

TESIS DEFENDIDA POR

Ricardo Téllez Limón

Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Codirector del Comité

Dr. Claudio Ismael Valencia Yaves

Codirector del Comité

Dr. Helmut Maske Rubach

Miembro del Comité

Dr. Raúl Rangel Rojo

Miembro del Comité

Dr. Israel Rocha Mendoza

Miembro del Comité

Dr. Pedro Negrete Regagnon

*Coordinador del programa de
posgrado en Óptica*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

20 de Octubre de 2011

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE
EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ÓPTICA**

LENTES DE NANO-RENDIJAS

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

RICARDO TÉLLEZ LIMÓN

Ensenada, Baja California, México, Octubre de 2011

RESUMEN de la tesis de **RICARDO TÉLLEZ LIMÓN**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de MAESTRO EN CIENCIAS en ÓPTICA con orientación en ÓPTICA FÍSICA. Ensenada, Baja California, Octubre de 2011.

LENTES DE NANO-RENDIJAS

Resumen aprobado por:

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Codirector de Tesis

Dr. Claudio Ismael Valencia Yaves

Codirector de Tesis

Se presenta un trabajo teórico y numérico sobre el diseño de un tipo novedoso de lentes compactas que pueden enfocar luz a distancias muy cortas. Estas lentes consisten de arreglos de guías de onda plasmónicas de dimensiones nanométricas, producidas por la perforación de películas metálicas delgadas.

Para establecer las bases para el diseño, se presenta un análisis de la propagación de luz en guías de onda metálicas. Se muestra que las rendijas metálicas con anchos nanométricos, permiten un modo de propagación con polarización p . Se calcula la constante de propagación de este modo y se muestra que se puede variar ampliamente la fase de la onda transmitida ajustando solamente el ancho de la rendija.

Basados en el denominado método de la ecuación integral, que permite calcular de manera rigurosa la intensidad de luz transmitida por las estructuras diseñadas, se generan mapas de intensidad que permiten evaluar los diseños y caracterizar las lentes. Entre otras cosas, se determinan la profundidad de foco, el ancho de la función de punto extendido, la energía encerrada en una abertura y la eficiencia de transmisión de las lentes.

Estudiamos las propiedades de las lentes diseñadas utilizando varios metales y tres longitudes de onda, correspondientes a los colores azul, verde y rojo. Encontramos que las lentes pueden enfocar a distancias tan cortas como la longitud de onda, con una función de punto extendido cuyo ancho es menor que la longitud de onda. Entre los resultados también destaca que las lentes diseñadas con plata funcionan mejor que las de oro y cobre y que la eficiencia de transmisión es mayor en el rojo.

Palabras Clave: Plasmónica, esparcimiento de luz, propagación de ondas electromagnéticas, guías de onda plasmónicas.

ABSTRACT of the thesis presented by **RICARDO TÉLLEZ LIMÓN**, in partial fulfillment of the requirements of the MASTER IN SCIENCES degree in OPTICS with orientation in PHYSICAL OPTICS. Ensenada, Baja California, October 2011.

NANOSLITS LENSES

We present a theoretical and numerical study on the design of a novel type of compact lenses that can focus light at very short distances. These lenses consist of arrays of plasmonic waveguides of nanometric dimensions, produced by piercing thin metal films.

To establish the basis for the design, we present an analysis of the propagation of light in metallic slab waveguides. We show that metallic slits with nanometric widths allow a propagation mode in p polarization. We calculate the propagation constant of this mode and show that the phase of the transmitted wave can be tuned over a broad range by adjusting the width of the waveguide, without changing its length.

Based on the so-called integral equation method, which allows the rigorous calculation of the intensity of light transmitted by the designed structures, one can generate intensity maps that can be used to evaluate the designs and characterize the lenses. Among other things, we determine the depth of focus, the width of the point spread function, the encircled energy, and the transmission efficiency of the lenses.

We study the properties of designed lenses using various metals and three wavelengths, corresponding to the colors blue, green and red. We find that the lenses can focus at distances as short as the wavelength, with a point spread function whose width is smaller than the wavelength. Other noteworthy features are that the lenses using silver as the material perform better than those that employ gold or copper, and that the transmission efficiency is greater in the red.

Keywords: Plasmonic, light scattering, electromagnetic waves propagation, plasmonic waveguides.

*A mi madre, Virginia Limón Rebo-
llar, a mi padre, Ignacio O. Téllez
López, a mi hermano, Ignacio Téllez
Limón, y a mi esposa, Raquel Rivera
Vega. He aquí una pequeña ofrenda
en muestra de mi agradecimiento y
amor incondicional hacia ustedes.*

Agradecimientos

Agradezco al CONACYT y proyecto de investigación por el apoyo económico otorgado para la consecución del grado de Maestría en Ciencias en Óptica Física.

Al Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez y al Dr. Claudio Ismael Valencia Yaves, por su invaluable dirección y asesoría para la elaboración de esta tesis.

A los organizadores de la Escuela de Verano en Óptica y Optoelectrónica 2008 del CICESE, y en especial al Dr. Victor Ruíz Cortés por creer en mí y hacer posible mi llegada a este centro de investigación.

Al Dr. Pedro Negrete Regagnon por sus palabras de aliento e impulso a lo largo de mi estancia.

A todos los investigadores, personal técnico y administrativo del departamento de óptica por su enseñanza académica y facilidades otorgadas.

A mis amigos, estudiantes y miembros de los Capítulos Estudiantiles OSA y SPIE del CICESE por su apoyo y, sobre todo, por brindarme la oportunidad de crecer profesionalmente con ellos.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por impulsar el desarrollo científico y profesional de nuestro país.

Contenido

	Página
Resumen en español	i
Resumen en inglés	ii
Dedicatoria	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	xii
I. INTRODUCCIÓN	1
II. LENTES DE NANO-RENDIJAS	4
II.1 Guías de onda plasmónicas	5
II.2 Modos en guías de onda plasmónicas	6
II.2.1 Conductor perfecto	8
II.2.2 Conductor metálico	11
II.3 Diseño de las lentes de nano-rendijas	15
III. EL MÉTODO INTEGRAL	21
III.1 Modelado del problema electromagnético	22
III.2 Método integral	23
III.3 El vector de Poynting	29
III.4 El campo incidente	30
III.4.1 Onda plana	31
III.4.2 Haz Gaussiano	31
III.4.3 Potencia incidente	32
III.5 El campo esparcido	36
III.5.1 El campo reflejado	37
III.5.2 El campo transmitido	40
III.5.3 Potencia esparcida	41
III.6 Conservación de la energía	44
III.6.1 Potencia absorbida	45
III.6.2 Onda Plana	46
III.6.3 Haz Gaussiano	46

Contenido (continuación)

Página

IV. MÉTODO NUMÉRICO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA ELECTROMAGNÉTICO	47
IV.1 Diseño de las lentes de nano-rendijas	49
IV.2 Generación paramétrica del perfil	51
IV.3 Generación de los elementos matriciales	54
IV.4 Solución de la ecuación matricial	56
IV.5 La intensidad en el campo cercano	56
IV.5.1 Intensidad en campo cercano	57
IV.6 Conservación de la energía y eficiencia de transmisión	58
IV.7 Limitantes del método numérico	58
V. RESULTADOS	60
V.1 Selección del frente de onda y polarización del haz incidente	61
V.2 Diseño de las lentes de nano-rendijas	63
V.3 Variación del espesor de las lentes de nano-rendijas	66
V.4 Eficiencia de transmisión	66
V.4.1 Eficiencia de transmisión en función del número de rendijas .	68
V.4.2 Eficiencia de transmisión en función de la distancia focal . . .	73
V.5 Mapas de intensidad y variación del ángulo de incidencia	75
V.5.1 Dispersión cromática	78
V.5.2 Varación del ángulo de incidencia	82
VI. CONCLUSIONES	86
REFERENCIAS	90
A. SOBRE LAS CONDICIONES DE FRONTERA	92
B. CAMPO ELÉCTRICO EVALUADO EN LA SUPERFICIE	95

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Esquema de una lente de nano-rendijas. Imagen tomada de la referencia Shi <i>et al.</i> (2005).	2
2	Esquema de una lente de nano-rendijas y su marco de referencia.	4
3	Esquema de una guía de onda plasmónica bajo un marco de referencia invariante en la dirección y	7
4	Gráfica de la parte real (línea continua) e imaginaria (línea discontinua) de la constante de propagación β_0 normalizada por $2\pi/\lambda$ (índice de refracción efectivo), contra el ancho de la guía de onda plasmónica. La línea punteada representa la constante de propagación de la luz en el vacío.	15
5	Gráfica de la parte real de la constante dieléctrica en el espectro visible para oro (línea verde), plata (línea azul) y cobre (línea roja).	18
6	Gráfica de la parte imaginaria de la constante dieléctrica en el espectro visible para oro (línea verde), plata (línea azul) y cobre (línea roja).	19
7	Gráfica de la parte real del índice de refracción en el espectro visible para oro (línea verde), plata (línea azul) y cobre (línea roja).	19
8	Gráfica de la parte imaginaria del índice de refracción en el espectro visible para oro (línea verde), plata (línea azul) y cobre (línea roja).	20
9	Geometría del marco de referencia.	22
10	Sección transversal del volumen contenido entre la superficie de un cilindro y la del objeto a estudiar.	24
11	Marco de referencia del haz incidente.	30
12	Geometría del campo incidente y el campo esparcido.	33
13	Esquema para determinar el ancho de cada nano-rendija.	50
14	Esquema de un rectángulo discretizado.	52
15	Propagación de un haz de luz Gaussiano con polarización s (izquierda) y con polarización p (derecha) para una guía de onda plasmónica de ancho $d = 50nm$. y largo $l = 650nm$	62

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
16	Propagación de un frente de onda plano y de un haz Gaussiano con polarización p	63
17	Distribución de anchos de las rendijas una lente de plata con distancia focal $f = 0.8 \mu\text{m}$ para tres longitudes de onda: 650 nm (puntos rojos), 520 nm (puntos verdes) y 410 nm (puntos azules).	64
18	Distribución de anchos de las rendijas una lente de oro con distancia focal $f = 0.8 \mu\text{m}$ para tres longitudes de onda: 650 nm (puntos rojos), 520 nm (puntos verdes) y 410 nm (puntos azules).	65
19	Distribución de anchos de las rendijas una lente de cobre con distancia focal $f = 0.8 \mu\text{m}$ para tres longitudes de onda: 650 nm (puntos rojos), 520 nm (puntos verdes) y 410 nm (puntos azules).	65
20	Mapa de intensidades de una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 650 nm, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 20.76%.	67
21	Mapa de intensidades de una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 325 nm, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 21.45%.	67
22	Mapa de intensidades de una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 162.5 nm, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 2.33%.	68
23	Eficiencia de transmisión en función del número de rendijas para una lente de plata para 650 nm (línea roja), 520 nm (línea verde), y 410 nm (línea azul).	69
24	Eficiencia de transmisión en función del número de rendijas para una lente de oro para 650 nm (línea roja), 520 nm (línea verde), y 410 nm (línea azul).	70
25	Eficiencia de transmisión en función del número de rendijas para una lente de cobre para 650 nm (línea roja), 520 nm (línea verde), y 410 nm (línea azul).	70
26	Eficiencia de transmisión de una película delgada de plata de espesor $\lambda/2$ en función del número de rendijas de ancho constante ($d = 20 \text{ nm}$) para 650 nm (puntos rojos), 520 nm (puntos verdes) y 410 nm (puntos azules).	71

Lista de Figuras (continuación)

Figura	Página
27	Eficiencia de transmisión de una lente de plata (línea continua), oro (línea discontinua) y cobre (línea punteada) para $\lambda = 650$ nm.
28	Eficiencia de transmisión de una lente de plata (línea continua), oro (línea discontinua) y cobre (línea punteada) para $\lambda = 520$ nm.
29	Eficiencia de transmisión de una lente de plata (línea continua), oro (línea discontinua) y cobre (línea punteada) para $\lambda = 410$ nm.
30	Eficiencia de transmisión de una lente de plata de 15 nano-rendijas en función de la distancia focal, para 650 nm (línea roja), 520 nm (línea verde) y 410 nm (línea azul).
31	Eficiencia de transmisión de una lente de plata de 21 nano-rendijas en función de la distancia focal, para 650 nm (línea roja), 520 nm (línea verde) y 410 nm (línea azul).
32	Mapa de intensidad, función de punto extendido, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 650 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 21.77%.
33	Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 19.74%.
34	Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 410 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 22.70%.
35	Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de oro de 650 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 15.63%.
36	Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de oro de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 7.19%.

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
37	Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de oro de 410 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 11.43%.	80
38	Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada de una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de cobre de 650 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 12.75%.	80
39	Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de cobre de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 6.53%.	81
40	Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada de una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de cobre de 410 nm de espesor diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 12.28%.	81
41	Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$, sobre la cual incide un haz con $\lambda = 520 \text{ nm}$. La eficiencia de transmisión es del 19.74%. . .	82
42	Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$, sobre la cual incide un haz con $\lambda = 650 \text{ nm}$. La eficiencia de transmisión es del 20.50%. . .	83
43	Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$, sobre la cual incide un haz con $\lambda = 410 \text{ nm}$. La eficiencia de transmisión es del 11.33%. . .	84
44	Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$, sobre la cual incide un haz perpendicular con $\lambda = 520 \text{ nm}$. La eficiencia de transmisión es del 19.74%.	84

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
45	Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. El haz incidente tiene una $\lambda = 520 \text{ nm}$ y forma un ángulo de -15° respecto a la vertical. La eficiencia de transmisión es del 10.34%.	85
46	Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. El haz incidente tiene una $\lambda = 520 \text{ nm}$ y forma un ángulo de 15° respecto a la vertical. La eficiencia de transmisión es del 10.34%.	85
47	Cilindro conteniendo un elemento diferencial de área entre dos medios y marco de referencia local.	92
48	Rectángulo conteniendo un elemento diferencial de línea entre dos medios y marco de referencia local.	93

Lista de Tablas

Tabla		Página
I	Constante dieléctrica ε_m e índice de refracción $n_m(\omega)$ de algunos metales para diferentes longitudes de onda.	18
II	Eficiencia de transmisión y ancho a la mitad del máximo (FWHM) de la función de punto extendido para diferentes lentes de plata, oro y cobre.	78

Capítulo I

INTRODUCCIÓN

El diseño y fabricación de dispositivos para formar imágenes es sin duda una de las principales motivaciones de la óptica. Esto, aunado al desarrollo de nuevas tecnologías que permiten la fabricación de dispositivos de escalas nanométricas, ha despertado interés en la creación de lentes cada vez más pequeñas.

Sin embargo, el diseño de lentes dieléctricas de dimensiones y distancias focales micrométricas se encuentra con grandes limitantes: por un lado, la luz que incide en una lente dieléctrica, no puede ser transmitida si el diámetro de la misma es menor a la mitad de la longitud de onda incidente y, para evitar que dominen los efectos de difracción, las lentes dieléctricas para el visible deben tener diámetros considerablemente más grandes que una micra. Por otro lado, los radios de curvatura involucrados en el diseño de lentes con distancia focal muy corta limitan las aberturas e introducen aberraciones considerables en las lentes.

Es por ello que en años recientes, se han realizado estudios sobre el diseño y la posible fabricación de dispositivos con dimensiones nanométricas que permitan enfocar la luz en una región estrecha del espacio (Gordon y Brolo (2005); Shi *et al.* (2005); Choi *et al.* (2009); Lin *et al.* (2010); Ma y Liu (2010); Min *et al.* (2007); Sun y Kim (2004); Verslegers *et al.* (2008, 2009); Yuan *et al.* (2007); Ishii *et al.* (2011); Zhao *et al.* (2010)). Estos estudios están fundamentados en la propagación de la luz a través de las denominadas *guías de onda plasmónicas* (Economou, 1969), las cuales permiten la propagación de la luz en estructuras de dimensiones mucho menores a la longitud de

onda.

Básicamente, una lente de nano-rendijas es un arreglo de guías de onda plasmónicas que permiten modificar a voluntad el frente de onda del haz de luz que incide sobre ellas al variar la distribución y ancho de las mismas sobre una película delgada. El caso de una lente se ilustra en la Figura 1.

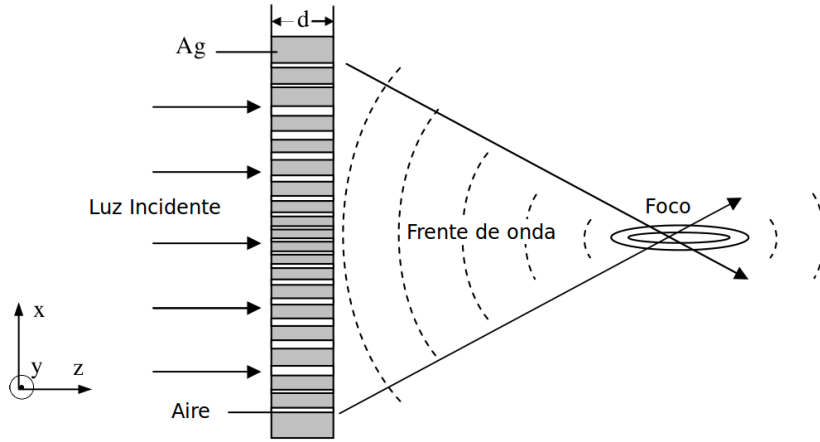


Figura 1. Esquema de una lente de nano-rendijas. Imagen tomada de la referencia Shi *et al.* (2005).

El objetivo de la presente tesis es establecer un marco teórico riguroso que permita el diseño de lentes de nano-rendijas. Para esto, es necesario generar mapas de intensidad del campo electromagnético transmitido por ellas y evaluar la función de punto extendido del sistema.

El diseño de las lentes requiere de estudios de la propagación de la luz a través de las guías de onda plasmónicas, con los que se determina la constante de propagación y se genera la distribución de fases requerida para enfocar la onda transmitida.

El diseño propuesto se evalúa mediante la resolución numérica del problema electromagnético, utilizando el llamado método integral. De esta manera se generan los mapas de intensidad del campo esparcido, permitiendo la caracterización de las lentes

de nano-rendijas a través de la función de punto extendido.

La tesis está organizada de la siguiente manera. El Capítulo II trata sobre el diseño de las lentes de nano-rendijas. Es decir, sobre las dimensiones y posiciones de las rendijas para enfocar la luz en un punto determinado.

En el Capítulo III se presenta el método integral, que permite calcular de manera rigurosa el campo electromagnético esparcido por varios cuerpos y, por ende, determinar el campo transmitido por las nano-rendijas en la región del foco ideal, así como los parámetros y características de las lentes diseñadas.

Posteriormente en el Capítulo IV se discute la generación de un *laboratorio virtual* (programa computacional) para constatar que los diseños elaborados funcionan correctamente. Es decir, se explica cómo pueden ser generados mapas de intensidad para observar y estudiar la intensidad transmitida por las lentes.

Una vez realizado el programa computacional, se diseñan y caracterizan diferentes lentes de nano-rendijas, mostrando en el Capítulo V los principales resultados. En particular, se estudia la eficiencia de transmisión en función de algunos parámetros, como el número de rendijas, los materiales usados, la longitud de onda incidente y el ángulo de incidencia.

Finalmente en el Capítulo VI se presentan las conclusiones generales del trabajo realizado, indicando las limitantes del método numérico y algunas posibles aplicaciones de las lentes de nano-rendijas.

También se incluyen dos apéndices. En el primero se justifica el uso de las condiciones de frontera señaladas en el tratamiento teórico, tanto del diseño de las lentes como del método integral, y en el segundo apéndice se estudia el cálculo del campo eléctrico sobre puntos de observación en la superficie.

Capítulo II

LENTES DE NANO-RENDIJAS

Las lentes de nano-rendijas son dispositivos ópticos de dimensiones nanométricas que permiten enfocar la luz en regiones con dimensiones nanométricas. Básicamente son rendijas practicadas en una película delgada metálica que constituyen arreglos de guías de onda plasmónicas. Estas guías de onda modifican la fase de la onda transmitida por ellas, ajustando la velocidad de propagación del modo transmitido. La situación se ilustra en la Figura 2.

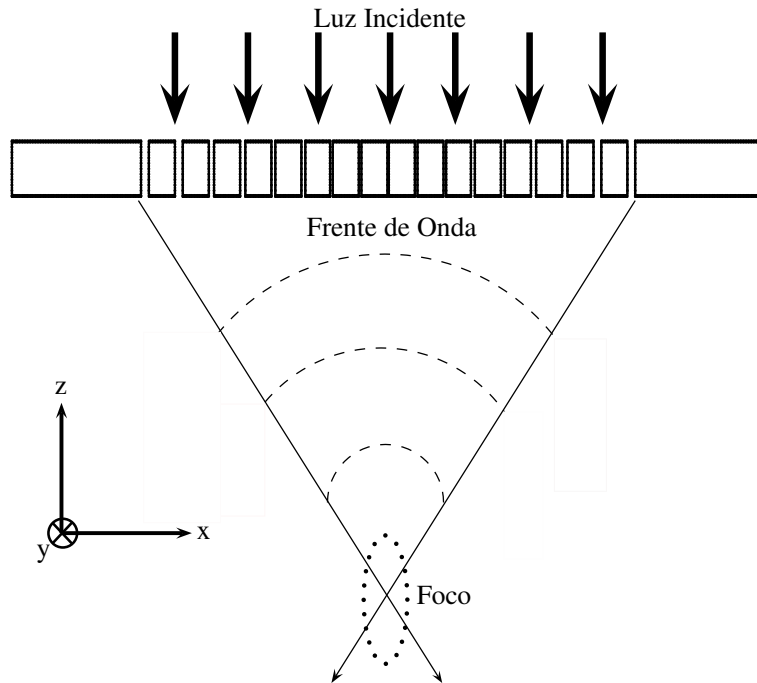


Figura 2. Esquema de una lente de nano-rendijas y su marco de referencia.

Como mostraremos más adelante, si el ancho de la guía de onda plasmónica es mucho menor que la longitud de onda, sólo se puede propagar por ella el *modo cero* de

la polarización p (onda TM), en donde estamos suponiendo que el arreglo de rendijas es invariante en la dirección y (ver marco de referencia de la Figura 2).

Al igual que en una lente convencional, lo que se debe hacer para enfocar el haz es diseñar la estructura de manera que la luz que emana de cada rendija tenga la misma fase en el punto focal deseado. Esto depende del ancho y la posición de cada rendija en la estructura, de la longitud de onda y de la dirección de la luz incidente. Dicha fase puede ser encontrada al multiplicar la longitud de la guía de onda (el espesor de la película delgada) por la velocidad de propagación del modo que transmite. Como veremos, la velocidad de propagación es función del ancho de la guía, además de depender de las constantes dieléctricas del medio propagante y del medio que la conforma (película metálica).

Para diseñar las lentes de nano-rendijas, es también necesario tomar en cuenta la profundidad de piel (skin depth), ya que si la separación entre las rendijas es menor que dicho parámetro, puede haber acoplamiento de modos, lo cual modificará las características de la luz que se propaga. Si bien esta cuestión puede resultar interesante en el diseño de las lentes, no será objeto de estudio en la presente tesis.

II.1 Guías de onda plasmónicas

Una guía de onda es cualquier estructura que permite la propagación de ondas electromagnéticas. Típicamente, son elaboradas con materiales dieléctricos como las fibras ópticas. Sin embargo, para este tipo de materiales se tiene una limitante: la luz sólo puede ser guiada dentro de estos dispositivos si su diámetro es mayor a $\lambda/2$, o sea, mayor a media longitud de onda de la luz incidente.

En años recientes, con el desarrollo de la nano-tecnología, se ha motivado la búsqueda

de nuevos dispositivos ópticos que permiten guiar la luz rompiendo la limitante anterior; estos dispositivos son las denominadas guías de onda plasmónicas, mismas que hacen uso de los denominados *polaritones plasmónicos de superficie* (PPS).

Un plasmón es un *cuanto* de oscilación del plasma electrónico en un material conductor, el cual es resultado de las oscilaciones colectivas de las cargas eléctricas. Al interactuar estos cuantos con un fotón, generan una *cuasipartícula* llamada *polaritón plasmónico*.

Los polaritones plasmónicos de superficie son plasmones que están confinados a una superficie y que interactúan fuertemente con la luz. Estos se crean en la interfaz entre el vacío o un material con una constante dieléctrica positiva (material dieléctrico) y un material con una constante dieléctrica cuya parte real es negativa (metales o dieléctricos dopados). Para frecuencias ópticas, los PPS sólo se propagan por distancias muy cortas, pero para las nuevas tecnologías, que involucran estructuras de escalas nanométricas, esto ha pasado a ser una cuestión secundaria.

Como se estudiará en las secciones subsecuentes, las constantes de propagación de los modos que se transmiten por las guías de onda plasmónicas dependen del ancho de las mismas, con lo cual se puede controlar su velocidad de propagación variando este parámetro de la guía.

II.2 Modos en guías de onda plasmónicas

En esta sección se estudia la propagación de los modos para el caso de una guía de onda plasmónica cuyas paredes están hechas de conductor perfecto. Posteriormente se hará lo propio para guías con paredes metálicas. Hay que recordar que los *modos* son campos electromagnéticos que mantienen la misma polarización y distribución transversal en

cualquier posición a lo largo de la guía de onda.

Para ello se estudiará en cada caso la propagación de ondas transversales eléctricas (TE o con polarización s) y ondas transversales magnéticas (TM o con polarización p) bajo el marco de referencia mostrado en la Figura 3, donde se considera un sistema invariante en la dirección $\hat{y}$ y un campo que se propaga a lo largo de la dirección $-\hat{z}$.

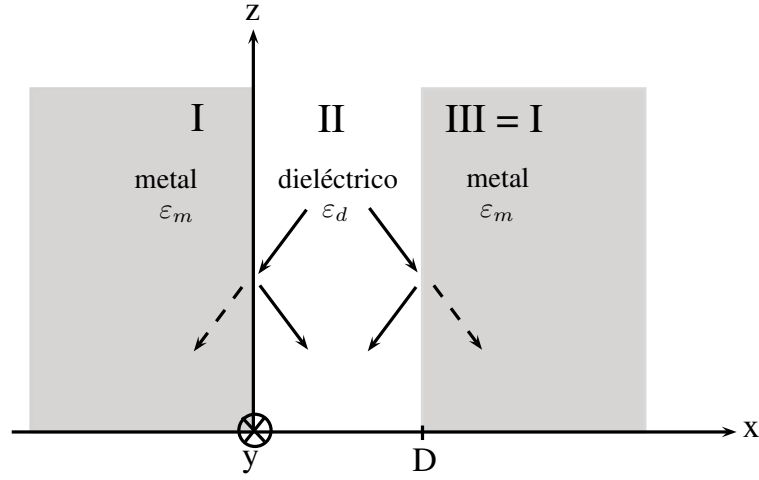


Figura 3. Esquema de una guía de onda plasmónica bajo un marco de referencia invariante en la dirección y .

En la Figura 3 se muestra el esquema de una guía de onda plasmónica. Las regiones I y III están hechas del mismo material, el cual corresponde ya sea a un conductor perfecto o a un conductor metálico con permitividad eléctrica ε_m . La región II corresponde al material dieléctrico, el cual tiene una constante dieléctrica ε_d (esta puede ser la del vacío, o sea $\varepsilon_d = 1$). Las flechas punteadas indican las ondas evanescentes que se propagan en el metal, mismas que no existen para un conductor perfecto ya que en estos materiales la onda no puede penetrar.

Un conductor perfecto es un metal que no presenta absorción al interactuar con un campo electromagnético, lo cual equivale a que la parte imaginaria de su índice de refracción ($n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_m(\omega)}$) tienda a infinito. Como consecuencia no hay penetración

del campo hacia dentro del metal.

