

La investigación reportada en esta tesis es parte de los programas de investigación del CICESE (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California).

La investigación fue financiada por el SECIHTI (Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación).

Todo el material contenido en esta tesis está protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México). El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo o titular de los Derechos de Autor.

CICESE © 2025, Todos los Derechos Reservados, CICESE

Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California



Maestría en Ciencias en Oceanografía Física

Análisis del cambio de la forma del espectro del oleaje por efecto de la transferencia de energía debida a interacciones no lineales entre cuádrupletas

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Presenta:

César Omar Luna Miyaki

Ensenada, Baja California, México

2025

Tesis defendida por

César Omar Luna Miyaki

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Francisco Javier Ocampo Torres

Codirector de tesis

Dr. Alejandro Francisco Parés Sierra

Codirector de tesis

Dr. José Pedro Osuna Cañedo

Dr. Pedro Negrete Regagnon



Dra. María Tereza Cavazos Pérez

Coordinadora del Posgrado en Oceanografía Física

Dra. Ana Denise Re Araujo

Directora de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta César Omar Luna Miyaki como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Oceanografía Física.

Análisis del cambio de la forma del espectro del oleaje por efecto de la transferencia de energía debida a interacciones no lineales entre cuádrupletas

Resumen aprobado por:

Dr. Francisco Javier Ocampo Torres

Codirector de tesis

Dr. Alejandro Francisco Parés Sierra

Codirector de tesis

Los modelos numéricos de simulación del oleaje, como WAM, WaveWatch III y SWAN, son herramientas utilizadas para estudiar el oleaje y elaborar pronósticos desde escalas locales hasta globales. Un componente crítico en estos modelos es el término fuente asociado a la transferencia de energía por interacciones no lineales entre cuádrupletas (S_{nl4}), cuya implementación operativa requiere el uso del esquema de Interacción Discreta Aproximada (DIA). Sin embargo, el esquema DIA presenta limitaciones para representar con detalle la transferencia de energía. En esta investigación se analizan las diferencias en el comportamiento de S_{nl4} al calcularlo mediante el esquema exacto de Webb–Resio–Tracy (WRT), en comparación con el esquema aproximado DIA. El análisis se enfoca en la transferencia de energía que ocurre en espectros bimodales del oleaje. A partir de observaciones en la Isla Todos Santos, se identificaron y analizaron las interacciones de espectros bimodales con dos sistemas de Swell, no obstante, la intensidad de la interacción no fue relevante. Por otro lado, a partir de observaciones en el Golfo de Tehuantepec, se identificaron espectros bimodales con sistemas Swell y Wind Sea que se propagan en direcciones opuestas. Estas condiciones fueron reproducidas mediante espectros direccionales sintéticos, los cuales se emplearon como base para calcular S_{nl4} mediante los esquemas WRT y DIA. Los resultados estimados mediante el esquema DIA sugieren que la interacción entre ambos sistemas es débil o nula, mientras que con los obtenidos con WRT muestran una modificación de la transferencia de energía en la región asociada al sistema Swell. Para evaluar el efecto de la bimodalidad, se define ΔS_{nl4} , la diferencia entre S_{nl4} calculado a partir del espectro bimodal y la suma de S_{nl4} de sus componentes unimodales. En un análisis más detallado, se evalúa ΔS_{nl4} en sectores direccionales, en donde se encuentra que el sistema Swell transfiere energía hacia regiones con frecuencias muy diferentes a f_p . Los resultados indican que, al utilizar el esquema DIA, el efecto de la bimodalidad espectral es prácticamente inexistente, mientras que cuando se utiliza WRT se revela una interacción importante, incluso cuando los sistemas de oleaje se propagan en direcciones opuestas.

Palabras clave: Oleaje, S_{nl4} , Transferencia de energía, Espectro direccional, WRT, DIA

Abstract of the thesis presented by César Omar Luna Miyaki as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Physical Oceanography.

Analysis of the change in the shape of the wave spectrum due to nonlinear energy transfer caused by interactions between quadruplets

Abstract approved by:

PhD Francisco Javier Ocampo Torres

Thesis Co-Director

PhD Alejandro Francisco Parés Sierra

Thesis Co-Director

Numerical wave simulation models, such as WAM, WaveWatch III, and SWAN, are widely used tools for studying waves and making forecasts from local to global scales. A critical component in these models is the source term associated with energy transfer by nonlinear interactions between quadruplets (S_{nl4}), whose operational implementation requires the use of the Discrete Interaction Approximation (DIA) scheme. However, it is well known that the DIA scheme has limitations in accurately representing energy transfer. This research analyzes the differences in the behavior of S_{nl4} when calculated using the exact Webb–Resio–Tracy (WRT) method, compared to the approximate DIA scheme. The analysis focuses on the energy transfer that occurs in bimodal wave spectra. Based on observations on Isla Todos Santos, the interactions of bimodal spectra with Swell and Swell systems were identified and analyzed; however, the intensity of the interaction was not particularly relevant. On the other hand, based on observations in the Golfo de Tehuantepec, bimodal spectra were identified with Swell and Wind Sea systems that propagate in opposite directions. These conditions were reproduced using synthetic directional spectra, which were used as the basis for calculating S_{nl4} using the WRT and DIA schemes. The results estimated using the DIA scheme suggest that the interaction between the two systems is weak or nil, while WRT shows a consistent modification in energy transfer within the region associated with the Swell System. To evaluate the effect of bimodality in greater detail, the parameter ΔS_{nl4} is defined as the difference between S_{nl4} calculated for the bimodal system and the sum of S_{nl4} of its unimodal components. In addition, a more specific analysis of the effect of bimodality is performed by evaluating ΔS_{nl4} using directional sectors, where it is found that the Swell system transfers energy in frequency regions far from the f_p region. The results indicate that, under the DIA scheme, the effect of bimodality is practically non-existent, while WRT reveals a significant interaction, even when the components propagate in opposite directions.

Keywords: Wind waves, S_{nl4} , Nonlinear energy transfer, Directional spectrum, WRT, DIA

Dedicatoria

A mis padres, por su constante apoyo y consejos en cada uno de los proyectos que aventuradamente he emprendido.

Al buen *Apangus*, a quien imagino recorriendo todos los rincones de lo que fue su religión: el océano.

Agradecimientos

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California (CICESE), por permitirme realizar el posgrado.

A la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI), por brindarme el apoyo económico que me permitió dedicarme de tiempo completo al desarrollo de esta investigación.

Al Departamento de Oceanografía Física, por brindarme un espacio idóneo de aprendizaje a través de las valiosas personas que lo conforman.

A mi director de tesis, Dr. Paco Ocampo Torres, por permitirme explorar con libertad el interesante campo de las olas, y por su paciencia, guía y apoyo, que me han ayudado a crecer y mejorar a lo largo de estos años. Muchas gracias por todo.

A mi director de tesis, Dr. Alejandro Francisco Parés Sierra, por sus acertados comentarios y motivación brindada a lo largo de esta investigación.

A mis sinodales, Dr. Pedro Osuna Cañedo, por sus múltiples comentarios, sugerencias e ideas que contribuyeron a la mejora de este trabajo y a mi comprensión del tema; y al Dr. Pedro Negrete Regagnon, quien, con sus observaciones, me permitió obtener distintos puntos de vista sobre el trabajo.

Al Grupo de Oleaje: Paco, Pedro, Pancho, Rodney, Ixe, Carlos, Laurita, Chiapas y todos aquellos que forman parte del mismo. Sin duda, todo el apoyo y la compañía brindados, ya fuera en un cubo, en el laboratorio o en las juntas de los jueves, han contribuido a mi formación, por lo que les estoy profundamente agradecido.

A Marcela Marisol, por ayudarme a cambiar mi estilo de vida a través de pequeñas e insistentes lecciones cotidianas del día a día, gracias por el tiempo compartido.

A mis compañeros de maestría: Frank, Cons, Miri (y Ernesto), Grethel y Lucy, quienes hicieron esta aventura académica más divertida y llevadera. Les agradezco infinitamente su compañía y amistad.

A las viejas y nuevas amistades que he encontrado a lo largo de este camino. Siempre es un gusto compartir historias con el mundo.

Finalmente, agradezco a todos esos eventos inesperados, aleatorios y absolutamente 'No lineales' que hicieron de este viaje una experiencia caótica, llena de sorpresas y, sobre todo, divertida, lo que hizo que esta travesía realmente valiera la pena.

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	xvi

Capítulo 1. Introducción

1.1. Objetivos	4
1.1.1. Objetivo general	4
1.1.2. Objetivos específicos	4
1.2. Alcances y limitaciones	4
1.2.1. Alcances	5
1.2.2. Limitaciones	5

Capítulo 2. Antecedentes

2.1. Cálculo de S_{nl4}	7
2.1.1. Esquemas para el cálculo de S_{nl4}	9
2.1.1.1. EXACT-NL	9
2.1.1.2. DIA	11
2.1.1.3. WRT	13
2.2. S_{nl4} en espectros bimodales	14

Capítulo 3. Métodos

3.1. Casos experimentales	17
3.1.1. Golfo de Tehuantepec	17
3.1.2. Isla Todos Santos	19
3.2. Generación de espectros direccionales bimodales	20
3.2.1. Espectro JONSWAP	21
3.2.2. Función de distribución direccional	22
3.2.3. Ancho direccional	24
3.3. Espectros bimodales	26
3.4. Cálculo y análisis de S_{nl4}	28
3.4.1. Definición del dominio de frecuencia	28
3.4.2. Error numérico en el cálculo de S_{nl4}	29
3.4.2.1. Error normalizado	31
3.4.3. Parámetros utilizados en el cálculo de S_{nl4}	34
3.4.4. Análisis de la transferencia de energía	34
3.4.5. Efecto debido a la bimodalidad	34
3.4.6. Análisis de la transferencia de energía en sectores direccionales	35

Capítulo 4. Resultados y discusión

4.1.	Golfo de Tehuantepec	37
4.1.1.	Espectros direccionales	37
4.1.1.1.	Espectros direccionales unimodales	37
4.1.1.2.	Espectros direccionales bimodales	40
4.1.2.	Estructura de S_{nl4} en el dominio frecuencia-dirección	43
4.1.2.1.	Estructura de $S_{nl4}(f, \theta)$ de casos de espectros direccionales unimodales	43
4.1.2.2.	Estructura de $S_{nl4}(f, \theta)$ de casos de espectros direccionales bimodales	52
4.1.3.	Estructura de S_{nl4} en el dominio de frecuencia	59
4.1.4.	Efecto de la bimodalidad	63
4.1.4.1.	Estructura de ΔS_{nl4} en el dominio de frecuencia-dirección	63
4.1.4.2.	Estructura de ΔS_{nl4} en el dominio de frecuencia	70
4.1.4.3.	Estructura de ΔS_{nl4} en el dominio de frecuencia acotado por σ_θ	73
4.1.5.	Análisis de la transferencia total	76
4.2.	Isla Todos Santos	79
4.2.1.	Espectros direccionales unimodales y bimodales	79
4.2.2.	Estructura de S_{nl4} en el dominio frecuencia-dirección	81
4.2.3.	Efecto de la bimodalidad	83
4.3.	Modelo conceptual	85

Capítulo 5. Conclusiones

Literatura citada	90
-----------------------------	----

Lista de figuras

Figura

Página

1. $S_{nl4}(f)$ y $E(f)$. Podemos observar la propiedad de transferencia de energía (línea continua) al notar que existe una región de la cual se transfiere (valores negativos de S_{nl4}) y otras hacia las cuales se transfiere energía (valores positivos S_{nl4}), normalmente, la transferencia es mayor hacia frecuencias menores que f_p 3
2. Espectros direccionales (Swell en el panel superior y Wind Sea en el panel inferior de la columna I) y su correspondiente estructura de S_{nl4} (columna II). Las áreas rojizas en el espectro direccional (I) representan mayor concentración de energía. Por otro lado, en la estructura asociada de S_{nl4} (II), los colores rojizos representan valores de transferencia positiva y los colores azules valores de transferencia negativa. Al transferir la energía hacia distintas frecuencias y direcciones, S_{nl4} tiene un amplio impacto en la direccionalidad del espectro (Young y Van Vledder, 1993). 3
3. Esquemas de colisión (interacciones) entre componentes espectrales. En cada caso, el vector saliente representa la componente que recibe energía, mientras que los vectores entrantes corresponden a las componentes que ceden energía. La componente con signo negativo, de acuerdo con las condiciones de resonancia, se indica mediante una barra superpuesta, figura tomada de Hasselmann y Hasselmann (1985). 10
4. Ejemplo de componentes que satisfacen el criterio $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ y $\mathbf{k}_3 \neq \mathbf{k}_4$. Los óvalos representan los espacios geométricos en donde se satisfacen las condiciones de resonancia y están asociadas a un valor γ , particularmente, cuando $\gamma = \sqrt{2}$ se obtiene la curva representativa de la figura del ocho de Phillips (1960). En este caso en particular, el vector $\mathbf{k}_3$ forma un ángulo de $\theta_3 = 11.5^\circ$ con respecto a $\mathbf{k}$, mientras que $\mathbf{k}_4$ forma un ángulo de $\theta_4 = -33.6^\circ$. Los vectores sin etiqueta corresponden a las componentes simétricas de $\mathbf{k}_3$ y $\mathbf{k}_4$, que también cumplen las condiciones de resonancia (Hasselmann et al., 1985; Young y Van Vledder, 1993). 13
5. Región del Golfo de Tehuantepec 18
6. Región Isla Todos Santos 19
7. Relación entre σ_θ y el coeficiente β utilizado en el cálculo de $D(f, \theta)$ 25
8. Distribución direccional de Donelan et al. (1985) en función de la dirección de propagación del oleaje para distintos valores de σ_θ . Se observa que al variar σ_θ cambia el rango angular en el que se concentra la energía. Una distribución direccional más acotada, asociada a un valor bajo de σ_θ (línea negra), indica que la energía se propaga en un rango estrecho de direcciones (algo típico en el régimen Swell). Por el contrario, una distribución más amplia de $D(f, \theta)$, con un valor alto de σ_θ (línea cian), muestra que la energía se propaga en un rango más amplio de direcciones (algo común en el régimen Wind Sea). 25
9. Error numérico en el cálculo de S_{nl4} asociado a diferentes valores de N_f para espectros unimodales Wind Sea y Swell (líneas azul y roja, respectivamente), así como para un espectro bimodal (línea cian). 30
10. Error numérico en el cálculo de S_{nl4} asociado a diferentes valores de $C0$ para espectros unimodales Wind Sea y Swell (líneas azul y roja, respectivamente), así como para un espectro bimodal (línea cian). 31

11. Error numérico normalizado (ϵ) en la estimación de S_{nl4} al variar N_f en espectros unimodales Wind Sea y Swell (líneas azul y roja, respectivamente) y en un espectro bimodal (línea cían).	32
12. Error numérico normalizado (ϵ) en la estimación de S_{nl4} al variar $C0$ en espectros unimodales Wind Sea y Swell (líneas azul y roja, respectivamente) y en un espectro bimodal (línea cían).	33
13. Espectros direccionales unimodales que representan un sistema Wind Sea con una dirección de propagación $\theta_m = 180^\circ$ y un ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C1/30). El panel izquierdo describe el espectro utilizado como base para la evaluación con el esquema WRT, mientras que el panel derecho corresponde al espectro base del esquema DIA. Los contornos describen la densidad de energía espectral y aumentan cada $\frac{E(f,\theta)_{max}}{9}$ unidades de densidad de energía espectral.	38
14. Espectros direccionales unimodales del sistema Wind Sea con $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C1/40).	39
15. Espectros direccionales unimodales del sistema Wind Sea con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C1/50).	39
16. Espectros direccionales unimodales del sistema Wind Sea con $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C1/60).	39
17. Espectros direccionales unimodales que representan un sistema Swell con una dirección de propagación $\theta_m = 0^\circ$ y un ancho direccional $\sigma_\theta = 20^\circ$ (C0/20). El panel izquierdo describe el espectro utilizado como base para la evaluación con el esquema WRT, mientras que el panel derecho corresponde al espectro base del esquema DIA. Los contornos describen la densidad de energía espectral y aumentan cada $\frac{E(f,\theta)_{max}}{9}$ unidades de densidad de energía espectral.	40
18. Espectros direccionales bimodales, en donde se presenta un sistema Wind Sea con dirección de propagación $\theta_m = 180^\circ$ y ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$ y un sistema Swell con $\theta_m = 0^\circ$ y $\sigma_\theta = 20^\circ$ (C1/30BIM). El panel izquierdo describe el espectro utilizado como base para la evaluación con el esquema WRT, mientras que el panel derecho corresponde al espectro base del esquema DIA. Los contornos describen la densidad de energía espectral y aumentan cada $\frac{E(f,\theta)_{max}}{9}$ unidades de densidad de energía espectral.	41
19. Espectros direccionales bimodales, en donde el sistema Wind Sea describe $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C1/40BIM).	42
20. Espectros direccionales bimodales, en donde el sistema Wind Sea describe $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C1/50BIM).	42
21. Espectros direccionales bimodales, en donde el sistema Wind Sea describe $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C1/60BIM).	42

22. $S_{nl4}(f, \theta)$ de espectros direccionales unimodales que representan un sistema Wind sea con una dirección de propagación $\theta_m = 180^\circ$. Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Los casos con ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C1/30) se presentan en los paneles a y b, y aquellos con $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C1/40), en los paneles c y d. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{nl4} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cíen), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas). 44
23. Similar a lo descrito en la Fig. 22 del caso 1 Wind Sea, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C1/50) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C1/60) en los paneles c y d. 45
24. Similar a lo descrito en la Fig. 22 pero ahora del caso 2 Wind Sea, con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C2/30) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C2/40) en los paneles c y d. 46
25. Similar a lo descrito en la Fig. 22 pero ahora del caso 2 Wind Sea, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C2/50) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C2/60) en los paneles c y d. 47
26. Similar a lo descrito en la Fig. 22 pero ahora del caso 3 Wind Sea, con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C3/30) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C3/40) en los paneles c y d. 48
27. Similar a lo descrito en la Fig. 22 pero ahora del caso 3 Wind Sea, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C3/50) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C3/60) en los paneles c y d. 49
28. $S_{nl4}(f, \theta)$ de espectros direccionales unimodales que representan un sistema Swell (caso C0/20) con una dirección de propagación $\theta_m = 0^\circ$. El panel izquierdo muestra los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que el panel derecho corresponde a las estimaciones realizadas con el esquema DIA. Ambos casos se asociaron a un ancho direccional $\sigma_\theta = 20^\circ$. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{nl4} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cíen), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas). 51
29. $S_{nl4}(f, \theta)$ de espectros bimodales con un sistema Wind sea con dirección de propagación $\theta_m = 180^\circ$ y un Swell con dirección de propagación $\theta_m = 0^\circ$. Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Los casos con ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C1/30BIM) se presentan en los paneles a y b, y aquellos con $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C1/40BIM), en los paneles c y d. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{nl4} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cíen), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas). 53
30. Similar a lo descrito en la Fig. 29 del caso 1 bimodal, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C1/50BIM) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C1/60BIM) en los paneles c y d. 54

31.	Similar a lo descrito en la Fig. 29 pero ahora del caso 2 bimodal, con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C2/30BIM) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C2/40BIM) en los paneles c y d.	55
32.	Similar a lo descrito en la Fig. 29 pero ahora del caso 2 bimodal, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C2/50BIM) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C2/60BIM) en los paneles c y d.	56
33.	Similar a lo descrito en la Fig. 29 pero ahora del caso 3 bimodal, con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C3/30BIM) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C3/40BIM) en los paneles c y d.	57
34.	Similar a lo descrito en la Fig. 29 pero ahora del caso 3 bimodal, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C3/50BIM) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C3/60BIM) en los paneles c y d.	58
35.	$S_{nl4f}(f)$ asociado a los espectros unimodales del caso 1 Wind Sea (C1/30, C1/40, C1/50 y C1/60), calculado mediante los esquemas WRT (panel izquierdo) y DIA (panel derecho). Se muestran las estimaciones del sistema Wind Sea con anchos direccionales $\sigma_\theta = 30^\circ$ (línea azul), 40° (línea roja), 50° (línea verde) y 60° (línea magenta), así como del sistema Swell (C0/20) con $\sigma_\theta = 20^\circ$ (línea negra) escalado con $e^{2.5}$. Los espectros $S(f)_{Ws}$ y $S(f)_{Sw}$, escalados por factores $e^{-3.7}$ y $e^{2.5}$ respectivamente (líneas cían continua y punteada), se incluyen como referencia.	59
36.	$S_{nl4f}(f)$ asociado a los espectros bimodales del caso 1 bimodal (C1/30BIM, C1/40BIM, C1/50BIM y C1/60BIM), calculado mediante los esquemas WRT (panel izquierdo) y DIA (panel derecho). Se muestran las estimaciones del espectro bimodal, aunque con variaciones del sistema Wind Sea con anchos direccionales $\sigma_\theta = 30^\circ$ (línea azul), 40° (línea roja), 50° (línea verde) y 60° (línea magenta). También se incluye como referencia $S(f)_{Bim}$, escalado por un factor de $e^{-3.7}$ (línea cían continua y punteada).	61
37.	Similar a lo descrito en la Fig. 35 pero ahora del caso 2 Wind Sea.	61
38.	Similar a lo descrito en la Fig. 36 pero ahora del caso 2 bimodal.	62
39.	Similar a lo descrito en la Fig. 35 pero ahora del caso 3 Wind Sea.	62
40.	Similar a lo descrito en la Fig. 36 pero ahora del caso 3 bimodal.	63
41.	ΔS_{nl4} con un sistema Wind sea con dirección de propagación $\theta_m = 180^\circ$ y un Swell con dirección de propagación $\theta_m = 0^\circ$. Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Los casos con ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C1/30Delta) se presentan en los paneles a y b, y aquellos con $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C1/40Delta), en los paneles c y d. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{nl4} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cían), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas).	64
42.	Similar a lo descrito en la Fig. 41 del caso 1 Delta, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C1/50Delta) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C1/60Delta) en los paneles c y d).	65
43.	Similar a lo descrito en la Fig. 41 pero ahora del caso 2 Delta, con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C2/30Delta) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C2/40Delta) en los paneles c y d.	66

44.	Similar a lo descrito en la Fig. 41 pero ahora del caso 2 Delta, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C2/50Delta) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C2/60Delta) en los paneles c y d.	67
45.	Similar a lo descrito en la Fig. 41 pero ahora del caso 3 Delta, con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C3/30Delta) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C3/40Delta) en los paneles c y d.	68
46.	Similar a lo descrito en la Fig. 41 pero ahora del caso 3 Delta, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C3/50Delta) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C3/60Delta) en los paneles c y d.	69
47.	$\Delta S_{nl4f}(f)$ asociado al caso 1 Delta (C1/30Delta, C1/40Delta, C1/50Delta y C1/60Delta), calculado mediante los esquemas WRT (panel izquierdo) y DIA (panel derecho). Se muestran las estimaciones del efecto de la bimodalidad, aunque con variaciones del sistema Wind Sea con anchos direccionales $\sigma_\theta = 30^\circ$ (línea azul), 40° (línea roja), 50° (línea verde) y 60° (línea magenta). También se incluye como referencia $S(f)_{Bim}$, escalado por un factor de e^{-6} (línea cian continua y punteada).	70
48.	Similar a lo descrito en la Fig. 47 pero ahora del caso 2 Delta.	71
49.	Similar a lo descrito en la Fig. 47 pero ahora del caso 3 Delta.	72
50.	$\Delta S_{nl4f}(f)$ (panel izquierdo), $\Delta S_{nl4f}(f)_{Ws}$ (panel central) y $\Delta S_{nl4f}(f)_{Sw}$ (panel derecho) calculados mediante el esquema WRT para el caso 1 Delta. Se muestran las estimaciones del efecto de la bimodalidad, aunque con variaciones del sistema Wind Sea con anchos direccionales $\sigma_\theta = 30^\circ$ (línea azul), 40° (línea roja), 50° (línea verde) y 60° (línea magenta). También se incluye como referencia $S(f)_{Bim}$, escalado por un factor de e^{-6} (línea cian continua y punteada).	73
51.	$\Delta S_{nl4f}(f)$ (panel izquierdo), $\Delta S_{nl4f}(f)_{Ws}$ (panel central) y $\Delta S_{nl4f}(f)_{Sw}$ (panel derecho) calculados mediante el esquema DIA para el caso 1 Delta. Se muestran las estimaciones del efecto de la bimodalidad, aunque con variaciones del sistema Wind Sea con anchos direccionales $\sigma_\theta = 30^\circ$ (línea azul), 40° (línea roja), 50° (línea verde) y 60° (línea magenta). También se incluye como referencia $S(f)_{Bim}$, escalado por un factor de e^{-6} (línea cian continua y punteada).	74
52.	Similar a lo descrito en la Fig. 50 pero ahora del caso 2 Delta.	75
53.	Similar a lo descrito en la Fig. 51 pero ahora del caso 2 Delta.	75
54.	Similar a lo descrito en la Fig. 50 pero ahora del caso 3 Delta.	75
55.	Similar a lo descrito en la Fig. 51 pero ahora del caso 3 Delta.	76
56.	Espectros direccionales unimodales correspondientes al sistema $Swell_a$ (C4/110) con una dirección de propagación $\theta_m = 110^\circ$ y al sistema $Swell_b$ (C4/25) con $\theta_m = 85^\circ$, ambos con ancho direccional $\sigma_\theta = 20^\circ$. En los paneles superiores se muestra el espectro direccional unimodal de $Swell_a$ utilizado como base para el cálculo de S_{nl4} mediante el esquema WRT (panel a) y DIA (panel b). En los paneles inferiores se muestra el espectro direccional unimodal $Swell_b$ utilizado como base para el cálculo de S_{nl4} mediante el esquema WRT (panel c) y DIA (panel d). Los contornos describen la densidad de energía espectral y aumentan cada $\frac{E(f,\theta)_{max}}{9}$ unidades de densidad de energía espectral.	80

57. Espectros direccionales bimodales correspondientes a los casos en donde $\delta\theta$ entre los sistemas Swell_a y Swell_b son de 25° (C4/25BIM) y 45° (C4/45BIM). En los paneles superiores se muestra el espectro direccional bimodal con $\delta\theta = 25^\circ$ utilizado como base para el cálculo de S_{nl4} mediante el esquema WRT (panel a) y DIA (panel b). En los paneles inferiores se muestra el espectro direccional bimodal con $\delta\theta = 45^\circ$ utilizado como base para el cálculo de S_{nl4} mediante el esquema WRT (panel c) y DIA (panel d). Los contornos describen la densidad de energía espectral y aumentan cada $\frac{E(f,\theta)_{\text{max}}}{9}$ unidades de densidad de energía espectral. 81
58. $S_{\text{nl4}}(f, \theta)$ de espectros unimodales correspondientes al sistema Swell_a con una dirección de propagación $\theta_m = 110^\circ$ (C4/110 paneles a y b) y al sistema Swell_b con $\theta_m = 85^\circ$ (C4/25 paneles c y d), ambos con ancho direccional $\sigma_\theta = 20^\circ$. Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{nl4} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cían), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas). 82
59. $S_{\text{nl4}}(f, \theta)$ de espectros bimodales correspondientes a los casos en donde $\delta\theta$ entre los sistemas Swell_a y Swell_b es de 25° (C4/25BIM paneles a y b) y 45° (C4/45BIM paneles c y d). Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{nl4} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cían), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas). 83
60. $\Delta S_{\text{nl4}}(f, \theta)$ de espectros bimodales correspondientes a los casos en donde $\delta\theta$ entre los sistemas Swell_a y Swell_b es de 25° (C4/25Delta paneles a y b) y 45° (C4/45Delta paneles c y d). Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{nl4} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cían), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas). 84

61. Modelo conceptual utilizado para representar el posible efecto de S_{nl4} en la evolución del espectro direccional del oleaje al aplicar los esquemas WRT (paneles inferiores) y DIA (paneles superiores) y su influencia en el campo de olas. La columna izquierda corresponde a condiciones unimodales y la columna derecha a condiciones bimodales. Se incluye un sistema Wind Sea con crecimiento limitado por el fetch (contorno en línea negra segmentada) y ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$, en el cual las crestas se desarrollan en la dirección del viento. Las componentes del sistema incrementan su energía —indicada por el cambio en el color y la longitud de la ortogonal— conforme aumenta la distancia respecto a la costa. Asimismo, se incorpora un sistema Swell con $\sigma_\theta = 20^\circ$ que se propaga en dirección opuesta al viento. Las flechas representan el incremento o la disminución de la energía debido a S_{nl4} , así como las direcciones hacia las cuales se esperan cambios asociados a dicha variación de energía. 85

Lista de tablas

Tabla	Página
1. Parámetros integrales: Altura significativa (H_s), frecuencia asociada al pico espectral (f_p) y la dirección principal de propagación (θ_m) (en convención oceanográfica con respecto al norte) medidos durante la campaña del experimento INTOA. . . .	18
2. Parámetros integrales empleados para generar los espectros direccionales de oleaje unimodal Wind Sea y Swell correspondientes al GoT.	19
3. Parámetros integrales: Altura significativa (H_s), frecuencia asociada al pico espectral (f_p) y la dirección principal de propagación (θ_m) (en convención oceanográfica con respecto al norte) descritos para el mes de octubre en la climatología descrita por Acosta Solis (2020).	20
4. Parámetros integrales empleados para generar los casos de oleaje unimodal Swell correspondientes a ITS.	20
5. Valores de β asociados a los σ_θ de interés.	24
6. Parámetros integrales, direccionales y espectrales utilizados para definir espectros direccionales unimodales sintéticos representativos del oleaje de las regiones GoT e ITS. De manera general, el parámetro σ implementado en las Ecs. 21 y 23 tiene valores de 0.07 y 0.09.	26
7. Espectros bimodales sintéticos representativos del oleaje de las regiones GoT e ITS.	27
8. Parámetros numéricos utilizados en el análisis del error en el cálculo de S_{nl4} con el esquema DIA asociado a diferentes valores de N_f	29
9. Parámetros numéricos utilizados en el análisis del error en el cálculo de S_{nl4} con el esquema WRT al variar el valor de $C0$	30
10. Parámetros para la generación de los espectros direccionales empleados en el cálculo de S_{nl4} mediante los esquemas WRT y DIA.	34
11. Razón de transferencia total de energía (R_{Uni} y R_{Bim}) de casos unimodales Wind Sea (Ws) y Swell, y bimodales (BIM), para distintos valores de σ_θ en la región del GoT.	77
12. Razón de transferencia total de energía ($R_{\Delta S_{nl4}}$) en casos de ΔS_{nl4} para distintos valores de σ_θ en la región del GoT.	77
13. Razón de transferencia total de energía ($R_{\Delta S_{nl4}Ws}$) en casos de $\Delta S_{nl4}Ws$ para distintos valores de σ_θ en la región del GoT.	78
14. Razón de transferencia total de energía ($R_{\Delta S_{nl4}Sw}$) en casos de $\Delta S_{nl4}Sw$ para distintos valores de σ_θ en la región del GoT.	78

Capítulo 1. Introducción

Describir el oleaje ha sido de gran relevancia para lograr explicar algunos procesos que ocurren en el océano, tales como el intercambio de propiedades (gases, energía, calor) entre el océano y la atmósfera, así como las interacciones entre el oleaje y las corrientes.

Existen diversos métodos para estudiar el oleaje, uno de los principales corresponde al uso de mediciones *in-situ*, las cuales se obtienen con boyas oceanográficas equipadas con velocímetros, acelerómetros y perfiladores acústicos de corrientes Doppler (ADCP), entre otros instrumentos. Otro método consiste en utilizar mediciones indirectas realizadas con sensores remotos, como radares de apertura sintética (SAR) o radares de alta frecuencia (HF radar). Un tercer método emplea modelos que simulan numéricamente el oleaje, como "WaveWatch III" (WWIII) o "Wave Modelling" (WAM). En la actualidad existen distintos programas nacionales e internacionales que analizan el oleaje mediante mediciones *in-situ*. Sin embargo, aún existen regiones donde el despliegue de sensores enfrenta limitaciones técnicas o presupuestarias. En estos casos, los sensores remotos y los modelos numéricos representan herramientas complementarias para el análisis del oleaje (Ardhuin et al., 2019).

Particularmente, los modelos de simulación numérica del oleaje se utilizan para estimar el espectro direccional del oleaje ($E(f, \theta)$) y a partir del mismo, estimar los parámetros integrales como la altura significativa (H_s), el periodo (T) y la dirección (θ). Es importante conocer el espectro direccional (el cual es una representación estadística del oleaje), debido a que proporciona información sobre la distribución de la energía en función de la frecuencia (f) y la dirección de propagación de las olas (θ), o en función del vector número de onda ($\mathbf{k}$).

El espectro direccional $E(f, \theta)$ puede representarse con el espectro de densidad de energía en términos de la frecuencia ($S(f)$) y una función de distribución direccional ($D(f, \theta)$), tal que:

$$E(f, \theta) = S(f)D(f, \theta). \quad (1)$$

El espectro direccional es útil para la identificación, caracterización y estudio de sistemas de oleaje. Estos pueden ser "Swell" (oleaje que ha salido de su área de generación) o "Wind Sea" (oleaje que aún continúa en su área de generación) (Holthuijsen, 2007). Además, al proporcionar información de cómo se distribuye la energía en el campo de olas, el espectro direccional constituye una herramienta fundamental para: la planificación y construcción de obras marítimas (plataformas petrolíferas, marinas, puertos comerciales); la navegación en mar abierto; la construcción de embarcaciones; y la investigación

oceanográfica relacionada con el análisis de corrientes superficiales y su interacción con el oleaje. Así como para abordar nuevos aspectos de investigación como: la transferencia de propiedades (gases, energía, acción) entre la atmósfera y el océano o la evolución y desarrollo de los sistemas de oleaje.

Los modelos espectrales de oleaje resuelven una ecuación de transferencia radiativa o de balance de energía espectral, establecida por Hasselmann (1960) y que, en condiciones de aguas profundas y en ausencia de corrientes, se expresa como:

$$\frac{\partial E(f, \theta; x, y, t)}{\partial t} + \mathbf{C}_g(x, y) \cdot \nabla E(f, \theta; x, y, t) = S_{tot}(f, \theta; x, y, t). \quad (2)$$

La Ec. 2 nos indica que la evolución del espectro está determinada por la advección de energía, donde el transporte de la misma está dada por la velocidad de grupo de las olas (C_g), y los forzamientos (S_{tot}) (Young y Van Vledder, 1993). El término S_{tot} puede describirse como la suma de tres procesos conocidos como términos fuente:

$$S_{tot} = S_{in} + S_{ds} + S_{nl4}. \quad (3)$$

El término S_{in} representa la transferencia (suministro) de energía por parte del viento hacia el oleaje, de acuerdo con la teoría de generación de olas propuesta por Miles (1957). El término S_{ds} explica la disipación de energía en el sistema asociada al proceso de rompimiento de las olas en aguas profundas (*whitecapping*) (Hasselmann, 1974). Finalmente, S_{nl4} describe la transferencia de energía debida a interacciones no lineales entre cuatro componentes espectrales (cuadruquetas).

A diferencia de S_{in} y S_{ds} , S_{nl4} no inyecta ni disipa energía en el sistema, sólo redistribuye la energía en el espectro (Fig. 1), esto promueve la evolución y desarrollo del oleaje en el dominio espectral al transferir (principalmente) energía de frecuencias mayores que la frecuencia asociada al pico espectral (f_p) hacia frecuencias menores que f_p . Además, S_{nl4} también está relacionado con la direccionalidad (Fig. 2), puesto que la transferencia de energía también ocurre en el dominio angular, lo cual modifica la forma y evolución del espectro direccional (Hasselmann, 1962, 1963b; Young y Van Vledder, 1993).

El análisis de S_{nl4} y sus efectos en el espectro direccional del oleaje continúa como un campo de investigación en desarrollo. En este contexto, el presente trabajo tiene como objetivo analizar la forma de S_{nl4} calculado mediante un esquema exacto y evaluar el posible impacto sobre la distribución direccional de espectros bimodales.

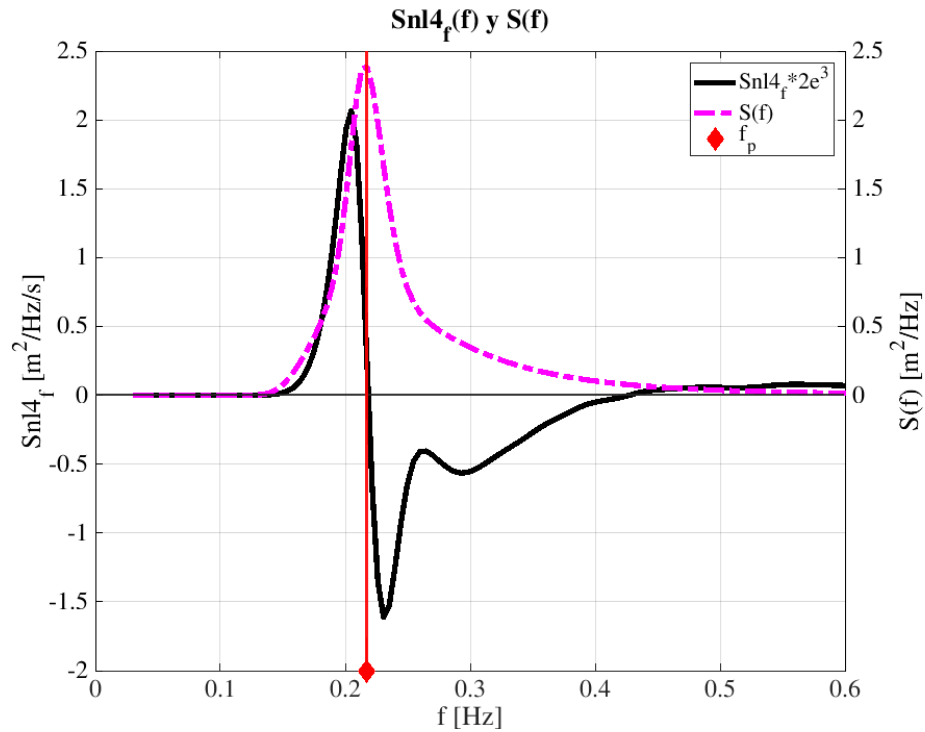


Figura 1. $S_{n14}(f)$ y $E(f)$. Podemos observar la propiedad de transferencia de energía (línea continua) al notar que existe una región de la cual se transfiere (valores negativos de S_{n14}) y otras hacia las cuales se transfiere energía (valores positivos S_{n14}), normalmente, la transferencia es mayor hacia frecuencias menores que f_p .

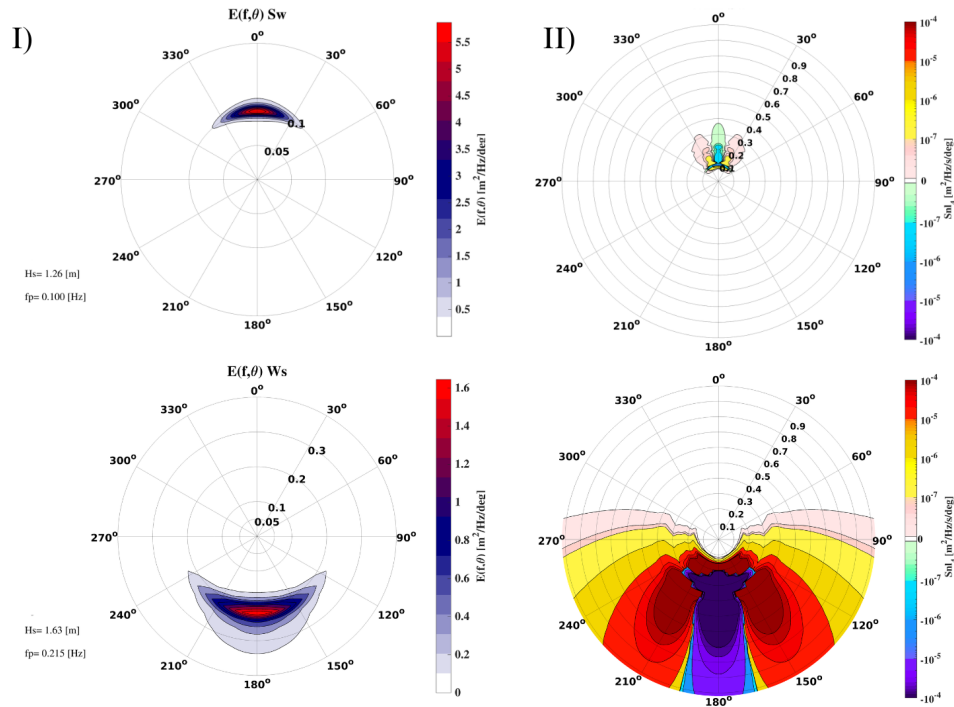


Figura 2. Espectros direccionales (Swell en el panel superior y Wind Sea en el panel inferior de la columna I) y su correspondiente estructura de S_{n14} (columna II). Las áreas rojizas en el espectro direccional (I) representan mayor concentración de energía. Por otro lado, en la estructura asociada de S_{n14} (II), los colores rojizos representan valores de transferencia positiva y los colores azules valores de transferencia negativa. Al transferir la energía hacia distintas frecuencias y direcciones, S_{n14} tiene un amplio impacto en la direccionalidad del espectro (Young y Van Vledder, 1993).

Esta evaluación resulta especialmente relevante, dado que los modelos numéricos actuales suelen representar S_{nl4} mediante esquemas aproximados que no reproducen de manera completa las interacciones no lineales entre cuádrupletas. Finalmente, el presente estudio se enfoca en aportar elementos que nos ayuden a reproducir de manera adecuada la evolución de los espectros direccionales a partir del uso de modelos espectrales de oleaje, atendiendo a la siguiente pregunta:

¿Cuál es la diferencia de S_{nl4} calculado con un esquema exacto con respecto al calculado con un esquema aproximado y de qué manera ésto podría modificar la distribución direccional en espectros bimodales?

1.1. Objetivos

1.1.1. Objetivo general

Analizar el efecto del cálculo exacto de la transferencia de energía debida a interacciones no lineales entre cuádrupletas en la forma de espectros bimodales del oleaje, característicos de distintas regiones de mares mexicanos.

