Tesis defendida por

Alma Karen González Alcalde

Y aprobada por el siguiente comité

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Director del Comité

Dr. Fabio Luiz Sant'Anna Cuppo

Miembro del Comité

Dr. Víctor Ruiz Cortés

Miembro del Comité

Dr. Kevin Arthur O'Donnell

Miembro del Comité

Dra. Meritxell Riquelme Pérez

Miembro del Comité

Dr. Pedro Negrete Regagnon

Coordinador del programa de
Posgrado en Óptica

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

6 de agosto de 2012

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA

Programa de Posgrado en Ciencias

en Óptica con orientación en Optoelectrónica

Interacción de luz difusa con superficies rugosas

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

Presenta:

Alma Karen González Alcalde

Ensenada, Baja California, México,

2012.

Resumen de la tesis de **Alma Karen González Alcalde**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Óptica con orientación en Optoelectrónica. Ensenada, Baja California, 2012.

Interacción de luz difusa con superficies rugosas

Resumen aprobado por:

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez

Director de Tesis

Se presenta un estudio teórico, numérico y experimental sobre la reflectancia y la transmitancia de superficies rugosas iluminadas de manera directa y difusa. Por simplicidad, los cálculos numéricos fueron realizados en superficies unidimensionales. La reflectancia y transmitancia fueron calculadas con un método riguroso y dos teorías basadas en la aproximación de Kirchhoff. Se encontró que las teorías basadas en la aproximación de Kirchhoff están muy limitadas en su rango de aplicación.

También se presentan mediciones de reflectancia difusa para superficies rugosas con diferentes parámetros. Se encontró que, dependiendo de la escala del detalle lateral en las superficies y del contraste del índice de refracción, la reflectancia puede aumentar o disminuir en función de la desviación estándar de pendientes.

Palabras Clave: Esparcimiento de luz, superficies rugosas.

Abstract of the thesis presented by **Alma Karen González Alcalde**, in partial fulfillment of the requirements of the degree of Master in Sciences in Optics with orientation in Optoelectronics. Ensenada, Baja California, 2012.

Interaction of diffuse ligth with rough surfaces

We present a theoretical, numerical and experimental study of the reflectance and transmittance of rough surfaces under direct and diffuse illumination. For simplicity, the numerical calculations were carried out considering one-dimensional surfaces. The reflectance and transmittance were calculated using a rigurous technique and with two theories based on the Kirchhoff approximation. We found that the theories based on Kirchhoff aproximation are very limited in their range of application.

Also, we present measurements of the diffuse reflectance of rough surfaces with different characteristics. We found that, depending on the lateral scale of the inhomogeneities and the contrast of refractive index, the reflectivity can increase or decrease as a function of the root-mean-square slope of the surface.

Keywords: Light scattering, rough surfaces.

A mis padres porque siempre me han brindado su apoyo incondicional y me han ayudado a cumplir mis sueños...
A mis hermanos por ser mis compañeros de aventuras.

Agradecimientos

Al Dr. Eugenio Méndez, por su apoyo incondicional en la realización de este trabajo tesis. Mi más sincero agradecimiento por su paciencia, comprensión y por los conocimientos transmitidos.

A la Dra. Meritxel Riquelme y los Doctores Víctor Ruiz, Kevin O'Donnell y Fabio Sant'Anna Cuppo, miembros de mi comité de tesis por sus valiosas críticas y observaciones.

A la Dra. Elena Chaikina y Fabián Alonso por el apoyo que siempre me brindaron en el laboratorio.

A mis amigos Arturo García y Manuel Pulido porque emprendimos esta aventura juntos desde Zacatecas hacia CICESE, si bien por un camino un tanto diferente, pero hemos cumplido una meta más.

A mis compañeros y amigos de generación Heriberto, Cindy, Eder, Esaú, Héctor, Jorge Arturo y Jorge López la verdad es que sin ellos mi estancia en Ensenada no hubiera sido tan divertida. A mis amigos del posgrado por el apoyo y por los momentos divertidos. Sin embargo, quiero agradecer especialmente a Ricardo y Sergio por la ayuda que me brindaron.

A todos los investigadores, estudiantes y personal del departamento de óptica por su enseñanza académica.

Al CONACyT por su apoyo económico. Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por darme la oportunidad de realizar mis estudios de posgrado.

Contenido

Página

Contenido (continuación)

Lista de Figuras

Figura Página

Lista de Figuras (continuación)

Figura Página

Lista de Figuras (continuación)

Figura Página

Lista de Figuras (continuación)

Lista de Figuras (continuación)

Lista de Tablas

Lista de Tablas (continuación)

Tabla Página

Capítulo I

Introducción

La propagación de luz en medios no homogéneos ha sido objeto de estudios desde hace tiempo. En años recientes el interés ha ido en aumento debido, principalmente, a la necesidad de modelar la interacción de luz con tejidos biológicos (óptica médica), al incremento en la rapidez y capacidad de almacenamiento de las computadoras, y a la facilidad de conseguir fuentes coherentes y detectores de luz a longitudes de onda específicas.

En este tipo de medios, la luz interactúa con las heterogeneidades del medio, propagándose de manera tortuosa a través de eventos de esparcimiento múltiple. El modelado del problema no es nada sencillo y normalmente se procede con algún tipo de aproximación. Una de las más completas está representada por la ecuación de transporte radiativo, que es una ecuación integro-diferencial.

Dada la complejidad del problema, en este tipo de estudios es común suponer, por simplicidad, que el observador se encuentra en el mismo medio que las heterogeneidades. Sin embargo, el problema que surge cuando estudiamos la interacción de la luz con una película de pintura, con la piel y los tejidos del brazo de una persona, o con un vaso de leche, es cómo trasladar lo que se calcula dentro del material al medio externo. Es decir, cómo pasar el campo de luz calculado al medio externo a través de una frontera que no necesariamente es plana.

Para evaluar el campo de luz en el medio externo en el caso de superficies planas, se utiliza frecuentemente una solución aproximada conocida como la corrección de Saunderson (1942). La corrección involucra la reflectancia interna de la superficie, pero vale la pena señalar que, dado que la luz reflejada por el medio ilumina la frontera de manera difusa, es necesario calcular la reflectancia considerando los coeficientes de Fresnel sobre todos los ángulos de incidencia. Esto se puede calcular analíticamente (Walsh, 1924; Gershun, 1945; Stern, 1964; Kortüm, 1969; Allen, 1973).

Sin embargo, si se quisiera aplicar una corrección tipo Saunderson a muestras con superficies rugosas, sería necesario conocer, tanto la reflectancia externa bajo iluminación directa, como la reflectancia interna bajo iluminación difusa. El problema es relevante en el modelado de la interacción de luz con películas de pintura y tejidos biológicos, así como para modelar la absorción de celdas solares texturizadas.

En este trabajo de tesis planteamos la realización de una serie de estudios teóricos y experimentales sobre la reflectancia y la transmitancia de superficies rugosas iluminadas de manera directa y difusa. La pregunta fundamental que nos planteamos es la siguiente. Al introducir rugosidad en una superficie ¿la hacemos más o menos reflejante?

Planteada en estos términos, la pregunta, resulta un tanto vaga. En realidad, tendríamos que ser más precisos y especificar si la luz incidente es difusa o directa, y si la luz reflejada se detecta de manera direccional o en todas direcciones. La respuesta a esta pregunta también depende de los índices de refracción, de si se trata de reflectancia interna o externa, y de las propiedades estadísticas de la rugosidad.

I.1 La corrección de Saunderson

Consideramos una muestra de material no homogéneo cuya matriz tiene un índice de refracción n_2 en contacto con un medio externo con índice n_1. Nos interesa calcular la reflectancia de esta muestra, definida como la fracción de la potencia óptica incidente que es reflejada hacia el medio de incidencia.

En ausencia de la frontera, la muestra tiene reflectancia R_d para iluminación difusa y reflectancia $R_c(\theta_2)$ para iluminación colimada. Estas reflectancias pueden ser diferentes y, por tal motivo, distinguimos entre los dos casos de iluminación, considerando primero el de iluminación difusa.

Consideramos entonces que la muestra se ilumina de manera difusa. La superficie refleja una fracción R_{de} de la potencia incidente y la luz que penetra se encuentra con el medio heterogéneo, que refleja una fracción R_d de la potencia incidente. La fracción de luz que escapa de regreso al medio de incidencia está dada por la serie

$$\begin{aligned} & (1-R_{de})R_d(1-R_{di}) + (1-R_{de})R_d R_{di} R_d (1-R_{di}) + \\ & (1-R_{de})R_d R_{di}^2 R_d^2 (1-R_{di}) + ... \\ = \;& (1-R_{de})R_d(1-R_{di})[1 + R_{di}R_d + (R_{di}R_d)^2 + (R_{di}R_d)^3 + ...] \\ = \;& (1-R_{de})R_d(1-R_{di})\frac{1}{1-R_{di}R_d}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde R_{di} es la reflectancia interna de la interfase plana bajo iluminación difusa.

Escribimos entonces la corrección de Saunderson de la forma

$$R_s = R_{de} + (1-R_{de})(1-R_{di})\frac{R_d}{1-R_{di}R_d}. \tag{2}$$

La ecuación anterior concuerda con la reportada por Saunderson (1942). Veamos ahora el caso de iluminación colimada. La muestra se ilumina con un haz que forma un ángulo θ con la perpendicular a la interfase y la primera superficie refleja una fracción $R(\theta_1)$ de la potencia incidente. Para la fracción de luz que escapa de regreso, tenemos

$$\begin{aligned} & [1-R(\theta)]R_c(\theta_2)(1-R_{di}) + [1-R(\theta)]R_c(\theta')R_{di}R_d(1-R_{di}) + \\ & [1-R(\theta)]R_c(\theta_2)R_{di}^2 R_d^2(1-R_{di}) + ... \\ = \;& [1-R(\theta)]R_c(\theta_2)(1-R_{di})[1 + R_{di}R_d + (R_{di}R_d)^2 + (R_{di}R_d)^3 + ...] \\ = \;& [1-R(\theta)]R_c(\theta_2)(1-R_{di})\frac{1}{1-R_{di}R_d}, \end{aligned} \tag{3}$$

donde R_{di} es la reflectancia interna de la interfase plana bajo iluminación difusa. Para este caso, escribimos la corrección de Saunderson de la forma

$$R_{sc}(\theta) = R(\theta_1) + [1 - R(\theta_1)](1 - R_{di})\frac{R_c(\theta_2)}{1 - R_{di}R_d}. \tag{4}$$

Los coeficientes de reflexión del medio no homogéneo se pueden calcular con la teoría de Kubelka-Munk (Kubelka y Munk, 1931; Kubelka, 1948), o con simulaciones tipo Monte Carlo (Wang *et al.*, 1995). En la siguiente sección, consideramos el cáculo de los coeficientes de reflexión de la superficie plana.

I.2 Reflectancia de superficies planas

Como se mencionó anteriormente, para aplicar una corrección tipo Saunderson es necesario conocer, tanto la reflectancia externa bajo iluminación directa (colimada), como la reflectancia interna bajo iluminación difusa. Pero ¿a qué nos referimos con iluminación directa o iluminación difusa?

I.2.1 Iluminación directa

La luz colimada es la que proviene de un solo ángulo de incidencia. Cuando la luz incide en una frontera plana, la cual se encuentra entre dos medios con distintos índices de refracción, una parte se refleja y otra se transmite. La reflectancia y transmitancia para un plano con esta iluminación se obtiene a partir de los coeficientes de Fresnel.

El plano se ilumina con un haz, cuya dirección de propagación forma un ángulo θ_1 con la perpendicular a la interfase. La superficie refleja una fracción $R(\theta_1)$ de la potencia incidente. Para luz no polarizada, el coeficiente de Fresnel está dado por (Born y Wolf, 1980)

$$R(\theta_1) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2}\right)^2 + \left(\frac{n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_2 + n_2\cos\theta_1}\right)^2\right], \tag{5}$$

donde el primer término corresponde a la reflectancia para polarización s y el segundo a la de polarización p, θ_1 es el ángulo de incidencia y θ_2 es el ángulo de refracción. Estos ángulos están relacionados por la ley de Snell

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \tag{6}$$

I.2.2 Iluminación difusa 3D

La luz difusa es iluminación que no crea sombras. Esto ocurre debido a que la luz proviene de diferentes direcciones proporcionando una iluminación angularmente homogénea. Debido a que esta iluminación difusa interactúa con una superficie plana debemos tomar en cuenta los factores angulares asociados a esta proyección.

En el límite de iluminación difusa perfecta (misma radiancia desde cualquier ángulo) se habla de iluminación lambertiana. La función de densidad para la radiancia normalizada asociada a las posibles direcciones de incidencia está dada por (Gershun, 1945; Stern, 1964; Allen, 1973)

$$\ell(\theta,\phi) = \frac{\cos\theta}{\pi}. \tag{7}$$

Puede verificarse que

$$\int_{2\pi} \ell(\theta,\phi) d\Omega = 1. \tag{8}$$

donde la integral es sobre todo el hemisferio de iluminación.

Consideramos ahora la frontera plana entre dos medios con índices de refracción n_1 y n_2, y suponemos que $n_1 < n_2$ (ver figura 1). Analizamos primero el caso de reflexión externa. Es decir que la luz incide desde el medio con índice n_1. En este caso, θ_1 representa el ángulo de incidencia, θ_2 el ángulo de transmisión y denotamos por $R(\theta_1)$ la reflectancia de esta frontera. Poniendo

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1\right) \tag{9}$$

en la ecuación (5), se encuentra una expresión para la función $R(\theta_1)$ en términos del ángulo de incidencia externo θ_1.

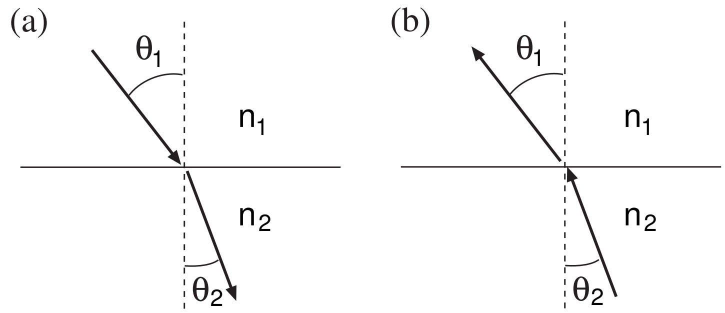


Figura 1. Reflexión y transmisión en una interfase plana. (a) Reflexión externa y (b) reflexión interna. Consideramos una situación en la que $n_2 > n_1$.

La reflectancia externa promedio para iluminación difusa viene entonces dada por (Stern, 1964)

$$\begin{aligned} R_{de} &= \int_{2\pi} R(\theta_1)\ell(\theta_1,\phi)d\Omega \\ &= 2\int_{\theta_1=0}^{\pi/2} R(\theta_1)\cos\theta_1 \sin\theta_1 d\theta_1. \end{aligned} \tag{10}$$

La integral expresada por la ecuación (10) con el coeficiente de reflexión (5) fue evaluada por Walsh (1924), con el siguiente resultado (Kortüm, 1969; Molenaar *et al.*, 1999)

$$\begin{aligned} R_{de} &= \frac{1}{2} + \frac{(m-1)(3m+1)}{6(m+1)^2} + \frac{m^2(m^2-1)^2}{(m^2+1)^3}\ln\left(\frac{m-1}{m+1}\right) \\ &\quad -\frac{2m^3(m^2+2m-1)}{(m^2+1)(m^4-1)} + \frac{8m^4(m^4+1)}{(m^2+1)(m^4-1)^2}\ln(m), \end{aligned} \tag{11}$$

donde $m = n_2/n_1$.

Para el caso de reflexión interna tenemos que el medio de incidencia es el de índice n_2 y el ángulo de incidencia es θ_2. Poniendo

$$\theta_1 = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2\right), \tag{12}$$

Se puede apreciar que la única diferencia entre la figura 1(b) y la figura 1(a) es la dirección en la que viajan los rayos. Es decir, que los ángulos involucrados en estas dos situaciones son los mismos y por lo tanto, para ángulos θ_1 y θ_2 relacionados por la ley de Snell, tendremos que $R(\theta_2) = R(\theta_1)$, por lo que la reflectancia difusa interna puede ser escrita como

$$R_{di} = 2\int_{\theta_2=0}^{\theta_c} R(\theta_2)\cos\theta_2 \sin\theta_2 d\theta_2 + 2\int_{\theta_2=\theta_c}^{\pi/2} \cos\theta_2 \sin\theta_2 d\theta_2, \tag{13}$$

donde θ_c es el ángulo crítico, definido por

$$\theta_c = \sin^{-1}(n_1/n_2). \tag{14}$$

La segunda integral se puede evaluar fácilmente, de manera que podemos escribir

$$R_{di} = \int_{\theta_2=0}^{\theta_c} R(\theta_2) d(\sin^2\theta_2) + \cos^2\theta_c. \tag{15}$$

Con el cambio de variable

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2\right), \qquad \theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right),$$

encontramos que

$$R_{di} = \frac{n_1^2}{n_2^2}\int_{\alpha=0}^{\pi/2} R(\alpha) d(\sin^2\alpha) + 1 - \sin^2\theta_c. \tag{16}$$

Sin embargo, podemos ver que este cambio de variable es justamente la transformación (9), que debe poner la reflectancia en términos del ángulo θ_1 y, por lo tanto, la integral debe ser la misma que la encontrada en el caso de reflexión externa, de manera que

$$\begin{aligned} R_{di} &= \frac{n_1^2}{n_2^2} R_{de} + 1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \\ &= 1 + \frac{n_1^2}{n_2^2}(R_{de} - 1). \end{aligned} \tag{17}$$

La expresión (17) es interesante, pues permite calcular la reflectancia interna en términos de la reflectancia externa, para la cual se tiene la expresión analítica dada por la ecuación (11).

La ecuación (17) también se puede escribir de la forma (Gershun, 1945; Stern, 1964)

$$n_2^2(1 - R_{di}) \;=\; n_1^2(1 - R_{de}) \tag{18}$$

I.2.3 Iluminación difusa 2D

Se pretende realizar una evaluación del efecto de la rugosidad en la reflectancia de la superficie. Debido a la dificultad de realizar estudios rigurosos con superficies cuyo perfil varía en dos direcciones, consideramos el caso de superficie invariantes en una dirección (llamadas superficies unidimensionales), esperando que los resultados obtenidos de esta manera sean cualitativamente representativos de la situación real. Debido a esto, consideramos las modificaciones que debemos hacer a los resultados de la reflectividad obtenidos anteriormente para superficies planas, considerando ahora luz difusa bidimensional.

Para iluminación lambertiana bidimensional, la función de densidad de probabilidad asociada a las posibles direcciones de incidencia está dada por (Allen, 1973)

$$\ell(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{2}. \tag{19}$$

Puede verificarse que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \ell(\theta) d\theta = 1. \tag{20}$$

donde la integral es sobre todo el hemicilindro de iluminación.

La reflectancia externa promedio para iluminación difusa viene entonces dada por

$$\begin{aligned} R_{de} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{R(\theta)\ell(\theta)}{2} d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} R(\theta)\cos(\theta) d\theta. \end{aligned} \tag{21}$$

Por otro lado, para el caso de reflexión interna tenemos que

$$R_{di} \;=\; \int_{\theta_2=0}^{\theta_c} R(\theta_2)\cos\theta_2 d\theta_2 + \int_{\theta_2=\theta_c}^{\pi/2} \cos(\theta_2) d\theta_2, \tag{22}$$

donde θ_c es el ángulo crítico. La segunda integral se puede evaluar fácilmente y podemos escribir

$$R_{di} = \int_{\theta_2=0}^{\theta_c} R(\theta_2) d(\sin\theta_2) + 1 - \sin(\theta_c). \tag{23}$$

Con el cambio de variable

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2\right), \qquad \theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right),$$

encontramos que

$$R_{di} = \frac{n_1}{n_2}\int_{\alpha=0}^{\pi/2} R(\alpha) d(\sin^2\alpha) + 1 - \frac{n_1}{n_2}. \tag{24}$$

Otra vez, vemos que este cambio de variable es justamente la transformación que debe poner la reflectancia en términos del ángulo θ_1 y, por lo tanto, la integral debe ser la misma que encontramos en el caso de reflexión externa, de manera que

$$\begin{aligned} R_{di} &= \frac{n_1}{n_2}R_{de} + 1 - \frac{n}{n_2} \\ &= 1 + \frac{n_1}{n_2}(R_{de} - 1), \end{aligned} \tag{25}$$

que se puede escribir de la forma

$$n_2(1 - R_{di}) = n_1(1 - R_{de}). \tag{26}$$

Este resultado concuerda con la relación reportada por Allen (1973).

I.3 Estructura de la tesis

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo II se realiza una descripción de tres métodos que nos permiten calcular el coeficiente de reflexión diferencial. Es decir, métodos para conocer la distribución angular del campo esparcido por una superficie rugosa en el campo lejano. Estos métodos son: un método basado en el segundo teorema integral de Green (riguroso), un método numérico basado en las condiciones de frontera de Kirchhoff y una solución analítica aproximada de Kirchhoff, que fue desarrollada por Beckmann y Spizzichino (1963). Los dos primeros métodos se utilizan para conductores perfectos y dieléctricos; en cambio, la solución analítica sólo se desarrollo para el caso de conductores perfectos.

En el Capítulo III se presenta una descripción de cómo se llevó a cabo la implementación numérica de los tres métodos, para después explicar cómo se obtiene las reflectancias directa-difusa y difusa-difusa con superficies cuya rugosidad depende de una sola coordenada (superficies unidimensionales). Asimismo se presentan los resultados obtenidos con los cálculos numéricos y la discusión de resultados.

En el Capítulo IV se describe detalladamente la metodología experimental empleada. Primero se describe la teoría de las esferas integradoras, después se explican los métodos empleados para la caracterización de las superficies y de la teoría de la esfera integradora, para finalmente presentar el arreglo experimental utilizado para la medición de reflectancias.

En el Capítulo V se presentan las mediciones de reflectancias obtenidas para distintos tipos de superficies. Finalmente en el Capítulo VI se presenta un resumen y las conclusiones del trabajo.

Capítulo II

Esparcimiento de luz por superficies

En este capítulo se presenta una revisión sobre los aspectos teóricos a utilizar en este trabajo. Se considera el problema de esparcimiento de luz por superfices rugosas. La interacción de la luz con una superficie rugosa es, en general, un problema no resuelto por métodos analíticos. La principal dificultad para resolver problemas de esparcimiento de luz por superficies rugosas es la evaluación del campo electromagnético en la superficie y, en particular, los valores del campo eléctrico y su derivada normal.

Primeramente se define el problema físico a estudiar y la notación que se utilizará. Posteriormente se presentan tres métodos para encontrar el campo esparcido. El primero está basado en el método integral (riguroso), después se presentan dos métodos basados en la aproximación de Kirchhoff.

Cuando una onda electromagnética incide sobre la interfaz plana entre dos medios, parte de ella es reflejada y parte es transmitida de acuerdo a leyes que son bien conocidas, como son los coeficientes de Fresnel. Por otro lado, para una interfaz no plana se tiene una superficie rugosa que podemos representar por su perfil.

Cuando se conocen las condiciones de incidencia y las características de la superficie, el problema más usual consiste en determinar la distribución angular de la intensidad promedio esparcida. El problema así planteado es complejo, pues frecuentemente el perfil que define los dos medios no se conoce exactamente y se especifica solamente en términos estadísticos, es decir se busca alguna cantidad o característica promedio de la superficie (desviación estándar de altura, distribución de pendientes, etc).

Dado que el perfil superficial constituye entonces una realización de un proceso aleatorio, el campo electromagnético esparcido constituye un proceso aleatorio complejo, por lo que las cantidades de interés pueden ser entonces los momentos, la función de densidad de probabilidad de las fluctuaciones del campo o de la intensidad, las correlaciones del campo eléctrico, etc. En la presente sección concentramos nuestro interés en la distribución angular de la intensidad promedio de la luz esparcida.

Partiendo del hecho de que conocemos tanto las características del campo incidente, como las propiedades estadísticas de la superficie, el problema consistirá en determinar, con algunas aproximaciones, los campos reflejados y transmitidos.

Cuando un haz de luz coherente es reflejado por una superficie rugosa, el campo esparcido contiene generalmente una componente que viaja en la dirección especular y una componente difusa que presenta fluctuaciones aleatorias en intensidad y que puede aparecer en todo el hemisferio. En la figura 2 se presentan un par de ejemplos que ilustran esta situación.

El campo asociado a la componente especular tiene la misma forma y comportamiento de propagación que el campo reflejado por una superficie plana pero, puesto que parte de la energía incidente es tomada por la componente difusa, la energía contenida por este haz está disminuida. La componente coherente se asocia normalmente a la componente especular y la componente incoherente con la componente difusa.

Para conocer la distribución angular de la intensidad en la superficie, es necesario conocer el coeficiente de reflexión diferencial (CDR), el cual se define como la fracción total de flujo incidente sobre la superficie que es esparcido en un intervalo angular $d\theta_s$ sobre la dirección de esparcimiento definida por el ángulo θ_s. Dicho coeficiente se puede escribir de la siguiente forma

$$\left(\frac{dR}{d\theta_s}\right) = \frac{1}{\mathfrak{F}(\theta_0)}\langle|R(q|k)|^2\rangle, \tag{27}$$

donde $\mathfrak{F}(\theta_0)$ es un factor de normalización, el cual depende del haz de iluminación. El

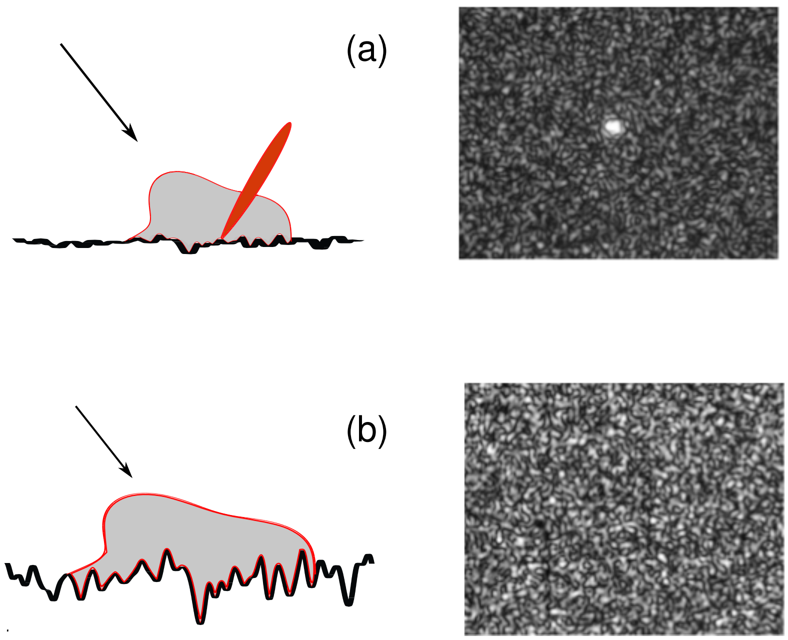


Figura 2. Patrones de intensidad y de speck en superficies con diferentes rugosidades. En el inciso (a) se presenta una superficie con una rugosidad pequeña y en el inciso (b) una superficie con una rugosidad grande.

cálculo de $R(p|q)$ es el principal problema en la teoría de esparcimiento de superficies rugosas.

El promedio del coeficiente de reflexión diferencial $\partial R/\partial\theta_s$ está dado por

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle = \frac{1}{\mathfrak{F}(\theta_0)} \langle |R(q|k)| \rangle^2, \tag{28}$$

donde los paréntisis angulados representan el promedio de conjunto o ensamble de realizaciones de la superficie. La componente coherente se define como

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{coh} &= \frac{1}{\mathfrak{F}(\theta_0)} |\langle R(q|k) \rangle|^2 \\ &= \delta(\theta_s - \theta_0)\mathcal{R}(\theta_0), \end{aligned} \tag{29}$$

donde $\mathcal{R}(\theta_0)$ representa la reflectividad de la superficie aleatoria, es decir la fracción de potencia incidente que contiene la parte coherente

$$\mathcal{R}(\theta_0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{coh} d\theta_s. \tag{30}$$

Por otro lado definimos la componente incoherente como

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{incoh} = \frac{1}{\mathfrak{F}(\theta_0)} [|\langle R(q|k)\rangle^2| - |\langle R(q|k)\rangle|^2]. \tag{31}$$

II.1 Descripción estadística de las superficies rugosas

Una cantidad básica para la descripción de un proceso aleatorio es la función de correlación estadística del perfil, la cual está dada por

$$\langle \zeta(x_1)\zeta(x_1')\rangle = \delta^2 W(|x_1 - x_1'|), \tag{32}$$

donde

$$\delta^2 = \langle \zeta^2(x_1)\rangle. \tag{33}$$

El parámetro δ representa la desviación estándar de las alturas de la superficie, a veces llamado el parámetro de rugosidad. El hecho de que la función de correlación $W(|x_1 - x_1')|$ dependa solamente de la diferencia de $x_1 - x_1'$ implica que estamos considerando que el proceso aleatorio es estacionario.