II.2.1 Conductor perfecto

Para analizar la propagación de modos en una guía de onda plasmónica con paredes hechas de un conductor perfecto, el punto de partida son las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre de fuentes, las cuales que están dadas, en el sistema gaussiano de unidades, por

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega), \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega), \quad (4)$$

y que satisfacen la relación constitutiva

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega). \quad (5)$$

Debido a que el sistema es conservativo, se debe cumplir que el campo electromagnético que se propaga en el medio II sea continuo en las fronteras, es decir

$$\mathbf{E}_t^I - \mathbf{E}_t^{II} = 0, \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_t^I - \mathbf{H}_t^{II} = 0, \quad (7)$$

donde el subíndice t alude a las componentes tangenciales. A partir de estas condiciones se puede entonces definir al campo electromagnético en función de la componente $\hat{y}$ como

$$\psi_{s,p}(x, z) = \begin{cases} E(x, z) \hat{y} & \text{para polarización } s, \\ H(x, z) \hat{y} & \text{para polarización } p. \end{cases} \quad (8)$$

Ahora bien, el sistema con el que se está trabajando es invariante en la dirección $\hat{y}$, por lo cual al aplicar el rotacional en ambos lados de las ecuaciones de Maxwell (3) y (4), se encuentra que para una onda TE (polarización s) en el medio II ,

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_{II}(\omega) \right] \psi_s^{II}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (9)$$

con las condiciones de frontera

$$\psi_s^I(\mathbf{r}, \omega) - \psi_s^{II}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (10)$$

$$\Upsilon_s^I(\mathbf{r}, \omega) - \Upsilon_s^{II}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (11)$$

mientras que para una onda TM (polarización p) se tiene

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_{II}(\omega) \right] \psi_p^{II}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (12)$$

con las condiciones de frontera

$$\psi_p^I(\mathbf{r}, \omega) - \psi_p^{II}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{1}{\varepsilon_I(\omega)} \Upsilon_p^I(\mathbf{r}, \omega) - \frac{1}{\varepsilon_{II}(\omega)} \Upsilon_p^{II}(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (14)$$

donde $\Upsilon_{s,p}(\mathbf{r}, \omega)$ es la derivada normal no normalizada del campo $\psi_{s,p}(\mathbf{r}, \omega)$ ¹. Las ecuaciones (9) y (12) representan la ecuación de Helmholtz para cada una de las polarizaciones involucradas. Debido a la invariancia del sistema a lo largo de z , se puede escribir el campo como

$$\psi_{s,p}^I(\mathbf{r}, \omega) = f(x) e^{i\beta z},$$

donde β representa la constante de propagación a lo largo de z . La ecuación de Helmholtz puede ser entonces reescrita como

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha^2 \right] f(x) = 0, \quad (15)$$

¹El análisis de las condiciones de frontera se estudia en el Apéndice A.

donde $\alpha^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon_{II}(\omega) - \beta^2$. Es decir, que

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{II}(\omega) - \alpha^2}. \quad (16)$$

La solución general de la ecuación diferencial (15) es de la forma

$$f(x) = A_1 \sin(\alpha x) + A_2 \cos(\alpha x). \quad (17)$$

Polarización s

Para polarización s se deben satisfacer las condiciones de frontera $f(0) = f(D) = 0$, con lo que

$$A_1 \sin(\alpha D) + A_2 \cos(\alpha D) = 0, \quad (18)$$

y

$$A_2 = 0, \quad (19)$$

obteniéndose soluciones de la forma

$$f(x) = f_0 \sin(\alpha_m x), \quad (20)$$

con $\alpha_m = \frac{m\pi}{D}$ para $m = 1, 2, \dots$. Así, el campo está dado por

$$\psi_s^{II}(\mathbf{r}, \omega) = \psi_0 e^{i\beta_m z} \sin(\alpha_m x), \quad (21)$$

donde $\beta_m = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{II} - \alpha_m^2}$.

Polarización p

Para polarización p se debe satisfacer la condición $\frac{df(x)}{dx}|_{x=0,D} = 0$, obteniéndose

$$\alpha [A_1 \cos(\alpha D) - A_2 \sin(\alpha D)] = 0, \quad (22)$$

y

$$\alpha A_1 = 0, \quad (23)$$

por lo que las soluciones son de la forma

$$f(x) = f_0 \cos(\alpha_m x), \quad (24)$$

donde $\alpha_m = \frac{m\pi}{D}$ para $m = 0, 1, 2, \dots$. Así el campo está dado por

$$\psi_p^{II}(\mathbf{r}, \omega) = \psi_0 e^{i\beta_m z} \cos(\alpha_m x). \quad (25)$$

De los resultados anteriores se puede constatar que al incidir una onda con polarización p sobre la guía de onda plasmónica de conductor perfecto, se tiene la propagación en z de un modo adicional, el modo $m = 0$, sin importar el valor de x . Este resultado determina la condición para que la luz pueda ser guiada a través de una guía de onda plasmónica cuyo ancho es menor a $\lambda/2$; más aún, siempre es posible transmitir un modo en una guía de onda plasmónica sin importar el ancho de la misma.

II.2.2 Conductor metálico

En la sección anterior se analizó el caso de una guía de onda plasmónica con paredes hechas de un conductor perfecto. Sin embargo es necesario realizar un análisis más elaborado para determinar el comportamiento de la transmisión del denominado *modo cero* cuando se trata de una guía con paredes metálicas.

Nuevamente el análisis subsecuente estará basado en el sistema ilustrado en la Figura 3 con la diferencia de que, en este caso, la luz puede penetrar en los medios I y III , por lo que deben considerarse las ondas en estas regiones.

De esta manera, el campo en la región I está dado por:

$$U_I(x, z) = R_I^- e^{-i\beta z} e^{-i\alpha_I x}, \quad (26)$$

en la región II por:

$$U_{II}(x, z) = R_{II}^- e^{-i\beta z} e^{-i\alpha_{II}x} + R_{II}^+ e^{-i\beta z} e^{i\alpha_{II}x}, \quad (27)$$

y en la región III por:

$$U_{III}(x, z) = R_{III}^+ e^{-i\beta z} e^{i\alpha_I x}. \quad (28)$$

Debido a la continuidad de las componentes tangenciales de los campos, el campo $U(x, z)$ y su derivada en las fronteras $x = 0$ y $x = D$ deben cumplir con las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} U_I(x, z)|_{x=0} &= U_{II}(x, z)|_{x=0}, \\ \frac{1}{\nu_I} \frac{\partial U_I(x, z)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{1}{\nu_{II}} \frac{\partial U_{II}(x, z)}{\partial x} \Big|_{x=0}, \\ U_{II}(x, z)|_{x=D} &= U_{III}(x, z)|_{x=D}, \\ \frac{1}{\nu_{II}} \frac{\partial U_{II}(x, z)}{\partial x} \Big|_{x=D} &= \frac{1}{\nu_{III}} \frac{\partial U_{III}(x, z)}{\partial x} \Big|_{x=D}. \end{aligned}$$

Estas relaciones son consistentes con la suposición de que $\beta_I = \beta_{II} = \beta_{III}$. Por otro lado se debe cumplir que

$$\alpha_I(k) = \alpha_{III}(k) = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_I - k^2}, \quad (29)$$

y

$$\alpha_{II}(k) = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_{II} - k^2}, \quad (30)$$

donde $\varepsilon_I = \varepsilon_{III} = \varepsilon_m$ es la permitividad del metal y $\varepsilon_{II} = \varepsilon_d$ es la permitividad del dieléctrico.

Se encuentran entonces las relaciones

$$R_I^- = R_{II}^- + R_{II}^+, \quad (31)$$

$$-\frac{\alpha_I}{\nu_I} R_I^- = -\frac{\alpha_{II}}{\nu_{II}} R_{II}^- + \frac{\alpha_{II}}{\nu_{II}} R_{II}^+, \quad (32)$$

$$R_{II}^- e^{-i\alpha_{II}(k)D} + R_{II}^+ e^{i\alpha_{II}(k)D} = R_{III}^+ e^{i\alpha_I(k)D}, \quad (33)$$

$$-\frac{\alpha_{II}}{\nu_{II}} R_{II}^- e^{-i\alpha_{II}(k)D} + \frac{\alpha_{II}}{\nu_{II}} R_{II}^+ e^{i\alpha_{II}(k)D} = \frac{\alpha_I}{\nu_I} R_{III}^+ e^{i\alpha_I(k)D}, \quad (34)$$

que después de asociar términos resultan en

$$\left[\frac{\alpha_{II}}{\nu_{II}} + \frac{\alpha_I}{\nu_I} \right] R_{II}^- e^{-i\alpha_{II}(k)D} - \left[\frac{\alpha_{II}}{\nu_{II}} - \frac{\alpha_I}{\nu_I} \right] R_{II}^+ e^{i\alpha_{II}(k)D} = 0, \quad (35)$$

y

$$\left[\frac{\alpha_{II}}{\nu_{II}} - \frac{\alpha_I}{\nu_I} \right] R_{II}^- - \left[\frac{\alpha_{II}}{\nu_{II}} + \frac{\alpha_I}{\nu_I} \right] R_{II}^+ = 0, \quad (36)$$

donde $\nu_I = \nu_{II} = 1$ para polarización s , y $\nu_I = \varepsilon_m$ y $\nu_{II} = \varepsilon_d$ para polarización p (ver Apéndice A).

Igualando a cero el determinante del sistema de ecuaciones formado por (35) y (36), después de desarrollar los binomios cuadrados y asociar términos, se puede demostrar que

$$\tan(\alpha_{II}(k)D) = -2i \frac{\nu_I \nu_{II} \alpha_I \alpha_{II}}{(\nu_I \alpha_{II})^2 + (\nu_{II} \alpha_I)^2}, \quad (37)$$

y haciendo uso de la identidad $\tan(2A) = (2 \tan A) / (1 - \tan^2 A)$ se tiene entonces que

$$\tan(\alpha_{II}(k)D) = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = -\frac{2i \frac{\nu_{II} \alpha_I}{\nu_I \alpha_{II}}}{1 + \left(\frac{\nu_{II} \alpha_I}{\nu_I \alpha_{II}} \right)^2}. \quad (38)$$

La ecuación (38) tiene por soluciones, para los modos pares:

$$\tan\left(\frac{\alpha_{II}D}{2}\right) = -i \frac{\nu_{II} \alpha_I}{\nu_I \alpha_{II}}, \quad (39)$$

y para los impares:

$$\tan\left(\frac{\alpha_{II}D}{2}\right) = -i \frac{\nu_I \alpha_{II}}{\nu_{II} \alpha_I}. \quad (40)$$

Para polarización s , $\nu_I = \nu_{II} = 1$, y sustituyendo los valores de α_I y α_{II} de las ecuaciones (29) y (30) en las ecuaciones (39) y (40) se tiene que, para modos pares

$$\tan\left(i \frac{D}{2} \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_d}\right) = -i \frac{\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_m}}{\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_d}}, \quad (41)$$

y para modos impares

$$\tan \left(i \frac{D}{2} \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_d} \right) = -i \frac{\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_d}}{\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_m}}. \quad (42)$$

Por otro lado, para el caso de polarización p , $\nu_I = \varepsilon_m$, $\nu_{II} = \varepsilon_d$, y sustituyendo los valores de α_I y α_{II} de las ecuaciones (29) y (30) en las ecuaciones (39) y (40) se tiene que, para modos pares

$$\tan \left(i \frac{D}{2} \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_d} \right) = -i \frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_m} \frac{\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_m}}{\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_d}}, \quad (43)$$

y para modos impares

$$\tan \left(i \frac{D}{2} \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_d} \right) = -i \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_d} \frac{\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_d}}{\sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_m}}. \quad (44)$$

Partiendo de la expresión (43) para modos pares de la polarización p (para permitir la propagación del modo $m = 0$), y considerando una aproximación para argumentos pequeños de la forma $\tan x \simeq x$ (por ser $D \ll \lambda/\varepsilon_d$), es posible demostrar que la constante de propagación para el modo cero está dada por:

$$\beta_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon_d + \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_m} \frac{2}{D} \right)^2 - \left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_m} \frac{2}{D} \right) \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_m} \frac{2}{D} \right)^2 + 4 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 (\varepsilon_d - \varepsilon_m)} \right]^{1/2}. \quad (45)$$

La gráfica de la Figura 4 muestra la parte real (línea continua) e imaginaria (línea discontinua) de la constante de propagación, β_0 , (normalizada por $2\pi/\lambda$) para una guía de onda plasmónica con paredes de plata en el vacío ($\varepsilon_d = 1.0$, $\varepsilon_m = -19.44 + i0.4605$ @ $\lambda = 650\text{nm}$ (Johnson y Christy, 1972)), contra el ancho, D , de la guía de onda plasmónica. Al normalizar la constante de propagación se obtiene el índice de refracción efectivo del material el cual, como se observa en esta gráfica, crece rápidamente a medida que decrece el ancho de la guía y siempre es mayor al índice de refracción de la luz en

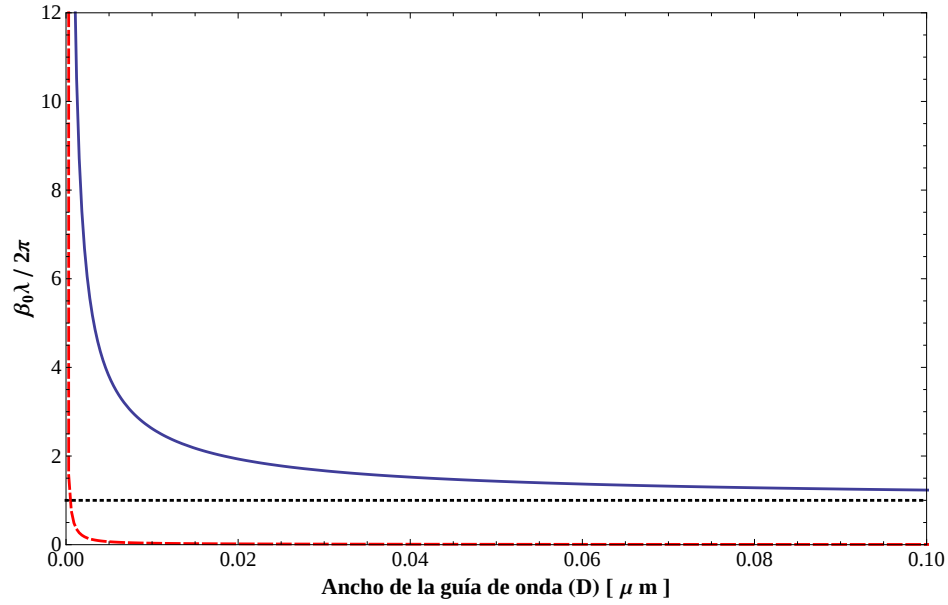


Figura 4. Gráfica de la parte real (línea continua) e imaginaria (línea discontinua) de la constante de propagación β_0 normalizada por $2\pi/\lambda$ (índice de refracción efectivo), contra el ancho de la guía de onda plasmónica. La línea punteada representa la constante de propagación de la luz en el vacío.

el vacío (línea punteada horizontal). Sin embargo, la parte imaginaria (que alude a las pérdidas por absorción) también crece a medida que se reduce el ancho. Es decir, al disminuir el ancho de la guía disminuye la velocidad de propagación y aumentan las pérdidas por absorción. Para este caso en particular, se observa que las pérdidas por absorción serán mayores si el ancho de la guía es menor a 10 nm aproximadamente. Estos resultados también se pueden encontrar en la referencia Shi *et al.* (2005).

II.3 Diseño de las lentes de nano-rendijas

Como ya se ha señalado, las lentes de nano-rendijas son arreglos periódicos de guías de onda plasmónicas practicadas sobre una película delgada metálica, dispuestas de manera que el frente de onda que emerge del arreglo se logra enfocar en un punto determinado. Esto es posible si la luz que emana de cada rendija llega al foco con la

misma fase, como se ilustra en la Figura 2.

A partir de la ecuación (45) se puede determinar la fase de la luz que emana de una guía de onda plasmónica, la cual es simplemente el producto de la constante de propagación por la longitud de la guía, o sea

$$\phi(\beta_0) = \mathbf{Re}\{\beta_0\}l, \quad (46)$$

donde l es la longitud de la guía de onda plasmónica. Es decir, la fase del modo que emerge de la guía depende de la longitud y diámetro de la guía, y de las constantes dieléctricas de los medios que conforman la guía de onda plasmónica ².

Ahora bien, para poder determinar la distribución y anchos de las nano-rendijas a lo largo de la película delgada donde serán realizadas, es necesario determinar la fase que emana de cada una de ellas en función de su posición sobre el eje x y de la distancia focal f . Esto se logra mediante la aproximación de la ecuación para lentes delgadas, la cual señala que para una onda plana que incide sobre la lente formando un ángulo θ_0 respecto a la normal a la superficie, la fase está dada como (Verslegers *et al.*, 2009)

$$\phi(x, \theta_0) = \frac{2\pi x \sin \theta_0}{\lambda} + \frac{2\pi n_0 f}{\lambda} - \frac{2\pi n_0 \sqrt{f^2 + x^2}}{\lambda} + 2m\pi, \quad (47)$$

donde n_0 es el índice de refracción del medio en el que se propaga la luz (en este caso $n_0 = \sqrt{\varepsilon_d} = 1$), λ es la longitud de onda de la luz incidente y m es un número entero.

Igualando las ecuaciones (46) y (47), es posible entonces determinar el ancho, D , que debe tener cada una de las guías de onda plasmónicas (rendijas) en la posición x (medida desde el centro del arreglo) para que la luz que emane de la lente tenga la misma distribución de fases a la distancia focal f . Después de realizar los cálculos se

²Hay que recordar que ε_m depende de la longitud de onda que incide en el material.

obtiene que

$$D = \left(\frac{2\epsilon_d}{\epsilon_m} \right) \frac{\sqrt{\frac{\phi^2(x, \theta_0)}{l^2} - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_m}}{\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon_d - \frac{\phi^2(x, \theta_0)}{l^2}}, \quad (48)$$

donde $\phi(x, \theta_0)$ está dado por la ecuación (47).

Manipulando las ecuaciones (46) y (47), es posible realizar diferentes diseños de lentes de nano-rendijas, ya sea al variar el ancho o la longitud de las guías, la distancia focal o el ángulo con que incide el frente de onda sobre el arreglo de nano-rendijas. Para fines de esta tesis, sólo se trabajará con arreglos de rendijas que tengan el mismo largo y sólo se variará el ancho de las guías de onda plasmónicas, ya que resulta más simple fabricar las nano-rendijas sobre una película delgada metálica de espesor constante.

Otro parámetro que resulta importante en el diseño de las lentes, es la profundidad de piel (*skin depth*), es decir, qué tanto penetra la radiación del haz incidente en el metal; si la separación entre las rendijas o el espesor de la película delgada metálica es menor que este valor, se puede tener la interferencia del campo transmitido por las rendijas y la del campo que logra penetrar más allá del material, o sea, acoplamiento de modos entre las rendijas. Dicho valor está dado por

$$\delta = \frac{1}{\frac{\omega}{c} \sqrt{-\epsilon(\omega)}}. \quad (49)$$

En la Tabla I se muestran algunos valores de la constante dieléctrica, ϵ_m , en función de la longitud de onda, λ , para oro, plata y cobre, materiales que serán usados para diseñar las lentes de nano-rendijas (Johnson y Christy, 1972). En las Figuras 5 y 6 se muestran, respectivamente, gráficas de la parte real e imaginaria de la constante dieléctrica en el espectro visible para oro, plata y cobre. Así mismo, en las Figuras 7 y 8 se muestran, respectivamente, la parte real e imaginaria del índice de refracción de estos materiales.

Tabla I. Constante dieléctrica ϵ_m e índice de refracción $n_m(\omega)$ de algunos metales para diferentes longitudes de onda.

Material	λ [μm]	ϵ_m		$n_m(\omega)$	
		$\text{Re}\{\epsilon_m\}$	$\text{Im}\{\epsilon_m\}$	$\text{Re}\{n_m\}$	$\text{Im}\{n_m\}$
Oro (Au)	0.650	-12.9530	1.1208	0.1555	3.6024
	0.520	-3.8902	2.6320	0.6351	2.0721
	0.410	-1.6913	5.7219	1.4620	1.9568
Plata (Ag)	0.650	-19.4400	0.4605	0.0522	4.4094
	0.520	-10.9913	0.3315	0.0500	3.3157
	0.410	-4.9815	0.2232	0.0500	2.2325
Cobre (Cu)	0.650	-13.0942	1.7247	0.2378	3.6264
	0.520	-5.3975	6.1586	1.1814	2.6064
	0.410	-3.1280	5.6378	1.2883	2.1881

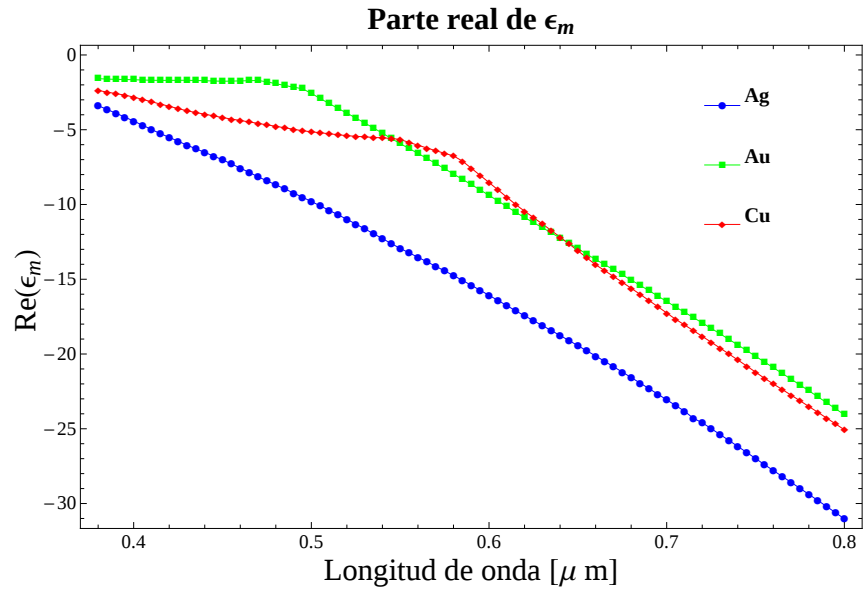


Figura 5. Gráfica de la parte real de la constante dieléctrica en el espectro visible para oro (línea verde), plata (línea azul) y cobre (línea roja).

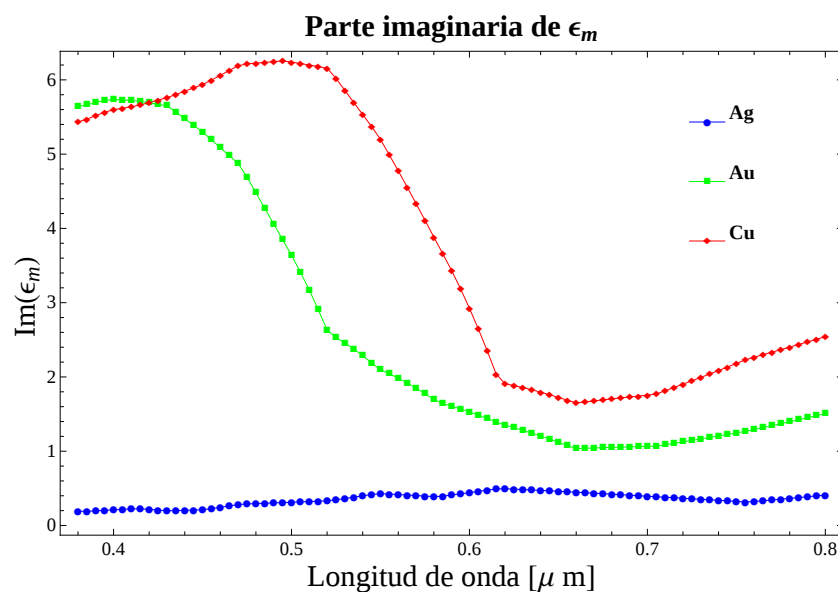


Figura 6. Gráfica de la parte imaginaria de la constante dieléctrica en el espectro visible para oro (línea verde), plata (línea azul) y cobre (línea roja).

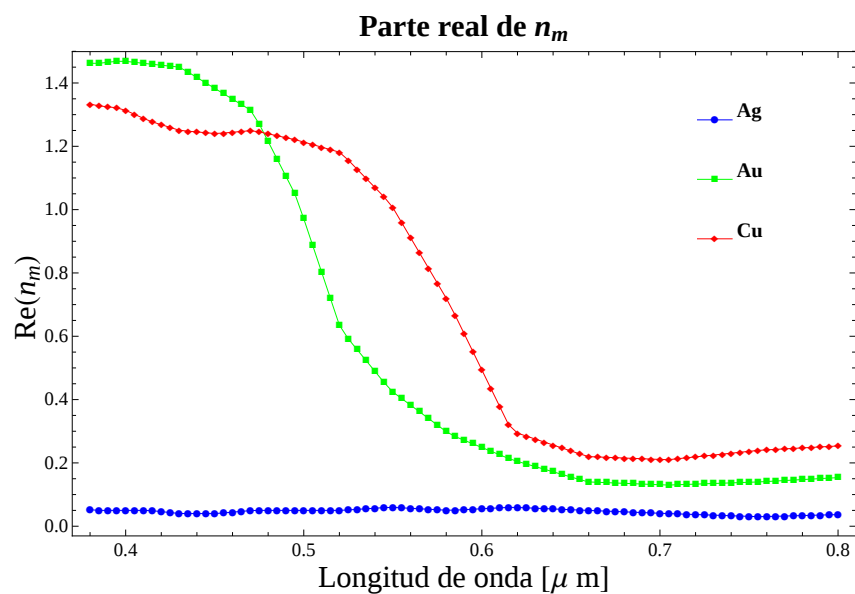


Figura 7. Gráfica de la parte real del índice de refracción en el espectro visible para oro (línea verde), plata (línea azul) y cobre (línea roja).

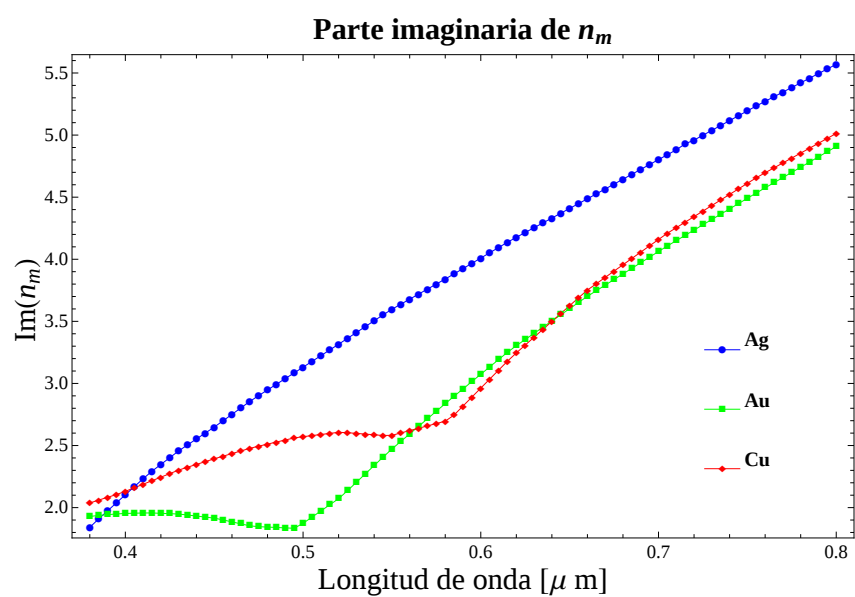


Figura 8. Gráfica de la parte imaginaria del índice de refracción en el espectro visible para oro (línea verde), plata (línea azul) y cobre (línea roja).