1.1.2. Objetivos específicos

- Definir características típicas de espectros bimodales en mares mexicanos y elaborar espectros bimodales representativos sintéticos.
- Calcular y comparar la forma de S_{nl4} de los casos seleccionados, mediante una solución completa y otra aproximada.
- Elaborar un modelo conceptual para describir el posible efecto de S_{nl4} en el cambio de la distribución direccional del espectro del oleaje.

1.2. Alcances y limitaciones

Con relación al trabajo de tesis, se determinaron los alcances y limitaciones de la investigación.

1.2.1. Alcances

- Entender y describir conceptos asociadas a la teoría de la transferencia de energía debida a interacciones no lineales entre cuádrupletas, así como los esquemas numéricos empleados para su cálculo.
- Analizar y describir las diferencias en S_{nl4} calculado mediante el esquema aproximado empleado en los modelos operativos de simulación del oleaje, en comparación con el obtenido con un esquema exacto que ofrece una representación más detallada pero que no está implementado a nivel operativo.
- Generar nuevo conocimiento del comportamiento del término S_{nl4} en casos de oleaje bimodal.

1.2.2. Limitaciones

- No se describirá la evolución del espectro direccional, sólo el cambio descrito por S_{nl4} para un instante dado.
- No se implementará alguna modificación en los modelos numéricos utilizados para simular el oleaje de forma operativa.
- No se plantea generar o modificar conocimiento sobre la teoría de la transferencia de energía debida a interacciones no lineales entre cuádrupletas, ni de los esquemas numéricos empleados para su cálculo.

Capítulo 2. Antecedentes

El análisis y entendimiento de los términos fuente permitió el desarrollo de los modelos para la simulación numérica del espectro a lo largo de la historia. En el caso de los modelos de primera generación de "propagación desacoplada" en la década de los 60' y 70' (The Sea Wave Modeling Project (SWAMP) Group, 1985), el oleaje detenía su crecimiento al llegar a un determinado nivel de saturación de energía (Phillips, 1958), este crecimiento sólo estaba balanceado por los términos S_{in} y S_{ds} . No obstante, en esta generación de modelos se presentaron problemas de sobreestimación del término S_{in} en la región de frecuencias altas, induciendo una evolución incorrecta del espectro (Komen et al., 1994).

En los modelos de segunda generación de "acoplamiento híbrido o discreto" desarrollados durante las décadas de los 70' y 80', se implementó de manera paramétrica el término S_{nl4} al considerar experimentos asociados al crecimiento del oleaje. Con estos experimentos se evidenció la falta de un mecanismo que explicara la transferencia de energía de frecuencias altas hacia frecuencias bajas en el espectro, lo cual resolvía de manera parcial el problema de sobresaturación observado en los modelos de primera generación (Hasselmann et al., 1973; Snyder et al., 1981; Komen et al., 1994). No obstante, aún con esa implementación, persistían las dificultades para representar adecuadamente la evolución de sistemas de oleaje generados por campos de viento altamente variables (Komen et al., 1994).

Con el objetivo de resolver los inconvenientes asociados a la parametrización de S_{nl4} , Hasselmann y Hasselmann (1981) desarrollaron "Exact-NL", un esquema numérico que calcula de manera completa o "exacta" el término S_{nl4} , ya que considera todas las posibles combinaciones de cuádrupletas que interactúan entre sí (Komen et al., 1994). Sin embargo, requería una gran capacidad de cómputo para su ejecución en los modelos de predicción del oleaje a nivel operativo.

Para resolver este problema, Hasselmann y Hasselmann (1985) y Hasselmann et al. (1985) desarrollaron un esquema que calcula S_{nl4} de forma "aproximada", a partir de considerar un número finito de cuádrupletas representativas del fenómeno. A este esquema se le denominó "Discrete Interaction Approximation" (DIA) (Young y Van Vledder, 1993). El uso de este esquema redujo el costo computacional y permitió generar simulaciones en menos tiempo, en comparación con el uso de uno exacto (Young y Van Vledder, 1993).

La implementación del esquema DIA facilitó el desarrollo de modelos operacionales que incluyeran explícitamente el término S_{nl4} , aunque sin representarlo con la misma precisión que un esquema exacto. Estos modelos son considerados como de tercera generación (década de los 80' hasta la actualidad) (Komen et al., 1994).

2.1. Cálculo de S_{nl4}

El término S_{nl4} , único con una solución analítica (Hasselmann, 1960), es fundamental para describir la evolución del oleaje y, al mismo tiempo, representa un desafío matemático y computacional debido a la complejidad de su implementación en los modelos de simulación numérica.

Para abordar con mayor detalle S_{nl4} y los distintos esquemas utilizados para realizar su cálculo, se parte de los trabajos de Phillips (1960) y Hasselmann (1962). En dichos estudios, se demostró que la transferencia de energía entre cuádrupletas (conjuntos de cuatro componentes espectrales) es posible si se cumplen las "condiciones de resonancia", determinadas mediante el análisis de perturbaciones de orden superior en la teoría lineal del oleaje. Las condiciones de resonancia se expresan como:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4 = 0, \quad (4)$$

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 = 0, \quad (5)$$

donde $\mathbf{k}_i$ ($\mathbf{k}_{1,2,3,4}$) y ω_i ($\omega_{1,2,3,4}$), representan el vector número de onda y la frecuencia angular asociados a cada componente. Además, $\mathbf{k}_i$ y ω_i están relacionados mediante la relación de dispersión para las olas en aguas profundas:

$$\omega^2 = g\mathbf{k}, \quad (6)$$

donde g es la aceleración gravitacional (Young y Van Vledder, 1993).

En este trabajo se expresará la transferencia de energía en términos de densidad de acción, definida como:

$$n(\mathbf{k}) = \frac{E(\mathbf{k})}{\omega}, \quad (7)$$

donde $E(\mathbf{k})$ representa densidad de energía espectral y ω frecuencia angular.

En síntesis, la transferencia de $n(\mathbf{k})$ sólo es posible si cuatro componentes espectrales ocupan el mismo espacio-tiempo y satisfacen las condiciones de resonancia. Al cumplirse lo anterior, existe transferencia

de $n(\mathbf{k})$ en donde tres componentes espectrales ceden activamente $n(\mathbf{k})$ a una cuarta. Esto se aplica a todas las componentes que interactúan entre sí, por lo que la transferencia neta de $n(\mathbf{k})$, evaluada en cada componente, es no negativa y el proceso cumple la condición de ser conservativo en las cuatro componentes que interactúan (Hasselmann, 1962). En esta interacción, todas las componentes pueden ceder o recibir $n(\mathbf{k})$ simultáneamente; sin embargo, siempre una de las cuatro componentes presenta un incremento neto de $n(\mathbf{k})$ (Hasselmann, 1962, 1963a). El cambio en $n(\mathbf{k})$ se describe mediante la siguiente expresión:

$$S_{nl4} = \frac{\partial n_1(\mathbf{k}_1)}{\partial t} = \iiint G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \\ \times [n_1 n_3 (n_4 - n_2) + n_2 n_4 (n_3 - n_1)] d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4. \quad (8)$$

Con esta expresión, conocida como integral de colisión de Boltzmann para las olas (Hasselmann, 1963a), se calcula el cambio temporal de $n(\mathbf{k})$ debido a las interacciones entre componentes espectrales $\mathbf{k}_i$, mediante una triple integral (de componentes $\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4$), restringida por las condiciones de resonancia impuestas a través de funciones delta de Dirac (δ). La variable $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$ se define como:

$$G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = \pi \left(\frac{3gD}{2\rho \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4} \right)^2, \quad (9)$$

donde D representa el coeficiente de "acoplamiento" o de "interacción", que determina la tasa de transferencia de energía efectuada activamente por tres componentes $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ a una cuarta componente $\mathbf{k}_4$ (Hasselmann (1963a)). Este coeficiente presenta un valor idéntico para cada componente de la cuadrupleta y su expresión, descrita en Hasselmann (1962, 1963a) y corregida (para contemplar olas de profundidad finita) por Herterich y Hasselmann (1980), se define como:

$$D = \frac{1}{3} \left(D_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{+, +, -} + D_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1}^{+, -, +} + D_{\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{-, +, +} \right), \quad (10)$$

al considerar los superíndices de signo como s_j se describe que:

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{s_1, s_2, s_3} = & \frac{iD_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{s_2, s_3}}{\omega_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3}^2 - (\omega_2 + \omega_3)^2} \times \left\{ 2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \left(\frac{\omega_1^2 \omega_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3}^2}{g^2} - \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \right) \right. \\
& - \frac{\omega_1 (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)^2}{\cosh^2(|\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3| h)} - \left. \left[\frac{(\omega_2 + \omega_3) k_1^2}{\cosh^2(k_1 h)} \right] \right\} - iD_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{s_2, s_3} \frac{\omega_1}{g^2} (\omega_1^2 + \omega_{\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3}^2) \\
& + E_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{s_2, s_3} \left\{ \frac{\omega_1^3 (\omega_2 + \omega_3)}{g} - g \mathbf{k}_1 \cdot (\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) - \left[\frac{g k_1^2}{\cosh^2(k_1 h)} \right] \right\} \\
& + \frac{\omega_1}{2g^2} (\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3) \{ (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3)(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega_2 \omega_3 (\omega_2 + \omega_3) \} \\
& - \frac{\omega_1 \omega_2^2 k_3^2}{2g^2} (\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_3) - \frac{\omega_1 \omega_3^2 k_2^2}{2g^2} (\omega_1 + 2\omega_2 + \omega_3)
\end{aligned} \tag{11}$$

en donde h representa la profundidad, $D_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{s_2, s_3}$ corresponde al coeficiente de interacción en el análisis de perturbaciones a segundo orden, mientras que $E_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3}^{s_2, s_3}$ se deriva de una expansión por análisis de perturbaciones de cuarto orden de la energía promedio por unidad de área (Hasselmann, 1962). Al analizar la estructura del coeficiente de acoplamiento D , incluido en $G(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)$, se evidencia la complejidad computacional asociada con el cálculo de S_{nl4} .

2.1.1. Esquemas para el cálculo de S_{nl4}

En este apartado se describen las características principales de los esquemas numéricos para el cálculo de S_{nl4} , tanto los ya mencionados como otros de relevancia para el presente trabajo de investigación.

2.1.1.1. EXACT-NL

El esquema EXACT-NL fue pionero en el cálculo no parametrizado de S_{nl4} . Su desarrollo se basó en la integración simultánea de todas las componentes $\mathbf{k}_i$ de la Ec. 8, modificando el enfoque asimétrico en el que se calcula de manera independiente el cambio de $n(\mathbf{k})$. Esta formulación "simétrica" aprovecha la invariancia del coeficiente de interacción y la propiedad de que el cambio en $n(\mathbf{k})$ es idéntico en las cuatro componentes (aunque con cambios de signo acorde a cada componente), a este conjunto de características se le conoce como "balance detallado" (Hasselmann, 1966; Hasselmann y Hasselmann, 1981, 1985; Young y Van Vledder, 1993).

De manera más específica, en el esquema EXACT-NL la integración se efectúa en un espacio $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ y $\mathbf{k}_4$. Al integrar la forma simétrica de la Ec. 8, se logra calcular el cambio en $n(\mathbf{k})$ de manera simultánea en todas las componentes que interactúan en el volumen $d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3 d\mathbf{k}_4$ (Hasselmann y Hasselmann, 1985). Esto es fundamental para optimizar y reducir el tiempo de cómputo hasta en cuatro órdenes de magnitud (Young y Van Vledder, 1993).

Desde otro punto de vista, las interacciones pueden describirse como procesos de colisión entre componentes $\mathbf{k}_i$ que coexisten en el mismo espacio-tiempo y satisfacen las condiciones de resonancia, esto en analogía a procesos de colisión que ocurren en conjuntos de partículas. En esta analogía, la interacción se interpreta como la suma de cuatro procesos de colisión (Fig. 3) (Hasselmann, 1966; Hasselmann y Hasselmann, 1985). La probabilidad de un proceso de colisión en particular, denotado por los índices i , se expresa como una densidad de probabilidad y se define mediante:

$$\left. \begin{array}{ll} (i) & n_1 n_2 n_3 \\ (ii) & n_1 n_2 n_4 \\ (iii) & n_1 n_3 n_4 \\ (iv) & n_2 n_3 n_4 \end{array} \right\} \frac{G}{4} * \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) * \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) d\mathbf{k}_1 \cdot d\mathbf{k}_2 \cdot d\mathbf{k}_3 \cdot d\mathbf{k}_4. \quad (12)$$

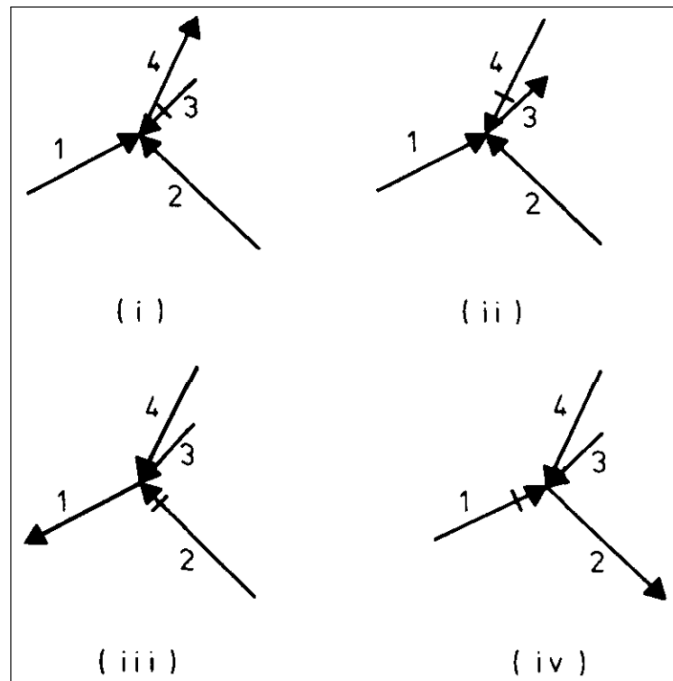


Figura 3. Esquemas de colisión (interacciones) entre componentes espectrales. En cada caso, el vector saliente representa la componente que recibe energía, mientras que los vectores entrantes corresponden a las componentes que ceden energía. La componente con signo negativo, de acuerdo con las condiciones de resonancia, se indica mediante una barra superpuesta, figura tomada de Hasselmann y Hasselmann (1985).

En cada proceso de colisión se presenta un caso de aniquilación o creación de partículas. En el contexto del oleaje, las componentes que transfieren energía se consideran "aniquiladas" (aunque no desaparecen), mientras que aquella que recibe energía se interpreta como "creada" (Hasselmann y Hasselmann, 1985). Por ejemplo, en el caso (i) (Fig. 3), la componente $\mathbf{k}_4$ actúa como receptora de energía, mientras que $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$ y $\mathbf{k}_3$ ceden energía. Este proceso, de acuerdo con las condiciones de resonancia, se representa mediante $\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$. En esta formulación, la componente con signo negativo (asociada con ω y $\mathbf{k}$ negativos) se interpreta como una antipartícula (Hasselmann y Hasselmann, 1985).

Al considerar la simetría de las interacciones y el principio del balance detallado, $\Delta n_i(\mathbf{k}_i)$ se expresa como:

$$\begin{pmatrix} \Delta n_1 \\ \Delta n_2 \\ \Delta n_3 \\ \Delta n_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 \\ +1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot dW \quad (13)$$

donde

$$dW = \hat{G} \frac{P}{4} \cdot d\mathbf{k}_1 \cdot d\mathbf{k}_2 \cdot d\mathbf{k}_3 \cdot d\mathbf{k}_4 \quad (14)$$

$$\hat{G} = G * \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) * \delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \quad (15)$$

$$P = n_1 n_3 (n_4 - n_2) + n_2 n_4 (n_3 - n_1). \quad (16)$$

2.1.1.2. DIA

A pesar de la reducción en el tiempo computacional alcanzada en el cálculo de la Ec. 13, dicha mejora no resultó suficiente para que el esquema EXACT-NL fuera incorporado en modelos operacionales. Para abordar este problema y reducir el tiempo de cómputo en la estimación de S_{nl4} , Hasselmann y Hasselmann (1985) retomaron los resultados de Longuet-Higgins (1976) y Fox (1976), quienes plantearon que la transferencia más relevante ocurre en torno a la componente asociada al pico espectral $\mathbf{k}_m$ (narrow-peak approximation). Sin embargo, bajo las restricciones introducidas por Hasselmann y Hasselmann (1985) en el cálculo de S_{nl4} , se supone que todas las cuádrupletas resonantes se localizan en torno al punto central de la interacción $\hat{\mathbf{k}}$ ($\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2}{2} = \frac{\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}{2}$) (local interaction approximation), lo que asegura que $\mathbf{k}_m \approx \hat{\mathbf{k}}$. (Hasselmann, 1963b; Hasselmann y Hasselmann, 1985; Hasselmann et al., 1985).

Con el objetivo de reducir el número de cuádrupletas necesarias para describir S_{nl4} , Hasselmann et al. (1985) desarrollaron un esquema que considera la simetría en la interacción y a la vez representa la transferencia de energía mediante una configuración simplificada de cuádrupletas.

El nuevo esquema, conocido como Discrete Interaction Approximation (DIA), considera que, en cada combinación de cuádrupletas, las componentes $\mathbf{k}_1$ y $\mathbf{k}_2$ son iguales, lo cual se expresa como $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$. Por otro lado, las componentes $\mathbf{k}_3$ y $\mathbf{k}_4$ son distintas entre sí ($\mathbf{k}_3 \neq \mathbf{k}_4$) y representan una dirección de propagación $\theta_3 = 11.5^\circ$ y $\theta_4 = -33.6^\circ$, respectivamente, alrededor de $\mathbf{k}$ (Hasselmann et al., 1985). Con esta configuración se reduce de manera significativa el tiempo de cómputo ya que se disminuye el número de cuádrupletas a considerar en la Ec. 8. Para cada $\mathbf{k}$, las componentes $\mathbf{k}_3$ y $\mathbf{k}_4$ que satisfacen las condiciones de resonancia se establecen mediante:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_2 = \omega \\ \omega_3 &= \omega(1 + \lambda) = \omega_+ \\ \omega_4 &= \omega(1 - \lambda) = \omega_-.\end{aligned}\tag{17}$$

Con el propósito de obtener una representación visual de las componentes que satisfacen las condiciones de resonancia, Hasselmann (1963b) describe un espacio vectorial k_x, k_y al cual denomina "Figura del ocho" (Fig. 4 originalmente presentada en Phillips (1960)). En este espacio se muestran contornos que delimitan las ubicaciones en donde las componentes que interactúan cumplen dichas condiciones (Hasselmann et al., 1985; Young y Van Vledder, 1993).

De manera similar a lo descrito con la Ec. 13, la transferencia de energía estimada mediante el esquema DIA estará dada por:

$$\begin{pmatrix} \Delta n \\ \Delta n_+ \\ \Delta n_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ +1 \end{pmatrix} C' g^{-8} f^{19} [n^2(n_+ + n_-) - 2nn_+n_-] \Delta \mathbf{k} \Delta t,\tag{18}$$

donde Δn , Δn_+ y Δn_- representan el cambio de densidad de acción en el tiempo y C' es una constante que describe la intensidad de la interacción (Hasselmann et al., 1985). Al reducir el número de cuádrupletas a considerar y proponer una simulación aceptable del fenómeno de las interacciones, con el esquema DIA se logró disminuir el tiempo de cómputo a tal punto que ahora es posible su implementación en los modelos espectrales de simulación del oleaje a un nivel operativo. Esto representó un logro en el área

de la simulación numérica del oleaje. Sin embargo, al reducir el número de cuádrupletas a considerar, el esquema tiene el inconveniente de no representar la totalidad de las interacciones (Hasselmann et al., 1985; Young y Van Vledder, 1993). A pesar de esta limitación, el esquema DIA ha permitido el desarrollo de modelos espectrales utilizados para la predicción del oleaje, como el WAM, el SWAN y el WWIII, así como para propósitos de investigación.

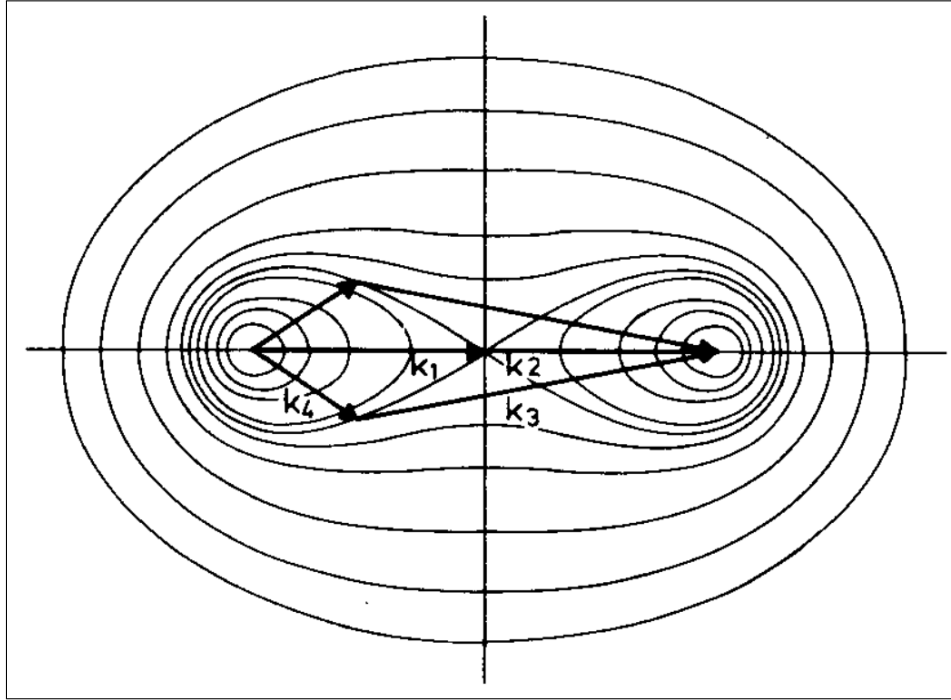


Figura 4. Ejemplo de componentes que satisfacen el criterio $k = k_1 = k_2$ y $k_3 \neq k_4$. Los óvalos representan los espacios geométricos en donde se satisfacen las condiciones de resonancia y están asociadas a un valor γ , particularmente, cuando $\gamma = \sqrt{2}$ se obtiene la curva representativa de la figura del ocho de Phillips (1960). En este caso en particular, el vector k_3 forma un ángulo de $\theta_3 = 11.5^\circ$ con respecto a k , mientras que k_4 forma un ángulo de $\theta_4 = -33.6^\circ$. Los vectores sin etiqueta corresponden a las componentes simétricas de k_3 y k_4 , que también cumplen las condiciones de resonancia (Hasselmann et al., 1985; Young y Van Vledder, 1993).

2.1.1.3. WRT

Además del esquema Exact-NL, se han desarrollado otros esquemas de solución exacta. Un ejemplo destacado es el esquema WRT ("Webb-Resio-Tracy") propuesto por Webb (1978) y Tracy y Resio (1982) e implementado numéricamente por van Vledder (2003). A diferencia del esquema DIA, el esquema WRT considera la totalidad de las cuádrupletas que cumplen con las condiciones de resonancia. Sin embargo, para optimizar el cálculo de la Ec. 8, este esquema emplea métodos numéricos como filtros que limitan la participación de cuádrupletas con baja contribución en la transferencia de $n_i(k_i)$, así como métodos

matemáticos (por ejemplo, transformaciones analíticas) diseñados para evitar las singularidades que surgen en ciertas configuraciones, las cuales complican significativamente el cálculo de la transferencia (van Vledder, 2006). Como resultado, la diferencia en la cantidad de cuádrupletas evaluadas por WRT con respecto a DIA puede alcanzar hasta 10^4 . Esta característica permite que WRT represente S_{nl4} con mayor detalle; sin embargo, también disminuye considerablemente su rendimiento computacional (van Vledder, 2006).

En la actualidad, en los modelos de simulación del oleaje se implementa el esquema DIA, el cual ofrece resultados aceptables en la representación de la evolución del oleaje. No obstante, dado que estas simulaciones desempeñan un papel crucial en actividades como el pronóstico, la planificación de rutas marítimas, la prevención de riesgos costeros y la investigación, es fundamental identificar las limitaciones inherentes al esquema DIA. Esto puede alcanzarse mediante experimentos controlados que comparen los resultados del esquema DIA con los obtenidos mediante el esquema WRT.

2.2. S_{nl4} en espectros bimodales

Aunque se reconoce la influencia de S_{nl4} en la evolución y distribución direccional de la energía en el espectro de las olas (Young y Van Vledder, 1993), aún existen aspectos específicos que requieren un análisis más profundo, tal es el caso del comportamiento de S_{nl4} en espectros bimodales de oleaje (Masson, 1993; Shabani et al., 2022).

Uno de los primeros experimentos en donde se explora la influencia del oleaje preexistente en el crecimiento de otro régimen fue llevado a cabo por Donelan (1987). El experimento se realizó en un tanque de olas, con un espectro bimodal generado mediante la superposición de un oleaje inducido por viento (Wind Sea) y otro generado mecánicamente mediante una paleta (similar a un Swell). En ese trabajo se concluyó que el término S_{nl4} jugaba un papel importante en el crecimiento del régimen Wind Sea por la presencia del Swell. No obstante, Shabani et al. (2022), mediante experimentos realizados también en un tanque de olas, descartaron que S_{nl4} influyera en la modificación de los regímenes dentro de escalas temporales de segundos a minutos (que corresponden al marco temporal de las observaciones). Ante esto, observar el efecto S_{nl4} vía experimental queda como un tema abierto para futuras investigaciones.

En un caso más específico, Masson (1993) realizó un análisis a partir de simulaciones numéricas del comportamiento de S_{nl4} con un espectro bimodal compuesto por un régimen Wind Sea y otro Swell. En

este estudio se empleó el esquema exacto propuesto por Resio y Perrie (1991) para abordar la hipótesis predominante en la época, la cual sostenía que los sistemas bimodales de olas no interactuaban cuando sus sistemas se encontraban muy alejados en el dominio k . Ante esto, Masson (1993) realizó un análisis de sensibilidad basado en la frecuencia normalizada del Swell, definida como:

$$\hat{f}_s = f_{p_{Swell}} / f_{p_{WindSea}} \quad (19)$$

y la diferencia relativa entre la dirección de propagación del Swell con respecto a la del Wind Sea ($\delta\theta$). Los resultados indicaron que se presenta un máximo en el aumento de energía del Swell, a expensas del Wind Sea, y ocurre con una tasa temporal mínima cuando $\delta\theta = 40^\circ$ y $\hat{f}_s = 0.87$. Esta tasa aumenta con $\delta\theta$, mientras que $\hat{f}_s$ disminuye. Cuando $\hat{f}_s \leq 0.6$, el aumento de energía del Swell respecto al Wind Sea no se explica con S_{nl4} y se considera que la interacción entre ambos sistemas no es significativa.

En el mismo estudio, mediante un análisis basado en experimentos de evolución espectral limitada por el tiempo (en donde no se consideran los términos fuente S_{in} y S_{ds}) con parámetros asociados al incremento de energía del Swell, Masson (1993) observó que los sistemas tienden a fusionarse. Este proceso describe un desplazamiento de $f_{p_{WindSea}}$ hacia frecuencias bajas, donde eventualmente se fusiona con $f_{p_{Swell}}$. Por causa del desplazamiento de $f_{p_{WindSea}}$ hacia frecuencias bajas, se genera una redistribución de energía hacia frecuencias más altas en la región del Swell. En términos direccionales, el Swell presenta una distribución direccional más amplia.

Con relación al trabajo de Masson (1993), se podría sugerir que la transferencia de energía en sistemas con espectros bimodales es relevante únicamente cuando $\delta\theta \leq 40^\circ$. No obstante, el estudio de Crombie et al. (1978), basado en observaciones de radar de alta frecuencia, evidenció la presencia de oleaje que se propaga con dirección opuesta al viento, incluso en ausencia de un régimen Swell. En el trabajo se concluye que S_{nl4} podría ser el mecanismo responsable de la propagación del oleaje en sentido opuesto a la dirección principal del viento, aunque los valores de transferencia de energía son dos órdenes de magnitud menores que los máximos observados en la dirección principal de propagación (Crombie et al., 1978). Este comportamiento de S_{nl4} no fue abordado por Masson (1993), dado que considera que ocurre interacción cuando $\delta\theta \leq 40^\circ$ y se extiende hasta alcanzar direcciones de propagación opuestas (180°). Por ello, resulta relevante investigar el comportamiento de S_{nl4} en un rango direccional más amplio que el descrito por Masson (1993), así como su influencia en la transferencia de energía en sistemas bimodales.

La incógnita sobre la transferencia de energía en dirección opuesta al viento fue retomada por Lavrenov

y Ocampo-Torres (1999). En ese estudio se empleó un esquema numérico de alta precisión (denominado en este trabajo como esquema "Lavrenov") desarrollado por Lavrenov (1991), con el cual se calculó S_{nl4} asociado a sistemas unimodales. Este esquema logró reducir el error numérico en el espacio de integración cercano al máximo espectral hasta 1 %, en contraste con otros esquemas exactos que presentaban errores entre 10 % y 50 % (Lavrenov y Ocampo-Torres, 1999). Al estimar la transferencia de energía bajo diferentes configuraciones espectrales y direccionales, se encontró que S_{nl4} puede inducir transferencia en sentido opuesto al del viento. Este resultado subraya la necesidad de analizar la contribución de S_{nl4} en sistemas bimodales con $\delta\theta > 40^\circ$.

Por otro lado, en el ámbito operativo, el uso del esquema DIA continúa como una solución temporal para modelar la evolución del oleaje. Diversos estudios han señalado sus limitaciones para representar adecuadamente la transferencia de energía en comparación con un esquema de solución exacta u observaciones. Tal es el caso del trabajo realizado por Ardag y Resio (2019), quienes compararon la evolución del espectro direccional generada mediante el modelo WWIII, implementando el esquema DIA, con la evolución estimada a partir de mediciones de boyas, bajo condiciones de fetch y tormenta determinadas. Los autores encontraron que el uso del esquema DIA reduce la capacidad del modelo WWIII para predecir el incremento en los niveles de energía y el periodo asociado a f_p . Esta limitación puede comprometer la precisión en las estimaciones del tiempo de arribo del Swell, así como en la forma y la magnitud del espectro (Ardag y Resio, 2019).

Por su parte, en el estudio realizado por Alday y Ardhuin (2023), se analizó la evolución del espectro direccional en el modelo WWIII mediante la implementación de DIA y dos esquemas de cálculo exacto: WRT y Gaussian Quadrature Method (GQM), este último desarrollado a partir del esquema de Lavrenov, implementado numéricamente por Michel Benoit y optimizado por Gagnaire-Renou et al. (2010). Con los resultados, se muestra que los esquemas de solución exacta tienen la capacidad de transferir energía en una gran parte del dominio (frecuencia-dirección), incluyendo direcciones opuestas a la del viento. Este comportamiento, aún poco explorado, adquiere relevancia para comprender el efecto de S_{nl4} en sistemas bimodales.

Al considerar la importancia que tiene el término S_{nl4} en la evolución del oleaje, en este trabajo se busca adquirir mayor conocimiento en relación a la forma del término S_{nl4} calculado mediante un esquema exacto (en contraste con uno aproximado) puede llegar a modificar la direccionalidad del espectro direccional en condiciones de oleaje bimodal.

Capítulo 3. Métodos

En este capítulo se describen las características de los casos experimentales, así como las formulaciones espectrales y distribuciones direccionales empleadas para generar los espectros direccionales sintéticos. Además, se proporcionan detalles sobre los parámetros utilizados en los esquemas WRT y DIA para el cálculo de S_{nl4} . Posteriormente, se presentan los análisis de la transferencia de energía estimada por cada esquema, en particular la transferencia total y el efecto debido a la bimodalidad del espectro del oleaje.

3.1. Casos experimentales

Para explorar la estructura de S_{nl4} en espectros bimodales, el diseño experimental se basó en el análisis de casos poco explorados en la literatura pero que ocurren de manera frecuente en el océano. Ejemplo de ello, son los espectros bimodales que se presentan en las zonas del Golfo de Tehuantepec (GoT) e Isla Todos Santos (ITS).

3.1.1. Golfo de Tehuantepec

La zona del GoT (Fig. 5) presenta condiciones de oleaje particulares debido a los eventos "Tehuanos", que son vientos que se intensifican (principalmente en invierno) al atravesar el Paso Chivela de Norte a Sur (García Nava, 2011). Por efecto de los Tehuanos, en la región del GoT se presentan espectros bimodales, compuestos por un Wind Sea generado por los Tehuanos y un oleaje tipo Swell predominante, que provienen del sur. La diferencia relativa en la dirección de propagación entre ambos regímenes es típicamente 180° , en otras palabras, se presentan regímenes de oleaje que se propagan en direcciones opuestas.

Bajo estas condiciones, se propone estudiar el comportamiento de S_{nl4} correspondiente a espectros bimodales de oleaje que ocurren típicamente en la región del GoT, con énfasis en la posible interacción entre ambos sistemas de oleaje, conforme a la premisa planteada por Lavrenov y Ocampo-Torres (1999), quienes reportaron transferencia de energía en sentido opuesto a la dirección del viento en un espectro unimodal. En el presente estudio se busca examinar dicho comportamiento en un espectro bimodal, donde los sistemas se propagan en direcciones opuestas.



Figura 5. Región del Golfo de Tehuantepec

Para generar espectros bimodales sintéticos representantes del oleaje presente en el GoT, se tomaron en cuenta datos de viento (U_{10}) asociados al oleaje generado por eventos Tehuanos (Wind Sea), así como mediciones del Swell presente durante dichos eventos, reportados en los resultados del experimento INTOA (Ocampo-Torres et al., 2011) (Tabla 1).

Tabla 1. Parámetros integrales: Altura significativa (H_s), frecuencia asociada al pico espectral (f_p) y la dirección principal de propagación (θ_m) (en convención oceanográfica con respecto al norte) medidos durante la campaña del experimento INTOA.

Sistema	f_p [Hz]	H_s [m]	θ_m [°]	U_{10} [ms^{-1}]
Wind Sea	0.15-0.3	0.3-2.5	$180 \pm 30^\circ$	8-20
Swell	0.05-0.1	0.5-1.4	$0 \pm 30^\circ$	-

Considerando los datos de oleaje asociados a los distintos eventos Tehuanos reportados en el experimento INTOA, se diseñaron tres casos de espectros direccionales de oleaje tipo Wind Sea (con relación a la intensidad del viento U_{10}) y uno Swell (Tabla 2), y se tomaron como base para generar espectros direccionales bimodales con los que se exploró la variación de S_{n14} . Para enfocar el análisis en los cambios

de S_{n14} asociados al Wind Sea, los parámetros del Swell se mantuvieron constantes.

Tabla 2. Parámetros integrales empleados para generar los espectros direccionales de oleaje unimodal Wind Sea y Swell correspondientes al GoT.

Región	Sistema	f_p [Hz]	H_s [m]	θ_m [°]	U_{10} [ms^{-1}]
GoT	Swell	0.1	1.25	0	-
GoT	Wind Sea	0.215	1.63	180	20
GoT	Wind Sea	0.237	1.26	180	15
GoT	Wind Sea	0.273	0.88	180	10

3.1.2. Isla Todos Santos

En la región de ITS (Fig. 6), las condiciones de Wind Sea están en gran parte influenciadas por el Centro Semipermanente de Alta Presión del Pacífico Norte (CAP), con viento predominante hacia el Sur-Sureste y alcanza su mayor intensidad durante el verano (Castro Valdez y Martínez, 2010). En contraste, durante el invierno prevalece el oleaje tipo Swell generado por el centro de baja presión de las Aleutianas, cuya influencia disminuye en verano, y el oleaje predominante proviene de tormentas que ocurren en el Hemisferio Sur (Adams et al., 2008; Acosta Solis, 2020).



Figura 6. Región Isla Todos Santos

En el presente caso de estudio, se propone generar espectros direccionales bimodales sintéticos caracterizados por la coexistencia de dos sistemas de Swell y una presencia mínima o nula del Wind Sea, situación que puede presentarse en meses de transición entre verano e invierno. Esta propuesta se fundamenta en

la climatología del oleaje en la región de ITS descrita por Acosta Solis (2020) (Tabla 3).

De manera específica, en este experimento se busca explorar el comportamiento de S_{nl4} correspondiente a un espectro bimodal compuesto por dos sistemas Swell que representan condiciones de oleaje de la región de ITS. Particularmente, se consideran espectros bimodales que contienen sistemas de oleaje con direcciones de propagación y valores de f_p similares a los utilizados en los experimentos reportados por Masson (1993), en los que se observa una interacción (crecimiento en la energía de un sistema a expensas del otro) entre los sistemas cuando $\delta\theta < 40^\circ$ y la razón entre sus valores de f_p sea mayor a 0.6.

Tabla 3. Parámetros integrales: Altura significativa (H_s), frecuencia asociada al pico espectral (f_p) y la dirección principal de propagación (θ_m) (en convención oceanográfica con respecto al norte) descritos para el mes de octubre en la climatología descrita por Acosta Solis (2020).

H_s [m]	f_p [Hz]	θ_m [°]
0.85-1.6	0.06-0.95	65-110

Al considerar los parámetros de la Tabla 3 y la caracterización de los sistemas de Swell provenientes del centro de baja presión de las Aleutianas ($Swell_a$) y del Hemisferio Sur ($Swell_b$) de Adams et al. (2008), se diseñaron seis casos de espectros direccionales de oleaje tipo Swell (Tabla 4). En estos espectros, se mantuvieron constantes los valores de H_s y f_p , mientras que el parámetro θ_m se varió en los sistemas $Swell_b$, con el objetivo de tener únicamente variaciones de $\delta\theta$ y evaluar su efecto sobre S_{nl4} .

Tabla 4. Parámetros integrales empleados para generar los casos de oleaje unimodal Swell correspondientes a ITS.

Región	Sistema	f_p [Hz]	H_s [m]	θ_m [°]
ITS	$Swell_a$	0.083	1.6	110
ITS	$Swell_b$	0.062	0.85	85
ITS	$Swell_b$	0.062	0.85	80
ITS	$Swell_b$	0.062	0.85	75
ITS	$Swell_b$	0.062	0.85	70
ITS	$Swell_b$	0.062	0.85	65

3.2. Generación de espectros direccionales bimodales

Para construir los espectros direccionales que representan la base en el cálculo de S_{nl4} , se utilizó la expresión descrita en Donelan et al. (1985)

$$E(f, \theta) = S(f)D(f, \theta), \quad (20)$$

en donde $S(f)$ representa el espectro en frecuencia y $D(f, \theta)$ la función de distribución direccional de la energía.

3.2.1. Espectro JONSWAP

Para generar los espectros sintéticos asociados a los sistemas Wind Sea, se utilizó la forma del espectro JONSWAP (Hasselmann et al., 1973) tal que:

$$S(f) = \frac{\alpha \cdot g^2}{(2\pi)^4 f^5} \exp\left(-\frac{5}{4} \left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right) \gamma^{\exp\left(-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right)}, \quad (21)$$

en donde g es la gravedad, f la frecuencia, f_p la frecuencia asociada al pico espectral y α es un factor de escala de la energía del espectro. Las variables f_p y α están relacionadas con el fetch (X), fetch adimensional ($\tilde{X}$) y con U_{10} . A partir del experimento JONSWAP se obtuvieron las relaciones:

$$f_p = \frac{3.5g\tilde{X}^{-0.33}}{U_{10}}, \quad \alpha = 0.076\tilde{X}^{-0.22} \quad \text{y} \quad \tilde{X} = \frac{gX}{U_{10}^2}. \quad (22)$$

El parámetro γ es el factor de intensificación del pico espectral (relación entre la energía espectral máxima y la máxima del espectro Pierson-Moskowitz) y σ es un parámetro que representa el ancho del pico espectral (Hasselmann et al., 1973; Holthuijsen, 2007). Para representar espectros de sistemas Swell, se implementó el espectro JONSWAP modificado (Goda, 1979; Lucas y Guedes Soares, 2015):

$$S(f) = c \cdot \left(\frac{f_p}{f}\right)^5 \exp\left(-\frac{5}{4} \left(\frac{f_p}{f}\right)^4\right) \gamma^{\exp\left(-\frac{(f-f_p)^2}{2\sigma^2 f_p^2}\right)}, \quad (23)$$

en donde c es un factor que escala la energía del espectro con relación al valor de H_s deseado

$$c = \frac{5H_s^2}{16f_p} \left(1.15 + 0.1688\gamma - \frac{0.925}{(1.909 + \gamma)} \right)^{-1}. \quad (24)$$

3.2.2. Función de distribución direccional

La función de distribución direccional de densidad de energía espectral, $D(f, \theta)$, es uno de los componentes fundamentales del espectro direccional, ya que describe cómo se distribuye la energía asociada a cada banda de frecuencia en las distintas direcciones del campo de olas y debe cumplir

$$\int_0^{2\pi} D(f, \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{E(f, \theta)}{S(f)} d\theta = \frac{\int_0^{2\pi} E(f, \theta) d\theta}{S(f)} = 1, \quad (25)$$

esto indica que al distribuir la energía de $S(f)$ mediante $D(f, \theta)$, no debe existir un aumento o disminución en la energía de $E(f, \theta)$ (Holthuijsen, 2007).