Una suposición común que se realiza en la teoría de esparcimiento es que el perfil de la superficie constituye un proceso aleatorio gaussiano. Para estos procesos, la función de densidad de probabilidad es conocida para todos los órdenes (Goodman, 1985) y, para procesos con promedio cero, está completamente determinadas por la función de correlación de las alturas en dos puntos (Beckmann y Spizzichino, 1963). Una de las principales dificultades que se tiene para estudiar esparcimiento por superficies cuyo perfil es un proceso no gaussiano es que no se conocen las funciones de densidad de probabilidad para todos los órdenes.

Por simplicidad asumiremos que el perfil de nuestra superficie se puede modelar como un proceso aleatorio gaussiano. También se asume, en primera instancia, que la función de correlación $W(|x_1|)$ es gaussiana. Es decir, que

$$W(|x_1|) = \exp\left[-\frac{x_1^2}{a^2}\right], \tag{34}$$

con su correspondiente espectro de potencia

$$g(|k|) = \sqrt{\pi} a \exp\left[-\frac{a^2 k^2}{4}\right]. \tag{35}$$

El parámetro a se conoce como la longitud de correlación, y como ya se ha mencionado δ es un parámetro de rugosidad que representa la desviación estándar de alturas. En este caso, el proceso está completamente descrito por los parámetros δ y a, que representan, una medida de las escala vertical y lateral de las irregularidades de la superficie, respectivamente; la función de correlación puede relacionarse a la distancia promedio entre picos y valles consecutivos en la superficie $x_3 = \zeta(x_1)$ (Maradudin y Michel, 1990). Para procesos aleatorios gaussianos la desviación estándar de pendientes (δ_d) de la superficies está dada por (Maradudin *et al.*, 1990)

$$\langle(\zeta'(x_1'))^2\rangle^{(1/2)} = \sqrt{2}\frac{\delta}{a} \tag{36}$$

Es también importante considerar otro tipo de funciones de correlación (o espectros de potencia) pues, en general, las superficies reales no siguen el modelo más sencillo y tienen propiedades estadísticas que son difíciles de modelar. Normalmente, las superficies reales presentan propiedades más acordes a las superficies multiescala.

La función de correlación para superficies con una función de correlación tipo función sinc, que corresponde a una densidad espectral de potencia rectangular, está dada por

$$W(|x_1 - x_1'|) = \operatorname{sinc}\left(\frac{|x_1 - x_1'|}{a}\right). \tag{37}$$

Más interesante, y complicado, es el caso de una función de correlación tipo exponencial negativa. Es decir,

$$W(|x_1 - x_1'|) = \exp\left[\frac{-|x_1 - x_1'|}{a}\right]. \tag{38}$$

En la figura 3 se presentan algunas realizaciones de perfiles para procesos aleatorios con diferentes funciones de correlación.

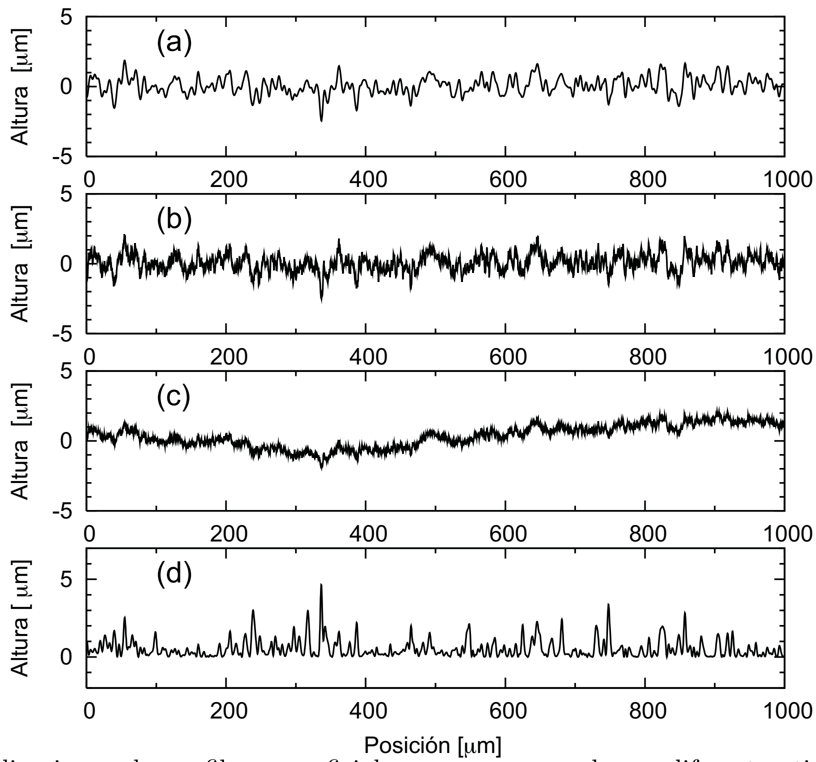


Figura 3. Realizaciones de perfiles superficiales que corresponden a diferentes tipos de procesos aleatorios. (a) Proceso aleatorio gaussiano con función de correlación gaussiana. (b) Proceso aleatorio gaussiano con función de correlación exponencial negativa. (c) Proceso aleatorio gaussiano con espectro de potencias tipo ley de potencias. (d) Superficie con estadísticas tipo exponencial negativa y función de correlación gaussiana.

II.2 El método integral

Para modelar la interacción y encontrar la amplitud compleja de esparcimiento, se puede hacer uso del llamado método de integral. Debido a que el método integral ha sido descrito con detalle por Maradudin *et al.* (1990) en este análisis se presentan solamente las generalidades del método.

Este método consiste básicamente en plantear el problema con base en el segundo teorema integral de Green, el cual permite expresar el campo dentro de un volumen en términos del campo y su derivada normal en las fronteras del medio.

Consideramos que el medio de incidencia consiste de espacio (vacio) o aire y que la superficie está caracterizada por una constante dieléctrica $\varepsilon(\omega)$. El plano de incidencia es el plano $x_1 - x_3$ y se toma una superficie unidimensional que es invariante a lo largo de x_2 (problema 2D) y cuyo perfil está definido por la ecuación $x_3 = \zeta(x_1)$. Por lo tanto el eje x_3 es perpendicular al plano promedio de la superficie y la superficie es invariante a lo largo de x_2. Otra suposición que se realiza es que las regiones seminfinitas $x_3 > \zeta(x_1)$ y $\zeta(x_1) > x_3$ contienen medios homogéneos e isotrópicos. En la figura 4 se ilustra la geometría del problema.

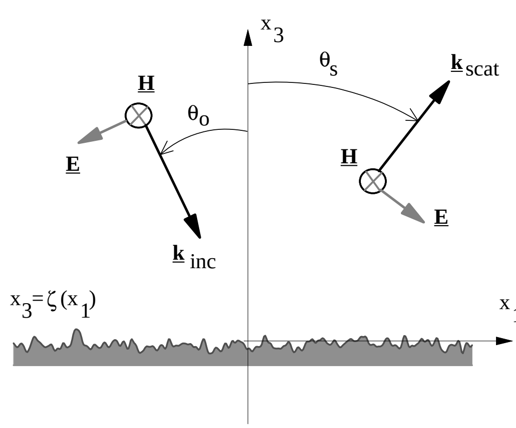


Figura 4. Geometría del problema de esparcimiento

Tenemos que para polarización p el campo electromagnético está caracterizado por la componente del campo magnético a lo largo de x_2, $H(x_1, x_3) = (0, H_2(x_1, x_3), 0)$. Por otro lado, y para polarización s está caracterizada por la componente del campo eléctrico a lo largo de x_2, $E(x_1, x_3) = (0, E_2(x_1, x_3), 0)$. Vale la pena mencionar que estos campos están desacopladas y pueden estudiarse por separado (Born y Wolf, 1980).

Consideramos que la superficie se ilumina por un haz monocromático de frecuencia ω. Se asume entonces una dependencia temporal de la forma $e^{-i\omega t}$, pero la referencia explícita a esto se omite de la notación. Escribimos entonces que

$$\psi(\underline{r}, t) = [0, \psi(\underline{r}), 0]e^{-i\omega t}, \tag{39}$$

donde $\underline{r} = (x_1, x_3)$ y $\psi(\underline{r})$ es una función escalar que depende de la polarización. En el caso de polarización s representará $E_2(x_1, x_3)$ y para polarización p será $H_2(x_1, x_3)$. Debido a la suposición de invariancia a lo largo de x_2, $\psi(r)$ debe satisfacer las ecuaciones de onda

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\right]\psi(\underline{r}, t) = 0 \qquad x_3 > \zeta(x_1), \tag{40}$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \varepsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\right]\psi(\underline{r}, t) = 0 \qquad x_3 < \zeta(x_1). \tag{41}$$

Para dar solución a las ecuaciones de onda (40) y (41) se consideran la funciones de Green, $G_0(\underline{r}|\underline{r}')$ y $G_\varepsilon(\underline{r}|\underline{r}')$, como soluciones de las ecuaciones

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right]G_0(\underline{r}|\underline{r}') = -4\pi\delta(\underline{r} - \underline{r}') \tag{42}$$

$$\left[\nabla^2 + \varepsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\right]G_\varepsilon(\underline{r}|\underline{r}') = -4\pi\delta(\underline{r} - \underline{r}') \tag{43}$$

donde $\nabla = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_3^2$, $\underline{r}$ representa el punto de observación y $\underline{r}'$ una posición que puede ser interpretada como la posición de una fuente puntual. Las funciones Green que utilizaremos y que son solución de las ecuaciones diferenciales (40) y (41) están dadas por

$$
\begin{aligned}
G_0(\underline{r}|\underline{r}') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} e^{iq(x_1-x_1')+i\alpha_0(q)|x_3-x_3'|} \\
&= i\pi H_0^{(1)}(\frac{\omega}{c}|\underline{r}-\underline{r}'|), \qquad (44)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G_\varepsilon(\underline{r}|\underline{r}') &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} e^{iqn_c(\omega)(x_1-x_1')+i\alpha_0(q)|x_3-x_3'|} \\
&= i\pi H_0^{(1)}(n_c(\omega)\frac{\omega}{c}|\underline{r}-\underline{r}'|), \qquad (45)
\end{aligned}
$$

donde $H_0^{(1)}$ es una función Hankel de primer tipo, $n_c(\omega)$ representa el índice de refracción complejo y $\alpha_0(q)$ es

$$
\alpha_0(q) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - q^2} & q^2 < \frac{\omega^2}{c^2}, \\ i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - q^2} & q^2 > \frac{\omega^2}{c^2}. \end{cases} \qquad (46)
$$

Para encontrar el campo esparcido utilizamos el segundo teorema integral de Green, que nos permite relacionar el campo en un volumen con una integral de superficie

$$
\int_{\mathrm{V}} d^3x(u\nabla^2\upsilon - \upsilon\nabla^2 u) = \int_{\sum} ds(u\frac{\partial \upsilon}{\partial m} - \upsilon\frac{\partial u}{\partial n}), \qquad (47)
$$

donde $\partial/\partial n$ es la derivada a lo largo de la normal de la superficie $\sum$ que encierra al volumen V.

Utilizamos el teorema de integral de Green en la región $x_3' > \zeta(x_1')$, con $u = \psi_2^{>}(\underline{r})$ y $\upsilon = G_0(\underline{r}|\underline{r}')$, y en la región donde $x_3' < \zeta(x_1')$, con $u = \psi_2^{<}(\underline{r})$ y $\upsilon = G_\varepsilon(\underline{r}|\underline{r}')$, manteniendo siempre el punto de observación $\underline{r}$ en el medio de incidencia (es decir,

$x_3 > \zeta(x_1)$). De esta manera obtenemos

$$
\begin{aligned}
\psi_2^{>}(\underline{r}) &= \psi_2^{>}(\underline{r})_{inc} + \frac{1}{4\pi}\int_{\infty}^{\infty} dx_1' \left[\left(-\zeta'(x_1')\frac{\partial}{\partial x_1'} + \frac{\partial}{\partial x_3'}\right) G_0(\underline{r}|\underline{r}')\right]_{x_3'=\zeta(x_1')} \qquad (48)\\
&\times \quad \{\psi(x_1') - G_0(r|x_1', \zeta(x_1'))\upsilon(x_1')\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{4\pi}\int_{\infty}^{\infty} dx_1' \left\{\left[\left(-\zeta'(x_1')\frac{\partial}{\partial x_1'} + \frac{\partial}{\partial x_3'}\right) G_\varepsilon(\underline{r}, \underline{r}')\right]_{x_3'=\zeta(x_1')}\right\} \qquad (49)\\
&\times \quad \{\psi(x_1') - \varepsilon(\omega)G_\varepsilon(r|x_1', \zeta(x_1'))\upsilon(x_1')\}.
\end{aligned}
$$

Los términos $\psi(x_1')$ y $\upsilon(x_1')$ se conocen como las funciones fuente. Al sustituir la ecuación (45) en la ecuación (48) y realizando una serie de manipulaciones algebráicas obtenemos que

$$
\psi_2^{>}(\underline{r}) = \frac{dq}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} R_{p,s}(q)e^{iqx_1 + i\alpha_0(q)x_3}, \qquad (50)
$$

donde

$$
R_{p,s}(q) = \frac{i}{2\alpha_0(q)}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1[i(q\zeta'(x_1) - \alpha_0(q))\psi(x_1) - \upsilon(x_1)]e^{-iqx_1 - i\alpha_0(q)\zeta(x_1)}. \qquad (51)
$$

La ecuación (51) representa la amplitud compleja de esparcimiento. Se observa que esta ecuación es igual para polarización s y para polarización p. La única diferencia que existe en el cálculo de dicha amplitud son las funciones fuente. Para ondas propagantes ($q \leq \omega/c$), los factores angulares q y $\alpha_0(q)$ de la ecuación (51) están dados por

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{\omega}{c}\sin\theta_s, \qquad (52)\\
\alpha_0(q) &= \frac{\omega}{c}\cos\theta_s. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

Haciendo, en la ecuaciones (48) y (49), el punto de observación tender a la superficie por el lado de arriba ($\underline{r} \to (x_1, \zeta(x_1) + \varepsilon)$), se obtienen un par de ecuaciones integrales acopladas (Maradudin *et al.*, 1990).

$$\psi(x_1) = \psi^{inc}(x_1) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1'[\psi_0(x_1|x_1')H(x_1') - L_0(x_1|x_1')\upsilon(x_1')], \tag{54}$$

$$0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1'[H_\varepsilon(x_1|x_1')\psi(x_1') - vL_\varepsilon(x_1|x_1')\upsilon(x_1')]. \tag{55}$$

Las funciones fuente $\psi(x_1)$ y $\upsilon(x_1)$ se pueden determinar numéricamente de este par de ecuaciones donde

$$H_\varepsilon(x_1|x_1')\psi(x_1') = \frac{i}{4}\frac{\partial}{\partial N'}H_0^{(1)}\left[(n_c(\omega)\frac{\omega}{c})\xi\right]|_{x_3'=\zeta(x_1')}, \tag{56}$$

$$L_\varepsilon(x_1|x_1')\psi(x_1') = \frac{i}{4}H_0^{(1)}\left[(n_c(\omega)\frac{\omega}{c})\xi\right]|_{x_3'=\zeta(x_1')}, \tag{57}$$

y

$$\xi = [(x_1 - x_1')^2 + (\zeta(x_1) - x_3' + \eta)^2]^{1/2}. \tag{58}$$

La variable v en las ecuaciones (54) y (55) depende de la polarización y está definida como

$$v = \begin{cases} \epsilon(\omega) & \text{polarización p,} \\ 1 & \text{polarización s.} \end{cases}$$

El operador $\partial/\partial N$ que representa una derivada normal no normalizada y está definido por la siguiente expresión:

$$\frac{\partial}{\partial N} = -\zeta'(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3}. \tag{59}$$

Es necesario mencionar que las funciones Hankel y sus derivadas tienen singularidades alrededor del origen, por lo que no es posible intercambiar los operadores del límite e integración en la ecuaciones (54) y (55). La solución del sistema de ecuaciones es complicada y sólo acepta soluciones analíticas en casos especiales sencillos. La solución numérica del sistema se encuentra descrita detalladamente en la referencia Maradudin *et al.* (1990).

El problema se simplifica cuando la superficie es un conductor perfecto, ya que solamente se requiere determinar una función fuente. En este caso la amplitud esparcida puede escribirse de la forma

$$R_{p,s}(q|k) = \frac{i}{2\alpha_0(q)} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp\{-iqx_1 - i\alpha_0\zeta(x_1)\}\chi(k,\zeta')\psi_K(x_1), \tag{60}$$

$$\chi(k,\zeta') = \begin{cases} -i[k\zeta'(x_1) - \alpha_0(k)] & \text{polarización p,} \\ 1 & \text{polarización s.} \end{cases}$$

El esparcimiento de luz por superficies rugosas bidimensionales, $x_3 = \zeta(x_\|)$, involucra soluciones con campos de naturaleza vectorial, por lo que no es posible dar el tratamiento escalar descrito con anterioridad. Esto incrementa el número de funciones fuente desconocidas y el número de ecuaciones integrales acopladas. Por otro lado el número de puntos de discretización aumenta cuadráticamente con las dimensiones, lo cual hace que el problema sea muy pesado computacionalmente y, por el momento, fuera del alcance de nuestras facilidades de cómputo.

II.3 La aproximación de Kirchhoff

La aproximación de Kirchhoff consiste en aproximar las condiciones de frontera por aquellas que se tendrían con un plano infinito, tangente a cada punto de la superficie. Para que esta aproximación sea válida se debe cumplir que $a \gg \lambda$, donde a es la longitud de correlación y λ la longitud de onda del campo incidente. La aproximación de Kirchhoff sólo será válida cuando el radio de curvatura de la superficie sea grande con respecto a la longitud de onda (ver figura 5(a)).

Para darle forma matemática a esta suposición consideramos que la superficie se ilumina con una onda plana monocromática. La amplitud compleja de esparcimiento

(a) (b)

Figura 5. IlustraciÉon del plano tangente a un punto de una superficie. El radio de curvatura mostrado en (a) es grande, (b) el radio local de curvatura es pequeño en comparación con la longitud de onda.

está definida en la ecuación (51). Las funciones fuente $\psi(x_1)$ y $\upsilon(x_1)$ se reemplazan por las que se obtendrían para un plano infinito y que se pueden escribir de la forma (Beckmann y Spizzichino, 1963)

$$\psi(x_1) = (1+R)\psi(x_1,x_3)_{inc}, \tag{61}$$

$$\upsilon(x_1) = (1-R)\frac{\partial}{\partial N}\psi(x_1,x_3)_{inc}, \tag{62}$$

en donde la derivada normal $\partial/\partial N$ está definida por la ecuación (59) y R representa el coeficiente de reflexión de Fresnel, el cual depende del ángulo local de incidencia, la polarización del campo incidente y de la constante dieléctrica $\varepsilon(\omega)$. El ángulo local de incidencia ϑ es viene por

$$\vartheta = \theta_0 - \arctan[\zeta'(x_1)], \tag{63}$$

donde θ_0 es el ángulo de incidencia y $\zeta'(x_1)$ representa la pendiente de la superficie.

Los coeficientes de Fresnel para las polarizaciones p y s están dados por las siguientes expresiones (Beckmann y Spizzichino, 1963)

$$R_p = \frac{\varepsilon(\omega)\cos\vartheta - \sqrt{\varepsilon(\omega)-\sin^2\vartheta}}{\varepsilon(\omega)\cos\vartheta + \sqrt{\varepsilon(\omega)-\sin^2\vartheta}}, \tag{64}$$

$$R_s = \frac{\cos\vartheta - \sqrt{\varepsilon(\omega)-\sin^2\vartheta}}{\cos\vartheta + \sqrt{\varepsilon(\omega)-\sin^2\vartheta}}. \tag{65}$$

Para un conductor perfecto se tiene que $R = \pm 1$, donde el signo positivo corresponde a la polarización p y el signo negativo a la polarización s, por lo que las funciones fuentes estarán dadas por

$$\psi_k(x_1) = \begin{cases} 2\psi(r)_{inc} & \text{polarización p,} \\ 2\frac{\partial}{\partial N}\psi(r)_{inc} & \text{polarización s.} \end{cases}$$

II.4 La Potencia incidente

Para determinar las funciones fuente, el campo esparcido por la superficie y la normalización del coeficiente diferencial de reflexión, debemos conocer la forma del campo incidente. En esta sección se describen dos casos: un haz Gaussiano y una onda plana.

Para calcular la potencia incidente es necesario emplear el vector de Poyting $\overrightarrow{S}$, que proporciona la dirección y la magnitud del flujo de energía por unidad de tiempo. La componente del vector de Poynting de la onda incidente a lo largo de x_3 (perpendicular al plano promedio de la superficie) está dada por (Maradudin *et al.*, 1990)

$$S_3 = -i\frac{c^2}{8\pi\epsilon\omega}\frac{\partial\psi_{inc}}{\partial_3}\psi^*_{inc}. \tag{66}$$

La potencia incidente se obtiene integrando sobre el plano $x_1 - x_2$. Para nuestros cálculos utilizaremos haces gaussianos que son descritos por la siguiente ecuación (Maradudin *et al.*, 1990)

$$\begin{aligned} \psi(\underline{r})_{inc} &= \exp\left[i\frac{\omega}{c}(x_1\sin\theta_0 - x_3\cos\theta_0)[1 + w(r)]\right] \\ &\times \exp\left[-(x_1\cos\theta_0 - x_3\sin\theta_0)/w\right]^2 \end{aligned} \tag{67}$$

donde θ_0 es en ángulo de incidencia y

$$w(r) = \frac{c^2}{\omega^2 w^2}\left[\frac{2}{w^2}\left(x_1\cos\theta_0 - x_3\sin\theta_0\right)^2 - 1\right]. \tag{68}$$

La ecuación (67) es solución a la ecuación de onda y $w = g\cos\theta_0$ donde ω es la cintura del haz y g es su proyección en x_1. La potencia incidente en la superficie está determinada por la siguiente expresión

$$P_{inc} = \left| \int dx_1 \int dx_2 Re \left[-i \frac{c^2}{8\pi\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \psi^{>}(r)_{inc} \right) \psi^{>}(r)^*_{inc} \right]_{x_3=0} \right| . \tag{69}$$

Sustituyendo la ecuación (67) en la ecuación (69) tenemos que la potencia incidente está dada por

$$P_{inc} = L_2 \frac{cw}{8\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{c^2}{2\omega^2 w^2} (1 + 2\tan^2(\theta_0) \right], \tag{70}$$

donde L_2 es la longitud de la superficie en la dirección x_2. Esta expresión es independiente de la polarización.

Por otro lado, si consideramos ondas planas monocromáticas como campo incidente, éstas son descritas por la siguiente ecuación

$$\psi_{inc}(r) = \exp \left[i \frac{\omega}{c} \left(x_1 \sin(\theta_0) - x_3 \cos(\theta_0) \right) \right]. \tag{71}$$

La potencia incidente que intersecta la sección transversal geométrica de la superficie se obtiene al sustituir la ecuación (71) en la ecuación (69), por lo que la potencia incidente para una onda plana es

$$\begin{aligned} P_{inc} &= \left| \int_{-L_1}^{L_1} dx_1 \int_{-L_2}^{L_2} dx_2 \left[-\frac{c}{8\pi} \cos(\theta_0) \right]_{x_3=0} \right| \\ &= L_1 L_2 \frac{c}{8\pi} \cos(\theta_0) \end{aligned} \tag{72}$$

donde L_1 y L_2 son las dimensiones de la superficie a lo largo de x_1 y x_2.

II.5 Potencia esparcida

Para calcular la potencia esparcida es necesario emplear nuevamente el vector de Poynting $\overrightarrow{S}$ (ecuación (66)). La parte real de la expresión anterior proporciona el flujo de energía promedio por unidad de tiempo

$$P_{sc} = \int dx_1 \int dx_2 Re \left[-i \frac{c^2}{8\pi\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \psi_2(r)_{sc} \right) \psi_2^*(r)_{sc} \right]_{x_3 > \zeta(x_1)_{max}} . \tag{73}$$

Sustituyendo la ecuación (50) en la expresión anterior se tenemos que

$$\begin{aligned} P_{sc} &= L_1 \frac{c^2}{8\pi\omega} \int dx_1 \int \frac{\partial q}{2\pi} \int \frac{\partial q'}{2\pi} Re \left[-iR^{<}_{p,s}(q)(-i\alpha_0(q)) R^{<*}_{p,s}(q') \right] \\ &\times \; e^{i(q-q')x_1 + i(\alpha_0(q) - \alpha_0^*(q'))x_3} \\ &= -L_1 \frac{c^2}{8\pi\omega} \int_{-\omega/c}^{\omega/c} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |R_{p,s}(q)|^2. \end{aligned} \tag{74}$$

Realizamos un cambio de variables en la ecuación (74), introduciendo los términos q y $\alpha_0(q)$ definidos en las ecuaciones (52) y (53), respectivamente, con lo que tenemos que $dq = (\omega/c)\cos\theta_s d\theta_s$ y

$$P_{sc} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta_s P_p(\theta_s), \tag{75}$$

donde

$$P_p(\theta_s) = L_1 \frac{c^2}{64\pi\omega} |r_{p,s}(\theta_s)|^2. \tag{76}$$

Cabe señalar que $r_{p,s}(\theta_s)$ está relacionado con el espectro angular de la amplitud compleja de esparcimiento, que está dada por

$$\begin{aligned} r_{p,s}(\theta_s) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx_1 \exp^{i(\frac{\omega}{c}(x_1 \sin(\theta_s) + \zeta(x_1)\cos(\theta_s))} \\ &\times \left[i\frac{\omega}{c}(\zeta'(x_1)\sin(\theta_s) - \cos(\theta_s))\psi(x_1) - \upsilon(x_1) \right], \end{aligned} \tag{77}$$

donde la funciones fuente $\psi(x_1)$ y $\upsilon(x_1)$ están definidas en las ecuaciones (54) y (55) para el método riguroso. Por otro lado, para la aproximación de Kirchhoff, dichas funciones están definidas en las ecuaciones (61) y (62). En esta aproximación, la representación angular de la amplitud compleja de esparcimiento para un conductor perfecto es

$$r_{p,s}(\theta_s) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dx_1 \exp^{i(\frac{\omega}{c}(x_1 \sin(\theta_s) + \zeta(x_1)\cos(\theta_x))} \psi_K(x_1) \chi(\theta_0, \zeta'), \tag{78}$$

donde

$$\chi(\theta_0, \zeta') = \begin{cases} i\frac{\omega}{c}\left[\zeta'(x_1)\sin(\theta_s) - \cos(\theta_s)\right] & \text{polarización p,} \\ 1 & \text{polarización s,} \end{cases}$$

y

$$\psi_k(x_1) = \begin{cases} 2\psi(r)_{inc} & \text{polarización p,} \\ 2\frac{\partial}{\partial N}\psi(r)_{inc} & \text{polarización s.} \end{cases}$$

La diferencia existente en el cálculo de la potencia esparcida entre un haz gaussiano y una onda plana, está en las funciones fuente.