Capítulo III

EL MÉTODO INTEGRAL

Ya se ha definido qué es una lente de nano-rendijas y la manera en que son diseñadas, por lo que ahora corresponde determinar si los diseños realizados son efectivos. Para ello hay que calcular la intensidad transmitida por las lentes, lo cual puede ser visto como el esparcimiento de la luz que se propaga por un medio (vacío) al interactuar con muchos cuerpos (bloques metálicos que definen las paredes de las nano-rendijas).

Clásicamente, la luz puede ser vista como una onda electromagnética por lo que, para dar solución al problema en cuestión, se hace uso del Segundo Teorema Integral de Green, mismo que permite determinar el campo electromagnético si se conoce su distribución de cargas inducidas en las fronteras del medio. Para hallar esta distribución del campo en las fronteras se puede hacer uso del método integral, el cual es un método riguroso que puede ser resuelto numéricamente. Debido a que el método integral se ha descrito en trabajos anteriores (Maradudin *et al.*, 1990; Mendoza-Suárez y Méndez, 1997; Pérez *et al.*, 2009), en este análisis se presentan solamente las generalidades del método.

En este capítulo se estudiará cómo se calcula la intensidad de la luz esparcida por varios cuerpos metálicos en el campo cercano y en el campo lejano, tanto en reflexión como en transmisión. Si bien puede ser abrumador el seguimiento de la teoría que será presentada, es indispensable su desarrollo, ya que será la clave para el desarrollo de las simulaciones numéricas que permitirán caracterizar las lentes de nano-rendijas y la generación de mapas de intensidad del campo transmitido por las mismas.

III.1 Modelado del problema electromagnético

Desde el punto de vista clásico, la luz esparcida por un cuerpo metálico corresponde al planteamiento de un problema electromagnético con condiciones de frontera en la superficie del cuerpo. Para dar solución a un problema de esta índole se puede hacer uso del segundo teorema integral de Green, que es una consecuencia del teorema de la divergencia y permite relacionar el campo en un volumen a través de una integral de superficie (Jackson, 1975), es decir

$$\int_{V'} (G \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 G) dV' = \oint_{S'} \left(G \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} - \psi \frac{\partial G}{\partial \hat{n}} \right) dS'. \quad (50)$$

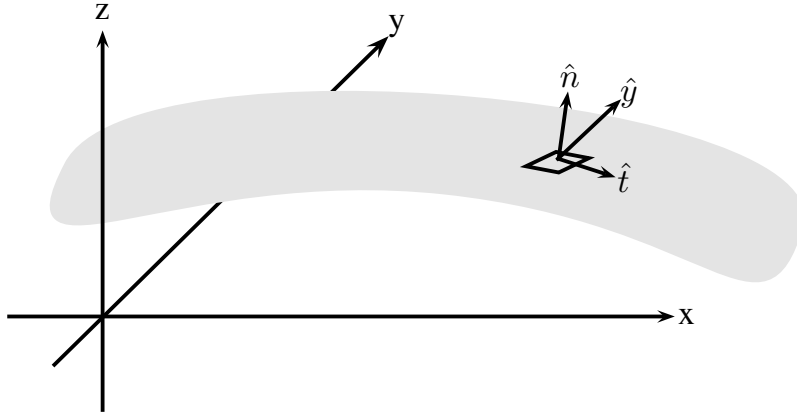


Figura 9. Geometría del marco de referencia.

De acuerdo con la geometría mostrada en la Figura 9, suponiendo que la luz incidente es perpendicular a la dirección $\hat{y}$, sobre la cual el sistema se considera invariante, el campo electromagnético para la polarización TE (polarización s) y para la polarización TM (polarización p) están desacopladas. En estos dos casos el campo electromagnético se puede expresar en términos de las funciones escalares ψ_s y ψ_p . Es decir, que

$$\mathbf{E} = (0, \psi_s, 0), \quad (51)$$

$$\mathbf{H} = (0, \psi_p, 0). \quad (52)$$

La componente $\hat{y}$ de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ debe satisfacer la ecuación de Helmholtz homogénea dada por

$$\nabla^2 \psi + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(\omega) \psi = 0. \quad (53)$$

Por otro lado, se escoge la función de Green como solución de la ecuación

$$\nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(\omega) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (54)$$

donde $\mathbf{r}$ representa el punto de observación y $\mathbf{r}'$ una posición que puede ser interpretada como la posición de una fuente puntual, con $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1$ para $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ o $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 0$ para $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$.

La función de Green que satisface la ecuación (54) con una geometría cilíndrica está dada por (Abramowitz y Stegun, 1970)

$$\mathbf{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k | \mathbf{r} - \mathbf{r}' |), \quad (55)$$

donde $H_0^{(1)}(k | \mathbf{r} - \mathbf{r}' |)$ es la función de Hankel de primera especie y orden cero, y $k = n(\omega) \omega / c$, siendo $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ el índice de refracción.

Aplicando las ecuaciones (53) y (54) al teorema de Green (50), éste resulta en

$$\int_{V'} \psi(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dV' = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left(\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - \psi(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) dS'. \quad (56)$$

III.2 Método integral

Para dar solución a la ecuación (56), se considera que el volumen a tratar está limitado por la superficie de un cilindro, cuyo radio se hace tender a infinito, y la superficie del objeto a estudiar, como se ilustra en la Figura 10.

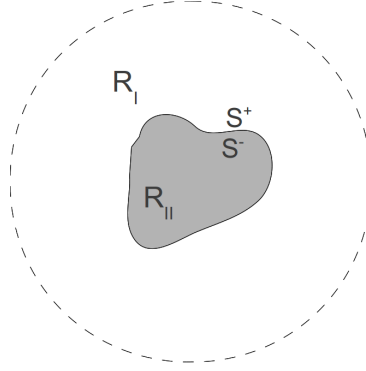


Figura 10. Sección transversal del volumen contenido entre la superficie de un cilindro y la del objeto a estudiar.

Considerando puntos de observación dentro de la región I se tiene que

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left(\mathbf{G}^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi^I(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - \psi^I(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{G}^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) dS', \quad (57)$$

y separando las contribuciones de las dos superficies se encuentra que $\oint_{S'} dS' = \oint_{S_{R_I}} dS' + \oint_{S^+} dS' = \psi^{inc}(\mathbf{r}) + \oint_{S^+} dS'$ ya que las contribuciones del infinito deben corresponder al campo incidente, por lo que se puede escribir

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi^{inc}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{S^+} \left(\mathbf{G}^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi^I(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - \psi^I(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{G}^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) dS'. \quad (58)$$

En este momento resulta conveniente representar al vector $\mathbf{r}$ que describe el perfil de la superficie en términos de un parámetro t' de la forma

$$\mathbf{r} = [\xi(t'), \eta(t')], \quad (59)$$

y se define

$$\phi(t') = \left[(\eta'(t'))^{1/2} + (\xi'(t'))^{1/2} \right]^{1/2}, \quad (60)$$

de modo que

$$\psi^I(t') = \psi^I(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=(\xi(t'),\eta(t'))}, \quad (61)$$

$$\Upsilon^I(t') = \left. \frac{\partial \psi^I(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{N}} \right|_{\mathbf{r}=(\xi(t'), \eta(t'))}, \quad (62)$$

siendo

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{N}} = \left[-\eta'(t') \frac{\partial}{\partial x} + \xi'(t') \frac{\partial}{\partial z} \right], \quad (63)$$

el operador derivada normal (no normalizado) a lo largo del vector $\mathbf{N} = [-\eta'(t'), \xi'(t')]$ que apunta hacia afuera de la superficie del cuerpo, con lo cual el campo total en el medio I está dado por

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) = \psi^{inc}(\mathbf{r}) + \\ \frac{1}{4\pi} \oint_{S^+} \left(\mathbf{G}^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{\mathbf{r}'=(\xi(t'), \eta(t'))} \Upsilon^I(t') - \psi^I(t') \frac{\partial \mathbf{G}^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{N}'} \Big|_{\mathbf{r}'=(\xi(t'), \eta(t'))} \right) dt'. \end{aligned} \quad (64)$$

De esta manera se observa que, si se conoce tanto $\psi^I(t')$ como $\Upsilon^I(t')$, se puede entonces determinar el campo esparcido en el medio que rodea el cuerpo. Para poder obtener dichas funciones se hace tender el punto de observación $\mathbf{r}$ a la frontera, resultando la ecuación (64) en

$$\psi(t) = \psi^{inc}(t) + \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{S^+} \left[\mathbf{G}^I(\mathbf{r} + \nu \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}') \Upsilon^I(t') - \psi^I(t') \frac{\partial \mathbf{G}^I(\mathbf{r} + \nu \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{N}'} \right] dt' \right\}. \quad (65)$$

La ecuación integral (65) contiene dos incógnitas ($\psi^I(t')$ e $\Upsilon^I(t')$) por lo que es necesario hallar una segunda ecuación para determinar el valor de estas funciones, denominadas *funciones fuentes*. Esto se logra al aplicar el teorema integral de Green a la región II con el punto de observación en la región I (Figura 10), obteniendo

$$0 = \frac{1}{4\pi} \oint_{S^-} \left[\mathbf{G}^{II}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi^{II}(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - \psi^{II}(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{G}^{II}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right] dS'. \quad (66)$$

Nuevamente al hacer tender el punto de observación $\mathbf{r}$ a la superficie $\mathbf{r}'$, parametrizada en términos de t' , se tiene que

$$0 = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \oint_{S^-} \left[\mathbf{G}^{II}(\mathbf{r} + \nu \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}') \Upsilon^{II}(t') - \psi^{II}(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{G}^{II}(\mathbf{r} + \nu \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{N}'} \right] dt' \right\}. \quad (67)$$

Para acoplar las ecuaciones (65) y (67) se hace uso de las condiciones de frontera (ver Apéndice A)

$$\boldsymbol{\psi}^I(t') = \boldsymbol{\psi}^{II}(t'), \quad (68)$$

y

$$\frac{1}{\nu_I} \boldsymbol{\Upsilon}^I(t') = \frac{1}{\nu_{II}} \boldsymbol{\Upsilon}^{II}(t'), \quad (69)$$

donde

$$\nu_i = \begin{cases} \varepsilon_i(\omega) & \text{para polarización } p \\ 1 & \text{para polarización } s, \end{cases} \quad (70)$$

con $i = I, II$. De esta manera se forma un conjunto de dos ecuaciones integrales acopladas con dos incógnitas dadas por

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}^{inc}(t) + \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\mathbf{G}^I(\mathbf{r} + \nu \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\Upsilon}^I(t') - \boldsymbol{\psi}^I(t') \frac{\partial \mathbf{G}^I(\mathbf{r} + \nu \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{N}'} \right] dt' \right\}, \quad (71)$$

$$0 = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\frac{\nu_{II}}{\nu_I} \mathbf{G}^I(\mathbf{r} + \nu \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}') \boldsymbol{\Upsilon}^I(t') - \boldsymbol{\psi}^I(t') \frac{\partial \mathbf{G}^I(\mathbf{r} + \nu \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{N}'} \right] dt' \right\}. \quad (72)$$

Sabiendo que el valor de la función de Green que satisface una geometría cilíndrica está dada por la ecuación (55), y que

$$\frac{\partial H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\partial \mathbf{N}'} = k \frac{H_1^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}, \quad (73)$$

al sustituir en las ecuaciones (71) y (72), y tomar el límite se tiene entonces que

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}^{inc}(t) + \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4} \int_{\Gamma} \left[k_I \frac{[\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{R}] H_1^{(1)}(k_I |\mathbf{R}|)}{|\mathbf{R}|} \boldsymbol{\psi}^I(t') - H_0^{(1)}(k_I |\mathbf{R}|) \boldsymbol{\Upsilon}^I(t') \right] dt' \right\}, \quad (74)$$

$$0 = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ -\frac{i}{4} \int_{\Gamma} \left[k_{II} \frac{[\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{R}] H_1^{(1)}(k_{II} |\mathbf{R}|)}{|\mathbf{R}|} \boldsymbol{\psi}^I(t') - \frac{\nu_{II}}{\nu_I} H_0^{(1)}(k_{II} |\mathbf{R}|) \boldsymbol{\Upsilon}^I(t') \right] dt' \right\}, \quad (75)$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t') + \nu \hat{\mathbf{n}}$, $k_I = n_I(\omega)(\omega/c)$ y $k_{II} = n_{II}(\omega)(\omega/c)$.

Para dar solución numérica a las ecuaciones acopladas anteriores, se hace el cambio de variable $\mathbf{r}'(t') = [\xi(t'), \eta(t')]$, de manera que al particionar la integral y hacer una discretización del perfil, se obtienen las relaciones

$$\psi_m = \psi_m^{inc} + \sum_{n=1}^N [H_{mn}^I \psi_n - L_{mn}^I \Upsilon_n], \quad (76)$$

$$0 = \sum_{n=1}^N \left[H_{mn}^{II} \psi_n - \frac{\alpha_{II}}{\alpha_I} L_{mn}^{II} \Upsilon_n \right], \quad (77)$$

donde los índices m y n corren a lo largo de las coordenadas de los N puntos que definen el perfil de manera discretizada (Maradudin *et al.*, 1990; Valencia *et al.*, 2003; Mendoza-Suárez y Méndez, 1997; Pérez *et al.*, 2009), siendo

$$H_{mn}^j = \begin{cases} i \frac{\Delta t'_n}{4} k_j \frac{[-\eta'_n(\xi_m - \xi_n) + \xi'_n(\eta_m - \eta_n)]}{[(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2}} H_1^{(1)} \left\{ k_j [(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2} \right\} & \text{para } m \neq n \\ \frac{1}{2} + \frac{\Delta t'_m}{4\pi\phi^2(t'_m)} (\xi'_m \eta''_m - \xi''_m \eta'_m) & \text{para } m = n, \end{cases} \quad (78)$$

y

$$L_{mn}^j = \begin{cases} i \frac{\Delta t'_n}{4} H_0^{(1)} \left\{ k_j [(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2} \right\} & \text{para } m \neq n \\ i \frac{\Delta t'_m}{4} H_0^{(1)} \left\{ \frac{\Delta t'_m k_I \phi(t'_m)}{2e} \right\} & \text{para } m = n, \end{cases} \quad (79)$$

con $j = I, II$ dependiendo de la región de interés. El análisis realizado determina las funciones fuente de un solo cuerpo.

Para generalizar las ecuaciones (76) y (77) a varios cuerpos, hacemos notar que al tomar el límite cuando el punto de observación se acerca al perfil desde la región I hacia la región II , se deben considerar contribuciones de todos los puntos del perfil y de los perfiles de otros cuerpos, si los hubiera. Con esto, la ecuación (74) resulta en

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \boldsymbol{\psi}^{inc}(t) + \sum_{j=1}^M \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{4} \int_{\Gamma_j} \left[k_I \frac{[\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{R}_{ij}] H_1^{(1)}(k_I R_{ij})}{R_{ij}} \boldsymbol{\psi}^I(t'_j) - H_0^{(1)}(k_I R_{ij}) \boldsymbol{\Upsilon}^I(t'_j) \right] dt'_j \right\}, \quad (80)$$

donde $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{r}(t_i) + \nu \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{r}(t'_j)$ y $R_{ij} = |\mathbf{R}_{ij}|$, con el índice i señalando el punto de observación y el índice j corriendo a lo largo de los M cuerpos involucrados.

Sin embargo, al tomar el límite cuando el punto de observación tiende a la frontera desde la misma región II (ver Figura 10) los puntos que definen el perfil de un cuerpo no interactúan con los de otro, es decir, desde este punto de vista los cuerpos son independientes entre sí. Matemáticamente esto puede ser representado mediante una delta de Kronocker, de manera que la ecuación (75) queda como

$$0 = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left\{ -\frac{i}{4} \int_{\Gamma_j} \left[k_{II} \frac{[\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{R}_{ij}]}{R_{ij}} H_1^{(1)}(k_{II} R_{ij}) \boldsymbol{\psi}^I(t'_j) - \frac{\nu_{II}}{\nu_I} H_0^{(1)}(k_{II} R_{ij}) \boldsymbol{\Upsilon}^I(t'_j) \right] \delta_{ij} dt'_j \right\}, \quad (81)$$

donde nuevamente $\mathbf{R}_{ij} = \mathbf{r}(t_i) + \nu \hat{\mathbf{n}} - \mathbf{r}(t'_j)$ y $R_{ij} = |\mathbf{R}_{ij}|$, con el índice i señalando el punto de observación, $j = 1, 2, \dots, M$ y

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j, \\ 0 & \text{para } i \neq j, \end{cases} \quad (82)$$

Para convertir las ecuaciones anteriores a ecuaciones matriciales se evalúan las integrales en pequeños intervalos. Considerando que $L_j = \int_{\Gamma_j} dt_j$ es la longitud del perfil del j -ésimo cuerpo (definido por la curva Γ_j), e introduciendo un conjunto de N_j puntos igualmente espaciados $r_{j,n} = [\xi_j(t_{j,n}), \eta_j(t_{j,n})]$ con $n = 1, 2, \dots, N_j$, se tiene que los puntos de muestreo, separados una distancia constante Δt , están dados por

$$t_i = \left(m - \frac{1}{2} \right) \Delta t, \quad (83)$$

con $i = 1, 2, \dots, M$ y $m = 1, 2, \dots, N_i$. La separación entre los puntos, $\Delta t_{j,n}$, satisface la relación $\Delta t = \Delta S_j / \phi(t_j)$, siendo ΔS_j un elemento diferencial de arco del j -ésimo cuerpo. Así, al evaluar el punto de observación t_i en posiciones discretas, se obtienen las dos ecuaciones integrales acopladas que permiten determinar las funciones fuentes para un conjunto de M cuerpos metálicos, las cuales están dadas por

$$\psi(t_{i,m}) = \psi^{inc}(t_{i,m}) + \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j} [H_{mn}^I \psi_{j,n} - L_{mn}^I \Upsilon_{j,n}], \quad (84)$$

y

$$0 = \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j} \left[H_{mn}^{II} \psi_{j,n} - \frac{\nu_{II}}{\nu_I} L_{mn}^{II} \Upsilon_{j,n} \right] \delta_{ij}. \quad (85)$$

donde los términos H_{mn} y L_{mn} quedan definidos como antes. Este par de ecuaciones definen un sistema de $2N_T \times 2N_T$ ecuaciones, con $N_T = \sum_{j=1}^M N_j$.

Una vez determinadas las funciones fuente se puede conocer la manera en que es esparcido el campo al interactuar con un objeto o un conjunto de ellos, bastando con sustituir los valores de las funciones fuente en la ecuación (58)

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi^{inc}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \oint_{\Gamma} \left(\mathbf{G}^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial \psi^I(\mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - \psi^I(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{G}^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right) dS'. \quad (86)$$

III.3 El vector de Poynting

El cálculo de la potencia en campo lejano permite estimar las fracciones del campo incidente que son reflejadas y transmitidas por el arreglo de cuerpos metálicos. Para este fin se hace uso del vector de Poynting dado por la relación

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathbf{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \}. \quad (87)$$

Una forma generalizada de expresar el vector de Poynting para ondas con polarización TE o TM, se puede obtener a partir de las ecuaciones de Maxwell (3) y (4) que relacionan los rotacionales de los campo $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ en el espacio libre. Así

$$\langle \mathbf{S} \rangle_{s,p} = \frac{c}{8\pi \frac{\omega}{c}} \mathbf{Re} \{ i \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{F})^* \}, \quad (88)$$

donde

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \psi_s(x, z) \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{E}(x, z) \text{ para polarización } s, \\ \psi_p(x, z) \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{H}(x, z) \text{ para polarización } p. \end{cases} \quad (89)$$

El marco de referencia para el tratamiento del problema considera la geometría cilíndrica mostrada en la Figura 9, donde se satisfacen las relaciones $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ para

el marco de referencia global, y $\hat{t} \times \hat{y} = \hat{n}$ para el marco de referencia local (sobre el perfil). Debido a la invarianza del sistema en el eje y , es posible demostrar que

$$\langle \mathbf{S} \rangle_{s,p} = \frac{c}{8\pi \frac{\omega}{c}} \mathbf{Re} \left\{ i\psi_{s,p} \left[\left(\frac{\partial \psi_{s,p}}{\partial \hat{p}} \right)^* \hat{p} + \left(\frac{\partial \psi_{s,p}}{\partial \hat{q}} \right)^* \hat{q} \right] \right\}, \quad (90)$$

con $(\hat{p}, \hat{y}, \hat{q}) = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ para el marco de referencia global, o bien $(\hat{p}, \hat{y}, \hat{q}) = (\hat{t}, \hat{y}, \hat{n})$ para el marco de referencia local¹. Haciendo uso del marco de referencia global la ecuación (90) resulta en

$$\langle \mathbf{S} \rangle_{s,p} = \frac{c}{8\pi \frac{\omega}{c}} \mathbf{Re} \left\{ i\psi_{s,p} \left[\left(\frac{\partial \psi_{s,p}}{\partial \hat{x}} \right)^* \hat{x} + \left(\frac{\partial \psi_{s,p}}{\partial \hat{z}} \right)^* \hat{z} \right] \right\}. \quad (91)$$

III.4 El campo incidente

Para determinar tanto las funciones fuentes como el campo total esparcido por el objeto, es necesario tener información de cómo es el campo incidente. En esta sección se estudiarán dos casos: la incidencia de una onda plana y la de un haz Gaussiano.

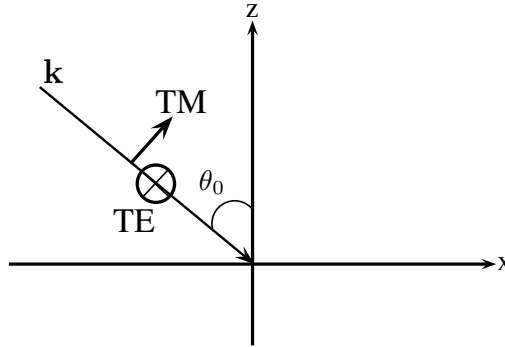


Figura 11. Marco de referencia del haz incidente.

¹Sólo se usará el marco de referencia local para el cálculo de la potencia absorbida por el medio.

III.4.1 Onda plana

Considerando la geometría del sistema mostrado en la Figura (11), una onda plana incidente que forma un ángulo θ_0 respecto al eje z puede ser descrita como

$$\psi(x, z) = A_0 e^{i(\omega/c)(x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0)}. \quad (92)$$

Dos relaciones que serán de utilidad son las derivadas parciales del campo incidente respecto a x y z (presentes en el cálculo de la intensidad para polarización p), las cuales están dadas por

$$\frac{\partial \psi^{inc}(x, z)}{\partial x} = ik_0 \sin \theta_0 e^{ik_0 f_b}, \quad (93)$$

$$\frac{\partial \psi^{inc}(x, z)}{\partial z} = -ik_0 \cos \theta_0 e^{ik_0 f_b}. \quad (94)$$

donde $k_0 = \omega/c$ y $f_b = x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0$.

III.4.2 Haz Gaussiano

De manera análoga a la onda plana, se puede considerar un haz Gaussiano que incide formando un ángulo θ_0 respecto al eje z medido en dirección opuesta a las manecillas del reloj como se ilustra en la Figura (11), el cual está descrito por la ecuación (Chang (2005) pags. 54-57)

$$\psi(x, z) = A_0 e^{arg(x, z)}, \quad (95)$$

donde

$$arg(x, z) = ik_0 f_b(x, z) \left(1 + \frac{2 \frac{f_a^2(x, z)}{g_x^2} - 1}{k_0^2 g_x^2 \cos^2 \theta_0} \right) - \frac{f_a^2(x, z)}{g_x^2}, \quad (96)$$

siendo g_x la cintura del haz a $1/e$, $k_0 = \omega/c$ y

$$f_b(x, z) = x \sin \theta_0 - z \cos \theta_0, \quad (97)$$

$$f_a(x, z) = x + z \tan \theta_0. \quad (98)$$

Las derivadas parciales de $\psi(x, z)$ respecto a x y z son

$$\frac{\partial \psi^{inc}(x, z)}{\partial x} = e^{arg(x, z)} \left\{ ik_0 \left[\sin \theta_0 \left(1 + \frac{\frac{2f_a^2}{w^2} - 1}{k_0^2 w^2 \cos^2 \theta_0} \right) + \frac{4f_a f_b}{k_0^2 w^4 \cos^2 \theta_0} \right] - \frac{2f_a}{g^2} \right\}, \quad (99)$$

$$\frac{\partial \psi^{inc}(x, z)}{\partial z} = e^{arg(x, z)} \left\{ ik_0 \left[-\cos \theta_0 \left(1 + \frac{\frac{2f_a^2}{w^2} - 1}{k_0^2 w^2 \cos^2 \theta_0} \right) + \frac{4 \tan \theta_0 f_a f_b}{k_0^2 w^4 \cos^2 \theta_0} \right] - \frac{2 \tan \theta_0 f_a}{g^2} \right\}. \quad (100)$$

III.4.3 Potencia incidente

En el cálculo subsecuente se hace uso de una notación diferente a la usada en el método integral con el fin de reducir términos en las expresiones. El cálculo con la notación de la sección anterior se puede encontrar en las referencias Maradudin *et al.* (1990); Pérez *et al.* (2009).

De acuerdo al marco de referencia en el que se trabaja (ver Figura 12), el campo incidente se propaga en la dirección $-z$ formando un ángulo θ_0 , respecto al eje z medido en sentido de las manecillas del reloj, de tal forma que la potencia del campo incidente, a partir de la ecuación (91), resulta en

$$\langle \mathbf{S}_{inc, z} \rangle \equiv \langle \mathbf{S}_{inc} \rangle \cdot (-\hat{z}) = -\frac{c}{8\pi \frac{\omega}{c}} \mathbf{Re} \left\{ i \psi_{inc} \left(\frac{\partial \psi_{inc}}{\partial z} \right)^* \right\}. \quad (101)$$

Por otra parte, el campo incidente puede ser visto en el espectro angular como una superposición de ondas planas multiplicadas por un *factor de peso*, $A(\alpha)$, que las deforma, es decir

$$\psi_{inc}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta(\alpha) z)} d\alpha, \quad (102)$$

de manera que el vector de propagación de la onda, $\mathbf{k}(\alpha, \beta)$, satisface la relación $|\mathbf{k}|^2 = \alpha^2 + \beta^2$, donde

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sin \theta_0, \quad (103)$$

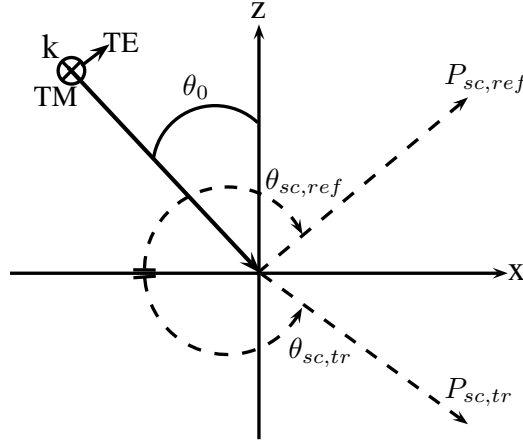


Figura 12. Geometría del campo incidente y el campo esparcido.

y

$$\beta(\alpha) = -\frac{\omega}{c} \cos \theta_0. \quad (104)$$

De esta manera el argumento de la parte real de la ecuación (101) queda como

$$\begin{aligned} \psi_{inc} \left(\frac{\partial \psi_{inc}}{\partial z} \right)^* &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\beta^*(\alpha') A(\alpha) A^*(\alpha') \\ &\times e^{i[(\alpha-\alpha')x - (\beta_R(\alpha) - \beta_R(\alpha'))z]} e^{(\beta_I(\alpha) + \beta_I(\alpha'))z} d\alpha d\alpha' \end{aligned} \quad (105)$$

donde $\beta_R(\alpha) = \mathbf{Re} \{\beta(\alpha)\}$ y $\beta_I(\alpha) = \mathbf{Im} \{\beta(\alpha)\}$.

