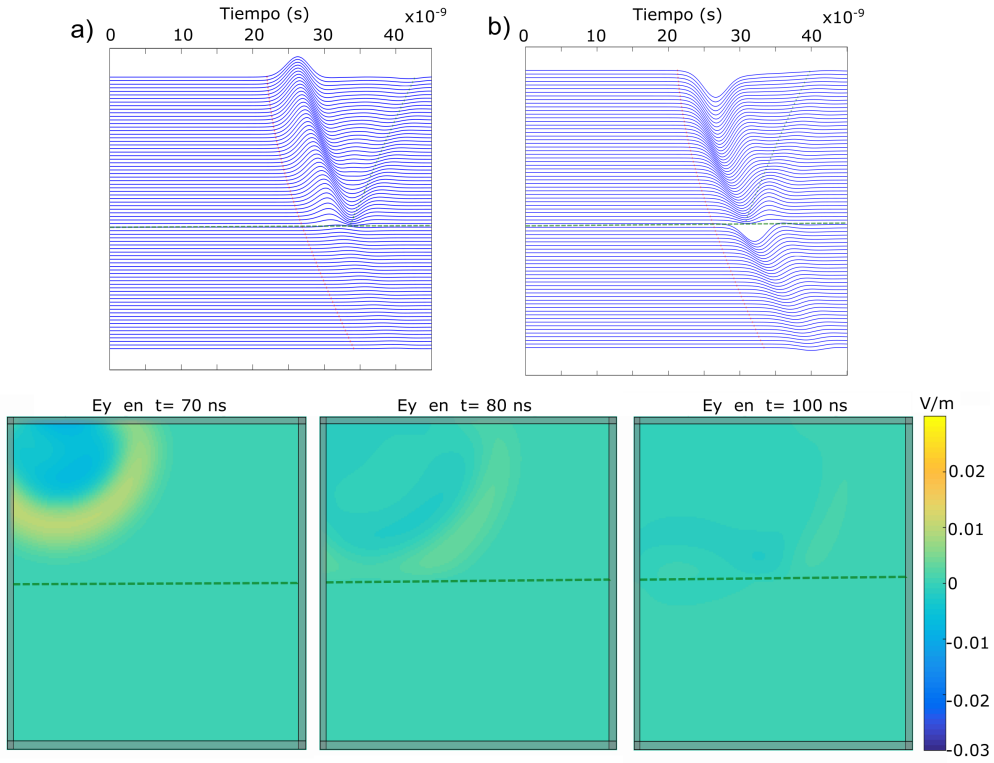

Figura 29. Trazas 2D para diferentes pasos de tiempo para las componentes de campo Ey y Hz. Los ejemplos corresponden a modelos equivalentes respecto a la velocidad de onda (cte c): $\varepsilon_1\mu_1 = \varepsilon_2\mu_2$. La conductividad eléctrica permanece constante en todo el volumen: $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.001$ S/m.

Las figuras 29a-b), muestran las componentes Ey (campo eléctrico) y Hz (campo magnético) respectivamente. Siguiendo el modelo unificado de Helmholtz, la onda posee las mismas características de propagación en todo el modelo, por lo que no debería existir una partición de energía de reflexión-transmisión; sin embargo, en la figura 29 sí existe una onda reflejada (linea punteada verde). Se marca la hipérbola de reflexión con una línea discontinua roja para evidenciar la continuidad de la velocidad de propagación. También se observa que las amplitudes de reflexión y transmisión decaen de forma diferente en ambos medios, mientras la velocidad de la onda permanece idéntica. Además, el campo magnético

Hz es mucho más sensible a los cambios de propiedades, lo que nos permite notar con mayor claridad el área de transición entre medios.

Las snapshots en la figura 29, son instantáneas de Ey para distintos tiempos, note que numéricamente, pese a tener un acoplamiento parcial en las propiedades (pues sólo acoplamos la cte c), la señal muestra cambios en la zona de transición entre medios.

Dos medios con el mismo factor de atenuación (-α_t-).

La figura 30 muestra nuestros resultados de la propagación de una onda EM a través de dos capas con un factor de atenuación equivalente (α_t), donde el producto entre la conductividad eléctrica y la permeabilidad magnética es idéntico. Para este ejemplo, $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 1$ y $\sigma_1\mu_{r1} = \sigma_2\mu_{r2} = 0.001$ S/m. A diferencia de los experimentos anteriores, el cambio más importante se produce en la velocidad de la onda, efecto que puede observarse con claridad en las figuras 30-a) y 30-b) (lineas rojas punteadas); sin embargo, observamos que la amplitud del campo eléctrico se ve más afectada que la amplitud del campo magnético, ya que la componente Hz no muestra un decaimiento significativo al atravesar la capa más profunda.

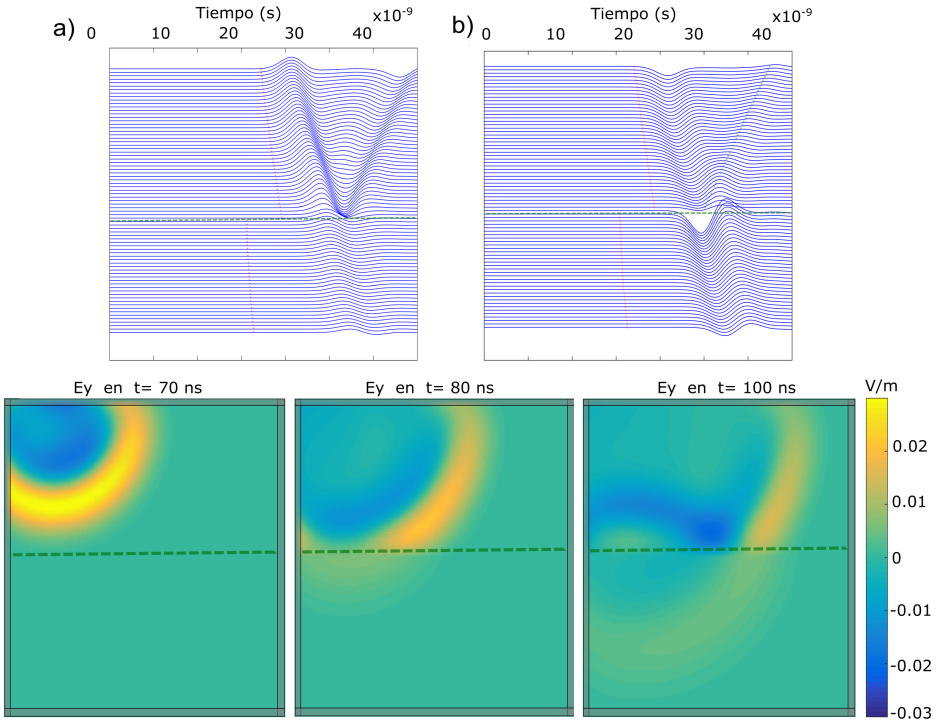

Figura 30. Trazas 2D para diferentes pasos de tiempo para las componentes de campo Ey y Hz. Los ejemplos corresponden a modelos acoplados respecto a la constante de atenuación donde: $\sigma_1\mu_{r1} = \sigma_2\mu_{r2}$. La permitividad eléctrica es $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 1$ en los dos medios.

En las snapshots de la figura 30, la frontera entre medios se marca con una linea punteada verde. Notamos claramente una onda reflejada producto del paso de la onda por la zona de transición.

Dos medios con igual velocidad de onda y factor de atenuación (-c- y -α_t-).

La figura 31 muestra la onda EM modelada viajando a través de dos capas donde tanto la velocidad de onda (c) como el factor de atenuación (α_t) son idénticos en ambos medios. En este experimento, establecimos $\varepsilon_{r1} = 1,\ \mu_{r1} = 10$ y $\sigma_1 = 0.0001$ S/m para la capa más superficial, y $\varepsilon_{r2} = 10,\ \mu_{r2} = 1$ y $\sigma_2 = 0.001$ S/m para la capa más profunda. Estos valores se seleccionaron para obtener constantes de propagación idénticos según el marco de la ecuación de Helmholtz. A diferencia de la formulación convencional basada en Helmholtz, nuestro algoritmo identifica claramente las diferencias y los efectos más notables en el contacto entre las dos capas. Esto también se observa en los cambios en la amplitud resultantes de esta distribución de energía. En la figura 31-a) se observa claramente que, después de los 35ns, la onda comienza a viajar a través de la capa inferior y su amplitud decae considerablemente.

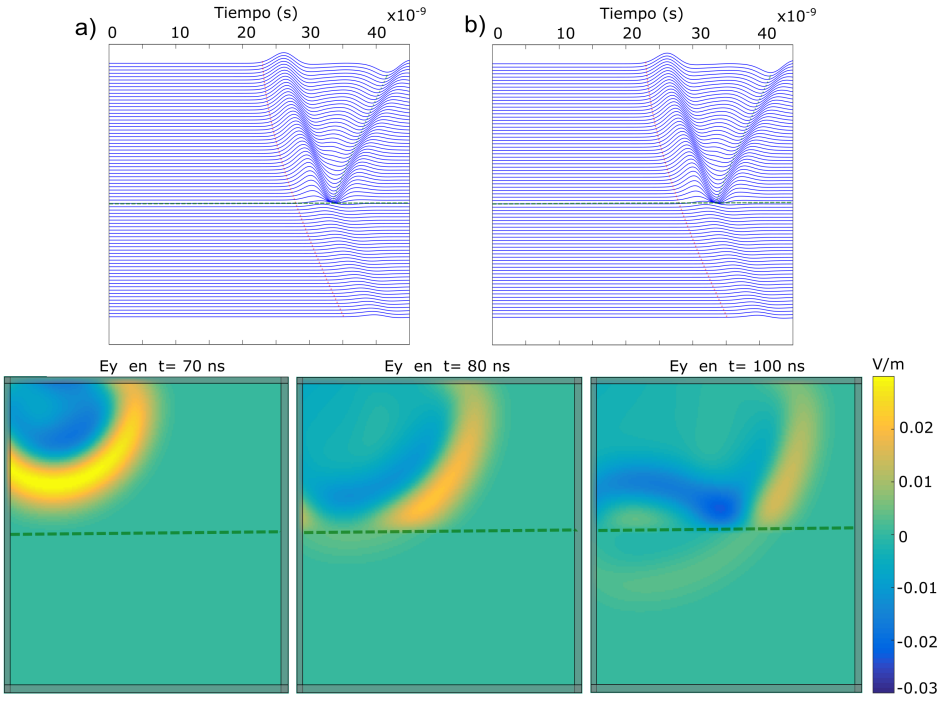

Figura 31. Trazas 2D para diferentes pasos de tiempo, se muestran las componentes Ey y Hz. Estos modelos incluyen variaciones en los tres parámetros para condiciones de medios completamente acoplados, de manera que $\varepsilon_{r1}\mu_{r1} = \varepsilon_{r2}\mu_{r2}$ and $\sigma_1\mu_{r1} = \sigma_2\mu_{r2}$, para las componentes eléctricas y magnéticas.

De forma similar, en el campo Hz que se muestra en b), también aparece una onda reflejada, y la onda transmitida a la capa inferior modifica su amplitud. Además, los campos reflejados Ey y Hz invierten su polaridad, lo que puede observarse al medir ambos campos E y H. Las líneas discontinuas rojas en 31- a) y b) confirman que la velocidad de la onda permanece constante en todo el medio, más no así la amplitud de la señal, mostrando la insuficiencia de la teoría convencional de tomografía de tiempo de viaje.

Los paneles inferiores de la figura 31 muestran tres instantáneas seleccionadas que muestran la propagación completa de la componente Ey y la distribución de energía que no se acompaña de un cambio en la velocidad de la onda.

Análisis de la impedancia en medios acoplados.

Para el análisis de la impedancia, es usual tanto en GPR como en sísmica, tener en cuenta dos consideraciones: i) las capas en el subsuelo suelen ser horizontales y tener una velocidad constante, y ii) la fuente genera una onda compresiva, que incide en los límites entre las capas con una incidencia normal (no hay ondas transversales)(Yilmaz & Doherty, 2001). Ambas aseveraciones usualmente no se cumplen en la mayoría de los casos geológicos reales, puesto que hay tanto variaciones laterales como cambios en la velocidad en un mismo medio, pero constituyen un comienzo para el análisis de las reflexiones, tanto en GPR como por ejemplo en exploración sísmica.