II.6 El Coeficiente de reflexión diferencial

Para calcular el coeficiente de reflexión diferencial (CDR), el cual representa la fracción de potencia incidente sobre una superficie que es esparcida por unidad de ángulo, se necesita conocer la potencia incidente y la distribución angular de la intensidad (potencia, angulo esparcido). El CDR está definido por la siguiente expresión

$$\frac{\partial R}{\partial \theta_s} = \frac{P_p(\theta_s)}{P_{inc}}. \tag{79}$$

Para el caso de un haz gaussiano, la potencia incidente, está dada por la ecuación (70). Utilizando la expresión para la intensidad esparcida, ecuación (76), encontramos la siguiente expresión para el coeficiente de reflexión diferencial (CDR):

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \theta_s}\right) = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}}\frac{c}{\omega g}\frac{|r_{p,s}(\theta_s)|^2}{\left[1 - c^2(1 + 2\tan^2\theta_0)/2\omega^2 g^2\right]}. \tag{80}$$

El promedio del coeficiente de reflexión diferencial sobre un conjunto de realizaciones de la superficie es

$$\left\langle\frac{\partial R}{\partial \theta_s}\right\rangle = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}}\frac{c}{\omega g}\frac{\langle|r_{p,s}(\theta_s)|^2\rangle}{\left[1 - c^2(1 + 2\tan^2\theta_0)/2\omega^2 g^2\right]}. \tag{81}$$

Este promedio se puede descomponer como la suma de la contribución de la componente coherente y la de la componente incoherente. La contribución de la componente coherente es

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{coh} = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{c}{\omega g} \frac{|\langle r_{p,s}(\theta_s) \rangle|^2}{[1 - c^2(1 + 2\tan^2\theta_0)/2\omega^2 g^2]}, \tag{82}$$

mientras que la contribución de la componente incoherente es

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{incoh} = \frac{1}{2(2\pi)^{3/2}} \frac{c}{\omega g} \frac{\langle |r_{p,s}(\theta_s)|^2 \rangle - |\langle r_{p,s}(\theta_s) \rangle|^2}{[1 - c^2(1 + 2\tan^2\theta_0)/2\omega^2 g^2]}. \tag{83}$$

Para el caso de iluminación con una onda plana, encontramos la siguiente expresión para el CDR

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right) = \frac{c}{L_1 8\pi\omega \cos(\theta_0)} |r_{p,s}(\theta_s)|^2. \tag{84}$$

El promedio del coeficiente de reflexión diferencial está dado por

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle = \frac{c}{L_1 8\pi\omega \cos(\theta_0)} \langle |r_{p,s}(\theta_s)|^2 \rangle, \tag{85}$$

mientras que la contribución de la componente coherente es

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{coh} = \frac{c}{L_1 8\pi\omega \cos(\theta_0)} |\langle \langle r_{p,s}(\theta_s) \rangle|^2 \tag{86}$$

y la componente incoherente es

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{incoh} = \frac{c}{L_1 8\pi\omega \cos(\theta_0)} \langle |r_{p,s}(\theta_s)|^2 \rangle - |\langle r_{p,s}(\theta_s) \rangle|^2 \rangle. \tag{87}$$

II.7 Esparcimiento en la aproximación de Kirchhoff

A continuación se describirá la solución analítica que se utilizó para la aproximación de Kirchhoff. Esta solución sólo es válida para procesos aleatorios gaussianos con función de correlación gaussiana. La evaluación de la integral se complica para un dieléctrico debido a que los coeficientes de Fresnel dependen del ángulo local de incidencia. Por esta razón, y solamente como una manera de evaluar el potencial de este tipo de teorías analíticas en la estimación de la reflectancia difusa se presenta ahora el caso del conductor perfecto.

La ventaja de contar con una solución analítica es que podemos calcular directamente el promedio coeficiente de reflexión diferencial coherente, incoherente y total sin recurrir a cálculos numéricos complicados.

Partiendo de la ecuación (60), e integrando por partes (Beckmann y Spizzichino, 1963; Ogilvy, 1991) se tiene que

$$R_{p,s}(q) = F_{p,s}(\theta_0, \theta_s) \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp\{-i\upsilon_1 x_1 - i\upsilon_3 \zeta(x_1)\}, \tag{88}$$

donde $\zeta(x_1)$ es el perfil de la superficie y $F_{p,s}(\theta_0, \theta_s)$ es un factor angular dado por

$$F_{p,s}(\theta_0, \theta_s) = \pm \frac{1 + \cos(\theta_0 + \theta_s)}{\cos\theta_s(\cos\theta_0 + \cos\theta_s)}. \tag{89}$$

El signo del factor angular dependerá de la polarización del campo incidente. Para polarización s será positivo y para la polarización p será negativo. Las variables υ_1 y υ_3 están dadas por

$$\upsilon_1 = \frac{\omega}{c}(\sin\theta_s - \sin\theta_0) \quad , \tag{90}$$

$$\upsilon_3 = \frac{\omega}{c}(\cos\theta_0 + \cos\theta_s). \tag{91}$$

Para obtener la componente coherente del coeficiente de reflexión diferencial, es necesario promediar la amplitud compleja de esparcimiento

$$\langle R(q) \rangle = F_{p,s}(\theta_0, \theta_s) \langle e^{-\upsilon_3 \zeta(x_1)} \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\upsilon_1 x_1} dx_1. \tag{92}$$

Considerando un proceso aleatorio gaussiano con función de correlación gaussiana tenemos que(Goodman, 1985)

$$\langle e^{-i\upsilon_3 \zeta(x_1)} \rangle = e^{-\upsilon_3^2 \delta^2/2}. \tag{93}$$

Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv_1 x_1} dx_1 = 2\pi\delta(\upsilon_1). \tag{94}$$

Sustituyendo las ecuaciones (93) y (94) en la ecuación (92) tenemos que

$$|\langle R(q)\rangle|^2 = F_{p,s}^2(\theta_0,\theta_s)e^{-\upsilon_3^2\delta^2} L_1 2\pi\delta(\upsilon_1) \tag{95}$$

Para encontrar el coeficiente de reflexión diferencial coherente debemos sustituir la ecuación (92) en la ecuación (29), encontrando que el CDR es

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{coh} = \frac{\omega}{c}\frac{\cos^2\theta_s}{\cos\theta_0} F^2(\theta_0,\theta_s)e^{-\upsilon_3^2\delta^2}\delta(\upsilon_1). \tag{96}$$

Al integrar la ecuación anterior sobre todo el hemisferio, como se muestra en la ecuación (30), encontramos la fracción de potencia incidente que contiene la parte coherente. Es decir,

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{coh} = e^{-4\frac{\omega^2}{c^2}\cos^2\theta_0\delta^2}. \tag{97}$$

Para calcular el coeficiente de reflexión diferencial incoherente, es necesario evaluar el módulo al cuadrado de la amplitud compleja y después promediarlo. Tenemos entonces que

$$\langle |R(q|k)|^2\rangle = F_{p,s}^2(\theta_0,\theta_s)\int dx \int dx' e^{-iv_1(x_1-x_1')}\langle e^{-iv_3[\zeta(x_1)-\zeta(x_1')]}\rangle \tag{98}$$

Estamos considerando que el perfil de la superficie constituye un proceso aleatorio gaussiano estacionario, por lo que (Goodman, 1985)

$$\langle e^{-iv_3[\zeta(x_1)-\zeta(x_1')]}\rangle = e^{-\upsilon_3[1-W(u)]}, \tag{99}$$

donde $u = x_1 - x_1'$. La intensidad promedio en el campo lejano está dada por

$$\langle |R(q|k)|^2\rangle = F_{p,s}^2(\theta_0,\theta_s)e^{\upsilon_3^2\delta^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iv_1 u} e^{\upsilon_3^2\delta^2[1-W(u)]} du. \tag{100}$$

Para evaluar esta integral, podemos realizar una expansión en serie de la exponencial (Beckmann y Spizzichino, 1963) e integrar término a término. Tenemos entonces que el coeficiente de reflexión diferencial difuso o incoherente esta dado por

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{incoh} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega}{c} \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_0} \sqrt{\pi} F_{p,s}^2(\theta_0, \theta_s) a e^{-\upsilon_3^2 \delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\delta \upsilon_3)^{2m}}{m! \sqrt{m}} e^{-\frac{\upsilon_1^2 a^2}{4m}}. \tag{101}$$

Para el caso de superficies muy rugosas la serie presentada en la ecuación (101) converge muy lentamente por lo que no es recomendable usarla. Para este caso, lo más apropiado es desarrollar $W(u)$ en una serie de Taylor (i.e. $W(u) = 1 - u^2/a^2 + \ldots$) y aproximar por los 2 primeros términos, de manera que

$$e^{-\upsilon_3^2 \delta^2 [1 - W(u)]} \simeq e^{-\upsilon_3^2 \delta^2 \frac{u^2}{a^2}} \tag{102}$$

Esto nos da como resultado

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{incoh} = \frac{F_{p,s}^2(\theta_0, \theta_s)}{\sqrt{2\pi} \delta_d} \frac{\cos^2 \theta_s}{\cos \theta_0 [\cos \theta_0 + \cos \theta_s]} \exp\left[-\frac{1}{2\delta_d^2} \left(\frac{\sin \theta_s - \sin \theta_0}{\cos \theta_s + \cos \theta_0} \right)^2 \right], \tag{103}$$

donde $\delta_d = \sqrt{2}\delta/a$, la cual representa la desviación estándar de pendientes, como ya se ha establecido en la ecuación (36).

El coeficiente de reflexión diferencial total se obtiene al sumar el CDR coherente y el CDR difuso (Beckmann y Spizzichino, 1963; Ogilvy, 1991).

$$\left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{coh} + \left\langle \frac{\partial R}{\partial \theta_s} \right\rangle_{incoh}. \tag{104}$$

Capítulo III

Cálculos numéricos

En el capítulo anterior se describió el marco teórico para el cálculo del coeficiente de reflexión diferencial.

En este capítulo se presenta una descripción de la implementación numérica de los tres métodos empleados para calcular la reflectancia directa-difusa y la reflectancia difusa-difusa. Estos son: el método integral, la aproximación numérica de Kirchhoff y un método analítico basado en la aproximación de Kirchhoff.

III.1 Método riguroso y aproximación numérica de Kirchhoff

Para realizar la implementación numérica del método riguroso y la aproximación numérica de Kirchhoff es necesario seguir una serie de pasos, los cuales se enlistan a continuación:

- *Generación numérica de superficies.* Se generan superficies con rugosidad aleatoria y propiedades estadísticas bien definidas.
- *Evaluación del campo incidente.* Se calcula el campo incidente en cada uno de los puntos de la superficie generada.
- *Determinación de las funciones fuente.* Se determinan las funciones para cada punto en la superficie.
- *Coeficiente de reflexión diferencial.* Se calcula la amplitud compleja de esparcimiento en el campo lejano sobre todo el hemicilindro, es decir desde $-\pi/2$ hasta $\pi/2$ y, habiendo calculado el factor de normalización previamente, se

procede a calcular el CDR. Integrando sobre todo el hemicilindro se obtiene la reflectancia directa-difusa.

- *Cálculo de reflectancia directa-difusa.* Se calcula la reflectancia directa-difusa para cada ángulo de incidencia, debido a que sólo hemos podido calcular la reflectancia directa-difusa para ángulos de incidencia de hasta 80 grados, fue necesario realizar una interpolación para ángulos mayores.

- *Cálculo de la reflectancia difusa-difusa.* Para calcular la reflectancia difusa-difusa se realiza un promedio pesado por las direcciones de incidencia. Es decir, se realiza una integral numérica de la reflectancia directa-difusa desde $-\pi/2$ hasta $\pi/2$ pesado por el factor lambertiano de $\cos\theta_0$.

III.1.1 Generación numérica de superficies

Para generar superficies rugosas es necesario generar perfiles aleatorios unidimensionales con promedio cero, los cuales constituyen realizaciones de un proceso aleatorio gaussiano.

Primeramente se escoge el número de puntos m_i de la superficie, después se elige el intervalo de muestreo Δx. Cabe señalar que la longitud de la superficie está directamente relacionada con el número de puntos y el intervalo de muestreo. Entre más fino sea el muestreo mejor será la descripción de la superficie, pero mayor será el número de puntos y el tiempo de cómputo. Vale la pena mencionar que tampoco es deseable utilizar intervalos de muestreo por abajo de $\lambda/100$ aproximadamente, pues las singularidades de la función de Green y su derivada introducen problemas numéricos.

Después, se debe escoger la función de correlación estadística del perfil. Para el presente caso de estudio se utilizaron funciones de correlación gaussiana, sinc y exponencial negativa de banda limitada. Además, se debe escoger la desviación estándar de las alturas o parámetro de rugosidad (δ), y un parámetro relacionado con la escala lateral en la superficie conocido como la longitud de correlación (a).

Cuando se elige una función de correlación exponencial negativa se debe establecer una frecuencia espacial de corte f_c. Esto se debe a que esta función de correlación está asociada a un espectro de potencias estilo lorentziano, que para altas frecuencias decae como k^2 (Church, 1988; Ogilvy, 1991). Si el espectro no se trunca, la derivada del perfil superficial no está definida. Es decir, se trata de una superficie de tipo fractal. Dado que la generación numérica de las superficies se realiza con un método espectral (Maradudin *et al.*, 1990), es natural introducir una frecuencia de corte, ya sea por el muestreo mismo de la superficie o introducido de otra manera. Para las superficies generadas con funciones de correlación gaussianas o tipo sinc no es necesario establecer una frecuencia de corte, ya que el decaimiento del espectro de potencias es más rápido.

III.1.2 Evaluación del campo incidente.

Una vez generada la superficie se debe evaluar el campo incidente ψ_{inc} en cada uno de los puntos de la superficie y para el caso de la aproximación de Kirchhoff su derivada normal. Es entonces necesario conocer:

- El tipo de iluminación; es decir, si se ilumina con una onda plana o un haz gaussiano.
- La longitud de onda (λ).
- El tipo de polarización s o p.
- Los ángulos de incidencia.

III.1.3 Determinación de las funciones fuente

Para dar solución numérica a las funciones fuente se debe elegir el método que se empleará; el método integral o la aproximación de Kirchhoff.

Si se utiliza el método integral se debe dar solución a un par de ecuaciones integrales acopladas (ver ecuaciones (54) y (55)). Al discretizar el problema, el sistema de ecuaciones se convierte en una ecuación matricial. La dimensión total de la matriz será de dos veces el número de puntos de la superficie ($2m_i$), si tenemos una superficie de 2048 puntos, la matriz tendrá 4096×4096 elementos y el sistema tendrá 4096 incógnitas.

Una vez generados los elementos de la matriz y determinado el campo incidente (ψ_{inc}) en cada uno de los puntos de la superficie, se resuelve numéricamente el sistema matricial, con el cual se obtienen las funciones fuente $\psi(x_1)$ y $\upsilon(x_1)$.

Para el cálculo de las funciones fuente con la aproximación de Kirchhoff la implementación numérica se simplifica considerablemente, ya que la funciones fuente están dadas directamente por las ecuaciones (61) y (62), por lo que no es necesario resolver ningún sistema de ecuaciones.

III.1.4 El coeficiente de reflexión diferencial

Una vez calculado el campo incidente y las funciones fuente, se procede a calcular el campo esparcido por la superficie. Para calcular la amplitud compleja de esparcimiento en un dieléctrico utilizamos la ecuación (77). El cálculo se simplifica para un conductor perfecto, pues podemos utilizar la ecuación (78). Una vez obtenida la amplitud compleja de esparcimiento, sustituimos ésta en las ecuaciones encontradas en la sección II.6, con las cuales se puede determinar el CDR coherente, el incoherente y el total. Cabe señalar que el CDR se obtiene a partir cuatrocientas realizaciones para el método riguroso y de seiscientas realizaciones para el caso de la apoximación de Kirchhoff

III.1.5 Reflectancia directa-difusa

Para calcular la reflectancia directa-difusa es necesario integrar el CDR total (suma de la componente coherente e incoherente) en todo el hemisferio, es decir desde $-\pi/2$ hasta $\pi/2$. Es necesario realizar esto para cada ángulo de incidencia (θ_0). En la figura 6, se presenta una curva típica del CDR en función del ángulo de esparcimiento para una supeficie gaussiana con $a = 10\lambda$ y $\delta = 0.35\lambda$

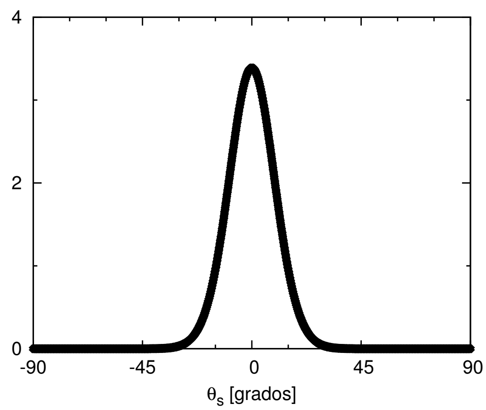


Figura 6. Coeficiente de reflexión diferencial para una superficie rugosa.

La integral de esta curva nos da la potencia total reflejada, que es función del ángulo de incidencia. Esto se ilustra en la figura 7, aunque en este caso, tratándose de una superficie perfectamente conductora, la reflectancia debe tener un valor de uno para todos los ángulos de incidencia.

Es bien conocido el hecho de que la mayoría de los métodos teóricos para tratar el problema de esparcimiento por superficies rugosas son poco confiables para ángulos rasantes de incidencia. Hemos verificado que con los métodos utilizados sólo podemos realizar cálculos confiables de la potencia total reflejada para ángulos de incidencia menores a 80 grados. Debido a esto, y a la importancia de la reflectancia en esa zona, decidimos tratar de completar las curvas con una interpolación.

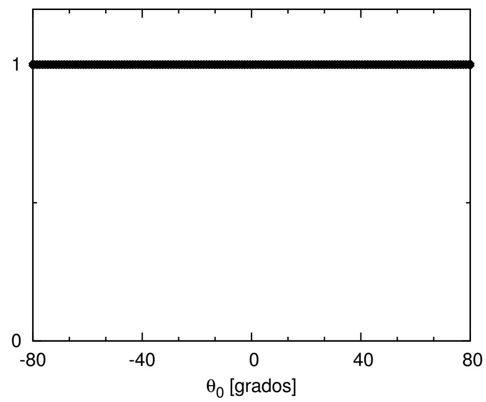


Figura 7. Reflectancia directa-difusa para un conductor perfecto.

Para la interpolación se utilizaron dos métodos. El primero está basado en el método splines cúbicos, que constituye un refinamiento de la interpolación polinómica que usa, por secciones, polinomios de tercer orden y trata de evitar oscilaciones espurias. Este es el método que se utilizó para interpolar los datos obtenidos con el método riguroso.

El segundo método está basado en el uso de polinomios de Hermite de orden cúbico en cada subintervalo. Esta interpolación se utilizó con los datos obtenidos con la aproximación numérica de Kirchhoff. En ambos casos, se contaban con vectores desde 0 a 80 grados que contenían los valores de las reflectancias y se supuso que a 90 grados la reflectancia debe valer uno.

Una condición necesaria, aunque no suficiente, para evaluar la confiabilidad de los cálculos es la conservación de energía. La suma de las integrales de los coeficientes de reflexión y transmisión diferencial debe ser 1.

III.1.6 Reflectancia difusa-difusa

Para superficies planas la reflectancia difusa-difusa se puede evaluar analíticamente. Esto se encuentra descrito en las secciones I.2.2 y I.2.3. Para superficies rugosas, es necesario calcular el patrón de esparcimiento para todos los ángulos de incidencia dentro de un hemisferio e integrar sobre todos los ángulos de esparcimiento. Además se debe considerar una iluminación lambertiana. La función de densidad asociada a todas las posibles direcciones de incidencia está dada por la ecuación (19) para superficies unidimensionales.

Para el cálculo de la reflectancia difusa-difusa primero se debe calcular la reflectancia directa-difusa. Una vez calculada esta reflectancia, debemos multiplicarla por la función de densidad (ver figura 8(a)) y evaluar la integral sobre todos los ángulos de incidencia. El resultado es un número que representa la reflectancia difusa-difusa. Es interesante visualizar la evolución de esta reflectancia en función del parámetro de rugosidad (δ). En la figura 8(b) se presenta una curva del cálculo de reflectancia difusa-difusa en función del parámetro de rugosidad de las superficies, aunque en este caso, tratándose de un conductor perfecto, la reflectancia siempre debe ser 1.

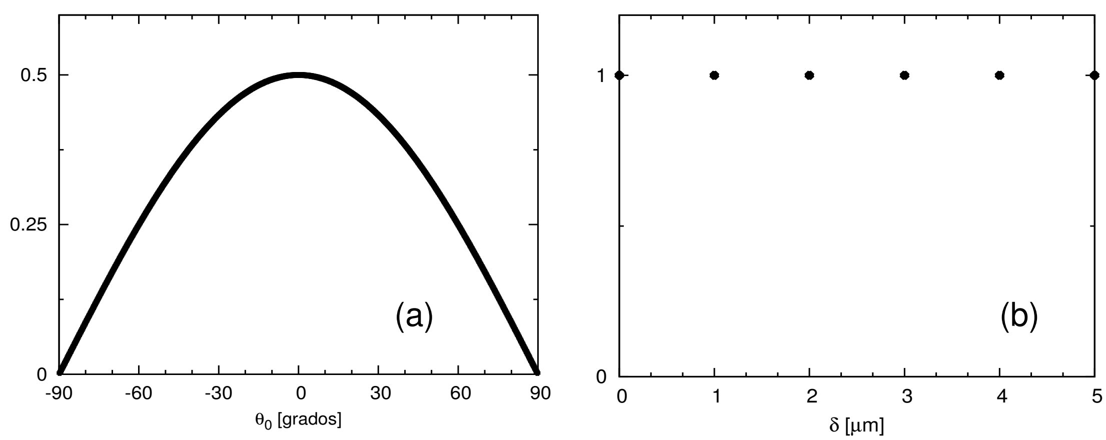


Figura 8. Ilustración del procedimiento para el cálculo de la reflectancia difusa-difusa. (a) Reflectancia directa-difusa multiplicada por la función de densidad de probabilidad asociada a las direcciones de incidencia. (b) Reflectancia difusa-difusa en función de δ para el caso de un conductor perfecto.

III.2 Métodos analíticos

Para el cálculo de reflectancias lo más sencillo es utilizar un método analítico, ya que se puede obtener directamente el valor de la reflectancia sin necesidad de realizar una simulación generando superficies, evaluando el campo incidente, las funciones fuente, etc.

Se implementó una teoría analítica basada en la aproximación de Kirchhoff (plano tangente) descrita detalladamente en la sección II.7. Esta teoría, como se mencionó anteriormente, sólo es válida para el caso del conductor perfecto.

La fracción de potencia incidente que es reflejada de manera coherente se calcula a partir de la expresión (97). Vemos que es necesario especificar la longitud de onda (λ), el ángulo de incidencia (θ_0), el parámetro de rugosidad (δ) y la longitud de correlación (a).

Para calcular la fracción de potencia incidente que es reflejada de manera difusa debemos hacer uso de la ecuación (101), la cual está en función de la longitud de correlación, la longitud de onda, el parámetro de rugosidad y el ángulo de esparcimiento (θ_s). La expresión consiste de una serie que converge lentamente, por lo que se deben tomar alrededor de 2000 términos. Además, se presentan problemas númericos para rugosidades (δ) grandes. Para nuestros cálculos, sólo fue posible utilizar esta expresión cuando $\delta \leq 0.37\lambda$. Cuando se tienen rugosidades $\delta > 0.37\lambda$ es preferible hacer uso de la expresión (103).

Para calcular la reflectancia directa-difusa y difusa-difusa se debe realizar el procedimiento descrito en las secciones III.1.5 y III.1.6.

III.3 Resultados y discusión

III.3.1 Superficies perfectamente conductoras

En las figuras 9, 10 y 11, se presentan los resultados obtenidos para la reflectancia directa-difusa para superficies perfectamente conductoras con diferentes parámetros de rugosidad δ y a. En la figura 9 se tiene los resultados obtenidos para superficies con la misma rugosidad, en este caso $\delta = 0.1\lambda$, pero variando a. De igual manera, en la figura 10 se tiene que $\delta = 0.2\lambda$, y en la figura 11 se tiene que $\delta = 0.4\lambda$. Se escogieron las mismas longitudes de correlación para los tres casos, que fueron 1 μm, 5 μm y 10 μm.

Se observa que los resultados basados en la aproximación de Kirchhoff concuerdan entre sí, pero ambas teorías fallan para algunos ángulos de incidencia, ya que nos arrojan resultados que difieren de uno. Estas diferencias se incrementan conforme aumentan el ángulo de incidencia y el parámetro de rugosidad δ.

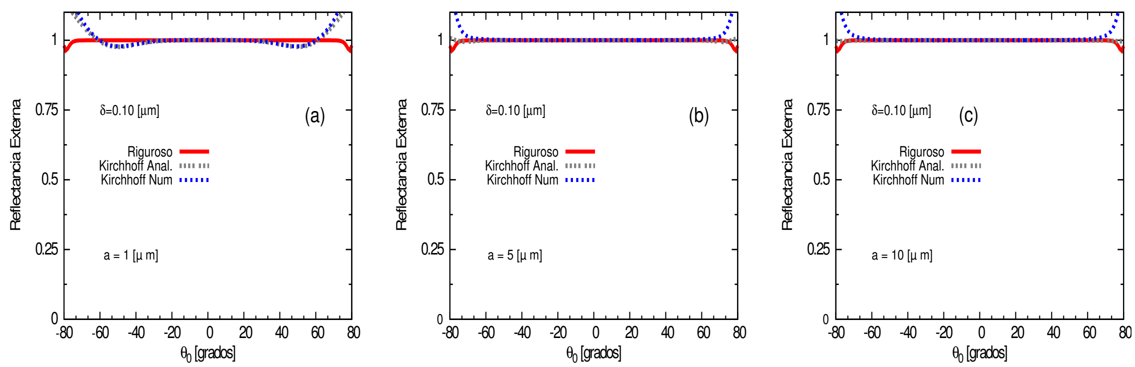


Figura 9. Reflectancia directa-difusa para superficies de conductor perfecto con $\delta = 0.1$ μm. La longitud de correlación es (a) a = 1 μm, (b) a = 5 μm, y (c) a = 10 μm. La longitud de onda utilizada es $\lambda =$ 1 μm.

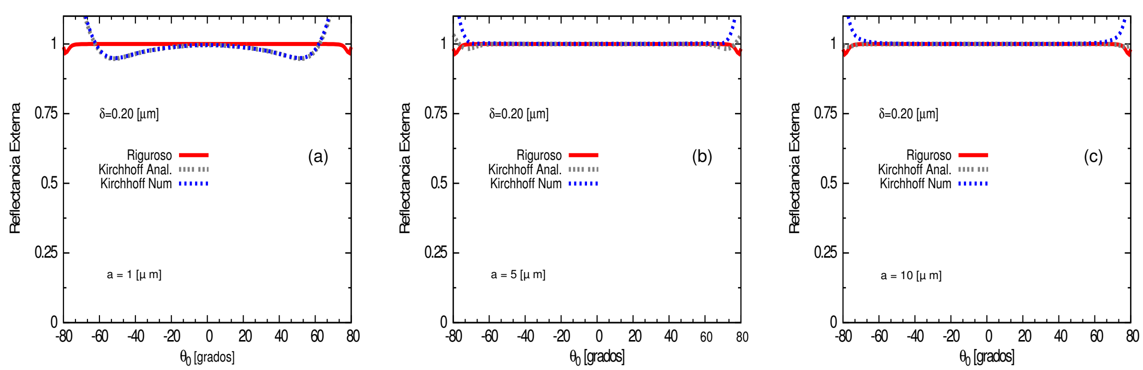


Figura 10. Reflectancia directa-difusa para superficies de conductor perfecto con $\delta = 0.2$ μm. La longitud de correlación es (a) a = 1 μm, (b) a = 5 μm, y (c) a = 10 μm. La longitud de onda utilizada es $\lambda = 1$ μm.

Se observa que para las longitudes de correlación más grandes ($a \geq \lambda$), la simulación numérica basada en la aproximación de Kirchhoff da resultados aceptables para ángulos

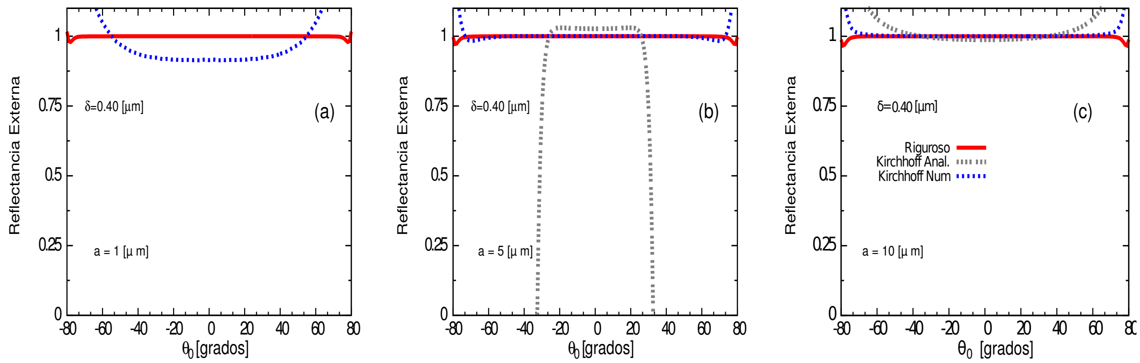


Figura 11. Reflectancia directa-difusa para superficies de conductor perfecto con un parámetro de rugosidad $\delta = 0.4\ \mu m$. La longitud de correlación es (a) a = 1 μm, (b) a = 5 μm, y (c) a = 10 μm. La longitud de onda utilizada es $\lambda = 1\ \mu m$.

menores a 70 grados. Para $\delta \leq 0.2\ \mu m$, las dos teorías basadas en la aproximación de Kirchhoff dan resultados muy parecidos, pero observamos que la teoría analítica falla por completo para el caso de $\delta = 0.4\lambda$. Se observa también que, en todos los casos, el método riguroso nos entrega resultado confiables hasta 75 grados.