Para poder determinar la potencia hay que recordar que ésta se define como el flujo de energía por unidad de área, por lo cual es necesario integrar en x y y . Esta integración requiere suponer que el cuerpo metálico está inmerso en un cilindro cuyo eje, de longitud L , coincide con el eje y , mientras que el diámetro de su base es el eje x .

Integrando la ecuación (105) en x se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{inc} \left(\frac{\partial \psi_{inc}}{\partial z} \right)^* dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i\beta^*(\alpha') A(\alpha) A^*(\alpha') \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha-\alpha')x} dx \right] \\ &\times e^{i(\beta_R(\alpha) - \beta_R(\alpha'))z} e^{(\beta_I(\alpha) + \beta_I(\alpha'))z} d\alpha d\alpha' \end{aligned}, \quad (106)$$

pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha-\alpha')x} dx = 2\pi\delta(\alpha - \alpha') = \begin{cases} 1 & \text{para } \alpha = \alpha', \\ 0 & \text{para } \alpha \neq \alpha', \end{cases} \quad (107)$$

por lo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{inc} \left(\frac{\partial \psi_{inc}}{\partial z} \right)^* dx = i2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \beta^*(\alpha) |A(\alpha)|^2 e^{2\beta_I(\alpha)z} d\alpha. \quad (108)$$

Por lo tanto, después de integrar en y , la potencia del campo incidente está dada como

$$\langle \mathbf{S}_{inc,z} \rangle_{total} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{S}_{inc,z} \rangle dx dy = \frac{Lc}{4\frac{\omega}{c}} \int_{-\frac{\omega}{c}}^{\frac{\omega}{c}} \beta A^2(\alpha) d\alpha, \quad (109)$$

donde el cambio en los límites de integración se debe a que si $|\alpha| > \omega/c$, entonces $\beta(\alpha)$ (y todo el integrando) es puramente imaginario, por lo cual $\mathbf{Re}\{\dots\} = 0$.

Teniendo en cuenta los cálculos anteriores, a continuación se determina la potencia del campo incidente cuando se tiene un haz Gaussiano y posteriormente cuando se tiene una onda plana.

Haz Gaussiano

Para un haz Gaussiano, el factor de peso asociado a la superposición de las ondas planas está dado por una distribución Gaussiana, es decir

$$A(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha-\alpha_0}{\sigma}\right)^2}, \quad (110)$$

donde $\sigma = \sqrt{2}/g_x$, siendo g_x el ancho del haz a $1/e$ de su valor máximo. Este factor de peso se sustituye en la ecuación (109), y se integra en el intervalo $(-\infty, \infty)$, ya que la forma exponencial de $A(\alpha)$ “plancha” todos los valores del integrando tales que $|\alpha| > \omega/c$.

Ahora bien, para no cargar con muchos términos hacemos

$$A(\alpha) = A e^{-a^2(\alpha-\alpha_0)^2}, \quad (111)$$

donde $A = 1/(\sigma\sqrt{2\pi})$ y $a = 1/(\sigma\sqrt{2})$. Sabiendo que $\beta(\alpha) = (k^2 - \alpha^2)^{1/2}$, y sustituyendo (111) en la ecuación (109) se tiene que

$$\langle \mathbf{S}_{inc,z} \rangle_{total} = \frac{Lc}{4\frac{\omega}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} k [1 - (\alpha/k)^2]^{1/2} A^2 e^{-2a^2 k^2 [(\alpha/k) - (\alpha_0/k)]^2} d\alpha, \quad (112)$$

y definiendo las variables $\gamma_0 = \alpha_0/k$ y $\gamma = \alpha/k$, de modo que $d\gamma = d\alpha/k$, con $k = \omega/c$, se encuentra que

$$\langle \mathbf{S}_{inc,z} \rangle_{total} = \frac{LckA^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \gamma^2]^{1/2} e^{-2a^2 k^2 (\gamma - \gamma_0)^2} d\gamma. \quad (113)$$

Desarrollando en serie de potencias el término $[1 - \gamma^2]^{1/2}$ y haciendo el cambio de variable $u = \gamma - \gamma_0$, $du = d\gamma$, es posible demostrar que (Abramowitz y Stegun, 1970)

$$\langle \mathbf{S}_{inc,z} \rangle_{total} = \frac{LcA^2}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\left(1 - \frac{\gamma_0^2}{2} \right) - \frac{1}{8a^2 k^2} \right]. \quad (114)$$

Finalmente, al regresar a las variables originales y recordando que g_x es el ancho de la cintura del haz a $1/e$ de su valor máximo, se encuentra que

$$P_{inc} = \langle \mathbf{S}_{inc,z} \rangle_{total} = \frac{Lcg_x}{8\sqrt{2\pi}} \left[1 - \left(\frac{\sin^2 \theta_0}{2} + \frac{1}{2g_x^2 k^2} \right) \right]. \quad (115)$$

Onda plana

Para una onda plana el factor de peso que acompaña a la integral del principio de superposición en el espectro angular, es una *delta de Dirac*, ya que una onda plana puede ser vista espacialmente como una función de amplitud constante. Es decir

$$\psi_{inc} = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i[\alpha x - \beta(\alpha)z]} d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - \alpha') e^{i[\alpha x - \beta(\alpha)z]} d\alpha, \quad (116)$$

y usando la definición de la delta de Dirac dada como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - \alpha') f(\alpha) d\alpha = f(\alpha'), \quad (117)$$

se tiene entonces que el campo incidente está dado por

$$\psi_{inc}(x, z) = \psi_0 e^{i(\alpha x - \beta z)}, \quad (118)$$

donde se ha eliminado la notación primada por ser independiente del resultado final.

Al sustituir este resultado en la ecuación (101) y notando que $\beta^* = \beta = -(\omega/c) \cos \theta_0$, se tiene entonces que

$$\langle \mathbf{S}_{inc,z} \rangle = -\frac{c}{8\pi \frac{\omega}{c}} \mathbf{Re} \{ \beta \} = -\frac{c}{8\pi \frac{\omega}{c}} \beta. \quad (119)$$

Una vez más, se debe integrar en x e y para determinar la potencia total. Aquí hay que destacar que la onda plana es de longitud infinita, por lo cual basta con definir la sección transversal eficaz del cuerpo metálico a lo largo del eje x , la cual se denotará como D , y L es otra vez la longitud del cilindro que encierra el cuerpo. De esta manera la potencia está dada por

$$P_{inc} = \langle \mathbf{S}_{inc,z} \rangle_{total} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-D/2}^{D/2} \langle \mathbf{S}_{inc,z} \rangle dx dy = \frac{DLc}{8\pi} \cos \theta_0. \quad (120)$$

III.5 El campo esparcido

Para determinar el campo esparcido nuevamente se hará uso de la superposición de ondas planas en el espectro angular, donde el factor de peso, $R(\alpha)$, depende de la interacción entre el campo incidente y el o los objetos esparcidores, es decir

$$\psi_{sc}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) e^{i[\alpha x + \beta(\alpha)z]} d\alpha, \quad (121)$$

donde $\alpha = (\omega/c) \sin \theta_{sc}$ y $\beta = (\omega/c) \cos \theta_{sc}$, con θ_{sc} el ángulo que forma el vector de propagación del campo esparcido respecto al eje x medido desde $-\pi$ hasta π , como se muestra en la Figura 12. De esta manera, a partir de la ecuación (91) la potencia

esparcida reflejada está dada por

$$\langle \mathbf{S}_{sc,z} \rangle = \langle \mathbf{S}_{sc} \rangle \cdot \hat{z} = \frac{c}{8\pi\frac{\omega}{c}} \mathbf{Re} \left\{ i\psi_{sc} \left(\frac{\partial \psi_{sc}}{\partial z} \right)^* \right\}. \quad (122)$$

Desarrollando el argumento de la parte real de la ecuación anterior, se tiene que

$$i\psi_{sc} \left(\frac{\partial \psi_{sc}}{\partial z} \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^*(\alpha') R(\alpha) R^*(\alpha') e^{arg(\alpha, \alpha') \cdot z} e^{arg(\alpha - \alpha') \cdot x} d\alpha d\alpha', \quad (123)$$

donde $arg(\alpha, \alpha') = i [\mathbf{Re}(\beta(\alpha)) - \mathbf{Re}(\beta(\alpha'))] - [\mathbf{Im}(\beta(\alpha)) + \mathbf{Im}(\beta(\alpha'))]$, siendo de particular interés el caso cuando $\alpha = \alpha'$, con lo que $arg(\alpha, \alpha') = 0$ cuando $\alpha \neq \alpha'$. De esta manera, al integrar en x y haciendo uso de la definición de la delta de Dirac, se puede demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{S}_{sc,z} \rangle dx = \frac{c}{4\frac{\omega}{c}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{Re} \{ \beta(\alpha) \} |R(\alpha)|^2 d\alpha, \quad (124)$$

e integrando en y desde $-L/2$ hasta $L/2$, se tiene que

$$P_{sc} = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \mathbf{S}_{sc,z} \rangle dx dy = \frac{Lc}{4\frac{\omega}{c}} \int_{-\frac{\omega}{c}}^{\frac{\omega}{c}} \beta(\alpha) |R(\alpha)|^2 d\alpha, \quad (125)$$

ya que $\mathbf{Re} \{ \beta(\alpha) \} = 0$ si $|\alpha| > \frac{\omega}{c}$.

Es decir, la potencia esparcida en campo lejano por un cuerpo metálico puede ser determinada mediante la relación (125) al saber cuál es el *factor de peso* $R(\alpha)$ asociado ya sea al campo reflejado o al campo transmitido.

A continuación se describe la manera en que puede ser determinado dicho factor de peso tanto para la potencia reflejada como para la potencia transmitida.

III.5.1 El campo reflejado

A partir del método integral se tiene que

$$\psi(x, z) = \psi_{inc}(x, z) + \psi_{sc}(x, z), \quad (126)$$

donde

$$\psi_{sc}(x, z) = \frac{1}{4\pi} \int_s \left[\frac{\partial G(r|r')}{\partial \hat{n}'} \psi(r') - G(r|r') \frac{\partial \psi(r')}{\partial \hat{n}'} \right] dS'. \quad (127)$$

Para problemas con simetría axial se sabe que

$$G(r|r') = i\pi H_0^{(1)}(k|r - r'|), \quad (128)$$

donde la función de Hankel puede ser representada de manera integral como (Morse y Feshbach, 1953)

$$G(r|r') = i\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[\alpha(x - \xi(t')) + \beta(z_0 - \eta(t'))]}{\beta(\alpha)} d\alpha, \quad (129)$$

siempre y cuando se cumpla que $|z_0| > \eta(t')$ para todo t' , es decir, que z_0 esté por arriba del perfil. Es de notar que el argumento de la exponencial es equivalente a $\mathbf{k} \cdot (r - r')$, de tal forma que $\mathbf{k} = \alpha \hat{x} + \beta(\alpha) \hat{z}$ cumpliendose que $\alpha^2 + \beta^2(\alpha) = (\omega/c)^2$.

Usando la regla de la cadena, para la derivada de la función de Green se encuentra que

$$\frac{\partial G(r|r')}{\partial \hat{n}'} = \nabla G \cdot \hat{n}' = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha n'_x + \beta n'_z) \exp\{i[\alpha(x - \xi(t')) + \beta(z_0 - \eta(t'))]\}}{\beta(\alpha)} d\alpha, \quad (130)$$

por lo que, al sustituir las ecuaciones (129) y (130) en la ecuación (127), se tiene que la potencia esparcida está dada como

$$\psi_{sc}(x, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left[(\alpha n'_x + \beta n'_z) \psi(r') - i \frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}'} \right] \frac{e^{i[\alpha(x - \xi(t')) + \beta(z_0 - \eta(t'))]}}{\beta(\alpha)} d\alpha \right\} dS'. \quad (131)$$

Recordando que $dS' = \phi(t') dt'$ y definiendo $\gamma(\alpha, t') \equiv (\alpha n'_x + \beta n'_z) \psi(t') - i \frac{\partial \psi(t')}{\partial \hat{n}'}$, se encuentra entonces que

$$\psi_{sc}(x, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\alpha, t') \exp\{i[\alpha(x - \xi(t')) + \beta(z_0 - \eta(t'))]\}}{\beta(\alpha)} d\alpha \right] \phi(t') dt'. \quad (132)$$

Por otra parte, retomando la idea de que el campo esparcido puede ser calculado mediante la superposición de ondas planas “salientes” con un peso $R(\alpha)$ determinado, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) e^{[i(\alpha x + \beta(\alpha) z_0)]} d\alpha = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\alpha, t') e^{\{i[\alpha(x - \xi(t')) + \beta(z_0 - \eta(t'))]\}}}{\beta(\alpha)} d\alpha \right] \phi(t') dt'. \quad (133)$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (133) por $e^{-i\alpha' x}$, integrando en x y haciendo uso de la definición de la delta de Dirac (ecuación(107)), se tiene para el primer término que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\alpha' x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta(\alpha) z_0)} d\alpha \right] = 2\pi R(\alpha') e^{i\beta(\alpha') z_0}, \quad (134)$$

mientras que para el segundo término se encuentra que

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\alpha, t') \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha - \alpha') x} dx \right) \frac{e^{i[\beta(z_0 - \eta(t')) - \alpha \xi(t')]} }{\beta(\alpha)} d\alpha \right] \phi(t') dt' \\ = \frac{1}{2\beta'} \int_{\Gamma} \gamma(\alpha, t') e^{i[\beta(\alpha')(z_0 - \eta(t')) - \alpha' \xi(t')]} \phi(t') dt', \end{aligned} \quad (135)$$

Entonces, igualando las ecuaciones (134) y (135) se encuentra que

$$R(\alpha) = \frac{1}{4\pi\beta(\alpha)} \int_{\Gamma} \gamma(\alpha, t') e^{-i[\alpha \xi(t') - \beta(\alpha)(z_0 - \eta(t'))]} \phi(t') dt', \quad (136)$$

con

$$\gamma(\alpha, t') = \left(\frac{-\alpha \eta'(t') + \beta(\alpha) \xi'(t')}{\phi(t')} \right) \psi(t') - i \frac{\partial \psi(t')}{\partial \hat{n}}, \quad (137)$$

implicando que

$$\begin{aligned} \phi(t') \gamma(\alpha, t') &= (-\alpha \eta'(t') + \beta(\alpha) \xi'(t')) \psi(t') - i \frac{\partial \psi(t')}{\partial \hat{n}} \phi(t') \\ &= [-\alpha \eta'(t') + \beta(\alpha) \xi'(t')] \psi(t') - i \Upsilon(t'). \end{aligned} \quad (138)$$

Por lo tanto se tiene que el factor de peso del campo esparcido que es reflejado por el cuerpo está dado por

$$R(\alpha) = \frac{i}{4\pi\beta(\alpha)} \int_{\Gamma} \{i[\alpha \eta'(t') - \beta(\alpha) \xi'(t')] \psi(t') - \Upsilon(t')\} e^{-i[\alpha \xi(t') + \beta(\alpha) \eta(t')]} dt'. \quad (139)$$

El tratamiento anterior es independiente del tipo de frente de onda, la información del campo incidente es proporcionada por el método integral.

III.5.2 El campo transmitido

Para determinar el factor de peso del campo transmitido es necesario hacer la superposición del campo incidente y el campo esparcido, es decir, el campo total transmitido está dado por

$$\psi_{tr}(x, z_0) = \psi_{sc}(x, z_0) + \psi_{inc}(x, z_0). \quad (140)$$

De acuerdo con la geometría del sistema (ver Figura 12), el campo transmitido forma un ángulo θ_{sc} respecto al eje x el cual se mide desde $-\pi$ hasta π en dirección opuesta a las manecillas del reloj, con lo cual las ondas se propagan de manera que las componentes del vector de onda pueden ser escritas como $\mathbf{k} = (\alpha, -\beta(\alpha))$, donde $\alpha = (\omega/c) \sin \theta_s$ y $\beta = (\omega/c) \cos \theta_s$. Así

$$\psi_{sc}(x, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\alpha, t') e^{i\{\alpha[x-\xi(t')]-\beta[z_0-\eta(t')]\}}}{-\beta(\alpha)} d\alpha \right\} \phi(t') dt', \quad (141)$$

con $\gamma(\alpha, t') = (\alpha n_x - \beta(\alpha) n_z) \psi(t') - i \frac{\partial \psi(t')}{\partial \hat{n}}$, y

$$\psi_{inc}(x, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta(\alpha) z_0)} d\alpha, \quad (142)$$

donde

$$A(\alpha) = \begin{cases} \frac{g_x}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{g_x^2}{4}(\alpha - \alpha_0)^2} & \text{para un haz Gaussiano,} \\ \delta(\alpha - \alpha_0) & \text{para una onda plana,} \end{cases} \quad (143)$$

siendo g_x la cintura a $1/e$ del haz Gaussiano incidente y $\alpha_0 \equiv \frac{\omega}{c} \sin \theta_0$, con θ_0 el ángulo de incidencia del haz medido a partir del eje z en dirección de las manecillas del reloj.

Es decir, la ecuación (140) queda como

$$\begin{aligned} \psi_{tr}(x, z_0) = & \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\alpha, t') e^{i\{\alpha[x-\xi(t')]-\beta[z_0-\eta(t')]\}}}{-\beta(\alpha)} d\alpha \right\} \phi(t') dt' \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta(\alpha) z_0)} d\alpha. \end{aligned} \quad (144)$$

Por otra parte, al calcular el campo transmitido mediante la superposición de ondas planas de la forma

$$\psi_{tr}(x, z_0) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) e^{i[\alpha x - \beta(\alpha) z_0]} d\alpha, \quad (145)$$

se encuentra que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta(\alpha) z_0)} d\alpha &= \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma(\alpha, t') e^{i\{\alpha[x - \xi(t')] - \beta(\alpha)[z_0 - \eta(t')]\}}}{-\beta(\alpha)} d\alpha \right\} \phi(t') dt' \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta(\alpha) z_0)} d\alpha. \end{aligned} \quad (146)$$

De manera análoga al campo reflejado, a partir de esta relación se puede determinar el valor de la función de peso $R(\alpha)$ al multiplicar ambos lados de la ecuación por $e^{-i\alpha' x}$, integrar en x y hacer uso de la delta de Dirac, encontrando que

$$R(\alpha) = A(\alpha) - \frac{1}{4\pi\beta(\alpha)} \int_{\Gamma} \gamma(\alpha, t') e^{-i[\alpha\xi(t') - \beta(\alpha)\eta(t')]} \phi(t') dt', \quad (147)$$

Al sustituir el valor de γ dado en la ecuación (137), se encuentra finalmente que

$$R(\alpha) = A(\alpha) - \frac{i}{4\pi\beta(\alpha)} \int_{\Gamma} [i(\alpha\eta'(t') + \beta(\alpha)\xi'(t'))\psi(t') - \Upsilon(t')] e^{-i[\alpha\xi(t') - \beta(\alpha)\eta(t')]} dt'. \quad (148)$$

III.5.3 Potencia esparcida

Al inicio de esta sección se encontró que la potencia esparcida está dada por la relación (125). Lo que ahora corresponde es determinar esta potencia en función del ángulo con que emana respecto a la superficie del perfil. Para ello se debe hacer el cambio de variable $\alpha = \theta_{sc}$, y recordando que $\alpha = \frac{\omega}{c} \sin \theta_{sc}$ y $\beta = \frac{\omega}{c} \cos \theta_{sc}$, se tiene que $d\alpha = \frac{\omega}{c} \cos \theta_{sc} d\theta_{sc}$, con lo que la ecuación (125) resulta en

$$P_{sc} = \frac{Lc\omega}{4c} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |R(\theta_{sc})|^2 \cos^2 \theta_{sc} d\theta_{sc}. \quad (149)$$

Con esto en cuenta, lo que resta es determinar el valor del factor de peso en función de la variable θ_{sc} . Para ello sólo hay que realizar el mismo cambio de variable en

las ecuaciones (139) y (148), notando que la potencia transmitida depende de la onda incidente.

Potencia reflejada

De manera explícita para el ángulo θ_{sc} , el factor de peso en reflexión está dado como

$$R_r(\theta_{sc}) = \frac{i}{4\pi \frac{\omega}{c} \cos \theta_{sc}} \int_{\Gamma} \left\{ i \frac{\omega}{c} [\sin \theta_{sc} \eta'(t') - \cos \theta_{sc} \xi'(t')] \psi(t') - \Upsilon(t') \right\} \times e^{-i \frac{\omega}{c} [\sin \theta_{sc} \xi(t') + \cos \theta_{sc} \eta(t')]} dt'. \quad (150)$$

Así, el módulo cuadrado del factor de peso está dado por

$$|R_r(\theta_{sc})|^2 = \frac{1}{16\pi^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cos^2 \theta_{sc}} \cdot |r(\theta_{sc})|^2, \quad (151)$$

donde

$$r(\theta_{sc}) \equiv \int_{\Gamma} \left\{ i [\alpha \eta'(t') - \beta(\alpha) \xi'(t')] \psi(t') - \Upsilon(t') \right\} e^{-i \frac{\omega}{c} [\xi(t') \sin \theta_{sc} + \eta(t') \cos \theta_{sc}]} dt'. \quad (152)$$

Sustituyendo la ecuación (151) en la ecuación (149) se encuentra que la potencia esparcida que es reflejada al vacío está dada como

$$P_{sc}^{ref} \equiv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_r(\theta_{sc}) d\theta_{sc}, \quad (153)$$

donde

$$P_r(\theta_{sc}) = \frac{Lc}{64\pi^2 \frac{\omega}{c}} |r(\theta_{sc})|^2. \quad (154)$$

Potencia transmitida

Para transmisión se debe tomar en cuenta que el factor de peso depende del haz incidente, ya sea una onda plana o un haz Gaussiano.

Onda plana

Siguiendo el mismo procedimiento que para el campo reflejado, al sustituir el factor de peso en el espectro angular para una onda plana (ecuación (143)) en la ecuación (148), y después de aplicar la definición de la función delta de Dirac, se tiene que

$$R(\alpha) = \frac{-i}{4\pi\beta(\alpha)} \left\{ \int_{\Gamma} [i(\alpha\eta'(t') + \beta(\alpha)\xi'(t'))\psi(t') - \Upsilon(t')] e^{-i[\alpha\xi(t') - \beta(\alpha)\eta(t')]} dt' + i4\pi\beta \right\}. \quad (155)$$

De esta manera $R(\theta_{sc})$ está dado por

$$R_t(\theta_{sc,tr}) = \frac{-i}{4\pi\frac{\omega}{c}\cos\theta_{sc,tr}} \left[\int_{\Gamma} \left\{ i\frac{\omega}{c} [\sin\theta_{sc,tr}\eta'(t') + \cos\theta_{sc,tr}\xi'(t')] \psi(t') - \Upsilon(t') \right\} \times e^{-i\frac{\omega}{c} [\sin\theta_{sc,tr}\xi(t') - \cos\theta_{sc,tr}\eta(t')]} dt' + i4\pi\frac{\omega}{c}\cos\theta_{sc,tr} \right], \quad (156)$$

con lo que

$$|R_t(\theta_{sc,tr})|^2 = \frac{1}{16\pi^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cos^2\theta_{sc,tr}} \cdot |t(\theta_{sc,tr})|^2, \quad (157)$$

donde

$$t(\theta_{sc,tr}) = \int_{\Gamma} \{ i[\alpha\eta'(t') + \beta\xi'(t')] \psi(t') - \Upsilon(t') \} e^{-i\frac{\omega}{c} [\sin\theta_{sc,tr}\xi(t') - \cos\theta_{sc,tr}\eta(t')]} dt' + i4\pi\frac{\omega}{c}\cos\theta_{sc,tr}. \quad (158)$$

Así

$$P_{sc}^{tr} \equiv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_t(\theta_{sc,tr}) d\theta_{sc,tr}, \quad (159)$$

donde

$$P_t(\theta_{sc,tr}) = \frac{Lc}{64\pi^2\frac{\omega}{c}} |t(\theta_{sc,tr})|^2. \quad (160)$$

Haz Gaussiano

Sustituyendo el factor de peso en el espectro angular, $A(\alpha)$, para un haz Gaussiano (ecuación (143)) en la ecuación (148), se obtiene que

$$|R_t(\theta_{sc,tr})|^2 = \frac{1}{16\pi^2 \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cos^2\theta_{sc,tr}} |t(\theta_{sc,tr})|^2, \quad (161)$$

donde

$$\begin{aligned}
 t(\theta_{sc,tr}) = & \int_{\Gamma} \{i[\alpha\eta'(t') + \beta\xi'(t')]\psi(t') - \Upsilon(t')\} \\
 & \times e^{-i\frac{\omega}{c}[\sin\theta_{sc,tr}\xi(t') - \cos\theta_{sc,tr}\eta(t')]} dt' \\
 & - i2\sqrt{\pi}\frac{\omega}{c} \cos\theta_{sc,tr}g_x e^{-\left(\frac{g_x}{2}\frac{\omega}{c}\right)^2(\sin\theta_{sc,tr} - \sin\theta_0)^2},
 \end{aligned} \tag{162}$$

por lo que

$$P_{sc}^{tr} \equiv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} P_t(\theta_{sc,tr}) d\theta_{sc,tr}, \tag{163}$$

donde

$$P_t(\theta_{sc,tr}) = \frac{Lc}{64\pi^2\frac{\omega}{c}} |t(\theta_{sc,tr})|^2. \tag{164}$$

III.6 Conservación de la energía

Una manera de verificar que los cálculos numéricos estén bien ejecutados, es estableciendo un control mediante la conservación de la energía. Para ello es necesario hacer uso de las potencias incidente, esparcida (en reflexión y en transmisión) y absorbida.

El principio de conservación de energía establece que la potencia del haz incidente es igual a la potencia esparcida más la potencia absorbida, o sea

$$P_{inc} = P_{sc} + P_{abs}, \tag{165}$$

donde $P_{sc} = P_{reflejada} + P_{transmitida}$. Dividiendo ambos lados de la ecuación (165) entre P_{inc} se tiene que:

$$1 = \frac{P_{sc}}{P_{inc}} + \frac{P_{abs}}{P_{inc}}. \tag{166}$$

Es decir, si se satisface esta condición se puede asegurar que los cálculos anteriores son efectivos.

III.6.1 Potencia absorbida

En esta sección se estudiará la potencia que es absorbida por el medio material. Para esta situación se trabajará con el marco de referencia local mostrado en la Figura 9, el cual está denotado por las componentes $(\hat{t}, \hat{y}, \hat{n})$. Partiendo de la ecuación (90), se tiene que la potencia absorbida en un punto del j -ésimo cuerpo está dada por

$$\langle \mathbf{S}_{abs,j} \rangle = \frac{c}{8\pi\frac{\omega}{c}} \mathbf{Re} \left\{ i\psi(\mathbf{r}_j) \left[\left(\frac{\partial\psi(\mathbf{r}_j)}{\partial\hat{t}} \right)^* \hat{t} + \left(\frac{\partial\psi(\mathbf{r}_j)}{\partial\hat{n}_j} \right)^* \hat{n}_j \right] \right\}, \quad (167)$$

donde $\psi(\mathbf{r}_j)$ es el campo incidente total evaluado en el punto genérico $\mathbf{r}_j$ del j -ésimo cuerpo y $(\partial\psi(\mathbf{r}_j)/\partial\hat{n}_j)$ es la derivada normal del campo incidente total en el punto $\mathbf{r}_j$.