Existen distintas funciones de distribución direccional, un ejemplo clásico (y una de las más utilizadas) es la descrita por Pierson et al. (1952):

$$D(f, \theta) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \cos^2(\theta), & \text{si } |\theta| \leq 90^\circ \\ 0, & \text{si } |\theta| > 90^\circ. \end{cases} \quad (26)$$

Esta expresión plantea una distribución de energía acotada en un rango de direcciones de $\pm 90^\circ$ (Holthuijsen, 2007). Esta distribución direccional no es útil para el presente trabajo, en el cual se requiere analizar los cambios del espectro direccional en un dominio de $\pm 180^\circ$. Por otro lado, se tiene la distribución direccional propuesta por Longuet-Higgins et al. (1963) (Ec. 27), que se propone a partir del análisis de las mediciones de la aceleración vertical, la pendiente y la curvatura de la superficie del oleaje, realizadas con una boya tipo pitch/roll. La función de distribución direccional de Longuet-Higgins et al. (1963) se expresa como:

$$D(f, \theta) = Q(s) \cos^{2s}\left(\frac{\theta - \theta_m}{2}\right), \quad \text{para } -180^\circ < \theta \leq 180^\circ, \quad (27)$$

donde s es un coeficiente que determina el ancho direccional de la distribución, $Q(s)$ es un factor de normalización y θ_m representa la dirección promedio de propagación del oleaje. Posteriormente, Mitsuyasu et al. (1975) describieron una distribución direccional con forma $\cos^{2s}$, que considera las variables analizadas por Longuet-Higgins et al. (1963), pero con mediciones obtenidas mediante una boya tipo Cloverleaf, en lugar de una boya pitch/roll (Young, 1999). En su trabajo, Mitsuyasu et al. (1975) parametrizan s de la siguiente manera:

$$s = \begin{cases} s_p \left(\frac{f}{f_p}\right)^5, & \text{para } f < f_p \\ s_p \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-2.5}, & \text{para } f \geq f_p, \end{cases} \quad (28)$$

donde s_p relaciona la celeridad de fase (C_p) asociada a la componente f_p y U_{10} (inverso de la edad de la ola) mediante la expresión:

$$s_p = 11.5 \left(\frac{U_{10}}{C_p}\right). \quad (29)$$

Aunque esta distribución considera la distribución de energía en un rango de $\theta \pm 180^\circ$, se ha encontrado que tiende a sobreestimar el ancho angular observado en condiciones reales (Young, 1999). Por esta razón, se optó por emplear la distribución desarrollada por Donelan et al. (1985), formulada a partir de mediciones de oleaje realizadas con arreglos de alambres de capacitancia. Además, diversos autores han demostrado que esta expresión ofrece una representación más realista de la distribución direccional de la energía (Donelan et al., 1985; Young y Van Vledder, 1993; Banner y Young, 1994). Por ello, su uso resulta apropiado en el marco de esta investigación, donde se requiere una caracterización precisa del espectro direccional (Young, 1999). Esta distribución se expresa como:

$$D(f, \theta) = \frac{1}{2} \beta \text{sech}^2(\beta(\theta - \theta_m)), \quad (30)$$

donde β es el parámetro responsable del ancho de la distribución y se determina mediante:

$$\beta = \begin{cases} 2.61 \left(\frac{f}{f_p}\right)^{1.3}, & \text{para } 0.56 < \frac{f}{f_p} < 0.95 \\ 2.28 \left(\frac{f}{f_p}\right)^{-1.3}, & \text{para } 0.95 < \frac{f}{f_p} < 1.6 \\ 10 \left\{ -0.4 + 0.8393 \exp\left(-0.567 \ln\left(\left(\frac{f}{f_p}\right)^2\right)\right) \right\}, & \text{para } \frac{f}{f_p} > 1.6 \text{ (Banner, 1990).} \end{cases} \quad (31)$$

Este parámetro depende de la razón $\frac{f}{f_p}$. Con el propósito de eliminar la variabilidad que dicha dependencia introduce en la distribución direccional, en este trabajo se optó por mantener β constante (independientemente de la frecuencia).

3.2.3. Ancho direccional

Mediante el espectro direccional se describe la distribución direccional de la energía en el campo de olas. Particularmente, podemos identificar el rango en direcciones sobre el cual se distribuye la mayor cantidad de energía, a esto se le conoce como ancho direccional (σ_θ) (Holthuijsen, 2007), que puede expresarse con

$$\sigma_\theta = \sqrt{\int_0^{2\pi} [2 \cdot \sin(\frac{1}{2}(\theta - \theta_m))]^2 D(f, \theta) d\theta}. \quad (32)$$

Con el objetivo de generar espectros direccionales con valores de σ_θ similares a los observados en sistemas Swell y Wind Sea, se evaluaron numéricamente la Ec. 32 y la Ec. 30, con valores de β en el rango $0.6 < \beta < 2.55$ (Fig. 7). Posteriormente, se establecieron los valores de β correspondientes a valores de σ_θ que mejor representaran las condiciones de Swell y Wind Sea (Tabla 5). La distribución direccional de (Donelan et al., 1985) asociada a cada σ_θ seleccionado se muestra en la Fig. 8.

Tabla 5. Valores de β asociados a los σ_θ de interés.

σ_θ	β
20	2.5418
30	1.6452
40	1.1748
50	0.8657
60	0.6262

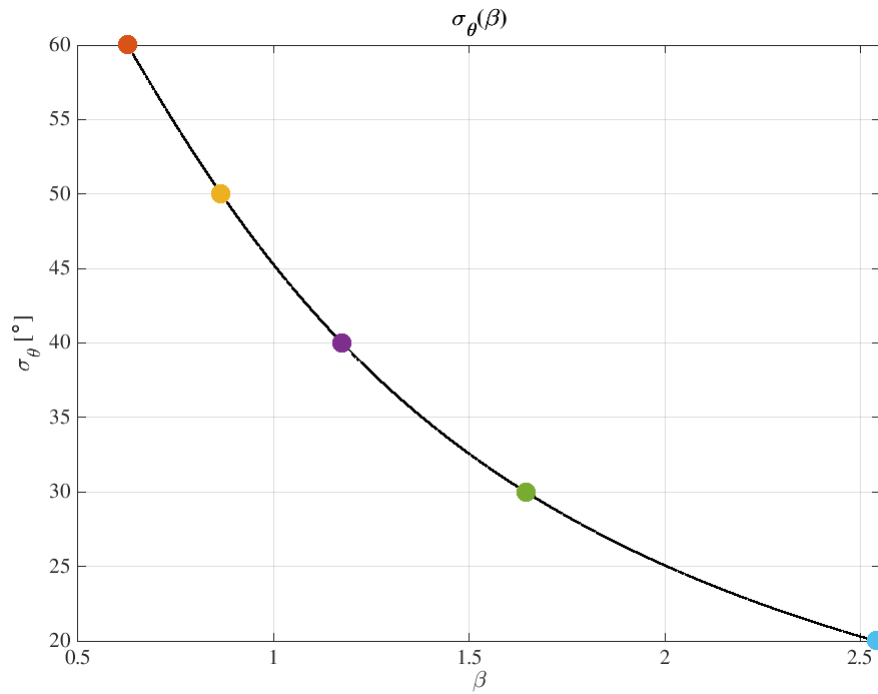


Figura 7. Relación entre σ_θ y el coeficiente β utilizado en el cálculo de $D(f, \theta)$.

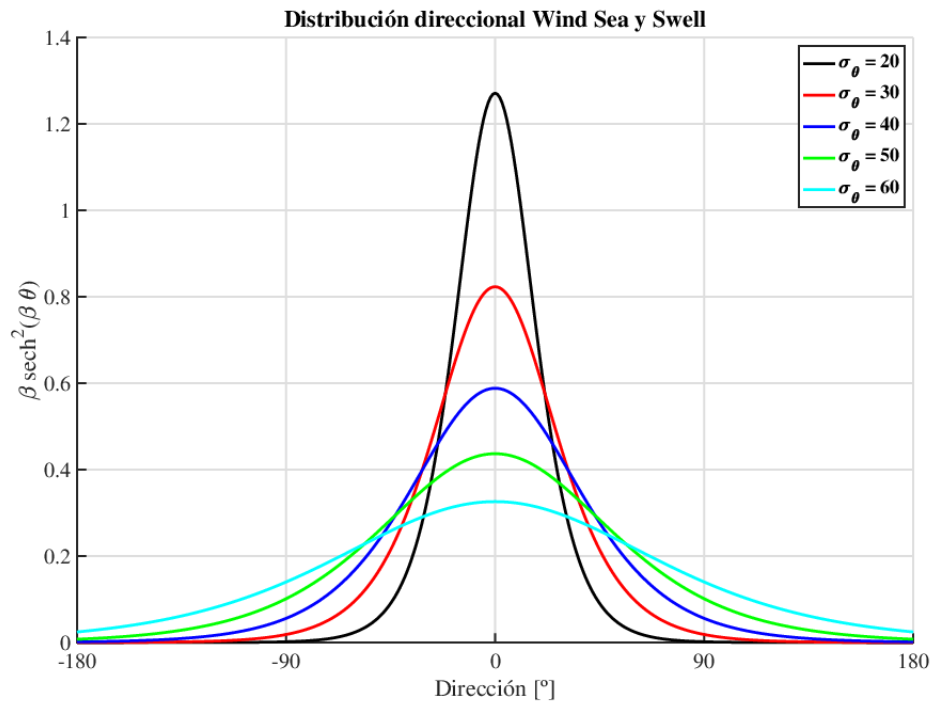


Figura 8. Distribución direccional de Donelan et al. (1985) en función de la dirección de propagación del oleaje para distintos valores de σ_θ . Se observa que al variar σ_θ cambia el rango angular en el que se concentra la energía. Una distribución direccional más acotada, asociada a un valor bajo de σ_θ (línea negra), indica que la energía se propaga en un rango estrecho de direcciones (algo típico en el régimen Swell). Por el contrario, una distribución más amplia de $D(f, \theta)$, con un valor alto de σ_θ (línea cian), muestra que la energía se propaga en un rango más amplio de direcciones (algo común en el régimen Wind Sea).

3.3. Espectros bimodales

Los parámetros seleccionados para representar el oleaje de las regiones GoT e ITS, se presentan en la Tabla 6.

Tabla 6. Parámetros integrales, direccionales y espectrales utilizados para definir espectros direccionales unimodales sintéticos representativos del oleaje de las regiones GoT e ITS. De manera general, el parámetro σ implementado en las Ecs. 21 y 23 tiene valores de 0.07 y 0.09.

Región	Sistema	f_p	H_s	θ_m	σ_θ	γ	α	Espectro unimodal	Caso
GoT	Swell	0.1	1.26	0	20	10	-	C0/20	Caso 0
GoT	Wind Sea	0.215	1.63	180	30	3.3	0.0190	C1/30	Caso 1 Wind Sea
GoT	Wind Sea	0.215	1.63	180	40	3.3	0.0190	C1/40	
GoT	Wind Sea	0.215	1.63	180	50	3.3	0.0190	C1/50	
GoT	Wind Sea	0.215	1.63	180	60	3.3	0.0190	C1/60	
GoT	Wind Sea	0.237	1.26	180	30	3.3	0.0168	C2/30	Caso 2 Wind Sea
GoT	Wind Sea	0.237	1.26	180	40	3.3	0.0168	C2/40	
GoT	Wind Sea	0.237	1.26	180	50	3.3	0.0168	C2/50	
GoT	Wind Sea	0.237	1.26	180	60	3.3	0.0168	C2/60	
GoT	Wind Sea	0.273	0.88	180	30	3.3	0.0140	C3/30	Caso 3 Wind Sea
GoT	Wind Sea	0.273	0.88	180	40	3.3	0.0140	C3/40	
GoT	Wind Sea	0.273	0.88	180	50	3.3	0.0140	C3/50	
GoT	Wind Sea	0.273	0.88	180	60	3.3	0.0140	C3/60	
ITS	Swell _a	0.083	1.6	110	20	10	-	C4/110	Caso 4
ITS	Swell _b	0.062	0.85	85	20	10	-	C4/25	
ITS	Swell _b	0.062	0.85	80	20	10	-	C4/30	
ITS	Swell _b	0.062	0.85	75	20	10	-	C4/35	
ITS	Swell _b	0.062	0.85	70	20	10	-	C4/40	
ITS	Swell _b	0.062	0.85	65	20	10	-	C4/45	

Con base en estos parámetros, se generaron espectros bimodales compuestos por sistemas Wind Sea y Swell, o Swell y Swell, mediante la suma de espectros direccionales según las siguientes expresiones:

$$E(f, \theta)_{BimGoT} = E(f, \theta)_{Ws} + E(f, \theta)_{Sw}, \quad (33)$$

$$E(f, \theta)_{BimITS} = E(f, \theta)_{Sw_a} + E(f, \theta)_{Sw_b}. \quad (34)$$

En los experimentos representativos del oleaje de la región GoT el sistema Swell (C0/20) se mantuvo constante en todos los espectros bimodales generados (Tabla 7). Por otro lado, en los experimentos de la región de ITS, el sistema Swell (C4/110) se mantiene constante en el término “ $E(f, \theta)_{Sw_a}$ ” para todos los espectros bimodales generados (Tabla 7).

Tabla 7. Espectros bimodales sintéticos representativos del oleaje de las regiones GoT e ITS.

Espectros unimodales	Espectro bimodal	Caso
C1/30 + C0/20	C1/30BIM	Caso 1 bimodal
C1/40 + C0/20	C1/40BIM	
C1/50 + C0/20	C1/50BIM	
C1/60 + C0/20	C1/60BIM	
C2/30 + C0/20	C2/30BIM	Caso 2 bimodal
C2/40 + C0/20	C2/40BIM	
C2/50 + C0/20	C2/50BIM	
C2/60 + C0/20	C2/60BIM	
C3/30 + C0/20	C3/30BIM	Caso 3 bimodal
C3/40 + C0/20	C3/40BIM	
C3/50 + C0/20	C3/50BIM	
C3/60 + C0/20	C3/60BIM	
C4/25 + C4/110	C4/25BIM	Caso 4 bimodal
C4/30 + C4/110	C4/30BIM	
C4/35 + C4/110	C4/35BIM	
C4/40 + C4/110	C4/40BIM	
C4/45 + C4/110	C4/45BIM	

3.4. Cálculo y análisis de S_{nl4}

A partir de los resultados de S_{nl4} con espectros unimodales y bimodales obtenidos mediante los esquemas WRT y DIA, se realizaron comparaciones de la transferencia de energía en los dominios f y (f, θ) , así como de la transferencia total, cambios en S_{nl4} por la interacción entre sistemas (efecto de bimodalidad) y el cambio en la transferencia de energía dentro de un sector direccional acotado por σ_θ .

3.4.1. Definición del dominio de frecuencia

El cálculo de la Ec. 8 representa un desafío tanto matemático como computacional. Aunque dicha ecuación tiene solución analítica, su implementación numérica requiere la discretización del dominio de f . En particular, el esquema DIA utilizado en este trabajo, fue calibrado para operar con un vector de frecuencia que aumenta de forma logarítmica según la expresión:

$$f_{i+1} = C0f_i = 1.1f_i, \quad (35)$$

lo que corresponde con una mejor resolución del espectro y de S_{nl4} en frecuencias bajas y una resolución relativamente pobre en frecuencias altas. Así se optimiza el tiempo de cómputo pero se reduce la precisión en la representación del fenómeno.

Por otro lado, el esquema WRT no está restringido a el vector de frecuencias con incremento logarítmico. Esto permite emplear discretizaciones con otro coeficiente de incremento entre frecuencias ($C0$) y, con ello, variar la resolución tanto en frecuencias bajas como en altas. Sin embargo, reducir el valor de $C0$ conlleva un aumento en el tiempo de cómputo en el cálculo de S_{nl4} .

En el cálculo de S_{nl4} con el esquema WRT, se establecieron en el dominio f los valores $f_{inicial} = 0.03$ Hz (este parámetro también se empleo en el cálculo con el esquema DIA) y un valor de f_{final} similar a 1.8 Hz, de acuerdo con el criterio de van Vledder (2006), quien indica que el efecto de S_{nl4} (al utilizar el esquema WRT) es despreciable cuando $f_{final} > 6f_p$, considerando que el valor máximo de f_p en los experimentos fue de 0.273 Hz. Para seleccionar el coeficiente $C0$ a utilizar en este trabajo, se realizaron pruebas asociadas al error numérico en la estimación de S_{nl4} .

3.4.2. Error numérico en el cálculo de S_{nl4}

Como se mencionó anteriormente, S_{nl4} representa el mecanismo mediante el cual cuádrupletas de olas que satisfacen las condiciones de resonancia transfieren energía entre sí. Este proceso es conservativo, lo que implica que no se genera ni se disipa energía dentro del sistema, sino que se redistribuye entre las componentes resonantes (Young y Van Vledder, 1993), de modo que:

$$\iint S_{nl4}(f, \theta) df d\theta = 0. \quad (36)$$

No obstante, al calcular S_{nl4} mediante esquemas numéricos, se introduce un error numérico inherente a la propia discretización. En este contexto, el error numérico (Err) se define como cualquier desviación respecto a la condición de conservación expresada en la Ec. 36, es decir:

$$Err = \iint S_{nl4}(f, \theta) df d\theta \neq 0. \quad (37)$$

Con el objetivo de seleccionar los parámetros numéricos que minimizan el valor de Err , se realizaron comparaciones con diferentes configuraciones para cada esquema, considerando los mismos casos espectrales unimodales y bimodales. En el caso de las pruebas con el esquema DIA (con $C0$ constante), el valor de Err se evaluó a partir del cálculo de S_{nl4} al variar f_{max} y el número de frecuencias correspondiente (N_f) (Fig. 9). Los valores de f_{max} empleados se presentan en la Tabla 8.

Tabla 8. Parámetros numéricos utilizados en el análisis del error en el cálculo de S_{nl4} con el esquema DIA asociado a diferentes valores de N_f .

f_{final}	1.02	1.23	1.49	1.80	2.18	2.64	3.20	3.87	4.68	5.67
N_f	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56

Por otro lado, al modificar el coeficiente $C0$, el número de frecuencias N_f en el dominio f para un valor específico de f_{final} también cambia. En este caso, no siempre se obtiene una frecuencia que coincida exactamente con f_{final} . La Tabla 9 presenta distintos valores de $C0$, f_{final} , N_f y el tiempo de cómputo (t) para un caso de S_{nl4} .

Tabla 9. Parámetros numéricos utilizados en el análisis del error en el cálculo de S_{n14} con el esquema WRT al variar el valor de $C0$.

$C0$	f_{final}	N_f	t [min]
1.10	1.8072	44	0.55
1.09	1.8776	49	0.75
1.08	1.9143	55	0.87
1.07	1.8600	62	1.17
1.06	1.8700	72	1.49
1.05	1.8000	85	2.16
1.04	1.8434	106	3.59
1.03	1.8260	140	7.56
1.02	1.8087	208	17.86

En consecuencia, en las pruebas del esquema WRT se consideró la extensión del dominio f asociada a cada valor de $C0$. La evaluación de Err en función de $C0$ se realizó únicamente para S_{n14} calculado con dicho esquema, donde se buscó aproximar f_{final} a 1.8 Hz en los diferentes valores de $C0$, como se muestra en la Fig. 10.

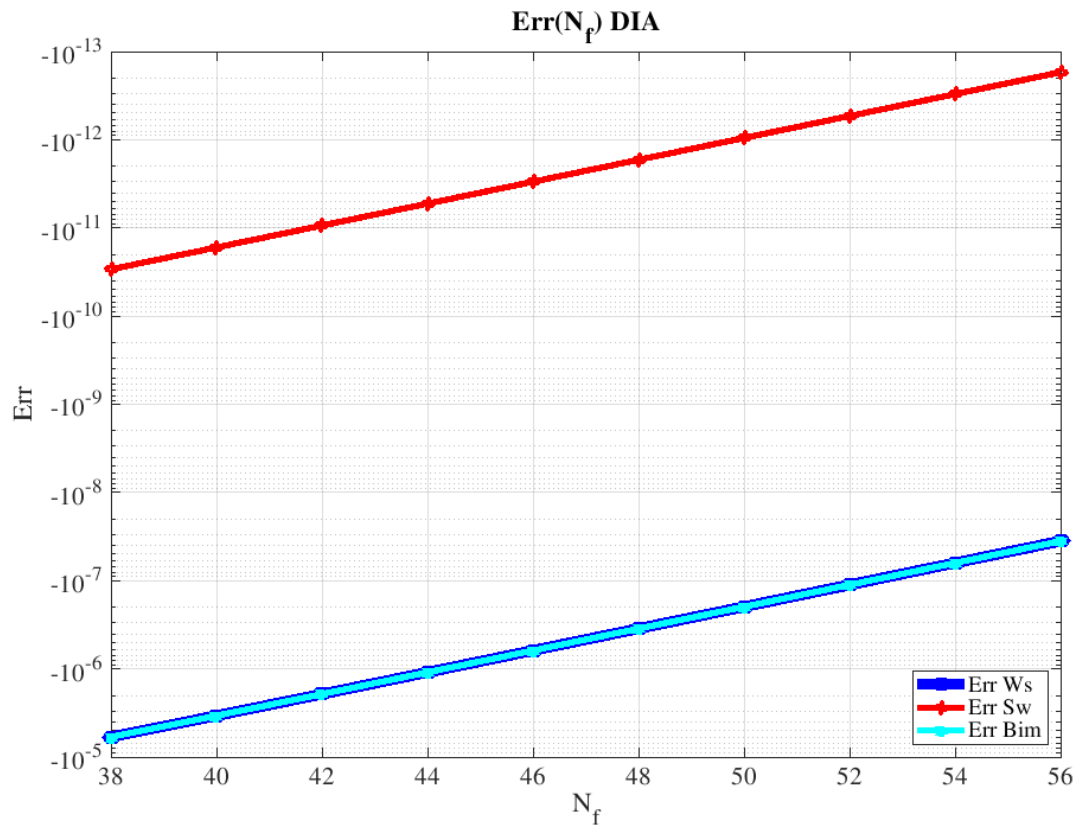


Figura 9. Error numérico en el cálculo de S_{n14} asociado a diferentes valores de N_f para espectros unimodales Wind Sea y Swell (líneas azul y roja, respectivamente), así como para un espectro bimodal (línea cian).

En la comparación de Err con el esquema DIA, se observa que el error es mayor en los casos unimodal Wind sea y bimodal cuando N_f es mínimo, y disminuye de forma progresiva conforme este parámetro aumenta. En el caso unimodal Swell, el error es menor al registrado en los otros dos casos aunque sigue la tendencia de ser menor conforme N_f aumenta.

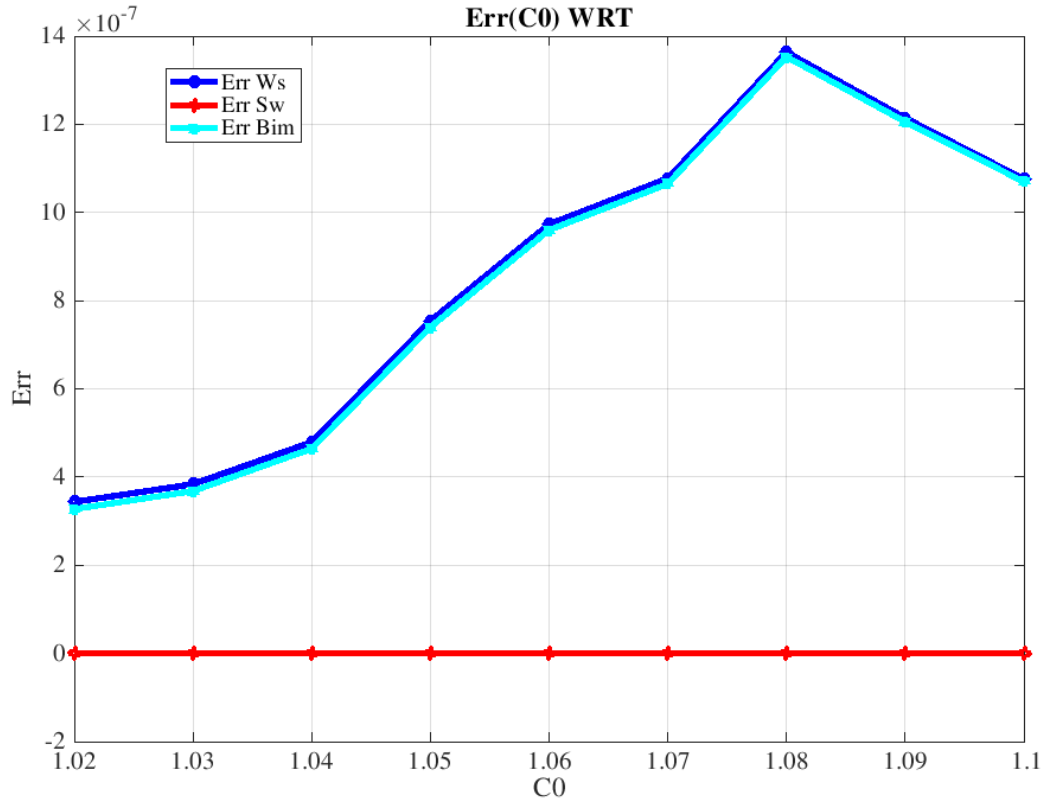


Figura 10. Error numérico en el cálculo de S_{nl4} asociado a diferentes valores de $C0$ para espectros unimodales Wind Sea y Swell (líneas azul y roja, respectivamente), así como para un espectro bimodal (línea cían).

En la comparación de Err con el esquema WRT, se observa que el menor error correspondiente a los casos unimodal Wind Sea y bimodal cuando $C0 = 1.02$, el error aumenta con $C0$. En el caso unimodal Swell, el error es menor al observado en los otros dos casos independientemente del valor de $C0$.

3.4.2.1. Error normalizado

Para evaluar la relevancia del error en el cálculo de S_{nl4} asociado a diferentes valores de $C0$ o N_f , se normalizó Err con respecto a la transferencia total de S_{nl4} (T_{total}), la cual se obtiene al evaluar el valor

absoluto de la transferencia de energía ($|S_{nl4}(f, \theta)|$) tal que:

$$T_{total} = \int_0^{2\pi} \int_{f_{inicial}}^{f_{final}} |S_{nl4}(f, \theta)| df d\theta. \quad (38)$$

Con lo cual el error normalizado (ϵ) expresa el peso del error con respecto a la transferencia total calculada por el esquema y se expresa como:

$$\epsilon = \frac{Err}{T_{total}} * 100. \quad (39)$$

Con esta métrica, se calculó ϵ en cada una de las simulaciones realizadas con los esquemas DIA y WRT. Los valores obtenidos se presentan en las Figuras 11 y 12.

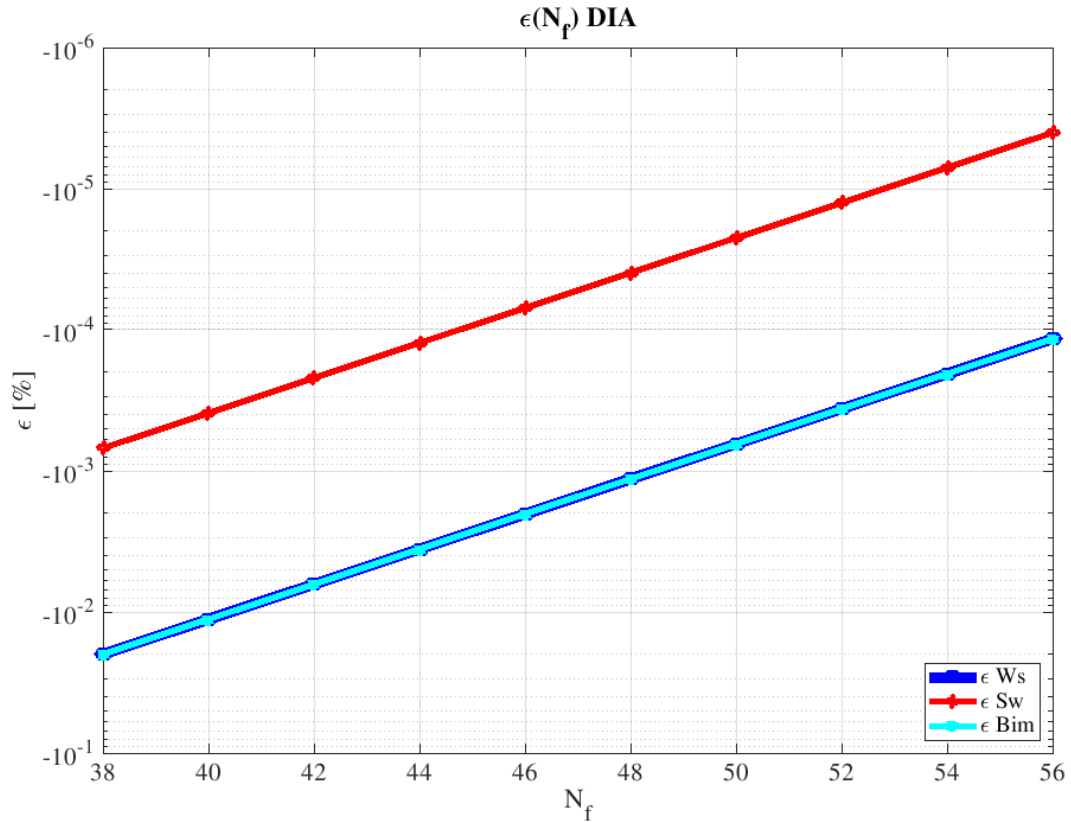


Figura 11. Error numérico normalizado (ϵ) en la estimación de S_{nl4} al variar N_f en espectros unimodales Wind Sea y Swell (líneas azul y roja, respectivamente) y en un espectro bimodal (línea cian).

En la comparación de ϵ con el esquema DIA, se observa que ϵ es mayor en los casos unimodales y

bimodal cuando N_f es menor y disminuye conforme N_f aumenta. En el caso unimodal Swell, ϵ es menor al registrado en los otros dos casos. Cabe resaltar que la diferencia en los órdenes de magnitud en ϵ para el caso unimodal Swell con relación al unimodal Wind Sea y bimodal, es menor a lo observado en Err . Esto se debe a que la transferencia calculada en los casos de Wind Sea y bimodal es mayor con relación a lo calculado en el caso Swell. Sin embargo, el valor de ϵ del caso Swell mantiene la tendencia de ser menor conforme N_f aumenta.

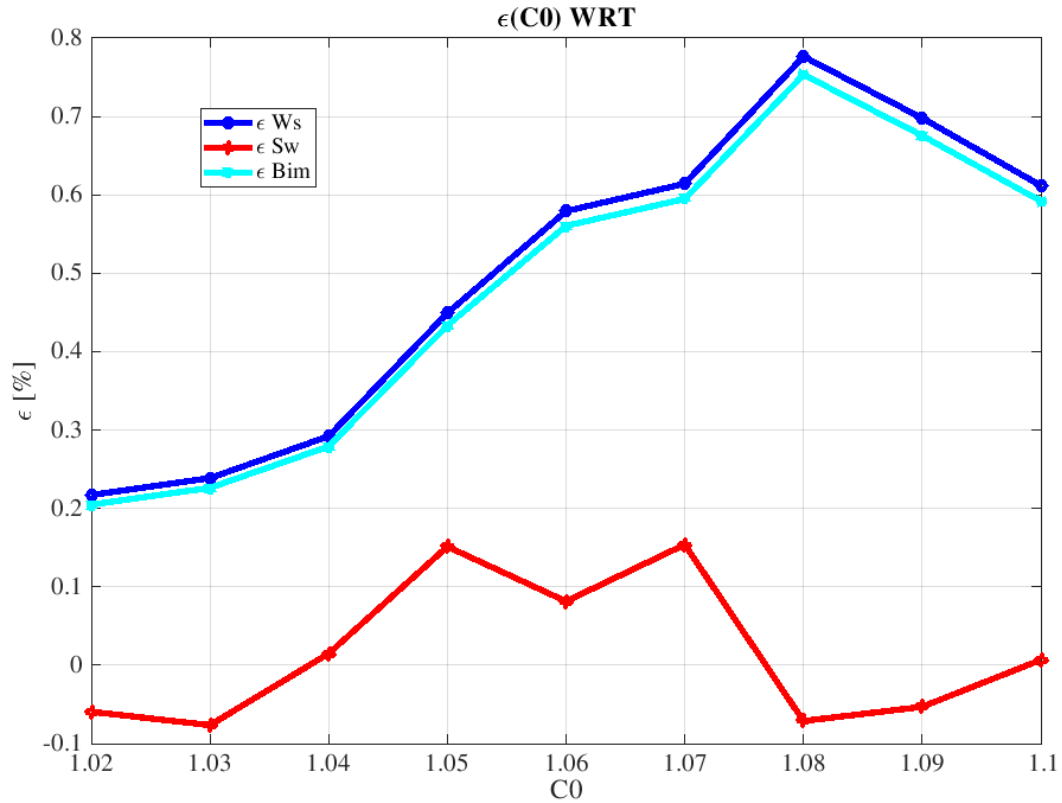


Figura 12. Error numérico normalizado (ϵ) en la estimación de S_{n14} al variar $C0$ en espectros unimodales Wind Sea y Swell (líneas azul y roja, respectivamente) y en un espectro bimodal (línea cían).

En la comparación de ϵ con el esquema WRT, se observa que ϵ es mínimo en los casos unimodal Wind Sea y bimodal cuando $C0 = 1.02$, e incrementa conforme aumenta este parámetro. En el caso unimodal Swell, ϵ es menor que en los otros dos casos. La variabilidad que se presenta en el caso Swell y en algunos valores de Wind Sea y bimodal, sugieren que el valor de $C0$ no es el único involucrado en el error numérico asociado al esquema WRT aunque si el principal. Otro aspecto a considerar podría ser la diferencia en el valor de f_{final} por la variación del valor de $C0$. No obstante, explorar esta variabilidad requiere diseñar pruebas específicas con el esquema WRT lo cual se escapa del alcance de este trabajo.

Con base en los resultados de ϵ , se seleccionó el coeficiente $C0$ igual a 1.02 para el cálculo de S_{n14} con el

esquema WRT, por presentar el menor porcentaje de error en los casos unimodal Wind Sea y bimodal. La variabilidad de ϵ en el caso unimodal Swell tuvo menor relevancia en la decisión, debido a que su error no normalizado fue considerablemente más bajo en comparación con los demás casos. Para el cálculo de S_{nl4} con el esquema DIA, se decidió utilizar N_f igual a 56 por mostrar el menor error numérico.

3.4.3. Parámetros utilizados en el cálculo de S_{nl4}

Con base en el análisis del error normalizado, los parámetros utilizados para generar los espectros direccionales empleados en el cálculo de S_{nl4} ($f_{inicial}$, la resolución direccional en grados (n_θ), $C0$, y N_f) se describen en la Tabla 10.

Tabla 10. Parámetros para la generación de los espectros direccionales empleados en el cálculo de S_{nl4} mediante los esquemas WRT y DIA.

Esquema	$f_{inicial}$ [Hz]	f_{final} [Hz]	n_θ	N_f	$C0$
WRT	0.03	1.80	360	208	1.02
DIA	0.03	5.67	360	56	1.1

3.4.4. Análisis de la transferencia de energía

Para evaluar las diferencias en la transferencia de energía estimada con cada esquema, se examinó la estructura de $S_{nl4}(f)$ de los casos unimodales y bimodales (Ec. 40) y la transferencia total (Ec. 38).

$$S_{nl4f}(f) = \int_0^{2\pi} S_{nl4}(f, \theta) d\theta. \quad (40)$$

3.4.5. Efecto debido a la bimodalidad

Con el objetivo de identificar cambios en S_{nl4} asociados a la presencia de un segundo régimen de oleaje, se determinó la diferencia entre S_{nl4} de un espectro bimodal y la suma de S_{nl4} de sus componentes unimodales. Para el caso de GoT, se empleó:

$$\Delta S_{nl4}(f, \theta) = S_{nl4}(f, \theta)_{Bim} - (S_{nl4}(f, \theta)_{Ws} + S_{nl4}(f, \theta)_{Sw}), \quad (41)$$

mientras que para el caso de ITS, se utilizó:

$$\Delta S_{nl4}(f, \theta) = S_{nl4}(f, \theta)_{Bim} - (S_{nl4}(f, \theta)_{Sw_a} + S_{nl4}(f, \theta)_{Sw_b}). \quad (42)$$

En ambos casos, ΔS_{nl4} describe la diferencia en la transferencia de energía asociada a la interacción entre sistemas de un espectro bimodal (efecto debido a la bimodalidad), con respecto a la transferencia de energía de sus componentes unimodales.

3.4.6. Análisis de la transferencia de energía en sectores direccionales

Dada la importancia de S_{nl4} en la distribución direccional de la energía, se examinó cómo la bimodalidad del espectro podría modificar dicha distribución. No obstante, evaluar $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ en todo el dominio direccional (Ec. 43) resulta impráctico para el análisis de $\Delta S_{nl4f}(f)$ de un sistema en específico, ya que se sumaría la energía correspondiente a una misma frecuencia aunque provenga de direcciones distintas.

$$\Delta S_{nl4f}(f) = \int_0^{2\pi} \Delta S_{nl4}(f, \theta) d\theta. \quad (43)$$

Para analizar únicamente los efectos atribuibles a la bimodalidad en $\Delta S_{nl4f}(f)$ de un sistema específico, se evaluó $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ dentro de un sector direccional centrado en θ_m , correspondiente a cada sistema, y acotado por σ_θ , tal que:

$$\Delta S_{nl4f}(f)_a = \int_{\theta_{ma} - \frac{\sigma_{\theta a}}{2}}^{\theta_{ma} + \frac{\sigma_{\theta a}}{2}} \Delta S_{nl4}(f, \theta) d\theta \quad (44)$$

$$\Delta S_{nl4f}(f)_b = \int_{\theta_{mb} - \frac{\sigma_{\theta b}}{2}}^{\theta_{mb} + \frac{\sigma_{\theta b}}{2}} \Delta S_{nl4}(f, \theta) d\theta. \quad (45)$$

Mediante este enfoque, se facilita el análisis del efecto de la bimodalidad en la región con mayor con-

centración de energía de cada sistema.

Capítulo 4. Resultados y discusión

En esta sección se presentan los resultados del análisis de S_{n14} en casos de oleaje unimodal y bimodal con la intención de representar el oleaje prevaleciente en las regiones GoT e ITS. Se comparan las estimaciones de S_{n14} calculadas con los esquemas WRT y DIA, con énfasis en la intensidad de la transferencia de energía y en la modificación de su distribución direccional. Posteriormente, se examina el efecto de la bimodalidad del espectro en el cálculo de S_{n14} . Finalmente, se plantea un modelo conceptual como herramienta para interpretar el efecto de la bimodalidad en S_{n14} y su posible impacto en la evolución del espectro direccional.

4.1. Golfo de Tehuantepec

En esta sección se presentan los resultados del análisis asociados a los espectros direccionales del experimento GoT. En donde se considera un sistema Swell que se propaga en dirección opuesta a un sistema Wind Sea. Los resultados incluyen: la comparación de la estimación de S_{n14} mediante los esquemas WRT y DIA respecto a la magnitud y distribución angular de la transferencia de energía, la cuantificación de la transferencia total de energía y los efectos asociados a la bimodalidad espectral.

4.1.1. Espectros direccionales

Se presentan los espectros direccionales unimodales y bimodales sintéticos que se utilizaron como base para calcular S_{n14} mediante los esquemas WRT y DIA. Particularmente, sólo se muestran como ejemplo los espectros del caso 1 Wind Sea (C1/30, C1/40, C1/50 y C1/60) y bimodal (C1/30BIM, C1/40BIM, C1/50BIM y C1/60BIM) al considerar que los demás casos presentan espectros similares.

4.1.1.1. Espectros direccionales unimodales

Para identificar diferencias debidas a la selección de los parámetros numéricos ($C0$, N_f , f_{final}) empleados en la generación de los espectros direccionales que se utilizarán en los esquemas de cálculo WRT o DIA, en

esta sección se presentan ejemplos de espectros direccionales unimodales representativos de los sistemas Wind Sea con diferente ancho direccional σ_θ (Figuras 13, 14, 15, 16) y Swell (Fig. 17), utilizados como base para estimar S_{nl4} .

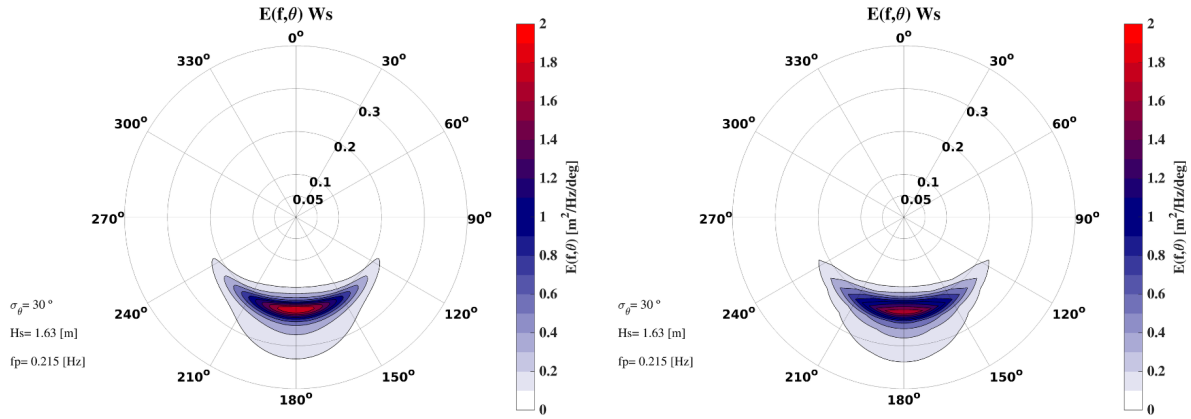


Figura 13. Espectros direccionales unimodales que representan un sistema Wind Sea con una dirección de propagación $\theta_m = 180^\circ$ y un ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C1/30). El panel izquierdo describe el espectro utilizado como base para la evaluación con el esquema WRT, mientras que el panel derecho corresponde al espectro base del esquema DIA. Los contornos describen la densidad de energía espectral y aumentan cada $\frac{E(f, \theta)_{max}}{9}$ unidades de densidad de energía espectral.

En la Fig. 13 se presenta el $E(f, \theta)$ del Wind Sea que es utilizado para estimar S_{nl4} con el esquema WRT (panel izquierdo) y el esquema DIA (panel derecho). El ancho típico de la distribución direccional es $\sigma_\theta = 30^\circ$. Se aprecia una densidad de energía mayor en el caso del $E(f, \theta)$ que se utiliza como base para el cálculo de S_{nl4} mediante el esquema WRT.

Al variar el ancho de la distribución direccional a $\sigma_\theta = 40^\circ$ (Fig. 14) se aprecia que la energía se distribuye en un rango más amplio de direcciones en ambos espectros. Al aumentar aún más el ancho direccional tal que $\sigma_\theta = 50^\circ$ (Fig. 15) y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (Fig. 16) se puede observar que existe energía espectral que se propaga en direcciones hasta $\theta_m \pm 170^\circ$.