En la figura 12 se presentan resultados para la reflectancia difusa-difusa en función de δ para superficies perfectamente conductoras con diferentes longitudes de correlación. Vemos que el método riguroso nos entrega valores de reflectancia difusa-difusa confiables para las 3 longitudes de correlación analizadas. La aproximación de Kirchhoff numérica solo es confiable cuando se tienen longitudes de correlación mucho mayores que la longitud de onda y la teoría analítica de Kirchhoff está muy limitada en su rango de aplicación, ya que sólo es válida para parámetros de rugosidad pequeños; vemos en la figura este método falla abruptamente para $\delta \geq 0.2$ mum. De estos resultados concluimos que, en el contexto del presente estudio, no vale la pena desarrollar una teoría analítica basada en la aproximación de Kirchhoff (plano tangente) para dieléctricos.

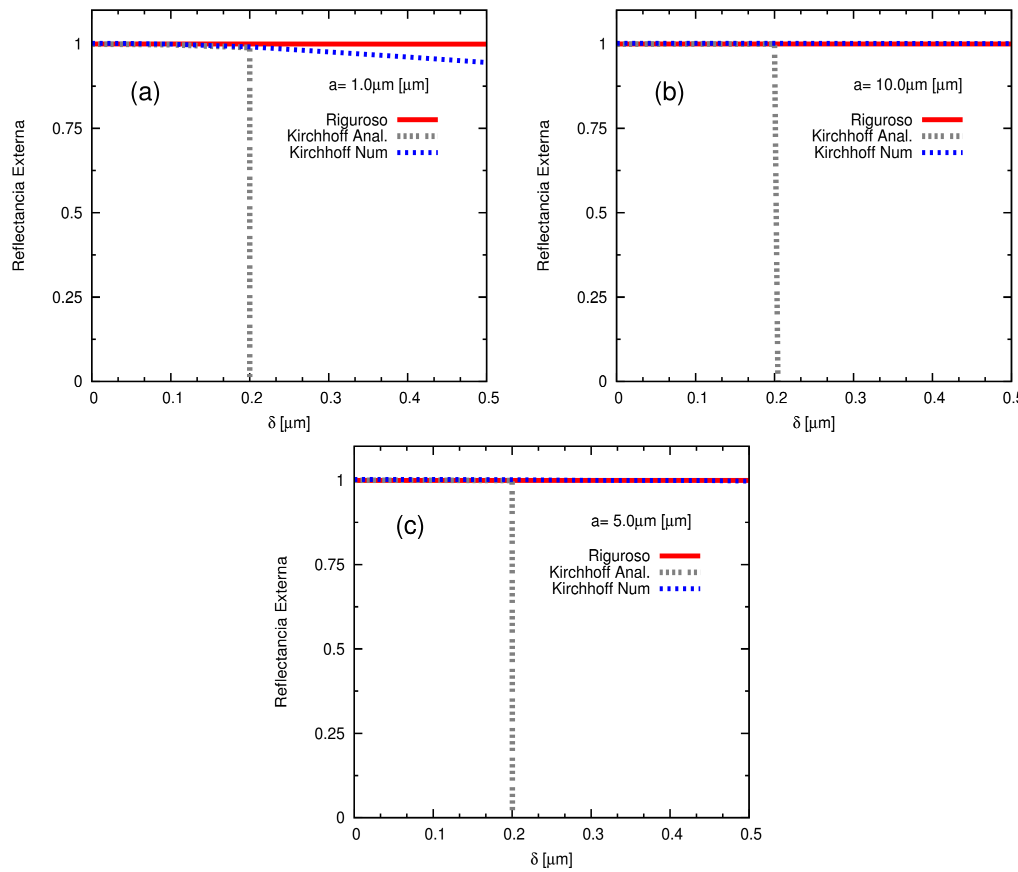


Figura 12. Reflectancia difusa-difusa en función de δ para superficies de conductor perfecto con diferentes longitud de correlación (a) a $= 1\ \mu m$, (b) a $= 5\ \mu m$, y (c) a $= 10\ \mu m$. La longitud de onda utilizada es $\lambda = 1\ \mu m$.

III.3.2 Superficies dieléctricas con función de correlación gaussianas

Reflectancia externa

Consideramos ahora el caso de superficies dieléctricas. Es necesario mencionar que en los cálculos numéricos presentados, no nos fue posible realizar cálculos para ángulos de incidencia mayores a 80 grados. Como ya hemos mencionado, es bien conocido el hecho de que la mayoría de los métodos teóricos y experimentales para tratar el problema de esparcimiento por superficies rugosas son poco confiables para ángulos de incidencia rasantes.

Para la simulación se generaron superficies con 2048 puntos muestreados con intervalos de $\lambda/40$ y se calcularon las reflectancias externas directa-difusa y difusa-difusa empleando 161 ángulos de incidencia y 721 ángulos de esparcimiento.

Podría pensarse que, dado que la reflectancia directa-difusa está pesada por una función de densidad tipo coseno (ver figura 5(b)), el esparcimiento a ángulos rasantes tiene poca importancia. Sin embargo, para ángulos rasantes, la reflectancia directa-difusa tiende a uno. El problema se ilustra en la figura 13 para el caso de superficies planas. Se muestran gráficas de los coeficientes de Fresnel multiplicados por la función de densidad para iluminación lambertiana 2D (ecuación 19). Vemos que la región entre 80 y 90 grados tiene una contribución considerable a la integral que corresponde al área bajo la curva.

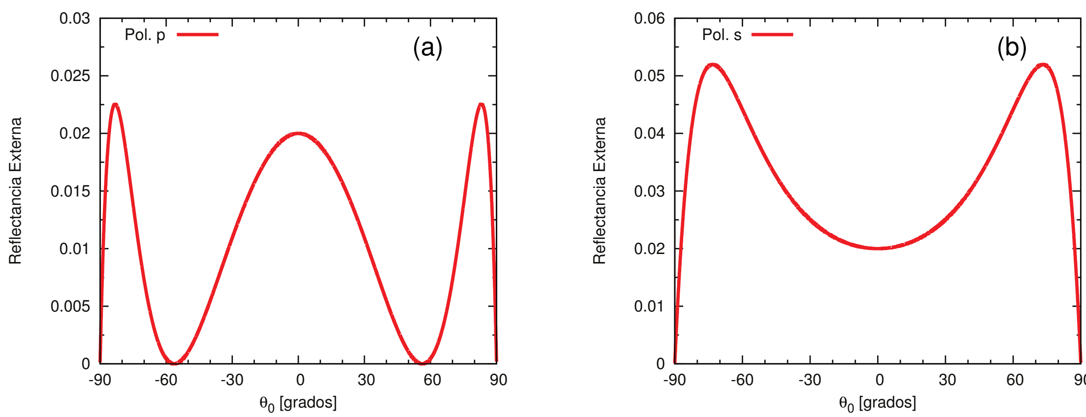


Figura 13. Coeficientes de Fresnel multiplicados por el factor de densidad de probabilidad de la iluminación lambertiana para polarización p (a) y polarización s (b).

Para abundar sobre este tema, en la figura 14 se presentan cálculos de reflectancia difusa-difusa en función de δ para una superficie dieléctrica, tomando en cuenta solamente los datos entre -80 y 80 grados para las polarizaciones s (curva superior), p (curva inferior) y para luz no polarizada (curva entre las otras dos). Los rombos negros en la linea correspondiente a $\delta = 0$ representan los coeficientes de Fresnel integrados hasta 80 grados. Estos valores prácticamente coinciden con los cálculos de la simulación para superficies planas, con datos para ángulos de incidencia de hasta 80 grados. Observamos sin embargo que esta reflectancia se encuentra por abajo de la que se obtendría al integrar hasta 90 grados, denotada por las cruces azules, también en la linea con $\delta = 0$.

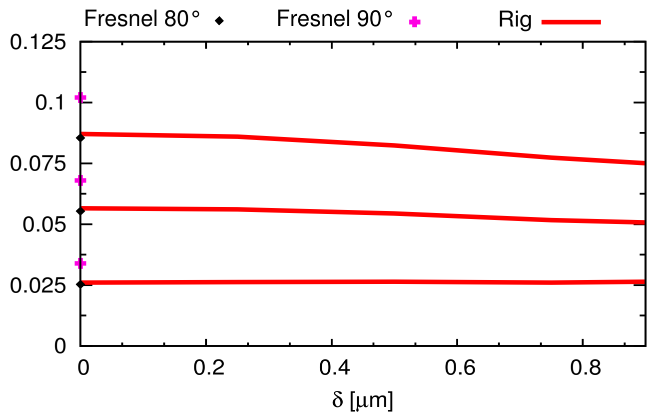


Figura 14. Ejemplo de curvas de reflectancia difusa-difusa en función de δ para superficies dieléctricas cuando se integra hasta 80 grados.

En la figura 15, se presentan los coeficientes de reflexión para una interfase plana aire-vidirio ($n_2 = 1$ y $n_2 = 1.5$) calculados por medio de simulaciones numéricas. El caso (a) corresponde a la simulación numérica rigurosa y el caso (b) a la de la aproximación de Kirchhoff. La curva más alta corresponde a la polarización s y la más baja a la polarización p. El promedio de estas dos corresponde al coeficiente de reflexión que se tiene para luz no polarizada. Estas curvas deben coincidir con los coeficientes de Fresnel y vemos que para ángulos de incidencia de hasta 80 grados los resultados son satisfactorios, aunque las curvas obtenidas con base en la aproximación de Kirchhoff presentan algunas oscilaciones debido a efectos que tienen que ver con el tamaño finito de la superficie (efectos de borde). Las curvas continuas (rojas) indican los datos obtenidos por medio de la simulación. Debido a que las simulaciones no son confiables para ángulos mayores de 80 grados, decidimos tratar de completar las curvas con una interpolación. Las curvas discontinuas corresponden a dichas interpolaciones. Los datos obtenidos con la aproximación de Kirchhoff presentan oscilaciones a ángulos grandes de incidencia. Por esta razón, es más difícil realizar una interpolación para ángulos mayores a 80 grados. Se intentó utilizar un algoritmo basado en splines cúbicos para realizar las interpolaciones pero se presentaban problemas con los datos generados en la aproximación de Kirchhoff, este trataba de emular las oscilaciones de las curvas. En cambio, el algoritmo basado en los polinomios cúbicos de Hermite no tenía este problema, esta, sin embargo, es una interpolación burda que en ocasiones asemeja a una recta.

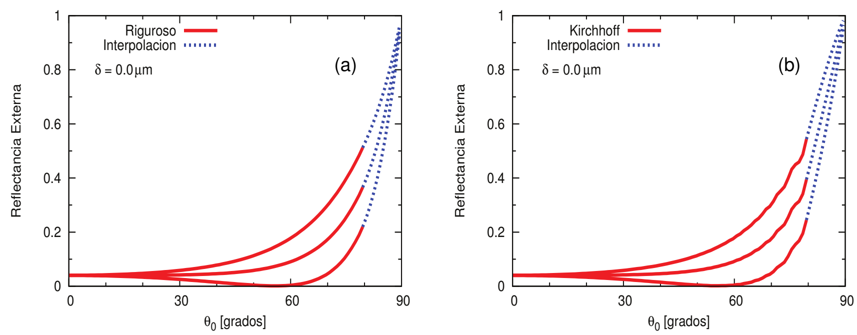


Figura 15. Coeficientes de reflexión para una superficies plana de dieléctrico (n = 1.5).

En las figuras 16 y 17 se presentan resultados para la reflectancia directa-difusa para superficies dieléctricas con tres parámetros de rugosidad diferentes. Debido a la gran cantidad de datos generados sólo se presentan algunos resultados representativos.

La figura 16 corresponde a una longitud de correlación de 10λ, los parámetros de rugosidad son (a) $\delta = 0.6\lambda$, (b)$\delta = 1.2\lambda$ y (c) $\delta = 1.8\lambda$. Se observa que la simulación numérica basada en la aproximación de Kirchhoff da resultados aceptables en todos los casos (hasta $\delta \leq 1.8\lambda$).

La figura 17 corresponde a un a longitud de correlación de 5λ, los parámetros de rugosidad son (a) $\delta = 0.4\lambda$, (b)$\delta = 0.6\lambda$ y (c) $\delta = 0.8\lambda$. Se observa que la simulación numérica basada en la aproximación de Kirchhoff da resultados aceptables hasta $\delta \leq 0.8\lambda$.

Con los datos presentados en estas curvas, es posible calcular la reflectancia difusa-difusa. En la figura 18 se presentan curvas correspondientes a la reflectancia externa

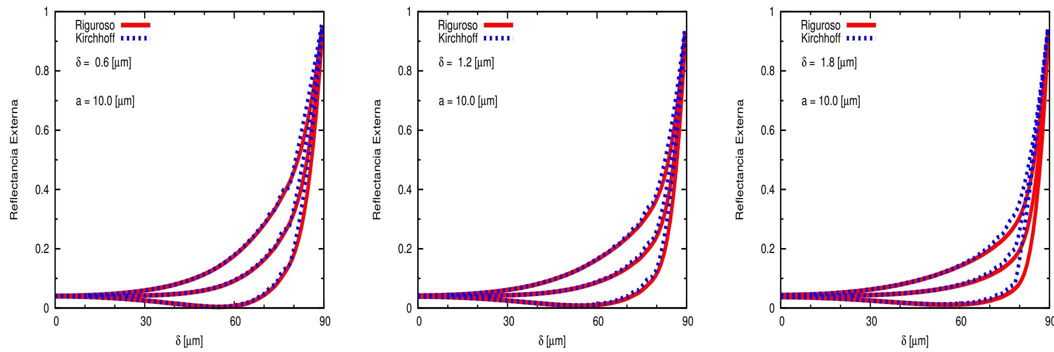


Figura 16. Reflectancia directa-difusa para superficies dieléctrica (n = 1.5) con una longitud de correlación a = 10λ. El parámetro de rugosidad es (a) $\delta = 0.6\lambda$, (b) $\delta = 1.2\lambda$, y (c) $\delta = 1.8\lambda$. La longitud de onda utilizada es $\lambda = 1.0$ μm.

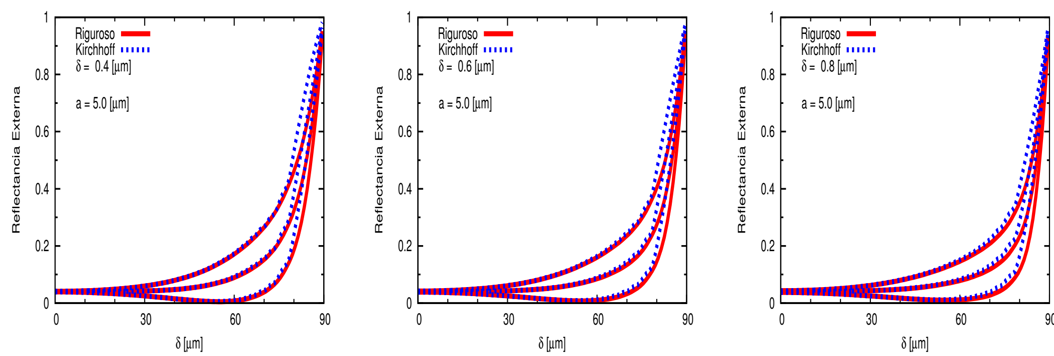


Figura 17. Reflectancia directa-difusa para superficies dieléctrica (n = 1.5) con una longitud de correlación a = 5λ. El parámetro de rugosidad es (a) $\delta = 0.4\lambda$, (b) $\delta = 0.6\lambda$, y (c) $\delta = 0.8\lambda$. La longitud de onda utilizada es $\lambda = 1.0$ μm.

difusa-difusa para superficies con longitudes de correlación $a = 5\lambda$ y $a = 10\lambda$, calculadas con el método riguroso y la aproximación numérica de Kirchhoff. Como siempre, las curvas promedio corresponden a luz no polarizada. Se puede apreciar que para $a = 5\lambda$, la aproximación de Kirchhoff falla de manera abrupta a partir de $\delta = 0.8\lambda$. Por otro lado, para $a = 10\lambda$, el problema aparece a partir de $\delta = 1.75\lambda$. En estos dos casos, el efecto de la rugosidad es el de reducir la reflectancia difusa.

En la figura 18 podemos ver que la reflectancia difusa-difusa disminuye conforme δ aumenta, pero que el comportamiento depende también de la longitud de correlación. Cabe preguntarse si este comportamiento es función de las pendientes superficiales. Para el proceso aleatorio gaussiano considerado, la desviación estándar de las pendientes (δ_d)

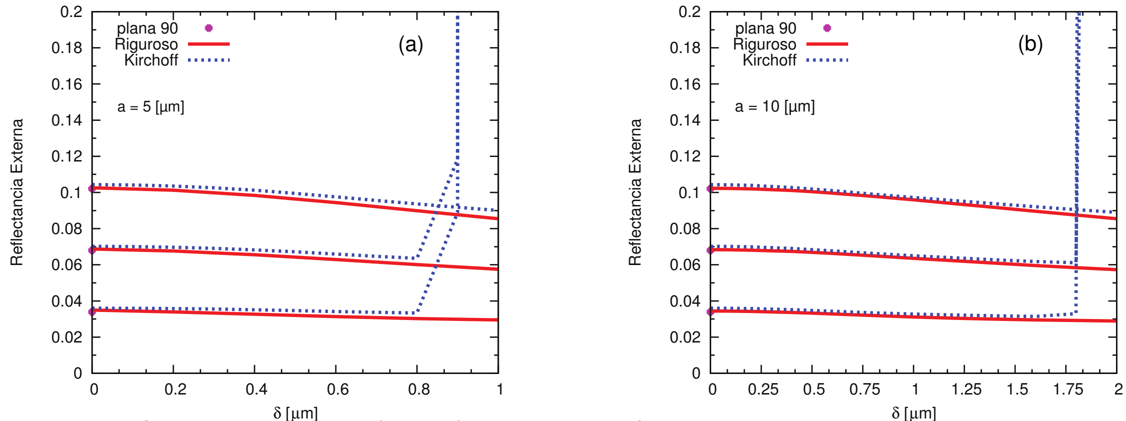


Figura 18. Reflectancia externa difusa-difusa para superficies dieléctricas con n = 1.5 y longitudes de correlación $a = 5\lambda$ (a) y (b) $a = 10\lambda$. La longitud de onda es $\lambda = 1$ μm.

está dada por la expresión (36).

En la figura 19 se presentan cálculos de reflectancia difusa-difusa para superficies con diferentes parámetros, en función del parámetro δ/a. Se observa que, efectivamente, el aumento en las pendientes reduce los coeficientes de reflexión y que esta dependencia es prácticamente la misma para las superficies con $a = 5\lambda$ y para las superficies con $a = 10\lambda$ (figura 19). También se observa que los cálculos basados en la aproximación de Kirchhoff dan resultados aceptables en este caso. Sin embargo, para las longitudes de correlación pequeñas ($a < 5.0\lambda$) las curvas van perdiendo esa tendencia y tienden a ser constantes en función de δ/a (figura 19).

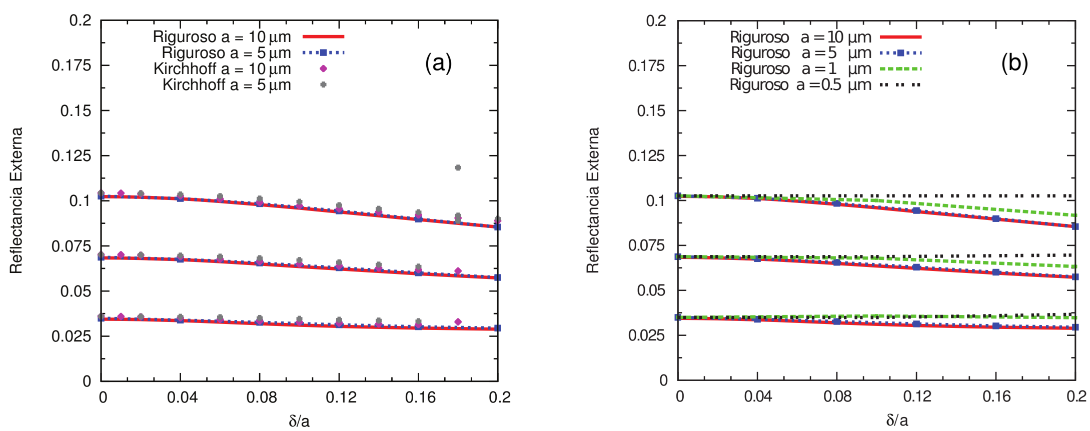


Figura 19. Reflectancia difusa-difusa en función de las pendientes superficiales.

Es importante señalar que todos los cálculos de reflectancia que se presentan satisfacen el criterio de conservación de energía con un error inferior al 2%. Es decir que este criterio se cumple bien cuando $\delta/a \leq 0.2$.

Reflectancia interna

Para el método riguroso, la elección de los parámetros de la simulación es crítica. Para ejemplificar esto, en la figura 20 se muestran cálculos rigurosos para una superficie plana con dos diferentes intervalos de muestreo. Podría pensarse que los resultados con $\Delta x = \lambda/40$ deberían ser mejores que los obtenidos con $\Delta x = \lambda/15$. Sin embargo, si el número de puntos de muestreo es el mismo, la superficie muestreada con $\Delta x = \lambda/15$ es más larga y los efectos de borde se reducen. Vemos que, efectivamente, la curva de reflectividad en función del ángulo de incidencia está más cercana al coeficiente de Fresnel teórico en este segundo caso.

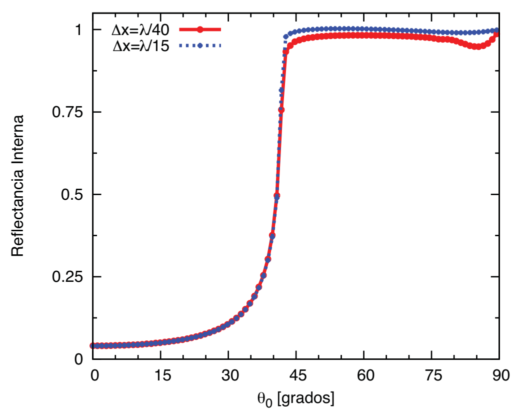


Figura 20. Cálculos de la reflectancia interna con el método riguroso con diferentes intervalos de muestreo pero manteniendo el número total de puntos de muestreo.

El caso de reflexión interna es más problemático para la aproximación de Kirchhoff. La simulación basada en esta aproximación no produce resultados confiables en ninguno de los casos estudiados. Esto se puede apreciar en los resultados mostrados en la figura 21.

En la figura 23 se presentan curvas correspondientes a la reflectancia interna difusa-difusa para superficies con correlación gaussiana y longitudes de correlación $a = 5\lambda$

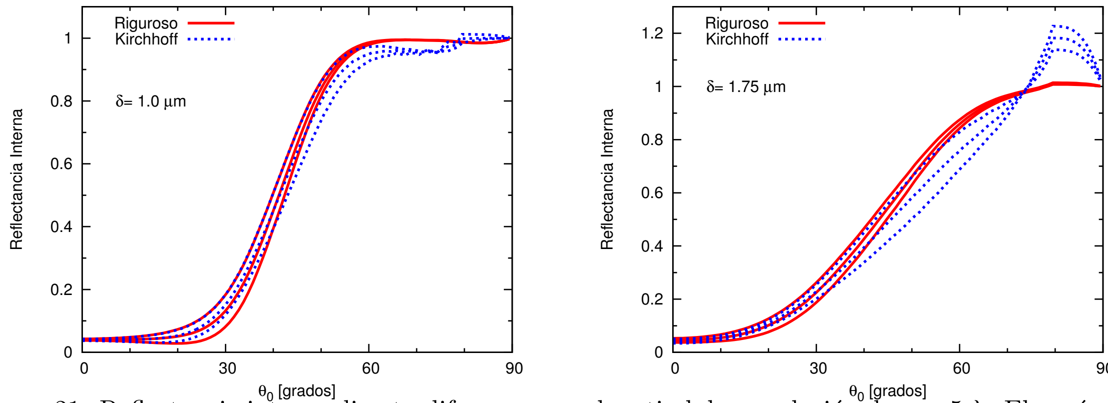


Figura 21. Reflectancia interna directa-difusa con una longtiud de correlación de $a = 5\ \lambda$. El parámetro de rugosidad es (a) $\delta = 1.0\lambda$ y (b) $\delta = 1.75\lambda$. La longitud de onda es $\lambda = 1\ \mu m$

y $a = 10\lambda$, calculadas con el método riguroso. Vemos que la reflectancia interna es mucho mayor que la externa y que, también en este caso, la rugosidad disminuye la reflectancia. Si observamos la figura 22, en la cual se presentan cálculos de reflectancia directa-difusa para dos superficies con rugosidades diferentes pero misma longitud de correlación, se puede observar que el ángulo crítico se recorre al aumentar la rugosidad, hasta llegar al punto en que desaparece. Esto indica que se pierde la reflexión total interna en superficies con rugosidad grandes, y es la razón por la cual la reflectancia interna difusa-difusa disminuye en función de la rugosidad.

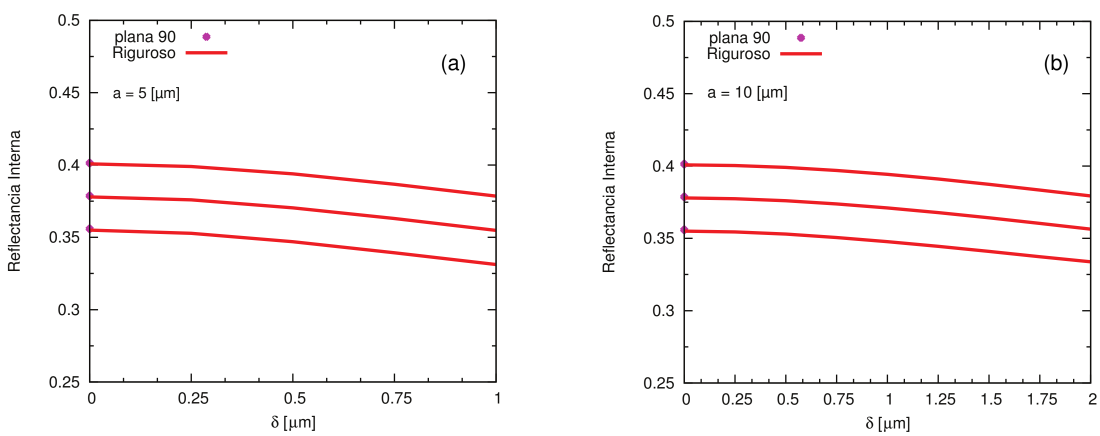


Figura 22. Reflectancia interna difusa-difusa para superficies dieléctricas (n = 1.5) con longitudes de correlación de (a) $a = 5\lambda$ y (b) $a = 10\lambda$. La longitud de onda es $\lambda = 1\ \mu m$.

En la figura 24, se presentan cálculos de reflectancia interna difusa-difusa para

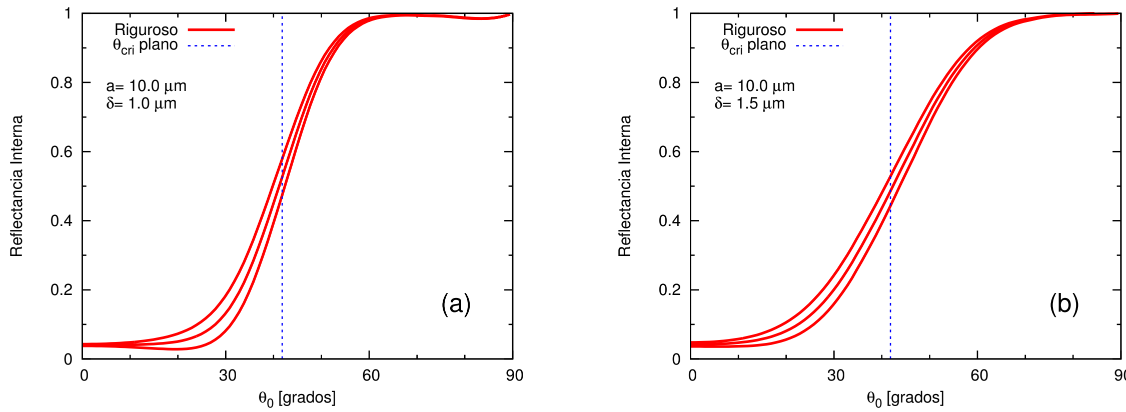


Figura 23. Reflectancia interna directa-difusa para superficies dieléctricas con una longitud de correlación $a = 10\ \lambda$. El parámetro de rugosidad es (a) $\delta = 1\ \lambda$ y (b) $\delta = 1.75\ \lambda$. La longitud de onda es $\lambda = 1\ \mu m$.

superficies con diferentes parámetros en función del parámetro δ/a. Se observa la misma tendencia que en el caso de reflectancia externa; el aumento de la pendientes reduce la reflectancia y esta dependencia es prácticamente la misma para las superficies con $a = 5\lambda$ y para las superficies con $a = 10\lambda$.