Así, la potencia absorbida se mide en dirección negativa a la componente normal a la superficie, $\hat{n}_j$, del j -ésimo cuerpo en el punto $\mathbf{r}_j$, de manera que

$$\langle \mathbf{S}_{j,\hat{n}_j} \rangle = \langle \mathbf{S}_j \rangle \cdot (-\hat{n}_j) = -\frac{c}{8\pi\frac{\omega}{c}} \mathbf{Re} \left\{ i\psi(\mathbf{r}_j) \left(\frac{\partial\psi(\mathbf{r}_j)}{\partial\hat{n}_j} \right)^* \right\}, \quad (168)$$

que al integrar sobre el eje y y sobre el perfil completo del j -ésimo cuerpo resulta en

$$\int_{-L/2}^{L/2} \int_{\Gamma_j} \langle \mathbf{S}_{j,\hat{n}_j} \rangle dl_j dy = -\frac{Lc}{8\pi\frac{\omega}{c}} \mathbf{Re} \left\{ i \int_{\Gamma_j} \psi(\mathbf{r}_j) \left(\frac{\partial\psi(\mathbf{r}_j)}{\partial\hat{n}_j} \right)^* dl_j \right\}. \quad (169)$$

Recordando que el elemento diferencial de arco $dS_j = \phi_j(t') dt'$, donde $\phi_j(t') = \sqrt{(\xi'_j(t'))^2 + (\eta'_j(t'))^2}$, se tiene que

$$\frac{\partial\psi}{\partial\hat{n}_j} = \frac{1}{\phi_j(t')} \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{N}_j}, \quad (170)$$

con lo cual la ecuación (169) resulta en

$$\int_{\Gamma_j} \langle \mathbf{S}_{j,\hat{n}_j} \rangle dl_j = -\frac{Lc}{8\pi\frac{\omega}{c}} \mathbf{Re} \left\{ i \int_{\Gamma_j} \psi(t') \Upsilon^*(t') dt' \right\}, \quad (171)$$

es decir, la potencia absorbida por el j -ésimo cuerpo está solamente en función de las funciones fuente y sus derivadas en cada punto del perfil. Finalmente, la potencia total

absorbida es simplemente la suma de las potencias absorbidas por cada uno de los M cuerpos, es decir

$$P_{abs} = \sum_{j=1}^M \left\{ -\frac{Lc}{8\pi\frac{\omega}{c}} \mathbf{Re} \left[i \int_{\Gamma_j} \psi(t') \Upsilon^*(t') dt' \right] \right\}. \quad (172)$$

III.6.2 Onda Plana

Para el caso en que el campo incidente es una onda plana se hace uso de la ecuación (120) para la potencia incidente, las ecuaciones (153) y (159) para la potencia esparcida, y la ecuación (172) para la potencia absorbida, de modo que

$$\frac{P_{sc}}{P_{inc}} = \frac{P_{ref} + P_{tr}}{P_{inc}} = \frac{\cos \theta_0}{8\pi\frac{\omega}{c}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [|r(\theta)|^2 + |t(\theta)|^2] d\theta, \quad (173)$$

donde los términos $r(\theta)$ y $t(\theta)$ están dados por las ecuaciones (152) y (158) respectivamente, y

$$\frac{P_{abs}}{P_{inc}} = -\frac{\cos \theta_0}{\frac{\omega}{c}} \sum_{j=1}^N \left\{ \mathbf{Re} \left[i \int_{\Gamma_j} \psi(t') \Upsilon^*(t') dt' \right] \right\}. \quad (174)$$

III.6.3 Haz Gaussiano

Para el caso en que el campo incidente es un haz Gaussiano se debe usar la ecuación (115) para la potencia incidente, las ecuaciones (153) y (163) para la potencia esparcida, y la ecuación (172) para la potencia absorbida, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{P_{sc}}{P_{inc}} = \frac{P_{ref} + P_{tr}}{P_{inc}} &= \frac{1}{2(2\pi)^{3/2} g_x \frac{\omega}{c}} \left[1 - \left(\frac{\sin^2 \theta_0}{2} + \frac{1}{2g_x^2 k^2} \right) \right]^{-1} \\ &\times \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [|r(\theta)|^2 + |t(\theta)|^2] d\theta, \end{aligned} \quad (175)$$

donde los términos $r(\theta)$ y $t(\theta)$ están dados por las ecuaciones (152) y (162) respectivamente, y

$$\frac{P_{abs}}{P_{inc}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{g_x \frac{\omega}{c}} \sum_{j=1}^N \left\{ \mathbf{Re} \left[i \int_{\Gamma_j} \psi(t') \Upsilon^*(t') dt' \right] \right\}. \quad (176)$$

Capítulo IV

MÉTODO NUMÉRICO PARA LA RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA ELECTROMAGNÉTICO

En los capítulos anteriores se estudió el marco teórico para el diseño de las lentes de nano-rendijas y para la determinación de la distribución de intensidades del campo esparcido por muchos cuerpos metálicos a partir del método integral. Lo que resta por hacer es la descripción del método numérico utilizado para resolver el problema electromagnético en cuestión.

En este capítulo se describe la creación de un *laboratorio virtual* para generar mapas de intensidad del campo transmitido por las lentes a partir de un programa computacional. Mediante este método numérico se da solución al par de ecuaciones integrales acopladas (84) y (85).

La serie de pasos a seguir para realizar las simulaciones numéricas se enlista a continuación:

1. *Diseño de las lentes de nano-rendijas.* Se diseñan los arreglos de nano-rendijas para enfocar la luz en un punto determinado.
2. *Generación paramétrica del perfil.* Se generan mediante una representación paramétrica, los bloques metálicos que definen la lente de nano-rendijas. Las dimensiones estarán en μm .
3. *Evaluación del campo incidente en la frontera.* Se evalúa el campo incidente en

cada uno de los puntos que definen el perfil.

4. *Generación de la matriz.* Se evalúan los elementos de matriz definidos por las ecuaciones (84) y (85).
5. *Solución de la ecuación matricial.* Se resuelve el sistema mediante la descomposición LU y se determinan los valores de las funciones fuente y sus derivadas en el perfil. La descomposición LU (Lower-Upper) es una forma de factorizar una matriz a mediante el producto de una matriz triangular inferior con una superior.
6. *Cálculo de los mapas de intensidad.* Se calcula la intensidad esparcida en campo cercano a la salida del arreglo de nano-rendijas para visualizar el enfocamiento del haz.
7. *Balance de energía y eficiencia de transmisión.* Se calcula la potencia esparcida en campo lejano y se determina la conservación de la energía. Posteriormente se determina la eficiencia de transmisión de las lentes de nano-rendijas en cuestión.

El diseño de las lentes de nano-rendijas se ha elaborado con ayuda del software Mathematica, mientras que el método numérico para la resolución del problema electromagnético fue realizado en el lenguaje de programación Fortran 90, a partir del cual se obtienen los datos de las intensidades en diversos puntos para generar los mapas de intensidad mediante el software Matlab.

A continuación se hace una descripción más detallada de los pasos anteriormente enumerados.

IV.1 Diseño de las lentes de nano-rendijas

Como se estudió en el Capítulo II, el diseño de las lentes de nano-rendijas depende de los siguientes factores:

- Longitud de onda de la luz incidente (λ).
- Propiedades del material conductor: Permitividad eléctrica del metal con el que se construyen las rendijas $\varepsilon_m(\omega)$. Se suponen medios sin propiedades magnéticas, de manera que $\mu = 1$.
- Propiedades del material dieléctrico: Constante dieléctrica del material que rodea a la guía de onda plasmónica (ε_d). En este caso, se considera el vacío ($\varepsilon_d = 1$).
- Tipo de iluminación: onda plana o haz Gaussiano.
- Ángulo de incidencia del frente de onda: ángulo θ_0 que forma el vector de onda del campo incidente respecto a la normal al sistema (eje z).
- Longitud de las nano-rendijas: En este caso se toman todas de longitud l .
- Distancia focal f : distancia a la cual se desea enfocar el frente de onda transmitido por las lentes.
- Posición de las rendijas: distancia x medida a partir del centro del arreglo al centro de cada una de las nano-rendijas.
- Ancho de cada nano-rendija: ancho, d , que debe tener cada rendija para que la luz propagada por ellas tenga la distribución de fase ϕ deseada para enfocar a la distancia f .

Es de notar que cada una de las variables anteriores están presentes en la ecuación (48). En esta misma expresión existe implícitamente un factor m que acompaña al factor de fase 2π (ver ecuación (47)), el cual es un número entero que debe ser modificado al determinar el ancho de cada rendija; por ejemplo, si al calcular el ancho de la tercera rendija el resultado es negativo, el factor m debe incrementar su valor en una unidad. Si este factor es muy grande, al ancho de la rendija disminuye. Es por ello que el proceso para determinar los anchos de las rendijas es difícil de automatizar. Debe realizarse con detenimiento y el resultado es al gusto del diseñador.

Tomando en cuenta que el procedimiento de fabricación de las lentes se realiza al generar ranuras sobre una película delgada, la cual se considera de espesor constante, para el diseño basta crear bloques metálicos de largo constante y ancho variable. La separación entre estos bloques metálicos determina el ancho las guías de onda plasmónicas. Por ejemplo, suponiendo que los bloques metálicos tienen ancho a_i , la distancia x del centro del sistema a la tercera rendija estará dada por la suma $x = d_1/2 + a_1 + d_2 + a_2$, como se ilustra en la Figura 13.

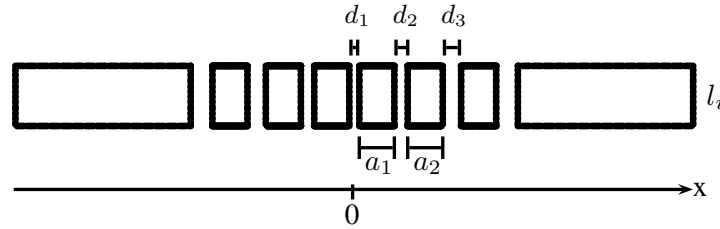


Figura 13. Esquema para determinar el ancho de cada nano-rendija.

Para finalizar, hay que destacar que el sistema se considera “infinito” a lo largo del eje x , por lo que el primer y último bloque metálicos que definen el arreglo de

nano-rendijas, son considerablemente más largos que los otros¹.

Es decir, para el diseño es necesario generar los largos l_i y anchos a_i de cada uno de los bloques metálicos, así como las separaciones d_i que determinan los anchos de las guías de onda plasmónicas. Estos datos son necesarios para discretizar y definir el perfil que define la geometría. Posteriormente se resuelve el problema electromagnético para obtener los mapas de intensidad.

IV.2 Generación paramétrica del perfil

Para resolver el problema electromagnético mediante el método integral se debe describir el perfil de los cuerpos metálicos en términos de un parámetro t . Es decir, una vez que se han establecido la forma y las dimensiones de cada uno de los bloques metálicos que conforman la lente de nano-rendijas, se tienen que especificar un par de funciones que describan la trayectoria de una curva Γ que defina el perfil; de manera discreta, el perfil se especifica por medio de una sucesión de puntos.

Como ya se explicó, el arreglo de nano-rendijas se construye mediante una serie de bloques metálicos rectangulares como el mostrado en la Figura 14. El ancho del i -ésimo bloque, a_i , está relacionado con el número de puntos $n_{i,x}$ y el intervalo de muestreo dx , de la siguiente manera

$$a_i = n_{i,x} * dx, \quad (177)$$

donde $n_{i,x}$ y a_i son, respectivamente, el número de puntos y el ancho del i -ésimo bloque metálico, y dx es la separación entre los puntos del bloque.

¹Después de realizar algunas pruebas se estableció que, para los parámetros usados en los cálculos, basta con que la longitud de estos bloques metálicos sea del orden de 40 veces la longitud de onda del campo incidente.

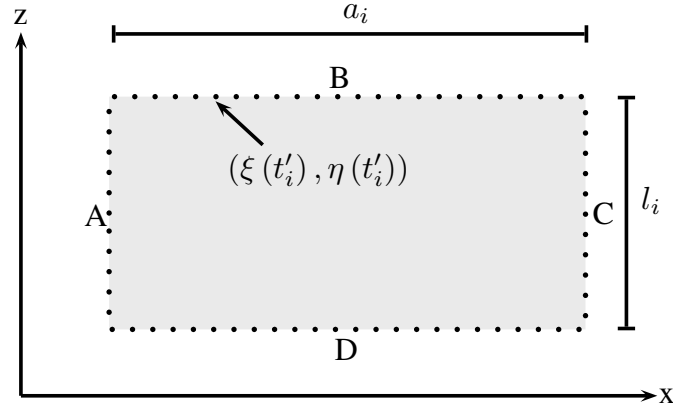


Figura 14. Esquema de un rectángulo discretizado.

De manera análoga, para las líneas verticales de los bloques metálicos se tiene la relación

$$l_i = n_{i,z} * dz, \quad (178)$$

donde l_i es el largo del i -ésimo bloque metálico, $n_{i,z}$ el número de puntos y dz la separación entre los puntos. Hay que recalcar que el espesor del bloque metálico debe ser tal que no permita que la luz pase a través del material.

Para obtener variaciones suaves del campo y su derivada normal en la superficie de los bloques metálicos, la separación entre los puntos de muestreo debe ser mucho menor que la longitud de onda del campo incidente. Esto provoca que el número de puntos de muestreo se daba considerar grande y, por ende, el tiempo de cómputo. Para el diseño de las lentes se ha tomado como unidad fundamental la longitud de onda. Si bien esta decisión permite acotar el tamaño del sistema, se sacrifica la posibilidad de realizar comparaciones más eficientes entre las lentes diseñadas.

La generación paramétrica de un rectángulo es simple, sólo hay que condicionar los valores de las coordenadas del perfil $(\xi(t), \eta(t))$ de manera que una variable se

mantenga constante mientras la otra cambia y viceversa. Para ejemplificar lo anterior se propone un rectángulo de ancho a_i y altura l_i , cuyos lados serán construidos en el sentido de las manecillas del reloj (Figura 14) como sigue:

- i)* Se crea el lado A del rectángulo que tiene por longitud el valor l_i , de manera que las coordenadas parametrizadas quedan como $(\xi(t), \eta(t)) = (x_i, t)$ para $t \in (0, l_i)$, con x_i la posición del primer lado del rectángulo sobre el eje x . El número de puntos o valores en el intervalo que abarca el parámetro t está definido mediante la ecuación (178).
- ii)* Posteriormente se generan los puntos que definen el lado B del rectángulo que tiene por longitud a_i , de manera que las coordenadas parametrizadas quedan como $(\xi(t), \eta(t)) = (t, z_i)$ para $t \in (x_i, x_i + a_i)$, con $z_i = l_i$, que es la longitud de la rendija o el espesor de la película delgada metálica sobre el eje z . El número de puntos o valores en el intervalo que abarca el parámetro t está definido mediante la ecuación (177).
- iii)* Después se crea el lado C del rectángulo de longitud l_i , el cual tiene las coordenadas paramétricas $(\xi(t), \eta(t)) = (x_i + a_i, t)$ para $t \in (l_i, 0)$. El número de puntos o valores en el intervalo que abarca el parámetro t está definido nuevamente mediante la ecuación (178).
- iv)* Finalmente se crea el lado D del rectángulo de longitud a_i con $(\xi(t), \eta(t)) = (t, z_i)$ para $t \in (x_i + a_i, x_i)$ con $z_i = 0$. El número de puntos o valores en el intervalo que abarca el parámetro t se define con la relación (177).

Este proceso se generaliza para los M rectángulos que definen el perfil de la lente de nano-rendijas. También en esta sección del programa se definen las derivadas y segundas

derivadas respecto a la normal, de las coordenadas $(\xi(t), \eta(t))$. La componente normal a cada punto debe apuntar hacia afuera del cuerpo metálico, por ello se debe definir si el rectángulo se construye en sentido de las manecillas del reloj o en sentido opuesto.

A partir de lo anterior, se han generado un total de N_T puntos que describen el perfil de la lente, siendo $N_T = M \cdot (2n_{i,x} + 2n_{i,z})$ con M el número de bloques metálicos del arreglo.

Una vez discretizado y parametrizado el perfil, se debe determinar el valor del campo incidente en cada uno de estos puntos, es decir, determinar el valor de $\psi_m^{inc}(t_{i,m})$ de la ecuación (84). Para ello es necesario elegir el tipo de iluminación (onda plana o haz Gaussiano, polarización, ángulo de incidencia) y evaluarlo sobre las coordenadas $(\xi(t), \eta(t))$ que definen los perfiles superficiales.

IV.3 Generación de los elementos matriciales

La solución numérica del problema electromagnético mediante el método integral, implica un proceso de discretización para convertir las ecuaciones integrales acopladas en una ecuación matricial. Para ello, las ecuaciones (84) y (85) deben ser manipuladas de manera que se pueda plantear un arreglo matricial de la forma

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_{j,n} \\ \boldsymbol{\Upsilon}_{j,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}^{inc}(t_{i,m}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (179)$$

Para esto, es necesario hacer algunos ajustes al sistema original de ecuaciones integrales acopladas. Es conveniente recomponer las ecuaciones haciendo uso de una delta de Kronecker como

$$\psi^{inc}(t_{i,m}) = \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j} [(\delta_{mn} - H_{mn}^I) \psi_{j,n} - L_{mn}^I \Upsilon_{j,n}], \quad (180)$$

$$0 = \sum_{j=1}^M \sum_{n=1}^{N_j} \left[H_{mn}^{II} \psi_{j,n} - \frac{\nu_{II}}{\nu_I} L_{mn}^{II} \Upsilon_{j,n} \right] \delta_{ij}, \quad (181)$$

con

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{para } m = n, \\ 0 & \text{para } m \neq n, \end{cases} \quad (182)$$

donde $j \in [1, \dots, M]$, $i \in [1, \dots, N_T]$, $n \in [1, \dots, N_j]$ y $m \in [1, \dots, M]$. Con esto se tiene un sistema de ecuaciones que pueden ser resueltos de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \Upsilon_1 \\ \psi_2 \\ \Upsilon_2 \\ \vdots \\ \psi_M \\ \Upsilon_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1^{inc} \\ \mathbf{0} \\ \psi_2^{inc} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \psi_M^{inc} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (183)$$

donde

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \delta_{1,1} - H_{1,1}^I & -L_{1,1}^I & -H_{1,2}^I & -L_{1,2}^I & \cdots & -H_{1,M}^I & -L_{1,M}^I \\ H_{1,1}^{II} & -\frac{\nu_{II}}{\nu_I} L_{1,1}^{II} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -H_{2,1}^I & -L_{2,1}^I & \delta_{2,2} - H_{2,2}^I & -L_{2,2}^I & \cdots & -H_{2,M}^I & -L_{2,M}^I \\ 0 & 0 & H_{2,2}^{II} & -\frac{\nu_{II}}{\nu_I} L_{2,2}^{II} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -H_{M,1}^I & -L_{M,1}^I & -H_{M,2}^I & -L_{M,2}^I & \cdots & \delta_{M,M} - H_{M,M}^I & -L_{M,M}^I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & H_{M,M}^{II} & -\frac{\nu_{II}}{\nu_I} L_{M,M}^{II} \end{bmatrix}. \quad (184)$$

Cabe destacar que las dimensiones de cada sub-matriz H_{mn}^I , L_{mn}^I , H_{mn}^{II} y L_{mn}^{II} , depende de la cantidad de puntos de cada uno de los bloques metálicos. Por ejemplo, la matriz $H_{1,2}^I$ tiene una dimensión $N_1 \times N_2$, donde N_1 es el número de puntos del bloque metálico 1 y N_2 es el número de puntos del bloque metálico 2. De esta manera la dimensión total de la matriz $\widetilde{\mathbf{M}}$ es de $2N_T \times 2N_T$, donde $N_T = \sum_{j=1}^M N_j$, es el número de puntos totales que definen el perfil de la lente. Similarmente, las dimensiones de

cada vector $\boldsymbol{\psi}_m$ e $\boldsymbol{\Upsilon}_m$ tiene la dimensión del número de puntos del m -ésimo bloque metálico. Lo mismo ocurre para cada elemento vectorial $\boldsymbol{\psi}_m^{inc}$.

IV.4 Solución de la ecuación matricial

Una vez que se generan los elementos de la matriz $\widetilde{\mathbf{M}}$ y ya determinado el campo incidente en cada uno de los puntos del perfil ($\psi^{inc}(t_{i,m})$), se debe resolver el sistema para poder obtener el valor de las funciones fuentes ψ_m y sus derivadas respecto a la normal $\boldsymbol{\Upsilon}_m$ en cada uno de los puntos del perfil.

Los valores obtenidos corresponden a las funciones fuentes necesarias para poder calcular el campo esparcido por el arreglo de nano-rendijas en un punto de observación arbitrario. Es decir, con esto se puede dar solución a la ecuación (86).

IV.5 La intensidad en el campo cercano

Para determinar numéricamente la intensidad del campo esparcido por el perfil en un punto arbitrario $\mathbf{r} = (x, z)$ del campo cercano, se debe resolver la ecuación (86) de manera discreta, es decir

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi^{inc}(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{N_T} \left[G^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Upsilon_n - \psi_n \frac{\partial G^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{N}} \right] \Delta t', \quad (185)$$

donde $G^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ y $\frac{\partial G^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{N}}$ están dadas como (Abramowitz y Stegun, 1970)

$$G^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (186)$$

y

$$\frac{\partial G^I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{N}} = i\pi \frac{H_1^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}, \quad (187)$$

donde $\mathbf{r}' = (\xi(t'), \eta(t'))$ corre sobre las coordenadas de los perfiles que definen a la lente.

Para generar los mapas de intensidad en el campo cercano, se genera una malla de puntos equidistantes en los que se deben calcular los campos incidente y esparcido en la región de interés. El programa determinará entonces las contribuciones de cada punto del perfil y las del campo incidente al punto de observación deseado.

IV.5.1 Intensidad en campo cercano

Para el caso de una onda con polarización TE (polarización s), de acuerdo con la definición de la ecuación (51) la intensidad es simplemente $I = |\psi_s(x, z) \hat{y}|^2$, ya que en este caso el campo está definido por la componente $\hat{y}$ del campo $\mathbf{E}$. Sin embargo, para el caso de una onda con polarización TM (polarización p), definida por la componente $\hat{y}$ del campo $\mathbf{H}$ (ecuación (52)), hay que recurrir a la ley de Ampere de las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre en ausencia de cargas, a partir de la cual se encuentra, para un sistema invariante en la dirección $\hat{y}$, que

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\varepsilon(\omega) \left(\frac{\omega}{c}\right)} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{i}{\varepsilon(\omega) \left(\frac{\omega}{c}\right)} \left[-\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, \mathbf{z})}{\partial x} \hat{z} \right]. \quad (188)$$

De esta manera, la intensidad total, incidente y esparcida, en el punto de observación está dada por

$$I = \begin{cases} |\psi(\mathbf{r})|^2 & \text{para modo } s, \\ \frac{1}{|\varepsilon(\omega) \frac{\omega}{c}|^2} \left(\left| \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial z} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial x} \right|^2 \right) & \text{para modo } p. \end{cases} \quad (189)$$

Una vez determinado el campo eléctrico esparcido en el punto de observación, se calcula el módulo cuadrado de dicho valor, el cual es proporcional al valor de la intensidad del campo esparcido en el punto de observación $\mathbf{r}$.

Para cuestiones demostrativas, el mapa generado incluye una región que corresponde al campo incidente para visualizar la manera en que es alterado el mapa de intensidad que se transmite por la lente diseñada.

El método permite también visualizar la intensidad dentro del metal, pero, para facilitar la visualización de los mapas en la región del foco, no se incluyen estos datos.

IV.6 Conservación de la energía y eficiencia de transmisión

Para estimar la eficiencia de transmisión de las lentes de nano-rendijas, se debe determinar la potencia transmitida en el campo lejano, lo cual permite también establecer un parámetro de control para verificar si el cálculo numérico conserva energía. Para ello es necesario calcular la potencia esparcida, en reflexión y transmisión en el campo lejano, así como la potencia incidente y la potencia absorbida. La teoría correspondiente se ha presentado en la sección III.6. Si la suma de las potencias de los campos reflejado y transmitido, más la potencia absorbida por el sistema es igual a la potencia incidente, entonces la energía se conserva. Este parámetro es usado como una indicación de la confiabilidad de los cálculos.

Así, para determinar la eficiencia de transmisión de la lente, basta con dividir la potencia transmitida en el campo lejano entre la potencia del haz incidente.

IV.7 Limitantes del método numérico

Hasta ahora no se ha hablado de las limitantes que presenta el método numérico implementado. Si bien el método integral es riguroso y exacto, el cálculo numérico no lo es,

pues depende de la discretización y la representación numérica de funciones que pueden adquirir valores muy grandes y muy pequeños. Si se hace un muestreo muy fino del perfil (hasta un límite que se discute más abajo), se puede tener una mayor precisión en los resultados obtenidos. Sin embargo, esto incrementa el tiempo de cómputo².

También hay que tomar en cuenta que si los puntos de observación y de muestreo son muy cercanos entre sí, el factor $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ que aparece en la función de Hankel y en el denominador tiende a ser muy cercano a cero, lo cual hace que el integrando se acerque a una singularidad. Debido a las dificultades para representar este integrando numéricamente, los resultados no son confiables en ese límite.

Otro problema potencial en la evaluación del campo cercano, es que el punto de observación no puede estar demasiado cerca del perfil, ya que nuevamente se generan indeterminaciones propias del cálculo numérico. Al realizar los experimentos numéricos se encontró que, dependiendo de la longitud de onda con que se trabaje, el punto de observación debe estar alejado al menos una distancia de 50 nm, lo cual dificulta la generación de los mapas de intensidad de la luz que se propaga en las nano-rendijas, mismas que en su mayoría tienen un ancho menor a 40 nm. Para solucionar este problema se puede calcular el valor del campo en los puntos del perfil. La evaluación del campo en este límite se presenta en el Apéndice B.

²Las computadoras usadas fueron dos: una con procesador de doble núcleo a 2.0 GHz cada uno con memoria RAM de 3 GB, y la segunda de cuatro núcleos cada uno con una velocidad de procesamiento de 2.1 GHz con 4 GB de memoria RAM. El tiempo de cómputo aproximado para generar un mapa de intensidad con una resolución de 800×800 píxeles, y un muestreo del perfil de 10,000, es aproximadamente de 1 hora.

Capítulo V

RESULTADOS

En este capítulo se muestran y analizan algunos resultados obtenidos mediante la implementación del laboratorio virtual, ilustrando con gráficas y mapas de intensidad el campo transmitido por las lentes de nano-rendijas diseñadas.

En primer lugar se hacen comparaciones entre los modos de polarización s y p , y entre los tipos de iluminación sobre las nano-rendijas, mostrando sus respectivos mapas de intensidad.

Después se muestran los diseños de las lentes de nano-rendijas, mostrando gráficas de la variación del ancho de cada rendija en función de su posición a lo largo de la película delgada donde serán practicadas.

Posteriormente se mostrarán mapas de intensidad de tres lentes de plata diseñadas para enfocar a la misma distancia focal, con el mismo número de rendijas, pero variando el espesor de la película delgada. Luego, se mostrará la eficiencia de transmisión¹ de la película delgada al considerar guías de onda del mismo espesor, de manera que pueda ser analizada la eficiencia de transmisión de las lentes diseñadas en función del número de rendijas practicadas sobre la película para tres tipos de materiales (oro, plata y cobre) y para tres longitudes de onda (650 nm, 520 nm y 410 nm), enfocando a la misma distancia. También se estudiará la eficiencia de transmisión en función de la distancia focal para las tres longitudes de onda antes señaladas con un solo material.