Diversos trabajos se han realizado buscando analogías entre ambos métodos. En sísmica, por ejemplo, la impedancia resulta del producto entre la velocidad (v) y la densidad del medio(ρ): $I = v\rho$. El coeficiente de reflexión entre asociado al límite entre dos medios es (Yilmaz & Doherty, 2001):

$$c_s = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1}, \tag{130}$$

donde I_1 e I_2 son las impedancias del medio 1 y 2. Si analizamos el gradiente de la velocidad con respecto a la profundidad vs el gradiente de densidad, veremos que el gradiente de densidad es mucho más pequeño, de modo que es común considerar las variaciones en la densidad como constantes, por lo que la ecuación 130, queda expresada únicamente en términos de la velocidad de propagación. De este modo el análogo EM de la densidad (en exploración sísmica) es la permeabilidad magnética (ver Carcione & Cavallini 1995), y la ecuación que nos permite estimar el coeficiente de reflexión EM corresponde a la ecuación 27.

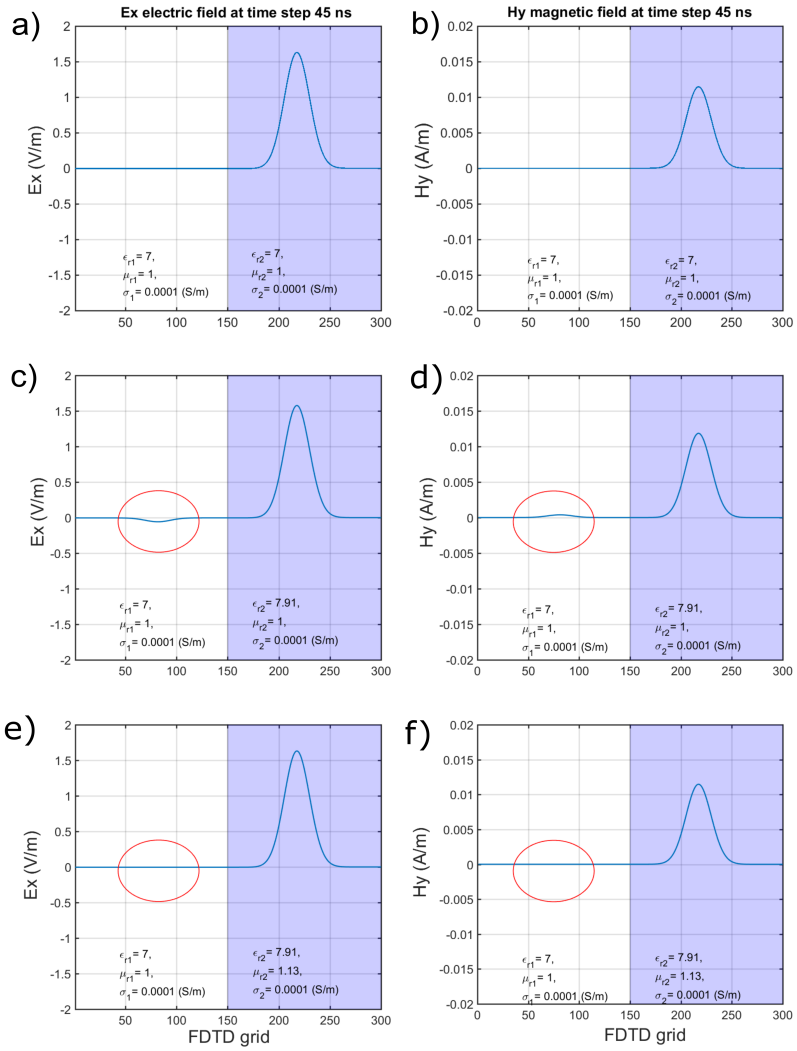

Figura 32. Análisis de la impedancia para el ejemplo de los medios acoplados. Los paneles a) y b) corresponden a una propagación sin cambios en las propiedades; en c) y d), la permitividad presenta una variación muy pequeña, mientras que en e) y f) se han acoplado los valores de impedancia en ambos medios de modo si no se considera μ en el modelado, hay efectos no predichos en la señal EM.

De este modo, para el ejemplo de medios acoplados, que corresponde al ejemplo donde los coeficientes de velocidad propagación c y atenuación α_t en ambos medios son equivalentes ($v_1 = v_2 = 9.48 \times 10^7$ m/s), la impedancia del medio 1 es $Z_1 = 1191.3\ \Omega$ (ec. 24), y $Z_2 = 119.13\Omega$ para el medio 2; de la ecuación 27, el coeficiente re reflexión entre estas capas acopladas es $R_{1-2} = 0.81$, positivo, que indica revés en la polaridad dado que $r_1 < \varepsilon_{r2}$.

Del ejemplo de la figura 31, ahora buscamos acoplar los valores de la impedancia entre dos medios y analizar si estos valores pueden ser cercanos a casos reales de ε_r, μ_r y σ. En la figura 32, se presenta la propagación de campo eléctrico (columna izquierda) y magnética (columna derecha), los paneles a-b,

corresponden a una propagación donde $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r2} = 7; \sigma_1 = \sigma_2 = 0.0001$ S/m y $\mu_{r1} = \mu_{r2} = 1$ como es común en radar. Al no haber un contraste en el medio la onda se desplaza sin reflexiones ni cambios significativos.

En los paneles c-d), la permeabilidad magnética μ sigue constante, pero $_{r1} = 7$ mientras que $_{r2} = 8$, ambas trazas muestran reflexiones incluso con este cambio pequeño. Finalmente los paneles e-f) presentan la propagación acoplando la impedancia, de modo que $\varepsilon_{r1} = 7, \mu_{r1} = 1$ y $\sigma_1 = 0.0001$ S/m, en el medio 1, contra $\varepsilon_{r2} = 7.91, \mu_{r2} = 1.13$ y $\sigma_1 = 0.0001$ S/m, para el segundo medio que son valores comunes en medios geológicos realistas (ver figuras 2, 3 y 4).

De la figura podemos concluir que en a-b) no hay reflexiones, al igual que en e-f), sin embargo, en los paneles superiores se debe a que no hay contraste de medios mientras que en e-f) es por el acoplamiento en la impedancia. de modo que i) incluso pequeños cambios en cualquier valor de las propiedades produce reflexiones en el límite entre los medios, y ii) la impedancia se acopló considerando variaciones pequeñas, lo que indica que si la permeabilidad no se considera en el modelado, hay efectos de contraste que son enmascarados o atribuidos completamente a la permitividad.

Las diferencias en c-d) fueron planteadas para acoplar la impedancia, y las variaciones entre ε_{r1} y ε_{r2} son pequeñas, pero producen reflexiones la suficientemente claras para que un transmisor de radar las perciba, especialmente si consideramos que un procesado convencional de datos incluye aumento de la ganancia de las trazas, los que amplificaría las reflexiones, en estos casos y de acuerdo con Huisman et al.(2003), es importante para las mediciones de contenido de agua en el suelo: i) estimar la velocidad a partir de la permitividad, y ii) determinar la permitividad a a partir del coeficiente de reflexión. Además, de acuerdo con Looms et al. (2018), la atenuación de la onda EM provee información a cerca de la conductividad eléctrica del medio, indicando contenido de arcilla o según Tsoflias & Becker (2008) señalando el contenido de agua salobre en los poros de las rocas; sin embargo, de los resultados de los ejemplos en medios equivalentes, dado que la permeabilidad magnética tiene influencia en la velocidad de la señal, la atenuación y puede enmascarar efectos de reflexión que pueden ser estudiados analizando la impedancia, podemos deducir que relacionar estos cambios unívocamente a ε o σ puede no ser acertado. Estos experimentos muestran, en general, la insuficiencia de la formulación convencional basada en Helmholtz.

5.2.4. Aproximación arqueológica: el caso de la cabeza Olmeca

Para el siguiente ejemplo, utilizamos el esquema convencional de datos de radar utilizando el modo transversal magnético (TM), de manera que se presentan las componentes Ez y Hy. Los prospectos arqueológicos seleccionados para los siguientes modelos son elementos icónicos de la cultura precolombina Olmeca. Las cabezas Olmecas (figura 33) son esculturas de miembros de la nobleza de la antigua cultura Olmeca talladas en piedra volcánica. Estas esculturas se encontraron en depósitos aluviales costeros cuaternarios asociados con las corrientes de los ríos Coatzacoalcos y Uxpana en San Lorenzo, Veracruz, México. Estos bloques de piedra de entre 1 y 2.7 m de diámetro, son materiales alóctonos de las orilla del río y se cree que fueron traídos del volcán Cerro Cintepec, cerca de la Sierra de Los Tuxtlas.

Se han descubierto 124 esculturas de piedra desde la década de 1960, y se han desarrollado algunos estudios geofísicos en la zona, iniciados desde el trabajo pionero de Breiner & Coe (1972), pero se sospecha que aún hay más enterradas.

A pesar de su tamaño y origen alóctono, la identificación precisa de estos restos arqueológicos sigue siendo un objetivo difícil para los estudios con georradar. Además de las alteraciones naturales en la roca, la firma de la permeabilidad magnética de la piedra basáltica podría ser la característica más contrastante, y su identificación en la señal debería permitir distinguir estas rocas volcánicas.

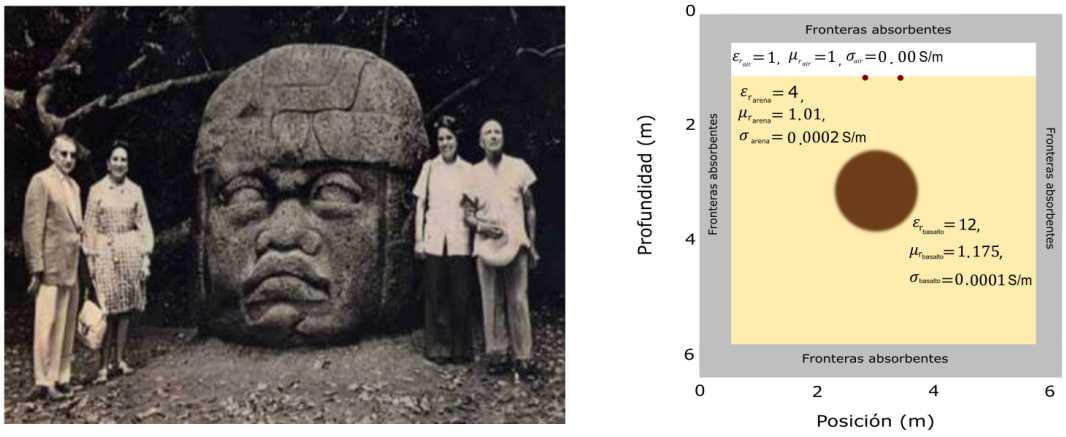

Figura 33. Fotografía histórica (izquierda) y diagrama esquemático para los parámetros seleccionados para el modelo(derecha). Crédito de la imagen: Richard Hewitt Stewart/National Geographic Creative, Cabeza Colosal Olmeca, Monumento 1, San Lorenzo, 1946, en Matthew Stirling, NationalGeographic, Washington.

En este escenario, el modelado y la identificación de la señal de permeabilidad magnética en los datos de GPR se convierten en un elemento clave. En la figura 33, esbozamos el modelo hipotético de la cabeza y las propiedades electromagnéticas seleccionadas.

Para ilustrar las diferencias en el campo eléctrico real que se propaga a través de la cabeza Olmeca, presentamos algunas instantáneas en la figura 34. Cabe destacar que, después de 5.1 ns, la onda alcanza el objetivo arqueológico.