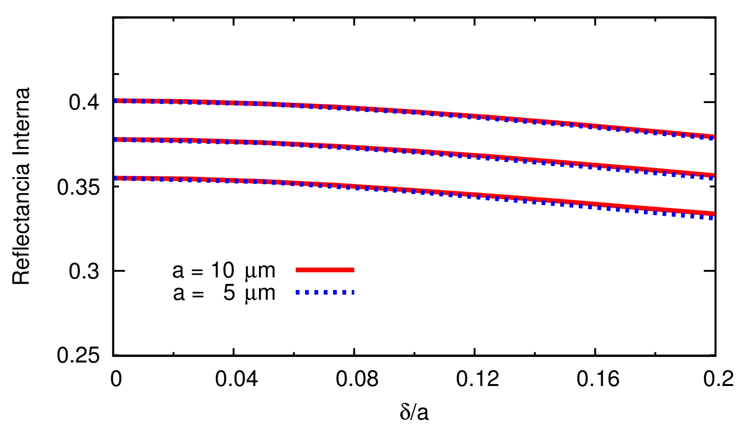


Figura 24. Reflectancia interna difusa-difusa en función de las pendientes superficiales.

III.3.3 Superficies dieléctricas con función de correlación sinc

Para los cálculos presentados hasta ahora hemos adoptado una función de correlación gaussiana. Es importante considerar otro tipo de funciones de correlación ya que, como se mencionó anteriormente, las superficies reales no siguen este modelo. En la figura 25, se presentan cálculos para superficies con una función de correlación tipo función sinc, que corresponde a una densidad espectral de potencia rectangular y se comparan con los correspondientes a una función de correlación gaussiana. En este caso, la función de correlación está dada por la ecuación 37. Para los casos mostrados en las figuras, hemos escogido $a = 10\lambda$. Observamos que hay poca diferencia entre los resultados obtenidos con la función sinc y aquellos obtenidos con la función de correlación gaussiana.

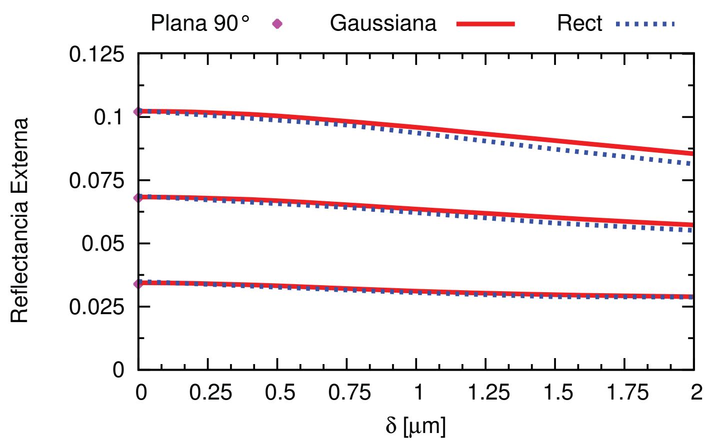


Figura 25. Reflectancia externa difusa-difusa para superficies con función de correlación tipo sinc y longitud de correlación gaussiana $a = 10\lambda$. La longitud de onda es $\lambda = 1\ \mu m$

Por otro lado, en los cálculos de reflectancia interna que se obtuvieron con esta función de correlación (ver figura 26), se observa la misma tendencia que se obtuvo para la reflectancia externa.

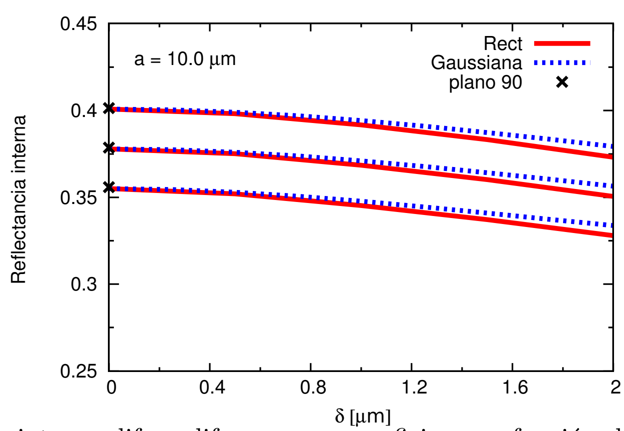


Figura 26. Reflectancia interna difusa-difusa para superficies con función de correlación tipo sinc y longitud de correlación gaussiana $a = 10\lambda$. La longitud de onda es $\lambda = 1\ \mu m$.

La principal conclusión que se tiene de la comparación de estos resultados es que hay poca diferencia entre las superficies con función de correlación gaussiana y los que se tienen con una tipo sinc. Al menos para superficies muy rugosas, esto parece estar relacionado con el hecho de que, en ambos casos, el desarrollo en serie de la función de correlación es de tipo parabólico para argumentos pequeños. Consideramos ahora una función de correlación con otro tipo de comportamiento cerca del origen.

III.3.4 Superficies dieléctricas con función de correlación exponencial negativa

Cuando la función de correlación es una exponencial negativa, la densidad espectral de potencia es una lorentziana. El problema que se presenta en este caso es que, dado que la lorentziana decae muy lentamente como función de la coordenada espectral, se trata esencialmente de una superficie de tipo fractal que no tiene derivadas bien definidas (la desviación estándar de pendientes tiende a infinito). Es entonces necesario acotar el intervalo de frecuencias espaciales del espectro, poniéndolo como cero después de una cierta frecuencia de corte. Esto es lo que se conoce como la escala interior (inner scale). Para este tipo de correlación, la frecuencia de corte f_c juega un papel que puede ser más importante que la longitud de correlación a. En la figura 27 se presentan 3 superficies con el mismo parámetro de rugosidad y longitud de correlación, pero con distinta frecuencia de corte.

En la figura 28 se presentan cálculos de la reflectancia difusa para superficies con funciones de correlación tipo exponencial negativa. La longitud de correlación es $a = 10\lambda$, y se escogieron diferentes frecuencias de corte f_c. Se observa que, dependiendo de la frecuencia de corte, las curvas pueden tener una tendencia hacia abajo o hacia arriba en función del parámetro de rugosidad δ. Para la frecuencia de corte más baja, las curvas

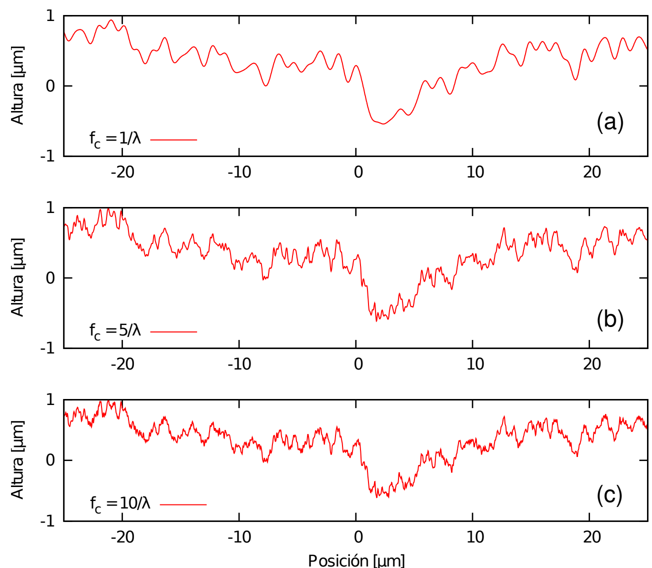


Figura 27. Superficies con función de correlación exponencial negativa. Las superficies tienen el mismo parámetro de rugosidad δ, la misma longitud de correlación, pero distintas frecuencias espaciales de corte (a) $1/\lambda$, (b) $5/\lambda$, (a) $10/\lambda$.

tienen la misma tendencia que las curvas con función de correlación gaussiana. Sin embargo, a medida que aumenta la frecuencia de corte (permitiendo detalle más fino en la superficie) la tendencia se invierte. También se observa que, a medida que aumenta la frecuencia de corte, disminuye drásticamente el intervalo de casos que podemos analizar en función del parámetro de rugosidad, ya que no se cumplen los criterios de conservación de energía establecidos previamente.

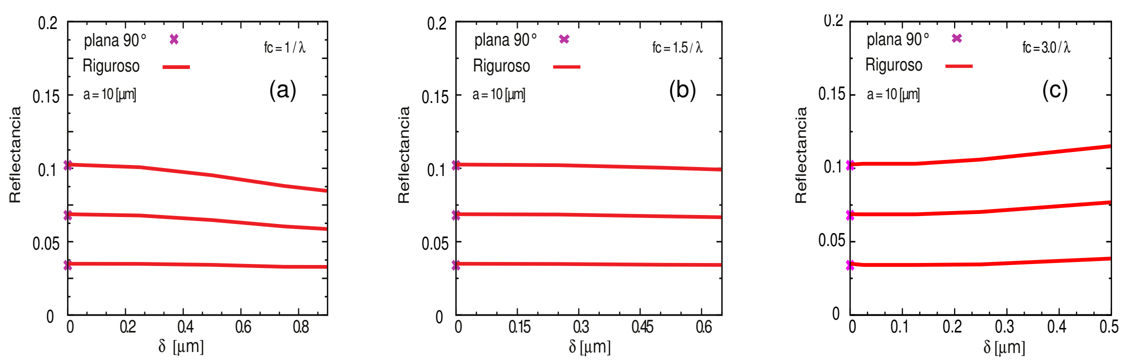


Figura 28. Reflectancia externa difusa-difusa para superficies con función de correlación tipo exponencial negativa y longitud de correlación de $a = 10\lambda$. La frecuencia espacial de corte es (a) $1/\lambda$, (b) $1.5/\lambda$ y (c) $3/\lambda$.

El caso de reflectancia interna es aún mas complicado, ya que la variedad de casos que podemos analizar disminuye considerablemente. Sólo se presentan cálculos de reflectancia interna para una frecuencia de corte de $3/\lambda$. Se considero que este es el caso más representativo, pues es la f_c más alta que podemos analizar.

En la figura 29 se presentan cálculos de la reflectancia interna difusa-difusa para superficies con una longitud de correlación de $a = 10\lambda$. Vemos que la rugosidad disminuye la reflectancia ligeramente y que, en este caso, se invierte la tendencia encontrada para la reflectancia externa, por lo que se estaría encontrando la misma tendencia para superficies con función de correlación gaussiana.

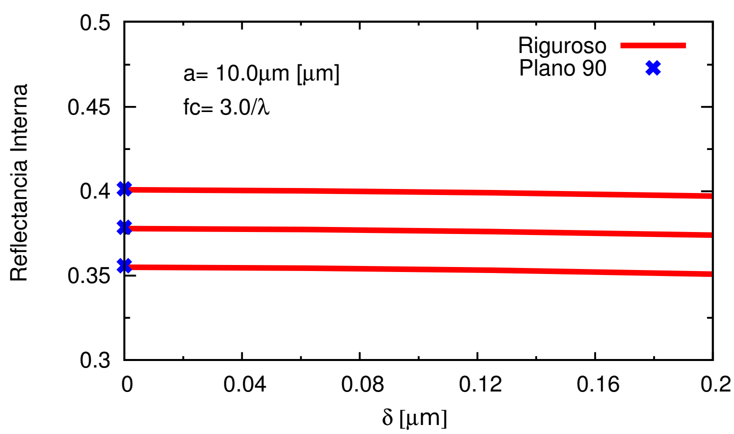


Figura 29. Reflectancia interna difusa-difusa para superficies dieléctricas ($n = 1.5$). La longitud de onda utilizada es $\lambda = 1.0\ \mu m$.

III.3.5 Superficies de silicio

Hasta ahora, se han presentado resultados en superficies dieléctricas y un conductor perfecto. Un caso de especial interés en la actualidad es el modelado de la absorción de celdas solares, las cuales se encuentran fabricadas principalmente de silicio. Es bien conocido en la literatura el hecho de que el silicio es altamente reflejante. Por tal motivo se han desarrollado técnicas para mejorar la eficiencia de celdas de fotovoltaicas basadas en la introducción de rugosidad. En esta sección se presentan cálculos numéricos de superficies rugosas en silicio para una longitud de onda de 0.630 μm. El índicie de refracción para el silicio para esta longitud de onda es $n = 3.879 - i0.016$ (Green *et al.*, 2010).

En las figuras 30, 31 y 32 se presentan cálculos de reflectancia para superficies con diferentes funciones de correlación. La longitud de correlación es $a = 10\mu m$, y la frecuencia de corte f_c es $3.0/\lambda$.

En la figura 30(a), que corresponde a una función de correlación gaussiana, se observa que, la reflectancia difusa-difusa cambia poco en función del parámetro δ. En la figura 30(b) se presentan cálculos de reflectancia difusa-difusa, los cuales corresponden a una función de correlación exponencial negativa. Se observa que, a medida que aumenta δ la reflectancia tiende a disminuir. Los resultados anteriores se pueden entender con base en las reflectancias directa-difusa mostradas en la figuras 31 y 32. En la figura 31, que corresponde a la función de correlación gaussiana, se observa que al aumentar el parámetro de rugosidad las curvas son prácticamente las mismas. Por otro lado, analizando la figura 32, que corresponde a una función de correlación exponencial negativa, se puede ver que al aumentar el parámetro de rugosidad la reflectancia a ángulos pequeños tiende a disminuir. También se observa que la tendencia encontrada para este tipo de función de correlación en superficies dieléctricas (figura 28(c)) es la opuesta, ya que la reflectancia en este caso aumenta en función de δ.

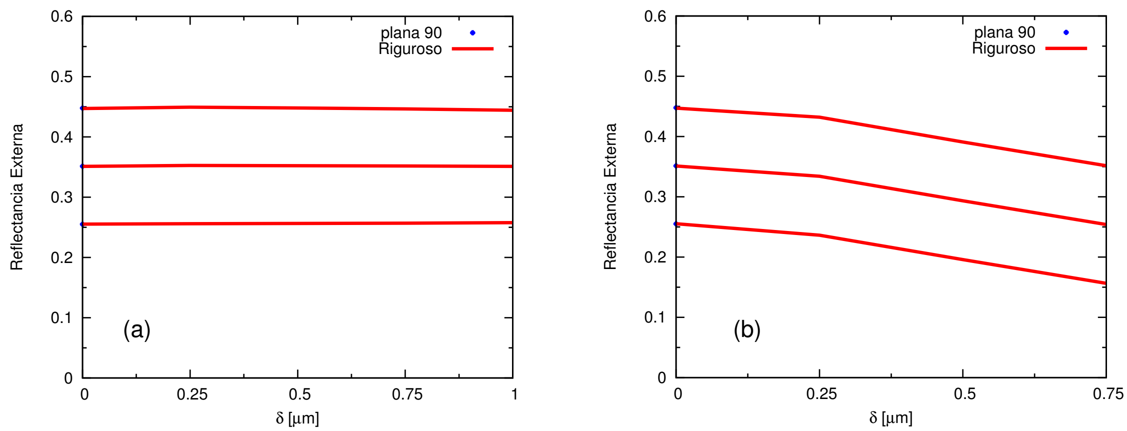


Figura 30. Reflectancia externa difusa-difusa para superficies en silicio ($n = 3.879 - i0.016$) con diferentes funciones de correlación, (a) función de correlación gaussiana y (b) una función de correlación exponencial negativa con una $f_c = 3.0/\lambda$. La longitud de onda utilizada es $\lambda = 0.633$ μm y longitud de correlación $a = 10\mu m$.

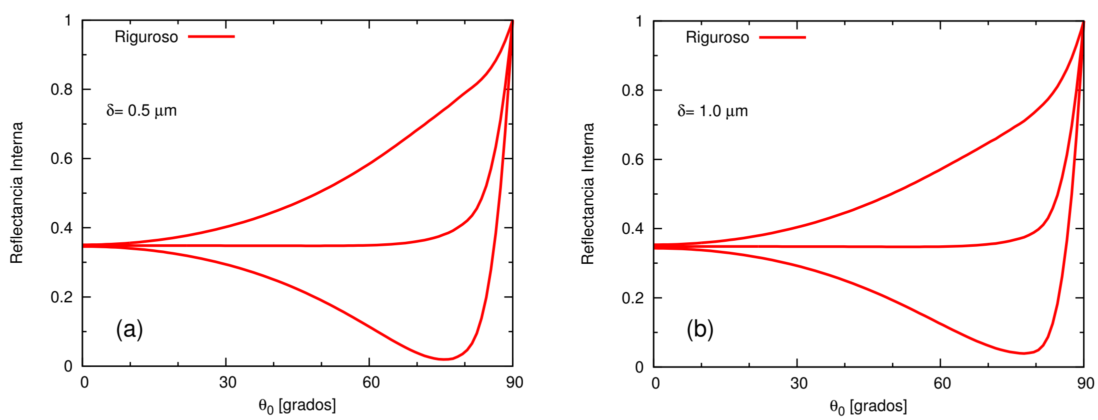
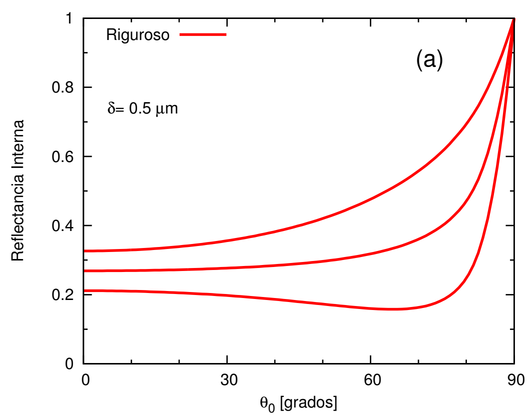


Figura 31. Reflectancia externa directa-difusa para superficies en silicio ($n = 3.879 - i0.016$) con función de correlación gaussiana y un parámetro de rugosidad (a) $\delta = 0.5$ μm y (b) $\delta = 1.0$ μm. La longitud de onda utilizada es $\lambda = 0.633$ μm y longitud de correlación $a = 10\mu m$.



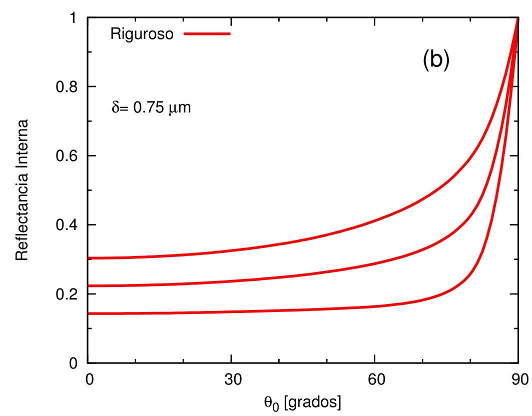


Figura 32. Reflectancia externa directa-difusa para superficies en silicio ($n = 3.879 - i0.016$) con función de correlación exponencial negativa la $f_c = 3.0/\lambda$ y el parámetro de rugosidad (a) $\delta = 0.5$ μm y (b) $\delta = 0.75$ μm. La longitud de onda utilizada es $\lambda = 0.633$ μm y longitud de correlación $a = 10 \mu m$.

Capítulo IV

Metodología experimental

En este capítulo se describen los métodos experimentales utilizados para la fabricación de muestras y realización de experimentos. En la sección IV.1 se realiza una descripción sobre la teoría de las esferas integradoras. Posteriormente, en la sección IV.2 se realiza una descripción de la metodología empleada para la caracterización estadística de la superficies. Finalmente en la sección IV.3 se discute las características de la esfera integradora utilizada y se presenta el arreglo experimental utilizado para la medición de reflectancias.

IV.1 Esferas integradoras

Las esferas integradoras son dispositivos utilizados para determinar reflectancias y transmitancias difusas ya que, en cierta forma, son colectores de luz difusa. El uso de las esferas integradoras está lleno de sutilezas y fácilmente se puede incurrir en errores importantes a la hora de realizar mediciones.

Con las esferas integradoras podemos realizar mediciones bajo iluminación direccional o iluminación difusa; así mismo, se debe especificar si se desea medir la luz reflejada de manera especular, difusa o ambas. En la figura 33 se presenta las geometrías utilizadas para la medición de las reflectancias.

Consideramos una cavidad esférica hueca que está recubierta por un material difusor (spectralon) de reflectividad m. Las esferas utilizadas tienen 3 aberturas: la abertura de entrada, la abertura de la muestra y la abertura del detector.

Para caracterizar la esfera es necesario conocer la constante α, que representa la fracción del área de la esfera que tiene material reflejante (Terán-Bobadilla, 2010)

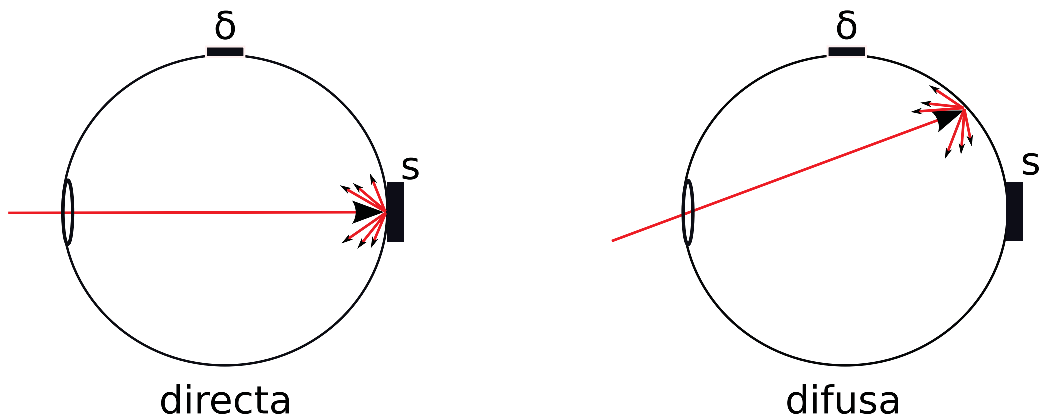


Figura 33. lustración de las geometrías utilizadas para las mediciones de reflectancia por medio de esferas integradoras. S representa la muestra y δ el detector.

$$\alpha = \frac{A_T - A_h - A_s - A_\delta}{A_T} \tag{105}$$

donde A_T es área total, A_h es el área de la abertura de entrada, A_δ es el área de la abertura del detector y A_s es el área de la abertura de la muestra.

Dada la naturaleza del material que cubre la pared de la esfera, es usual suponer que ésta actúa como un difusor lambertiano, por lo que el flujo reflejado es uniforme en toda la pared de la esfera. En nuestro caso, se analizará el caso de una esfera con bafles (ver figura 34). El uso de bafles es necesario pues el detector y la muestra pueden reflejar de manera especular. Se asume que el bafle actúa como un reflector difuso y tiene la misma reflectancia que la pared de la esfera. Debido a la presencia de los bafles, el detector y la muestra no se pueden "ver" directamente y la luz reflejada por la muestra llega al detector solamente después de interactuar con la esfera. Entonces, tanto el detector como la muestra son iluminados por luz difusa.

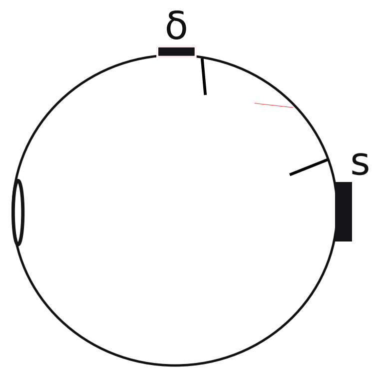


Figura 34. Ilustración de una esfera integradora con dos bafles.

IV.1.1 Iluminación difusa de la muestra

En una esfera integradora el flujo que recibe un elemento es proporcional a su área y al flujo emitido (Labsphere, 2012)

$$\Phi_r = \frac{A_r}{A}\Phi_e. \tag{106}$$

Consideramos el caso de un haz con potencia P_0 que incide directamente sobre la pared de la esfera. El flujo reflejado en primera instancia es

$$\Phi_1 = mP_0. \tag{107}$$

Si se considera la presencia de los bafles en la esfera se tendrá que la primera reflexión sobre las paredes será

$$\Phi_1 = \alpha mP_0. \tag{108}$$

De aquí en adelante la iluminación será difusa sobre todos los puntos de la esfera. En la segunda reflexión el flujo que llega a la pared de la esfera es

$$\Phi_1 = m\alpha mP_0. \tag{109}$$

El flujo que llega a un elemento de área dA es proporcional al flujo que ilumina la esfera ($m\alpha mP_0$) y la fracción de área de la esfera que ésta representa, por lo que en esta instancia un detector de área A_δ recibirá un flujo

$$\Phi_{2\delta} = \frac{A_\delta}{A_T} m\alpha m P_0. \tag{110}$$

Similarmente, la muestra de área A_s recibirá un flujo

$$\Phi_{2s} = \frac{A_s}{A_T} m\alpha m P_0. \tag{111}$$

Denotamos por r la reflectancia difusa del detector y por R_d la reflectancia difusa de la muestra. Por lo tanto, en una tercera reflexión tendremos un flujo

$$\begin{aligned}
\Phi_3 &= m^2\alpha^2 mPo + r\frac{A_\delta}{A_T} m\alpha m P_0 + Rd\frac{A_s}{A_T} m\alpha m P_0 \\
&= m^2\alpha Po(m\alpha + r\frac{A_\delta}{A_T} + R_d\frac{A_m}{A_T}).
\end{aligned} \tag{112}$$

Definimos ahora

$$F = m\alpha + r\frac{A_\delta}{A_T} + R_d\frac{A_m}{A_T}, \tag{113}$$

con lo que el flujo en la tercera reflexión puede ser reescrito como

$$\Phi_3 = Fm^2\alpha Po. \tag{114}$$

El flujo total que recibe el detector después de la n-ésima reflexión

$$\begin{aligned}
\Phi_n &= \frac{A_\delta}{A_T}(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \ldots + \Phi_n) \\
&= \frac{A_\delta}{A_T}(mP_0 + \alpha m^2 P_0 + Fm^2\alpha P_0 + F^2 m^2\alpha P_0 + F^{n-2} m^2 \alpha P_0) \\
&= \frac{A_\delta}{A_T}(mP_0) + \frac{A_\delta}{A_T}\alpha m^2 P_0(1 + F + F^2 + F^{n-2}).
\end{aligned} \tag{115}$$

La serie geométrica es convergente si $F < 1$, que es el caso, de manera que la potencia detectada se puede expresar de la forma

$$\begin{aligned}
P_d &= \frac{A_\delta}{A_T} mP_0 + \frac{A_\delta}{A_T}\alpha m^2 P_0 \frac{1}{1-F} \\
&= mP_0\frac{A_\delta}{A_T}\left(1 + \frac{1}{1-F}\right).
\end{aligned} \tag{116}$$

Sustituyendo F (ecuación (113)) en la ecuación anterior, tenemos que

$$P_d = m\frac{A_\delta}{A_T}\frac{1 - r\frac{A_\delta}{A_T} - R_d\frac{A_m}{A_T}}{1 - m\alpha - r\frac{A_\delta}{A_T} - R_d\frac{A_m}{A_T}}P_0. \tag{117}$$

Suponiendo que el área del detector es muy pequeña en comparación con las áreas de la abertura de entrada y de la abertura de la muestra, (esta suposición es realista pues, típicamente, el detector se acopla a través de una fibra óptica) se reescribe la ecuación (117) de la forma

$$P_d = m\frac{A_\delta}{A_T}\frac{1 - R_d\frac{A_m}{A_T}}{1 - m\alpha - R_d\frac{A_m}{A_T}}P_0. \tag{118}$$

La expresión (118) relaciona la potencia que llega al detector con la potencia incidente, en función de las áreas y la reflectividad de la pared de la esfera.

Reflectancia externa difusa-difusa

En situaciones experimentales resulta práctico realizar mediciones en función de potencias detectadas, más que en términos de área que son difíciles de estimar con precisión. Para esto, es conveniente manipular algebraicamente la expresión (118).