¹La eficiencia de transmisión se ha definido como la fracción de la potencia del campo incidente que se transmite después de la lente de nano-rendijas.

Luego, se mostrarán mapas de intensidad para algunas de las lentes diseñadas, mostrando para cada una de ellas la función de punto extendido (respuesta de un sistema formador de imágenes a una fuente puntual), la distribución de intensidad a lo largo del eje óptico y la energía encerrada por una abertura (medida de la concentración de la energía de una imagen en un rango determinado), los cuales son parámetros usados en la caracterización de las lentes convencionales. Después se variará el ángulo de incidencia del haz de luz para observar cómo se altera la posición del foco de la lente.

Con todos estos resultados se espera que el lector tenga un panorama general del funcionamiento de las lentes de nano-rendijas al variar diferentes parámetros asociados en su diseño.

V.1 Selección del frente de onda y polarización del haz incidente

En el Capítulo II se mostró que la luz puede ser transmitida por guías de onda plasmónicas siempre y cuando la luz incidente tenga polarización p . Para ilustrarlo, en la Figura 15 se muestran dos mapas de intensidad, el primero que corresponde a un haz Gaussiano con polarización s y el segundo a polarización p . El haz, con una cintura de $3\ \mu\text{m}$ y $\lambda = 650\ \text{nm}$, incide perpendicularmente sobre una rendija de plata de ancho $d = 50\ \text{nm}$ y largo $l = 650\ \text{nm}$.

En la Figura 15 se observa que cuando la luz incide con polarización s , ésta no es transmitida más allá de la película; sin embargo, cuando incide con polarización p se puede observar la propagación de una porción del haz incidente. Es decir, si el ancho de la rendija es mucho menor que la longitud de onda (en este caso el ancho es menor a

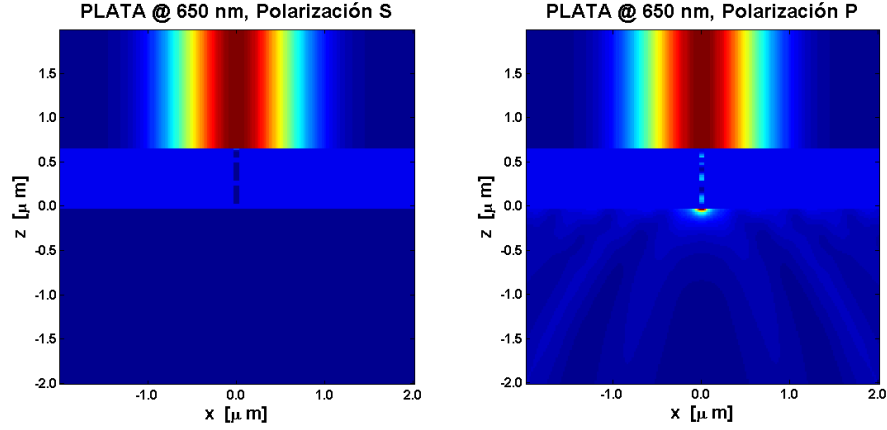


Figura 15. Propagación de un haz de luz Gaussiano con polarización s (izquierda) y con polarización p (derecha) para una guía de onda plasmónica de ancho $d = 50nm$. y largo $l = 650nm$.

10 veces la longitud de onda), se tiene la propagación del modo cero para polarización p a lo largo de la rendija.

Por otra parte, como se estudió en el Capítulo III, la intensidad del campo transmitido depende también del tipo de iluminación. Este aspecto es fundamental para hacer un cálculo realista de los mapas de intensidad. Debido a que la longitud de la película delgada es finita (los bloques metálicos de los extremos tienen una longitud de 40λ) la onda plana puede difractarse y excitar plasmones de superficie en los extremos. Esto no ocurre con un frente de onda Gaussiano, cuya intensidad es muy pequeña en los extremos de la muestra. La Figura 16 ilustra los casos anteriores, donde se observa la excitación de plasmones de superficie en los extremos para el mapa que corresponde a la iluminación con un frente de onda plano, mientras que para un haz Gaussiano no se tiene tal situación. Ambos tipos de iluminación tienen polarización p , $\lambda = 650\text{ nm}$ e inciden sobre una película de plata de 650 nm de espesor con una rendija de 50 nm de

ancho.

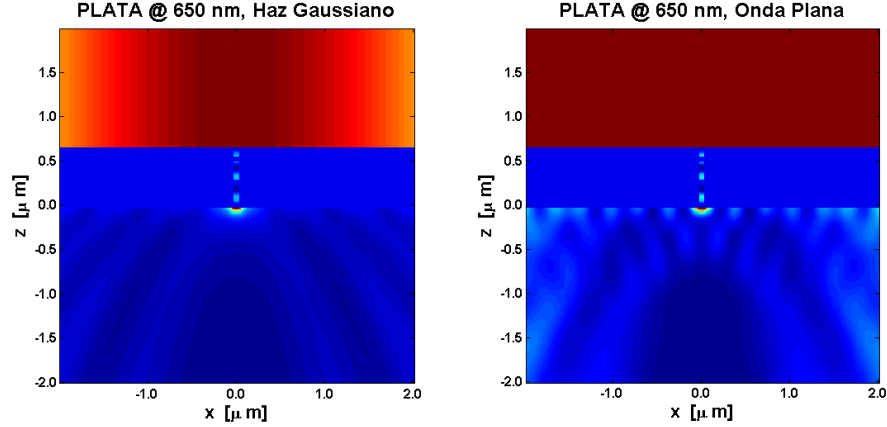


Figura 16. Propagación de un frente de onda plano y de un haz Gaussiano con polarización p .

Para evitar este problema, a partir de este momento se hará uso de iluminación por un haz Gaussiano, teniendo cuidado de que su cintura sea menor a la longitud de la película delgada pero que cubra todas las nano-rendijas. Todas las lentes diseñadas tienen una longitud menor a $4 \mu\text{m}$, por lo que el ancho del haz se ha tomado con un valor igual a $5 \mu\text{m}$, el cual siempre es menor a la longitud total de la película delgada que siempre es mayor a $20 \mu\text{m}$.

V.2 Diseño de las lentes de nano-rendijas

Tal como fue estudiado en el Capítulo II, el ancho de cada rendija debe ser determinado en función de la distancia focal y su posición a lo largo de la película delgada. Haciendo uso de la ecuación (48) se puede determinar el ancho que debe tener cada rendija, los cuales se han elegido siempre menores a 100 nm para evitar la posible propagación de

modos adicionales al modo cero.

Un ejemplo de lo anterior se muestra en la Figura 17, donde se grafican las distribuciones de los anchos d_i de cada nano-rendija, en función de su posición desde el centro del sistema, para enfocar la luz de 800 nm a la salida del arreglo. Los puntos rojos corresponden a $\lambda = 650$ nm, los verdes a $\lambda = 520$ nm y los azules a $\lambda = 410$ nm. De manera análoga, las Figuras 18 y 19 muestran la misma distribución para oro y cobre, enfocando también a $f = 0.8 \mu\text{m}$. En los diseños anteriores se ha tomado un espesor de la película delgada igual a media longitud de onda del haz incidente ($\lambda/2$) y un ancho de los bloques metálicos de $\lambda/5$, la cual siempre es mayor a la profundidad de piel de cada material.

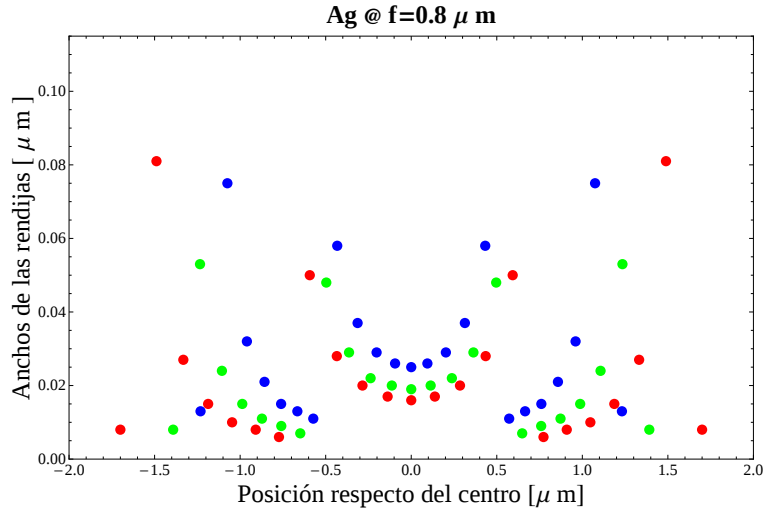


Figura 17. Distribución de anchos de las rendijas una lente de plata con distancia focal $f = 0.8 \mu\text{m}$ para tres longitudes de onda: 650 nm (puntos rojos), 520 nm (puntos verdes) y 410 nm (puntos azules).

En las gráficas de las Figuras 17, 18 y 19 se puede observar que el ancho de las guías aumenta a medida que se alejan del centro del arreglo y, llegando a una determinada posición, se vuelve a reducir dicho valor. Esto es debido al factor m que aparece en la ecuación (48), el cual debe incrementarse en una unidad cuando se desee reducir el

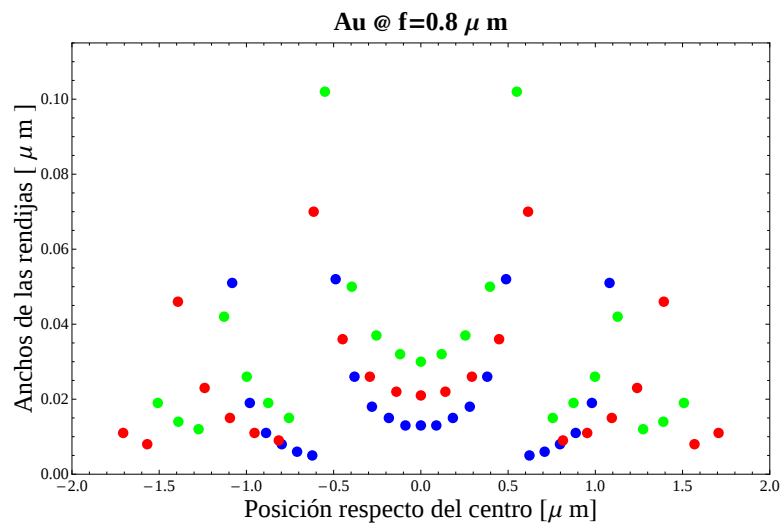


Figura 18. Distribución de anchos de las rendijas una lente de oro con distancia focal $f = 0.8 \mu\text{m}$ para tres longitudes de onda: 650 nm (puntos rojos), 520 nm (puntos verdes) y 410 nm (puntos azules).

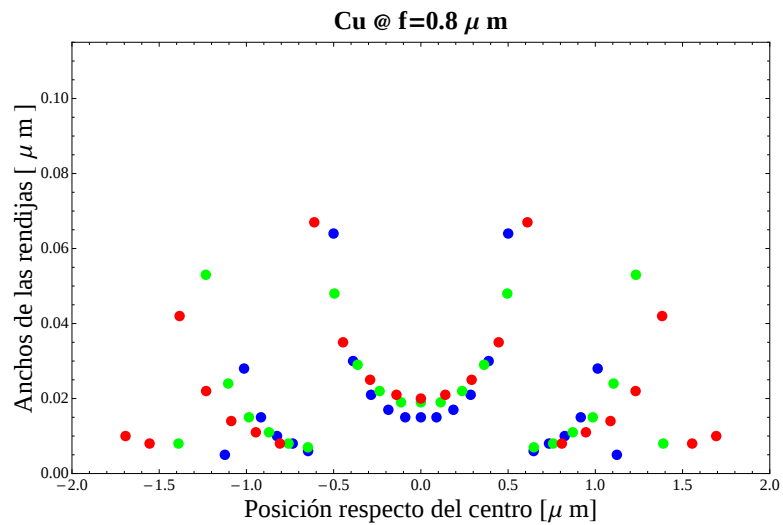


Figura 19. Distribución de anchos de las rendijas una lente de cobre con distancia focal $f = 0.8 \mu\text{m}$ para tres longitudes de onda: 650 nm (puntos rojos), 520 nm (puntos verdes) y 410 nm (puntos azules).

ancho de las rendijas.

V.3 Variación del espesor de las lentes de nano-rendijas

Una variable que interviene en la ecuación (48) es el largo l de los bloques metálicos. A continuación, se presentan tres mapas de intensidad correspondientes a lentes diseñadas con plata para una longitud de onda del haz incidente de 650 nm. Esto con el fin de visualizar la importancia de este parámetro. En los tres casos, se consideran 17 rendijas separadas entre sí por una distancia de $\lambda/5 = 130$ nm, las cuales fueron calculadas para enfocar a una distancia de $1.5 \mu\text{m}$. El haz, a incidencia normal, es Gaussiano con una cintura de $5 \mu\text{m}$. La Figura 20 corresponde a un largo de los bloques $l = 650$ nm (λ), la Figura 21 a $l = 325$ nm ($\lambda/2$) y la Figura 22 a $l = 162.5$ nm ($\lambda/4$). Como puede observarse, al disminuir el largo de los bloques, la lente deja de funcionar como tal e incluso deja de transmitir. Este problema puede reducirse al aumentar el número de rendijas, pero esto también disminuye la eficiencia de transmisión de las lentes, como será constatado en la siguiente sección. Es decir, si se disminuye el espesor de la película delgada metálica, se debe entonces aumentar el número de rendijas para que el haz se enfoque en el punto deseado.

V.4 Eficiencia de transmisión

Una de las principales características del programa numérico realizado, es que permite estimar la eficiencia de transmisión de las lentes de nano-rendijas. Es por ello que a continuación se muestran algunos resultados relativos a este parámetro.

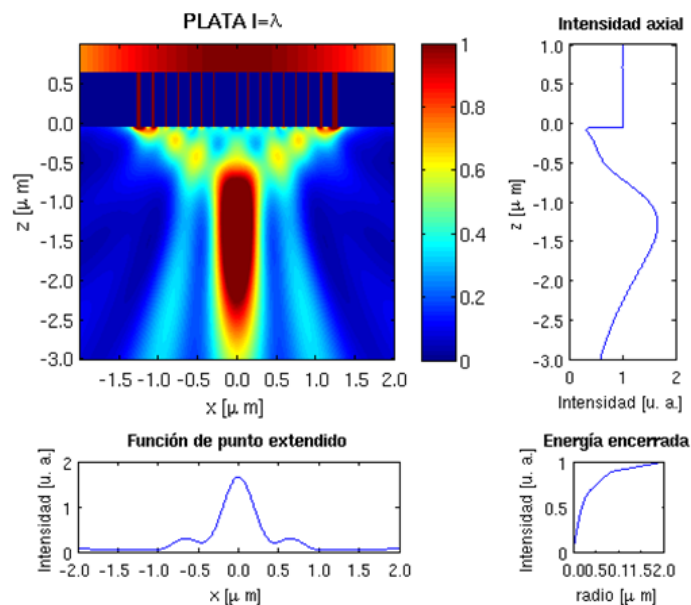


Figura 20. Mapa de intensidades de una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 650 nm, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 20.76%.

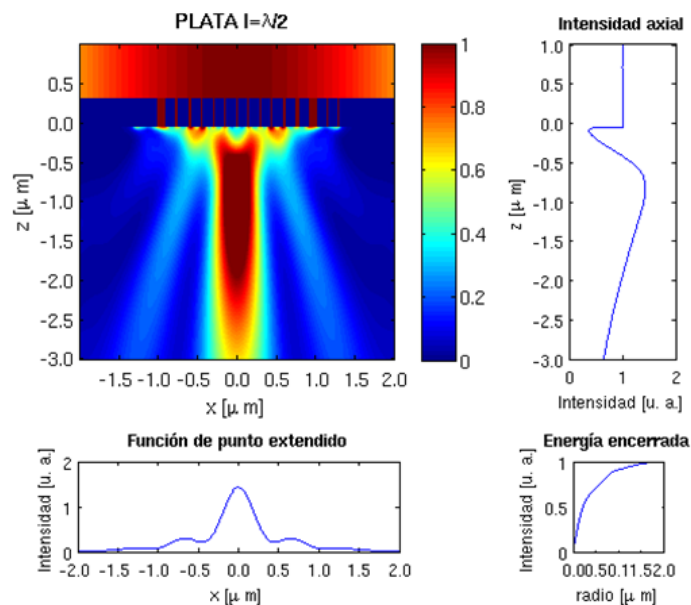


Figura 21. Mapa de intensidades de una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 325 nm, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 21.45%.

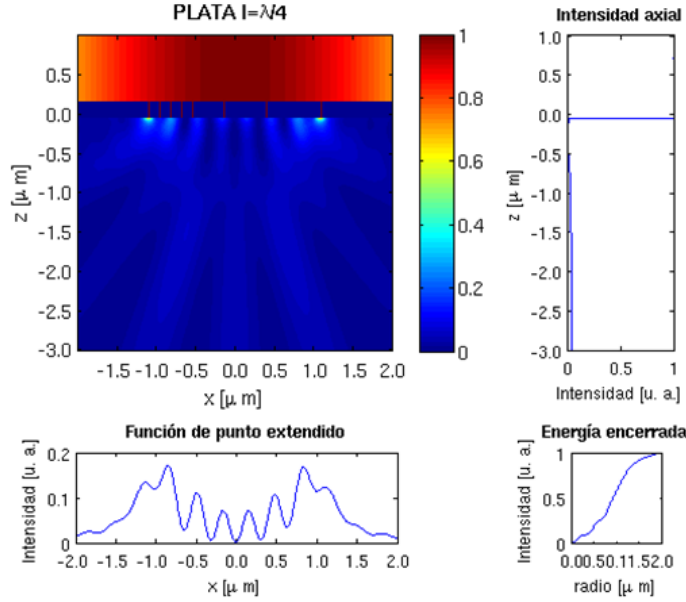


Figura 22. Mapa de intensidades de una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 162.5 nm, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 2.33%.

V.4.1 Eficiencia de transmisión en función del número de rendijas

Un resultado que es conveniente analizar, es la eficiencia de transmisión de las lentes en función del número de rendijas practicadas en la película delgada metálica. Intuitivamente, se podría esperar que al aumentar el número de rendijas la cantidad de luz transmitida fuera mayor. Sin embargo hay que recordar que la absorción del campo aumenta al disminuir el ancho de las rendijas por lo que al incrementar el número de rendijas existen mayores pérdidas en el campo transmitido. Esto se puede observar en las gráficas de las Figuras 23, 24 y 25, las cuales muestran la eficiencia de transmisión de las lentes en función del número de rendijas, para lentes de plata, oro y cobre, respectivamente, enfocando a $f = 0.8 \mu\text{m}$ para $\lambda = 650 \text{ nm}$, $\lambda = 520 \text{ nm}$ y $\lambda = 410 \text{ nm}$.

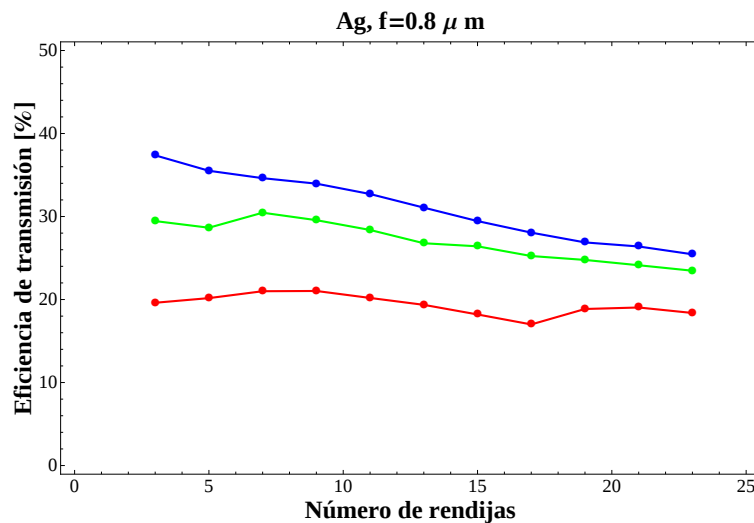


Figura 23. Eficiencia de transmisión en función del número de rendijas para una lente de plata para 650 nm (línea roja), 520 nm (línea verde), y 410 nm (línea azul).

En la Figura 23, se observa que para una lente de plata, con un espesor de $\lambda/2$, la eficiencia de transmisión es mayor para $\lambda = 410 \text{ nm}$ y menor para $\lambda = 650 \text{ nm}$. Sin embargo, el decremento en la eficiencia es mayor para la longitud de onda correspondiente al azul; es decir, la eficiencia de las lentes decrece más rápido al incrementar el número de rendijas para longitudes de onda cercanas al UV, que para longitudes de onda cercanas al IR. También se observa que para longitudes de onda grandes, la eficiencia de transmisión en función del número de rendijas parece no variar mucho, en este caso oscila alrededor del 20%.

Para el caso de una lente de nano-rendijas de oro con un espesor de $\lambda/2$ (Figura 24), nuevamente se encuentra que la eficiencia de transmisión es más estable para longitudes de onda cercanas al IR que para las cercanas al UV (la eficiencia en $\lambda = 650 \text{ nm}$ varía alrededor del 18%). Sin embargo, a diferencia de la lente de plata, la eficiencia es mayor para longitudes de onda correspondientes al rojo que para el verde o el azul.

Finalmente, para el caso de una lente de cobre con espesor de $\lambda/2$ (Figura 25), se tiene nuevamente una mayor estabilidad en la eficiencia de transmisión en función del

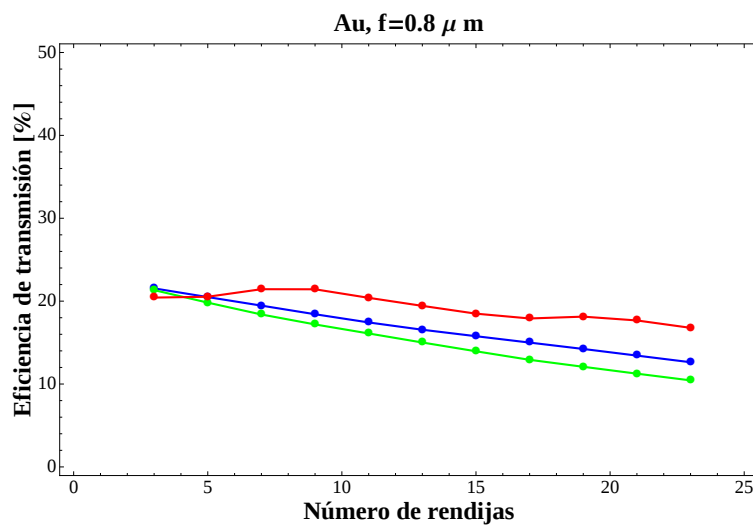


Figura 24. Eficiencia de transmisión en función del número de rendijas para una lente de oro para 650 nm (línea roja), 520 nm (línea verde), y 410 nm (línea azul).

número de rendijas para longitudes de onda correspondientes al color rojo (en este caso oscila alrededor del 16%), que para el verde o el azul.

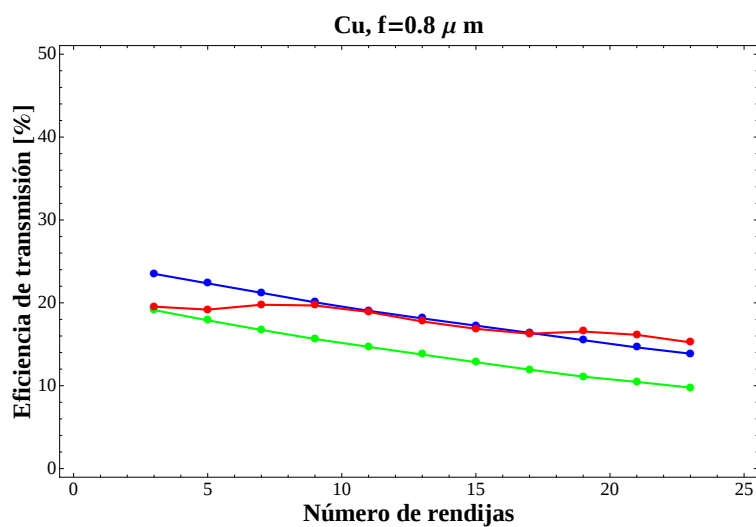


Figura 25. Eficiencia de transmisión en función del número de rendijas para una lente de cobre para 650 nm (línea roja), 520 nm (línea verde), y 410 nm (línea azul).

Para constatar que la eficiencia disminuye en función del número de rendijas y no solamente por la variación de los anchos de las mismas, en la Figura 26 se muestra

una gráfica de la eficiencia de transmisión de una película delgada de plata de espesor $\lambda/2$, sobre la cual se practican varias nano-rendijas de ancho constante igual a 20 nm. En esta gráfica se observa que la eficiencia de transmisión disminuye al aumentar el número de rendijas para longitudes de onda de 410 nm y 520 nm. Sin embargo, para una longitud de onda de 650 nm, la eficiencia de transmisión se incrementa al aumentar el número de rendijas. De los resultados anteriores se puede inferir que la eficiencia de transmisión es mejor para lentes que se diseñan a longitudes de onda cercanas al IR.

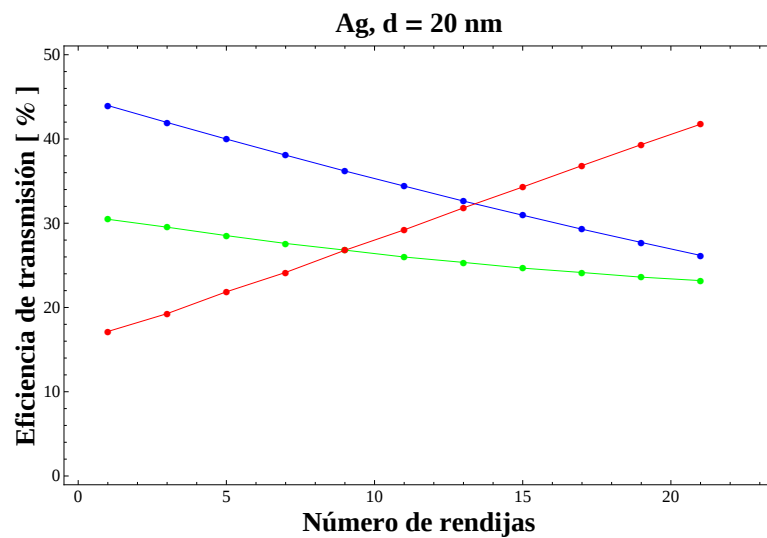


Figura 26. Eficiencia de transmisión de una película delgada de plata de espesor $\lambda/2$ en función del número de rendijas de ancho constante ($d = 20$ nm) para 650 nm (puntos rojos), 520 nm (puntos verdes) y 410 nm (puntos azules).

En las Figuras 27, 28 y 29 se muestran gráficas comparativas de las eficiencias transmitidas en cada longitud de onda para los tres diferentes materiales en función del número de rendijas. La gráfica 27 corresponde a $\lambda = 650$ nm, mostrando la eficiencia en función del número de rendijas para una lente de plata (línea continua), oro (línea discontinua) y cobre (línea punteada). Análogamente la gráfica 28 corresponde a $\lambda = 520$ nm y la gráfica 29 a $\lambda = 410$ nm.