Al comparar los casos de espectros direccionales unimodales, se observan diferencias en la energía y su distribución direccional. Cabe destacar que la diferencia en la energía es esperada debido a la distinta discretización del dominio de f asociada a cada esquema. En particular, los espectros empleados para el cálculo mediante el esquema WRT presentan ligeramente mayor energía en comparación con los espectros utilizados en el esquema DIA. Sin embargo, es importante mencionar que la energía total es prácticamente igual en los dos espectros.

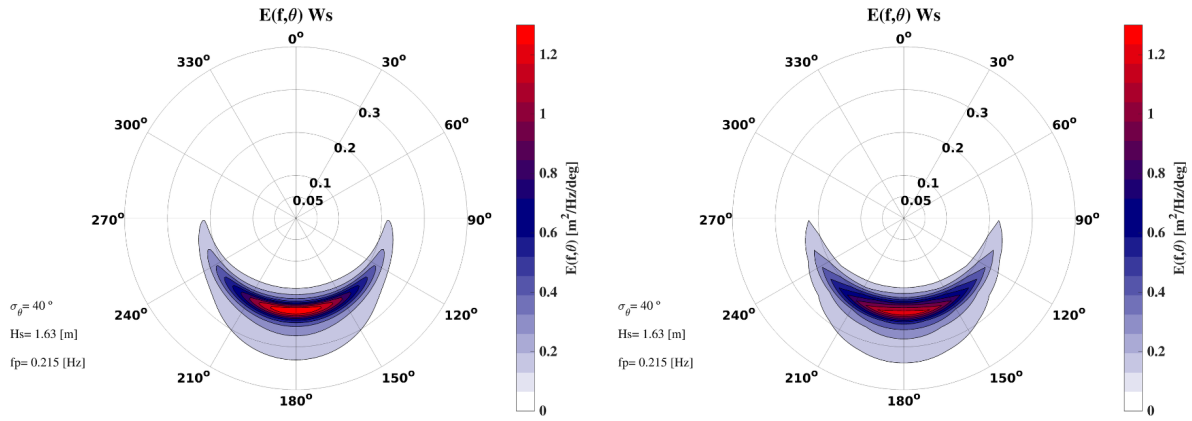


Figura 14. Espectros direccionales unimodales del sistema Wind Sea con $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C1/40).

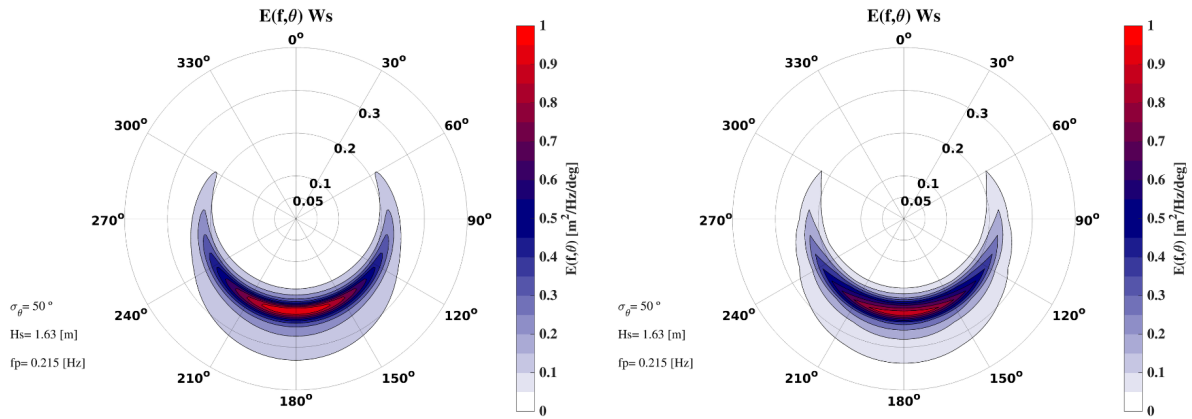


Figura 15. Espectros direccionales unimodales del sistema Wind Sea con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C1/50).

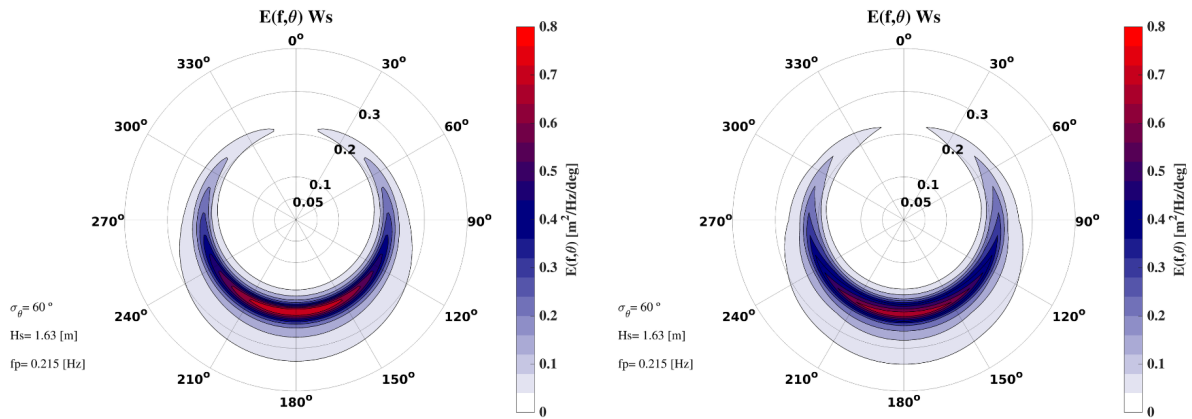


Figura 16. Espectros direccionales unimodales del sistema Wind Sea con $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C1/60).

Al igual que en los casos de Wind Sea, en el caso de los sistemas Swell (Fig. 17) se aprecia una densidad de energía ligeramente mayor en el caso del $E(f, \theta)$ que se utilizará como base para el cálculo de S_{n14} mediante el esquema WRT. Cabe aclarar que esta ligera diferencia es debida a la distinta discretización, pero la energía es prácticamente la misma.

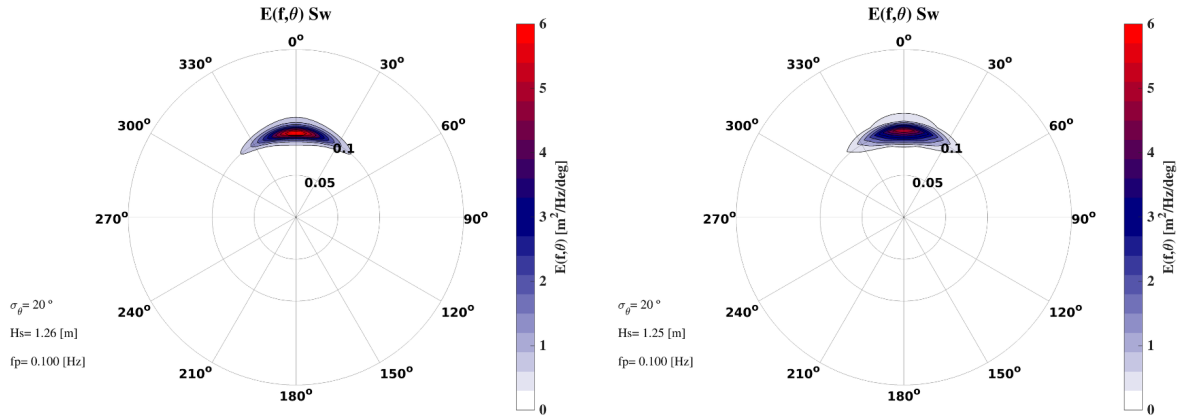


Figura 17. Espectros direccionales unimodales que representan un sistema Swell con una dirección de propagación $\theta_m = 0^\circ$ y un ancho direccional $\sigma_\theta = 20^\circ$ (C0/20). El panel izquierdo describe el espectro utilizado como base para la evaluación con el esquema WRT, mientras que el panel derecho corresponde al espectro base del esquema DIA. Los contornos describen la densidad de energía espectral y aumentan cada $\frac{E(f, \theta)_{max}}{9}$ unidades de densidad de energía espectral.

4.1.1.2. Espectros direccionales bimodales

En esta sección, se presentan los espectros direccionales bimodales (Figuras 18, 19, 20 y 21), contruidos a partir de la combinación de los sistemas Swell y Wind Sea, que se emplean como base para estimar S_{n14} con los esquemas de cálculo WRT y DIA.

Los espectros direccionales bimodales se construyeron con base en la Ec. 33, sumando los espectros unimodales representativos del Wind Sea y del Swell prevaecientes en el GoT durante eventos Tehuanos. Estos espectros representan sistemas de oleaje que se propagan en direcciones opuestas. De forma análoga a los casos de espectros unimodales, se analizan las diferencias en energía y su distribución direccional, originadas por la discretización en el dominio f .

En la Fig. 18 se presenta el espectro direccional bimodal con un sistema Wind Sea que se propaga con $\theta_m = 180^\circ$ y $\sigma_\theta = 30^\circ$ y un sistema Swell con dirección $\theta_m = 0^\circ$ y $\sigma_\theta = 20^\circ$. El panel izquierdo presenta el espectro direccional bimodal utilizado para calcular S_{n14} con el esquema WRT, mientras que el panel

de la derecha muestra el espectro direccional bimodal utilizado para calcular S_{nl4} con el esquema DIA.

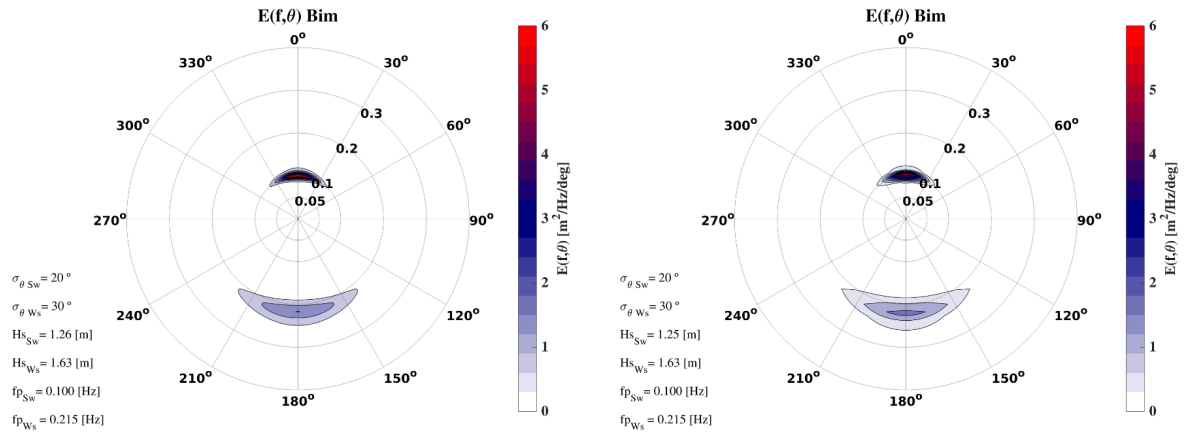


Figura 18. Espectros direccionales bimodales, en donde se presenta un sistema Wind Sea con dirección de propagación $\theta_m = 180^\circ$ y ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$ y un sistema Swell con $\theta_m = 0^\circ$ y $\sigma_\theta = 20^\circ$ (C1/30BIM). El panel izquierdo describe el espectro utilizado como base para la evaluación con el esquema WRT, mientras que el panel derecho corresponde al espectro base del esquema DIA. Los contornos describen la densidad de energía espectral y aumentan cada $\frac{E(f, \theta)_{max}}{9}$ unidades de densidad de energía espectral.

Aunque los parámetros integrales del oleaje son prácticamente iguales, la diferencia en la discretización del dominio f requerida para cada esquema, induce ligeras variaciones en la cantidad y distribución de la energía espectral. Sin embargo, la energía total de ambos sistemas es prácticamente la misma.

Con respecto al sistema Wind Sea, la energía en los espectros utilizados como base para calcular S_{nl4} con el esquema WRT se distribuye en un mayor rango direccional en comparación con el espectro que se utiliza en el esquema DIA. En el caso del sistema Swell, la representación espectral es prácticamente la misma.

En las Figuras 19, 20 y 21 se presentan espectros direccionales similares a los de la Fig. 18 aunque se varía el valor de σ_θ del sistema Wind Sea con $\sigma_\theta = 40^\circ$, 50° y 60° , respectivamente.

Al aumentar el ancho direccional del sistema Wind Sea, la energía se redistribuye hacia diferentes direcciones y disminuye en la dirección principal de propagación. Este cambio se aprecia en las figuras, donde conforme incrementa σ_θ , los contornos en la dirección principal se vuelven más tenues. En la Fig. 21, la energía representada por los contornos es considerablemente menor en comparación con el caso de $\sigma_\theta = 30^\circ$ (Fig. 18), donde la cantidad de energía que se distribuye en la dirección principal de propagación es mayor.

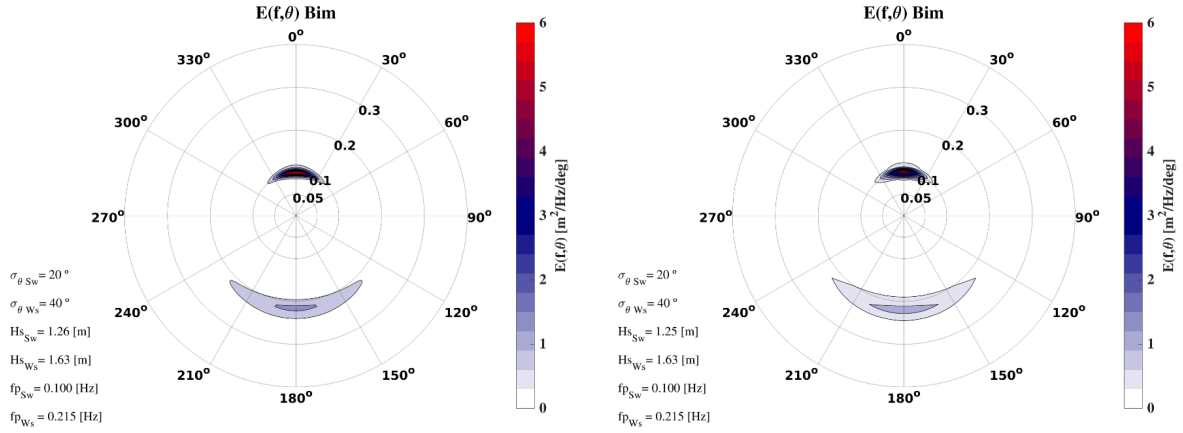


Figura 19. Espectros direccionales bimodales, en donde el sistema Wind Sea describe $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C1/40BIM).

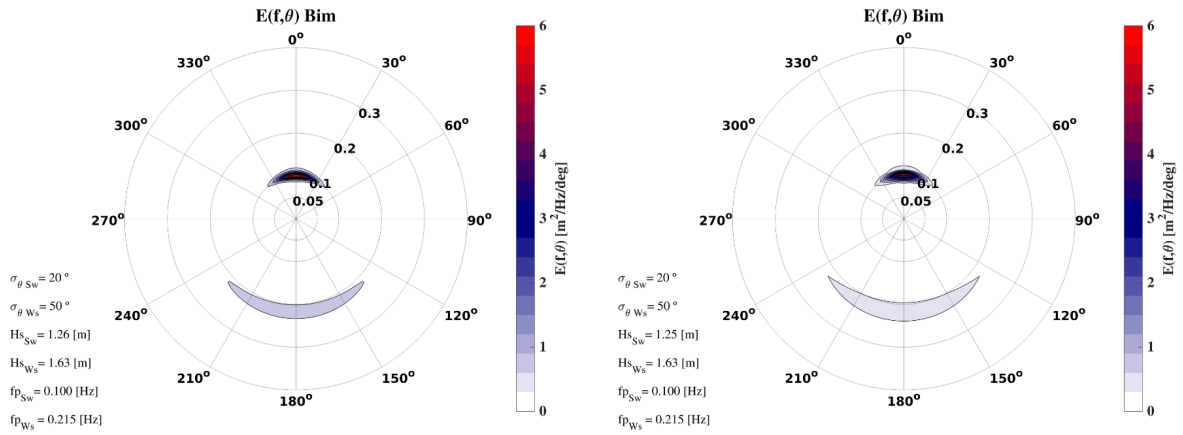


Figura 20. Espectros direccionales bimodales, en donde el sistema Wind Sea describe $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C1/50BIM).

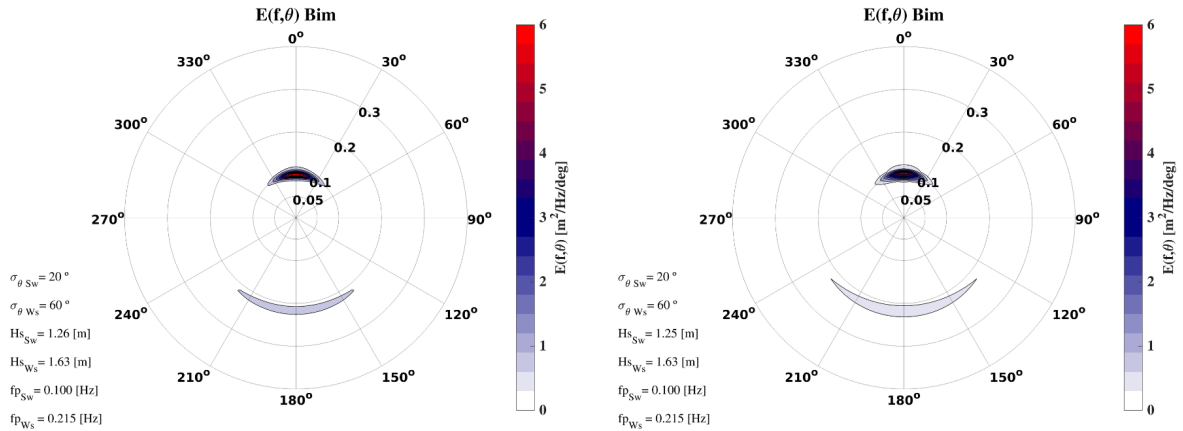


Figura 21. Espectros direccionales bimodales, en donde el sistema Wind Sea describe $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C1/60BIM).

4.1.2. Estructura de S_{nl4} en el dominio frecuencia-dirección

En esta sección se presentan los resultados de la estimación de S_{nl4} mediante los esquemas WRT y DIA, a partir de espectros direccionales unimodales y bimodales, en términos de la frecuencia y la dirección.

4.1.2.1. Estructura de $S_{nl4}(f, \theta)$ de casos de espectros direccionales unimodales

En esta sección, se muestran los resultados de $S_{nl4}(f, \theta)$ estimados a partir de espectros unimodales de los casos Wind Sea; 1 (C1/30, C1/40, C1/50 y C1/60), 2 (C2/30, C2/40, C2/50 y C2/60) y 3 (C3/30, C3/40, C3/50 y C3/60) y Swell (C0/20), mediante los esquemas WRT y DIA. Con estos resultados se busca identificar variaciones en la forma y magnitud de $S_{nl4}(f, \theta)$ como respuesta a cambios en σ_θ del sistema Wind Sea o al esquema numérico utilizado. Además, son de utilidad para interpretar los cambios de $S_{nl4}(f, \theta)$ en condiciones bimodales.

La complejidad de la estructura de $S_{nl4}(f, \theta)$ y el interés por caracterizar la evolución de $E(f, \theta)$ en dirección a favor y opuesta a θ_m (referenciado al sistema Wind Sea) motivaron analizar $S_{nl4}(f, \theta)$ en dos sectores. El sector A, definido en el sentido de θ_m , abarca el intervalo entre 90° y 270° . El sector B, orientado en sentido opuesto a θ_m , comprende el intervalo entre 270° y 90° .

En el sector A, los resultados de $S_{nl4}(f, \theta)$ con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (paneles a y b de las Figuras 22, 24 y 26), se identificó el patrón tri-lobular característico de S_{nl4} (Young y Van Vledder, 1993). Este patrón está compuesto por tres lóbulos principales. El primer lóbulo corresponde a una transferencia positiva máxima localizada en frecuencias menores a f_p , dentro de un rango direccional aproximado de $\pm 60^\circ$ respecto a θ_m . Presenta valores del orden de 10^{-4} (tonos rojizos-marrón). El segundo lóbulo muestra una transferencia negativa máxima en la periferia de la banda de f_p centrada en θ_m con una extensión direccional que alcanza aproximadamente $\pm 60^\circ$ y $\pm 15^\circ$ en frecuencias superiores. Presenta valores del orden de -10^{-4} (tonos azules-morados). Finalmente, se identificaron dos lóbulos secundarios de transferencia positiva en frecuencias mayores a f_p , localizados de forma oblicua y centrados cerca de $\pm 45^\circ$ respecto a θ_m . La intensidad de la transferencia positiva del lóbulo principal disminuye al aproximarse a direcciones $\pm 90^\circ$ de θ_m , mientras que la transferencia negativa disminuye conforme aumenta f .

Aunque ambos esquemas reproducen una estructura tri-lobular similar, con el esquema DIA se estima una mayor intensidad y una mayor extensión de las regiones de transferencia, tanto positiva como negativa,

en comparación con el esquema WRT.

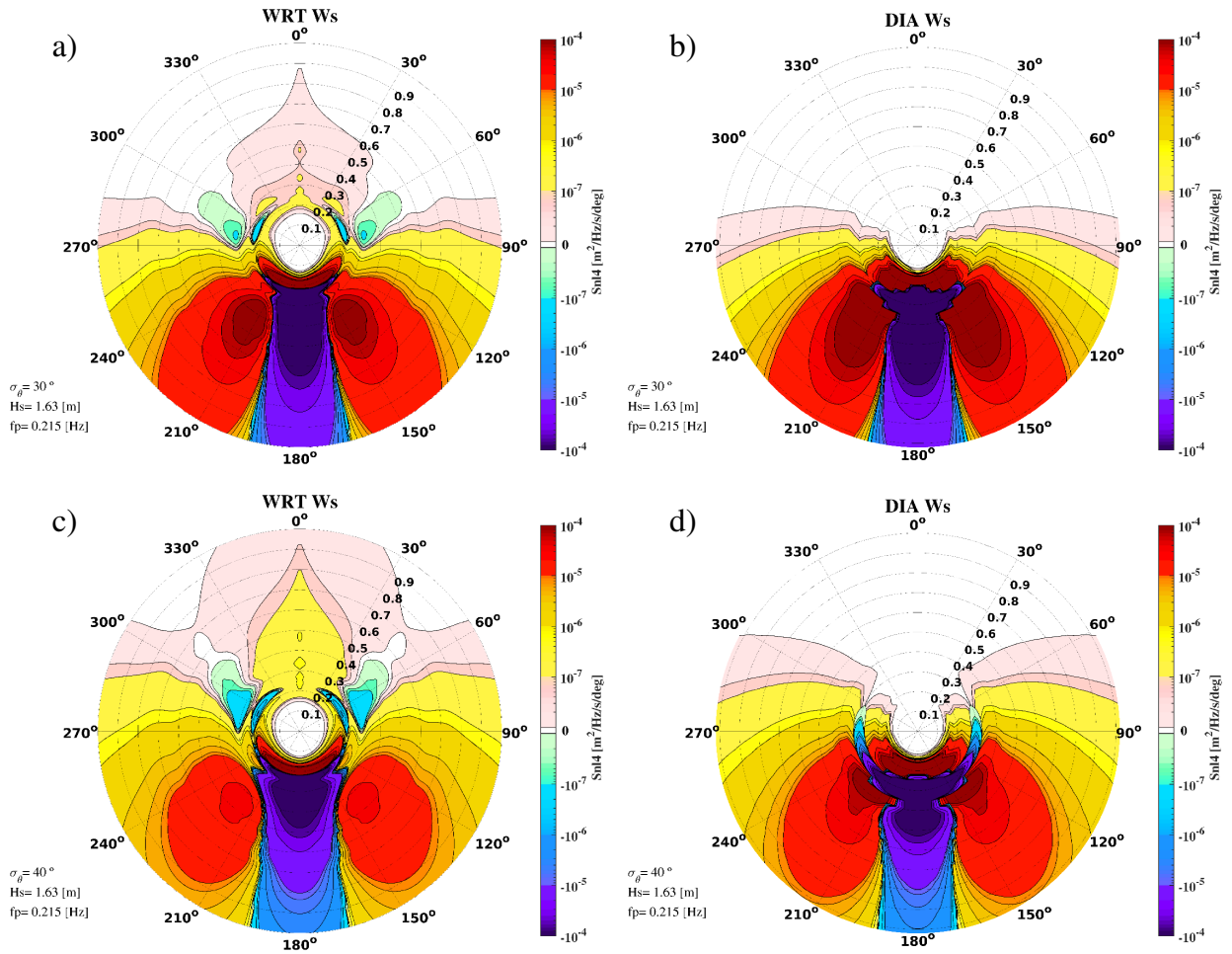


Figura 22. $S_{n14}(f, \theta)$ de espectros direccionales unimodales que representan un sistema Wind sea con una dirección de propagación $\theta_m = 180^\circ$. Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Los casos con ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C1/30) se presentan en los paneles a y b, y aquellos con $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C1/40), en los paneles c y d. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{n14} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cíen), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas).

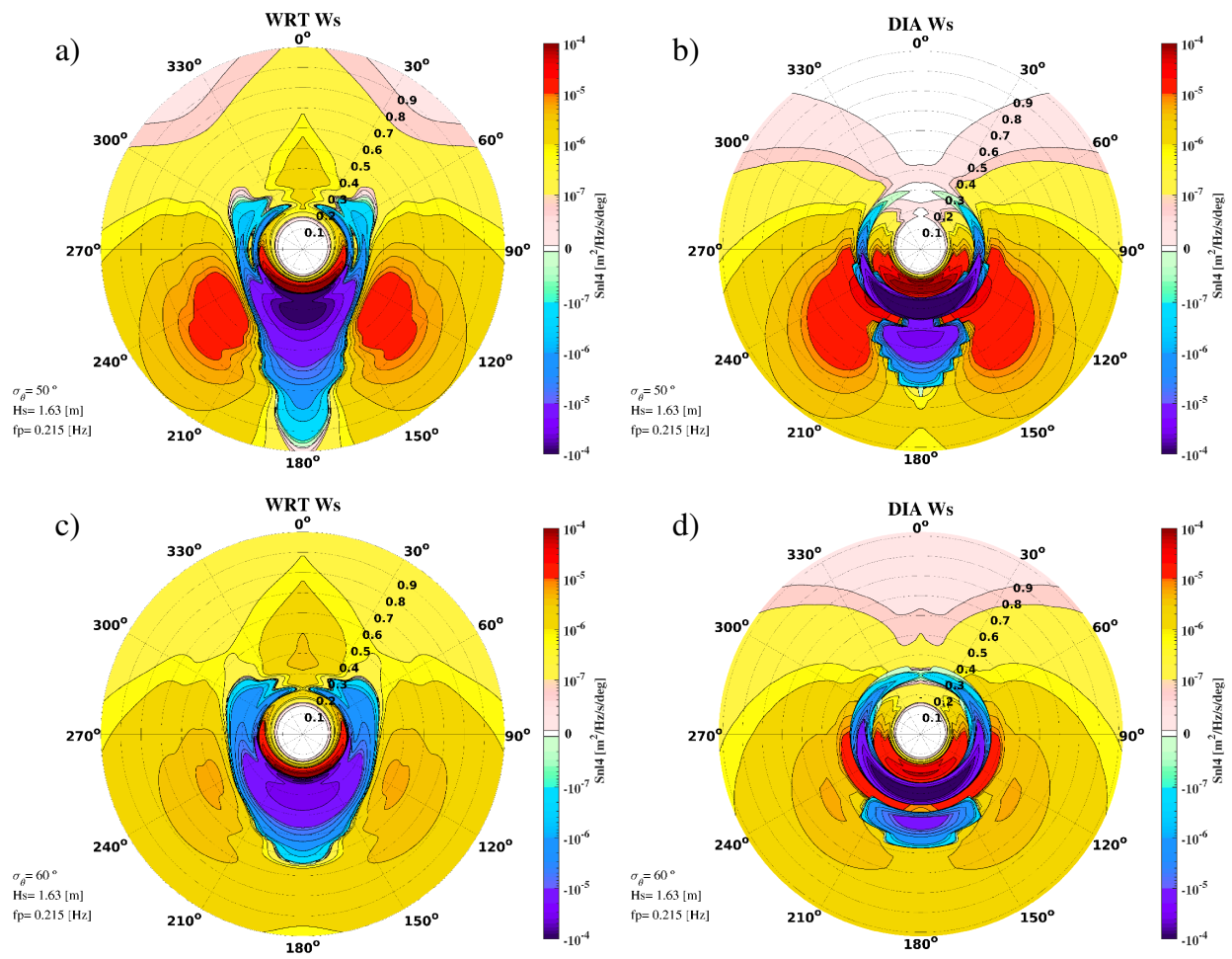


Figura 23. Similar a lo descrito en la Fig. 22 del caso 1 Wind Sea, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C1/50) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C1/60) en los paneles c y d.

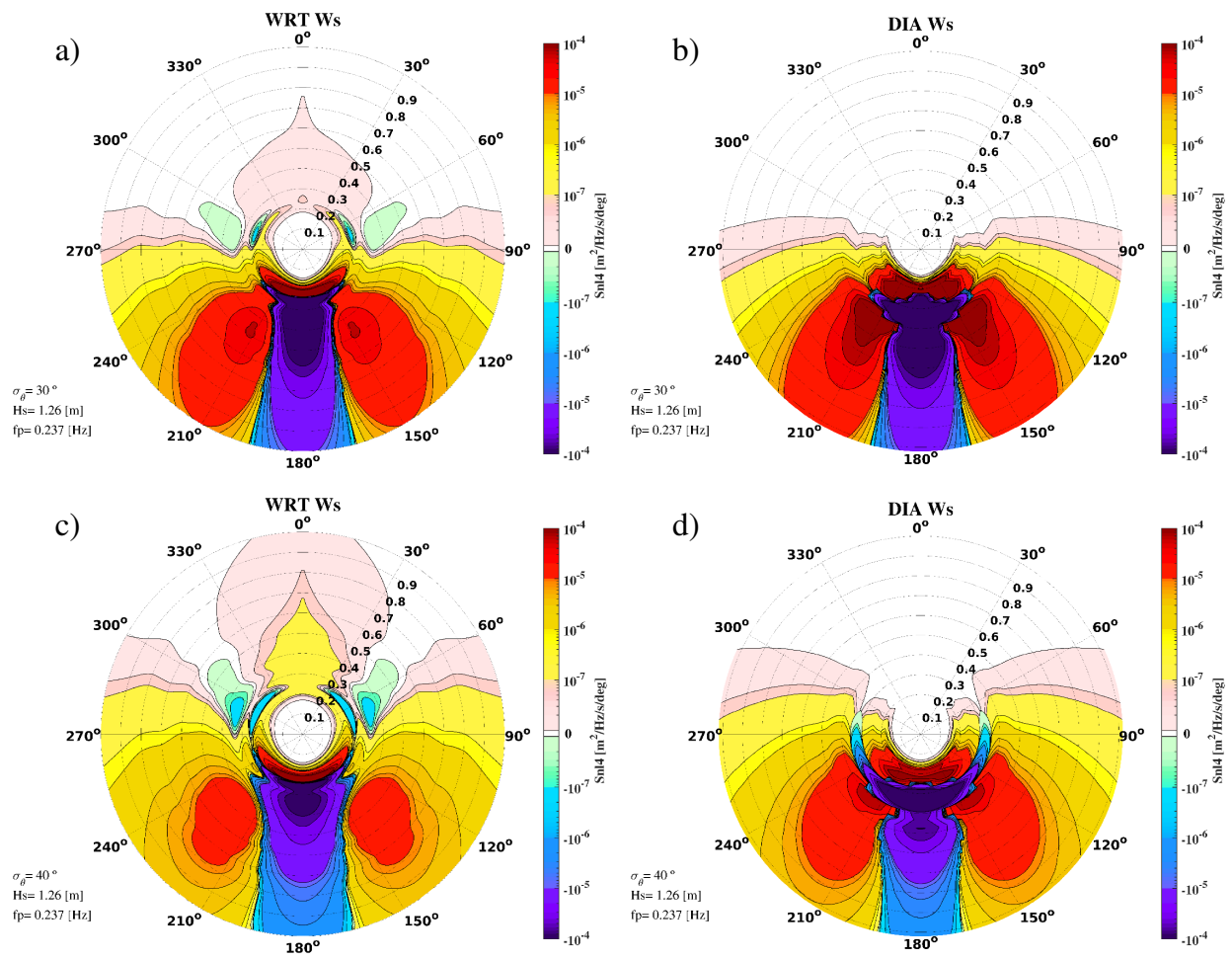


Figura 24. Similar a lo descrito en la Fig. 22 pero ahora del caso 2 Wind Sea, con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C2/30) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C2/40) en los paneles c y d.

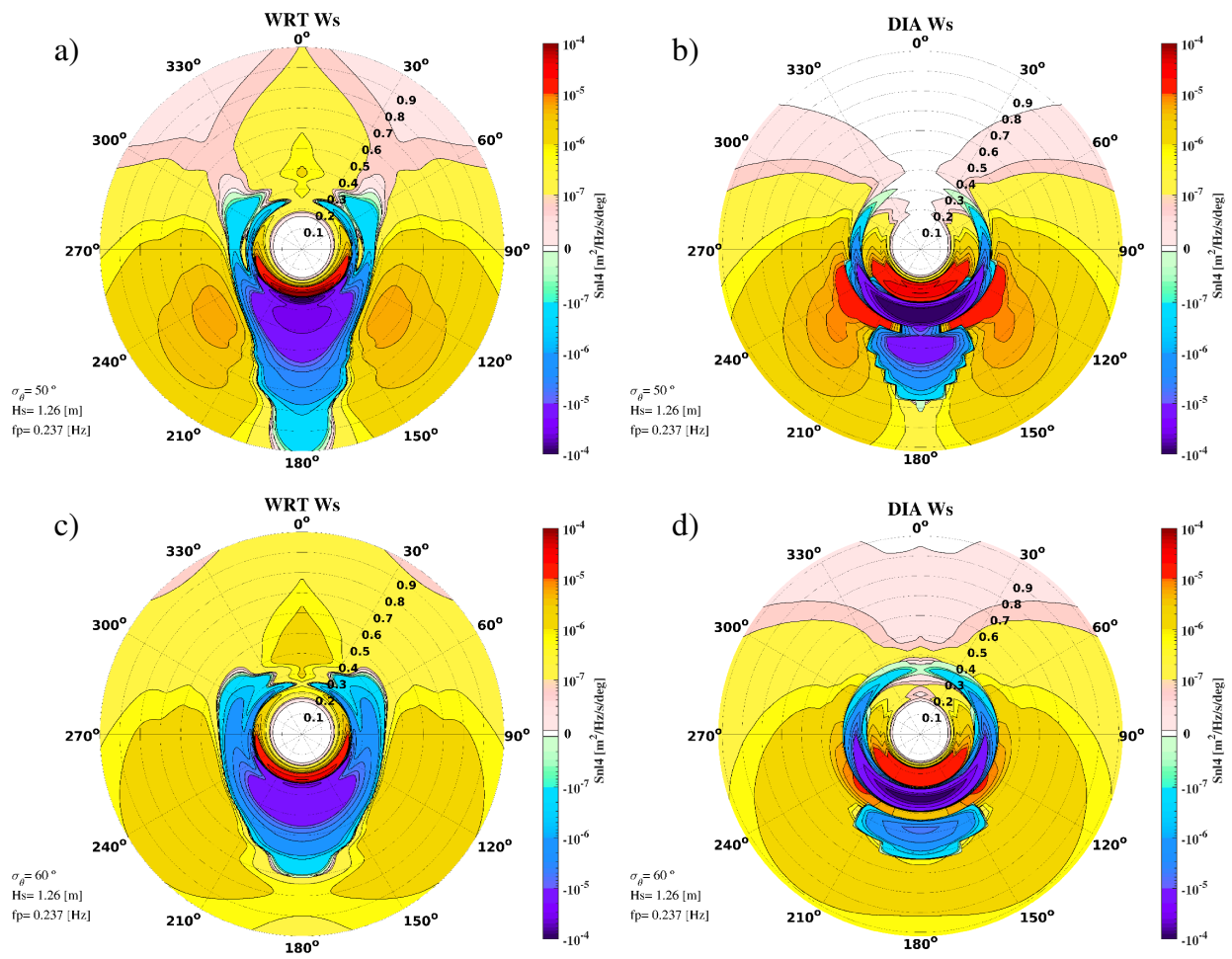


Figura 25. Similar a lo descrito en la Fig. 22 pero ahora del caso 2 Wind Sea, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C2/50) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C2/60) en los paneles c y d.

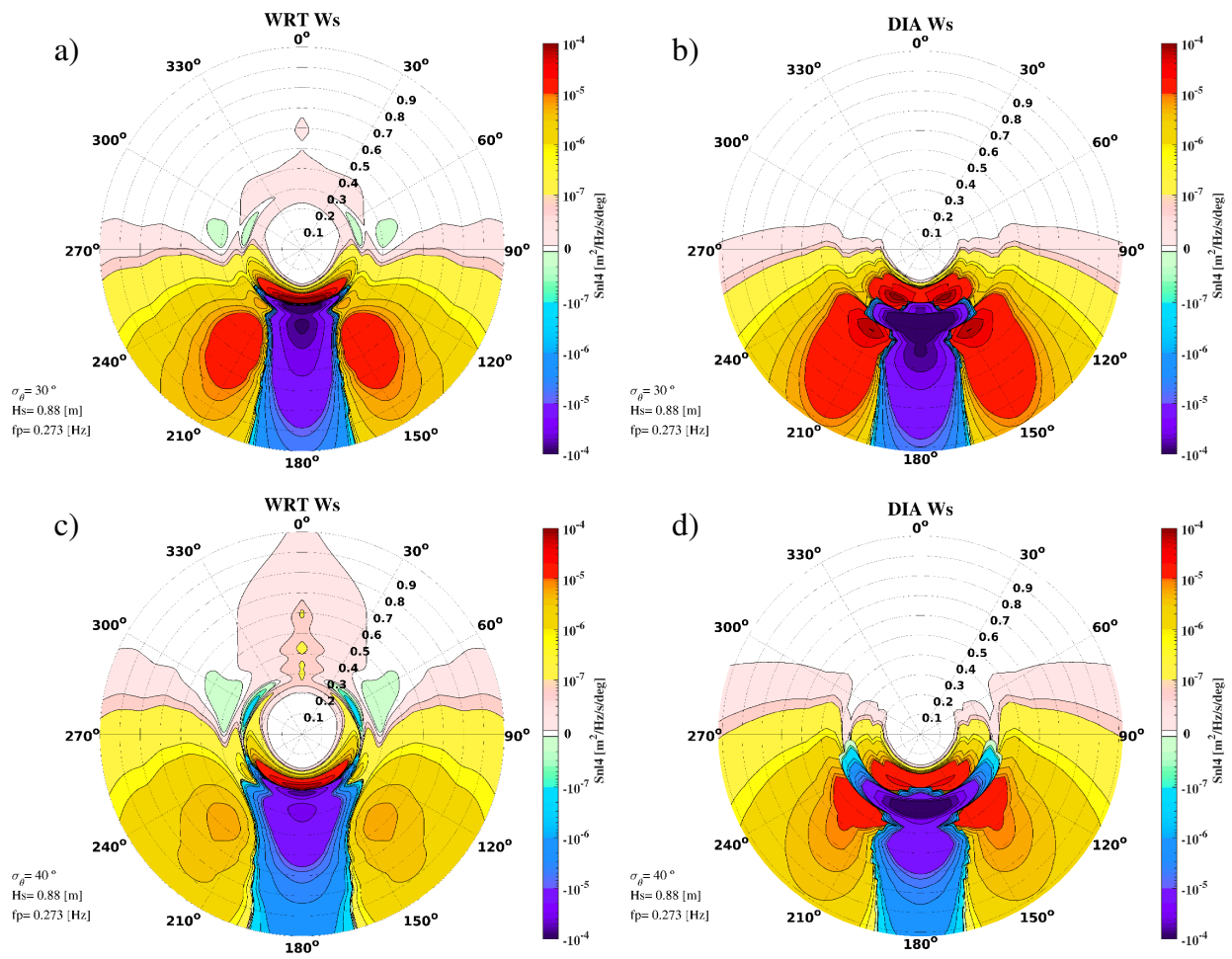


Figura 26. Similar a lo descrito en la Fig. 22 pero ahora del caso 3 Wind Sea, con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C3/30) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C3/40) en los paneles c y d.