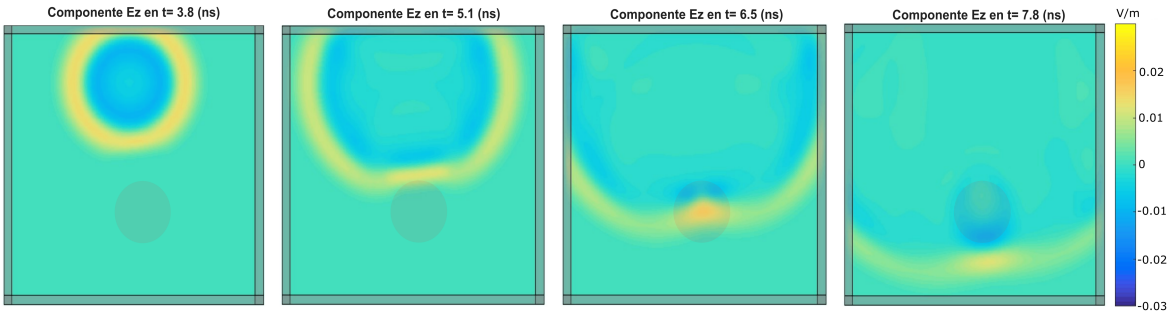

Figura 34. Snapshots seleccionadas de la componente Ez para el ejemplo de Los Tuxtlas. El círculo indica la ubicación de la cabeza Olmeca.

Para simular la respuesta del GPR de estos vestigios arqueológicos, utilizamos propiedades características de los materiales donde se descubrieron las cabezas Olmecas. Las rocas sedimentarias del área de San Lorenzo corresponden a depósitos de origen marino costero del Mioceno y Jurásico; son secuencias de arenas, arcillas y materiales no consolidados sedimentados en un entorno marino de aguas someras.

Los materiales rocosos de esta zona se estructuran en una capa de areniscas compactadas de grano grueso con arcillas, sobre areniscas de grano más fino mezcladas con arcillas intercaladas con depósitos con un alto contenido de carbono, de acuerdo a las cartas geológicas del Servicio Geológico Mexicano (SGM).

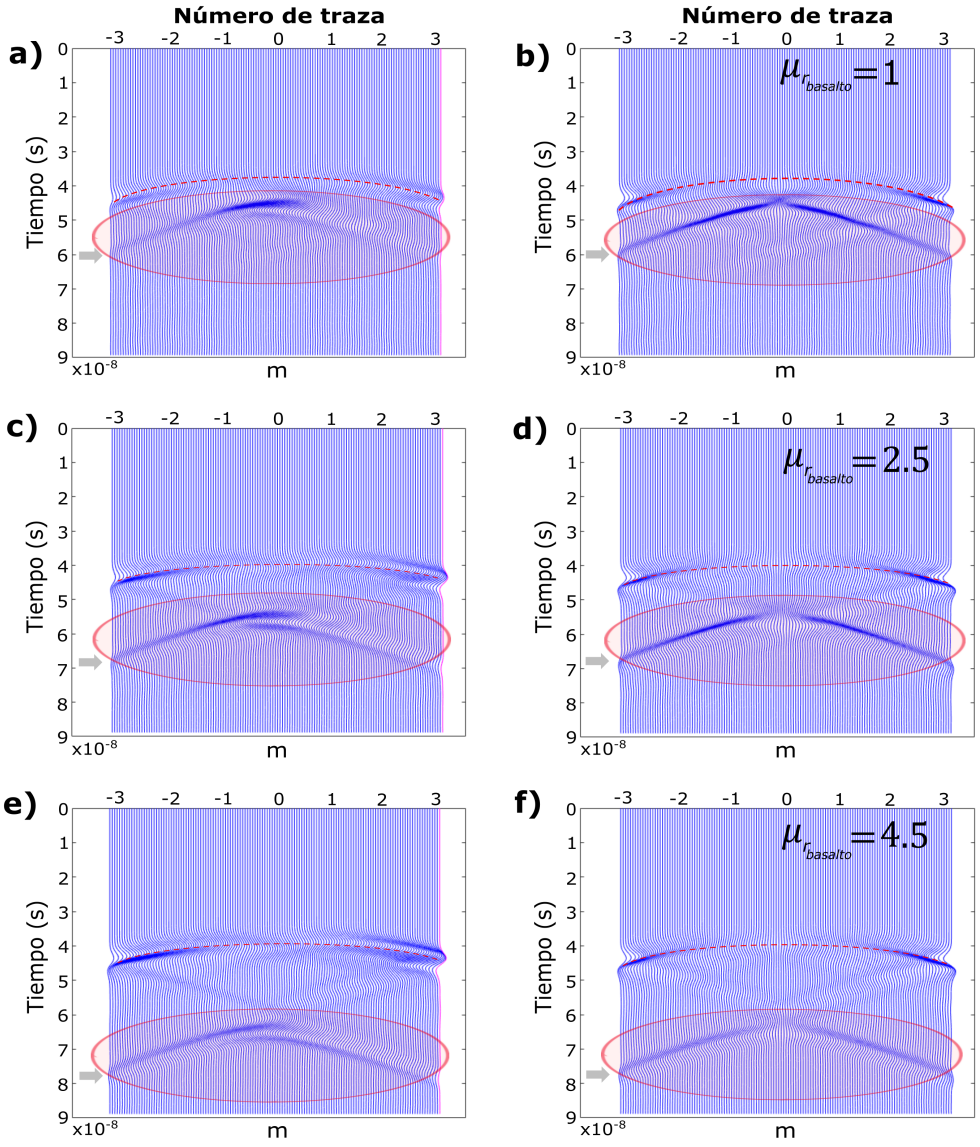

Figura 35. Radargramas bidimensionales de las componentes Ez (izquierda) y Hy (derecha) del ejemplo de Los Tuxtlas. Los paneles a) y b) corresponden a $\mu_r = 1$. Observe el efecto de los paneles c) a h) debido al incremento de la permeabilidad, resaltado con círculos rojos.

La figura 35 muestra un ejemplo de nuestros campos E y H calculados. Para este experimento, exploramos tres escenarios utilizando los valores de permeabilidad magnética del basalto, basados del trabajo seminal de Breiner & Coe (1972) en el área de San Lorenzo: i) $\mu_r = 1$ (valor convencional para el modelado de radar), ii) $\mu_r = 2.5$ y iii) $\mu_r = 4.5$. En este ejemplo, la cabeza Olmeca hipotética tiene un tamaño aproximado de 1 m y está sepultada a 0.6 m.

Podemos observar diferencias interesantes en la forma de onda, la amplitud y el tiempo de propagación de la onda EM reflejada en el objetivo establecido. Estas diferencias se deben únicamente a las variaciones de

la permeabilidad magnética, lo que confirma la relevancia de μ para este tipo de objetivos arqueológicos.

En la figura 35, observamos que la primera onda reflejada aumenta su amplitud cuando μ aumenta, mientras que la segunda onda reflejada se retrasa y disminuye su amplitud al atravesar la cabeza, debido al incremento del valor de la propiedad magnética, este efecto es consistente en todos los incisos (a-f) y en ambas componentes. Además, podemos observar una atenuación de la segunda onda reflejada con el aumento de la permeabilidad magnética, este efecto es especialmente notorio en e) y f) y está señalado en los paneles de la figura con círculos rojos, por lo que podemos deducir que las propiedades magnéticas tienen un efecto combinado característico en la amplitud y la fase de la señal de radar.

Para simular un escenario más realista en los ejemplos de San Lorenzo y explorar la complejidad añadida por una capa conductora, añadimos una superficie hipotética de arcilla, localizada por encima y por debajo de la cabeza Olmeca. Los resultados de este modelo se presentan en la figura 36, y muestran que la capa de arcilla atenúa significativamente la señal electromagnética, sin embargo, la posición y el grosor de esta capa pueden enmascarar (paneles superiores) o potenciar (paneles inferiores) la respuesta del radar; este efecto es especialmente notable en la componente de campo magnético.

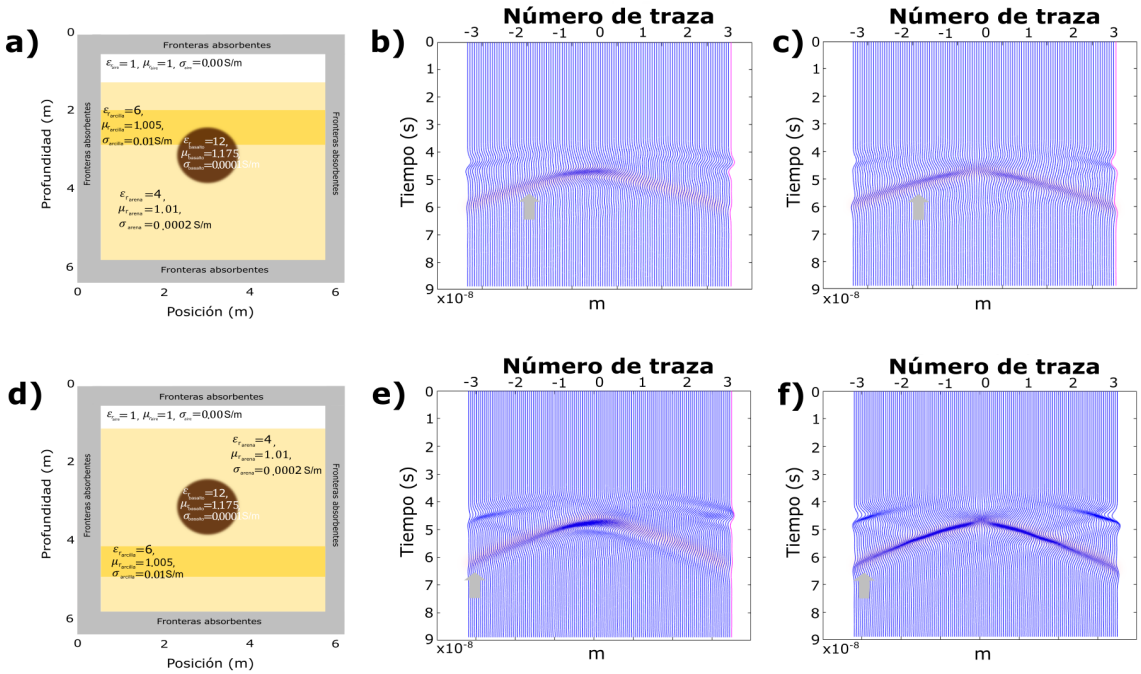

Figura 36. Radargramas bidimensionales de los componentes Ez (izquierda) y Hy (derecha) del ejemplo de Los Tuxtlas, incluyendo una capa de arcilla. Los paneles a) y d) corresponden a los diagramas que muestran la posición de la capa de arcilla (capa amarilla). Los paneles b, c, e y f corresponden a los radargramas de las componentes de campo eléctrico (b y e) y magnético (c y f). Observe el efecto de la capa de arcilla en la señal de radar; en las figuras b y c se puede observar un efecto de atenuación esperado.

Esta característica es interesante, y es la razón por la que el GPR es un método efectivo para mapear las zonas de transición entre la zona vadosa y saturada en estudios geohidrológicos (Lai et al., 2012). De hecho, algunos estudios han analizado contribución del radar terrestre y de pozo en escenarios donde se espera una fuerte atenuación de la señal EM, por ejemplo, en secuencias de materiales arcilloso (arcillas y arenas o arcillas y tills, depósitos de grava y arcillas) (Klotzsche et al., 2010), determinando que contrario la suposición habitual en que se evitan ambientes arcillosos, acuosos o saturados de agua (Looms et al., 2008), los fuertes cambios en las amplitudes de la señal son elementos clave en el mapeo y delimitación de estructuras de interés (Tsoflias & Becker, 2008).

Podemos concluir que el contraste de permeabilidad magnética influye notablemente en la respuesta del GPR, facilitando así la detección del objetivo y sentando las bases para la inversión conjunta de datos magnéticos y de GPR en cualquier exploración arqueológica moderna y otras posibles aplicaciones y que constituye una herramienta útil en la interpretación de los radargramas y en la interpretación de estructuras a profundidad.

Capítulo 6. Discusión

6.1. Del análisis los ejemplos considerando variaciones en cada propiedad en medios homogéneos y con contraste

Sobre el análisis de cada propiedad podemos deducir: i) que la permitividad dieléctrica tiene un impacto en la señal EM que se traduce en cambios en amplitud de la onda y la velocidad de propagación de la señal, estos cambios pueden ser observados tanto en las componentes de campo eléctrico como en las de campo magnético, ii) respecto a la permeabilidad magnética, observamos cambios en la señal que se acentúan conforme μ aumenta, pero pueden ser observados incluso en valores pequeños con respecto al valor comúnmente utilizado en el modelado convencional de radar ($\mu = \mu_o$). Estos cambios se traducen en variaciones en la amplitud y velocidad de la onda en las componentes eléctricas y magnéticas, además, esta propiedad tiene un efecto combinado entre las otras dos, difícil de duplicar solo con permitividad o conductividad, y iii) la conductividad eléctrica, no afecta la velocidad de propagación de la señal, únicamente provoca un efecto de atenuación de la señal conforme σ aumenta; esta es una de las principales características por las cuáles la señal de GPR es altamente sensible a medios con altos contenidos de agua, es decir, altamente conductivos.