En resumen, se encuentra que al aumentar el número de rendijas, la eficiencia de

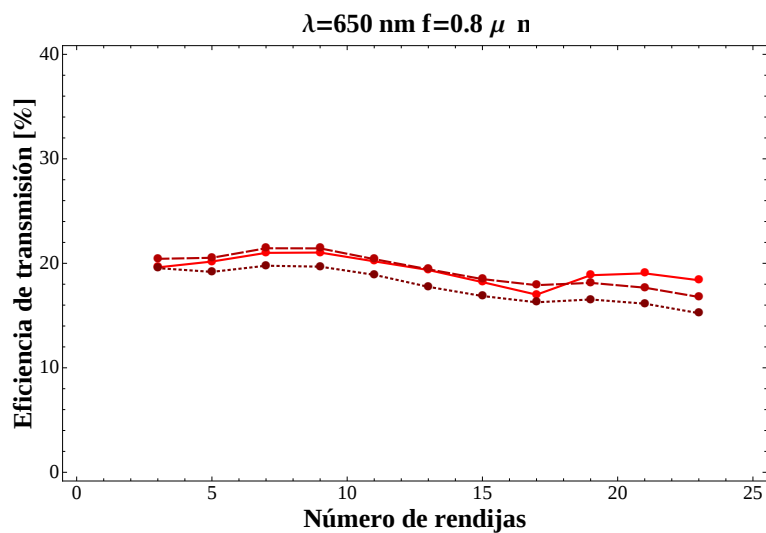


Figura 27. Eficiencia de transmisión de una lente de plata (línea continua), oro (línea discontinua) y cobre (línea punteada) para $\lambda = 650 \text{ nm}$.

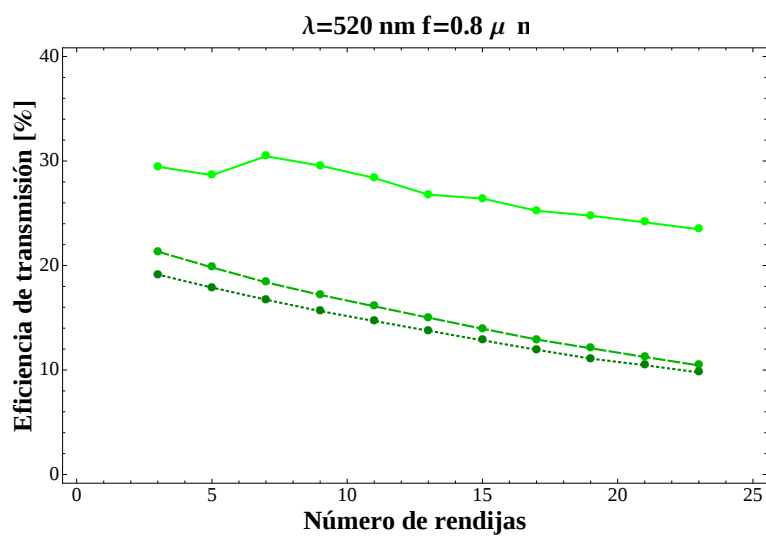


Figura 28. Eficiencia de transmisión de una lente de plata (línea continua), oro (línea discontinua) y cobre (línea punteada) para $\lambda = 520 \text{ nm}$.

transmisión de las lentes disminuye, siendo esta pérdida de luz menor para longitudes de onda mayores.

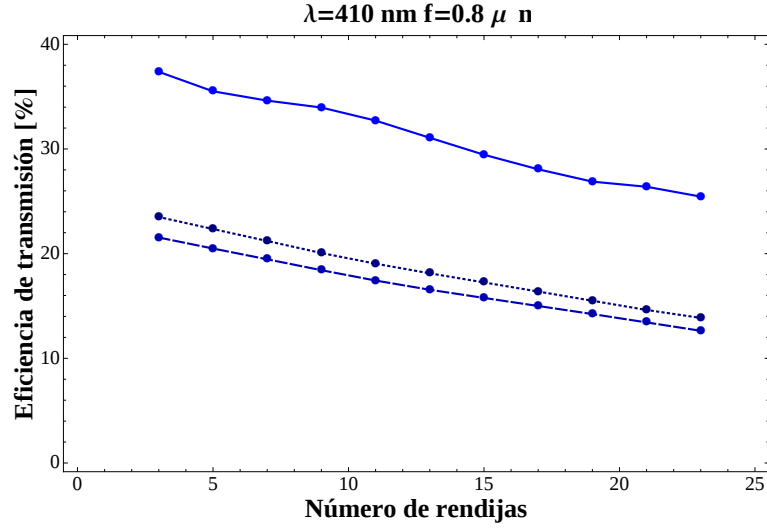


Figura 29. Eficiencia de transmisión de una lente de plata (línea continua), oro (línea discontinua) y cobre (línea punteada) para $\lambda = 410 \text{ nm}$.

V.4.2 Eficiencia de transmisión en función de la distancia focal

Otro resultado interesante, es el comportamiento de la eficiencia de transmisión en función de la distancia focal. Para enfocar en una región cercana, los anchos de las rendijas deben ser menores para que el modo transmitido tenga una velocidad de propagación menor. Sin embargo, al disminuir el ancho de las rendijas se tienen mayores pérdidas por absorción. Por ende, si se mantiene constante el número de nano-rendijas, al aumentar la distancia focal se debe tener un incremento en la eficiencia de transmisión.

Para demostrar lo anterior, se trabajará con una lente de un solo material y con un número constante de nano-rendijas, de manera que sólo sea alterada la eficiencia de transmisión en función de la distancia focal y no de algún otro parámetro. La lente elegida es de plata, con 15 nano-rendijas y un espesor de $\lambda/2$, y se trabaja con iluminación por un haz Gaussiano con una cintura de $5 \mu\text{m}$ para las longitudes de onda utilizadas (650 nm, 520 nm y 410 nm). Los resultados se ilustran en la Figura 30.

En la gráfica de la Figura 30 se observa que a medida que se incrementa la distancia

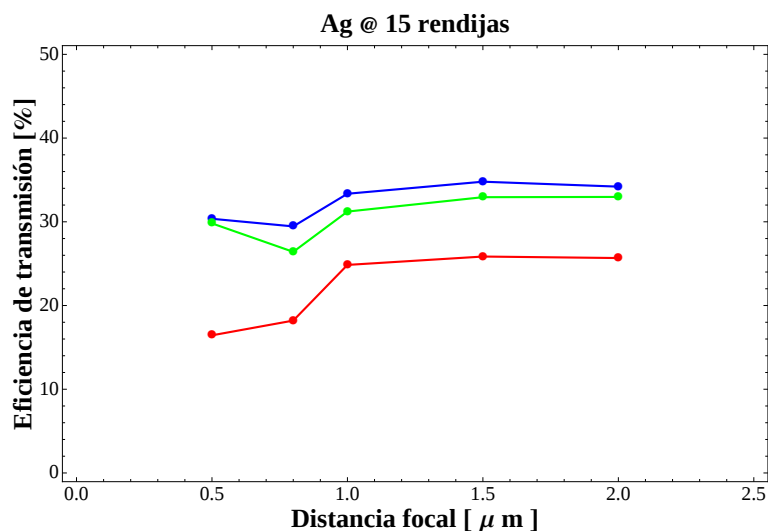


Figura 30. Eficiencia de transmisión de una lente de plata de 15 nano-rendijas en función de la distancia focal, para 650 nm (línea roja), 520 nm (línea verde) y 410 nm (línea azul).

focal, la eficiencia de transmisión aumenta.

Es de notar que, a pesar de las pérdidas por absorción, las lentes de nano-rendijas pueden enfocar a distancias tan cortas como una longitud de onda.

Tal como encontramos anteriormente, al aumentar el número de nano-rendijas la eficiencia de transmisión disminuye, pero aumenta con la distancia focal. Prueba de ello se observa en la Figura 31, donde se muestra un resultado similar al de la Figura 30, donde se han usado los mismos parámetros, con la diferencia de que ahora se tienen 21 rendijas. Esto se hace con la finalidad de observar si las pérdidas debidas al incremento del número de nano-rendijas modifica el comportamiento anterior. Sin embargo se observa que la eficiencia también aumenta con la distancia focal.

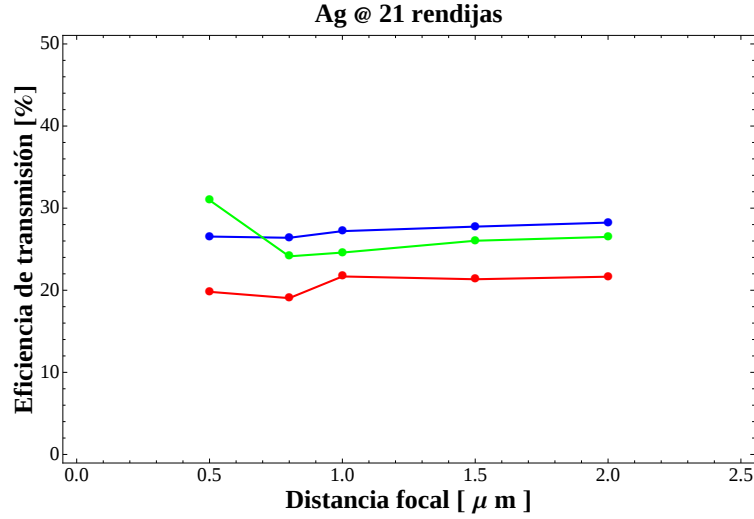


Figura 31. Eficiencia de transmisión de una lente de plata de 21 nano-rendijas en función de la distancia focal, para 650 nm (línea roja), 520 nm (línea verde) y 410 nm (línea azul).

V.5 Mapas de intensidad y variación del ángulo de incidencia

Una vez que ha sido elegido el frente de onda deseado y la polarización adecuada, lo que resta es mostrar cómo es el campo esparcido por las lentes de nano-rendijas. Para ello se mostrarán algunos mapas de intensidad obtenidos para los tres materiales trabajados con tres diferentes longitudes de onda. En todos los casos el haz incidente es Gaussiano con una cintura de $5 \mu\text{m}$.

El primer mapa, mostrado en la Figura 32, ilustra una lente de nano-rendijas de plata diseñada para enfocar luz con una longitud de onda $\lambda = 650 \text{ nm}$ a una distancia focal $f = 1.5 \mu\text{m}$. El espesor de la película delgada es de 650 nm, o sea, de λ . También se ilustra la función de punto extendido, la profundidad de foco y la energía encerrada. La eficiencia de transmisión de la lente es del 21.77%, con un ancho a la mitad del máximo de la función de punto extendido en el foco de 460 nm.

La Figura 33 muestra el mapa de intensidad, la función de punto extendido (FPE),

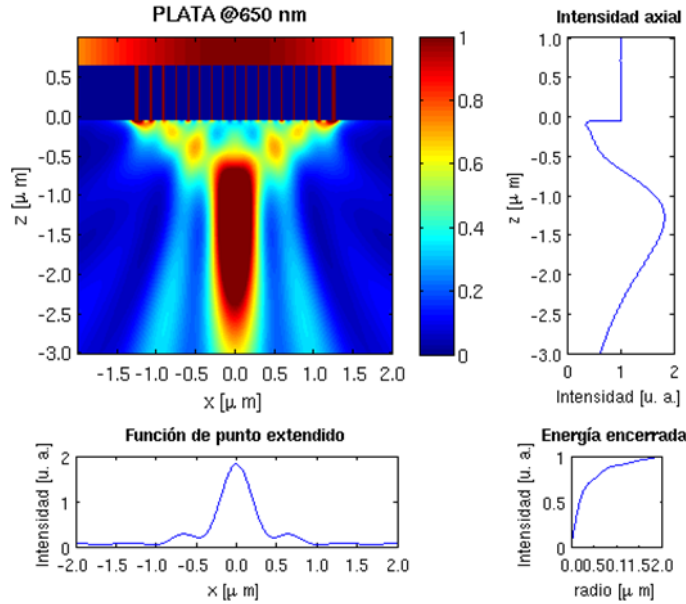


Figura 32. Mapa de intensidad, función de punto extendido, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 650 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 21.77%.

la intensidad axial y la energía encerrada para una lente de plata de 17 nano-rendijas, de espesor de 520 nm, diseñada para enfocar la luz con $\lambda = 520 \text{ nm}$ a una distancia de $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 19.74% y la función de punto extendido tiene un ancho a la mitad del máximo de 400 nm.

En la Figura 34 se ilustra el mapa de intensidad, la FPE, la intensidad axial y la energía encerrada para una lente de plata de 17 nano-rendijas con un espesor de 410 nm, diseñada para enfocar luz con $\lambda = 410 \text{ nm}$ a una distancia focal de $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 22.70% y un ancho a la mitad del máximo de la FPE de 300 nm.

Resultados análogos a los anteriores se muestran en las Figuras 35, 36 y 37, los cuales corresponden a lentes de oro diseñadas para enfocar luz con longitudes de onda de 650 nm, 520 nm y 410 nm, respectivamente, sobre películas con espesor igual a

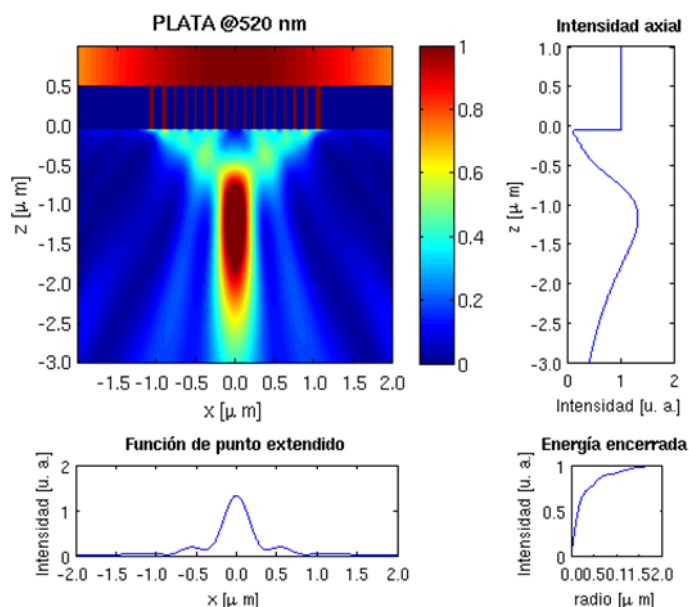


Figura 33. Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor diseñada para enfocar a 1.5 μm . La eficiencia de transmisión es del 19.74%.

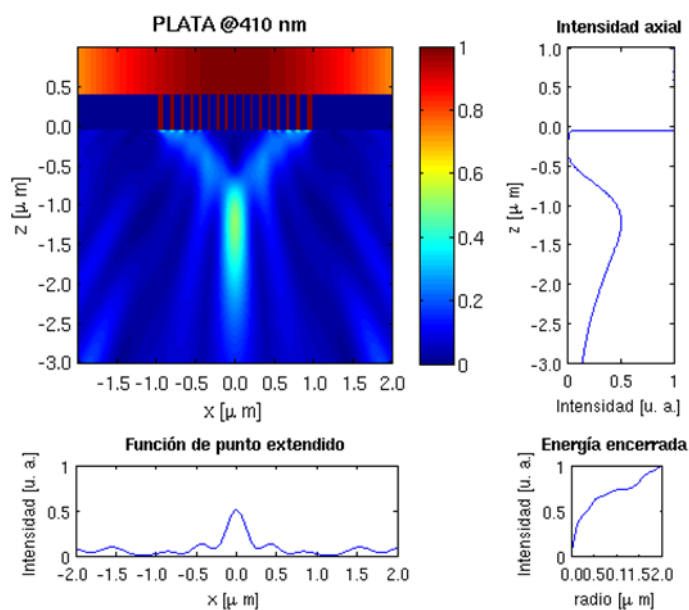


Figura 34. Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 410 nm de espesor, diseñada para enfocar a 1.5 μm . La eficiencia de transmisión es del 22.70%.

λ , enfocando también a $1.5 \mu\text{m}$. Estos mismos resultados se muestran para lentes de cobre en las Figuras 38, 39 y 40. Las eficiencias de transmisión y el ancho a la mitad del máximo de la FPE se muestran en la Tabla II.

Tabla II. Eficiencia de transmisión y ancho a la mitad del máximo (FWHM) de la función de punto extendido para diferentes lentes de plata, oro y cobre.

Material	λ [μm]	Eficiencia de transmisión [%]	FWHM de FPE [nm]
Plata (Ag)	0.650	21.77	460
	0.520	19.74	400
	0.410	22.70	300
Oro (Au)	0.650	15.63	460
	0.520	7.19	370
	0.410	11.43	290
Cobre (Cu)	0.650	12.75	450
	0.520	6.53	360
	0.410	12.28	298

Como se puede constatar de la Tabla II, el ancho a la mitad del máximo de la función de punto extendido, siempre es menor que la longitud de onda incidente.

V.5.1 Dispersión cromática

La lente mostrada en la Figura 41 corresponde a una lente de plata diseñada para $\lambda = 520 \text{ nm}$. Por la naturaleza del diseño, es de esperarse que la lente tenga dispersión cromática. Es decir, que el haz no se enfocará de la misma manera para una longitud

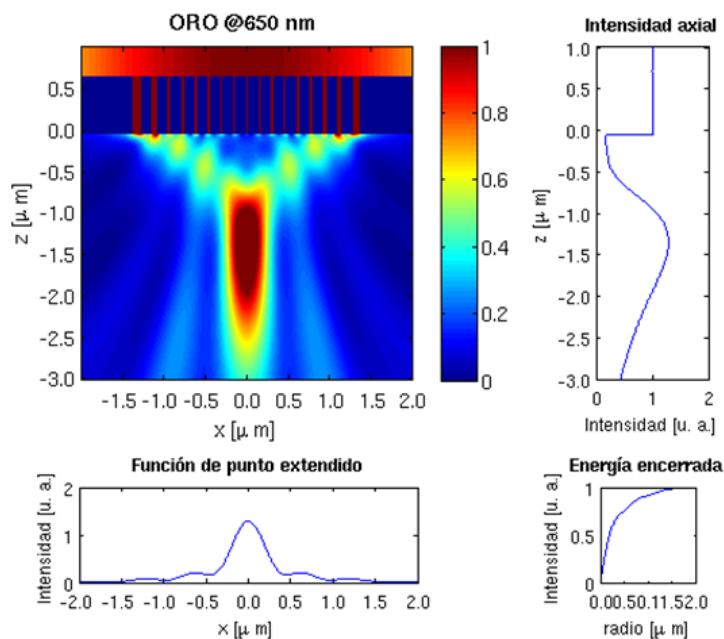


Figura 35. Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de oro de 650 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 15.63%.

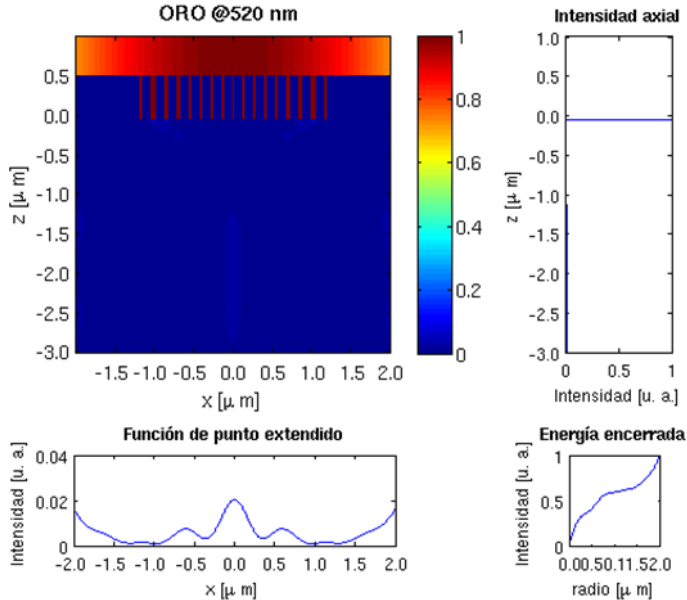


Figura 36. Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de oro de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. La eficiencia de transmisión es del 7.19%.

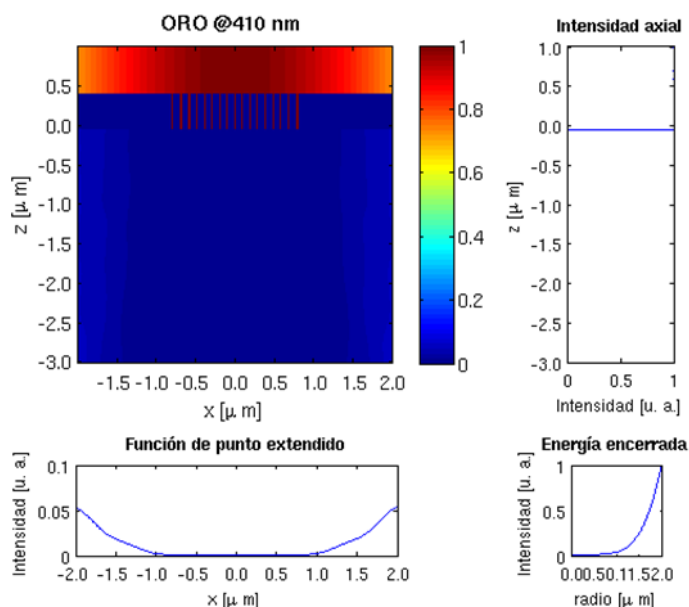


Figura 37. Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de oro de 410 nm de espesor, diseñada para enfocar a 1.5 μm . La eficiencia de transmisión es del 11.43%.

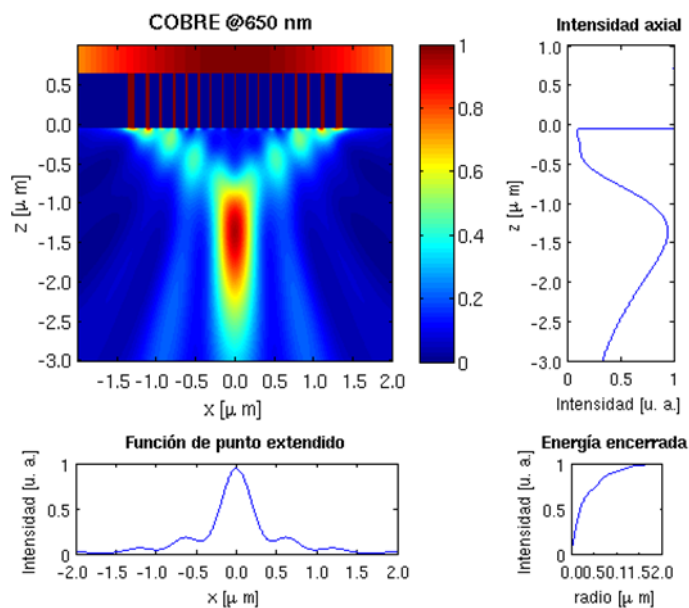


Figura 38. Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada de una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de cobre de 650 nm de espesor, diseñada para enfocar a 1.5 μm . La eficiencia de transmisión es del 12.75%.

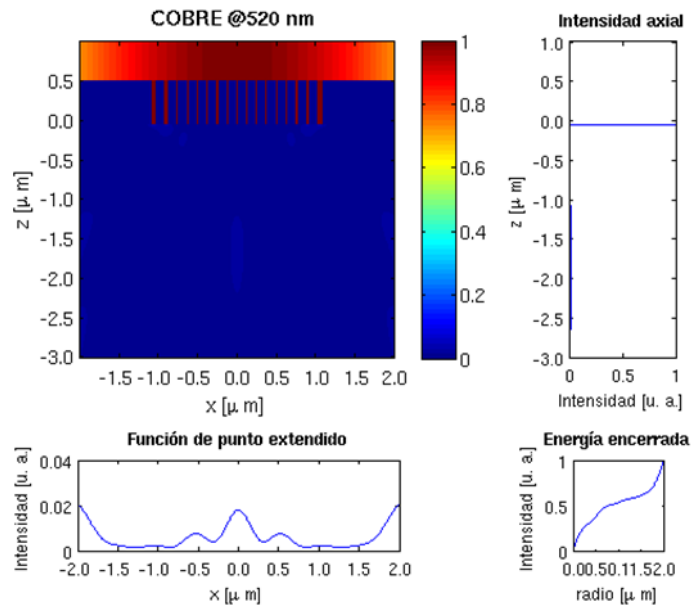


Figura 39. Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de cobre de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a 1.5 μm . La eficiencia de transmisión es del 6.53%.

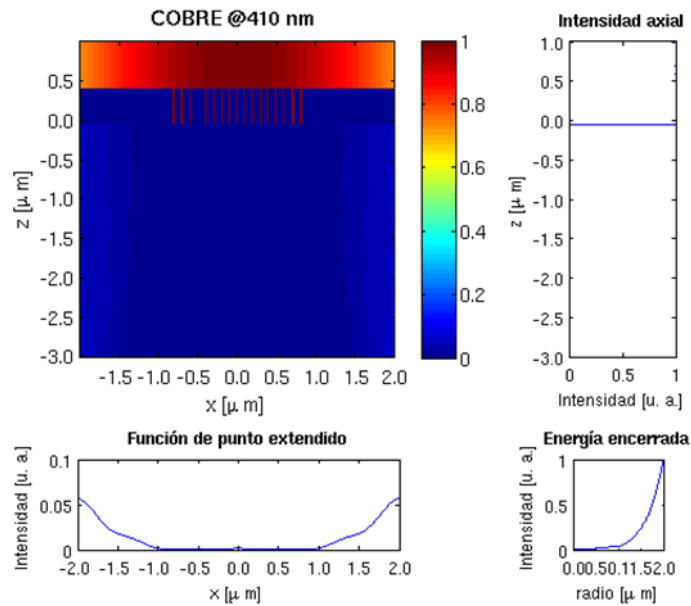


Figura 40. Mapa de intensidad, la FPE, intensidad axial y energía encerrada de una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de cobre de 410 nm de espesor diseñada para enfocar a 1.5 μm . La eficiencia de transmisión es del 12.28%.

de onda diferente. Muestra de ello se ilustra en las Figuras 42 y 43, donde se observa el campo esparcido por un haz Gaussiano de $5.0 \mu\text{m}$, para $\lambda = 650 \text{ nm}$ y para $\lambda = 410 \text{ nm}$, respectivamente. En estas gráficas se observa claramente que la distancia focal cambia. Lo mismo podemos decir de la eficiencia de transmisión y el ancho de la función de punto extendido.

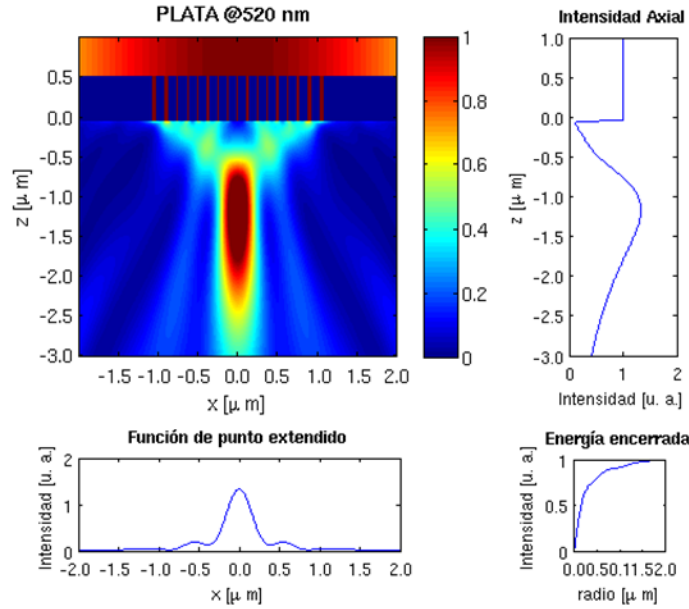


Figura 41. Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$, sobre la cual incide un haz con $\lambda = 520 \text{ nm}$. La eficiencia de transmisión es del 19.74%.