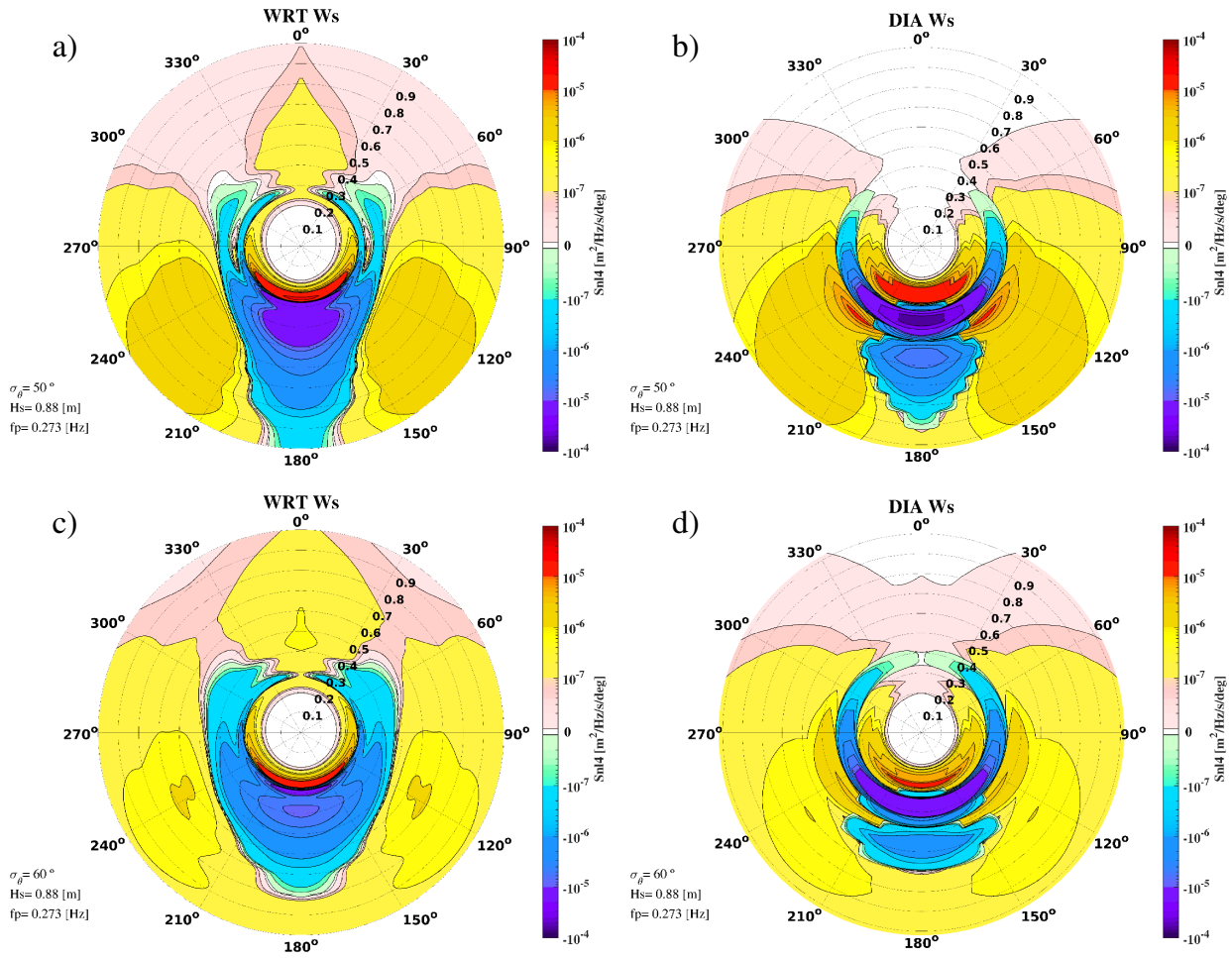


Figura 27. Similar a lo descrito en la Fig. 22 pero ahora del caso 3 Wind Sea, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C3/50) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C3/60) en los paneles c y d.

En comparación con los resultados obtenidos para $\sigma_\theta = 30^\circ$, la estructura tri-lobular presenta modificaciones progresivas al aumentar σ_θ . Con $\sigma_\theta = 60^\circ$ (paneles c y d de las Figuras 23, 25 y 27), el lóbulo principal de transferencia positiva amplía su rango direccional. En el caso 1 (C1/60), alcanza aproximadamente $\pm 115^\circ$ con el esquema WRT y $\pm 105^\circ$ con el esquema DIA. En el caso 2 (C2/60), se extiende hasta $\pm 90^\circ$ con el esquema WRT y $\pm 75^\circ$ con el esquema DIA. En el caso 3 (C3/60), correspondiente al escenario de menor energía, no se observa una expansión relevante en el rango direccional del lóbulo principal. No obstante, se registra un aumento en la intensidad de la transferencia hacia direcciones superiores a $\pm 90^\circ$ respecto a θ_m . Este comportamiento se relaciona con el aumento de contornos asociados a valores de S_{n14} del orden de 10^{-5} , y mantiene la tendencia de mayor extensión angular en las estimaciones generadas con el esquema WRT. En los tres casos (C1/60, C2/60 y C3/60), el lóbulo negativo reduce su extensión espectral, pero amplía su rango direccional hasta aproximadamente $\pm 180^\circ$ respecto a θ_m , con predominio en la periferia de f_p . En las simulaciones con el esquema DIA, el lóbulo negativo se divide en

dos regiones diferenciadas: una con mayor desplazamiento angular y concentrada cerca de f_p , y otra de menor área, separada por una zona de transferencia positiva. En contraste, el esquema WRT conserva un único lóbulo negativo, menos intenso, pero con mayor cobertura espectral. Finalmente, en los tres casos analizados (C1/60, C2/60 y C3/60), las regiones secundarias de transferencia positiva aumentan su dominio tanto en frecuencia como en dirección. Ambos esquemas representan este comportamiento, aunque el esquema DIA estima una mayor intensidad en frecuencias superiores a f_p , mientras que el esquema WRT asigna a estas zonas una intensidad más baja y una dispersión angular más amplia.

En el sector B, la estructura de $S_{nl4}(f, \theta)$ presenta diferencias entre los esquemas WRT y DIA. En el caso 1 Wind Sea (C1/30) con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (paneles a y b de la Fig. 22), el esquema WRT genera una región de transferencia positiva en dirección opuesta a θ_m , con intensidades entre dos y tres órdenes de magnitud por debajo del valor máximo del lóbulo principal centrado en θ_m . Estas magnitudes en la transferencia de energía en sentido opuesto a la dirección de propagación, son comparables con las magnitudes en las curvas de crecimiento descritas por Crombie et al. (1978) en sus observaciones de oleaje que se desarrolla en sentido opuesto a la dirección principal de propagación. Además, se identifican regiones de transferencia negativa orientadas de forma oblicua respecto al eje de propagación opuesto, con intensidades entre dos y tres órdenes de magnitud menores que las del lóbulo negativo principal. Este patrón se mantiene en los casos 2 (C2/30) y 3 (C3/30) (paneles a y b de las Figuras 24 y 26 respectivamente), aunque con menor intensidad en ambas regiones. Por su parte, el esquema DIA no presenta lóbulos definidos en dirección opuesta a θ_m en ninguno de los tres casos (C1/30, C2/30 y C3/30). Sin embargo, se identifica una transferencia positiva hacia direcciones superiores a $\pm 90^\circ$ respecto a θ_m , con intensidades entre dos y tres órdenes de magnitud menores que las del lóbulo principal.

A diferencia de lo observado con $\sigma_\theta = 30^\circ$, el incremento a $\sigma_\theta = 60^\circ$ intensifica notablemente los lóbulos estimados por el esquema WRT en el sector B. El lóbulo de transferencia positiva aumenta tanto en frecuencia como en dirección, y presenta una mayor intensidad. En el caso 1 (C1/60) (paneles c y d de la Fig. 23 asociado al espectro C1/60), los valores alcanzan una magnitud aproximadamente un orden menor al del lóbulo principal ubicado en el sector A. En los casos 2 (C2/60) y 3 (C3/60) (paneles c y d de las Figuras 25 y 27), se conserva esta tendencia, aunque con menor intensidad. El lóbulo negativo también aumenta su intensidad y se fusiona parcialmente con el lóbulo negativo del sector A, patrón presente en los tres casos (C1/60, C2/60 y C3/60), con una magnitud proporcional a la energía del régimen. Por su parte, el esquema DIA no genera lóbulos diferenciados en dirección opuesta a θ_m como los descritos con el esquema WRT. No obstante, sí estima transferencia de energía hacia dichas direcciones, aunque con una intensidad significativamente menor.

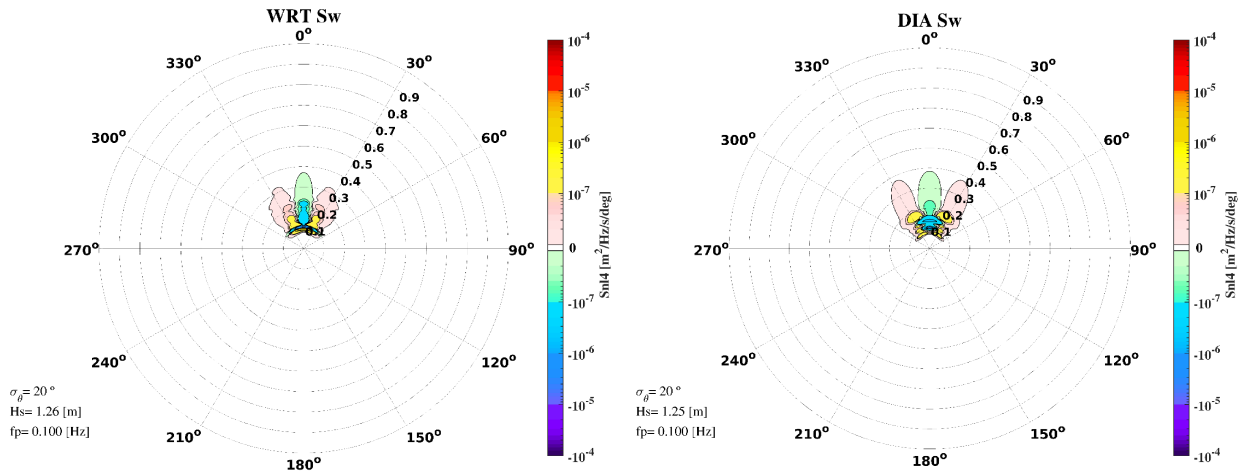


Figura 28. $S_{n14}(f, \theta)$ de espectros direccionales unimodales que representan un sistema Swell (caso C0/20) con una dirección de propagación $\theta_m = 0^\circ$. El panel izquierdo muestra los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que el panel derecho corresponde a las estimaciones realizadas con el esquema DIA. Ambos casos se asociaron a un ancho direccional $\sigma_\theta = 20^\circ$. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{n14} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cían), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas).

Por otro lado, en condiciones Swell (C0/20) (Fig. 28), la estructura de $S_{n14}(f, \theta)$ conserva el patrón tri-lobular, aunque con una intensidad entre dos y tres órdenes de magnitud menor que la registrada en los lóbulos principales bajo condiciones de Wind Sea. Además, el patrón presenta un rango más acotado en los dominios de f y dirección θ . Ambos esquemas estiman una estructura tri-lobular similar en términos de distribución angular y de f . Sin embargo, el esquema DIA genera lóbulos con mayor dispersión angular y menor extensión espectral, mientras que el esquema WRT estima lóbulos más extendidos en el dominio de f , pero con propagación angular más limitada.

Con relación a lo observado con $S_{n14}(f, \theta)$ del sistema Wind Sea, la estructura de $S_{n14}(f, \theta)$ del Swell describe una transferencia de energía con órdenes de magnitud y distribución direccional menor. Esta diferencia en la intensidad y distribución direccional es consistente con el comportamiento esperado en sistemas Swell. No obstante, resulta útil caracterizar dicho comportamiento en los experimentos de este trabajo antes de abordar el análisis de $S_{n14}(f, \theta)$ en condiciones de espectros bimodales.

A partir de lo descrito sobre la estructura de $S_{n14}(f, \theta)$, en condiciones de Wind Sea, el esquema WRT estima transferencia de energía en dirección opuesta a θ_m . Este comportamiento concuerda con lo reportado por Lavrenov y Ocampo-Torres (1999) quienes en sus simulaciones utilizaron una distribución direccional tipo Donelan et al. (1985), aunque con un esquema de cálculo exacto distinto.

Con el esquema WRT, la transferencia en sentido opuesto ocurre sin requerir un ancho direccional

elevado. En contraste, el esquema DIA sólo reproduce este comportamiento de la transferencia de energía cuando σ_θ supera los 50° . Este contraste indica que el parámetro σ_θ ejerce una influencia crítica sobre la transferencia de energía en sentido opuesto a θ_m cuando se emplea el esquema DIA, pero no en esquemas exactos.

La variación en la energía del sistema, a través del aumento o disminución de f_p , no modifica la distribución espacial de los lóbulos de transferencia. Sin embargo, dicha variación afecta su intensidad. Este resultado indica que la estructura de $S_{nl4}(f, \theta)$ permanece constante ante cambios en la energía del sistema, aunque la magnitud de la transferencia varía en función de f_p .

4.1.2.2. Estructura de $S_{nl4}(f, \theta)$ de casos de espectros direccionales bimodales

Se presentan los resultados y análisis de $S_{nl4}(f, \theta)$ asociados a espectros bimodales generados a partir de los casos bimodales; 1 (C1/30BIM, C1/40BIM, C1/50BIM y C1/60BIM), 2 (C2/30BIM, C2/40BIM, C2/50BIM y C2/60BIM) y 3 (C3/30BIM, C3/40BIM, C3/50BIM y C3/60BIM), estimados con los esquemas WRT y DIA. El análisis busca identificar variaciones en la forma y magnitud de $S_{nl4}(f, \theta)$ cuando los sistemas del espectro bimodal se propagan en direcciones opuestas.

Además, se evalúa la respuesta de $S_{nl4}(f, \theta)$ a cambios en σ_θ del régimen Wind Sea y al esquema numérico. Para conservar la consistencia en el análisis descriptivo de $S_{nl4}(f, \theta)$ bajo condiciones bimodales, se continúa con el análisis por sectores.

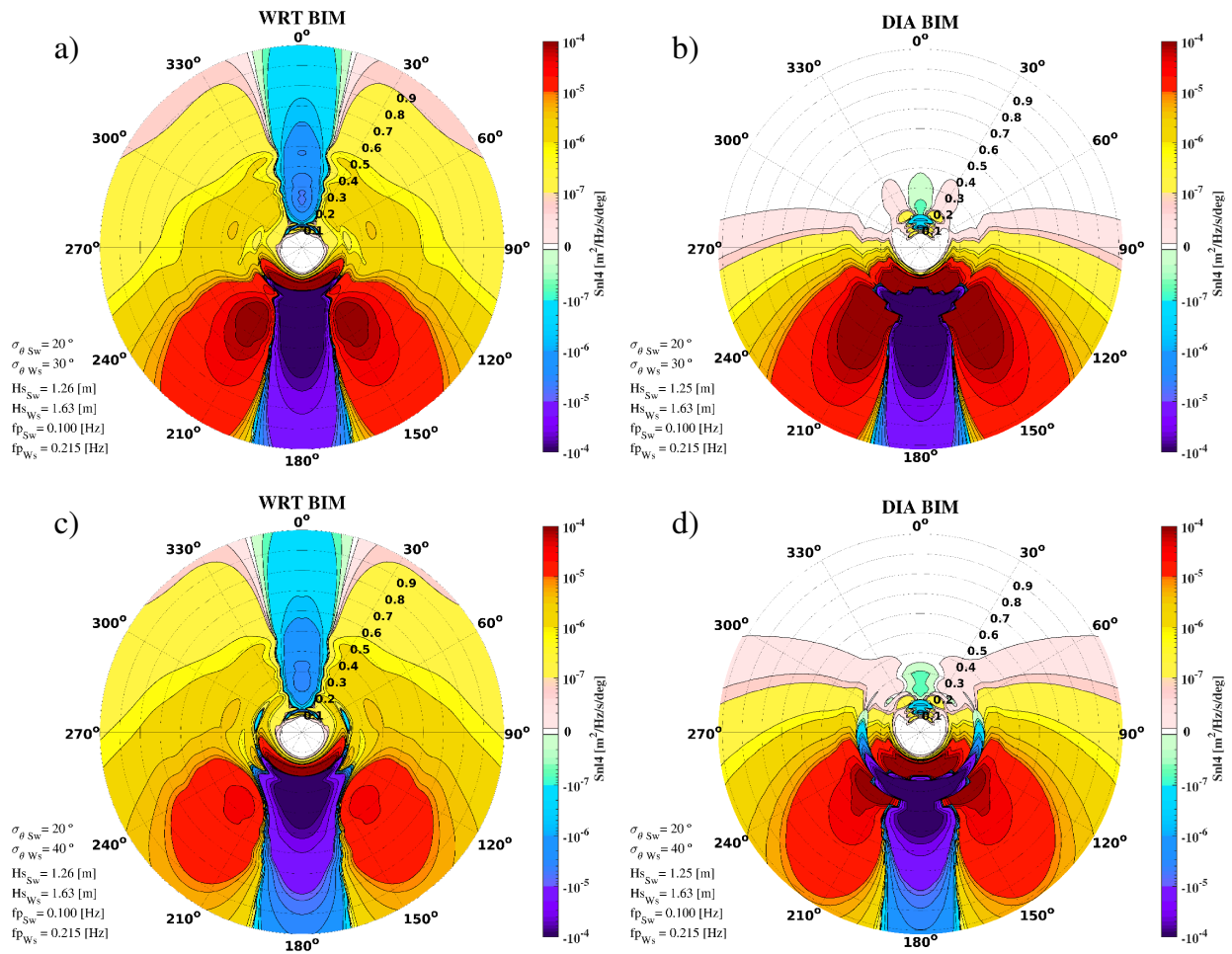


Figura 29. $S_{n14}(f, \theta)$ de espectros bimodales con un sistema Wind sea con dirección de propagación $\theta_m = 180^\circ$ y un Swell con dirección de propagación $\theta_m = 0^\circ$. Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Los casos con ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C1/30BIM) se presentan en los paneles a y b, y aquellos con $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C1/40BIM), en los paneles c y d. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{n14} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cíen), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas).

En el sector A de todos los casos bimodales (Figuras 29, 30, 31, 32, 33 y 34), no se identificaron diferencias respecto a los resultados de $S_{n14}(f, \theta)$ en sistemas unimodales Wind Sea. Esta característica se observó en las estimaciones obtenidas tanto con el esquema WRT como con el esquema DIA. Las principales características del patrón tri-lobular, como la posición y magnitud de los lóbulos de transferencia positiva y negativa, permanecieron inalteradas.

En el sector B, la estructura estimada muestra una variación entre esquemas. Con el esquema DIA, los resultados con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (panel b de las Figuras 29, 31 y 33) describieron el mismo comportamiento que $S_{n14}(f, \theta)$ asociado a un sistema unimodal Wind Sea. Mientras que, las estimaciones con el esquema

WRT con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (panel a de las Figuras 29, 31 y 33) mostraron que la transferencia de energía negativa incrementó su intensidad hasta en dos órdenes de magnitud, además de aumentar su extensión angular y espectral en la dirección de propagación del sistema Swell ($\theta_{m_{Sw}}$). La transferencia de energía positiva también se intensificó en un orden de magnitud y aumentó su extensión angular y espectral, aunque de forma oblicua a $\theta_{m_{Sw}}$.

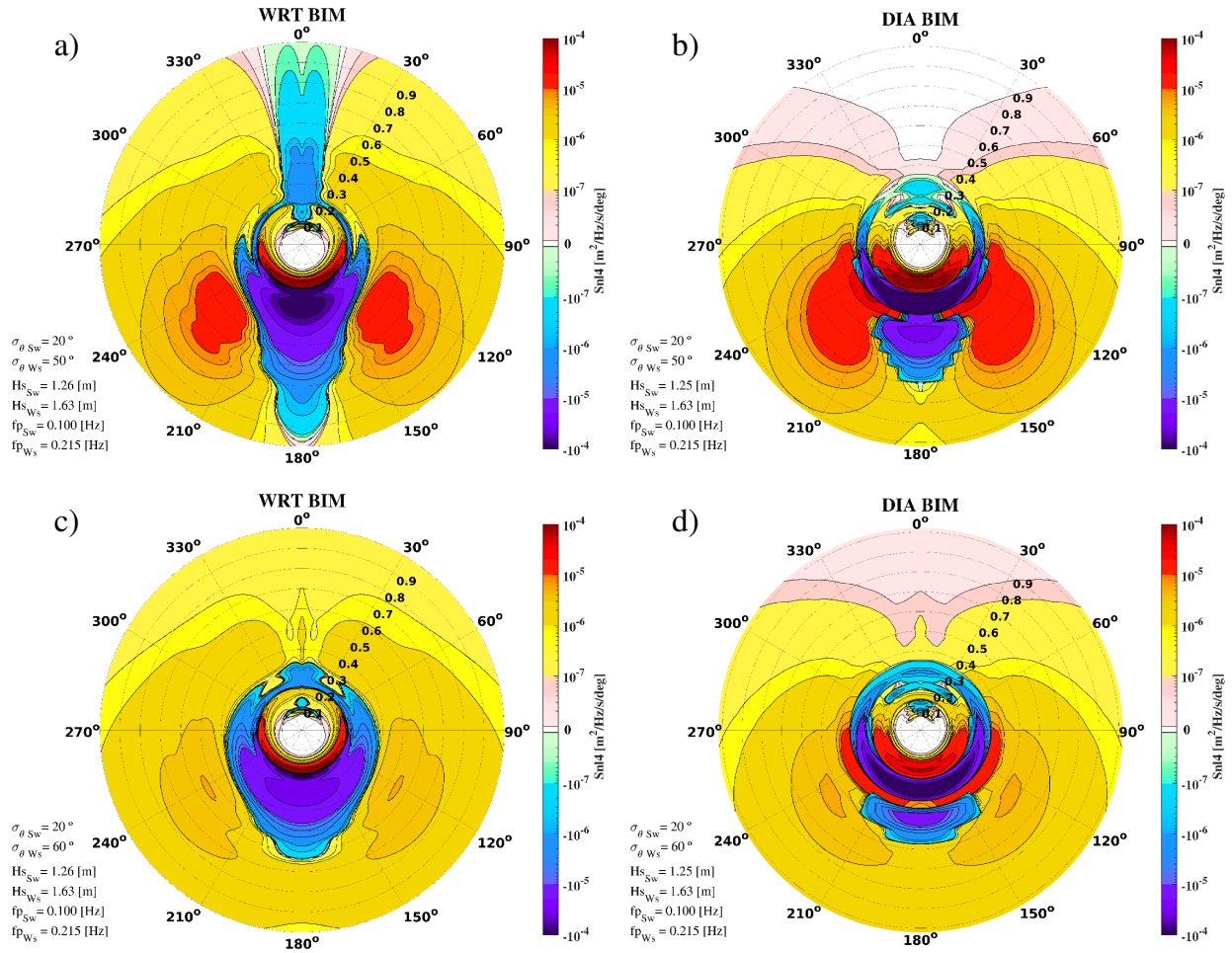


Figura 30. Similar a lo descrito en la Fig. 29 del caso 1 bimodal, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C1/50BIM) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C1/60BIM) en los paneles c y d.

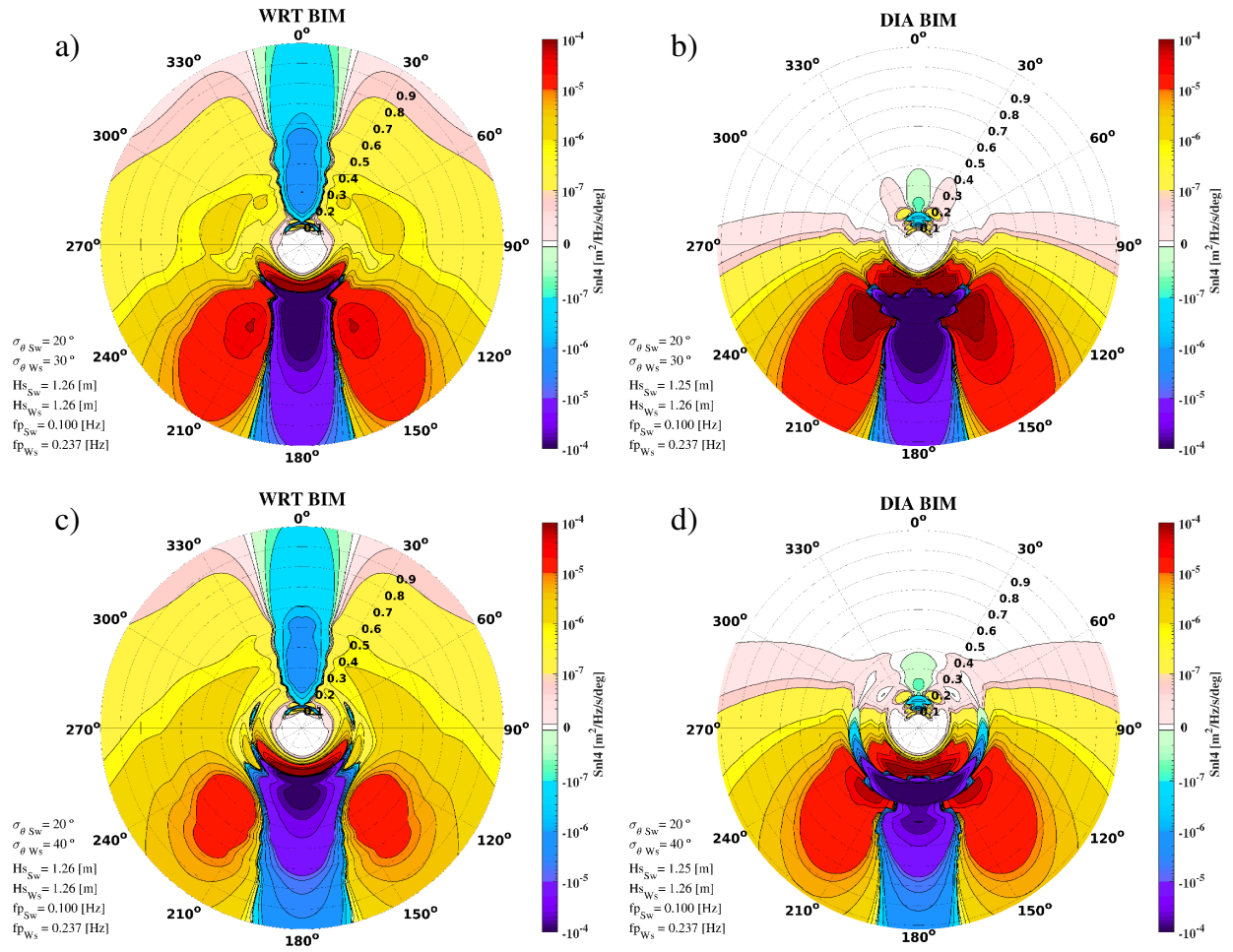


Figura 31. Similar a lo descrito en la Fig. 29 pero ahora del caso 2 bimodal, con $\sigma_{\theta} = 30^\circ$ (C2/30BIM) en los paneles a y b y $\sigma_{\theta} = 40^\circ$ (C2/40BIM) en los paneles c y d.

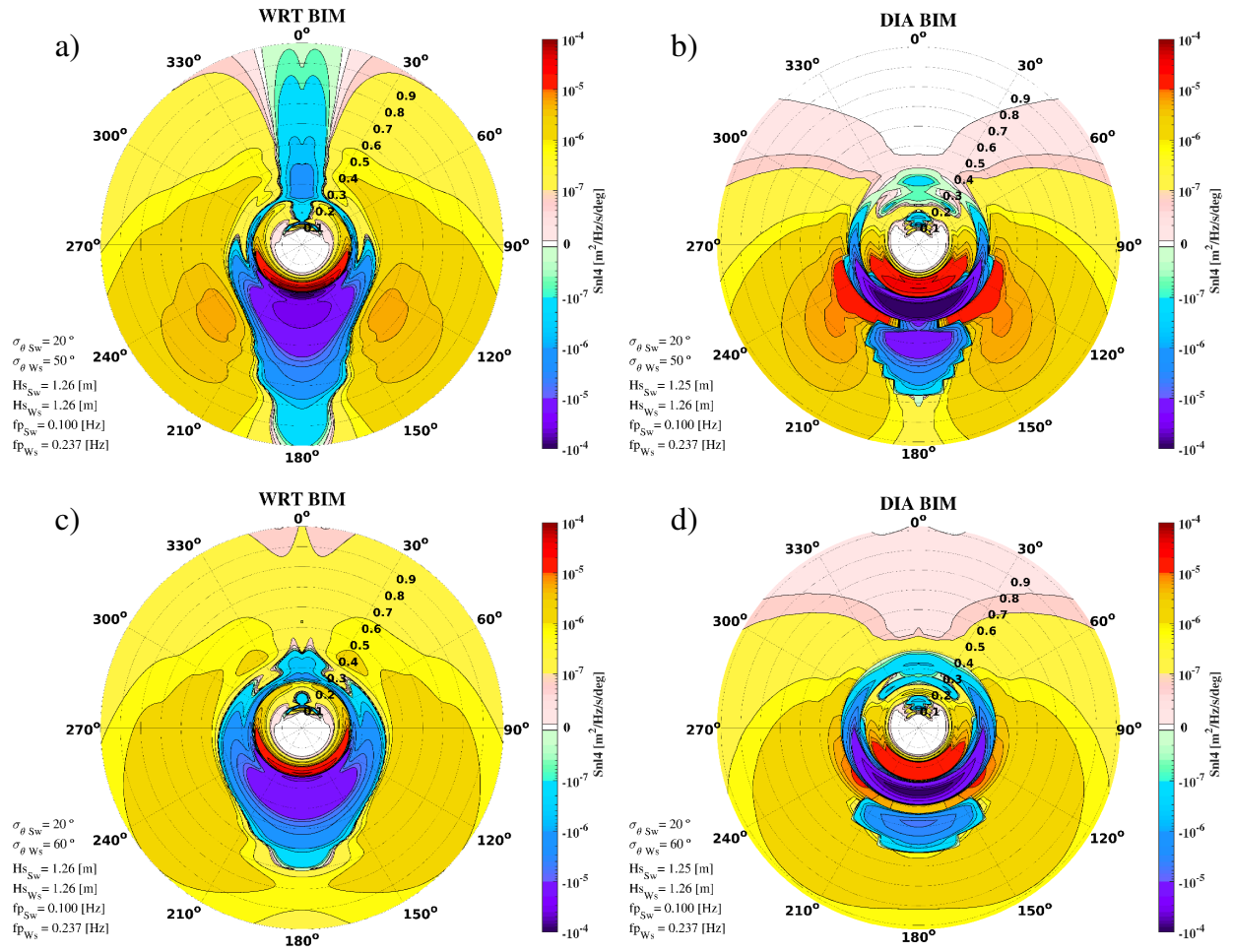


Figura 32. Similar a lo descrito en la Fig. 29 pero ahora del caso 2 bimodal, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C2/50BIM) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C2/60BIM) en los paneles c y d.

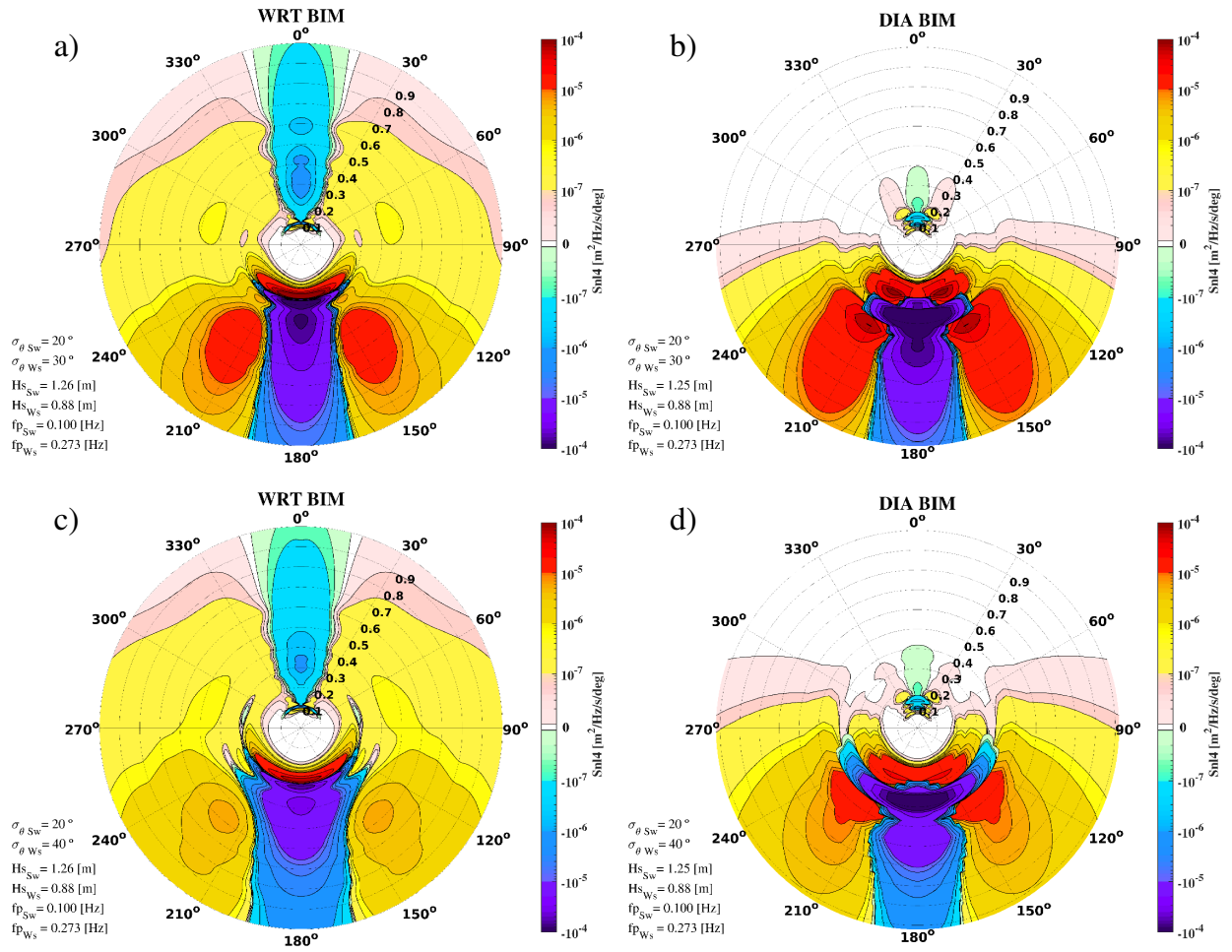


Figura 33. Similar a lo descrito en la Fig. 29 pero ahora del caso 3 bimodal, con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C3/30BIM) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C3/40BIM) en los paneles c y d.

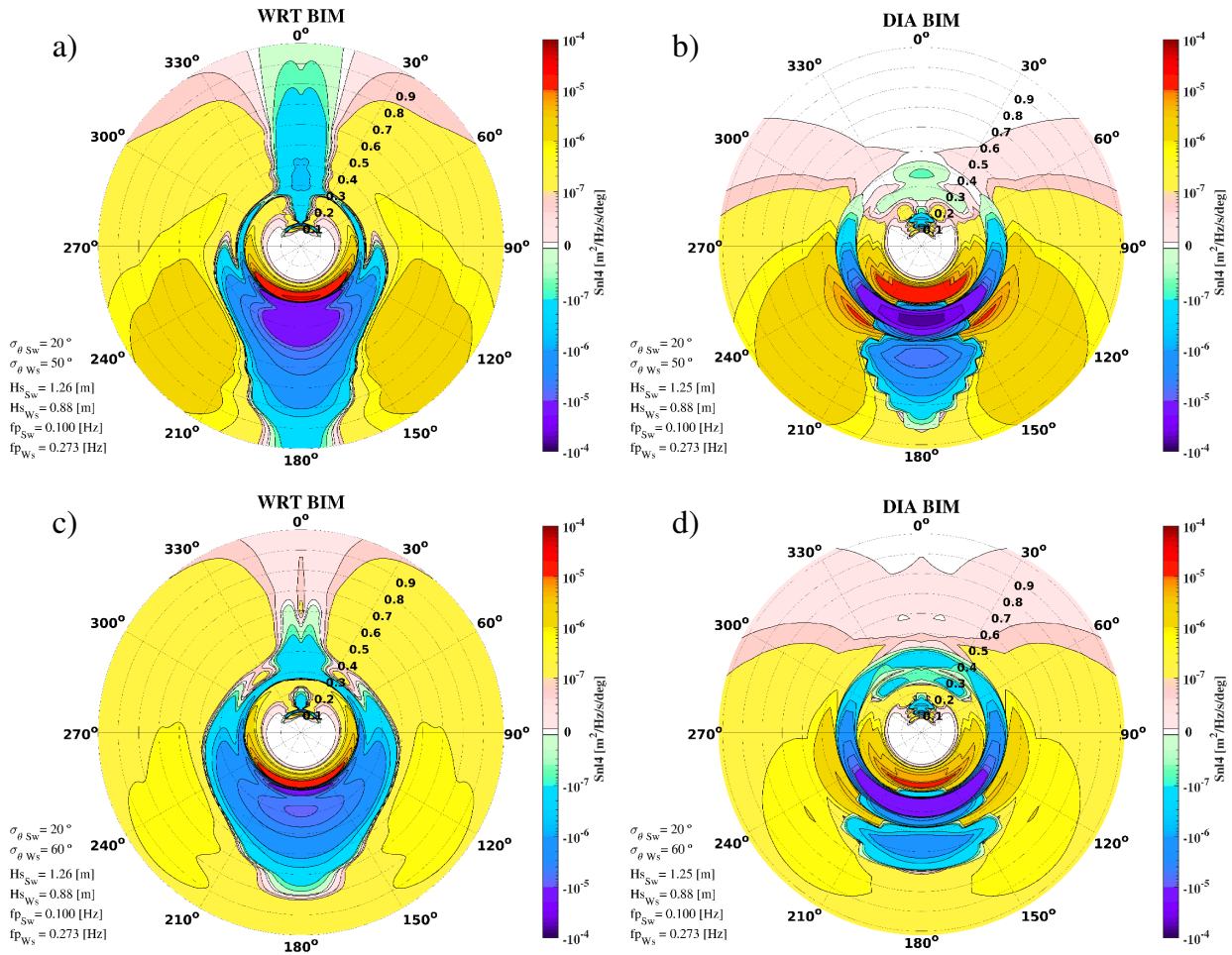


Figura 34. Similar a lo descrito en la Fig. 29 pero ahora del caso 3 bimodal, con $\sigma_\theta = 50^\circ$ (C3/50BIM) en los paneles a y b y $\sigma_\theta = 60^\circ$ (C3/60BIM) en los paneles c y d.

Con $\sigma_\theta = 60^\circ$ (paneles c y d de las Figuras 30, 32 y 34), los resultados del sector A obtenidos con los esquemas DIA y WRT no mostraron modificaciones con respecto a los casos de $S_{n14}(f, \theta)$ asociado a espectros unimodales. En el sector B, el esquema DIA conservó el comportamiento de $S_{n14}(f, \theta)$ observado en los casos unimodales Wind Sea. Con el esquema WRT, el lóbulo negativo descrito con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (panel a Fig. 29) redujo su rango espectral hacia frecuencias bajas, mientras que la transferencia positiva aumentó su intensidad.

Los resultados obtenidos con $\sigma_\theta = 30^\circ$ (panel b de las Figuras 29, 31 y 33) muestran que el esquema DIA no representa una interacción significativa entre sistemas, mientras que el esquema WRT estima un cambio notable en la transferencia asociada al régimen Swell. Esta diferencia indica que el ancho direccional del espectro tiene una influencia determinante en el comportamiento e interacción entre sistemas, efecto que sólo se reproduce con el esquema WRT, incluso cuando ambos sistemas se propagan

en direcciones opuestas. Bajo esta configuración, Masson (1993) clasificó las interacciones entre sistemas como insignificantes o despreciables. Su análisis se basó en espectros con valores de H_s igual a 0.55 y 0.63m (Swell y Wind Sea respectivamente), una diferencia entre $f_{p_{Swell}}$ y $f_{p_{WindSea}}$ de aproximadamente 0.88, una función de distribución de Mitsuyasu et al. (1975) y un esquema de solución exacta. Por otro lado, los resultados obtenidos en este trabajo, con diferencias entre $f_{p_{Swell}}$ y $f_{p_{WindSea}}$ de 0.46 (caso 1, bimodal), 0.42 (caso 2, bimodal) y 0.36 (caso 3, bimodal), una función de distribución direccional de Donelan et al. (1985) y un esquema de solución exacta, muestran un cambio importante en la estructura de $S_{nl4}(f, \theta)$ de espectros bimodales, específicamente, en la región del sistema Swell. Estos resultados evidencian una interacción no despreciable entre sistemas que se propagan en dirección opuesta y con f_p alejadas en frecuencia.

4.1.3. Estructura de S_{nl4} en el dominio de frecuencia

La estructura de $S_{nl4}(f, \theta)$ es de utilidad para identificar los patrones y regiones en las cuales existe transferencia de energía, sin embargo, para analizar las diferencias entre las estimaciones calculadas por los esquemas DIA y WRT en el dominio f con mayor detalle, se integró $S_{nl4}(f, \theta)$ en el dominio direccional (Ec. 40) para obtener $S_{nl4f}(f)$ asociado a los tres casos de espectros unimodales Wind Sea, Swell y los asociados a los tres casos bimodales.

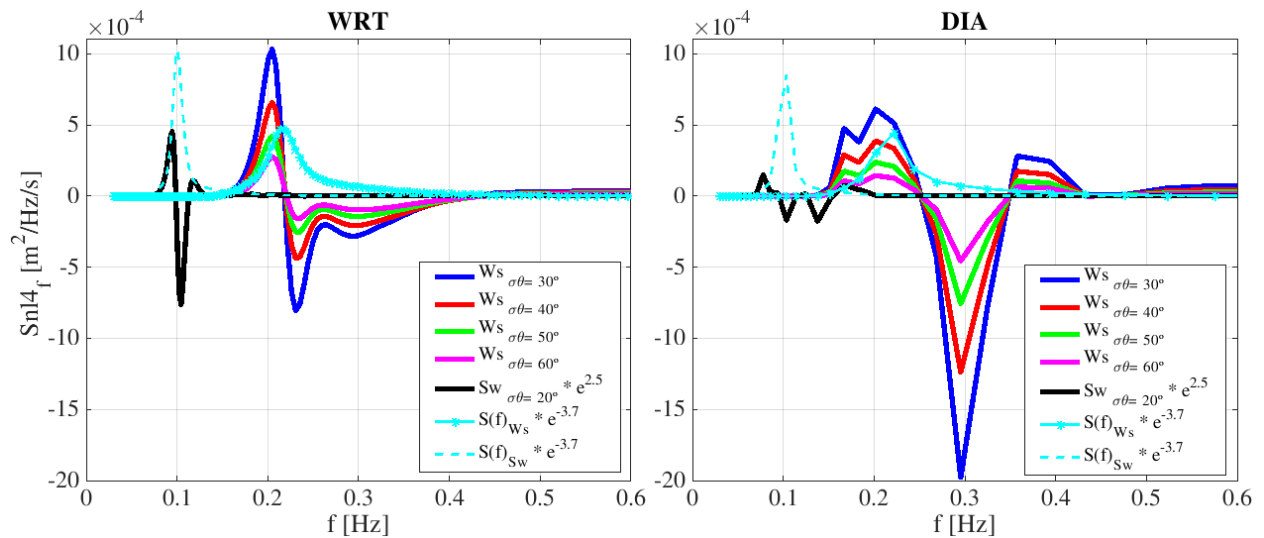


Figura 35. $S_{nl4f}(f)$ asociado a los espectros unimodales del caso 1 Wind Sea (C1/30, C1/40, C1/50 y C1/60), calculado mediante los esquemas WRT (panel izquierdo) y DIA (panel derecho). Se muestran las estimaciones del sistema Wind Sea con anchos direccionales $\sigma_\theta = 30^\circ$ (línea azul), 40° (línea roja), 50° (línea verde) y 60° (línea magenta), así como del sistema Swell (C0/20) con $\sigma_\theta = 20^\circ$ (línea negra) escalado con $e^{2.5}$. Los espectros $S(f)_{Ws}$ y $S(f)_{Sw}$, escalados por factores $e^{-3.7}$ y $e^{2.5}$ respectivamente (líneas cian continua y punteada), se incluyen como referencia.