De los resultados en medios con contrastes, se hace evidente que es posible distinguir una firma característica en la señal, producto de variaciones en cada propiedad física, es decir, las características de la onda EM cambian de un medio a otro y es en esta interfaz entre medios que podemos obtener información respecto a la propiedad que esta cambiando. Estos cambios pueden ser visualizados si analizamos al menos una componente de cada campo (eléctrico y magnético); en general observamos que i) un cambio en la permitividad afecta la velocidad de la señal y en un medio con contrastes, podemos evidenciar este efecto en un cambio en la fase de la onda reflejada en la componente Ex (solo en Ex), ii) un cambio en la permeabilidad afecta la amplitud y la velocidad de la señal en ambas componentes, pero el cambio de polaridad de la onda reflejada en la zona de transición solo se nota en la componente de campo magnético, iii) un cambio en la conductividad provoca un marcado efecto de atenuación de la señal, tal cual observamos en los ejemplos de medios homogéneos. De manera que, un cambio en cualquiera de las propiedades produce una partición de energía en ondas reflejadas y transmitidas con diferente fase y formas de onda tanto para el campo E como para el campo H, por ello, es importante registrar la propagación de ambos campos y iv) el acoplamiento de la impedancia permitió analizar el efecto de considerar la permeabilidad respecto al coeficiente de reflexión entre medios, de lo que observamos que

valores de permeabilidad pequeños, como los del caso de materiales sedimentarios, pueden enmascarar efectos reflexivos, o atribuirlos erróneamente a variaciones en la permitividad.

6.2. Acerca de la calibración con gprMax y los ejemplos considerando medios acoplados

En la sección 5.2 se mostraron algunos resultados del proceso de calibración utilizando *gprMax*. Se realizaron diversas pruebas para estandarizar las dimensiones numéricas, condiciones de estabilidad numérica, el tipo de fuente, las propiedades de los medios, los tipos de condiciones de frontera, entre otras consideraciones. El software *gprMax* tiene aproximadamente 20 años de desarrollo y lógicamente contiene un buen número de características, sin embargo, cuando se trata de modelar la permeabilidad magnética en el dominio del tiempo presenta irregularidades en el modelado, sus desarrolladores sugieren utilizar la implementación del modelo de Debye cuando se consideran características magnéticas en los materiales. En los ejemplos de calibración, podemos notar que las trazas entre gprMax y nuestro desarrollo son equiparables en un orden de magnitud tanto en la componente eléctrica como en la magnética, por lo que son consideradas como una buena aproximación de modelado numérico.

Respecto a los ejemplos en los medios acoplados, podemos inferir que a diferencia de la formulación convencional basada en Helmholtz, nuestro algoritmo identifica claramente variaciones y efectos notables en el contacto entre las dos capas, aún en el caso en el que los medios se diseñaron de manera que tuvieran las mismas constantes de propagación. Estas variaciones se traducen en la partición de la energía de propagación en la señal con cambios en la amplitud y atenuación, tanto en la onda reflejada como trasmitida. Esto, a pesar de que sus constantes de velocidad y atenuación convencionales son las mismas. Inferimos que estos cambios tienen una relación con la impedancia de los medios, pero el papel de los contrastes de μ va más allá del concepto convencional de impedancia; si bien, algunos trabajos análogos en sísmica de reflexión han estudiado con mayor detalle las zonas de transición entre medios elásticos y viscoelásticos en el modelado, sin embargo, en radar no hay mucha información al respecto. De los ejemplos con medios acoplados, resulta evidente que existen efectos EM que no podemos recuperar si no consideramos las tres propiedades en el modelado, lo que muestra la insuficiencia de la teoría convencional de tomografía de tiempo de viaje.

6.3. Acerca del ejemplo modelando un prospecto arqueológico con una capa conductora

El mapeo de vestigios arqueológicos constituye una de las aplicaciones más usuales en radar, por lo que consideramos adecuado seleccionar un vestigio como la cabeza Olmeca para el modelado; en los ejemplos distinguimos claramente la firma EM producto de la cabeza Olmeca, tanto en los radargramas como en las snapshots. Para evidenciar que los cambios en la permeabilidad magnética producen un efecto particular y no se debe a un artificio numérico, realizamos pruebas modificando los valores de μ con valores reportados en la literatura. En general, si no consideramos cambios en μ, el efecto de retardo y atenuación en la señal será atribuido a combinaciones de las otras dos propiedades EM. Además, existe un gran número de casos en que μ tiene un valor más grande que el utilizado convencionalmente en radar.

La capa conductora añadida al ejemplo de la cabeza Olmeca enmascara o acentúa la señal EM, dependiendo de su posición. Es por esta razón que en años recientes, el radar está ganando popularidad en estudios geohidrológicos para determinar la zona de transición entre la zona no saturada y la zona saturada en la búsqueda de acuíferos someros.

6.4. Acerca de la formulación del campo adjunto para el esquema de inversión de datos considerando las tres propiedades del radar

La estimación matemática de las derivadas para ε, μ y σ resulta más sencilla si consideramos H en las ecuaciones y no B como originalmente aproximamos. De los posibles métodos para estimar las derivadas, la teoría del campo adjunto resultó ser eficiente, al menos en cuanto al desarrollo teórico de refiere, según se analizó en el capítulo 4. Restringimos la función objetivo considerando la ley de Ampere y de Faraday desacopladas; como resultado del desarrollo pudimos notar que el problema en tiempo reverso corresponde a un problema -no autoadjunto-, pues recuperamos las ecuaciones de estado originales, pero con variaciones en los signos. Las derivadas estimadas deben ser aproximadas utilizando algún método de optimización.

6.5. Respecto a la calibración de las derivadas

Debido a las dificultades para calibrar las derivadas estimando una aproximación analítica, se utilizó el software gprMax para la calibración de los modelos con nuestro desarrollo. El proceso de familiarizarse a la interfaz de gprMax resultó interesante, pues hay varios parámetros que se deben considerar para su ejecución. Se desarrollaron modelos en 2D variando las tres propiedades, en componentes en ambos campos; gprMax funciona como una 'caja negra', donde introducimos valores de entrada y arroja valores de salida, pero, incluye paqueterías que permiten al usuario modelar utilizando diferencias finitas en el dominio del tiempo, o considerar aproximaciones al modelo de Debye. Sin embargo, como es usual en el modelado de radar, los artículos de modelado que utilizan esta paquetería comúnmente no consideran variaciones en permeabilidad magnética.

En este trabajo se muestran ejemplos utilizando como fuente un pulso Gaussiano, sin embargo, se programaron otros pulsos-fuente como una ondícula Ricker o un pulso Gaussiano modulado, estos resultados también se calibraron con gprMax, considerando distintas frecuencias y posiciones para la fuente. Para el modelado, es importante tener en mente las consideraciones que se hacen respecto a la fuente, pues esto impacta en la propagación. En general, se obtuvieron resultados aceptables (de un orden de magnitud) en los modelos entre ambos algoritmos.

6.6. Acerca de aplicaciones específicas al considerar variaciones en la permeabilidad magnética

Si bien, el efecto combinado de las propiedades del radar en la señal GPR puede dificultar su interpretación, la posibilidad de utilizar tres propiedades electromagnéticas completas y la propagación de ambos campos E-H para algoritmos de modelado numérico debería conducir a una interpretación más precisa y discriminante de los datos. Simultáneamente, la posible adquisición del campo magnético en estudios de radar también puede contribuir a una caracterización más precisa de las heterogeneidades causantes. Dadas todas estas posibilidades, resulta interesante considerar la permeabilidad magnética no solo en ejemplos arqueológicos, sino también en otras aplicaciones donde las propiedades magnéticas pueden ser importantes, como restos de minas de guerra sin detonar (UXO), estudios geotécnicos, exploración en otros planetas, estudios para la delimitación de acuíferos, estudios de remediación de contaminantes, entre otros.

6.7. Trabajo futuro

La estimación de una solución analítica para el problema de radar no es trivial; en una primera aproximación intentamos calibrar las derivadas utilizando una estimación a la solución analítica, se propone como trabajo futuro continuar este desarrollo. Se plantea incluir una formulación más sofisticada de las PML. El esquema como se modeló el algoritmo permitiría a futuro considerar anisotropía en el modelado. Una vez que podemos generar estimaciones del modelado directo y en tiempo reverso, podemos aproximar el 'mejor modelo' utilizando un método de optimización, por ejemplo, un método de gradiente. Como trabajo futuro se pretende desarrollar una aproximación utilizando el método de gradientes conjugados no lineales como método de optimización a la solución del problema de radar en dos dimensiones. El interés de considerar la permeabilidad magnética en el modelado de radar es aproximar una solución de radar e integrarla en un esquema de inversión conjunta con el método de prospección magnética, se plantea como posible trabajo próximo desarrollar los módulos necesarios a nuestro algoritmo para cristalizar esta meta. Se propone continuar con el desarrollo del esquemas en tres dimensiones así como comparar los modelos numéricos con datos de campo en ambientes de interés.

Capítulo 7. Conclusiones

Para este trabajo, se desarrolló un algoritmo FDTD escalonado para el modelado de radar utilizando un esquema desacoplado de las leyes de Faraday y Ampere. Se modelaron las tres propiedades electromagnéticas individualmente, para analizar su influencia en la señal de radar. Se estimaron modelos homogéneos y heterogéneos en una y dos dimensiones y se desarrollaron los elementos necesarios para el planteamiento de una aproximación al problema inverso de datos de radar de penetración considerando las tres propiedades.

En relación al primer objetivo de este trabajo, de analizar la contribución de la permitividad dieléctrica, la conductividad y la permeabilidad magnética en distintas componentes de campo eléctrico y de campo magnético de la señal del radar concluimos que cada propiedad contribuye de una manera característica en la señal electromagnética del radar de penetración. Estas contribuciones son consistentes para distintos valores de ε, μ y σ y se pueden observar en distintas frecuencias. Contrariamente a lo que se suele suponer, las variaciones de μ en la señal son significativas.

Respecto al segundo objetivo específico, relacionado a analizar si es posible distinguir una firma de cada una de las propiedades en la señal de radar, concluimos que es difícil distinguir el efecto de las tres propiedades por separado a través de un medio homogéneo, aunque esta dificultad se podría reducir si se midiera simultáneamente los campos eléctrico y magnético.

En el caso de interfases, la partición de energía promovida por las tres propiedades es característica, lo que significa que es posible distinguir una firma de cada una de las propiedades en la señal de radar; esto se debe a que existen más elementos de análisis disponibles, como es el caso de la polaridad relativa de la onda reflejada, la cuál cambia según la propiedad que haya cambiado. Inferimos que estas variaciones pueden ayudarnos a definir en un esquema de inversión, las variaciones en las propiedades con mayor precisión y con ello la posibilidad de estimar simultáneamente la permitividad, la permeabilidad y la conductividad eléctrica. Esto también confirma que las propiedades del medio no deberían simplificarse arbitrariamente de tres a dos propiedades.

Los resultados del modelado, muestran que gran parte de la evidencia de lo que yace en el subsuelo la podría proveer las mediciones del campo magnético. Este campo resultó particularmente útil para evidenciar el efecto de las tres propiedades EM del medio, lo que hace recomendable analizar la posibilidad de registrar el campo magnético en estudios de radar de terreno.