Suponiendo que se tiene una esfera, sin muestra (es decir, $R_d = 0$), la potencia difusa medida será

$$P_d^{(0)} = m\frac{A_\delta}{A_T}\frac{1}{1 - m\alpha}P_0. \tag{119}$$

Se define a b_1 como la constante que relaciona la potencia detectada sin muestra y la potencia incidente, es decir

$$b_1 = \frac{P_d^{(0)}}{P_0}, \tag{120}$$

por lo que

$$b_1 = m\frac{A_\delta}{A_T}\frac{1}{1 - m\alpha}. \tag{121}$$

En términos de b_1, la potencia detectada cuando se utiliza una muestra con reflectancia ($R_d \neq 0$) puede ser escrita de la forma

$$\begin{aligned} P_d &= m\frac{A_\delta}{A_T}\frac{1-R_d\frac{A_m}{A_T}}{(1-m\alpha)\left(1-\frac{A_m}{A_T}\frac{R_d}{1-m\alpha}\right)}P_0 \\ &= b_1\frac{1-R_d\frac{A_m}{A_T}}{1-\frac{A_m}{A_T}\frac{R_d}{1-\alpha m}}P_0. \end{aligned} \tag{122}$$

Definiendo a b_2 como

$$b_2 = \frac{A_m}{A_T}\frac{1}{1-\alpha m}, \tag{123}$$

podemos entonces reescribir la ecuación 122 de manera

$$P_d = b_1\frac{1-R_d\frac{A_m}{A_T}}{1-b_2R_d}P_0. \tag{124}$$

La constantes b_1 y b_2 se conocen como las constantes de la esfera. En efecto, vemos que están determinadas por la reflectancia de la pared de la esfera y parámetros geométricos relacionados con las aberturas. La ecuación anterior concuerda con la reportada por Pickering *et al.* (1993).

Si ahora colocamos en la esfera una muestra de reflectancia R_s conocida, es decir un estándar, tenemos que la potencia detectada será

$$P_d^{(s)} = b_1\frac{1-R_s\frac{A_m}{A_T}}{1-b_2R_s}P_0. \tag{125}$$

El cociente A_m/A_T puede ser escrito en función de la constante b_2,

$$\frac{A_m}{A_T} = b_2(1-m\alpha), \tag{126}$$

que sustituido en la ecuación (125) resulta en

$$P_d^{(s)} = \frac{P_d^{(0)}}{P_0}\frac{1-R_sb_2(1-m\alpha)}{1-b_2R_s}P_0. \tag{127}$$

Despejando b_2 de la ecuación anterior encontramos que

$$b_2 = \frac{1}{R_s}\frac{\frac{P_d^{(0)}}{P_0}-\frac{P_d^{(s)}}{P_0}}{\frac{P_d^{(0)}}{P_0(1-m\alpha)}-\frac{P_d^{(s)}}{P_0}}. \tag{128}$$

Vemos ahora que las ecuaciones (120) y (128) proveen expresiones para las constantes de la esfera en términos de mediciones de potencia.

Regresando a la ecuación (124) encontramos finalmente que la reflectancia bajo iluminación difusa puede ser escrita de la forma

$$R_d = R_{std} \left(\frac{1 - \frac{P_d}{P_d^{(0)}}}{1 - \frac{P_d^{(s)}}{P_d^{(0)}}} \right) \left(\frac{1 - \frac{P_d^{(s)}}{P_d^{(0)}(1-m\alpha)}}{1 - \frac{P_d}{P_d^{(0)}(1-m\alpha)}} \right). \tag{129}$$

Esta expresión resulta práctica para la medición de la reflectancia difusa-difusa ya que, aparte del factor $m\alpha$, está solamente en función de 3 potencias que pueden ser medidas con facilidad.

Incertidumbre asociada a la estimación la reflectancia externa difusa-difusa

La ecuación (129) parece ser una buena manera de estimar la reflectancia difusa. A continuación se presenta un análisis de la incertidumbre asociada a este tipo de mediciones.

Para realizar dicho análisis reescribimos la ecuación (129) de la siguiente manera

$$R_d = R_s \frac{1-\rho}{1-\rho_s} \frac{1 - \frac{\rho_s}{(1-n)}}{1 - \frac{\rho}{(1-n)}}, \tag{130}$$

donde $\rho = P_d/P_d^{(0)}$, $\rho_s = P_d^{(s)}/P_d^{(0)}$ y $n = m\alpha$. Supongamos que estimamos estos tres parámetros realizando varias mediciones y promediándolas. El error o incertidumbre se puede estimar de la desviación estándar

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2}, \tag{131}$$

donde N es el número de mediciones realizadas, x_i el valor de cada medición y $\overline{x}$ el promedio de todas las mediciones.

Por otro lado, la incertidumbre en una función de varias variables puede ser estimada como

$$\Delta F(x_1, x_2, \ldots, x_j) = \sqrt{\left|\frac{\partial F}{\partial x_1}\Delta x_1\right|^2 + \left|\frac{\partial F}{\partial x_2}\Delta x_2\right|^2 + \ldots + \left|\frac{\partial F}{\partial x_j}\Delta x_j\right|^2}. \tag{132}$$

En la medición de la reflectancia difusa-difusa se tienen diversas fuentes de error, las principales son: ρ, ρ_s y n. Analizando estas 3 fuentes de error tenemos que las que contribuyen significativamente en los resultados son ρ y ρ_s. Estas están en función de las potencias detectadas, las cuales pueden presentar fluctuaciones. En cambio, n tiene asociada una incertidumbre pero no presenta variaciones (puede introducir un error sistemático), pues depende de la reflectividad de la pared de la esfera y del área total de la esfera y sus aberturas. Estos dos parámetros son proporcionados por el fabricante y son constantes.

Siguiendo este esquema, la incertidumbre en la estimación de reflectancia difusa debido a errores de medición es

$$\Delta R_d = \sqrt{\left|\frac{\partial R_d}{\partial \rho}\Delta \rho\right|^2 + \left|\frac{\partial R_d}{\partial \rho_s}\Delta \rho_s\right|^2 + \left|\frac{\partial R_d}{\partial n}\Delta n\right|^2}. \tag{133}$$

La incertidumbre debida solamente a la estimación ρ es

$$\begin{aligned} \Delta R_{d|(\rho_d)} &= \left|\frac{\partial R_d}{\partial \rho_d}\Delta \rho_d\right| \\ &= \left|R_s \frac{(1-n-\rho_s)n}{(1-\rho_s)(1-n-\rho)^2}\Delta \rho\right|, \end{aligned} \tag{134}$$

en cambio, la incertidumbre asociada a la estimación ρ_d es

$$\begin{aligned} R_{d|(\rho_s)} &= \left|\frac{\partial R_d}{\partial \rho_s}\Delta \rho_s\right| \\ &= \left|R_s \frac{(1-\rho)n}{(1-\rho_s)^2(1-n-\rho)}\Delta \rho_s\right|. \end{aligned} \tag{135}$$

Finalmente la incertidumbre asociada al error en n es

$$\begin{aligned} R_{d|(n)} &= \left| \frac{\partial R_d}{\partial n} \Delta n \right| \\ &= \left| R_s \frac{(1-\rho)(\rho-\rho_s)}{(1-\rho_s)(1-n-\rho_s)^2} \Delta n \right|. \end{aligned} \tag{136}$$

Donde $\Delta\rho$ y $\Delta\rho_s$ pueden ser calculadas de la siguiente manera

$$\Delta\rho = \frac{P_d}{P_d^{(0)}} \sqrt{\left(\frac{\Delta P_d}{P_d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P_d^{(s)}}{P_d^{(s)}}\right)^2} \tag{137}$$

$$\Delta\rho_s = \frac{P_d^{(s)}}{P_d^{(0)}} \sqrt{\left(\frac{\Delta P_d}{P_d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta P_d^{(s)}}{P_d^{(s)}}\right)^2}. \tag{138}$$

La incertidumbre asociada a n es mínima en este caso, ya que típicamente la reflectividad de la pared de la esfera tiene una incertidumbre del 1% (estos datos son proporcionados por el fabricante).

Con base en las expresiones anteriores se puede analizar la estabilidad de la ecuación (129) para la estimación de la reflectancia difusa-difusa.

Cuando la incertidumbre en la medición de las potencias P_d, $P_d^{(s)}$ y $P_d^{(0)}$ es del 2% y la incertidumbre asociada a la reflectividad de la pared de la esfera m es del 1%, tenemos errores alrededor del 4% en la estimación de la reflectancia difusa-difusa. Es claro que, conforme disminuye la incertidumbre de las potencias medidas disminuye el error y que entre más mediciones se realicen, menor será el error en las mediciones. Esto nos lleva a concluir que la ecuación (129) es una expresión confiable para la estimación de reflectancias.

Reflectancia interna difusa-difusa

El caso de la medición de la reflectancia interna es más problemático, debido a que se debe realizar una medición indirecta. El problema principal reside en cómo iluminar desde el interior de la muestra para estimar la reflectancia. El desarrollo que se presentan supone que la parte imaginaria del índice de refracción es cero, y sólo será válido para un material que no absorba de manera significativa. Para estimar la reflectancia interna se realizaron dos mediciones de reflectancia en dos muestras preparadas específicamente para este propósito. La solución propuesta se ilustra en la figura 35. La muestra de la figura 35(a) tiene una cara rugosa y una plana, mientras que la de figura 35(b) tiene las dos caras rugosas. Las tres caras rugosas se prepararon con el mismo procedimiento (por abrasión), de manera que deben tener las mismas propiedades estadísticas.

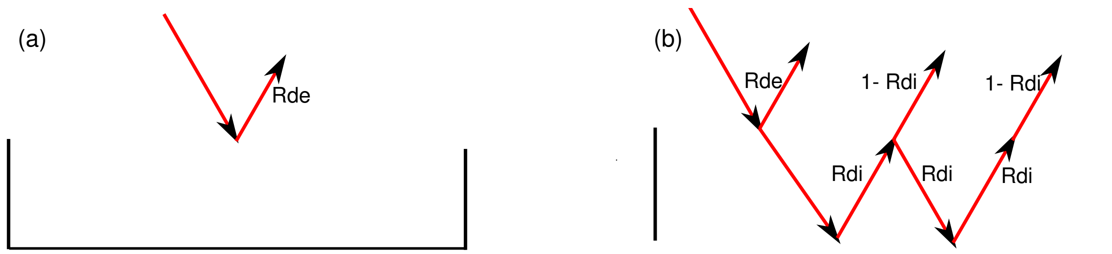


Figura 35. Dibujos esquemáticos que muestran los procesos de esparcimiento en la pareja de muestras que se utilizaron para estimar la reflectancia interna.

La muestra de la figura 35(a) servirá para estimar la reflectancia externa de la superficie rugosa (la cara plana está en contacto óptico con una película de pintura negra para reducir los efectos de reflexión de esta cara) y la figura 35(b) se utiliza para estimar la reflectancia interna. Recordemos que se está tratando de estimar la reflectancia interna difusa-difusa. Para esto, es necesario iluminar la superficie desde el interior con direcciones de incidencia que cubran todo el hemisferio. Vemos que si se ilumina a través de una interfase plana, como ocurriría en una muestra como la figura 35(a), debido a la refracción en la superficie plana, no se tiene acceso a todo el hemisferio de iluminación (solamente hasta el ángulo crítico). Debido a esto, se utilizó la configuración de la figura 35(b). La rugosidad de la cara de entrada ayuda a cubrir los ángulos de incidencia que no son accesibles a través de la cara plana.

Consideremos el caso de iluminación difusa sobre una muestra como la de figura 35(b) (es decir, rugosa por ambas caras). El flujo que incide sobre la primera cara, se divide en 2 componentes; una componente reflejada de manera difusa (R_{de}) y una componente transmitida ($1 - R_{de}$). La componente transmitida iluminará la segunda cara de la muestra, por lo que tendremos una reflexión interna (R_{di}). Ésta, a su vez, iluminará la primera cara internamente. Al ser ambas caras estadísticamente equivalentes, se tendrán nuevamente dos componentes; una componente reflejada (R_{di}) y una componente transmitida ($1 - R_{di}$).

Siguiendo este procedimiento, obtenemos la reflectancia difusa de la muestra como la suma de todas estas contribuciones,

$$\begin{aligned} R_{DM} &= R_{de} + (1 - R_{de})(R_{di})(1 - R_{di}) + (1 - R_{de})(R_{di})(R_{di})(R_{di})(1 - R_{di}) + \ldots \\ &= R_{de} + (1 - R_{de})(R_{di})(1 - R_{di})[1 + R_{di}^2 + R_{di}^4 + \ldots]. \end{aligned} \tag{139}$$

Puesto que $R_{di} < 1$, la serie geométrica converge, por lo que

$$R_{DM} = R_{de} + (1 - R_{de})\frac{R_{di}}{1 + R_{di}}. \tag{140}$$

Despejando R_{di} de la ecuación anterior obtenemos

$$R_{di} = \frac{R_{DM} - R_{de}}{1 - R_{DM}}, \tag{141}$$

que provee una manera de estimar la reflectancia interna en términos de la reflectancia externa y de la reflectancia de la muestra.

La reflectancia externa (R_{de}) se obtiene al medir la reflectancia de una muestra que tiene rugosidad solamente en una de sus caras (figura 35(a)). Para estimar esta reflectancia se debe colocar una película de pintura negra en la cara plana para reducir la reflexión vidrio-aire. En cambio, la reflectancia R_{DM} se obtiene al medir la reflectancia de una muestra rugosa por ambas caras. Las reflectancias R_{de} y R_{DM} se estiman de mediciones con la esfera integradora, con base en lo presentado en la sección anterior.

La ecuación (141) parece proporcionar una manera confiable de estimar la reflectancia interna. A continuación consideremos la incertidumbre asociada a está estimación indirecta de la reflectancia interna.

De la ecuación (132) tenemos que

$$\Delta R_{di} = \sqrt{\left|\frac{1}{1-R_{DM}}\Delta R_{de}\right|^2 + \left|\frac{1-R_{de}}{(1-R_{DM})^2}\Delta R_{de}\right|^2}, \tag{142}$$

donde las incertidumbres ΔR_{de} y ΔR_{DM} se obtienen a partir de la ecuación (131). Cuando la incertidumbre en la estimación de las reflectancias R_{de} y R_{DM} es del 1%, se tiene un error de alrededor del 2%. Por lo que se concluye que ésta es una forma estable de estimar la reflectancia interna.

IV.1.2 Iluminación directa

Consideremos ahora el caso en que tenemos luz colimada incidiendo directamente sobre la muestra, como se muestra en la Figura 33(a). Para este análisis se consideró una esfera sin bafle, a diferencia del caso de iluminación difusa, debido a que el desarrollo matemático y grado de complejidad aumenta considerablemente. El inconveniente de utilizar esferas sin bafle es que sólo son adecuadas para realizar mediciones en muestras sin componente especular.

Debido a que el tratamiento matemático para iluminación directa ha sido descrito en trabajos anteriores (Pickering *et al.*, 1993; Terán-Bobadilla, 2010), sólo se describen algunas generalidades de como obtener la expresión de la reflectancia directa-difusa.

Reflectancia externa directa-difusa

Consideremos un haz de potencia P_0 que incide sobre la muestra. La luz reflejada se puede dividir en dos componentes. Una componente especular,

$$R_c P_0, \tag{143}$$

y una componente difusa

$$R_{cd} P_0, \tag{144}$$

donde R_c representa la fracción de potencia incidente que se refleja de manera especular y R_{cd} representa la fracción de luz que se refleja de manera difusa.

Si la reflexión especular de la muestra ilumina la pared de la esfera, se tendrá una componente adicional de flujo, dada por

$$m R_c P_0. \tag{145}$$

La potencia detectada utilizando una esfera con bafle está dada por la ecuación (117), pero al estar considerando en este caso una esfera sin bafle, esta expresión se modifica, resultando en

$$P_d = \frac{A_\delta}{A_T} \frac{m}{1 - m\alpha - r\frac{A_\delta}{A_T} - R_d \frac{A_m}{A_T}} P_0. \tag{146}$$

Al tener dos componentes de luz reflejadas en la esfera se tendrán dos fuentes de luz difusa, dadas por las ecuaciones (144) y (145). La potencia colectada por el detector será la suma de las contribuciones de cada una de las fuentes. Esto es,

$$P_{cd} = \frac{A_\delta}{A_T} \frac{(m R_c + R_{cd})}{1 - m\alpha - R_d \frac{A_m}{A_T}} P_0. \tag{147}$$

Existen esferas con una abertura extra que permite sacar el flujo de la componente especular, lo que simplifica la medición. Si no se incluye la componente especular, la ecuación anterior se puede escribir como,

$$P_{cd} = \frac{A_\delta}{A_T} \frac{R_{cd}}{1 - m\alpha - R_d \frac{A_m}{A_T}} P_0. \tag{148}$$

La potencia detectada al iluminar la pared de una esfera está dada por la ecuación (146). Si reescribimos la ecuación (148) en función de P_d, tenemos

$$P_{cd} = \frac{R_{cd} P_d}{m}, \tag{149}$$

por lo que la reflectancia R_{cd} puede ser escrita de la siguiente forma

$$R_{cd} = m \frac{P_{cd}}{P_d}. \tag{150}$$

Esta expresión es una forma sencilla para realizar mediciones de reflectancia directa-difusa, pero sólo será válida para muestras sin componente especular (muy rugosas) y la medición deberá ser realizada en una esfera sin bafle.

En la medición de la reflectancia directa-difusa se tienen diversas fuentes de error. En la ecuación (150) se tienen tres incógnitas, pero sólo dos contribuyen de manera significativa P_{cd} y P_d, ya que están en función de las potencias detectadas y éstas pueden presentar fluctuaciones.

La incertidumbre de la reflectancia directa-difusa puede ser estimada con la ecuación (132), por lo que

$$\Delta R_{cd} = R_{cd} \sqrt{\left(\frac{\Delta P_{cd}}{P_{cd}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta P_d}{P_d} \right)^2}. \tag{151}$$

La incertidumbre en la medición de las potencias P_{cd} y P_d puede ser estimada con la ecuación (131).

IV.2 Caracterización de las superficies

Para proceder con nuestro estudio experimental, se fabricaron superficies con diferentes propiedades estadísticas. A continuación describimos los procesos de fabricación y caracterización de las muestras.

IV.2.1 Determinación del índice de refracción

Para evitar reflexiones internas, para algunas muestras se utilizaron sustratos absorbentes. Para la determinación de índice de refracción se utilizaron técnicas elipsométricas. Se utilizó un elipsómetro GAERTNER (L117), y por la técnica de nulos se determinaron los parámetros elipsómetricos Δ y Ψ, los cuales están en función de las constantes ópticas del sustrato.

La elipsometría se basa en el hecho de que es posible modificar la amplitud y fase de la señal del haz incidente, transformando así la luz reflejada elípticamente por la muestra a polarización lineal. Esto se logra rotando un polarizador el cual se encuentra entre la muestra y la fuente de luz. La luz reflejada linealmente es analizada con otro polarizador (analizador), el cual se rota hasta encontrar un mínimo en intensidad (Goldstein, 2003).

Los ángulos Δ y Ψ, los cuales describen el cambio en la amplitud y la fase de la onda reflejada se definen en términos del cociente de los coeficientes de Fresnel. Para ondas con polarizaciones s y p se tiene que

$$\rho = \frac{r_p}{r_s} = \tan\Psi e^{i\Delta} \tag{152}$$

Una vez conocidos Δ y Ψ, podemos determinar el índice de refracción complejo de los sustratos, a través de la ecuación

$$n_c = \sin^2\theta_1 \left[1 + \tan^2\theta_1 \left(\frac{1-\rho}{1+\rho}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{153}$$

donde θ_1 representa el ángulo de incidencia.

A continuación se describe el procedimiento que se debe seguir para determinar los ángulos Δ y Ψ (Tompkins, 2006). El elipsómetro cuenta un láser He-Ne con una longitud de onda de emisión de 632.8 nm, un polarizador (P), un analizador (A) y una perilla para el ajuste de la ganancia.

1. Se fija el ángulo de incidencia a 50 grados, el polarizador (P) a 85 grados y el analizador (A) a 45 grados.

2. Se coloca la muestra. Se ajusta la ganancia de tal manera que, la lectura se encuentre a la mitad del rango de medición.

3. Se gira el analizador (A) hasta minimizar la lectura de la señal. Después se realiza el mismo procedimiento con el polarizador (P).

4. Se ajusta la ganancia de tal manera que lectura se encuentre a la mitad de rango.

5. Se gira el analizador hasta obtener un mínimo para después realizar lo mismo con el polarizador, se repiten los pasos 3 y 4 hasta obtener el mejor mínimo.

6. Una vez obtenido el mínimo, se toma lectura de los ángulos marcados en el polarizador (P_1) y el analizador (A_1).

7. Se suma 90 grados al valor del ángulo del polarizador obtenido previamente ($P_1 + 90$), y se resta 180 grados al valor del ángulo del analizador ($180 - A_1$).

8. Se fijan el polarizador y el analizador en los valores obtenidos.

9. Se repiten los pasos 3 y 4 hasta obtener el mejor mínimo.

10. Se toman las lecturas de los ángulos marcados en el polarizador (P_2) y el analizador (A_2).

Una vez obtenidos P_1, P_2, A_1 y A_2, se calculan los ángulos Δ y Ψ, que están dados por las siguientes expresiones

$$\Psi = \frac{180 - A_2 + A_1}{2} \tag{154}$$

$$\Delta = 360 - (P1 + P2) \tag{155}$$

Es importante determinar el índice de refracción de los sustratos ya que, a partir de este, se puede calcular el valor teórico de la reflectancia para una superficie plana. En la tabla 1 se presentan los resultados obtenidos para los diferentes sustratos.

Tabla 1. Ángulo Δ, Ψ e índice de refracción complejo para diferentes sustratos.

Superficie	Δ [grados]	Ψ [grados]	n_c
Vidrio Negro	10.64	178.01	1.539 - i0.0157
Fotoresina	13	164.5	1.6117 - i0.1632
Silicio	31.4	179.1	3.8622 - i0.077

El índicie de refracción para el silicio reportado en la literatura para una longitud de onda de 0.630 μm es $n = 3.879 - i0.016$ (Green *et al.*, 2010). El índice de refracción obtenido con el elipsómetro es muy cercano a este valor, cabe señal que el elipsómetro cuenta con un láser que emite en 0.632 μm.

IV.2.2 Fabricación de las superficies

Una vez determinado el índice de refracción de los sustratos, se emplearon diferentes técnicas para introducir rugosidad. Se utilizaron diferentes sustratos de vidrio transparente, vidrio negro, fotoresina, silicio, acrílico y teflón.

Para medir la reflectancia externa, se fabricaron muestras utilizando como sustrato vidrios negros absorbentes, evitando así los efectos de la reflexión en la segunda cara. La rugosidad se introdujo por métodos mecánicos mediante bombardeo con arena (sand blasting), variando el tiempo de exposición. Las superficies generadas de esta manera presentan estructura en varias escalas y no tienen una función de correlación gaussiana. Se trata de superficies multiescala parecidas más bien a una superficie de tipo fractal, al menos en un intervalo de frecuencias espaciales. También se fabricaron superficies multiescala en vidrios transparentes con diferentes polvos abrasivos.

Las superficies con funciones de correlación gaussianas ya se tenían en el laboratorio y fueron fabricadas en fotoresina. Se utilizó como sustrato un vidrio transparente sobre el cual fue depositada la fotoresina y en ésta fue grabada la superficie rugosa. En este caso se contó tanto con superficies unidimensionales (alturas constantes en una dirección y variaciones en la dirección perpendicular) como con superficies bidimensionales.

Se fabricaron también 2 superficies multiescala en sustratos de silicio con polvos abrasivos. La primera fue fabricada con bombardeo de arena y la segunda se logró puliendo el silicio con polvos abrasivos. También se introdujo rugosidad en muestras de acrílico y teflón, que tienen esparcimiento de volumen, mediante bombardeo de arena.

IV.2.3 Caracterización de la rugosidad

Perfilometría mecánica

Para determinar el perfil de las superficies se utilizó un perfilómetro mecánico semiautomático $Dektak^3ST$ (RAS-440A). En la operación de este instrumento, se utiliza una aguja con punta de diamante que, en contacto con la superficie a caracterizar, realiza un barrido unidimensional. La punta de la aguja tiene dimensiones laterales inferiores a una micra. Cuando se trabaja con muestras blandas, como fotoresina, es importante reducir el peso de la aguja lo más posible para reducir el daño en la muestra y tener una estimación fiel del perfil.

Para estimar las propiedades estadísticas de las superficies utilizadas se tomaron dieciséis trazas de cada superficie. Cada una de ellas con 4800 u 8000 puntos; un intervalo de muestreo de 0.125 μm, 0.250 μm ó 0.625 μm; un recorrido de 1000 μm, 2000 μm ó 3000 μm; y un rango vertical de medición de 131 μm. Con estos perfiles se estimó la desviación estándar de alturas δ, la desviación estándar de pendientes δ_d, los histogramas de alturas y pendientes y la función de correlación de alturas.

Vale la pena hacer notar que la perfilometría en superficies multiescala, como las que utilizamos en este estudio, es complicada. Lo anterior se debe a varios factores. Las muestras tienen variaciones de altura cuyas escalas laterales son muy pequeñas (del orden de nanómetros) pero, al mismo tiempo, tienen variaciones con escalas de milímetros. Debido al detalle fino, la relación entre el perfil superficial y su estimación no es lineal; es decir, que el tamaño finito de la aguja no juega el papel de un filtro lineal en la estimación del perfil. Por otro lado, las propiedades estadísticas de este tipo de superficies reales son muy difíciles de modelar y parámetros como la longitud de correlación podrían no ser representativo en algunos casos.

Esparcimiento de luz

Como se señaló en la sección anterior, la perfilometría para superficies multiescala es compleja, y es por eso que se decidió implementar un método alternativo para determinar la desviación estándar de pendientes. Se utilizó un método óptico basado en la intensidad de la luz esparcida como función del ángulo de esparcimiento. Este método consiste básicamente en realizar una medición de la distribución angular de la intensidad promedio esparcida cuando se tiene incidencia normal. Dado que la distribución angular tiene una forma que es aproximadamente gaussiana, se debe encontrar el ángulo de esparcimiento al cual la potencia decae por un factor de $1/e$.

Utilizando la expresión analítica para la intensidad promedio esparcida basada en la aproximación de Kirchhoff (ecuación (103)), es entonces posible estimar la desviación estándar de pendientes con este método. Para incidencia normal, la ecuación 103 nos dice que

$$\langle I(\theta_s)\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2\delta_d^2}\left(\frac{\tan\theta_s}{2}\right)^2\right]. \tag{156}$$

Despejando el término δ_d, el cual representa la desviación estándar de pendientes se tiene que

$$\delta_d = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan\left(\frac{\theta_s}{2}\right). \tag{157}$$

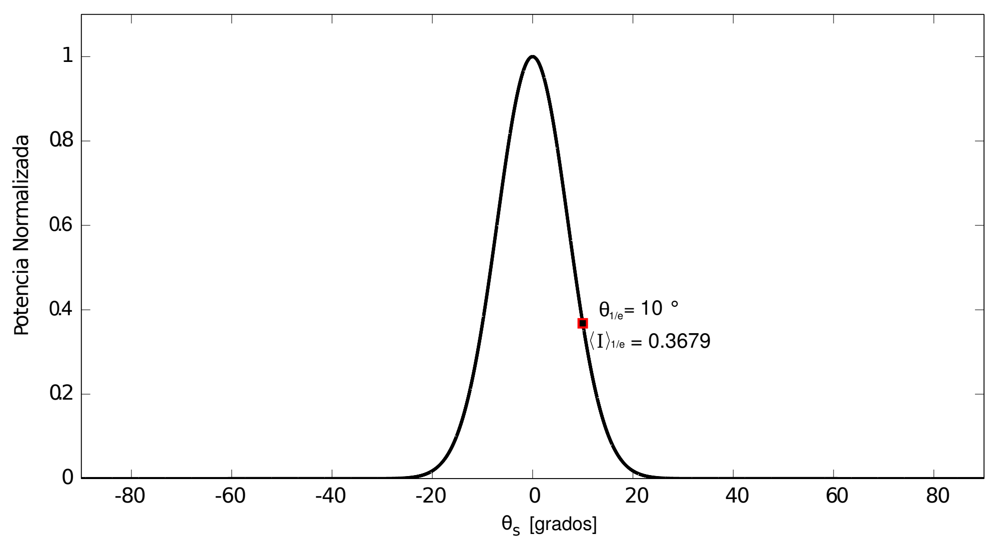


Figura 36. CDR normalizado con el valor 1/e se puede calcular la desviación estándar de pendientes.