Con relación a $S_{nl4f}(f)$ asociado a espectros unimodales Wind Sea, en la Fig. 35 (caso 1, Wind Sea) se muestra que la transferencia de energía positiva estimada con el esquema WRT (panel izquierdo) ocurre principalmente en frecuencias menores que f_p . En contraste, el esquema DIA (panel derecho de la misma figura) presenta tres regiones de transferencia positiva: la principal en frecuencias menores que f_p y dos adicionales en frecuencias superiores. La extensión de la transferencia de energía en el rango de frecuencias también difiere entre ambos esquemas: con el esquema WRT se limita a un intervalo más reducido, mientras que con el esquema DIA abarca un rango más amplio. Por otro lado, ambos esquemas muestran una única región negativa; sin embargo, con el esquema DIA la transferencia negativa alcanza una magnitud mayor que la estimada con el esquema WRT. Las características previamente descritas en la Fig. 35 también se observan en los casos Wind Sea 2 y 3 (Figuras 37 y 39), aunque con menor magnitud y con un desplazamiento de las regiones de transferencia de energía (tanto positiva como negativa) respecto al valor de f_p en cada caso.

De manera general, al aumentar σ_θ la transferencia, tanto positiva como negativa, disminuye. Esto indica que la intensidad de la transferencia realizada por S_{nl4} está condicionada por la cantidad de energía asociada al ancho direccional. En otras palabras, los espectros direccionales con un ancho angular reducido (por ejemplo, $\sigma_\theta = 30^\circ$) tienden a transferir más energía y a desarrollarse con mayor rapidez que aquellos con una distribución más amplia. Esta interpretación se refiere exclusivamente a sistemas Wind Sea. En el caso del sistema Swell, el cálculo mediante el esquema WRT presenta una distribución de energía con un patrón tri-lobular caracterizado por el patrón positivo-negativo-positivo. En contraste, $S_{nl4f}(f)$ calculado con el esquema DIA muestra una estructura compuesta por dos regiones positivas y dos negativas. Esta diferencia sugiere que el esquema DIA no estima adecuadamente S_{nl4} en los sistemas Swell, lo que podría generar deficiencias en la evolución de espectros bimodales que incluyen sistemas que se propagan en direcciones opuestas, como lo indican (Ardag y Resio, 2019).

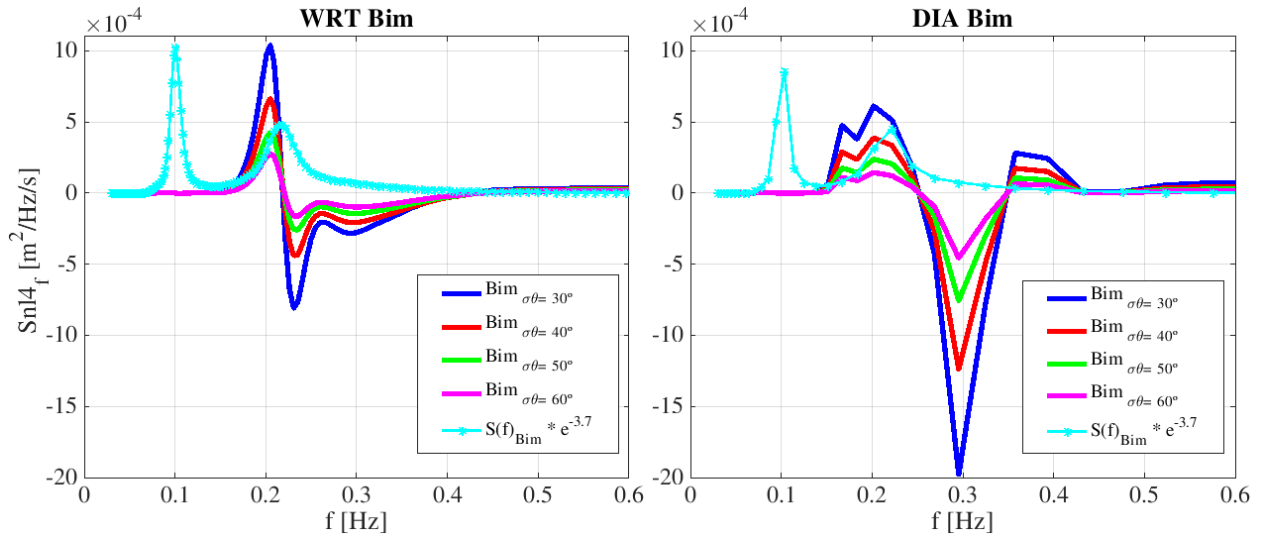


Figura 36. $S_{nl4f}(f)$ asociado a los espectros bimodales del caso 1 bimodal (C1/30BIM, C1/40BIM, C1/50BIM y C1/60BIM), calculado mediante los esquemas WRT (panel izquierdo) y DIA (panel derecho). Se muestran las estimaciones del espectro bimodal, aunque con variaciones del sistema Wind Sea con anchos direccionales $\sigma_\theta = 30^\circ$ (línea azul), 40° (línea roja), 50° (línea verde) y 60° (línea magenta). También se incluye como referencia $S(f)_{Bim}$, escalado por un factor de $e^{-3.7}$ (línea cian continua y punteada).

Con relación a $S_{nl4f}(f)$ asociado a espectros bimodales, en la Fig. 36 (caso 1, bimodal) se presentan las estimaciones obtenidas con el esquema WRT (panel izquierdo) y con el esquema DIA (panel derecho). En este caso, aunque el análisis corresponde a un espectro bimodal, la variación del ancho direccional se vincula únicamente con el sistema Wind Sea del propio espectro. Cabe señalar que en esta representación no se incluye el comportamiento de $S_{nl4f}(f)$ asociado al sistema Swell.

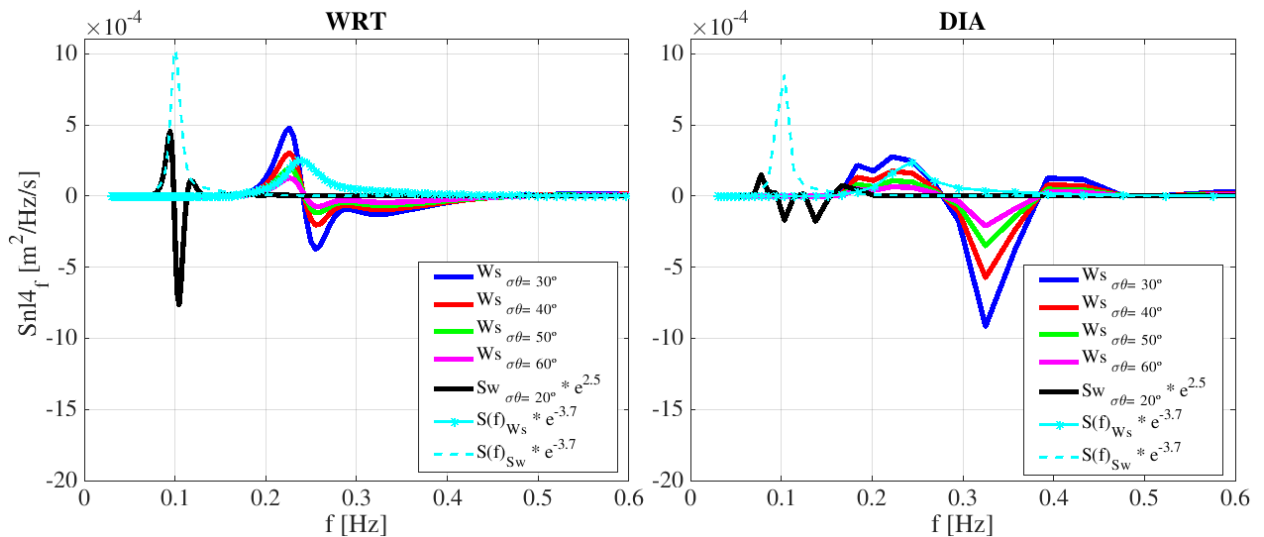


Figura 37. Similar a lo descrito en la Fig. 35 pero ahora del caso 2 Wind Sea.

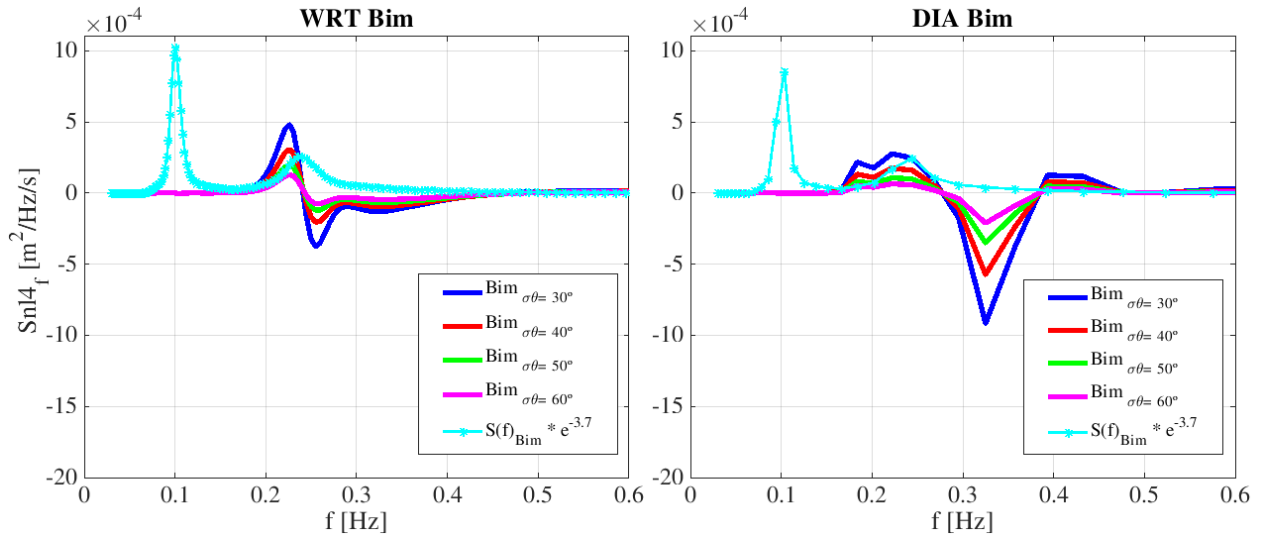


Figura 38. Similar a lo descrito en la Fig. 36 pero ahora del caso 2 bimodal.

Al comparar los resultados de $S_{nl4f}(f)$ asociado a los tres casos de espectros bimodales (Figuras 36, 38 y 40) con respecto a $S_{nl4f}(f)$ de los tres casos de espectros unimodales Wind Sea (Figuras 35, 37 y 39), podría inferirse que la transferencia de energía solo tiene relevancia en la región de frecuencias del sistema Wind Sea sin alguna participación o efecto importante en el sistema Swell. Sin embargo, el análisis de $S_{nl4}(f, \theta)$ de espectros bimodales, muestra que en la región asociada al Swell sí existe una modificación respecto al caso unimodal. Esto confirma que $S_{nl4f}(f)$ de espectros bimodales, por sí solo, no es suficiente para caracterizar adecuadamente la interacción y transferencia de energía entre los sistemas en un espectro bimodal.

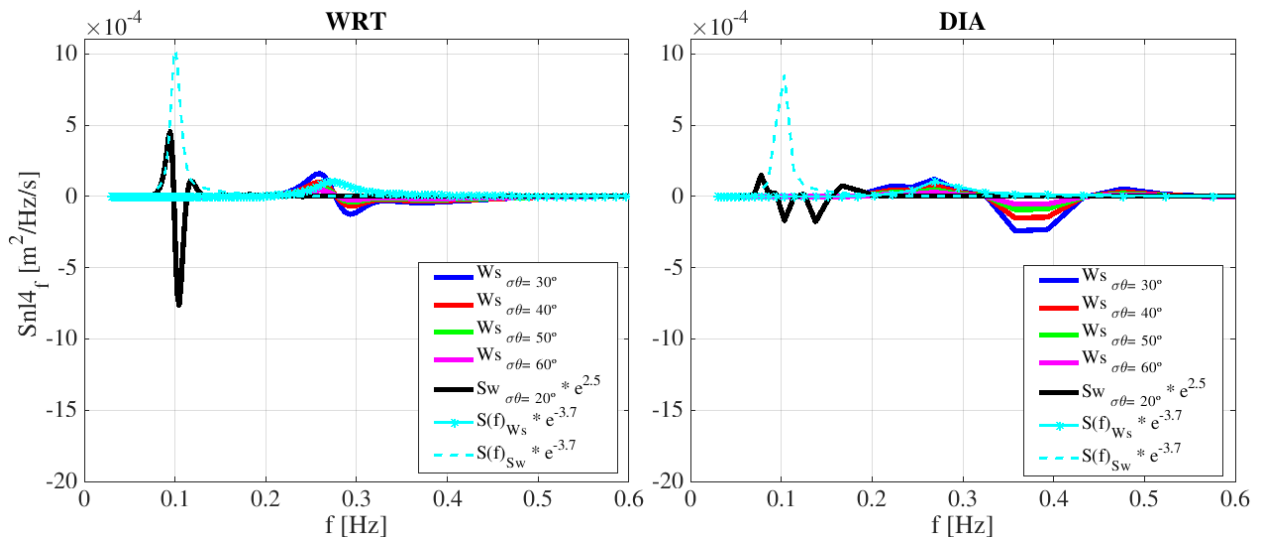


Figura 39. Similar a lo descrito en la Fig. 35 pero ahora del caso 3 Wind Sea.

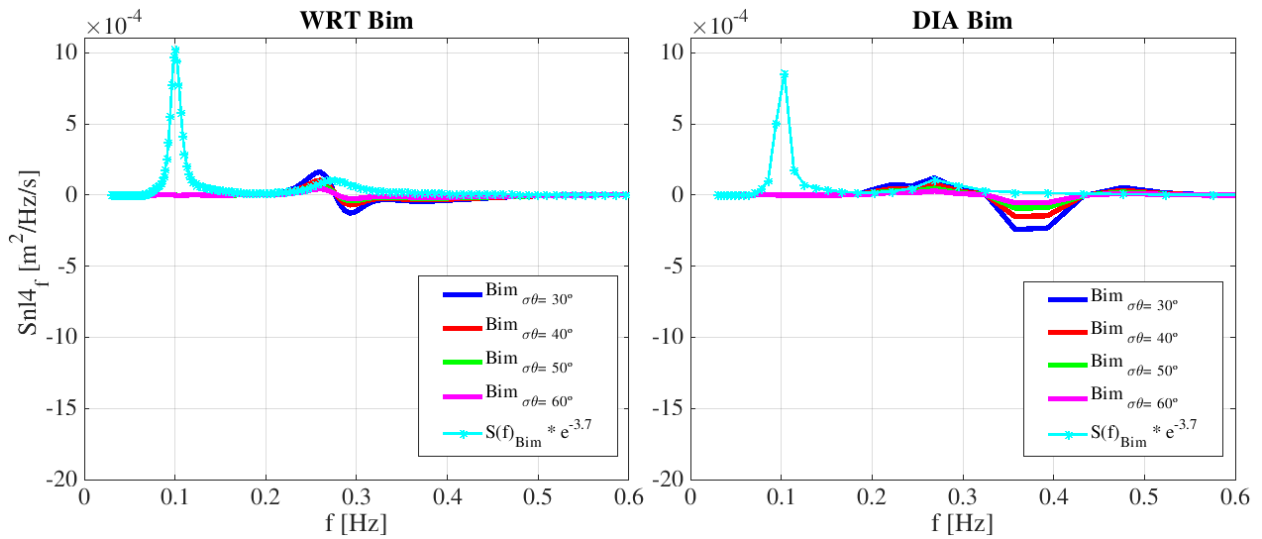


Figura 40. Similar a lo descrito en la Fig. 36 pero ahora del caso 3 bimodal.

Las estimaciones sugieren que el desarrollo en frecuencias bajas estimado con el esquema WRT ocurrirá con mayor rapidez en una región espectral de menor rango que el previsto con el esquema DIA. Por otra parte, la presencia de una segunda región de transferencia positiva en el esquema DIA indica la existencia de una componente de evolución en frecuencias altas, lo que implicaría un desarrollo distinto en la forma del espectro direccional.

4.1.4. Efecto de la bimodalidad

Para describir el cambio en S_{nl4} asociado a la interacción entre los sistemas (efecto de la bimodalidad) y su posible impacto en la evolución del espectro direccional, se analizaron $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ (Ec. 41), $\Delta S_{nl4f}(f)$ (Ec. 43) y $\Delta S_{nl4f}(f)$ de sectores direccionales (Ecs. 44 y 45).

4.1.4.1. Estructura de ΔS_{nl4} en el dominio de frecuencia-dirección

Para observar el cambio en $S_{nl4}(f, \theta)$ asociado al efecto de la bimodalidad y cómo es estimado por cada esquema, se presenta $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ correspondientes a la diferencia de los tres casos bimodales con respecto a los tres casos Wind Sea y Swell. A partir de ahora, se denotan los casos 1, 2 y 3 relacionados a ΔS_{nl4} con la terminación "Delta" en lugar de "BIM".

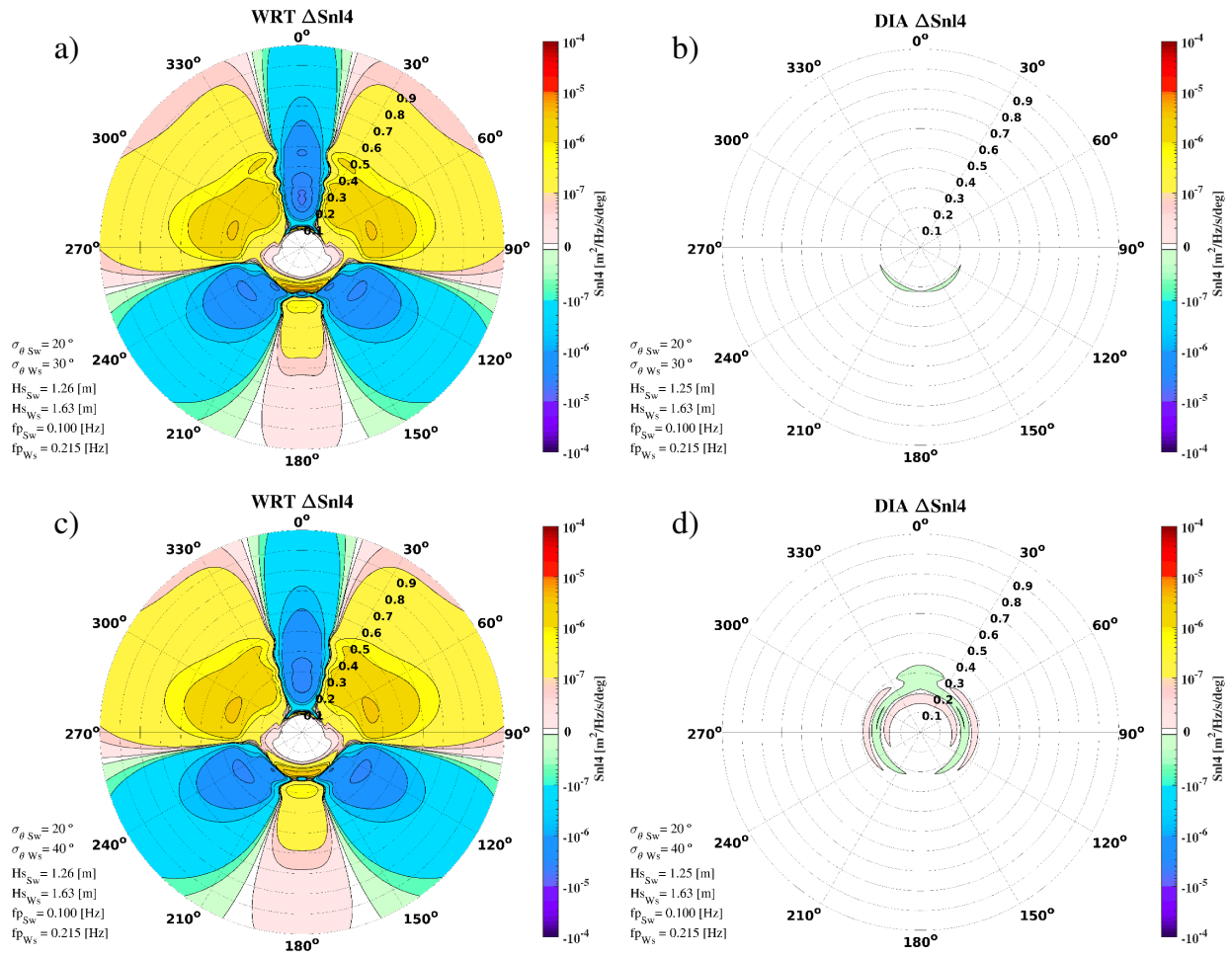


Figura 41. ΔS_{n14} con un sistema Wind sea con dirección de propagación $\theta_m = 180^\circ$ y un Swell con dirección de propagación $\theta_m = 0^\circ$. Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Los casos con ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$ (C1/30Delta) se presentan en los paneles a y b, y aquellos con $\sigma_\theta = 40^\circ$ (C1/40Delta), en los paneles c y d. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{n14} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cíen), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas).

A partir de la Fig. 41, se identificaron cambios en $S_{n14}(f, \theta)$ atribuibles al efecto de la bimodalidad. Particularmente, las estimaciones obtenidas con el esquema WRT (paneles a y c) muestran que la interacción entre sistemas ocurre independientemente del ancho direccional, aunque con mayor intensidad cuando σ_θ presenta un valor reducido ($\sigma_\theta = 30^\circ$) y con una disminución en la intensidad de la interacción conforme σ_θ aumenta, lo cual se observa en la Fig. 42, en donde el sistema Wind Sea presenta valores de $\sigma_\theta = 50^\circ$ y 60° .

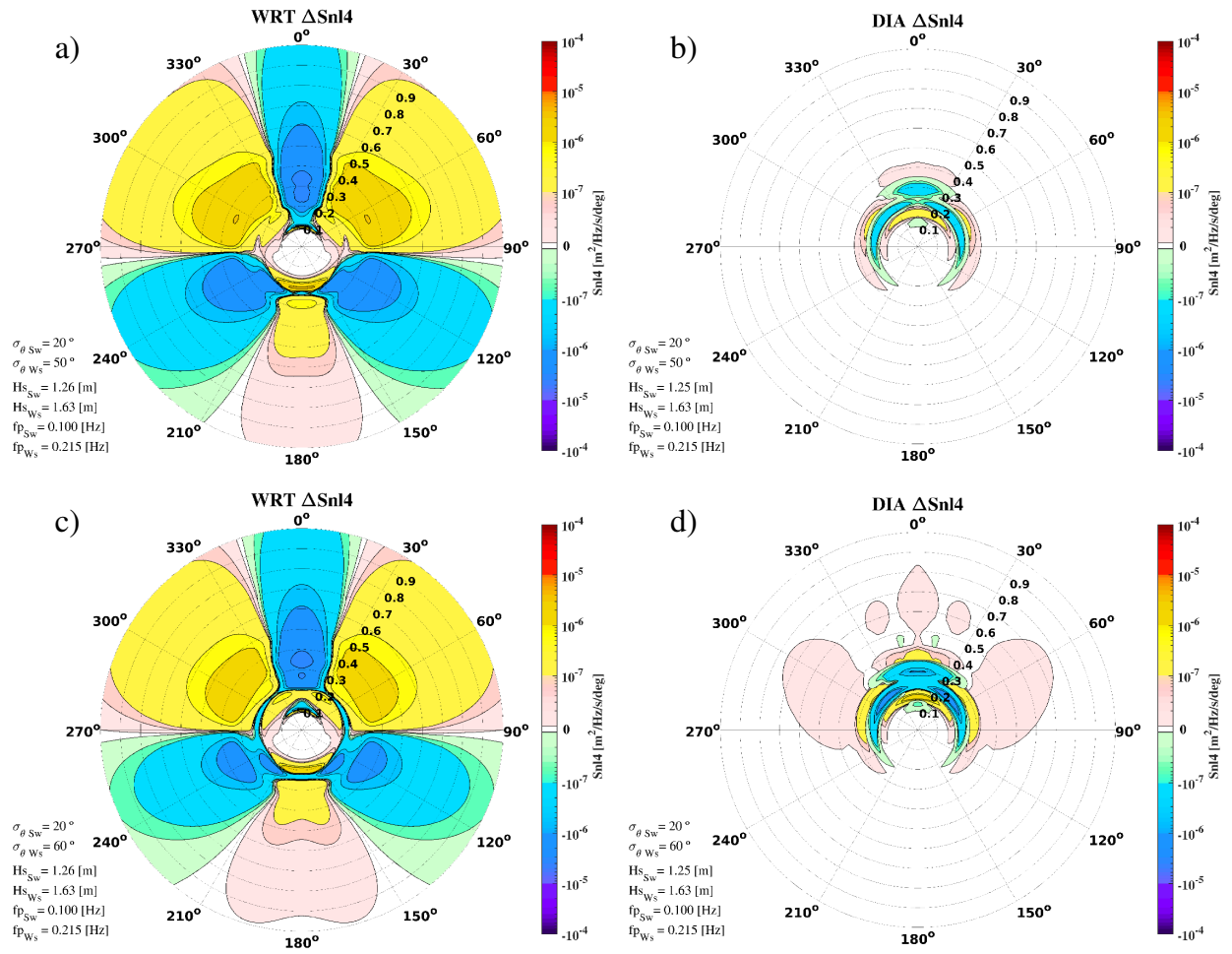


Figura 42. Similar a lo descrito en la Fig. 41 del caso 1 Delta, con $\sigma_{\theta} = 50^\circ$ (C1/50Delta) en los paneles a y b y $\sigma_{\theta} = 60^\circ$ (C1/60Delta) en los paneles c y d).

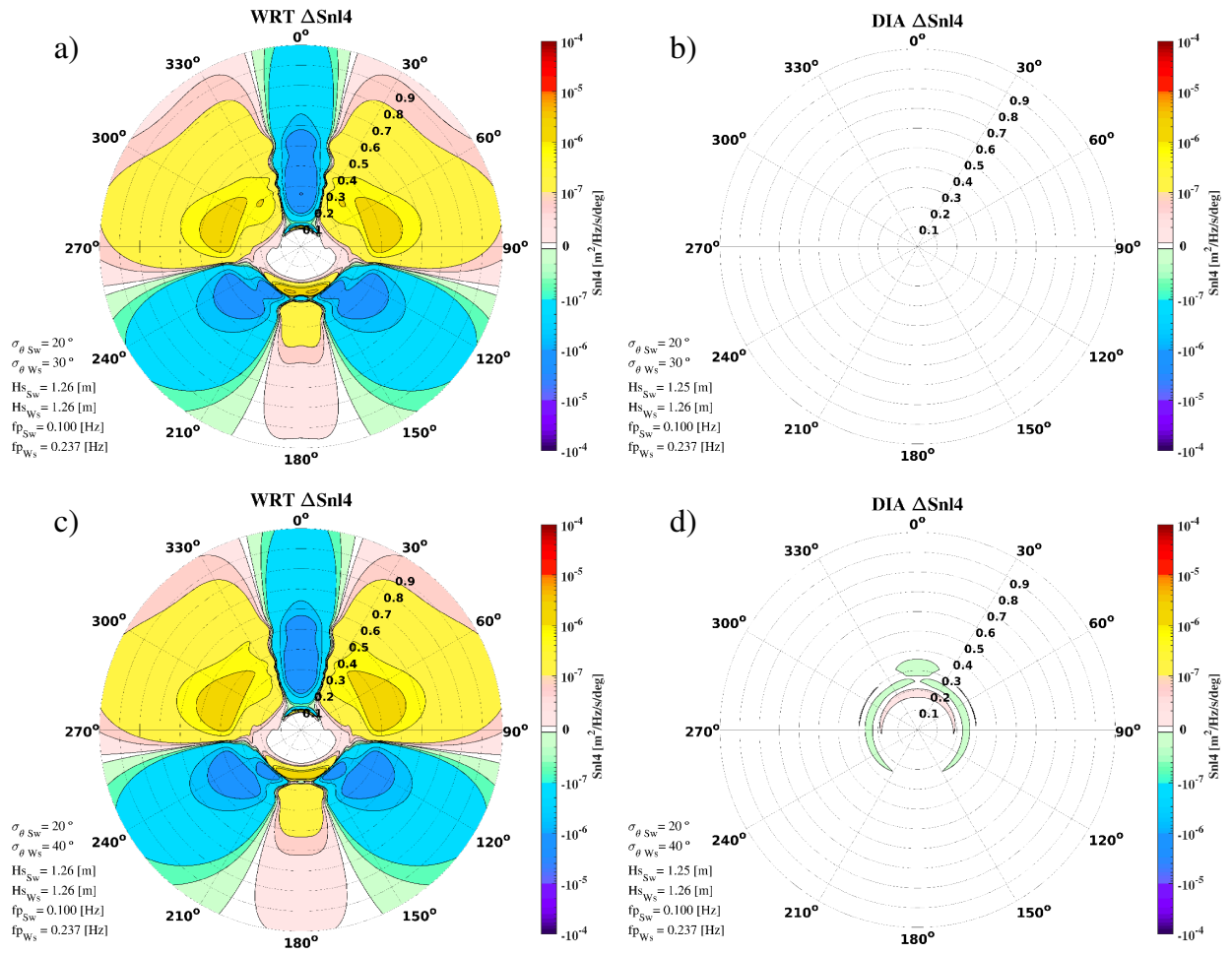


Figura 43. Similar a lo descrito en la Fig. 41 pero ahora del caso 2 Delta, con $\sigma_{\theta} = 30^\circ$ (C2/30Delta) en los paneles a y b y $\sigma_{\theta} = 40^\circ$ (C2/40Delta) en los paneles c y d.

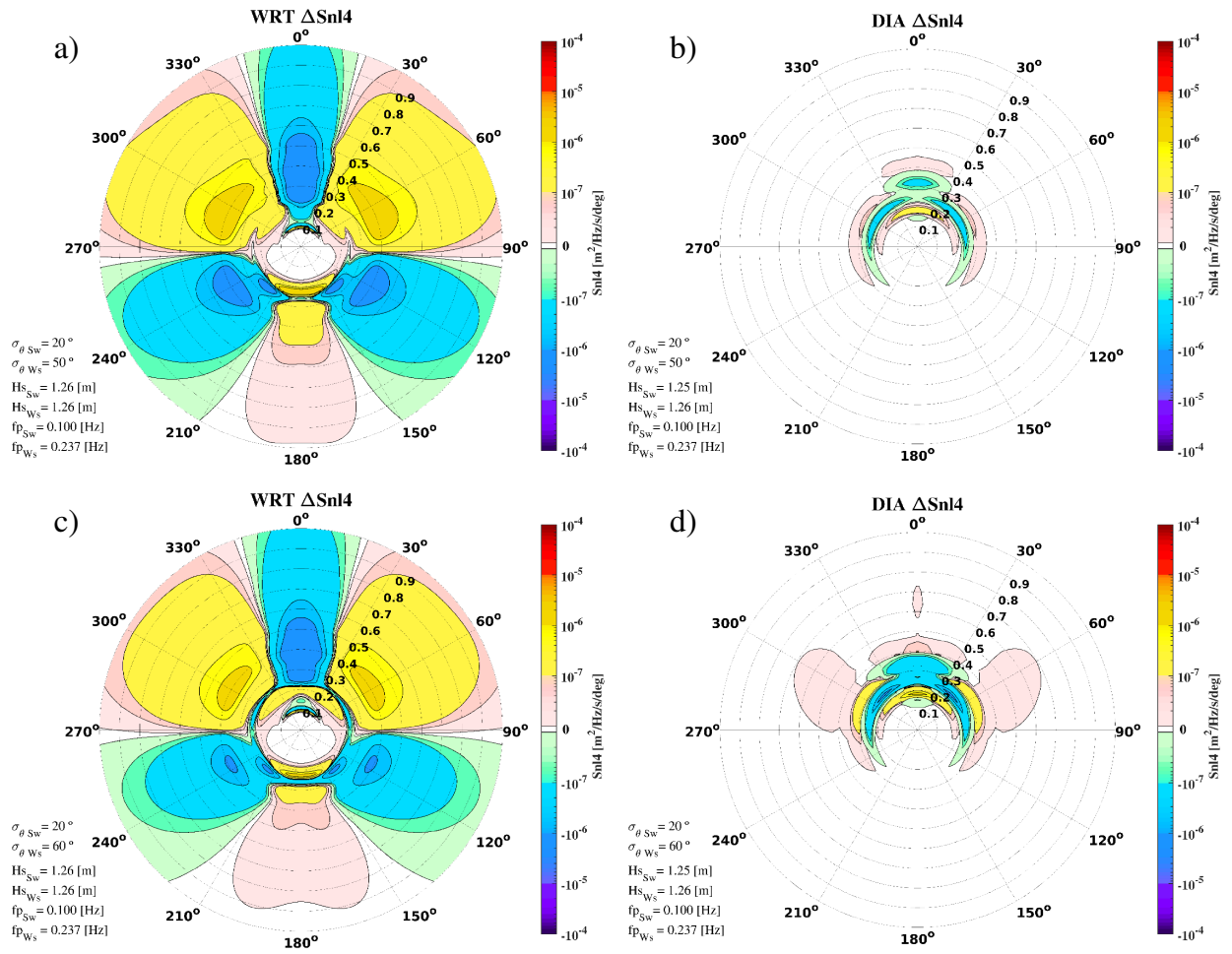


Figura 44. Similar a lo descrito en la Fig. 41 pero ahora del caso 2 Delta, con $\sigma_{\theta} = 50^\circ$ (C2/50Delta) en los paneles a y b y $\sigma_{\theta} = 60^\circ$ (C2/60Delta) en los paneles c y d.

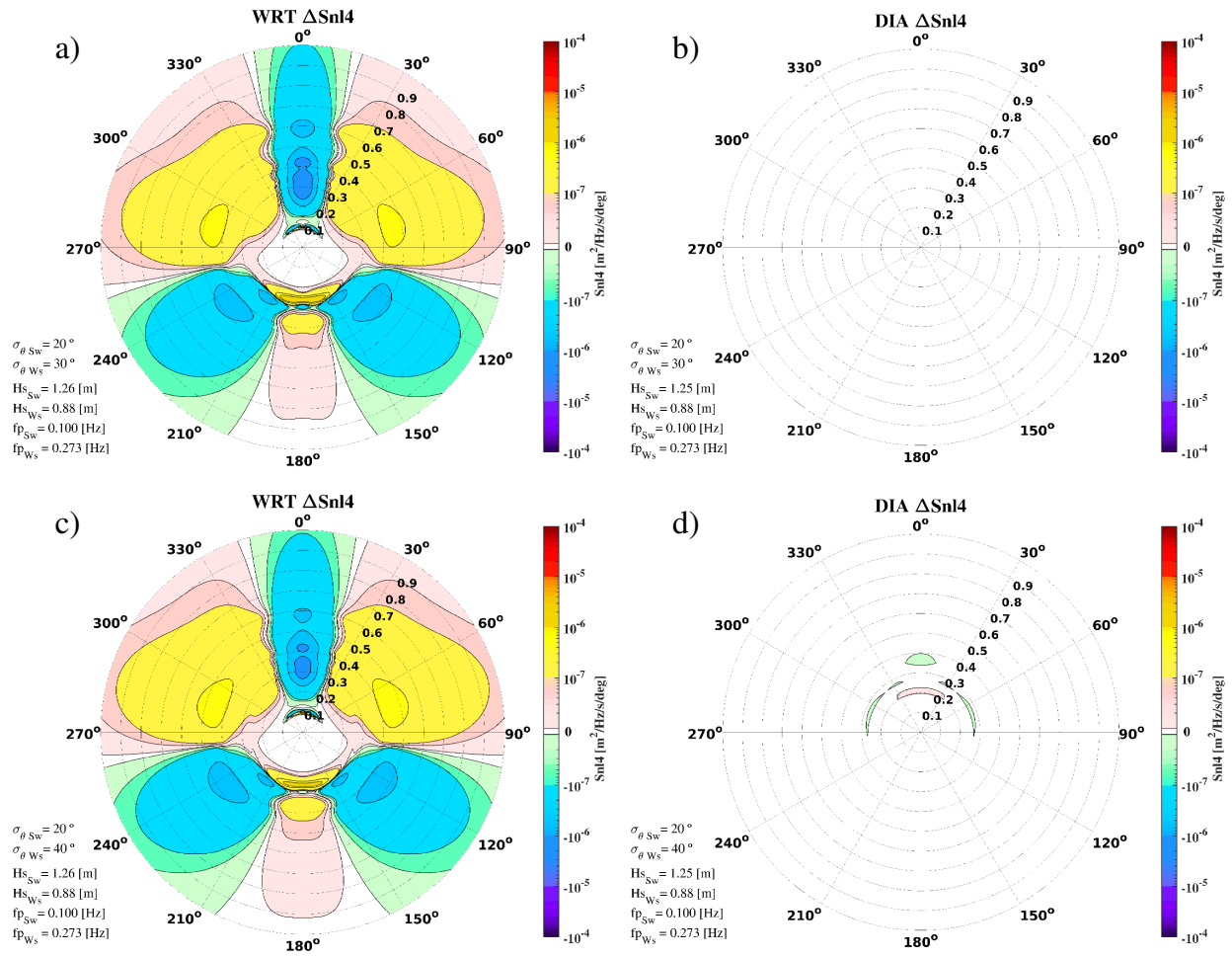


Figura 45. Similar a lo descrito en la Fig. 41 pero ahora del caso 3 Delta, con $\sigma_{\theta} = 30^\circ$ (C3/30Delta) en los paneles a y b y $\sigma_{\theta} = 40^\circ$ (C3/40Delta) en los paneles c y d.

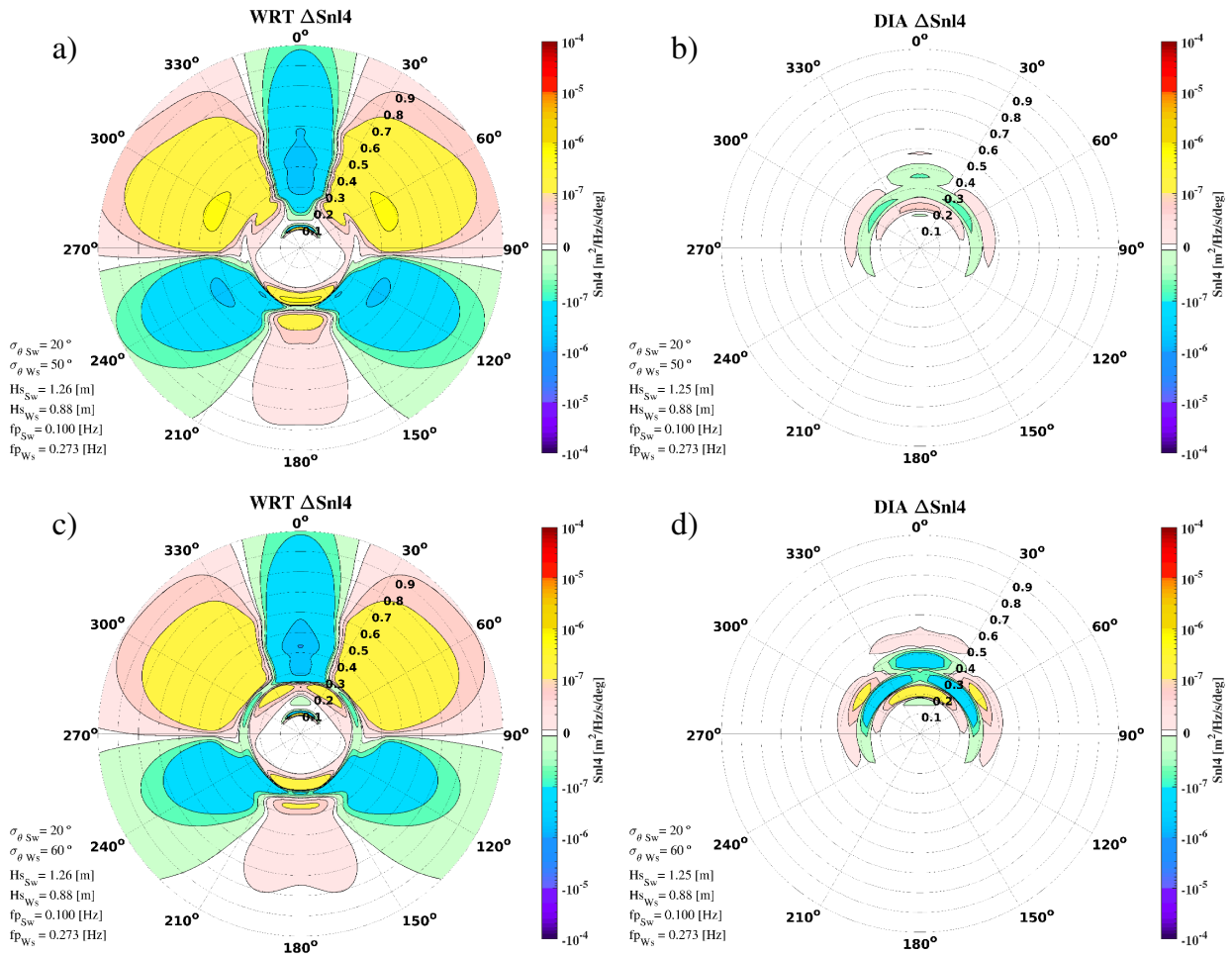


Figura 46. Similar a lo descrito en la Fig. 41 pero ahora del caso 3 Delta, con $\sigma_{\theta} = 50^\circ$ (C3/50Delta) en los paneles a y b y $\sigma_{\theta} = 60^\circ$ (C3/60Delta) en los paneles c y d.