Sobre el tercer objetivo específico, relacionado a desarrollar los elementos necesarios para plantear una

aproximación al problema de inversión de datos de radar de penetración considerando las tres propiedades, concluimos que la aplicación de la teoría de campo adjunto considerando un sistema de ecuaciones desacoplado (ley de Faraday y de Ampere), nos permitió obtener las ecuaciones de estado adjunto para nuestro problema y de este modo calcular un campo en propagación reversa. Estas ecuaciones de estado, resultaron ser no auto-adjuntas, lo que implicó que, a diferencia de otros problemas en los que puede utilizarse el mismo algoritmo para la propagación directa y reversa, nuestro algoritmo de estimación del campo adjunto fuera distinto al de la propagación directa, a pesar de esto, los cambios resultaron ser fácilmente adaptables en el algoritmo. De este modo, el método de campo adjunto permitió estimar las derivadas necesarias para resolver el problema inverso considerando las tres propiedades electromagnéticas.

Respecto a la hipótesis de este trabajo, que plantea que la permeabilidad magnética afecta las observaciones de manera diferente a la permitividad eléctrica o a los contrastes de conductividad, y por lo tanto, proporciona información valiosa en el modelado e inversión de datos de radar, concluimos que, nuestros experimentos muestran que las variaciones de permeabilidad afectan notablemente la señal electromagnética, afectando tanto la transmisión como la partición de la energía electromagnética. Al ser un factor multiplicativo en la formulación electromagnética, un contraste en μ afecta la señal electromagnética incluso para materiales de baja permeabilidad.

El uso conjunto de las tres propiedades fundamentales —permitividad, conductividad y permeabilidad magnética— en conjunto con el registro de la propagación de ambos campos, eléctrico y magnético en los algoritmos de modelado numérico, favorece una interpretación más precisa y discriminante de los datos. Ante estas observaciones, la posible adquisición del campo magnético en estudios de radar contribuiría a una caracterización más detallada de las heterogeneidades responsables de las respuestas observadas.

En este contexto, resulta relevante considerar la influencia de la permeabilidad magnética no solo en aplicaciones arqueológicas, sino también en otros ámbitos donde las propiedades magnéticas son significativas, como estudios geotécnicos (daños en edificaciones, tuberías y análisis de concreto para carreteras), detección de artefactos de guerra sin detonar y exploraciones en otros planetas.

Literatura citada

Aditama, I. F., Syaifullah, K. I., & Saputera, D. H. (2015). Detecting buried human bodies in graveyard with ground-penetrating radar. In *International Workshop and Gravity, Electrical and Magnetic Methods and their Applications*, volume of *SEG Global Meeting Abstracts*, 420–423, Chenghu-China. Society of Exploration Geophysicists and the Chinese Geophysical Society. https://doi.org/10.1190/GEM2015-109.

Ali, H., Razak, M. H. A., Nasri, M. I. S., Masuan, N. A., Amin, M. S. M., Zaidi, A. F. A., Azalan, M. S. Z., & Rahim, N. A. (2024). Hyperbolic recognition of buried pipes in ground penetrating radar images with the presence of scattering objects. *AIP Conference Proceedings*, *2898*(1). https://doi.org/10.1063/5.0194125.

Almalki, M. A. & Khalid, F. A. (2024). Inspection of reinforced concrete structures using Ground Penetrating Radar: Experimental approach. *Journal of King Saud University - Science*, *36*(4), 103140. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jksus.2024.103140.

Annan, A. P. (2009). Ground Penetrating Radar. In Butler, D. K., editor, *Near Surface Geophysics*, (pp. 357–438). Society of Exploration Geophysicists, Investigation in Geophysics Series.

Apaydin, G. & Sevgi, L. (2012). Method of Moments (MoM) modeling for resonating structures: Propagation inside a parallel plate waveguide. *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*, *27*, 842–849.

Arcone, S., Finnegan, D., & Boitnott, G. (2010). GPR characterization of a lacustrine UXO site. *Geophysics*, *75*(4), WA221–WA239. https://doi.org/10.1190/1.3467782.

Berenger, J. (1994). A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, *114*(2), 185 – 200. https://doi.org/https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1159.

Bergmann, T., Robertsson, J. O. A., & Holliger, K. (1996). Numerical properties of staggered finite-difference solutions of Maxwell's equations for ground-penetrating radar modeling. *Geophysical Research Letters*, *23*(1), 45–48. https://doi.org/https://doi.org/10.1029/95GL03515.

Boisson, J., Heggy, E., Clifford, S. M., Yoshikawa, K., Anglade, A., & Lognonné, P. (2011). Radar sounding of temperate permafrost in Alaska: Analogy to the Martian midlatitude to high-latitude ice-rich terrains. *Journal of Geophysical Research: Planets*, *116*(E11). https://doi.org/https://doi.org/10.1029/2010JE003768.

Breiner, S. & Coe, M. (1972). Magnetic Exploration of the Olmec Civilization. *American Scientist - AMER SCI*, *60*, 566–575.

Butler, D. K. (2005). *Near-Surface Geophysics*. Investigations in geophysics. Society of Exploration Geophysicists.

Cabrer, R., Gallardo, L. A., & Flores, C. (2022). Implicit finite-difference time-domain schemes for TDEM modeling in three dimensions. *Geophysics*, *87*(5), E347–E358. https://doi.org/10.1190/geo2021-0587.1.

Carcione, J. & Cavallini, F. (1995). On the acoustic-electromagnetic analogy. *Wave Motion*, *21*(2), 149–162. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0165-2125(94)00047-9.

Cassidy, N., Eddies, R., & Dods, S. (2011). Void detection beneath reinforced concrete sections: The practical application of Ground-Penetrating Radar and ultrasonic techniques. *Journal of Applied Geophysics*, *74*, 263–276. https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2011.06.003.

Cassidy, N. J. (2008). Frequency-dependent attenuation and velocity characteristics of nano-to-micro scale, lossy, magnetite-rich materials. *Near Surface Geophysics*, *6*(6), 341–354. https://doi.org/https://doi.org/10.3997/1873-0604.2008023.

Cassidy, N. J. & Millington, T. M. (2009). The application of finite-difference time-domain modelling for the assessment of GPR in magnetically lossy materials. *Journal of Applied Geophysics*, *67*(4), 296–308. Advanced Applications, Systems and Modelling for GPR, https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2008.09.009.

Chave, A. D. (1984). The Fréchet Derivatives of electromagnetic induction. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *89*(B5), 3373–3380. https://doi.org/https://doi.org/10.1029/JB089iB05p03373.

Chen, B. (2020). ADE-FDTD method for study of two-dimensional electromagnetic wave propagation in lossy Lorentz medium. *MATEC Web of Conferences*, *309*, 01002. https://doi.org/10.1051/matecconf/202030901002.

Chen, H.-W. & Huang, T.-M. (1998). Finite-difference time-domain simulation of GPR data. *Journal of Applied Geophysics*, *40*, 139. https://doi.org/10.1016/s0926-9851(98)00019-6.

Chen, Y. H., Chew, W. C., & Oristaglio, M. L. (1996). PML as an efficient ABC for lossy media. https://www.researchgate.net/publication/2253605_Pml_As_An_Efficient_Abc_For_Lossy_Media.

Claerbout, J. F. (1971). Toward a unified theory of reflector mapping. *Geophysics*, *36*(3), 467–481. https://doi.org/10.1190/1.1440185.

Claerbout, J. F. (1986). Imaging the Earth's Interior. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, *86*(1), 217–217. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1986.tb01086.x.

Conyers, L. (2015). Analysis and interpretation of GPR datasets for integrated archaeological mapping. *Near Surface Geophysics*, *13*, 645–651. https://doi.org/10.3997/1873-0604.2015018.

Conyers, L. B., St Pierre, E. J., Sutton, M., & Walker, C. (2019). Integration of GPR and magnetics to study the interior features and history of earth mounds, Mapoon, Queensland, Australia. *Archaeological prospection*, *26*(1), 3–12. https://doi.org/10.1002/arp.1710.

Daniels, J., Lee, R., Yi, Y., Ortega, R., & Shalek, K. (2009). Broadband Finite Difference Time Domain modeling. *Proceedings of the Symposium on the Application of Geophyics to Engineering and Environmental Problems, SAGEEP*, *1*, 47–56. https://doi.org/10.4133/1.3176732.

Davis, P. & Rabinowitz, P. (2007). *Methods of Numerical Integration*. Dover Publications.

Dobrin, M. & Savit, C. (1988). *Introduction to Geophysical Prospecting*. McGraw-Hill Book Company.

Dunlop, D. & Özdemir, Ö. (1997). *Rock Magnetism: Fundamentals and Frontiers*. Cambridge University Press.

Ebraheem, M. & Ibrahim, H. (2021). Contributions of Ground-Penetrating Radar in research of some predynastic and dynastic archaeological sites at the eastern and western banks of the River Nile, Assiut, Egypt. *Archaeological Prospection*, *29*(2), 177–189. https://doi.org/10.1002/arp.1844.

Egbert, G. D. & Kelbert, A. (2012). Computational recipes for electromagnetic inverse problems. *Geophysical Journal International*, *189*(1), 251–267. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2011.05347.x.

Engquist, B. & Majda, A. (1977). Absorbing Boundary Conditions for the numerical simulation of waves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *74*, 1765–6. https://doi.org/10.1073/pnas.74.5.1765.

Everett, M. & Meju, M. (2005). Near-surface controlled-source electromagnetic induction: Background and recent advances. In Yoram Rubin, S. S. H., editor, *Hydrogeophysics: Water science and technology library*, (pp. 157–183). Springer Dordrecht, Water Science and Technology Library.

Eymard, R., Gallouët, T., & Herbin, R. (2000). Finite volume methods. In *Solution of Equation in n (Part 3), Techniques of Scientific Computing (Part 3)*, volume *7* of *Handbook of Numerical Analysis*, (pp. 713–1018). Elsevier.

Farquharson, C. G. & Miensopust, M. P. (2011). Three-dimensional finite-element modelling of magnetotelluric data with a divergence correction. *Journal of Applied Geophysics*, *75*(4), 699–710. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2011.09.025.

Ferguson, D., Henderson, B., & Neff, W. (2021). A high school student's introduction to geophysics through acquisition, processing, and interpretation of GPR data from marked and unmarked grave sites. *The Leading Edge*, *40*(1), 60–62. https://doi.org/10.1190/tle40010060.1.

Forslund, E. ad Jacobsson, A. (1975). Clay-water systems. In Franks, F., editor, *Water a comprehesive treatise, V. 5, water in disperse systems*, volume *5*, (pp. 173–248). Plenum Press, New York.

Frigeri, A. & Ercoli, M. (2020). The ScanMars Subsurface Radar Sounding Experiment on AMADEE-18. *Astrobiology*, *20*(11), 1338–1352. https://doi.org/10.1089/ast.2019.2037.

Fumeaux, C., Baumann, D., Almpanis, G., Li, E.-P., & Vahldieck, R. (2008). Finite-volume time-domain method for electromagnetic modelling: Strengths, limitations and challenges. In *11th International Symposium on Microwave and Optiacl Technology (ISMOT 2007)*, volume *3* of *International Journal of Microwave and Optical Technology*, 318–328, Monte Porzio Catone-Italy. International Symposium on Recent Advances in Microwave Technology.

Gallardo, L. A. (1997). Inversión 3D de datos gravimétricos y magnetométricos aplicando condiciones de acotamiento y suavidad. [Tesis de maestria, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, CICESE].

Gallardo-Romero, E. & Ruiz-Aguilar, D. High order edge-based finite elements for 3D magnetotelluric modeling with unstructured meshes. *Computers and Geosciences*, *158*, pages = 104971, year = 2022, issn = 0098-3004, doi = https://doi.org/10.1016/j.cageo.2021.104971.

Giannakis, I. (2016). *Realistic numerical modelling of Ground Penetrating Radar for landmine detection*. [Tesis de doctorado, The University of Edinburgh].

Giannopoulos, A. (2005). Modelling Ground-Penetrating Radar by GprMax. *Construction and Building Materials*, *19*, 755–762. https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2005.06.007.

Guan, W., Su, Y., Li, J., Dai, S., Ding, C., & Liu, Y. (2024). Applications of Ground-Penetrating Radar in asteroid and comet exploration. *Remote Sensing*, *16*(12), 2188. https://doi.org/doi:10.3390/rs16122188.

Gurel, L. & Oğuz, U. (2000). Three-dimensional FDTD modeling of a ground-penetrating radar. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, *38*, 1513 – 1521. https://doi.org/10.1109/36.851951.