El arreglo experimental empleado para este fin se conoce con el nombre de esparcímetro. El instrumento empleado en este trabajo está constituido por sistemas de control de posición manual, iluminación, detección y de toma de datos con amarre de fase.

El sistema de control de posición opera sobre dos motores a pasos. Uno de ellos determina el ángulo de incidencia y el otro el movimiento angular de los brazos del sistema de detección. La iluminación es proporcionada por un láser He-Ne con una longitud de onda de emisión de 632.8 nm y la señal es captada por un detector de silicio (New Focus, modelo 2051).

El sistema de detección con amarre de fase permite trabajar en condiciones de iluminación ambiental, con la ventaja de que elimina el ruido proveniente de fuentes no moduladas temporalmente, ya que se encuentra sincronizado con un amplificador de bajo ruido que funciona como sistema de detección (lock-in). Esto es posible gracias a la utilización de un cortador de haz o "chopper" (SR540) que provee la señal de sincronización al lock-in (SR830).

La configuración empleada para determinar experimentalmente la desviación estándar de pendientes se muestra en la figura 37. En la figura, se observa que la luz proveniente del láser es modulada temporalmente por el cortador de haz. El haz pasa por un diafragma, una lente y un arreglo de espejos, e ilumina la muestra cuyo patrón de esparcimiento es captado por el detector en el campo lejano.

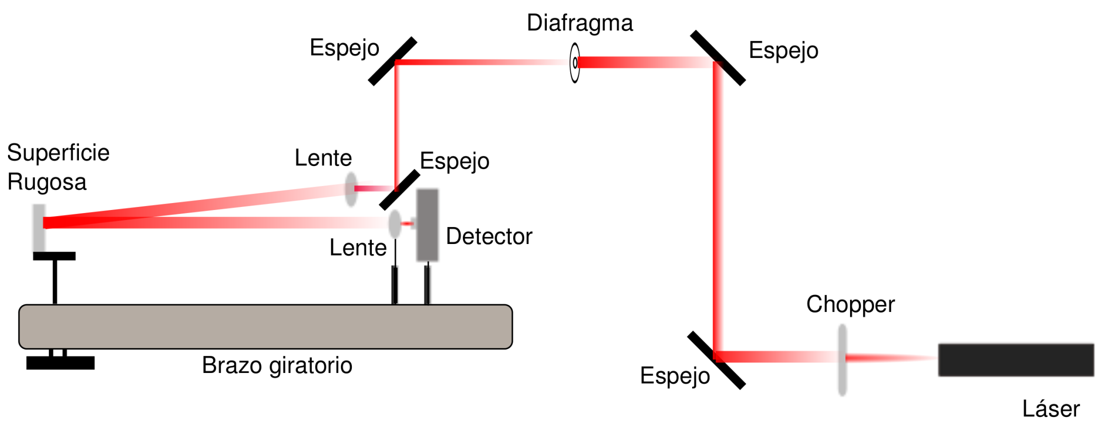


Figura 37. Arreglo utilizado para la determinación de δ_d por métodos ópticos (esparcimetro).

La luz esparcida se colecta por el sistema de detección, el cual está formado por una lente que colecta y enfoca la luz sobre el detector. El sistema de detección integra sobre motas "speckles" producidos por la interferencia aleatoria de la luz proveniente de diferentes regiones de la superficie rugosa. De esta manera se estima la intensidad promedio. El sistema de detección se encuentra montado sobre un brazo que está fijo al eje de rotación de un motor que nos permite realizar un barrido angular.

IV.3 Medición de la reflectancia con esferas integradoras

Una vez caracterizadas las superficies se procedió a realizar mediciones de reflectancia para cada una de ellas. Para ello, establecemos primero las características de la esfera integradora a utilizar. Posteriormente describimos el arreglo experimental.

IV.3.1 Características de la esfera integradora

Se utilizó una esfera integradora (Labsphere, modelo 4P-GPS-053-SL), la cual cuenta con 4 aberturas y un bafle entre cero y 90 grados. Se utilizaron solamente 3 aberturas por lo que la abertura superior se cubrió con su tapa de material reflejante (este material es el mismo con el que se encuentran recubiertas las paredes de la esfera). El material con el cual están recubiertas las paredes de la esfera es espectralón, el cual tiene una reflectividad $m = 0.98$ para el visible. En la tabla 2 se muestran las características de la esfera.

Tabla 2. Características de la esfera

	Diámetro (pulgadas)	Área (pulgadas cuadradas)
Esfera	5.3	88.247
Abertura de entrada	1	0.7854
Abertura muestra	1	0.7854
Abertura del detector	0.028	0.0707

Utilizando la ecuación (105) se calculó la constante α de la esfera, la cual representa el área de la esfera recubierta por el material altamente difusor. Está constante es de 0.9816.

Es importante señalar que al realizar mediciones de reflectancia difusa-difusa con esta esfera no se pueden considerar ángulos rasantes de incidencia. Esto es debido a que la abertura sobre la cual es colocada la muestra tiene un borde y el ángulo máximo de incidencia que podemos alcanzar es aproximadamente de 78.4 grados. En la figura 38 se ilustra el problema. Además, por la naturaleza del recubrimiento, sólo se pueden realizar mediciones de reflectancia con luz no polarizada.

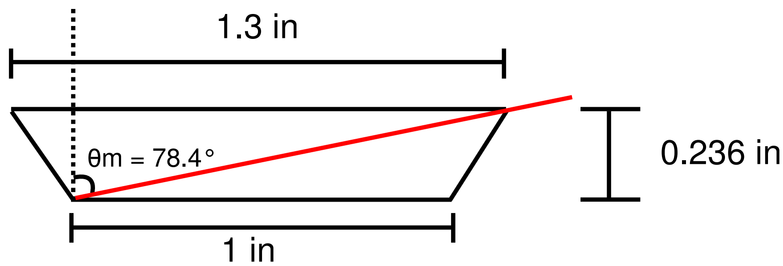


Figura 38. Ángulo máximo de iluminación que se puede alcanzar con la esfera integradora.

IV.3.2 Arreglo experimental

El arreglo que se utilizó para la medición de reflectancias está compuesto por: tres espejos fijos, un espejo removible, un diafragma, un cortador de haz (chopper) y una esfera integradora. Se escoge de entre dos haces incidentes, dependiendo del tipo de reflectancia que se desea medir. Un haz ilumina directamente a la muestra y el otro incide sobre la pared de la esfera. La Figura 39 nos muestra un diagrama del arreglo utilizado. El haz 1 incide directamente sobre la pared de la esfera, por lo que se tendrá iluminación difusa. Es importante señalar que el haz debe incidir entre la abertura del detector y el bafle. El haz 2 incide directamente sobre la muestra por lo que en este caso se tendrá iluminación directa.

La iluminación es proporcionada por un láser He-Ne con una longitud de onda de emisión de 632.8 nm. La señal es captada por un detector de silicio (New Focus, modelo

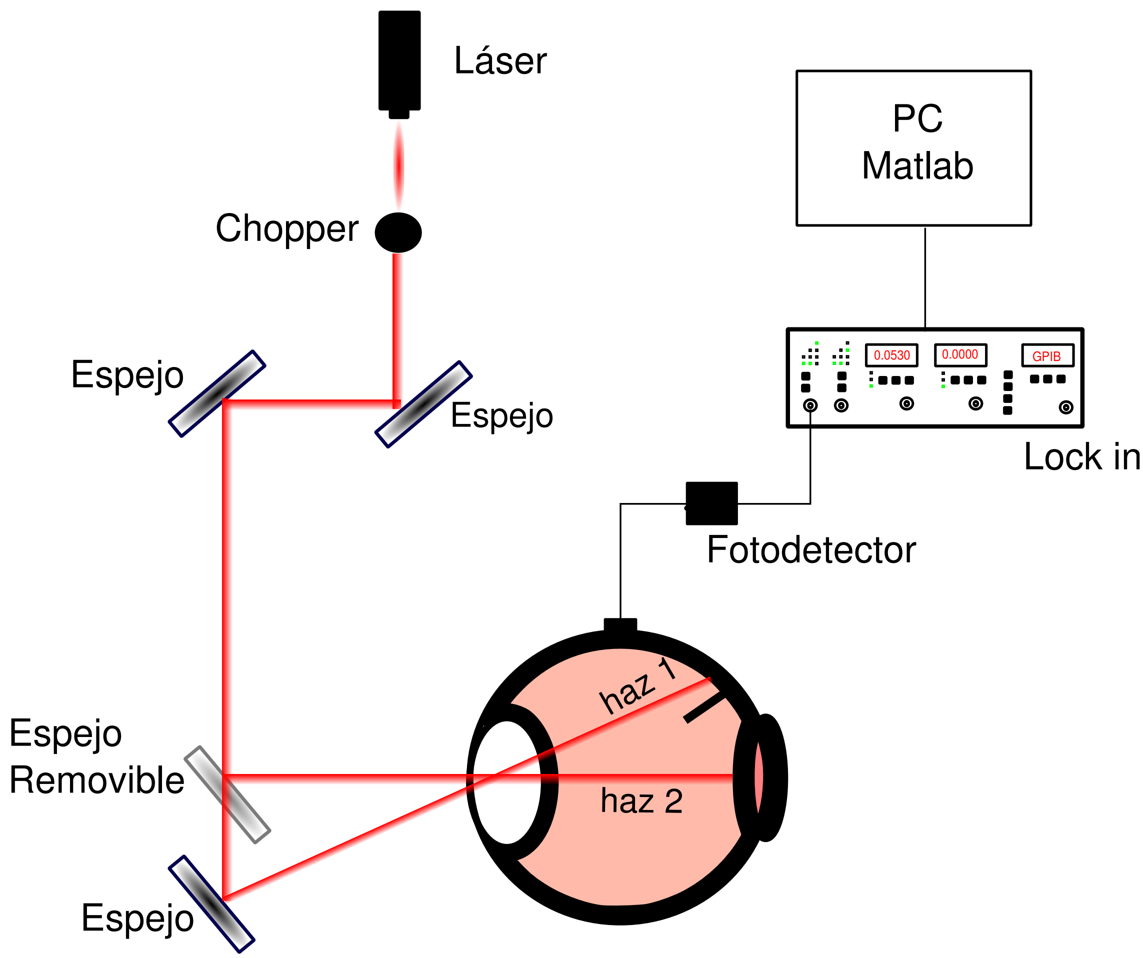


Figura 39. Arreglo experimental utilizado para la medición de reflectancias.

2051), el cual está acoplado a la esfera mediante una fibra óptica (Ocean Optics, P400-2-UV-VIS). El sistema de detección con amarre de fase permiten trabajar en condiciones de iluminación ambiental. Esto es posible gracias al uso de un cortador de haz o chopper (SR540) que provee la señal de sincronización al lock-in (SR830), el cual se encuentra conectado a una computadora mediante el puerto gpib para la adquisición de datos.

Para la medición de reflectancia difusa-difusa es necesario realizar 3 mediciones. La primera medición se realiza sin muestra, la segunda medición se realiza colocando la superficie y la tercera medición se realiza al colocar un estándar. Las potencias son denotadas como: $P_d^{(0)}$, P_d y $P_d^{(s)}$ respectivamente. Estas potencias representan el promedio de 50 lecturas obtenidas con el sistema de adquisición de datos. La desviación estándar representa la incertidumbre de las mediciones, la cual fue calculada con la ecuación (131) y son denotadas como: $\Delta P_d^{(0)}$, ΔP_d y $\Delta P_d^{(s)}$.

Una vez obtenidas las potencias $P_d^{(0)}$, P_d, $P_d^{(s)}$ y haciendo uso de la ecuación (129) se estimó la reflectancia difusa-difusa, el error de la reflectancia fue estimado con la ecuación (133).

Una forma de verificar que las mediciones de reflectancia obtenidas sean confiables es realizando la medición de superficies planas, debido a que con estas superficies se conoce el valor teórico de la reflectancia. Otro punto a señalar es que, al utilizar esferas con bafle no importa el tipo de estándar que se utilice (especular o difuso), por lo que se utilizaron 4 estándares diferentes para verificar que las mediciones obtenidas fueran las correctas. En la tabla 3 se presentan las características de los estándares utilizados. Los tres primeros son estándares nominales, mientras que la reflectancia del teflón se obtuvo a través de mediciones, tomando como estándar la pared de la esfera.

Tabla 3. Estándares utilizados.

Estándar	Tipo de reflexión	Reflectancia
Ocean Optics (WS-1)	Difusa	98 %
Pared de esfera	Difusa	98 %
Espejo (Edmund 1/4 λ UV/Enh Aluminum)	Especular	89 %
Teflón	Difusa	83 %

Al realizar la medición de una superficie plana se encontró que no bastaba con tomar un promedio de 50 mediciones, ya que el láser utilizado presentaba fluctuaciones en la intensidad. Por esta razón, se realizó la medición de reflectancia difusa-difusa de 10 a 15 veces con el procedimiento descrito previamente y se promediaron los valores. De está manera, se estimó la reflectancia difusa-difusa de las superficies. Cabe señalar que, con este procedimiento, la estimación de reflectancia implica un promedio de 500 a 750 mediciones. El error de la medición de la reflectancia fue estimado con la desviación estándar del total de las mediciones (ecuación (133)).

La medición de la reflectancia directa-difusa es más simple que la del caso anterior. El inconveniente es que, por la geometría de la esfera, sólo podemos medir esta reflectancia a 8 grados. Para realizar la medición se utilizó una esfera sin bafles (Ocean Optics, ISP-50-8-R-GT) y se utilizó el arreglo mostrado en la figura 39.

Para medir esta reflectancia se deben realizar dos mediciones, ambas se realizan con la muestra. La primera medición se realiza haciendo incidir el haz directamente sobre la muestra y es denotada por P_{cd}. La segunda medición se realiza haciendo incidir el haz sobre la pared de la esfera y es denotada por P_d. Estas potencias representan el promedio de 50 lecturas obtenidas con el sistema de adquisición de datos. La desviación estándar representa la incertidumbre de las mediciones, que fue calculada con la ecuación (131). Denotamos estas incertidumbres por ΔP_{cd} y ΔP_d.

La reflectancia directa-difusa se obtiene al sustituir las potencias P_{cd} y P_d en la ecuación (150). El error de la medición de la reflectancia fue estimado con la ecuación (151).

Capítulo V

Resultados experimentales

En este capítulo se presentan los resultados experimentales obtenidos en este trabajo. En la sección V.1 se presentan los valores obtenidos de la desviación estándar de alturas (δ) y la desviación estándar de pendientes (δ_d) de diferentes muestras. Posteriormente, en la sección V.2 se muestran las imágenes obtenidas de microscopía electrónica de barrido de las muestras. En las secciones V.3, V.4 y V.5 se presentan las mediciones de reflectancia externa. Finalmente, en la sección V.6 se muestran los resultados que se obtuvieron para la reflectancia interna.

V.1 Caracterización de las rugosidad

Se determinó la desviación estándar de pendientes (δ_d) de las superficies rugosas fabricadas. En las tablas 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 10 se presenta los resultados obtenidos. Como se mencionó anteriormente la perfilometría en superficies multiescala presenta dificultades y, se decidió estimar δ_d utilizando diferentes intervalos de muestreo. Se presentan, además, los resultados obtenidos con el esparcímetro.

En la tabla 4 se presentan los resultados obtenidos para muestras fabricadas en vidrios negros. La rugosidad se introdujo por métodos mecánicos a través de bombardeo con arena (sand blasting).

En la tabla se observa que los resultados obtenidos con el perfilómetro para las superficies vn1, vn4 y vn6 con un intervalo de muestreo de $0.25\mu m$ son muy cercanos a los obtenidos con el esparcímetro. No fue posible estimar δ_d para las muestras vn2 y vn3 por métodos ópticos, pues dichas superficies tienen con regiones planas. Es decir, que el proceso de erosión no alcanzó a actuar sobre toda la superficie plana original.

Tabla 4. Desviación estándar de alturas y pendientes para superficies multiescala, en vidrio negro con índice de refracción de $1.539 - i0.0157$.

superficie	$\delta[\mu m]$	δ_d			
		Intervalo de muestreo perfilómetro			Esparcimetro
		$[0.125\mu m]$	$[0.25\mu m]$	$[0.625\mu m]$	
vn3	4.6	0.2288	0.2181	0.1852	—
vn2	8.77	0.4136	0.3512	0.3612	—
vn4	8.58	0.4274	**0.3914**	0.3685	**0.3920**
vn6	9.03	0.4321	**0.3841**	0.3621	**0.4082**
vn1	8.5	0.4481	**0.4060**	0.3907	**0.4001**

La suposición que se realiza al utilizar el método basado en esparcimiento es que la distribuciones de alturas y pendientes (y consecuentemente la distribución angular de intensidad) tienen una forma gaussiana, cosa que para superficies con regiones planas esto no se cumple, por lo que los resultados entregados por el esparcímetro no se pueden utilizar para estos propósitos.

En la tabla 5 se presentan los resultados obtenidos para muestras fabricadas en vidrios transparentes. La rugosidad se introdujo utilizando polvos abrasivos en las muestras vt1 y vt100. En cambio, en la muestra vtss se utilizaron métodos mecánicos a través de bombardeo con arena (sand blasting). No se presenta el intervalo de muestreo de $0.125\mu m$ debido a que basándonos en la tabla 4, para este tipo de superficies (detalle muy fino) el intervalo de muestreo más adecuado es el de $0.25\mu m$, ya que con este se realiza un recorrido más largo.

En la tablas 6, 7 y 8 se presentan los resultados obtenidos para muestras fabricadas en silicio, acrílico y teflón. La rugosidad se introdujo con polvos abrasivos y por bombardeo de arena (sand blasting).

Tabla 5. Desviación estándar de alturas y pendientes para superficies multiescala, en un vidrio transparente con índice de refracción de 1.5

superficie	$\delta[\mu m]$	δ_d		
		Intervalo de muestreo perfilómetro		Esparcímetro
		$[0.25\mu m]$	$[0.625\mu m]$	
vtss	0.3	0.3010	0.2677	0.3681
vt1	2.0	0.2852	0.2427	0.3335
vt100	9.42	0.4425	0.4077	0.4082

Tabla 6. Desviación estándar de alturas y pendientes para superficies multiescala en silicio.

superficie	$\delta[\mu m]$	δ_d		
		Intervalo de muestreo perfilómetro		Esparcímetro
		$[0.25\mu m]$	$[0.625\mu m]$	
sp	1.66	0.3234	0.2325	0.4082
ss	5.72	0.3635	0.2906	0.4165

Es importante señalar que para las superficies fabricadas en acrílico y teflón, sólo se determinó la desviación estándar de pendientes con el perfilómetro ya que los medios no son homogéneos y el esparcimiento de volumen enmascara el esparcimiento por la superficie. En las tablas 7 y 8 se presentan los resultados.

En las tablas 9 y 10 se presentan los resultados obtenidos para las muestras fabricadas en fotoresina, utilizando como sustrato un vidrio transparente. Para este tipo de superficies la perfilometría no es tan complicada, por lo que sólo se utilizó un intervalo de muestreo.

En la tabla 9 se observa que, los resultados obtenidos con el perfilómetro y el

Tabla 7. Desviación estándar de alturas y pendientes para superficies multiescala en acrílico.

superficie	$\delta[\mu m]$	δ_d		
		Intervalo de muestreo perfilómetro		Esparcímetro
		$[0.25\mu m]$	$[0.625\mu m]$	
acri 1	1.24	0.2011	0.1615	0.2356
acri 2	0.96	0.1771	0.1448	0.1189
acri 3	1.1	0.2147	0.1662	0.1453

Tabla 8. Desviación estándar de alturas y pendientes para superficies multiescala en teflón.

superficie	$\delta[\mu m]$	δ_d		
		Intervalo de muestreo perfilómetro		Esparcímetro
		$[0.25\mu m]$	$[0.625\mu m]$	
tef 1	0.94	0.2173	0.1624	0.1420
tef 2	0.84	0.2000	0.1504	0.1272

esparcímetro para determinar la desviación estándar de pendientes δ_d son muy parecidos. Sin embargo, cuando se tienen superficies muy poco rugosas no se puede utilizar el esparcímetro para estimar δ_d con la teoría descrita, que supone que se tienen superficies muy rugosas; es decir, prácticamente sin componente especular. La caracterización de las superficies gaussianas en bidimensiones con el esparcímietro resulta difícil, debido a que sólo se contaba con superficies poco rugosas. Por está razón, en la tabla 10 sólo se presentan resultados de la desviación estándar de pendientes obtenidos con el perfilómetro.

Tabla 9. Desviación estándar de alturas y pendientes para superficies gaussianas 1D.

superficie	$\delta[\mu m]$	δ_d	
		Perfilómetro $[0.125\mu m]$	Esparcímetro
4401	0.9701	0.0970	0.0900
4406	1.033	0.0969	0.0931
4408	0.9822	0.0885	0.0806
4410	1.4897	0.1508	0.1535
4413	0.7155	0.0712	0.0494
4419	1.0922	0.1036	0.1057
4421	0.8747	0.0827	0.0806

Tabla 10. Desviación estándar de alturas y pendientes para superficies gaussianas 2D.

superficie	δ_d	δ $[\mu m]$
05239	0.01238	0.066
05235	0.01546	0.139
05243	0.02001	0.235
05244	0.02768	0.233
05242	0.03271	0.153
05237	0.27268	0.185

V.2 Microscopía electrónica

Se analizó por microscopía electrónica de barrido (JEOL JSM-35c) a las superficies fabricadas en vidrios negros absorbentes y silicio. No se analizan las superficies con función de correlación gaussiana, debido a que la fotoresina es muy sensible y las muestras se hubieran dañado en el proceso.

La ventaja de utilizar microscopía electrónica de barrido es que produce imágenes de alta resolución, por lo que los detalles finos en las muestras pueden ser examinados y apreciados con claridad. A las muestras les fue depositado carbono pues se requiere que sean conductoras, para que no acumulen carga. Cabe señal que la amplificación que se presenta en las etiquetas de las figuras no es una amplificiación real, y es sólo una referencia que tiene cierta relación con la resolución espacial de la imagen.

En la figuras 41 y 40 se presentan las imágenes obtenidas para las superficies multiescala fabricadas en vidrios negros, utilizando diferentes ampliaciones.

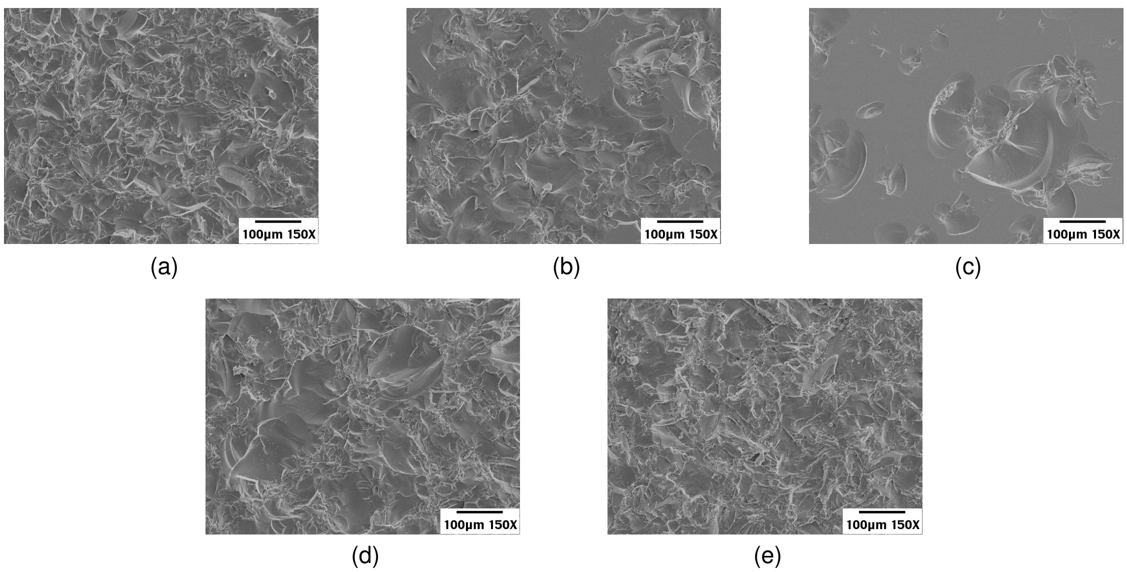


Figura 40. Imágenes de microscopía electrónica de barrido de las superficies multiescala. (a) Superficie vn1, (b) superficie vn2, (c) superficie vn3, (d) superficie vn4 y (e) superficie vn6. La resolución espacial es de 100 μm y la amplificación utilizada es de 150×.

En las figuras 40(b) y 40(c) se observa que estas superficies tienen regiones planas, por lo cual no fue posible determinar δ_d con el esparcímetro. También se observa que la superficie vn6 (figura 40(e) y 41(e)) es la más rugosa, por lo que las δ_d obtenidas con el esparcímetro para las superficies vn1, vn4 y vn6 parecen ser las más confiables.

En la figura 42 se presentan las imágenes obtenidas con diferentes resoluciones de las superficies multiescala fabricadas en silicio.

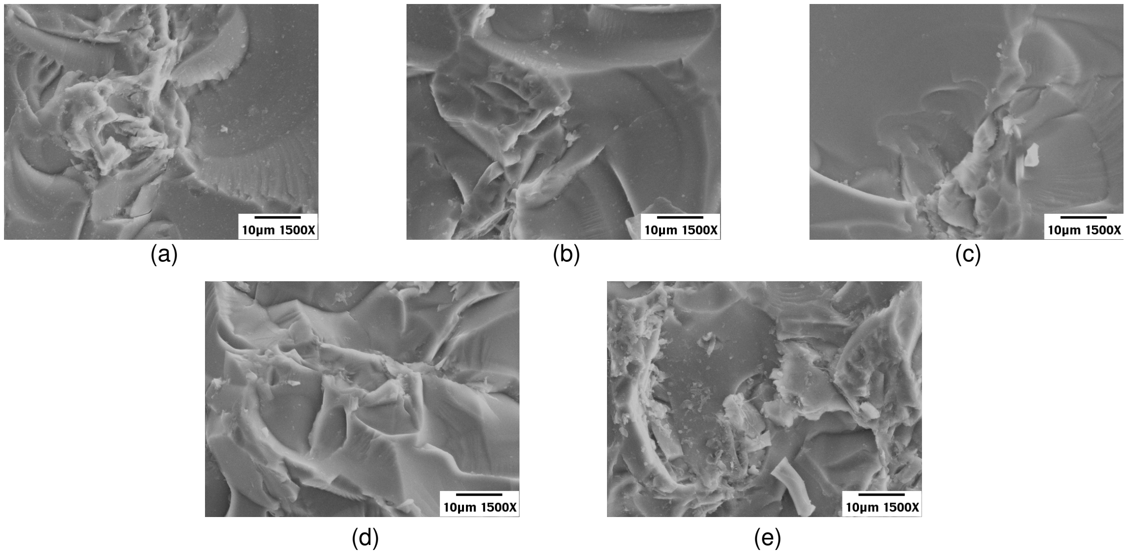


Figura 41. Imágenes de microscopía electrónica de barrido de las superficies multiescala. (a) Superficie vn1, (b) superficie vn2, (c) superficie vn3, (d) superficie vn4 y (e) superficie vn6. La resolución espacial es de 10 μm y la amplificación utilizada es de 1500×.

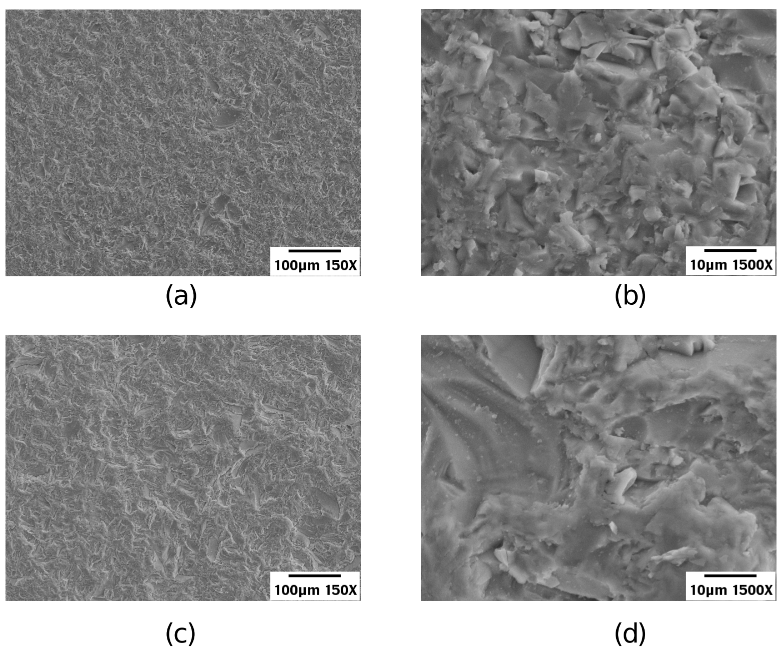


Figura 42. Imágenes de microscopia electrónica de barrido de las superficies en silicio. (a) Superficie sp, (b) superficie sp, (c) superficie ss y (d) superficie ss. En las figuras (a) y (c) la resolución espacial es de 100 μm y la amplificación utilizada es de 150×. En cambio, en las figuras (b) y (d) la resolución espacial es de 10 μm y la amplificación utilizada es de 1500×.