En contraste, la interacción entre sistemas estimada mediante el esquema DIA (paneles b y d) se intensifica a medida que σ_{θ} aumenta. Es importante destacar que el esquema DIA estima cambios relevantes en el sistema Swell, mientras que el esquema WRT los estima en ambos sistemas.

Los cambios estimados con el esquema WRT asociados al efecto de la bimodalidad indican un aumento en el ancho direccional del sistema Swell, el cual resulta menos pronunciado cuando el sistema Wind Sea presenta valores elevados de σ_{θ} . Se argumenta el aumento de σ_{θ} en el sistema Swell debido a los valores positivos de $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ en direcciones mayores a $\pm 30^\circ$ respecto a θ_{mSw} , y por los valores negativos en direcciones $\pm 15^\circ$ respecto a θ_{mSw} . Un patrón análogo se obtiene con el esquema DIA, aunque restringido a los casos con $\sigma_{\theta} > 50^\circ$. Dicho patrón se reproduce en los casos 2 Delta (Figuras 43 y 44) y 3 Delta (Figuras 45 y 46), aunque con menor intensidad.

En la región del sistema Wind Sea, los valores de $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ sugieren un desarrollo del espectro di-

reccional más lento. No obstante, al compararlos con los valores de $S_{nl4}(f, \theta)$ del sistema Wind Sea unimodal, cuya diferencia alcanza dos órdenes de magnitud, no se evidencia un cambio relevante en la evolución de este sistema. En contraste, en el sistema Swell los valores de $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ se mantienen en el mismo orden de magnitud que los del Swell unimodal, aunque distribuidos en un rango direccional y espectral más amplio. Los resultados de $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ sugieren una disminución en la amplitud de las olas en la dirección θ_{mSw} y un aumento del ancho direccional del sistema Swell, lo que se traduce en un incremento de la altura de las olas en direcciones no previstas en comparación con lo que se esperaría en un espectro unimodal Swell.

4.1.4.2. Estructura de ΔS_{nl4} en el dominio de frecuencia

Para observar y analizar el cambio en $S_{nl4f}(f)$ asociado al efecto de la bimodalidad y cómo es estimado por cada esquema, se presenta $\Delta S_{nl4f}(f)$ correspondiente a los tres casos de Delta (Figuras 47, 48 y 49).

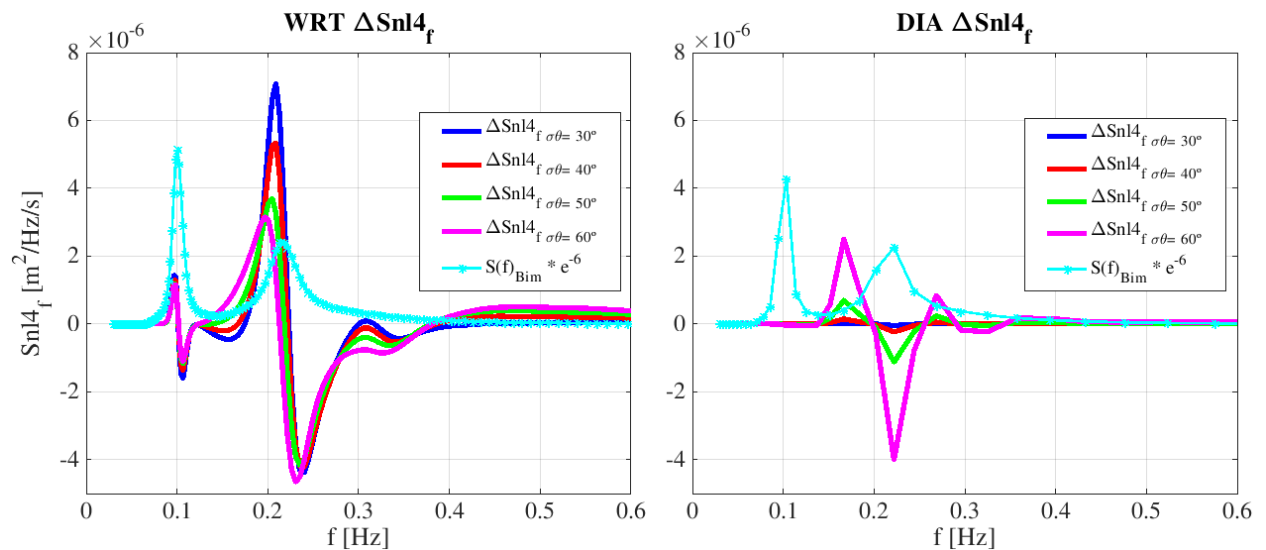


Figura 47. $\Delta S_{nl4f}(f)$ asociado al caso 1 Delta (C1/30Delta, C1/40Delta, C1/50Delta y C1/60Delta), calculado mediante los esquemas WRT (panel izquierdo) y DIA (panel derecho). Se muestran las estimaciones del efecto de la bimodalidad, aunque con variaciones del sistema Wind Sea con anchos direccionales $\sigma_\theta = 30^\circ$ (línea azul), 40° (línea roja), 50° (línea verde) y 60° (línea magenta). También se incluye como referencia $S(f)_{Bim}$, escalado por un factor de e^{-6} (línea cian continua y punteada).

De manera similar a $S_{nl4f}(f)$, la estructura de $\Delta S_{nl4f}(f)$ (Fig. 47) del caso Delta 1 estimada con el esquema WRT (panel izquierdo), indica que la mayor interacción asociada a la bimodalidad ocurre

en la región de frecuencias del sistema Wind Sea, debido a su proximidad con la banda $f_{p_{Ws}}$. La intensidad de esta interacción disminuye a medida que aumenta el ancho direccional del sistema Wind Sea. En contraste, con el esquema DIA también se identifica que la interacción entre sistemas es mayor en la región del Wind Sea, aunque en este caso la intensidad crece conforme se incrementa el ancho direccional. En la región de frecuencias del sistema Swell, el análisis de $\Delta S_{n14f}(f)$ con el esquema WRT (panel izquierdo) evidencia una modificación en la transferencia de energía, aunque de menor magnitud respecto a la observada en el sistema Wind Sea. En contraste, el esquema DIA (panel derecho) no representa variación alguna en la transferencia de energía dentro de la región del Swell. Estos patrones en la interacción también se observan en los casos 2 Delta (Fig. 48) y 3 Delta (Fig. 49), aunque con menor intensidad y un desplazamiento hacia frecuencias mayores (acorde al valor de $f_{p_{Ws}}$ del caso).

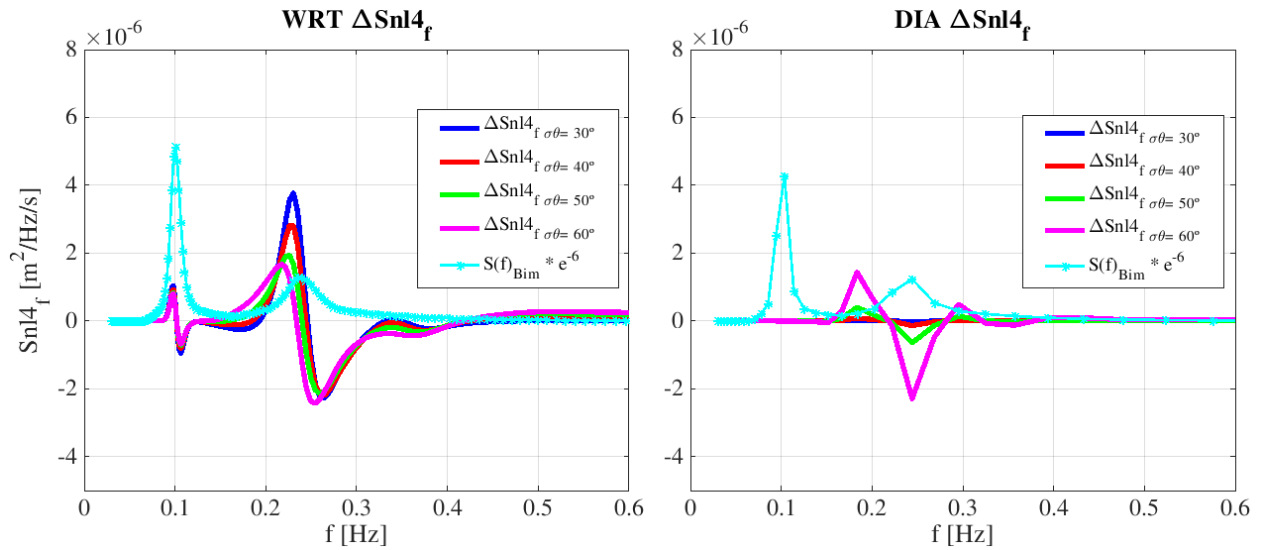


Figura 48. Similar a lo descrito en la Fig. 47 pero ahora del caso 2 Delta.

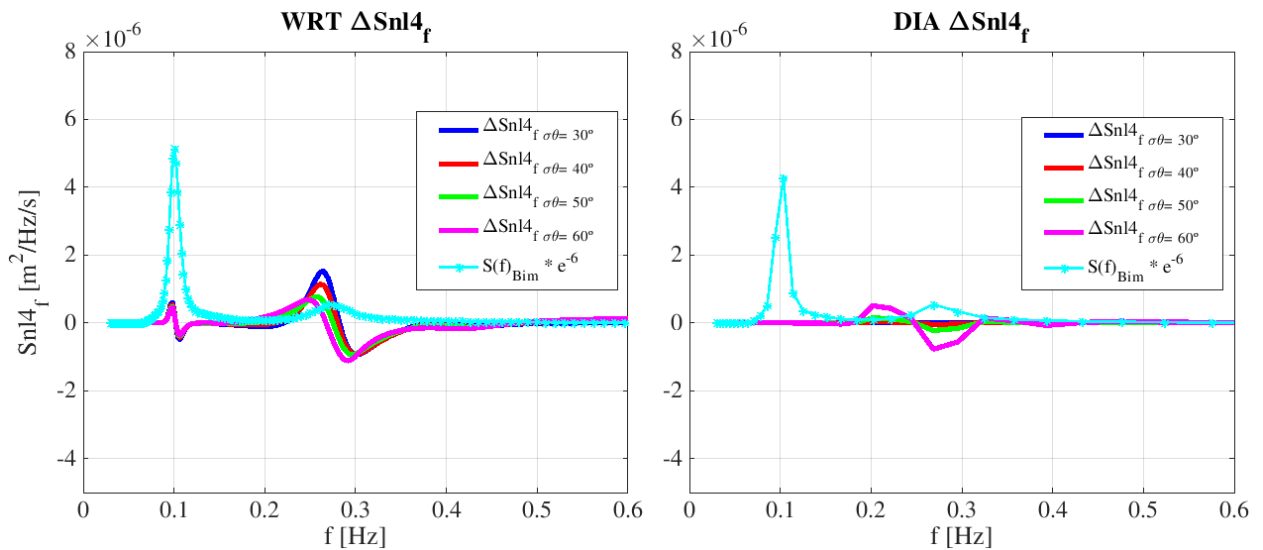


Figura 49. Similar a lo descrito en la Fig. 47 pero ahora del caso 3 Delta.

Un aspecto particular evidenciado mediante la estimación del esquema WRT de $\Delta S_{nl4f}(f)$ es el desplazamiento de la frecuencia en la que se localiza el máximo de transferencia, ya sea positiva o negativa, en función del valor del ancho direccional. El mayor cambio en la intensidad se presenta en la transferencia positiva de energía (con valores angostos de σ_θ), mientras que los máximos de transferencia negativa exhiben variaciones menores, aunque con cambios distinguibles en frecuencias más altas. Adicionalmente, se identifica una región reducida de transferencia negativa en frecuencias intermedias entre el sistema Wind Sea y el Swell. Este patrón es más evidente en el panel izquierdo de la Fig. 47, aunque también se logra apreciar en los otros dos casos (Figuras 48 y 49) pero con menor intensidad. Estos aspectos particulares requieren un análisis con mayor detalle para evaluar su efecto en la evolución del espectro direccional.

A partir de lo descrito en el análisis de $\Delta S_{nl4f}(f)$, se sugiere una mayor tasa de crecimiento en la región de frecuencias asociada al sistema Wind Sea, lo cual supone un desarrollo más acelerado del sistema. No obstante, esta interpretación no es precisa ya que este resultado contrasta con el análisis de la estructura de $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$, en el cual se concluye que el efecto más relevante de la bimodalidad ocurre en la región del sistema Swell.

De forma análoga a lo observado en $S_{nl4f}(f)$, la integración de $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ en todo el dominio direccional no permite caracterizar con precisión el cambio de cada sistema debido a la interacción asociada al efecto de bimodalidad. No obstante, $\Delta S_{nl4f}(f)$ resulta útil para identificar el rango espectral donde se produce el mayor cambio en S_{nl4} como consecuencia de dicho efecto.

Estos resultados refuerzan la necesidad de aplicar un análisis que permita aislar y describir con mayor detalle los cambios asociados a la bimodalidad en cada sistema.

4.1.4.3. Estructura de ΔS_{nl4} en el dominio de frecuencia acotado por σ_θ

Con el objetivo de describir con mayor detalle el efecto de la bimodalidad en los sectores direccionales de cada sistema, se evaluó $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ en rangos direccionales centrados en el valor de θ_m correspondiente a cada sistema y se establecieron los límites de los sectores según sea el valor del ancho direccional de cada sistema ($\pm \frac{\sigma_\theta}{2}$), lo que permitió definir los sectores $\Delta S_{nl4f}(f)_{Ws}$ y $\Delta S_{nl4f}(f)_{Sw}$. Los resultados para los tres casos (Delta 1, Delta 2 y Delta 3) se muestran en las Figuras 51, 50, 53, 52, 55 y 54.

Al comparar las estimaciones de $\Delta S_{nl4f}(f)$ y $\Delta S_{nl4f}(f)_{Ws}$ realizadas mediante el esquema WRT (Fig. 50), se tiene un incremento de la transferencia (en todos los casos de σ_θ), tanto positiva como negativa, en el sector direccional del Wind Sea. Este comportamiento mantiene el patrón característico, con una mayor transferencia positiva hacia frecuencias menores que f_{pWs} .

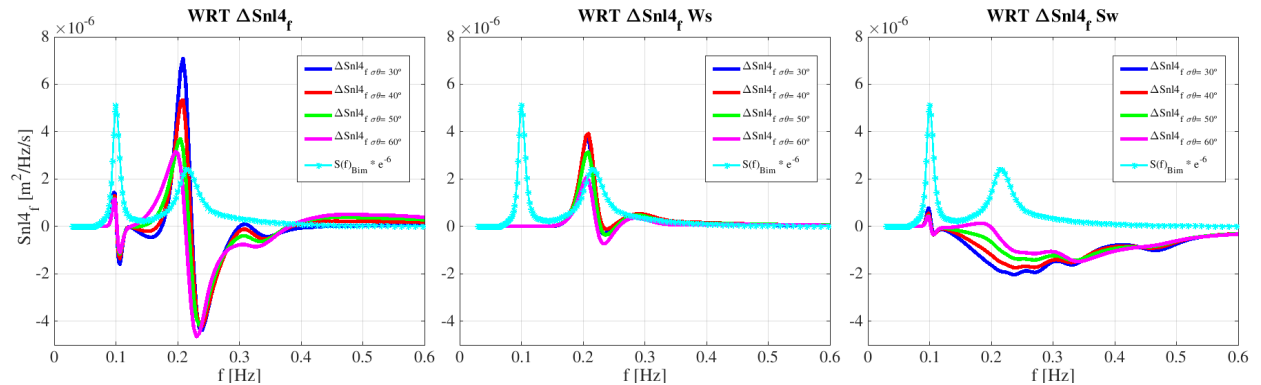


Figura 50. $\Delta S_{nl4f}(f)$ (panel izquierdo), $\Delta S_{nl4f}(f)_{Ws}$ (panel central) y $\Delta S_{nl4f}(f)_{Sw}$ (panel derecho) calculados mediante el esquema WRT para el caso 1 Delta. Se muestran las estimaciones del efecto de la bimodalidad, aunque con variaciones del sistema Wind Sea con anchos direccionales $\sigma_\theta = 30^\circ$ (línea azul), 40° (línea roja), 50° (línea verde) y 60° (línea magenta). También se incluye como referencia $S(f)_{Bim}$, escalado por un factor de e^{-6} (línea cian continua y punteada).

Como consecuencia, el sistema Wind Sea presentará un mayor desarrollo respecto al caso unimodal en el sector direccional asociado a θ_{mWs} . Por otro lado, al comparar las estimaciones de $\Delta S_{nl4f}(f)$ y $\Delta S_{nl4f}(f)_{Sw}$, se observa que en el sector direccional del sistema Swell aumentará la transferencia negativa en la región de frecuencias altas. Este resultado es relevante porque la transferencia ocurre en un rango espectral alejado de la región principal de actividad de S_{nl4} del sistema Swell, localizada en

frecuencias menores a f_{pSw} . Lo anterior implica un cambio en el comportamiento de S_{nl4} del sistema Swell y sugiere una disminución de la energía en la sección evaluada del espectro direccional. De manera general, el cambio en la intensidad de la transferencia de energía (positiva o negativa) debido a la bimodalidad, se atenúa conforme aumenta σ_θ . Esto también se observa en los casos 2 Delta (Fig. 52) y 3 Delta (Fig. 54), aunque con menor intensidad.

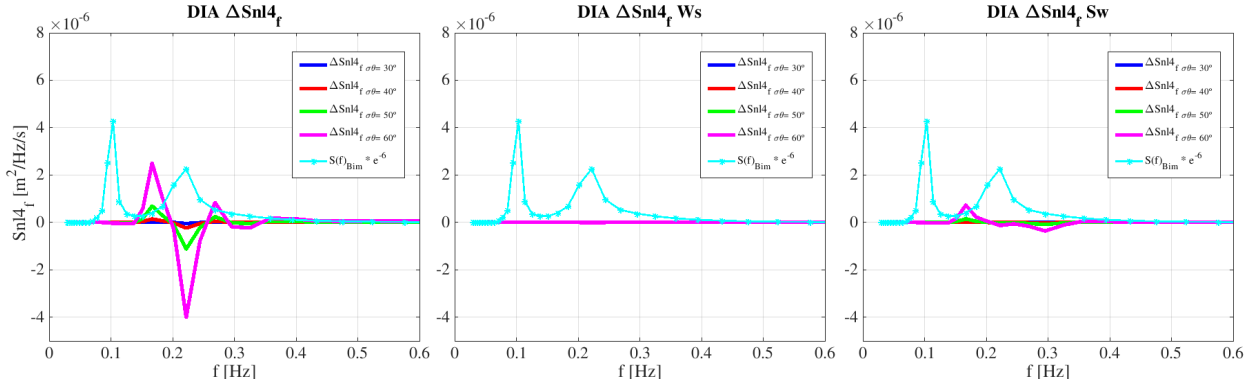


Figura 51. $\Delta S_{nl4f}(f)$ (panel izquierdo), $\Delta S_{nl4f}(f)_{Ws}$ (panel central) y $\Delta S_{nl4f}(f)_{Sw}$ (panel derecho) calculados mediante el esquema DIA para el caso 1 Delta. Se muestran las estimaciones del efecto de la bimodalidad, aunque con variaciones del sistema Wind Sea con anchos direccionales $\sigma_\theta = 30^\circ$ (línea azul), 40° (línea roja), 50° (línea verde) y 60° (línea magenta). También se incluye como referencia $S(f)_{Bim}$, escalado por un factor de e^{-6} (línea cian continua y punteada).

En la Fig. 51 se observa que el cambio en la transferencia de energía en frecuencias altas (asociadas al sistema Wind Sea) debido al efecto de la bimodalidad, sugerido por $\Delta S_{nl4f}(f)$ (panel izquierdo), no necesariamente corresponde al propio sistema Wind Sea (panel central), o al menos no al sector direccional en el que se propaga la mayor cantidad de energía ($\Delta S_{nl4f}(f)_{Ws}$). En cuanto al cambio en la transferencia debida a la bimodalidad en el sistema Swell (panel derecho), la interacción ocurre en frecuencias altas y alejadas de f_{pSw} , aunque únicamente para valores de $\sigma_\theta > 50^\circ$, algo poco descrito en la literatura. Este resultado indica que la interacción entre sistemas tiene más peso en espectros direccionales con anchos direccionales amplios. Esto también se observa en los casos 2 Delta (Fig. 53) y 3 Delta (Fig. 55), aunque con menor intensidad. En contraste, con el esquema WRT la interacción está presente independientemente del valor de σ_θ , aunque con variaciones en la intensidad asociadas a dicho parámetro.

Por lo tanto, se confirma que el efecto de la bimodalidad modifica el comportamiento del sistema Wind Sea (al acelerar su evolución) y del sistema Swell en frecuencias superiores a f_{pSw} , un aspecto poco abordado en la literatura. La intensidad de $\Delta S_{nl4f}(f)_{Sw}$ es comparable con $S_{nl4}(f)$ del Swell unimodal, lo que resalta la necesidad de considerarla en el análisis de $S_{nl4f}(f)$ en la región del Swell y en la evolución de $E(f, \theta)$.

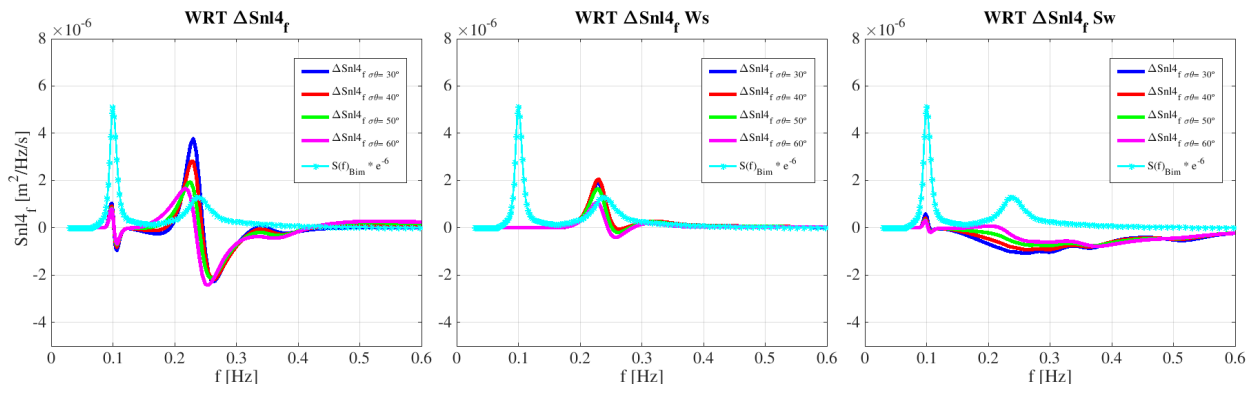


Figura 52. Similar a lo descrito en la Fig. 50 pero ahora del caso 2 Delta.

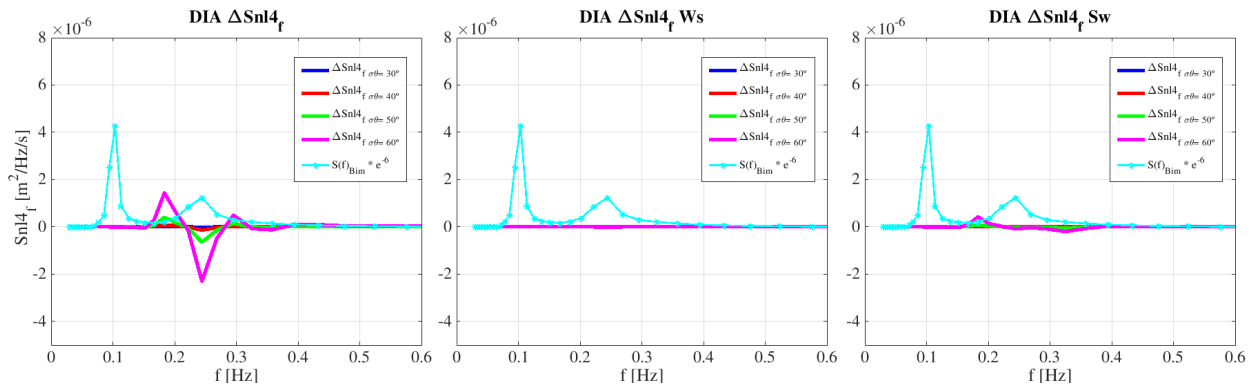


Figura 53. Similar a lo descrito en la Fig. 51 pero ahora del caso 2 Delta.

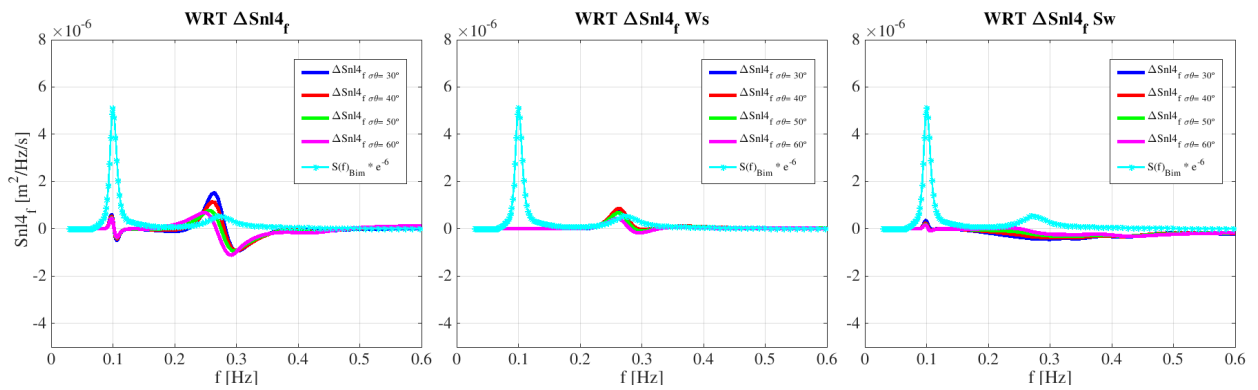


Figura 54. Similar a lo descrito en la Fig. 50 pero ahora del caso 3 Delta.

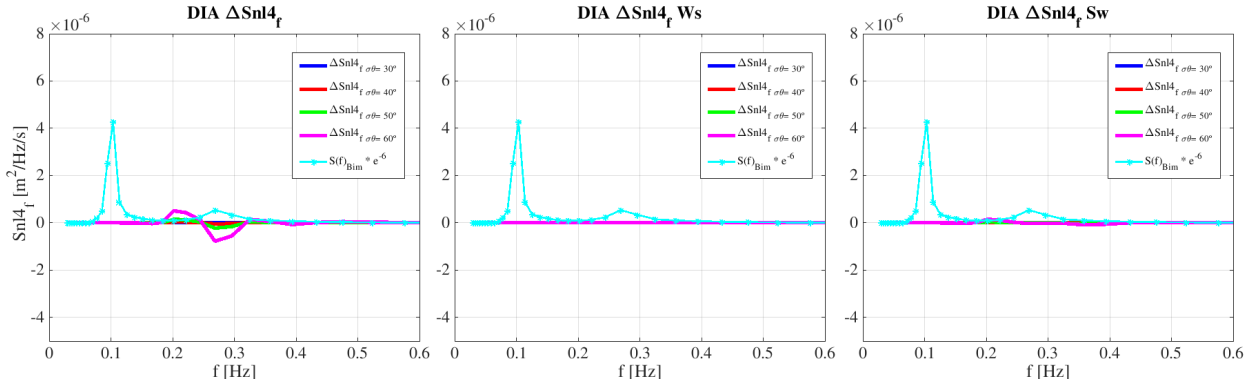


Figura 55. Similar a lo descrito en la Fig. 51 pero ahora del caso 3 Delta.

Al considerar los resultados de $\Delta S_{nl4}(f)_{Ws}$ y $\Delta S_{nl4}(f)_{Sw}$, se confirma la importancia de analizar la interacción entre sistemas en sectores direccionales que permitan aislar los efectos específicos que cada sistema experimenta por la presencia del otro. La evaluación de los cambios en todo el dominio direccional puede conducir a conclusiones erróneas. Además, este análisis evidencia que la bimodalidad del espectro modifica el desarrollo del espectro direccional cuando se emplea un esquema exacto, efecto que no es representado por el esquema aproximado y que puede conducir a una evolución espectral incorrecta. Este hallazgo contrasta con lo propuesto por Masson (1993), quien sostiene que la interacción entre sistemas con características similares a las estudiadas en este trabajo es despreciable y carece de relevancia en la evolución espectral. Algo importante a considerar es que mediante este análisis sólo se evalúa el efecto debido a la bimodalidad en la región con mayor cantidad de energía en cada sistema, con lo cual, estos análisis aún deben ser complementados con otros que logren aislar los efectos asociados a la bimodalidad en los sectores direccionales que están fuera de los límites impuestos por σ_θ .

4.1.5. Análisis de la transferencia total

Con el objetivo de cuantificar la diferencia en la transferencia de energía de los distintos análisis de S_{nl4} , se calculó la transferencia total de energía (Ec. 38) de las estimaciones realizadas por cada esquema, y posteriormente la razón entre sus respectivos valores de T_{Total} , de manera que para los casos de espectros unimodales y bimodales se describen los siguientes coeficientes:

$$R_{Uni} = \frac{T_{TotalUniDIA}}{T_{TotalUniWRT}}, \quad R_{Bim} = \frac{T_{TotalBimDIA}}{T_{TotalBimWRT}}. \quad (46)$$

Mientras que para los coeficientes asociados a ΔS_{nl4} , ΔS_{nl4Ws} y ΔS_{nl4Sw} :

$$R_{\Delta S_{nl4}} = \frac{T_{Total} \Delta S_{nl4DIA}}{T_{Total} \Delta S_{nl4WRT}}, \quad R_{\Delta S_{nl4Ws}} = \frac{T_{Total} \Delta S_{nl4WsDIA}}{T_{Total} \Delta S_{nl4WsWRT}} \quad \text{y} \quad R_{\Delta S_{nl4Sw}} = \frac{T_{Total} \Delta S_{nl4SwDIA}}{T_{Total} \Delta S_{nl4SwWRT}}. \quad (47)$$

Las diferencias en la transferencia de energía entre esquemas, en condiciones unimodales y bimodales, se cuantificaron mediante los coeficientes R (Tabla 11). También se calcularon los valores de R para ΔS_{nl4} (Tabla 12) y para ΔS_{nl4} acotado por σ_θ . En este último caso, se presentan los resultados correspondientes a ΔS_{nl4Ws} (Tabla 13) y a ΔS_{nl4Sw} (Tabla 14).

Tabla 11. Razón de transferencia total de energía (R_{Uni} y R_{Bim}) de casos unimodales Wind Sea (Ws) y Swell, y bimodales (BIM), para distintos valores de σ_θ en la región del GoT.

	Sistema	$\sigma_\theta = 30$	$\sigma_\theta = 40$	$\sigma_\theta = 50$	$\sigma_\theta = 60$	$\sigma_\theta = 20$
	Swell	-	-	-	-	0.78
Caso 1	Ws	1.94	1.74	1.54	1.37	-
	BIM	1.92	1.71	1.51	1.35	-
Caso 2	Ws	1.95	1.74	1.55	1.38	-
	BIM	1.92	1.71	1.50	1.35	-
Caso 3	Ws	1.97	1.78	1.57	1.37	-
	BIM	1.94	1.73	1.51	1.34	-

El análisis de los resultados de la Tabla 11 indica que el esquema DIA estima una mayor transferencia total de energía que el esquema WRT, con razones R_{Uni} y R_{Bim} en el rango de 1.36 a 1.96, correspondientes a sistemas Wind Sea con $\sigma_\theta = 60^\circ$ y $\sigma_\theta = 30^\circ$, respectivamente. Esto sugiere que, bajo el esquema DIA, el espectro direccional presenta un desarrollo más acelerado. Esto no ocurre en sistemas Swell donde es el esquema WRT quien estima una mayor transferencia.

Tabla 12. Razón de transferencia total de energía ($R_{\Delta S_{nl4}}$) en casos de ΔS_{nl4} para distintos valores de σ_θ en la región del GoT.

Caso	$\sigma_\theta = 30$	$\sigma_\theta = 40$	$\sigma_\theta = 50$	$\sigma_\theta = 60$
Caso 1	7.55×10^{-4}	3.93×10^{-3}	2.27×10^{-2}	1.14×10^{-1}
Caso 2	8.16×10^{-4}	4.31×10^{-3}	2.47×10^{-2}	1.22×10^{-1}
Caso 3	9.11×10^{-4}	4.97×10^{-3}	2.78×10^{-2}	1.33×10^{-1}

En cuanto a la transferencia asociada a ΔS_{nl4} , los resultados de la Tabla 12 muestran que la intensidad de la interacción entre sistemas depende en gran medida del valor de σ_θ . En este contexto, el esquema

WRT sí representa los cambios inducidos por el efecto de la bimodalidad, en especial cuando σ_θ es reducido. En contraste, el esquema DIA subestima dichos cambios, con diferencias en la estimación de la transferencia que pueden alcanzar hasta cuatro órdenes de magnitud.

Tabla 13. Razón de transferencia total de energía ($R_{\Delta S_{nl4Ws}}$) en casos de ΔS_{nl4Ws} para distintos valores de σ_θ en la región del GoT.

Caso	$\sigma_\theta = 30$	$\sigma_\theta = 40$	$\sigma_\theta = 50$	$\sigma_\theta = 60$
Caso 1	2.47×10^{-3}	2.04×10^{-3}	2.22×10^{-3}	2.80×10^{-3}
Caso 2	2.69×10^{-3}	2.14×10^{-3}	2.32×10^{-3}	2.90×10^{-3}
Caso 3	2.75×10^{-3}	2.25×10^{-3}	2.45×10^{-3}	3.07×10^{-3}

Con relación a ΔS_{nl4Ws} (Tabla 13), el esquema DIA no muestra variaciones relevantes respecto al esquema WRT en el sector direccional del sistema, dado que los valores de $R_{\Delta S_{nl4Ws}}$ se mantienen en el mismo orden de magnitud en todos los casos. Esto evidencia que, aunque DIA sobrestima la transferencia total de energía, su capacidad para representar modificaciones en el Wind Sea inducidas por la bimodalidad resulta limitada en comparación con el esquema WRT.

Tabla 14. Razón de transferencia total de energía ($R_{\Delta S_{nl4Sw}}$) en casos de ΔS_{nl4Sw} para distintos valores de σ_θ en la región del GoT.

Caso	$\sigma_\theta = 30$	$\sigma_\theta = 40$	$\sigma_\theta = 50$	$\sigma_\theta = 60$
Caso 1	3.79×10^{-4}	3.83×10^{-3}	2.35×10^{-2}	1.10×10^{-1}
Caso 2	4.36×10^{-4}	4.37×10^{-3}	2.58×10^{-2}	1.17×10^{-1}
Caso 3	5.31×10^{-4}	5.23×10^{-3}	2.96×10^{-2}	1.27×10^{-1}

Con respecto a ΔS_{nl4Sw} (Tabla 14), los resultados muestran un comportamiento similar al observado en la transferencia total de ΔS_{nl4} , en el cual la intensidad de la interacción en el sector direccional del sistema Swell depende significativamente del valor de σ_θ del sistema Wind Sea. En este contexto, el esquema WRT representa con mayor precisión los cambios inducidos por la bimodalidad, especialmente para valores bajos de σ_θ . En contraste, el esquema DIA subestima dichos cambios, con diferencias que pueden alcanzar hasta cuatro órdenes de magnitud.

Finalmente, estos resultados indican que, bajo las condiciones evaluadas en el experimento del GoT, el sistema Wind Sea modifica la actividad de S_{nl4} del Swell que se propaga en dirección opuesta y cuya f_p se encuentra alejada del f_p del Wind Sea. Por lo tanto, se confirma la importancia de la interacción debida a la bimodalidad en este tipo de oleaje, lo que contrasta con lo planteado por Masson (1993).

4.2. Isla Todos Santos

En esta sección se presentan los resultados del análisis asociados a los espectros direccionales del experimento ITS. En donde se consideran dos sistemas Swell con valores asociadas de f_p cercanos al igual que sus respectivos valores de θ_m . Los resultados incluyen: la comparación de la estimación de S_{nl4} mediante los esquemas WRT y DIA respecto a la magnitud y distribución angular de la transferencia de energía y los efectos asociados a la bimodalidad espectral.

4.2.1. Espectros direccionales unimodales y bimodales

En este apartado se presentan espectros direccionales unimodales (C4/110 y C4/25) y bimodales (C4/25BIM y C4/45BIM) sintéticos empleados para calcular S_{nl4} mediante los esquemas WRT y DIA. Con relación a los espectros unimodales, se incluyen los espectros asociados al sistema Swell_a, identificado como el más energético, y al Swell_b (C4/25), ya que conserva sus parámetros integrales con una sola variación en θ_m . Por otro lado, debido a la poca variabilidad observada en los casos intermedios, para los espectros bimodales, solo se muestran aquellos en los que la diferencia relativa de la dirección principal de propagación ($\delta\theta$) es de 25° (C4/25BIM) y 45° (C4/45BIM).

En la Fig. 56 se presentan los espectros direccionales unimodales $E(f, \theta)$ de los sistemas Swell_a (C4/110) y Swell_b (C4/25), empleados para estimar S_{nl4} con los esquemas WRT (paneles a y c) y DIA (paneles b y d). Ambos sistemas presentan un ancho direccional típico de $\sigma\theta = 20^\circ$. Se observa una diferencia en la energía entre ellos, siendo el sistema Swell_a el más energético. Aunque los parámetros integrales utilizados para generar ambos espectros son prácticamente idénticos, la diferencia en el dominio de frecuencias considerado induce ligeras variaciones en la cantidad y en la distribución de la energía espectral.

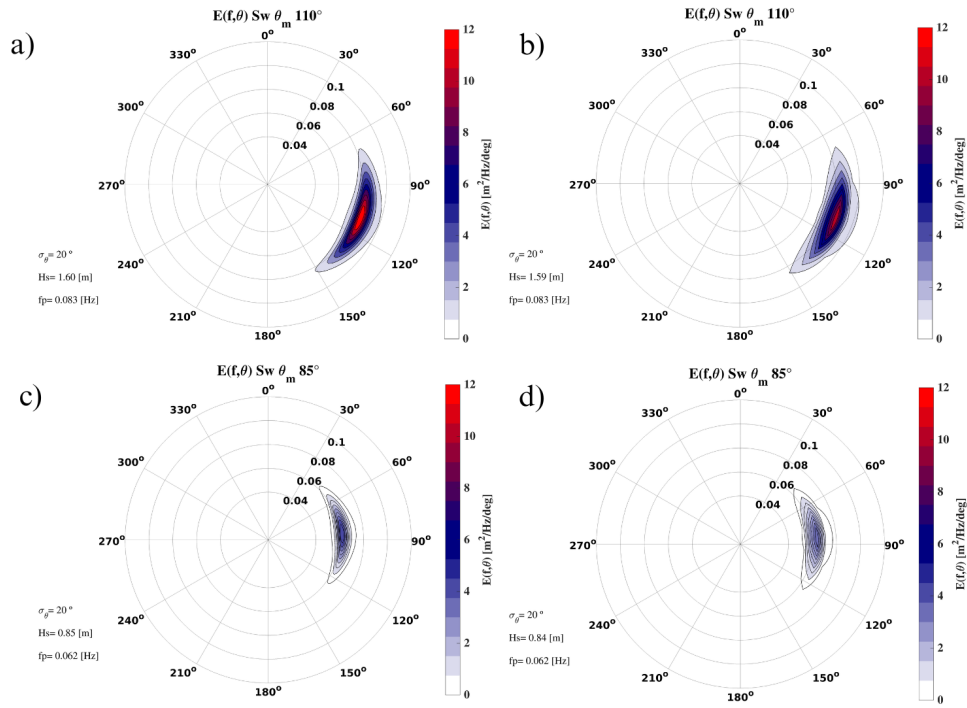


Figura 56. Espectros direccionales unimodales correspondientes al sistema Swell_a (C4/110) con una dirección de propagación $\theta_m = 110^\circ$ y al sistema Swell_b (C4/25) con $\theta_m = 85^\circ$, ambos con ancho direccional $\sigma_\theta = 20^\circ$. En los paneles superiores se muestra el espectro direccional unimodal de Swell_a utilizado como base para el cálculo de S_{n14} mediante el esquema WRT (panel a) y DIA (panel b). En los paneles inferiores se muestra el espectro direccional unimodal Swell_b utilizado como base para el cálculo de S_{n14} mediante el esquema WRT (panel c) y DIA (panel d). Los contornos describen la densidad de energía espectral y aumentan cada $\frac{E(f, \theta)_{max}}{9}$ unidades de densidad de energía espectral.