Hagness, S. C., Taflove, A., & Gedney, S. D. (2005). Finite-Difference Time-Domain Methods. In *Numerical Methods in Electromagnetics*, volume *13* of *Handbook of Numerical Analysis*, (pp. 199–315). Elsevier.

Hamran, S.-E., Berger, T., Brovoll, S., Damsgard, L., Helleger A., O., Oyan, M., Amundsen, H. E. F., Carter, L., Ghent, R., Kohler, J., Mellon, M., Paige, D., Plettemeier, D., & Eide, J. (2015). RIMFAX: A GPR for the Mars 2020 rover mission. In *2015 8th International Workshop on Advanced Ground Penetrating Radar (IWAGPR)*, 1–4. Conference Microwave Telecommunication Technology. https://doi.org/10.1109/IWAGPR.2015.7292690.

Hamran, S.-E., Erlingsson, B., Gjessing, Y., & Mo, P. (1998). Estimate of the subglacier dielectric constant of an ice shelf using a ground-penetrating step-frequency radar. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 36(2), 518–525. https://doi.org/10.1109/36.662734.

Hamran, S.-E., Paige, D. A., Amundsen, H. E. F., Berger, T., Brovoll, S., Carter, L., Damsgård, L., Dypvik, H., Eide, J., Eide, S., Ghent, R., Helleren, , Kohler, J., Mellon, M., Nunes, D. C., Plettemeier, D., Rowe, K., Russell, P., & Øyan, M. J. (2020). Radar Imager for Mars' Subsurface Experiment—RIMFAX. *Space Science Reviews*, *216*(8). https://doi.org/10.1007/s11214-020-00740-4.

Hasted, J. B. (1995). Liquid water – dielectric properties. In Franks, F., editor, *Water: A Comprehensive Treatise, Vol. 1: The Physics and Physical Chemistry of Water*, volume *1*, (pp. 255–310). Plenum Press, New York.

Howlader, M. & Sattar, T. (2015). FDTD based numerical framework for ground penetrating radar simulation. *Progress In Electromagnetics Research M*, *44*, 127–138. https://doi.org/10.2528/PIERM15090304.

Huisman, J. A., Hubbard, S. S., Redman, J. D., & Annan, A. P. (2003). Measuring soil water content with Ground Penetrating Radar: A Review. *Vadose Zone Journal*, *2*(4), 476–491. https://doi.org/https://doi.org/10.2136/vzj2003.4760.

Hunt, C., Moskowitz, B., & Banerjee, S. (1995). Magnetic Properties of Rocks and Minerals. In Ahrens, T. J., editor, *Rock Physics and Phase Relations: A Handbook of Physical Constants*, volume *3*, (pp. 189–204). Washington DC.

Kai, R. (1973). Ionic transport in water and mixed aqueous solvents. In Franks, F., editor, *Water: A Comprehensive Treatise, Vol. 3. Aqueous Solutions of Simple Electrolytes*. Springer, Boston MA.

Klotzsche, A., Jonard, F., Looms, M., Kruk, J., & Huisman, J. (2018). Measuring soil water content with Ground Penetrating Radar: A decade of progress. *Vadose Zone Journal*, *17*(1), 1–9. https://doi.org/10.2136/vzj2018.03.0052.

Klotzsche, A., van der Kruk, J., Angelo Meles, G., Doetsch, J., Maurer, H., & Linde, N. (2010). Full-waveform inversion of cross-hole ground-penetrating radar data to characterize a gravel aquifer close to the Thur River, Switzerland. *Near Surface Geophysics*, *8*(6), 635–649. https://doi.org/https://doi.org/10.3997/1873-0604.2010054.

Komatitsch, D. & Martin, R. (2007). An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for the seismic wave equation. *Geophysics*, *72*(5), SM155–SM167. https://doi.org/10.1190/1.2757586.

Ksenija, T., Ana, B., Marijana, S., & Nenad, G. (2024). Electromagnetic property selection for GPR modelling in corrosive concrete environments. *Developments in the Built Environment*, *17*, 100302. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.dibe.2023.100302.

Lahlal, F., Faize, A., Atounti, M., & Alsharahi, G. (2020). Ability GPR simulation to detect small objects with geometric shapes different with bow-tie antenna. *International Journal of Scientific and Technology Research*, *9*, 6593–6597.

Lai, W. L., Kou, S. C., & Poon, C. S. (2012). Unsaturated zone characterization in soil through transient wetting and drying using GPR joint time–frequency analysis and grayscale images. *Journal of Hydrology*, *452-453*, 1–13. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2012.03.044.

Lampe, B., Holliger, K., & Green, A. G. (2003). A finite-difference time-domain simulation tool for Ground-Penetrating Radar antennas. *Geophysics*, *68*(3), 971–987. https://doi.org/10.1190/1.1581069.

Lazaro Mancilla, O. (1999). *Modelado e inversión de la señal de radar de terreno para las tres propiedades electromagnéticas de suelos y rocas*. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, CICESE].

Leveque, R. (2007). *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations: Steady-State and Time-Dependent Problems*. SIAM.

Liu, H., Lu, H., Lin, J., Han, F., Liu, C., Cui, J., & Spencer, B. (2020). Penetration Properties of Ground Penetrating Radar waves through rebar grids. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, *PP*, 1–5. https://doi.org/10.1109/LGRS.2020.2995670.

Liu, W. K., Li, S., & Park, H. S. (2022). Eighty years of the Finite Element method: Birth, evolution, and future. *Archives of Computational Methods in Engineering*, *29*(6), 4431–4453. https://doi.org/10.1007/s11831-022-09740-9.

Looms, M. C., Jensen, K. H., Binley, A., & Nielsen, L. (2008). Monitoring Unsaturated Flow and Transport Using Cross-Borehole Geophysical Methods. *Vadose Zone Journal*, *7*(1), 227–237. https://doi.org/https://doi.org/10.2136/vzj2006.0129.

Looms, M. C., Klotzsche, A., Van der Kruk, J., Larsen, T. H., Edsen, A., Tuxen, N., Hamburger, N., Keskinen, J., & Nielsen, L. (2018). Mapping sand layers in clayey till using crosshole ground-penetrating radar. *Geophysics*, *83*(1), A21–A26. https://doi.org/10.1190/GEO2017-0297.1.

Madariaga, R. (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*, *66*, 639–666. https://doi.org/10.1785/BSSA0660030639.

Marcus, J. G. & Joseph, B. K. (1998). Nonreflecting Boundary Conditions for Maxwell's equations. *Journal of Computational Physics*, *139*(2), 327–342. https://doi.org/https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5881.

Marshak, S. (2016). *Essentials of Geology*. W.W. Norton.

McGillivray, P. R. & Oldenburg, D. W. (1990). Methods for calculating Fréchet derivativesand sensitivities for the non-linear inverse problem: a comparative study. *Geophysical Prospecting*, *38*(5), 499–524. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1990.tb01859.x.

Mei, K. & Fang, J. (1992). Superabsorption-a method to improve absorbing boundary conditions (electromagnetic waves). *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 40(9), 1001–1010. https://doi.org/10.1109/8.166524.

Meju, M. (1994). *Geophysical Data Analysis: Understanding Inverse Problem Theory and Practice*. Society of Exploration Geophysicists.

Minet, J., Lambot, S., Slob, E., & Vanclooster, M. (2010). Soil surface water content estimation by Full-Waveform GPR signal inversion in the presence of thin layers. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, *48*, 1138–1150. https://doi.org/10.1109/TGRS.2009.2031907.

Mogi, T. (1996). Three-dimensional modeling of magnetotelluric data using finite element method. *Journal of Applied Geophysics*, *35*(2), 185–189. Recent Advances in Exploration Geophysics, https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0926-9851(96)00020-1.

Mur, G. (1981). Absorbing Boundary Conditions for the Finite-Difference approximation of the Time-Domain electromagnetic-field equations. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, *EMC-23*(4), 377–382. https://doi.org/10.1109/TEMC.1981.303970.

Murray, T., Booth, A., & Rippin, D. (2007). Water-content of glacier-ice: Limitations on estimates from velocity analysis of surface Ground-Penetrating Radar surveys. *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, *12*. https://doi.org/10.2113/JEEG12.1.87.

Nocedal, J. & Wright, S. (2000). *Numerical Optimization*. Springer New York.

Olhoeft, G. (1998). Electrical, magnetic, and geometric properties that determine ground penetrating radar performance. In *GPR '98: 7th International Conference on Ground Penetrating Radar*, 177–182, Univ. of Kans., Lawrence.

Olhoeft, G. R. & Strangway, D. W. (1974). Magnetic Relaxation and the Electromagnetic response parameter. *Geophysics*, *39*(3), 302–311. https://doi.org/10.1190/1.1440429.

O'Neill, K. & Fernández, J. P. (2008). Electromagnetic methods for UXO discrimination. *NATO Science for Peace and Security Series B: Physics and Biophysics*, 197–221. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9253-4_10.

Onyebueke, E. O., Manzi, M. S. D., Rapetsoa, M. K., Kgarume, T., Westgate, M., Durrheim, R. J., Pienaar, M., Sihoyiya, M., Mpofu, M., Schoor, M. V., & Kubeka, P. (2024). Integration of in-mine seismic and GPR surveys to gain advanced knowledge of Bushveld Complex orebodies. *Near Surface Geophysics*, *22*(1), 60–74. https://doi.org/https://doi.org/10.1002/nsg.12270.

Oristaglio, M. & Wordthington, M. (1980). Inversion of surface and borehole electromagnetic data for Two-dimensional electrical conductivity models. *Geophysical Prospecting*, *28*(4), 633–657. https://doi.org/https://doi.org/10.1111/j.1365-2478.1980.tb01248.x.

Paige, D. A., Hamran, S.-E., Amundsen, H. E. F., Berger, T., Russell, P., Kakaria, R., Mellon, M. T., Eide, S., Carter, L. M., Casademont, T. M., Nunes, D. C., Shoemaker Thackston, E. S., Plettemeier, D., Dypvik, H., Holm-Alwmark, S., & Horgan, B. H. N. (2024). Ground Penetrating Radar observations of the contact between the western delta and the crater floor of Jezero crater, Mars. *Science Advances*, *10*(4), eadi8339. https://doi.org/doi:10.1126/sciadv.adi8339.

Palacky, G. J. (1987). Resistivity characteristics of geologic targets. In Nabighian, M. N., editor, *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics: Theory. Vol. 1*, (pp. 52–129). Society of Exploration Geophysicists.

Paranis, D. (1963). Principles of Applied Geophysics. *Bulletin of the Seismological Society of America*, *53*(4), 855–856. https://doi.org/10.1785/BSSA0530040855.

Parker, R. L. (1977a). The Fréchet derivative for the one-dimensional electromagnetic induction problem. *Geophysical Journal International*, *49*(2), 543–547. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1977.tb03723.x.

Parker, R. L. (1977b). Understanding Inverse Theory. *Annual Review of Earth and Planetary Sciences*, *5*, 35–64.

Persico, R., Negri, S., Soldovieri, F., & Pettinelli, E. (2012). Pseudo 3D imaging of dielectric and magnetic anomalies from GPR data. *International Journal of Geophysics*, *2012*, 1–5.

Pettinelli, E., Burghignoli, P., Pisani, A. R., Ticconi, F., Galli, A., Vannaroni, G., & Bella, F. (2007). Electromagnetic propagation of GPR signals in Martian subsurface scenarios including material losses and scattering. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, *45*(5), 1271–1281. https://doi.org/10.1109/tgrs.2007.893563.

Pringle, J., Stimpson, I., Wisniewski, K., Heaton, V., Davenward, B., Mirosch, N., Spencer, F., & Jervis, J. (2020). Geophysical monitoring of simulated homicide burials for forensic investigations. *Scientific Reports*, *10*, 7544. https://doi.org/10.1038/s41598-020-64262-3.

Reichard, J. (2020). *Environmental Geology*. McGraw-Hill Education.

Reynolds, J. M. (1997). *An introduction to applied and environmental geophysics*. John Wiley.

Rodi, W. L. (1976). A technique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data. *Geophysical Journal International*, *44*(2), 483–506. https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.1976.tb03669.x.