V.5.2 Varación del ángulo de incidencia

Hasta ahora, el diseño de las lentes se ha considerado para un haz incidiendo perpendicularmente a la superficie de la película delgada. Sin embargo, como se ha mencionado en el Capítulo II, la distancia focal también depende del ángulo de incidencia. En la Figura 44 se muestran los resultados para una lente de plata diseñada para enfocar luz con $\lambda = 520 \text{ nm}$ a una distancia de $1.5 \mu\text{m}$, con un espesor de la película delgada de

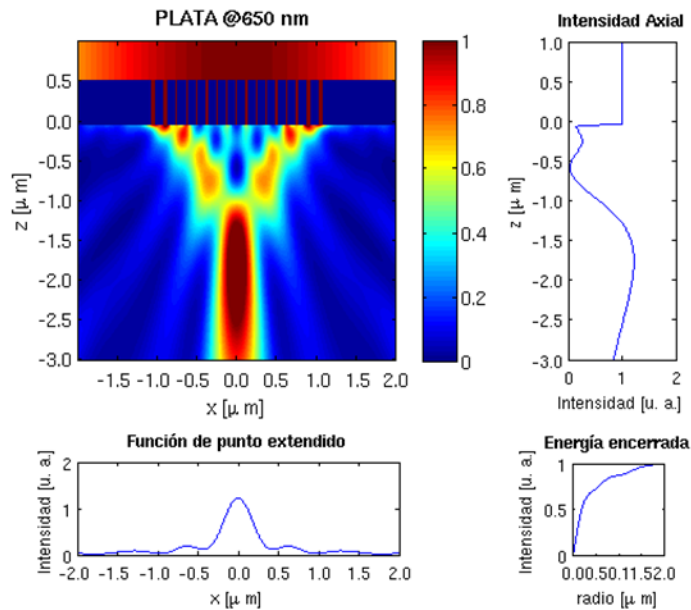


Figura 42. Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$, sobre la cual incide un haz con $\lambda = 650 \text{ nm}$. La eficiencia de transmisión es del 20.50%.

520 nm. En la película se practican 17 rendijas y se tiene una eficiencia de transmisión del 19.74%.

La Figura 45 muestra los resultados obtenidos cuando el haz incide sobre la misma lente de la Figura 44 con un ángulo de -15° respecto a la superficie de la lente, medido en sentido de las manecillas del reloj. De manera análoga, la Figura 46 ilustra el caso cuando el haz incide a 15° . En ambos casos la eficiencia de transmisión es del 10.34% y el ángulo que forma la línea de transmisión del foco respecto al origen del sistema coordenado es de -19.04° y 19.04° , respectivamente.

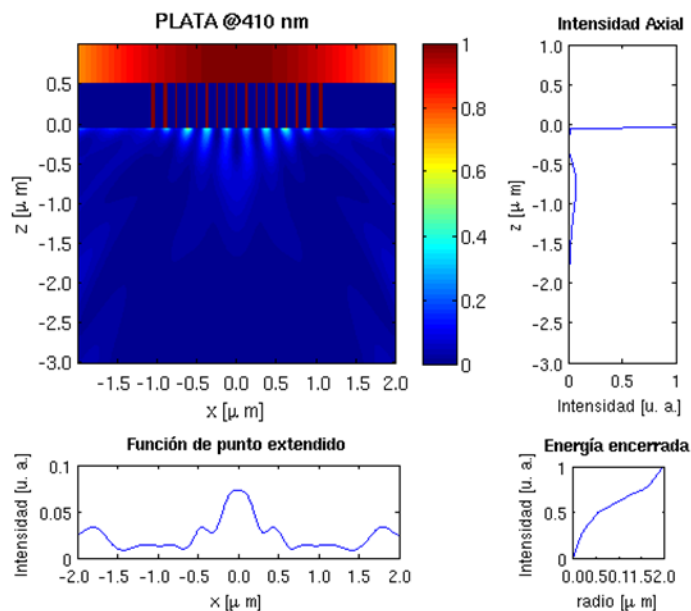


Figura 43. Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$, sobre la cual incide un haz con $\lambda = 410 \text{ nm}$. La eficiencia de transmisión es del 11.33%.

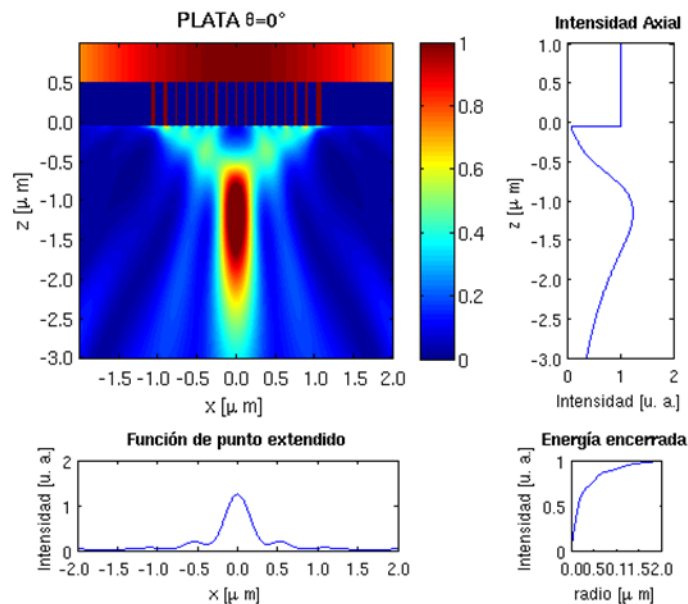


Figura 44. Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$, sobre la cual incide un haz perpendicular con $\lambda = 520 \text{ nm}$. La eficiencia de transmisión es del 19.74%.

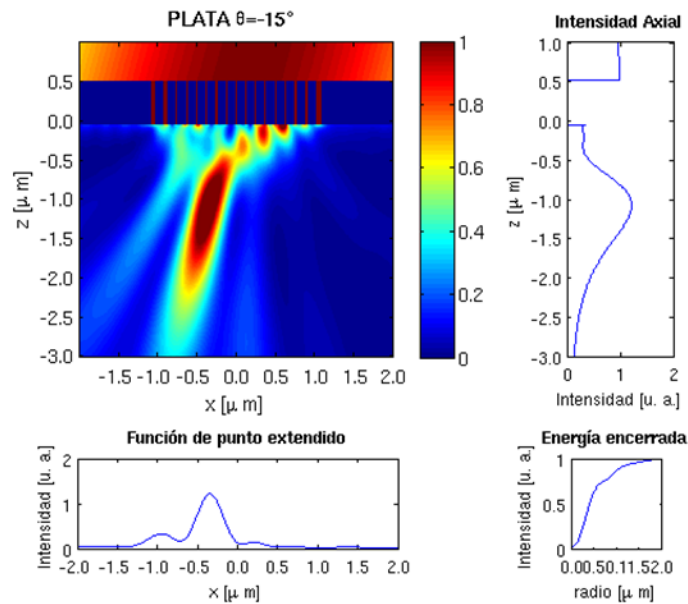


Figura 45. Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. El haz incidente tiene una $\lambda = 520 \text{ nm}$ y forma un ángulo de -15° respecto a la vertical. La eficiencia de transmisión es del 10.34%.

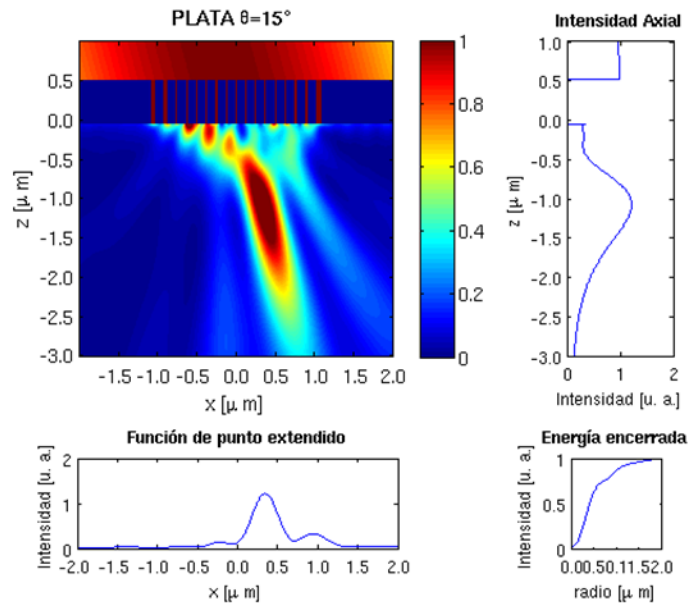


Figura 46. Mapa de intensidad, FPE, intensidad axial y energía encerrada para una lente de 17 nano-rendijas practicadas sobre una película delgada de plata de 520 nm de espesor, diseñada para enfocar a $1.5 \mu\text{m}$. El haz incidente tiene una $\lambda = 520 \text{ nm}$ y forma un ángulo de 15° respecto a la vertical. La eficiencia de transmisión es del 10.34%.

Capítulo VI

CONCLUSIONES

Después de los análisis realizados anteriormente, se pueden enumerar diversas conclusiones. En primer lugar se corroboró que la luz se puede propagar a través de rendijas de dimensiones mucho menores que la longitud de onda si la polarización de la misma corresponde a un modo TM (polarización p). Sin embargo, a menores anchos de las rendijas se tienen mayores pérdidas en el material, como se muestra en la Figura 4. En esta misma Figura se observa que al reducir el ancho de las rendijas la velocidad de propagación de la luz también disminuye.

Este importante resultado es el que permite diseñar arreglos de nano-rendijas sobre una película delgada metálica para deformar un frente de onda y así poder enfocararlo en un punto determinado. Esto se logra variando el ancho y distribución de las rendijas.

También se pudo corroborar que las expresiones usadas para determinar la velocidad de propagación de la luz que se transmite por cada nano-rendija en función del ancho D , son adecuadas para determinar la distribución de fases deseada de la luz que emana de las lentes.

Los resultados anteriores pudieron ser constatados a través de la generación de mapas de intensidad del campo esparcido por las estructuras diseñadas, haciendo uso del denominado método de la ecuación integral, el cual es un método riguroso que da solución al problema electromagnético en cuestión. La precisión de este método depende en gran medida de la capacidad de cómputo y de la discretización que se aplica al sistema de ecuaciones integrales acopladas con el que se determinan las funciones

fuentes asociadas al problema. Algunas limitantes que se encontraron para dar una solución más eficaz fueron las siguientes:

- Las dimensiones de los bloques laterales deben ser lo suficientemente grandes para evitar la excitación y reflexión de plasmones de superficie por los extremos de las lentes. Este problema puede ser resuelto al incrementar la capacidad de la computadora utilizada. Por un lado, al incrementar las dimensiones de la lente se deben realizar una mayor cantidad de cálculos para resolver el sistema matricial definido por las ecuaciones (76) y (77). También vale la pena mencionar que la matriz debe ser almacenada en la memoria RAM de la máquina.
- Una forma de disminuir los efectos de excitación de los plasmones se superficie en la cara posterior del arreglo, es mediante el uso de un haz Gaussiano de iluminación, teniendo cuidado de que el ancho del haz cubra en su totalidad el arreglo de rendijas pero que sea menor que la longitud total del sistema. Esto repercute también en las mapas generados puesto que las lentes son diseñadas considerando una iluminación uniforme.
- Debido a las divergencias de las funciones de Hankel, la distancia entre los puntos que definen el perfil de la lente y los puntos de observación debe ser mayor a 50 nm. Esto dificulta la generación de mapas de intensidad dentro de las rendijas y en la inmediata vecindad de la salida del arreglo.
- A pesar de que en principio el método integral da una solución exacta al problema en cuestión, además de la discretización, siempre se tiene presente el error numérico propio del cálculo computacional. Por ello se deben elegir cuidadosamente los parámetros del cálculo, considerar la plausibilidad física de los resulta-

dos y, entre otras cosas, la conservación de energía de la solución.

En lo que concierne al diseño de las lentes de nano-rendijas, se obtuvieron diferentes resultados, destacando la eficiencia de transmisión en función del número de rendijas, de la distancia focal, del material usado y de la longitud de onda del haz incidente.

Se observó que, al incrementar el espesor de la película delgada sobre la cual se practican las rendijas, se tiene un mayor control sobre la distancia focal para un número menor de rendijas. Es decir, si se disminuye el número de rendijas entonces se debe aumentar el espesor de la película para que la lente enfoque a la distancia deseada; si se disminuye el espesor de la película, entonces se debe incrementar el número de rendijas. Basado en lo anterior, se decidió realizar mediciones sobre lentes con 17 nano-rendijas en una película delgada metálica con un espesor igual a la longitud de onda incidente.

Un resultado peculiar es que la eficiencia de transmisión de las lentes disminuye al aumentar el número de rendijas. Este efecto es debido a que las pérdidas por absorción aumentan al disminuir el ancho de las rendijas. Sin embargo, los cálculos de la eficiencia de transmisión de muestras con varias rendijas del mismo ancho, muestran que este efecto se invierte para longitudes de onda cercanas al IR. Es decir, al aumentar la longitud de onda se disminuyen las pérdidas por absorción. También se observó que las pérdidas por absorción son mayores para oro y cobre que para la plata, lo cual sugiere el uso de este último material en la fabricación de los dispositivos.

De manera análoga a lo anterior, se observó que la eficiencia de transmisión aumenta al incrementar la distancia focal, lo cual resulta comprensible, tomando en cuenta que para enfocar luz en regiones más alejadas se necesitan velocidades de propagación de la luz más grandes, y con ello nano-rendijas de un ancho mayor. Nuevamente, si el ancho de las rendijas es mayor las pérdidas por absorción son menores.

En cuanto a las lentes diseñadas, se pudo observar que las lentes hechas con plata fueron más eficientes respecto a las de oro y cobre. Además, en todos los casos, la luz se enfoca mejor para longitudes de onda de 650 nm que para longitudes de onda de 520 nm y 410 nm. Es decir, se obtuvo una mayor concentración de la energía en el foco de las lentes (función de punto extendido) para una longitud de onda de 650 nm y para lentes de Plata.

También se observó que las lentes presentan dispersión cromática. Es decir, que las lentes diseñadas para enfocar luz de color rojo, no enfocan de la misma manera el verde o el azul. Esto es debido a que la velocidad de propagación de la luz que se transmite por cada nano-rendija depende de la longitud de onda.

Finalmente, al variar el ángulo con que incide el haz sobre las lentes de nano-rendijas, se observó que la propagación hacia el foco también sufre una desviación tipo prisma. Ésta no es muy grande, pero puede resultar de consideración en algunas aplicaciones.

El trabajo realizado en esta tesis puede continuarse y tener un mayor alcance. Cuestiones interesantes a estudiar serían, por ejemplo, el acoplamiento de modos entre las nano-rendijas o el diseño de lentes de múltiple enfocamiento. El estudio realizado permite conocer el funcionamiento básico de estos dispositivos, cuyas aplicaciones pueden ser variadas: donde quiera que se necesite un elemento muy compacto para enfocar luz, se puede hacer uso de estos dispositivos. Como referencia, y para dar una idea de las dimensiones de estos dispositivos, en el grosor de un cabello humano pueden ser grabadas alrededor de 50 de estas lentes.

Referencias

- Abramowitz, M. y Stegun, I. A. (1970). *Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs and mathematical tables*, Vol. 1. Dover Publications, E. U. A., novena edición. 1046 pp.
- Chang, W. S. C. (2005). *Principles of lasers and optics*. Cambridge University Press, E. U. A., primera edición. 247 pp.
- Choi, D., Lim, Y., Roh, S., Lee, I.-M., Jung, J., y Lee, B. (2009). Optical beam focusing with a metal slit array arranged along a semicircular surface and its optimization with a generic algorithm. *Applied Optics*, **49**(7): A30–A35.
- Economou, E. N. (1969). Surface plasmons in thin films. *Physical Review*, **182**(2): 539–554.
- Gordon, R. y Brolo, A. G. (2005). Increased cutt-off wavelenght for a subwavelength hole in a real metal. *Optics Express*, **13**(6): 1933–1938.
- Ishii, S., Kildishev, A. V., Shalaev, V. M., Chen, K.-P., y Drachev, V. P. (2011). Metal nanoslit lenses with polarization-selective design. *Optics Letters*, **36**(4): 451–453.
- Jackson, J. D. (1975). *Classical electrodynamics*. John Wiley, E. U. A., segunda edición. 848 pp.
- Johnson, P. B. y Christy, R. W. (1972). Optical constants of the noble metals. *Physical Review B*, **6**(12): 4370–4379.
- Lin, L., Goh, X. M., McGuinness, L. P., y Roberts, A. (2010). Plasmonic lenses formed by two-dimensional nanometric cross-shaped aperture arrays for fresnel-region focusing. *Nano Letters*, **10**: 1936–1940.
- Ma, C. y Liu, Z. (2010). A super resolution metalens with phase compensation mechanism. *Applied Physics Letters*, **96**: 183103–1–183103–3.
- Maradudin, A. A., Michel, T., McGurn, A. R., y Méndez, E. R. (1990). Enhanced backscattering of light from a random grating. *Annals of Physics*, **203**(2): 255–307.
- Mendoza-Suárez, A. y Méndez, E. R. (1997). Light scattering by a reentrant fractal surface. *Applied Optics*, **36**(15): 3521–3531.
- Min, C., Wang, P., Jiao, X., Deng, Y., y Ming, H. (2007). Beam manipulating by metallic nano-optic lens containing nonlinear media. *Optics Express*, **15**(15): 9541–9546.

- Morse, P. M. y Feshbach, H. (1953). *Methods of theoretical physics*, Vol. 1. Mc. Graw Hill, E. U. A., primera edición. 623 pp.
- Pérez, H. I., Valencia, C. I., Méndez, E. R., y Sánchez-Gil, J. A. (2009). On the transmission of diffuse light through thick slits. *J. Opt. Soc. Am. A*, **26**(4): 909–918.
- Shi, H., Wang, C., Du, C., Luo, X., Dong, X., y Gao, H. (2005). Beam manipulating by metallic nano-slits with variant widths. *Optics Express*, **13**(18): 6815–6820.
- Sun, Z. y Kim, H. K. (2004). Refractive transmission of light and beam shaping with metallic nano-optic lenses. *Applied Physics Letters*, **85**(4): 642–644.
- Valencia, C. I., Méndez, E. R., y Mendoza, B. S. (2003). Second-harmonic generation in the scattering of light by two-dimensional particles. *J. Opt. Soc. Am. B*, **20**(10): 2150–2161.
- Verslegers, L., Catrysse, P. B., Yu, Z., , White, J. S., Bernard, E. S., Brongersma, M. L., y Fan, S. (2008). Planar lenses based on nanoscale slit arrays in a metallic film. *Nano Letters*, **9**(1): 235–238.
- Verslegers, L., Catrysse, P. B., Yu, Z., y Fan, S. (2009). Planar metallic nanoscale slit lenses for angle compensation. *Applied Physics Letters*, **95**(7): 0711121–071112–3.
- Yuan, H. X., Xu, B. X., y Chong, T. C. (2007). Focusing effect and performance analysis of flat metal slit array lens. *Proc. of SPIE*, **6620**: O1–O6.
- Zhao, Y., Lin, S.-C. S., Nawaz, A. A., Kiraly, B., Hao, Q., Liu, Y., y Huang, T. J. (2010). Beam bending via plasmonic lenses. *Optics Express*, **18**(22): 23458–23465.

Apéndice A

SOBRE LAS CONDICIONES DE FRONTERA

Un resultado conocido en la teoría electromagnética, es que las componentes del campo electromagnético, paralelas a un elemento diferencial de área tangencial a la frontera entre dos medios, se conservan¹. Es decir,

$$\mathbf{E}_{\parallel}^I = \mathbf{E}_{\parallel}^{II}, \quad (190)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel}^I = \mathbf{H}_{\parallel}^{II}. \quad (191)$$

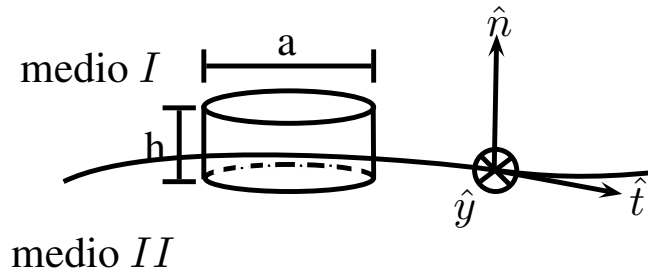


Figura 47. Cilindro conteniendo un elemento diferencial de área entre dos medios y marco de referencia local.

De acuerdo con el marco de referencia local mostrado en la Figura 47, donde se satisface que $\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{n}}$, las componentes paralelas de los campos son $\hat{\mathbf{y}}$ y $\hat{\mathbf{t}}$, de modo que

$$\mathbf{E}_{\parallel} = E_y \hat{\mathbf{y}} + E_t \hat{\mathbf{t}}, \quad (192)$$

$$\mathbf{H}_{\parallel} = H_y \hat{\mathbf{y}} + H_t \hat{\mathbf{t}}. \quad (193)$$

¹Esto es consecuencia del teorema de Stokes. Ver Jackson (1975) pags. 16-19.

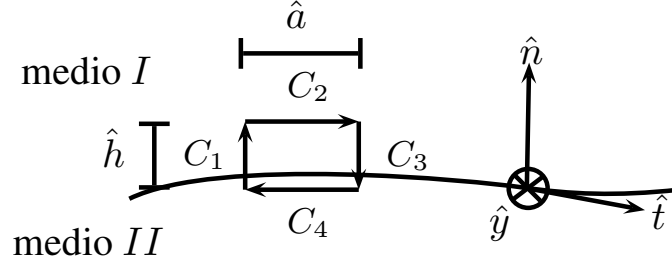


Figura 48. Rectángulo conteniendo un elemento diferencial de línea entre dos medios y marco de referencia local.

Tomando en cuenta que el sistema en cuestión es invariante en la dirección $\hat{\mathbf{y}}$, para un campo arbitrario $\mathbf{F}$ se cumple que

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\frac{\partial F_y}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \hat{\mathbf{t}} + \left(\frac{\partial F_t}{\partial \hat{\mathbf{n}}} - \frac{\partial F_n}{\partial \hat{\mathbf{t}}} \right) \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial F_y}{\partial \hat{\mathbf{t}}} \hat{\mathbf{n}}, \quad (194)$$

con lo cual, sabiendo que $\nabla \times \mathbf{E} = i\frac{\omega}{c}\mu\mathbf{H}$ y $\nabla \times \mathbf{H} = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon\mathbf{E}$, la componente tangencial de cada campo cumple

$$-\frac{\partial E_y}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \hat{\mathbf{t}} = i\frac{\omega}{c}\mu H_t, \quad (195)$$

$$-\frac{\partial H_y}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \hat{\mathbf{t}} = -i\frac{\omega}{c}\varepsilon H_t. \quad (196)$$

Entonces, a partir de la ecuación (192) se tiene que

$$E_y^I = E_y^{II}, \quad (197)$$

$$E_t^I = E_t^{II}, \quad (198)$$

y de la ecuación (196) se encuentra que

$$\frac{1}{\varepsilon_I} \frac{\partial H_y^I}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = \frac{1}{\varepsilon_{II}} \frac{\partial H_y^{II}}{\partial \hat{\mathbf{n}}}. \quad (199)$$

De manera análoga, a partir de la ecuación (193) se tiene

$$H_y^I = H_y^{II}, \quad (200)$$

$$H_t^I = H_t^{II}, \quad (201)$$

y por la ecuación (195) se obtiene

$$\frac{\partial E_y^I}{\partial \hat{\mathbf{n}}} = \frac{\partial E_y^{II}}{\partial \hat{\mathbf{n}}}, \quad (202)$$

ya que, para frecuencias ópticas, el valor de μ es aproximadamente igual a 1.

Finalmente, recordando que para polarización s (onda TE) el campo eléctrico sólo tiene componente en $\hat{\mathbf{y}}$, sus respectivas condiciones de frontera están dadas por las ecuaciones (197) y (202), mientras que para polarización p (onda TM) el campo magnético es el que se define por la componente $\hat{\mathbf{y}}$, con lo que las respectivas condiciones de frontera están definidas por las ecuaciones (200) y (199).

De manera generalizada, las condiciones de frontera para la interacción de un campo electromagnético con un medio que es invariante en una dirección, están dadas por

$$\psi_{s,p}^I(t) = \psi_{s,p}^{II}(t), \quad (203)$$

$$\frac{1}{\alpha_I} \Upsilon_{s,p}^I(t) = \frac{1}{\alpha_{II}} \Upsilon_{s,p}^{II}(t), \quad (204)$$

donde $\Upsilon_{s,p}(t)$ es la derivada no normalizada del campo $\psi_{s,p}(t)$ respecto a la normal y

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{para polarización } s, \\ \varepsilon_i & \text{para polarización } p, \end{cases} \quad (205)$$

con $i = I, II$.

Estas condiciones de frontera aparecen en los capítulos II y III, siendo fundamentales para el desarrollo de esta tesis.

Apéndice B

CAMPO ELÉCTRICO EVALUADO EN LA SUPERFICIE

Un cálculo útil en la resolución numérica del problema electromagnético es el valor del campo eléctrico en la superficie del objeto esparcidor. Para ello es necesario recordar que el perfil se ha parametrizado como $\mathbf{r}(t) = [\xi(t), 0, \eta(t)]$ a partir de lo cual se pueden definir las siguientes relaciones

$$\hat{n} = \frac{\mathbf{N}}{\phi(t)}, \quad (206)$$

$$\mathbf{N} = [-\eta'(t), 0, \xi'(t)], \quad (207)$$

$$\phi(t) = \sqrt{(\xi'(t))^2 + (\eta'(t))^2}; \quad (208)$$

además, de acuerdo a la geometría del sistema, se cumple que $\hat{t} \times \hat{y} = \hat{n}$, donde $\hat{t}$ y $\hat{n}$ son las componentes tangencial y normal a la superficie respectivamente, de manera que se satisface que

$$\hat{t} = \hat{y} \times \hat{n} = \frac{[\xi'(t), 0, \eta'(t)]}{\phi(t)}. \quad (209)$$

Para polarización p el campo invariante en la dirección $\hat{y}$ es el campo $\mathbf{H} = \psi \hat{y}$, por lo que, al determinar el campo eléctrico mediante las ecuaciones de Maxwell, se tiene que

$$\mathbf{E} = \frac{i}{\varepsilon(\omega) \frac{\omega}{c}} \nabla \times \mathbf{H} = \frac{i}{\varepsilon(\omega) \frac{\omega}{c}} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}} \hat{t} + \frac{\partial \psi}{\partial \hat{t}} \hat{n} \right). \quad (210)$$

Es de notar que el valor de $\frac{\partial \psi}{\partial \hat{n}}$ será determinado numéricamente mediante el método integral, por lo que nos resta conocer $\frac{\partial \psi}{\partial \hat{t}}$. Así

$$\frac{\partial \psi}{\partial \hat{t}} = \hat{t} \cdot \nabla \psi = \frac{1}{\phi(t)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \right) \Big|_{(x,z) \in \Gamma}, \quad (211)$$

es decir,

$$\frac{\partial \psi}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (212)$$

La ecuación (212) puede ser determinada numéricamente por métodos convencionales (Abramowitz y Stegun, 1970). Con esto el campo eléctrico evaluado en el perfil, para polarización p está dado por

$$\mathbf{E}_p = \frac{i}{\varepsilon(\omega) \phi(t) \frac{\omega}{c}} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{N}} \hat{t} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \hat{n} \right), \quad (213)$$

mientras que para polarización s basta con evaluar el campo incidente en el perfil, o sea

$$\mathbf{E}_s = \psi^{inc}(x, z) \Big|_{(x,z)=[\xi(t), \eta(t)]}. \quad (214)$$