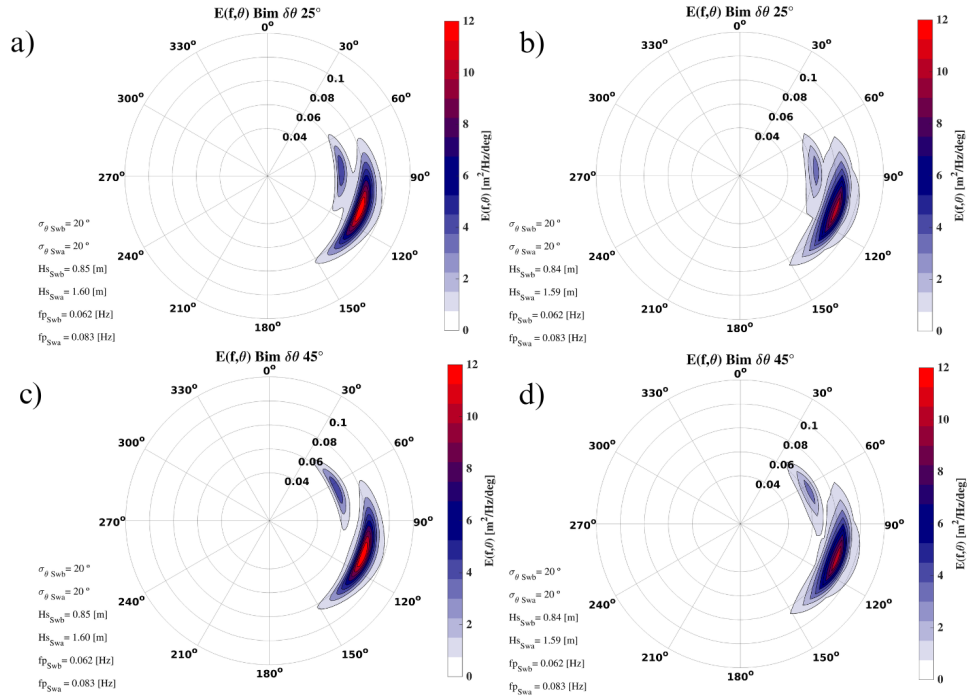


Figura 57. Espectros direccionales bimodales correspondientes a los casos en donde $\delta\theta$ entre los sistemas Swell_a y Swell_b son de 25° (C4/25BIM) y 45° (C4/45BIM). En los paneles superiores se muestra el espectro direccional bimodal con $\delta\theta = 25^\circ$ utilizado como base para el cálculo de S_{n14} mediante el esquema WRT (panel a) y DIA (panel b). En los paneles inferiores se muestra el espectro direccional bimodal con $\delta\theta = 45^\circ$ utilizado como base para el cálculo de S_{n14} mediante el esquema WRT (panel c) y DIA (panel d). Los contornos describen la densidad de energía espectral y aumentan cada $\frac{E(f, \theta)_{max}}{9}$ unidades de densidad de energía espectral.

En la Fig. 57 se muestran espectros direccionales bimodales con diferencias relativas en la dirección principal de propagación de $\delta\theta = 25^\circ$ (C4/25BIM paneles a y b) y $\delta\theta = 45^\circ$ (C4/45BIM paneles c y d). En ambos casos se considera el sistema Swell_a, que se propaga con dirección $\theta_m = 110^\circ$, y el sistema Swell_b, cuya dirección de propagación es $\theta_m = 85^\circ$ (C4/25) en los paneles superiores y $\theta_m = 65^\circ$ (C4/45) en los paneles inferiores. Ambos sistemas presentan un ancho direccional de $\sigma_\theta = 20^\circ$. Para $\delta\theta = 25^\circ$ se aprecia una suma parcial de energía entre ambos sistemas (en la escala representada en la gráfica), mientras que con $\delta\theta = 45^\circ$ dicha suma es menos evidente.

4.2.2. Estructura de S_{n14} en el dominio frecuencia-dirección

El objetivo de esta sección es comparar $S_{n14}(f, \theta)$ estimada mediante los esquemas WRT y DIA, de los casos de espectros unimodales (C4/110 y C4/25) y bimodales (C4/25BIM y C4/45BIM). En el caso unimodal se analizan únicamente los espectros correspondientes al sistema Swell_a (C4/110) y al Swell_b

(C4/25). En el caso bimodal, se analizan únicamente los espectros con diferencias relativas de la dirección principal de propagación $\delta\theta = 25^\circ$ (C4/25BIM) y 45° (C4/45BIM), dado que en los casos intermedios se observó poca variabilidad en $S_{nl4}(f, \theta)$.

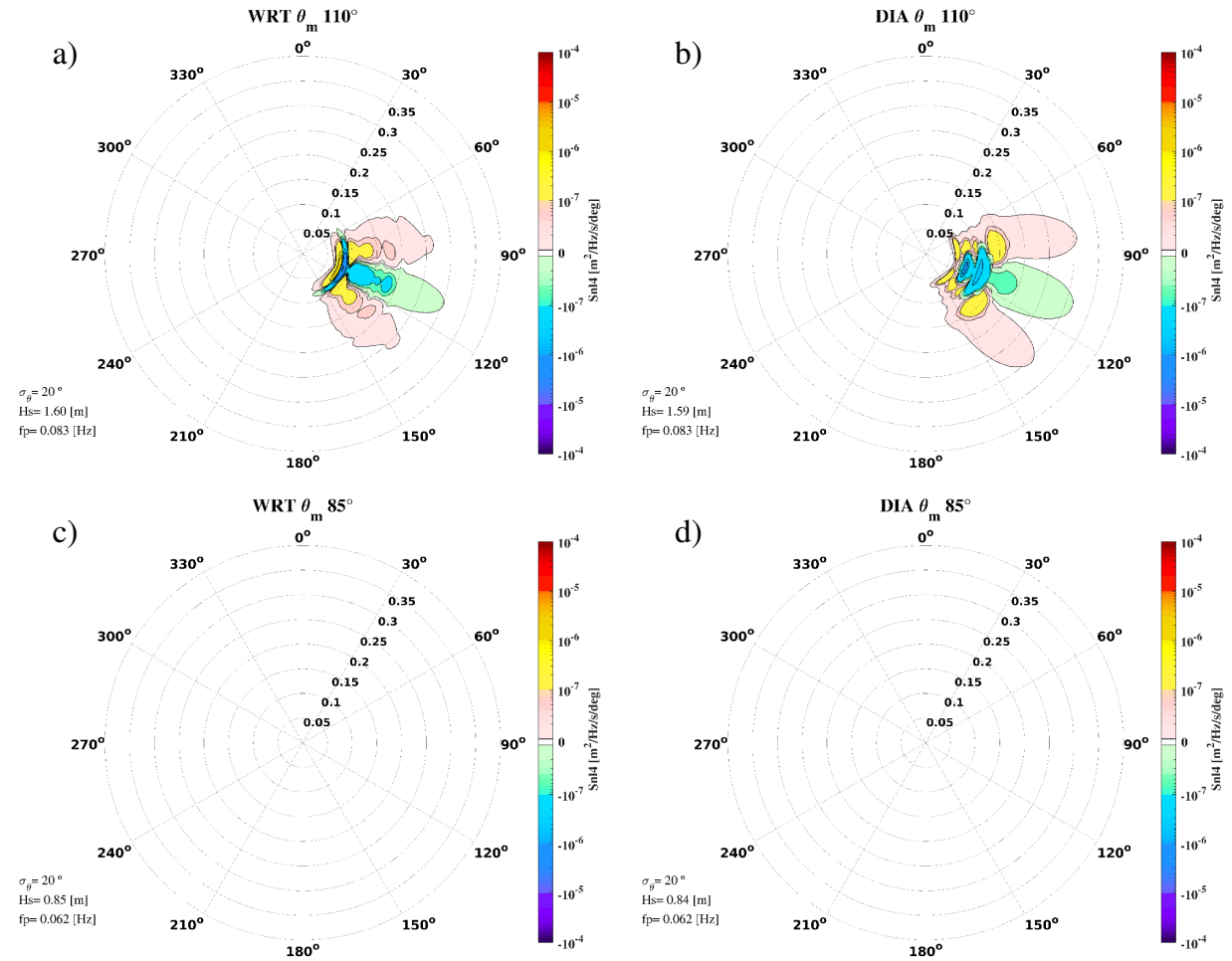


Figura 58. $S_{nl4}(f, \theta)$ de espectros unimodales correspondientes al sistema Swell_a con una dirección de propagación $\theta_m = 110^\circ$ (C4/110 paneles a y b) y al sistema Swell_b con $\theta_m = 85^\circ$ (C4/25 paneles c y d), ambos con ancho direccional $\sigma_\theta = 20^\circ$. Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{nl4} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cíen), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas).

En la Fig. 58 se muestran las estimaciones obtenidas con ambos esquemas. Los valores de $S_{nl4}(f, \theta)$ del sistema Swell_a (paneles a y b) exhiben el patrón tri-lobular de transferencia de energía. En contraste, el sistema Swell_b (paneles c y d) no muestra estructura alguna, lo cual sugiere que los órdenes de magnitud de la transferencia de energía en este sistema, están por debajo de $\pm 10^{-8}$ (rangos de nulo interés en este trabajo), esto sugiere una baja contribución de Swell_b en la interacción entre sistemas Swell.

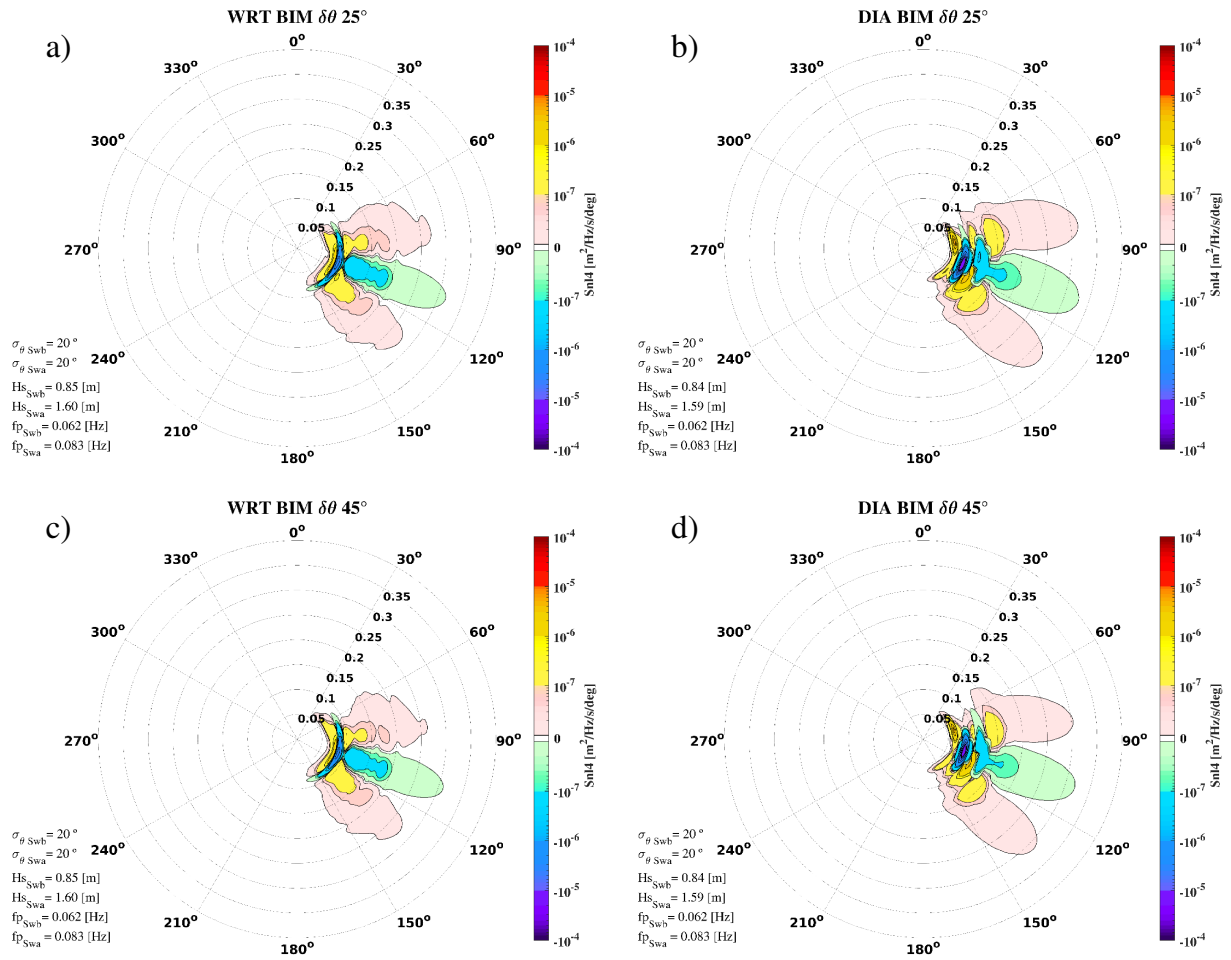


Figura 59. $S_{n14}(f, \theta)$ de espectros bimodales correspondientes a los casos en donde $\delta\theta$ entre los sistemas Swell_a y Swell_b es de 25° (C4/25BIM paneles a y b) y 45° (C4/45BIM paneles c y d). Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{n14} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cían), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas).

En la Fig. 59 no se identifican cambios relevantes respecto a los casos unimodales de $S_{n14}(f, \theta)$ (Fig. 58). La estructura asociada al sistema Swell_a se mantiene dominante, con ligeras variaciones en valores reducidos de $\delta\theta$, que no representan modificaciones significativas en la evolución del sistema.

4.2.3. Efecto de la bimodalidad

Para describir con mayor detalle el cambio en $S_{n14}(f, \theta)$ asociado al efecto de la bimodalidad y su posible impacto en la evolución del espectro direccional, se evaluó $\Delta S_{n14}(f, \theta)$. Se consideraron únicamente los

casos con diferencias relativas en la dirección principal de propagación de $\delta\theta = 25^\circ$ (C4/25Delta) y 45° (C4/45Delta), ya que en los valores intermedios se observó poca variabilidad en los resultados de $S_{nl4}(f, \theta)$.

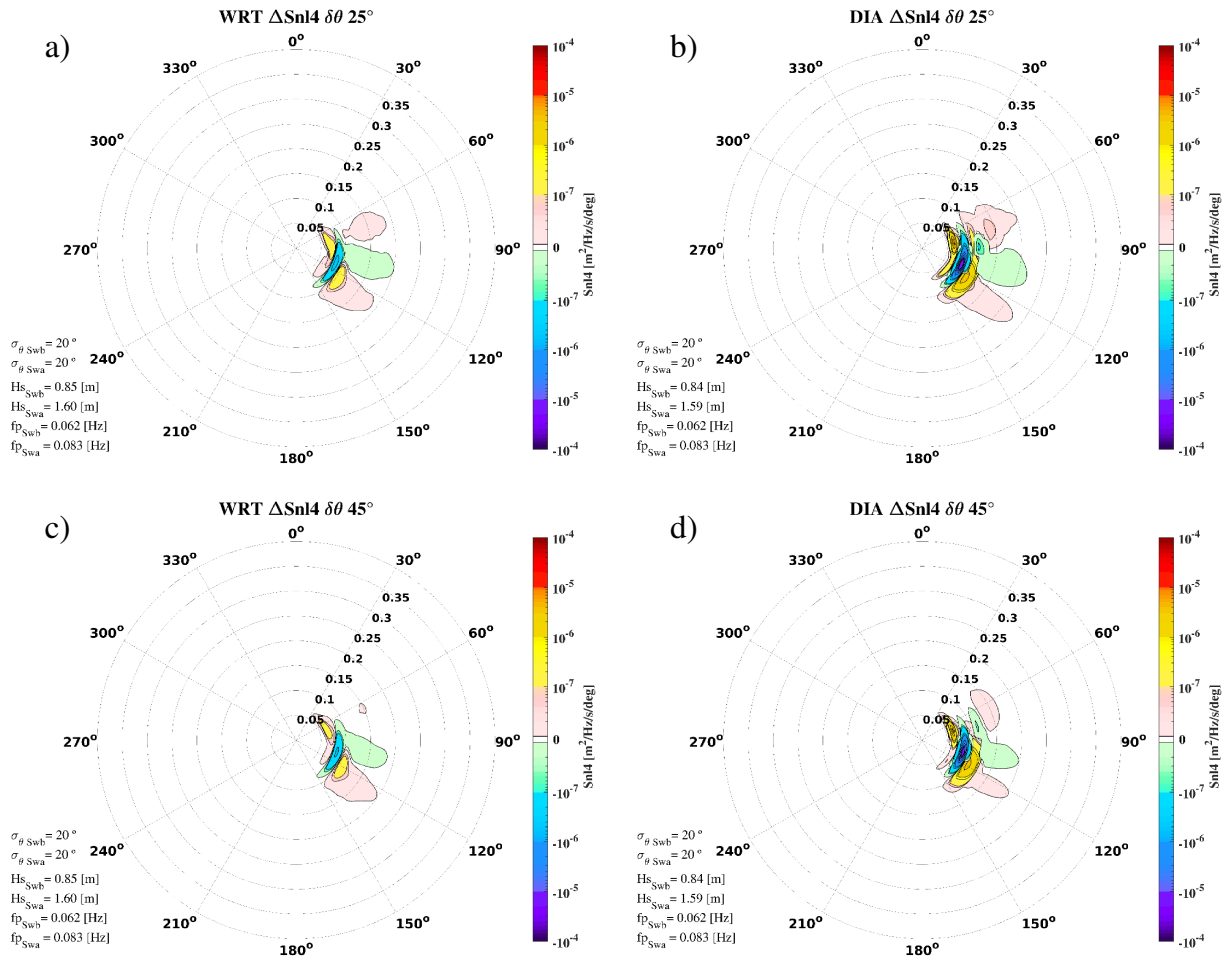


Figura 60. $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ de espectros bimodales correspondientes a los casos en donde $\delta\theta$ entre los sistemas Swell_a y Swell_b es de 25° (C4/25Delta paneles a y b) y 45° (C4/45Delta paneles c y d). Los paneles a y c muestran los resultados obtenidos mediante el esquema WRT, mientras que los paneles b y d corresponden al esquema DIA. Las gráficas indican las frecuencias (círculos concéntricos) y direcciones (en grados) en donde S_{nl4} describe transferencia de energía positiva o negativa. Los contornos de la escala logarítmica se representan cada $\pm 5e^{-8}$ (regiones verdes-rosas), $\pm 5e^{-7}$ (regiones amarillas-cían), y con el propósito de describir con mayor detalle los cambios, $\pm 2.5e^{-6}$ (regiones naranjas-azuladas) y $\pm 2.5e^{-5}$ (regiones rojizas-marrón-moradas).

Los resultados de $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ de los espectros bimodales compuestos por dos sistemas Swell (Fig. 60) muestran que una menor separación angular $\delta\theta$ entre los sistemas conduce a una mayor interacción, lo cual coincide con lo descrito por Masson (1993). No obstante, se descarta un análisis detallado del efecto de la bimodalidad, dado que los valores y los rangos de frecuencia y dirección en los que se observan cambios resultan irrelevantes para la evolución del espectro direccional bimodal compuesto por dos sistemas Swell.

4.3. Modelo conceptual

El objetivo de este modelo conceptual es proporcionar una herramienta para interpretar el efecto de la bimodalidad en S_{n14} y su posible impacto en la evolución del espectro direccional, así como en la modificación del campo de olas, cuando se calcula mediante los esquemas WRT y DIA en casos de sistemas unimodales y bimodales.

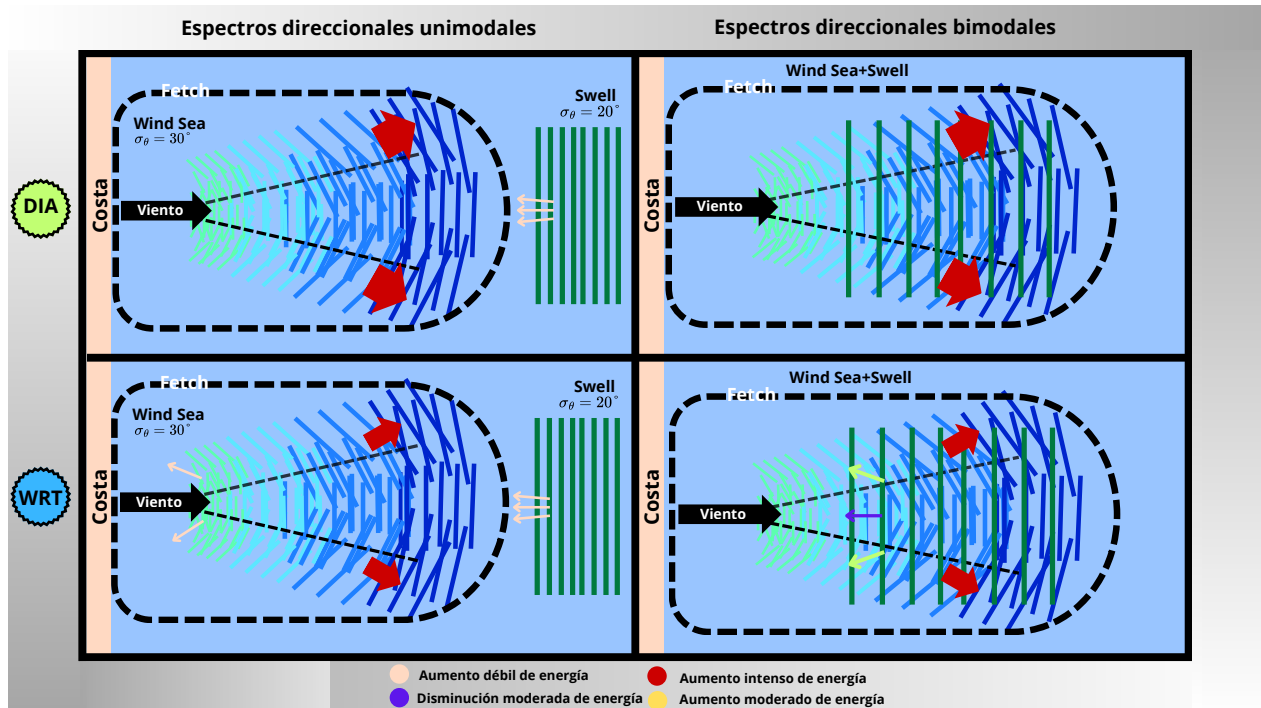


Figura 61. Modelo conceptual utilizado para representar el posible efecto de S_{n14} en la evolución del espectro direccional del oleaje al aplicar los esquemas WRT (paneles inferiores) y DIA (paneles superiores) y su influencia en el campo de olas. La columna izquierda corresponde a condiciones unimodales y la columna derecha a condiciones bimodales. Se incluye un sistema Wind Sea con crecimiento limitado por el fetch (contorno en línea negra segmentada) y ancho direccional $\sigma_\theta = 30^\circ$, en el cual las crestas se desarrollan en la dirección del viento. Las componentes del sistema incrementan su energía —indicada por el cambio en el color y la longitud de la ortogonal— conforme aumenta la distancia respecto a la costa. Asimismo, se incorpora un sistema Swell con $\sigma_\theta = 20^\circ$ que se propaga en dirección opuesta al viento. Las flechas representan el incremento o la disminución de la energía debido a S_{n14} , así como las direcciones hacia las cuales se esperan cambios asociados a dicha variación de energía.

En los casos unimodales de Wind Sea y Swell se describen las principales características de la transferencia de energía identificadas en este trabajo. En el sistema Wind Sea, representado con un ancho direccional de $\sigma_\theta = 30^\circ$, se observa un incremento significativo de energía en el campo de olas en direcciones oblicuas a la dirección del viento, representadas por flechas rojas. La diferencia en el tamaño de dichas flechas corresponde a la variación en T_{Total} , donde el esquema DIA estima una transferencia de energía entre 1.36 y 1.97 veces mayor que la calculada mediante el esquema WRT. Una diferencia adicional

corresponde a la transferencia de energía en sentido opuesto a la dirección de propagación, indicada por flechas verdes, la cual únicamente se identifica en el esquema WRT. En contraste, el sistema Swell, con $\sigma_\theta = 20^\circ$, presenta una actividad reducida de S_{nl4} tanto en WRT como en DIA.

En los casos bimodales, la presencia simultánea de Wind Sea y Swell modifica la evolución espectral. El esquema WRT muestra un ensanchamiento direccional del Swell, representado por las flechas amarillas, acompañado de una disminución de energía en su dirección principal de propagación, mientras que el esquema DIA subestima este efecto. En cuanto al sistema Wind Sea, se observa un ligero cambio en la velocidad de su evolución, aunque sin una variación significativa en la intensidad de la transferencia. Por lo tanto, la bimodalidad no altera de manera relevante el desarrollo general del sistema Wind Sea.

En conjunto, el modelo conceptual muestra que la bimodalidad tiene un impacto en la evolución del espectro direccional, lo cual se traduce en modificaciones del campo de olas, y que la representación de este impacto depende de manera decisiva del esquema empleado.

Es importante mencionar que las diferencias en la estructura del espectro direccional inducidas por el uso de un método exacto para estimar la transferencia de energía debida a las interacciones no-lineales entre cuádrupletas puede producir una respuesta diferente de los otros dos términos fuente. Eso quizá induzca diferencias importantes en la variabilidad espacial del campo de olas, con respecto a la solución de un modelo espectral que usa DIA.

Es importante señalar que las diferencias en la estructura del espectro direccional, inducidas por el uso de un método exacto para estimar la transferencia de energía debida a las interacciones no lineales entre cuádrupletas, pueden generar una respuesta distinta en los otros términos fuente. Este efecto podría traducirse en diferencias significativas en la variabilidad espacial del campo de olas respecto a la obtenida con un modelo espectral basado en el esquema DIA.

Capítulo 5. Conclusiones

Para finalizar el presente trabajo, se presentan las conclusiones derivadas de las comparaciones del comportamiento de S_{nl4} estimado mediante distintos esquemas de solución bajo diversas condiciones espectrales de oleaje.

Sobre los espectros unimodales representativos del oleaje en el GoT.

Con el esquema WRT se estima transferencia de energía en sentido opuesto al viento en sistemas Wind Sea unimodales independientemente del ancho espectral σ_θ , lo que indica un desarrollo de energía en dirección opuesta sin requerir anchos direccionales amplios. Dicho comportamiento concuerda con lo reportado por Lavrenov y Ocampo-Torres (1999), quienes emplearon una distribución direccional tipo Donelan et al. (1985) y un esquema de solución exacto.

La transferencia de energía en dirección opuesta observada en las estimaciones con WRT representa una magnitud similar a observaciones previas de transferencia de energía hacia el oleaje que se propaga en dirección opuesta (Crombie et al., 1978), lo que refuerza la validez física de los patrones detectados.

La transferencia estimada mediante el esquema DIA en sentido opuesto a la dirección principal de propagación del sistema Wind Sea, sólo es relevante en espectros que tengan valores de $\sigma_\theta > 50^\circ$.

En condiciones de Wind Sea, la intensidad de la transferencia representada con S_{nl4} está condicionada por la cantidad de energía y su correspondiente ancho direccional.

A partir de los espectros direccionales con valores menores de σ_θ , tal como ($\sigma_\theta = 30^\circ$) se obtiene mayor transferencia de energía y por lo tanto se supone mayor velocidad de evolución de los espectros en comparación con espectros con ancho direccional amplio ($\sigma_\theta = 60^\circ$).

Se demuestra que S_{nl4} ejerce una mayor influencia en sistemas Wind Sea con espectros direccionales estrechos, favoreciendo una evolución más rápida frente a aquellos con anchos direccionales amplios. Este comportamiento se atribuye a que, al concentrarse la energía en un rango direccional reducido, se incrementa la cantidad de energía transferible hacia otras direcciones.

Aún en el caso del sistema Wind Sea, la variación de la energía con respecto a f_p no altera la distribución espacial de los lóbulos representativos de la transferencia de energía, pero sí modifica la magnitud de esa transferencia.

La comparación cuantitativa de los resultados obtenidos con los dos esquemas indica que, en las condi-

ciones analizadas, la evolución del espectro direccional que se espera a partir de las estimaciones con el esquema DIA puede ser entre 1.36 y 1.97 veces más rápida que la esperada a partir de las estimaciones con WRT (sin consideración de otros términos fuente).

Sobre los espectros bimodales representativos del oleaje en el GoT

El sistema Wind Sea intensifica la transferencia de energía representada con S_{nl4} del sistema Swell que se propaga en sentido opuesto aunque la correspondiente f_p sea menor que la correspondiente del sistema Wind Sea; por tanto, las interacciones asociadas a la bimodalidad del espectro en las condiciones representativas del oleaje en el GoT son importantes en el desarrollo del espectro, lo cual contrasta con lo descrito por Masson (1993) para las condiciones descritas en su experimento.

Con la estimación de S_{nl4} mediante el esquema WRT, la evolución del sistema Swell en presencia de un sistema Wind Sea que se propaga en sentido opuesto presentará un desarrollo angular y espectral mayor que su contraparte unimodal específicamente en la región de altas frecuencias con f mayor que su respectiva f_p .

A partir de las estimaciones de S_{nl4} con el esquema DIA, se sugiere que el desarrollo angular y espectral que se describe se torna más relevante al aumentar el ancho direccional especialmente cuando el sistema Wind Sea presenta valores de $\sigma_\theta > 50^\circ$.

La intensidad de la interacción entre los sistemas Wind Sea y Swell estimada con el esquema WRT, disminuye al aumentar σ_θ . Cuando la interacción se estima con el esquema DIA, la intensidad aumenta con σ_θ .

Con el procedimiento de evaluar $\Delta S_{nl4}(f, \theta)$ en el dominio direccional, es posible caracterizar el cambio en general debido a la interacción asociada a la bimodalidad del espectro. Sin embargo, se adopta el análisis por sectores direccionales con el fin de caracterizar con mayor detalle el efecto debido a la bimodalidad en cada sistema.

Sobre los espectros bimodales representativos del oleaje en ITS

La diferencia $\delta\theta$ en la dirección de propagación de los dos sistemas considerados, condiciona la interacción entre ellos: la interacción aumenta al disminuir $\delta\theta$, con lo que se confirman los resultados de Masson (1993). Sin embargo, la intensidad en la interacción entre dos sistemas Swell que cumplen los criterios de Masson (1993) para presentar un máximo de transferencia, no es relevante.

Finalmente, la principal limitante de este estudio corresponde a la ausencia de simulaciones que describan de manera explícita la evolución del oleaje. La incorporación de tales simulaciones permitirá determinar las escalas temporales en las que ocurren los cambios estimados y, adicionalmente, a considerar la dependencia del parámetro β en $D(f, \theta)$ con respecto a la frecuencia y no un parámetro constante. Por lo tanto, se espera que en futuros trabajos se logren llevar a cabo estas modificaciones experimentales para generar un avance en este tipo de estudios.

Literatura citada

- Acosta Solis, G. (2020). *Caracterización del oleaje en la Isla Todos Santos, Baja California, durante el periodo 2010-2020*. [Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Baja California]. Tesis en resguardo.
- Adams, P. N., Inman, D. L., & Graham, N. E. (2008). Southern California deep-water wave climate: Characterization and application to coastal processes. *Journal of Coastal Research*, 24(4), 1022–1035. <https://doi.org/10.2112/07-0831.1>.
- Alday, M. & Ardhuin, F. (2023). On consistent parameterizations for both dominant wind-waves and spectral tail directionality. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 128(4), 1–21. <https://doi.org/10.1029/2022JC019581>.
- Ardag, D. & Resio, D. T. (2019). Inconsistent spectral evolution in operational wave models due to inaccurate specification of nonlinear interactions. *Journal of Physical Oceanography*, 49(3), 705–722. <https://doi.org/10.1175/JPO-D-17-0162.1>.
- Ardhuin, F., Stopa, J. E., Chapron, B., Collard, F., Husson, R., Jensen, R. E., Johannessen, J., Mouche, A., Passaro, M., Quartly, G. D., Swail, V., & Young, I. (2019). Observing sea states. *Frontiers in Marine Science*, 6(124), 1–29. <https://doi.org/10.3389/fmars.2019.00124>.
- Banner, M. L. (1990). Equilibrium spectra of wind waves. *Journal of Physical Oceanography*, 20(7), 966–984. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1990\)020<0966:ESOWW>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1990)020<0966:ESOWW>2.0.CO;2).
- Banner, M. L. & Young, I. R. (1994). Modeling spectral dissipation in the evolution of wind waves. part i: Evaluation of existing models. *Journal of Physical Oceanography*, 24(7), 1550–1571. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1994\)024<1550:MSDITE>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1994)024<1550:MSDITE>2.0.CO;2).
- Castro Valdez, R. & Martínez, J. (2010). Variabilidad espacial y temporal del campo de viento frente a la península de baja california. En G. Gaxiola & R. Durazo (Eds.) *Dinámica del ecosistema pelágico frente a Baja California, 1997–2007* (1ra ed., pp. 129-147). Instituto Nacional de Ecología (INE), Centro de Investigación Científica y de Educación Superior.
- Crombie, D. D., Hasselmann, K., & Sell, W. (1978). High-frequency radar observations of sea waves travelling in opposition to the wind. *Boundary-Layer Meteorology*, 13, 45–54. <https://doi.org/10.1007/BF00913861>.
- Donelan, M. A. (1987). The effect of swell on the growth of wind waves. *Johns Hopkins APL Technical Digest*, 8(1), 18–23. https://secwww.jhuapl.edu/techdigest/Content/techdigest/pdf/V08-N01/08-01-Donelan_Effect.pdf.
- Donelan, M. A., Hamilton, J., & Hui, W. H. (1985). Directional spectra of wind-generated waves. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 315(1534), 509–562. <https://www.jstor.org/stable/37696>.
- Fox, M. J. H. (1976). On the nonlinear transfer of energy in the peak of a gravity-wave spectrum. ii. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 348(1655), 467–483. <https://doi.org/10.1098/rspa.1976.0050>.
- Gagnaire-Renou, E., Benoit, M., & Forget, P. (2010). Ocean wave spectrum properties as derived from quasi-exact computations of nonlinear wave-wave interaction. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 115(C12), 1–24. <https://doi.org/10.1029/2009JC005665>.

- García Nava, H. (2011). *Efecto del oleaje en la capa límite atmosférica marina*. [Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México]. Repositorio Institucional <http://cicese.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1007/1211>.
- Goda, Y. (1979). A review on statistical interpretation of wave data. *Technical Note of the Port and Harbour Research Institute*, 18(1), 5–32. <https://es.scribd.com/document/474783180/Goda-1979-pdf>.
- Hasselmann, K. (1960). Grundgleichungen der seegangsvoraussage. *Schiffstechnik*, 7, 191–195. https://pure.mpg.de/rest/items/item_3318126_1/component/file_3318127/content.
- Hasselmann, K. (1962). On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum part 1. general theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 12(4), 481–500. <https://doi.org/10.1017/S0022112062000373>.
- Hasselmann, K. (1963a). On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum: Part 2. conservation theorems; wave-particle analogy; irreversibility. *Journal of Fluid Mechanics*, 15(2), 273–281. <https://doi.org/10.1017/S0022112063000239>.
- Hasselmann, K. (1963b). On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum: Part 3. evaluation of the energy flux and swell-sea interaction for a neumann spectrum. *Journal of Fluid Mechanics*, 15(3), 385–398. <https://doi.org/10.1017/S002211206300032X>.
- Hasselmann, K. (1966). Feynman diagrams and interaction rules of wave-wave scattering processes. *Reviews of Geophysics*, 4(1), 1–32. <https://doi.org/10.1029/RG004i001p00001>.
- Hasselmann, K. (1974). On the spectral dissipation of ocean waves due to white capping. *Boundary-Layer Meteorology*, 6, 107–127. <https://doi.org/10.1007/BF00232479>.
- Hasselmann, K., Barnett, T. P., Bouws, E., Carlson, H., Cartwright, D. E., Eake, K., Euring, J. A., Gicnapp, A., Hasselmann, D. E., Kruseman, P., Meerburg, A., Mullen, P., Olbers, D. J., Richren, K., Sell, W., & Walden, H. (1973). Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP). (Technical Report No. 12), *Ergänzungsheft zur Deutschen Hydrographischen Zeitschrift*. <https://hdl.handle.net/21.11116/0000-0007-DD46-2>.
- Hasselmann, S. & Hasselmann, K. (1981). *A symmetrical method of computing the nonlinear transfer in a gravity wave spectrum*. Hamburger geophysikalische Einzelschriften. Reihe A. Wissenschaftliche Abhandlungen. Geophys. Inst., Univ. <https://books.google.com.mx/books?id=931EPwAACAAJ>.
- Hasselmann, S. & Hasselmann, K. (1985). Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. part I: A new method for efficient computations of the exact nonlinear transfer integral. *Journal of Physical Oceanography*, 15(11), 1369–1377. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1985\)015<1369:CAPOTN>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1985)015<1369:CAPOTN>2.0.CO;2).
- Hasselmann, S., Hasselmann, K., Allender, J. H., & Barnett, T. P. (1985). Computations and parameterizations of the nonlinear energy transfer in a gravity-wave spectrum. part II: Parameterizations of the nonlinear energy transfer for application in wave models. *Journal of Physical Oceanography*, 15(11), 1378–1391. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1985\)015<1378:CAPOTN>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1985)015<1378:CAPOTN>2.0.CO;2).
- Herterich, K. & Hasselmann, K. (1980). A similarity relation for the nonlinear energy transfer in a finite-depth gravity-wave spectrum. *Journal of Fluid Mechanics*, 97(1), 215–224. <https://doi.org/10.1017/S0022112080002522>.

- Holthuijsen, L. H. (2007). *Waves in Oceanic and Coastal Waters*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CB09780511618536>.
- Komen, G. J., Cavaleri, L., Donelan, M., Hasselmann, K., Hasselmann, S., & Janssen, P. A. E. M. (1994). *Dynamics and Modelling of Ocean Waves*. Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/CB09780511628955>.
- Lavrenov, I. V. (1991). Weakly nonlinear interactions of tide race waves. *Izvestiya of Academy of Sciences, USSR. Atmospheric and Oceanic Physics*. [Archivo pdf].
- Lavrenov, I. V. & Ocampo-Torres, F. J. (1999). Angular distribution effect on weakly nonlinear energy transfer in the spectrum of wind waves. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 35, 278–290. [Archivo pdf].
- Longuet-Higgins, M. S. (1976). On the nonlinear transfer of energy in the peak of a gravity-wave spectrum: A simplified model. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 347(1650), 311–328. <https://doi.org/10.1098/rspa.1976.0003>.
- Longuet-Higgins, M. S., Cartwright, D. E., & Smith, N. D. (1963). Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy. In *Ocean Wave Spectra*, 111–136, New Jersey. Prentice-Hall. [Archivo pdf].
- Lucas, C. & Guedes Soares, C. (2015). On the modelling of swell spectra. *Ocean Engineering*, 108, 749–759. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2015.08.017>.
- Masson, D. (1993). On the nonlinear coupling between swell and wind waves. *Journal of Physical Oceanography*, 23, 1249–1258. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1993\)023<1249:OTNCBS>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1993)023<1249:OTNCBS>2.0.CO;2).
- Miles, J. W. (1957). On the generation of surface waves by shear flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 3(2), 185–204. <https://doi.org/10.1017/S0022112057000567>.
- Mitsuyasu, H., Tasai, F., Suhara, T., Mizuno, S., Ohkusu, M., Honda, T., & Rikiishi, K. (1975). Observations of the directional spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy. *Journal of Physical Oceanography*, 5(4), 750–760. [https://doi.org/10.1175/1520-0485\(1975\)005<0750:00TDS0>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0485(1975)005<0750:00TDS0>2.0.CO;2).
- Ocampo-Torres, F. J., García-Nava, H., Durazo, R., Osuna, P., Méndez, G. M. D., & Graber, H. C. (2011). The INTOA experiment: A study of ocean-atmosphere interactions under moderate to strong offshore winds and opposing swell conditions in the Gulf of Tehuantepec, Mexico. *Boundary-Layer Meteorology*, 138(3), 433–451. <https://doi.org/10.1007/s10546-010-9561-5>.
- Phillips, O. M. (1958). The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 4(4), 426–434. <https://doi.org/10.1017/S0022112058000550>.
- Phillips, O. M. (1960). On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude Part 1. The elementary interactions. *Journal of Fluid Mechanics*, 9(2), 193–217. <https://doi.org/10.1017/S0022112060001043>.
- Pierson, J., Tuttle, J. J., & Woolley, J. A. (1952). The theory of the refraction of a short-crested Gaussian sea surface with application to the northern New Jersey coast. *Coastal Engineering Proceedings*, 1(3), 86–108. <https://doi.org/10.9753/icce.v3.8>.

- Resio, D. & Perrie, W. (1991). A numerical study of nonlinear energy fluxes due to wave-wave interactions Part 1. Methodology and basic results. *Journal of Fluid Mechanics*, 223, 603–629. <https://doi.org/10.1017/S002211209100157X>.
- Shabani, B., Ware, P., & Baldock, T. E. (2022). Suppression of wind waves in the presence of swell: A physical modeling study. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 127(5), 1–21. <https://doi.org/10.1029/2021JC018306>.
- Snyder, R. L., Dobson, F. W., Elliott, J. A., & Long, R. B. (1981). Array measurements of atmospheric pressure fluctuations above surface gravity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 102, 1–59. <https://doi.org/10.1017/S0022112081002528>.
- The Sea Wave Modeling Project (SWAMP) Group (1985). *Ocean Wave Modeling*. Springer US. <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6055-2>.
- Tracy, B. A. & Resio, D. T. (1982). Theory and calculation of the nonlinear energy transfer between sea waves in deep water. (Technical Report No. 11), WIS US Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, USA. <https://apps.dtic.mil/sti/citations/ADA117989>.
- van Vledder, G. P. (2003). A subroutine of the Webb/Resio/Tracy method for the computation of nonlinear quadruplet interactions in a wind wave spectrum: User manual version 1.0. (Informe técnico No. 1), Alkyon Hydraulic Consultancy & Research. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.30466.27846>.
- van Vledder, G. P. (2006). The WRT method for the computation of non-linear four-wave interactions in discrete spectral wave models. *Coastal Engineering*, 53(2), 223–242. <https://doi.org/10.1016/j.coastaleng.2005.10.011>.
- Webb, D. J. (1978). Non-linear transfers between sea waves. *Deep-Sea Research*, 25(3), 279–298. [https://doi.org/10.1016/0146-6291\(78\)90593-3](https://doi.org/10.1016/0146-6291(78)90593-3).
- Young, I. R. (1999). *Wind generated ocean waves, Volume 2*. Elsevier Ocean Engineering Series. Elsevier. <https://www.sciencedirect.com/bookseries/elsevier-ocean-engineering-series/vol/2/suppl/C>.
- Young, I. R. & Van Vledder, G. P. (1993). A review of the central role of nonlinear interactions in wind-wave evolution. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 342(1666), 505–524. <https://doi.org/10.1098/rsta.1993.0030>.