Sadrmohammadi, N., Kadioglu, S., Rezaei, K., & Honarvar, M. (2024). Deep Ground Penetrating Radar Imaging for the purpose of exploring ore and geological structures in the Calamine Mine, Central Iran. *Rudarsko-geološko-naftni zbornik*, *39*, 1–18. https://doi.org/10.17794/rgn.2024.5.1.

Schultz, J., Collins, M. E., & Falsetti, A. B. (2006). Sequential monitoring of burials containing large pig cadavers using Ground-Penetrating Radar. *Journal of Forensic Sciences*, *51*, 607–616. https://doi.org/10.1111/j.1556-4029.2006.00129.x.

Schultz, J. J. & Martin, M. M. (2012). Monitoring controlled graves representing common burial scenarios with ground penetrating radar. *Journal of Applied Geophysics*, *83*, 74–89. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2012.05.006.

Sears, F. & Mark, Z. (2018). *Fisica general, University physics with modern physics*, (4ta ed.). Aguilar, Madrid, Madrid.

Smith, N. C. & Vozoff, K. (1984). Two-Dimensional DC resistivity inversion for dipole-dipole data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, GE-22.

Strobbia, C. & Cassiani, G. (2007). Multilayer ground-penetrating radar guided waves in shallow soil layers for estimating soil water content. *Geophysics*, *72*, J17. https://doi.org/10.1190/1.2716374.

Sullivan, D. (2013). *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method*. IEEE Microwave Theory Technology Society.

Taflove, A., Hagness, S. C., & Piket-May, M. (2005). *Computational Electromagnetics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Elsevier Inc.

Takahashi, K., Preetz, H., & Igel, J. (2011). Soil properties and performance of landmine detection by metal detector and ground-penetrating radar — Soil characterisation and its verification by a field test. *Journal of Applied Geophysics*, *73*(4), 368–377. https://doi.org/10.1016/j.jappgeo.2011.02.008.

Tarantola, A. (2005). *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Teixeira, F., Chew, W. C., Straka, M., Oristaglio, M., & Wang, T. (1998). Finite-difference time-domain simulation of Ground Penetrating Radar on dispersive, inhomogeneous, and conductive soils. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, *36*, 1928–1937. https://doi.org/10.1109/36.729364.

Telford, W., Geldart, L., & Sheriff, R. (1990). *Applied Geophysics*. Cambridge University Press.

Tsoflias, G. P. & Becker, M. W. (2008). Ground-penetrating-radar response to fracture-fluid salinity: Why lower frequencies are favorable for resolving salinity changes. *GEOPHYSICS*, *73*(5), J25–J30. https://doi.org/10.1190/1.2957893.

Van Dam, R. L., Hendrickx, J. M. H., Cassidy, N. J., North, R. E., Dogan, M., & Borchers, B. (2013). Effects of magnetite on high-frequency ground-penetrating radar. *Geophysics*, *78*(5), H1–H11. https://doi.org/10.1190/geo2012-0266.1.

Verdonck, L., Launaro, A., Vermeulen, F., & Millett, M. (2020). Ground-Penetrating Radar survey at Falerii Novi: a new approach to the study of Roman cities. *Antiquity*, *94*, 705–723. https://doi.org/10.15184/aqy.2020.82.

Versteeg, H. & Malalasekera, W. (2007). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Pearson Education Limited.

Villela y Mendoza, A. (2013). *Análisis y aplicación de las propiedades de polarización de la señal del georadar*. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, BC., CICESE].

Virieux, J. & Madariaga, R. (1982). Dynamic faulting studied by a finite difference method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, *72*(2), 345–369. https://doi.org/10.1785/bssa0720020345.

Von Hippel, A. & Labounsky, A. (1954). *Dielectrics and Waves*. Artech House Microwave Library.

Woodward, J. & Burke, M. (2007). Applications of Ground-Penetrating Radar to glacial and frozen materials. *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, *12*, 69–85. https://doi.org/10.2113/JEEG12.1.69.

Yee, K. (1966). Numerical solution of inital boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, *14*, 302–307. https://doi.org/10.1109/tap.1966.1138693.

Yilmaz, O. & Doherty, S. (2001). *Seismic Data Analysis: Processing, Inversion, and Interpretation of Seismic Data*. Number n. 10, V. 1 in Crisp Fifty-Minute Books. Society of Exploration Geophysicists.

Zettlemoyer, A., Micale, F., & Klier, K. (1975). Adsorption of water on well characterized solid surfaces. In Franks, F., editor, *Water a comprehensive treatise, water in disperse systems*, volume *5*, (pp. 249–292). Plenum Press, New York.

Zhou, D. & Zhu, H. (2021). Application of ground penetrating radar in detecting deeply embedded reinforcing bars in pile foundation. *Advances in Civil Engineering*, *2021*, 1–13. https://doi.org/10.1155/2021/4813415.

Zhou, L., Yu, D., Wang, Z., & Wang, X. (2019). Soil water content estimation using high-frequency Ground Penetrating Radar. *Water*, *11*, 1036. https://doi.org/10.3390/w11051036.

Zienkiewicz, O., Taylor, R., Ruiz, M., & de Navarra, E. (1993). *El Método de Los Elementos Finitos: Volumen 1, Formulación Básica y Problemas Lineales*. El método de los elementos finitos. McGraw-Hill/Interamericana de Espana, S.A.

Anexos

Anexo A. Implementación de las PML.

Para implementar las condiciones PML, comenzamos replanteando las ecuaciones 8 y 9 en el dominio de la frecuencia:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\omega) = -j\omega\mu\mathbf{H}(\omega), \tag{131}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{H}(\omega) = \sigma\mathbf{E}(\omega) + j\omega\varepsilon\mathbf{E}(\omega). \tag{132}$$

Las PML se pueden incluir independientemente en la rejilla como una matriz donde sus diagonales incluyan valores ficticios de ε y σ que corresponden a los valores de esos parámetros solamente para las PML (en las expresiones sucesivas, estos valores se distinguirán de los valores 'reales' de los medios, con una comilla como superíndice). De modo que proponemos un arreglo **S**, que nos permita incluir los valores ficticios en los límites del modelo:

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{S}_y\mathbf{S}_z}{\mathbf{S}_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{S}_x\mathbf{S}_z}{\mathbf{S}_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mathbf{S}_x\mathbf{S}_y}{\mathbf{S}_z} \end{bmatrix}$$

donde:

$$[\mathbf{S}_x] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_x^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_x & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_x \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{S}_y] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_y & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_y^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_y \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{S}_z] = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_z & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_z & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_z^{-1} \end{bmatrix}$$

Para la componente z tenemos:

$$\mathbf{S}_z = \varepsilon_{rz}^{'} + \frac{\sigma_z^{'}}{j\omega\varepsilon_o}, \tag{133}$$

donde $\varepsilon_{rz}^{'}$ y $\sigma_z^{'}$ corresponde a valores ficticios de permitividad y conductividad respectivamente. Además es usual considerar $\varepsilon_r^{'} = 1$ por simplicidad (puede considerarse un valor distinto de uno para intentar aún mejores condiciones de evanescencia de los campos en los bordes:

$$\mathbf{S}_z = 1 + \frac{\sigma_z^{'}}{j\omega\varepsilon_o}. \tag{134}$$

Añadiendo el arreglo $[\mathbf{S}]$ a las ecuaciones 131 y 132 tenemos:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\omega) = -j\omega\mu[\mathbf{S}]\mathbf{H}(\omega) \begin{cases} \frac{\partial E_z(\omega)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(\omega)}{\partial z} = -j\omega\mu_{xx}\frac{S_y S_z}{S_x}H_x(\omega) \\ \frac{\partial E_x(\omega)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\omega)}{\partial x} = -j\omega\mu_{yy}\frac{S_x S_z}{S_y}H_y(\omega) \\ \frac{\partial E_y(\omega)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(\omega)}{\partial y} = -j\omega\mu_{zz}\frac{S_x S_y}{S_z}H_z(\omega) \end{cases} \tag{135}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{H}(\omega) = \sigma\mathbf{E}(\omega) + j\omega\varepsilon[\mathbf{S}]\mathbf{E}(\omega) \begin{cases} \frac{\partial H_z(\omega)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(\omega)}{\partial z} = \sigma_{xx}E_x(\omega) + j\omega\varepsilon_{xx}\frac{S_y S_z}{S_x}E_x(\omega) \\ \frac{\partial H_x(\omega)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(\omega)}{\partial x} = \sigma_{yy}E_y(\omega) + j\omega\varepsilon_{yy}\frac{S_x S_z}{S_y}E_y(\omega) \\ \frac{\partial H_y(\omega)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(\omega)}{\partial y} = \sigma_{zz}E_z(\omega) + j\omega\varepsilon_{zz}\frac{S_x S_y}{S_z}E_z(\omega) \end{cases} \tag{136}$$

Sustituyendo los valores de $\mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y$ y $\mathbf{S}_z$:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\omega) = -j\omega\mu[\mathbf{S}]\mathbf{H}(\omega) \begin{cases} j\omega\left(1+\frac{\sigma_x^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)^{-1}\left(1+\frac{\sigma_y^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)\left(1+\frac{\sigma_z^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)H_x(\omega) = -\frac{1}{\mu_{xx}}\left(C_x^E\right) \\ j\omega\left(1+\frac{\sigma_x^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)\left(1+\frac{\sigma_y^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)^{-1}\left(1+\frac{\sigma_z^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)H_y(\omega) = -\frac{1}{\mu_{yy}}\left(C_y^E\right) \\ j\omega\left(1+\frac{\sigma_x^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)\left(1+\frac{\sigma_y^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)\left(1+\frac{\sigma_z^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)^{-1}H_z(\omega) = -\frac{1}{\mu_{zz}}\left(C_z^E\right) \end{cases} \tag{137}$$

y para la Ley de Ampere:

$$\nabla \times \mathbf{H}(\omega) = \sigma\mathbf{E}(\omega) + j\omega\varepsilon[\mathbf{S}]\mathbf{E}(\omega) \begin{cases} j\omega\left(1+\frac{\sigma_x^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)^{-1}\left(1+\frac{\sigma_y^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)\left(1+\frac{\sigma_z^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)E_x(\omega) \\ = \frac{1}{\varepsilon_{xx}}\left(C_x^H\right) - \frac{\sigma_{xx}E_x(\omega)}{\varepsilon_{xx}} \\ j\omega\left(1+\frac{\sigma_x^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)\left(1+\frac{\sigma_y^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)^{-1}\left(1+\frac{\sigma_z^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)E_y(\omega) \\ = \frac{1}{\varepsilon_{yy}}\left(C_y^H\right) - \frac{\sigma_{yy}E_y(\omega)}{\varepsilon_{yy}} \\ j\omega\left(1+\frac{\sigma_x^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)\left(1+\frac{\sigma_y^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)\left(1+\frac{\sigma_z^{'}}{j\omega\varepsilon_o}\right)^{-1}E_z(\omega) \\ = \frac{1}{\varepsilon_{zz}}\left(C_z^H\right) - \frac{\sigma_{zz}E_z(\omega)}{\varepsilon_{zz}} \end{cases} \tag{138}$$

donde

$$C_x^E(\omega) = \frac{\partial E_z(\omega)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(\omega)}{\partial z}, \tag{139}$$

$$C_y^E(\omega) = \frac{\partial E_x(\omega)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\omega)}{\partial x}, \tag{140}$$

$$C_z^E(\omega) = \frac{\partial E_x(\omega)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(\omega)}{\partial x}, \tag{141}$$

$$C_x^H(\omega) = \frac{\partial H_z(\omega)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(\omega)}{\partial z}, \tag{142}$$

$$C_y^H(\omega) = \frac{\partial H_x(\omega)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(\omega)}{\partial x}, \tag{143}$$

$$C_z^H(\omega) = \frac{\partial H_y(\omega)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(\omega)}{\partial y}. \tag{144}$$

Expandiendo las expresiones anteriores al multiplicar y re-acomodar los términos, tenemos para la componente x del grupo de ecuaciones 137 y 138:

$$j\omega H_x(\omega) + \frac{\sigma_y^{'} + \sigma_z^{'}}{\varepsilon_o} H_x(\omega) + \frac{1}{j\omega}\frac{\sigma_y^{'}\sigma_z^{'}}{\varepsilon_o^2} H_x(\omega) = -\frac{C_x^E(\omega)}{\mu_{xx}} - \frac{1}{j\omega}\frac{\sigma_x^{'}}{\mu_{xx}\varepsilon_o} C_x^E(\omega), \tag{145}$$

y

$$j\omega E_x(\omega) + \frac{\sigma_y^{'} + \sigma_z^{'}}{\varepsilon_o} E_x(\omega) + \frac{1}{j\omega}\frac{\sigma_y^{'}\sigma_z^{'}}{\varepsilon_o^2} E_x(\omega) = \frac{C_x^H(\omega)}{\varepsilon_{xx}} + \frac{1}{j\omega}\frac{\sigma_x^{'}}{\varepsilon_{xx}\varepsilon_o} C_x^H(\omega) - \frac{\sigma_{xx} E_x(\omega)}{\varepsilon_{xx}} - \frac{\sigma_{xx}\sigma_x^{'}}{j\omega\varepsilon_{xx}\varepsilon_o} E_x(\omega). \tag{146}$$

Las ecuaciones 145 y 146 están definidas en el dominio de la frecuencia (buscando incluir las condiciones PML). Para aplicarlos a nuestro modelado, ahora las trasladamos al dominio del tiempo, de modo que,para la ecuación 145, tenemos las siguientes correspondencia entre el dominio de la frecuencia, y el

del tiempo:

$$
\begin{aligned}
j\omega H_x(\omega) &\Leftrightarrow \frac{\delta H_x(\omega)}{dt} \\
\frac{\sigma_y^{'}+\sigma_z^{'}}{\varepsilon_o} H_x(\omega) &\Leftrightarrow \frac{\sigma_y^{'}+\sigma_z^{'}}{\varepsilon_o} H_x(t) \\
\frac{1}{j\omega}\frac{\sigma_y^{'}\sigma_z^{'}}{\varepsilon_o^2} H_x(\omega) &\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{t} \frac{\sigma_y^{'}\sigma_z^{'}}{\varepsilon_o^2} H_x(\tau)d\tau \\
-\frac{C_x^E(\omega)}{\mu_{xx}} &\Leftrightarrow -\frac{1}{\mu_{xx}} C_x^E(t) \\
-\frac{1}{j\omega}\frac{\sigma_x^{'}}{\mu_{xx}\varepsilon_o} C_x^E(\omega) &\Leftrightarrow -\int_{-\infty}^{t} \frac{\sigma_x^{'}}{\mu_{xx}\varepsilon_o} C_x^E(\tau)d\tau
\end{aligned}
$$

De manera análoga, podemos encontrar las relaciones para las componentes del campo eléctrico. Considerando las expresiones anteriores, las ecuaciones en el dominio del tiempo para la componente x (en el entendido de que el desarrollo es similar para las otras componentes), para la ley de Faraday y Ampere son:

$$
\frac{\partial H_x(t)}{\partial t} + \frac{\sigma_y^{'}+\sigma_z^{'}}{\varepsilon_o} H_x(t) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\sigma_y^{'}\sigma_z^{'}}{\varepsilon_o^2} H_x(\tau)d\tau = -\frac{1}{\mu_{xx}} C_x^E(t) - \int_{-\infty}^{t} \frac{\sigma_x^{'}}{\mu_{xx}\varepsilon_o} C_x^E(\tau)d\tau, \qquad (147)
$$

y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_x(t)}{\partial t} + \frac{\sigma_y^{'}+\sigma_z^{'}}{\varepsilon_o} E_x(t) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\sigma_y^{'}\sigma_z^{'}}{\varepsilon_o^2} E_x(\tau)d\tau = & \\
& \frac{1}{\varepsilon_{xx}} C_x^H(t) + \int_{-\infty}^{t} \frac{\sigma_x^{'}}{\varepsilon_{xx}\varepsilon_o} C_x^H(\tau)d\tau \qquad (148) \\
& - \frac{\sigma_{xx}}{\varepsilon_{xx}} E_x(t) - \int_{-\infty}^{t} \frac{\sigma_{xx}\sigma_x^{'}}{\varepsilon_{xx}\varepsilon_o} E_x(\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

Una vez que tenemos las expresiones en el dominio del tiempo, discretizamos cada uno de los términos de las ecuaciones 147y 148. Retomando la ecuación 147, tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial H_x(t)}{\partial t} &\cong \frac{H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} - H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k}}{\Delta t} \\
\frac{\sigma_y^{'} + \sigma_z^{'}}{\varepsilon_o} H_x(t) &\cong \frac{\sigma_y^{'} + \sigma_z^{'}}{\varepsilon_o} \frac{H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} + H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k}}{2} \\
\int_{-\infty}^{t} \frac{\sigma_y^{'}\sigma_z^{'}}{\varepsilon_o^2} H_x(\tau)d\tau &\cong \frac{\sigma_y^{'}\sigma_z^{'}\Delta t}{\varepsilon_o^2} \left(\frac{H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} + H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k}}{4} + \sum_{T=\Delta t/2}^{t-\Delta t/2} H_x|_T^{i,j,k} \right) \\
-\frac{1}{\mu_{xx}} C_x^E(t) &\cong -\frac{1}{\mu_{xx}|^{i,j,k}} C_x^E|_t^{i,j,k} \\
-\int_{-\infty}^{t} \frac{\sigma_x^{'}}{\mu_{xx}\varepsilon_o} C_x^E(\tau)d\tau &\cong -\frac{\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\mu_{xx}|^{i,j,k}\varepsilon_o} \sum_{T=0}^{t} C_x^E|_T^{i,j,k}
\end{aligned}
$$

Reescribimos entonces, la ecuación 147 respecto a los términos anteriores, para el dominio del tiempo:

$$
\begin{aligned}
&\frac{H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} - H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k}}{\Delta t} + \frac{\sigma_y^{'} + \sigma_z^{'}}{\varepsilon_o} \frac{H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} + H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k}}{2} \\
&\qquad + \frac{\sigma_y^{'}\sigma_z^{'}\Delta t}{\varepsilon_o^2} \left(\frac{H_x|_{t+\Delta t/2}^{i,j,k} + H_x|_{t-\Delta t/2}^{i,j,k}}{4} + \sum_{T=\Delta t/2}^{t-\Delta t/2} H_x|_T^{i,j,k} \right) \\
&\qquad = -\frac{1}{\mu_{xx}|^{i,j,k}} C_x^E|_t^{i,j,k} - \frac{\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\mu_{xx}|^{i,j,k}\varepsilon_o} \sum_{T=0}^{t} C_x^E|_T^{i,j,k},
\end{aligned}
\tag{149}
$$

De manera análoga desarrollamos para la ley de Ampere,

$$
\begin{aligned}
&\frac{E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k} - E_x|_t^{i,j,k}}{\Delta t} + \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k} + \sigma_z^{'}|^{i,j,k}}{\varepsilon_o} \frac{E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k} + E_x|_t^{i,j,k}}{2} \\
&+ \frac{\sigma_y^{'}|^{i,j,k}\sigma_z^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o^2} \left(\frac{E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k} + E_x|_t^{i,j,k}}{4} + \sum_{T=0}^{t} E_x|_T^{i,j,k} \right) \\
&\qquad = \frac{1}{\varepsilon_{xx}|^{i,j,k}} C_x^H|_t^{i,j,k} - \frac{\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o\varepsilon_{xx}|^{i,j,k}} \sum_{T=\Delta t/2}^{t-\Delta t/2} C_x^H|_T^{i,j,k} \\
&\qquad\qquad - \frac{\sigma_{xx}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_{xx}|^{i,j,k}} \frac{E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k} + E_x|_t^{i,j,k}}{2} \\
&- \frac{\sigma_{xx}|^{i,j,k}\sigma_x^{'}|^{i,j,k}\Delta t}{\varepsilon_o\varepsilon_{xx}|^{i,j,k}} \left(\frac{E_x|_{t+\Delta t}^{i,j,k} + E_x|_t^{i,j,k}}{4} + \sum_{T=0}^{t} E_x|_T^{i,j,k} \right),
\end{aligned}
\tag{150}
$$

que constituyen la versión discreta de las leyes de Ampere y Faraday para nuestra formulación.

Anexo B. Desarrollo de las ecuaciones de campo adjunto.

Para resolver la ecuación 109, desarrollamos por separado los términos. Comenzamos por re ordenar los términos agrupando las variaciones en los parámetros y las variaciones en los campos para λ y ξ por separado:

$$\delta\phi_E = \int_0^T \int_\Omega \sum_j \left[\boldsymbol{E}_j^{obs} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j, t-t_j) \cdot \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \{-\delta\left[\sigma(\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \delta\left[\varepsilon(\boldsymbol{r})\right]\partial_t \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \delta\boldsymbol{s}\} d^3r dt$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \{\nabla \times \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \sigma(\boldsymbol{r})\delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) - \varepsilon(\boldsymbol{r})\partial_t\delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\} d^3r dt$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \cdot [\nabla \times \delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \mu(\boldsymbol{r})\partial_t\delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)] d^3r dt$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \cdot [\delta\mu(\boldsymbol{r})\partial_t\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)] d^3r dt$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \delta\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt$$
$$- \int_0^T \int_\Omega \delta\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt.$$

La primera línea de la ecuación 109, que se refiere al desajuste y la segunda línea, relacionada a las variaciones en los parámetros se conservan como están, de modo que retomamos los términos siguientes:

$$-\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot [\nabla \times \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)] d^3r dt$$

Si de acuerdo a las identidades:

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B})$$

y

$$\boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{B} - \nabla \cdot (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$$

tenemos:

$$-\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot [\nabla \times \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)] d^3r dt = \int_0^T \int_\Omega \{[\nabla \times \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t)] \cdot \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) - \nabla \cdot [\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \times \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)]\} d^3r dt.$$

Si consideramos el teorema de la divergencia:

$$\int_v \nabla \cdot \boldsymbol{F} dv = \int_s \boldsymbol{F} \cdot \hat{n} ds,$$

donde $\hat{n}$ es el vector normal unitario a la superficie s, podemos reescribir:

$$-\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot [\nabla \times \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)] d^3r dt =$$
$$\int_0^T \int_\Omega - [\nabla \times \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t)] \cdot \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt + \int_s \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \times \delta\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \cdot \hat{n} d^2r dt.$$

Los términos $\overline{F} \cdot \hat{n} = [\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \times \delta \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)] \cdot \hat{n} = 0$, por lo que:

$$-\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot [\nabla \times \delta \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)]\, d^3r dt = -\int_0^T \int_\Omega [\nabla \times \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t)] \cdot \delta \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt.$$

El término:

$$-\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot -\sigma(\boldsymbol{r}) \delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{r},t) d^3r dt,$$

se conserva como está. Ahora, si operamos sobre:

$$-\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot [-\varepsilon(\boldsymbol{r}) \partial_t \delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\, d^3r dt,$$

y cambiamos los términos de integración e integramos por partes:

$$-\int_\Omega \int_0^T \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot [\varepsilon(\boldsymbol{r}) \partial_t \delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\, dt d^3r$$
$$= -\int_\Omega [\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \varepsilon(\boldsymbol{r}) \delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]_{t=0}^T d^3r + \int_\Omega \int_0^T \partial_t \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{r},t) \cdot \varepsilon(\boldsymbol{r}) \delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) dt d^3r.$$

El siguiente término se obtiene de manera semejante al ejemplo , de modo que:

$$-\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \cdot [\nabla \times \delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)]\, d^3r dt = -\int_0^T \int_\Omega [\nabla \times \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t)] \cdot \delta \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt;$$

continuamos con:

$$-\int_0^T \int_\Omega \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \cdot \mu(\overline{x}) \partial_t \delta \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) d^3r dt,$$

si en la expresión anterior, cambiamos los términos de integración y resolvemos la integral por partes:

$$-\int_\Omega \int_0^T \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \cdot \mu(\boldsymbol{r}) \partial_t \delta \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) dt d^3r =$$
$$+\int_\Omega [\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \mu(\boldsymbol{r}) \delta \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)]_{t=0}^T d^3r - \int_\Omega \int_0^T \partial_t \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{r},t) \cdot \mu(\boldsymbol{r}) \delta \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) dt d^3r.$$

Estas ecuaciones constituyen el desarrollo paso a paso de las ecuaciones para la estimación de las derivadas aplicando el esquema de campo adjunto.