V.3 Medición de reflectancia externa difusa-difusa en dieléctricos

V.3.1 Superficie plana

En la sección IV.3 se mencionó que una forma de verificar que las mediciones obtenidas con el arreglo experimental eran confiables era a través de la medición de una superficie plana. Para realizar la medición se utilizaron los estándares presentados en la tabla 3. La superficie plana fue un vidrio negro con un índice de refracción de $1.5390 - i0.0157$. La reflectancia difusa-difusa para un plano con este índice de refracción tomando como ángulo mayor de incidencia 78.4 grados es 8.0256%. En la figura 43 se presentan las mediciones obtenidas.

Se observa que las mediciones de la reflectancia presentan variaciones, que se atribuyen principalmente a las fluctuaciones de intensidad que presenta el láser que se utilizó. Se decidió realizar un promedio de todas las de mediciones y se tomó como la reflectancia del plano el valor de dicho promedio.

En la tabla 11 se presentan los valores de la reflectancia difusa-difusa obtenidos con los 4 estándares, así como la incertidumbre en la medición. Se observa que las mediciones obtenidas con los 4 estándares son muy cercanas al valor teórico, y se concluye que con el arreglo utilizado es posible realizar mediciones de reflectancias difusas-difusas de manera confiable.

Para mediciones posteriores se decidió utilizar el estándar de Ocean Optics debido a que presentaban menores fluctuaciones (ver figura 43(a)).

V.3.2 Superficies multiescala

Una vez caracterizadas estadísticamente las superficies, se midió la reflectancia difusa-difusa de las diferentes superficies rugosas. En la tabla 12 y la figura 44 se presentan los resultados obtenidos para la superficies (multiescala) de un vidrio negro.

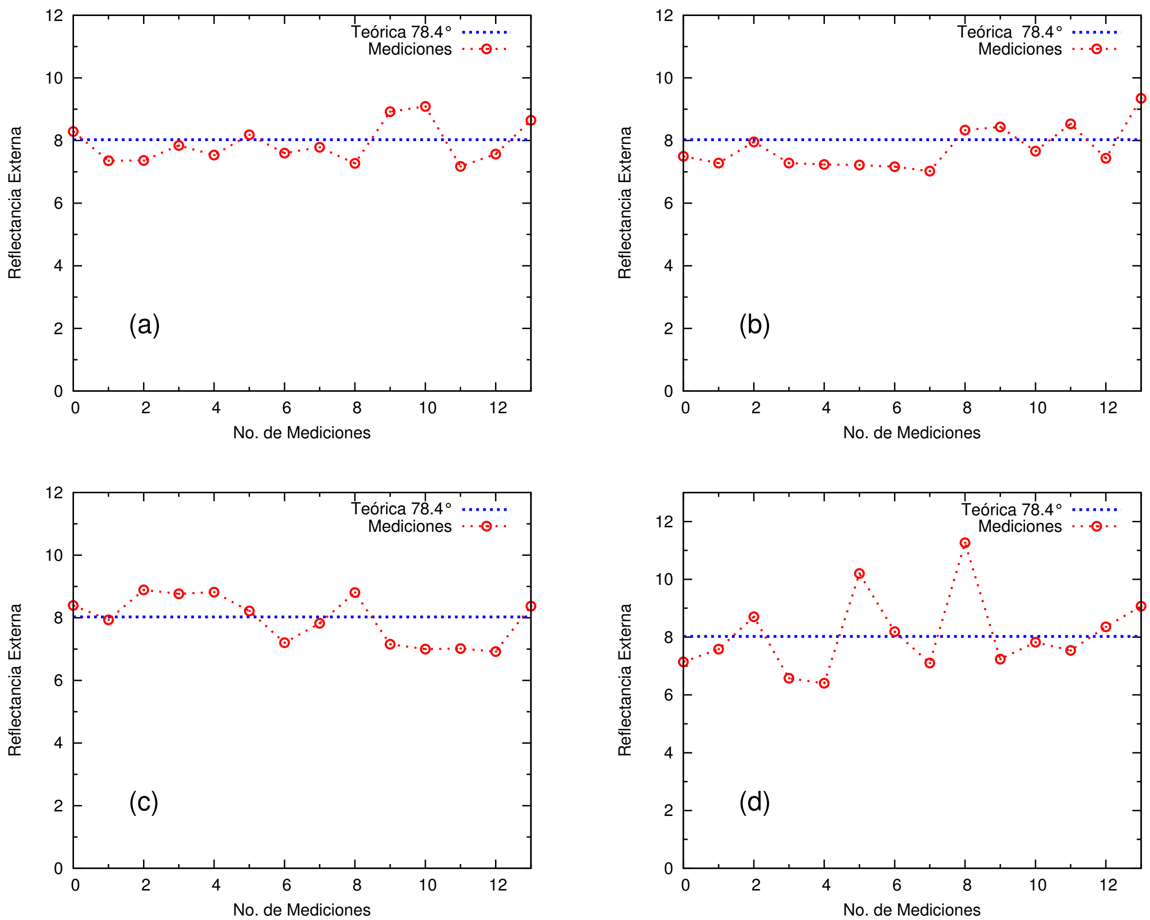


Figura 43. Medición de reflectancia difusa-difusa para un plano de vidrio negro ($n = 1.5390 - i0.0157$) utilizando 4 estándares diferentes, (a) Ocean Optics, (b) pared de la esfera, (c) espejo y (d) teflón.

Tabla 11. Resultadas de la medición de la reflectancia difusa-difusa para superficies planas ($n = 1.539 - i0.0157$). La reflectancia teórica, tomando ángulos de incidencia hasta 78.4 grados es $R_{dd} = 8.0256$.

Estándar	R_{dd} %
Ocean Optics	7.90 ± 0.17
Pared Esfera	7.75 ± 0.16
Espejo	8.02 ± 0.20
Teflón	8.0 ± 0.3

La contribución de la reflexión de la segunda cara es despreciable. La reflectancia difusa-difusa para un plano tomando como ángulo mayor de incidencia 78.4 grados es 8.0256%.

Tabla 12. Resultados de la medición de la reflectancia difusa-difusa para superficies rugosas ($n = 1.539 - i0.0157$).

superficie	δ_d	R_{dd}
Plano	0	7.90 ± 0.16
vn3	.2182	8.27 ± 0.60
vn2	0.3512	8.8 ± 0.4
vn4	0.3920	9.3 ± 0.5
vn1	0.4001	9.4 ± 0.4
vn6	0.4082	11.11 ± 0.40

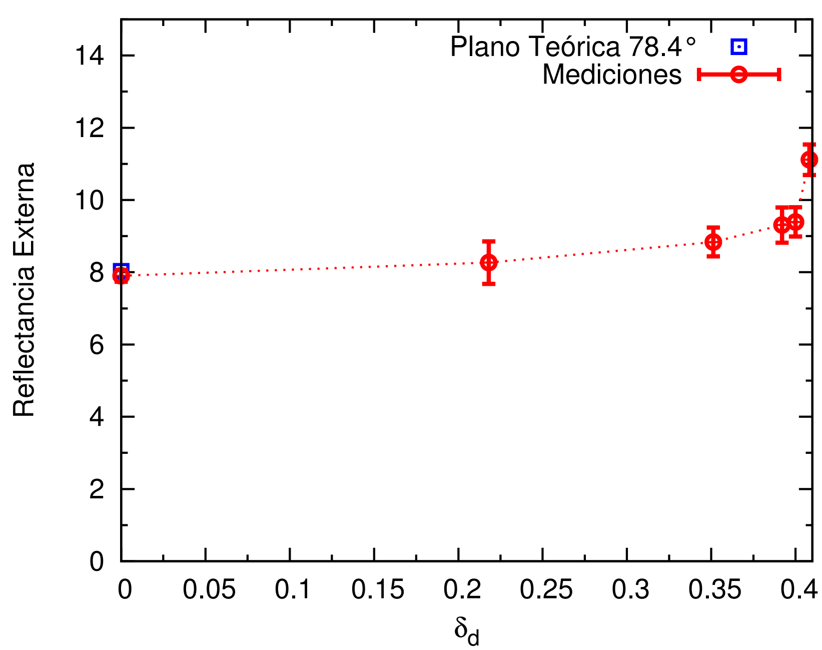


Figura 44. Reflectancia difusa-difusa ($n = 1.5390 - i0.0157$).

En la figura 44 se observa que al aumentar la desviación estándar de pendientes aumenta el valor de la reflectancia difusa-difusa, tal como lo predicen los cálculos numéricos realizados para superficies con función de correlación exponencial negativa (figura 28(c)). Es importante señalar que no es posible comparar directamente los cálculos numéricos con las mediciones de reflectancia, ya que la superficies fabricadas son bidimensionales.

V.3.3 Superficies gaussianas

Se utilizó como sustrato un vidrio transparente ($n = 1.5$) sobre el cual fue depositada la fotoresina. El problema con estas muestras es que hay tres interfases que producen reflexiones; la primera es aire-fotoresina, la segunda fotoresina-vidrio y la tercera vidrio-aire. Para reducir la reflexión vidrio-aire se pintó esta superficie de negro, como se ilustra en la figura 45.

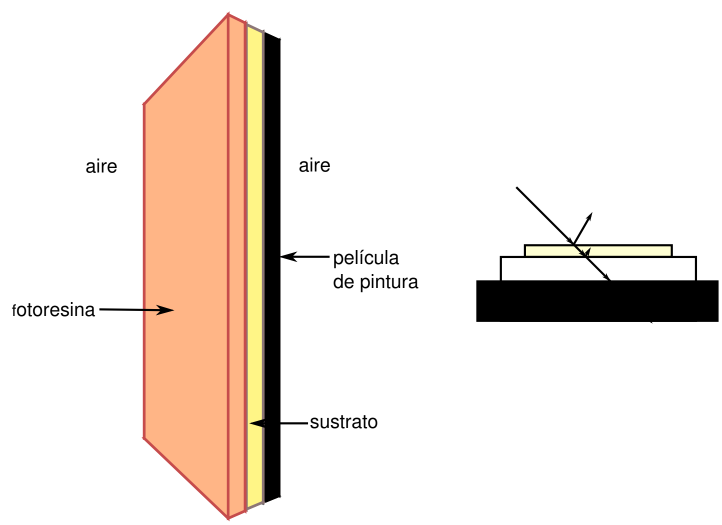


Figura 45. Depósito de una película de pintura negra para evitar la reflexión vidrio-aire.

Para verificar la efectividad de la pintura negra para reducir esta reflexión, se midió primero la reflectancia difusa-difusa de una placa plano paralela de vidrio transparente, dando un valor del 9.86%. Después se aplicó la película de pintura y se obtuvo una reflectancia del 6.79%. Es decir, que la reflectancia bajó un 30%. El valor teórico para la reflectancia externa aire-vidrio es de 7.33%, lo que muestra que la película de pintura resulta bastante efectiva.

En la tabla 13 y la figura 46 se presentan los resultados obtenidos para la reflectancia difusa-difusa en superficies gaussianas con variaciones en una sola dirección (problema 1D). Se observa que al aumentar la desviación estándar de pendientes la reflectancia parece disminuir, tal como lo predicen los cálculos numéricos (figura 19) para superficies con $a \gg \lambda$.

Tabla 13. Mediciones de la reflectancia difusa-difusa para superficies gaussianas con variaciones en una dirección ($n = 1.6119 - i0.1632$).

superficie	δ_d	R_{dd}
4413	0.0716	8.9 ± 0.4
4421	0.0828	8.7 ± 0.3
4408	0.0885	8.9 ± 0.4
4406	0.0969	8.7 ± 0.4
4401	0.0970	8.8 ± 0.3
4419	0.1036	8.5 ± 0.4
4410	0.1509	8.2 ± 0.4

En la tabla 14 y la figura 47 se presentan los resultados obtenidos para la reflectancia difusa-difusa con superficies gaussianas bidimensionales. Se observa la misma tendencia encontrada para las superficies gaussianas con variaciones en una sola dirección. Es decir, que el aumento de la desviación estándar de pendientes disminuye ligeramente la reflectancia.

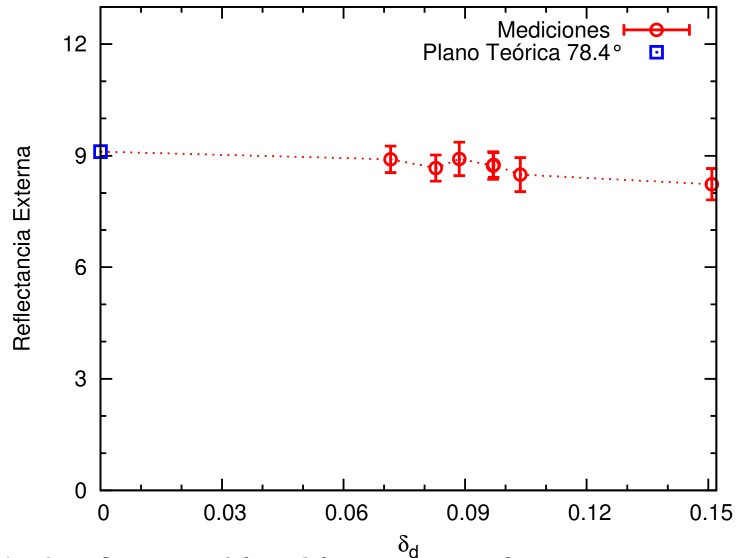


Figura 46. Medición de reflectancia difusa-difusa para superficies gaussianas con variaciones en una sola dirección ($n = 1.6119 - i0.1632$).

Tabla 14. Mediciones de la reflectancia difusa-difusa para superficies gaussianas bidimensionales ($n = 1.6119 - i0.1632$).

superficie	δ_d	R_{dd}
05239	0.01204	8.9 ± 0.6
05235	0.01546	9.0 ± 0.4
05243	0.02001	8.8 ± 0.5
05244	0.02768	8.4 ± 0.5
05242	0.03272	8.7 ± 0.3
05237	0.03273	8.8 ± 0.3

V.4 Medición de reflectancia externa en silicio

Se realizaron mediciones de reflectancia difusa-difusa y directa-difusa con superficies rugosas fabricadas de silicio. Como se mencionó anteriormente, existen técnicas para mejor la eficiencia de celdas fotovoltaicas basadas en la introducción de rugosidad. En la tabla 15 y la figura 48 se presentan las mediciones obtenidas.

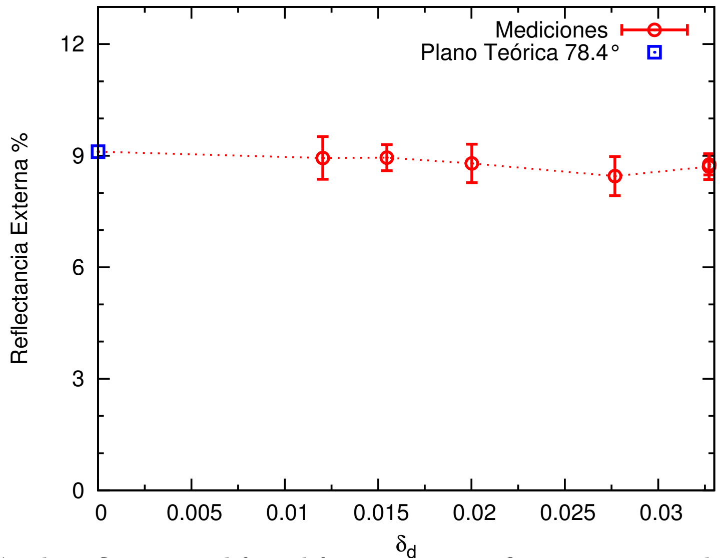


Figura 47. Medición de reflectancia difusa-difusa para superficies gaussianas bidimensionales ($n = 1.6119 - i0.1632$).

Tabla 15. Mediciones de la reflectancia difusa-difusa para superficies multiescala en silicio.

superficie	δ_d	R_{dd}	R_{cd}
plano	0	35.9 ± 0.3	—
sp	0.3324	21.7 ± 0.4	22.89 ± 0.22
ss	0.3635	20.8 ± 0.6	21.01 ± 0.04

Se observa que, en ambos casos, la reflectancia disminuye drásticamente con respecto a la de una superficie plana. También se observa que el valor de la reflectancia es casi el mismo tanto para iluminación directa como para iluminación difusa. Esto nos lleva a preguntarnos, ¿ Pór que la reflectancia difusa-difusa y la reflectancia directa-difusa a 8 grados no tienen una diferencia significativa cuando se tiene un contraste de índice de refracción grande? Podemos entender este comportamiento si consideramos el caso de una superficie plana, cuyos coeficientes de Fresnel se muestran en la figura 49.

En la figura 49 se ilustra el comportamiento de los coeficientes de reflexión para

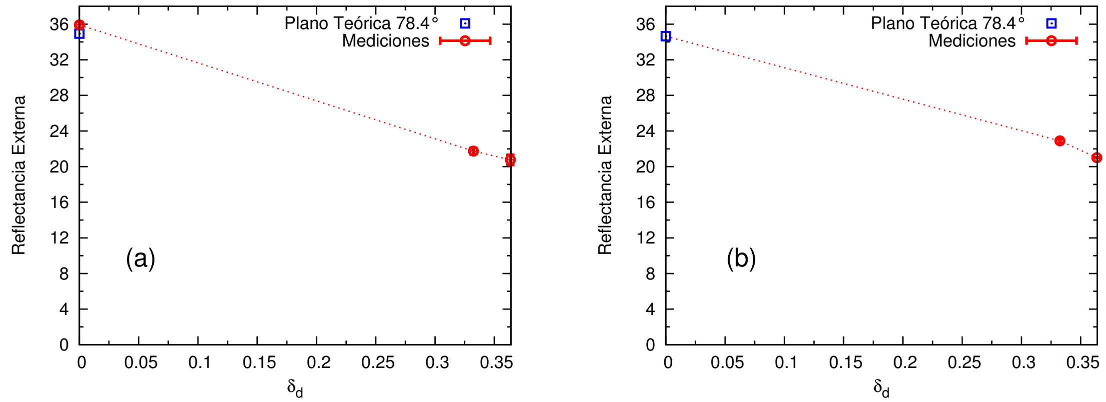


Figura 48. Medición de reflectancia para superficies multiescala utilizando como sustrato silicio. En el inciso (a) reflectancia difusa-difusa y (b) reflectancia directa-difusa.

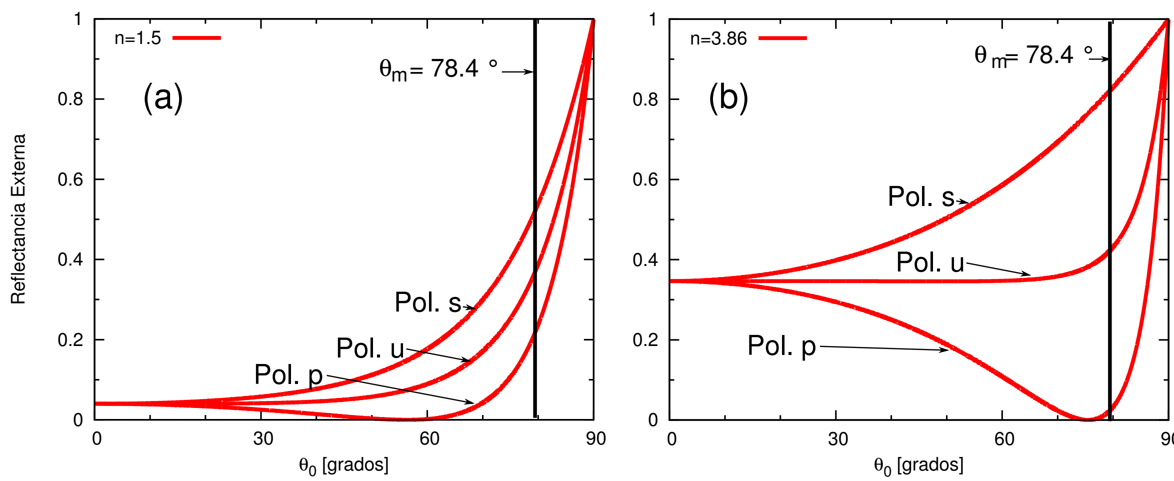


Figura 49. Coeficientes de Fresnel para (a) vidrio y (b) silicio.

superficies planas con índices de refracción de 1.5 (a) y 3.86 (b). En la esfera integradora utilizada el ángulo mayor de incidencia que se puede alcanzar es de 78.4 grados, además de que sólo se pueden realizar mediciones para luz no polarizada. Cuando se tiene un contraste grande en los índices de refracción se tiene que la reflectancia a incidencia normal es grande y la curva para polarización s aumenta monótonicamente en función de θ_0. En cambio, la curva para polarización p disminuirá hasta el ángulo de Brewster para después aumentar. Debido a que la luz no polarizada está dada por el promedio de la polarización s y la polarización p, se encuentra que esta curva es casi constante hasta

78.4 grados (figura 49(b)). La reflectancia difusa-difusa representa el promedio pesado sobre esta curva, y el valor obtenido para esta reflectancia será muy similar al obtenido para la reflectancia directa-difusa, y prácticamente independientemente del ángulo de incidencia θ_0 utilizado.

V.5 Efectos de rugosidad con medios no homogéneos

Hasta ahora, hemos considerado superficies entre medios homogéneos. Es importante considerar otro tipo de materiales, ya que nos interesa conocer el efecto de una frontera rugosa en la reflectancia de un medio no homogéneo.

Debido a esto, se realizaron mediciones de reflectancia con materiales no homogéneos. Estos materiales son acrílico y teflón, que tienen un aspecto lechoso debido a la presencia de lo que parecen ser pequeñas burbujas de aire. Se prepararon muestras con superfies planas y a otras se les introdujo rugosidad mediante métodos abrasivos. En la tabla 16 y la figura 50 se presentan las mediciones obtenidas con las muestras de teflón y en la tabla 17 y la figura 51 se presentan las mediciones obtenidas con las muestras de acrílico.

Tabla 16. Medición de reflectancia difusa-difusa para superficies de teflón.

superficie	δ_d	R_{dd}
plano	0	68.30 ± 0.11
tef2	0.1504	58.32 ± 0.11
tef1	0.1624	62.58 ± 0.14

En ambos materiales se observa que, al introducir rugosidad en el material la reflectancia disminuye considerablemente en comparación con la que se tiene con una

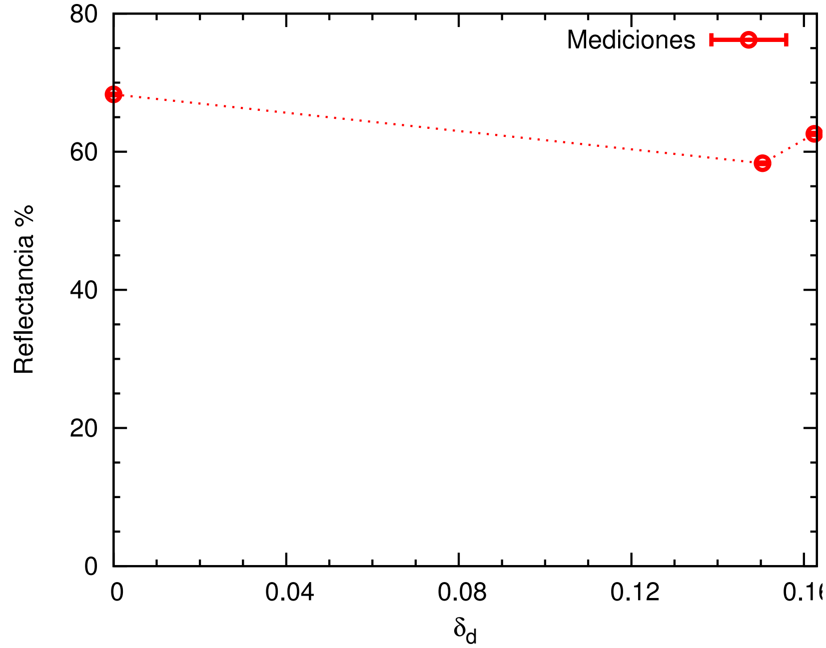


Figura 50. Medición de la reflectancia difusa-difusa para superficies de teflón.

superficie plana. Sin embargo, en ambos materiales se observa un fenómeno extraño, ya que cuando el parámetro δ_d es pequeño, la reflectancia disminuye para luego aumentar con δ_d mayores. Este fenómeno podría estar relacionado con los coeficientes de absorción y esparcimiento del material.

Tabla 17. Medición de reflectancia difusa-difusa para superficies de acrílico

superficie	δ_d	R_{dd}
plano	0	54.6405 ± 0.2879
acri 2	0.1448	49.2 ± 0.6
acri 1	0.1615	50.7 ± 0.5
acri 3	0.1662	50.2 ± 0.4

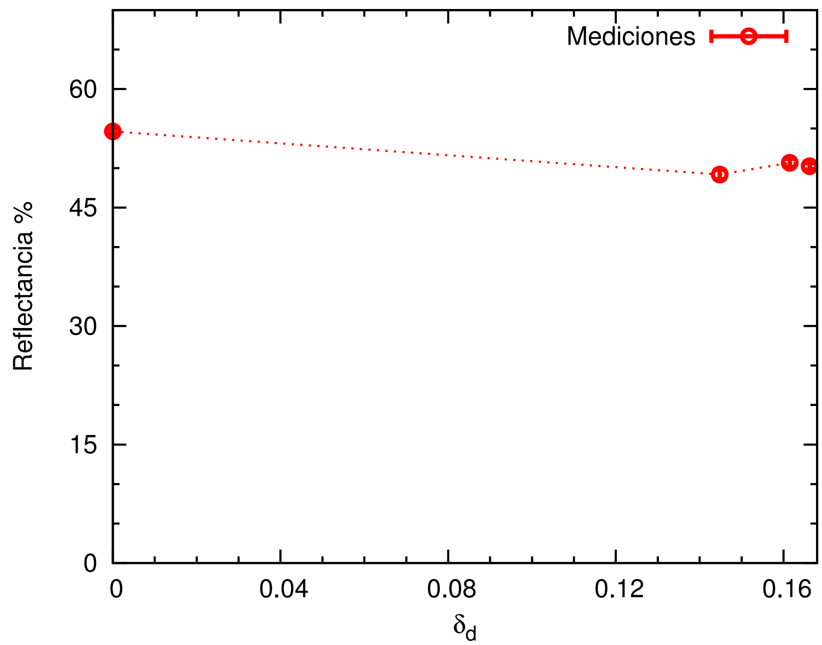


Figura 51. Medición de la reflectancia difusa-difusa para superficies de acrílico.

V.6 Reflectancia interna

En la sección IV.1.1 se propuso un método para la medición de la reflectancia interna en un material homogéneo y transparente. Como se explicó en la sección IV.1.1, con el método propuesto para estimar la reflectancia interna de una superficie es necesario preparar dos muestras cuyas superficies rugosas tengan características similares. Entre otras cosas, se espera que δ_d sea aproximadamente igual en las tres caras rugosas involucradas. En la primera muestra sólo se debe introducir la rugosidad en una sola cara. En cambio, en la segunda muestra la rugosidad debe ser introducida en ambas caras.

Para estimar la reflectancia interna debemos conocer la reflectancia externa, por lo en la primera muestra se depositó una película de pintura negra en la cara plana para reducir la reflexión vidrio-aire. Los valores de reflectancia externa se presentan en la tabla 18.

Tabla 18. Reflectancia externa R_{de} para superficies multiescala.

superficie	δ_d	R_{de}
vt1	0.2852	8.5 ± 0.15
vtss	0.3010	8.4 ± 0.18
vt100	0.4425	13.0 ± 0.5

Después se midió la reflectancia R_{DM} de la muestra con dos caras rugosas. Los valores estimados de R_{DM} se presentan en la tabla 19.

Tabla 19. Reflectancia R_{DM} para superficies multiescala.

superficie	δ_d	R_{DM}
esl	0.2852	21.1 ± 0.3
vss	0.3010	22.18 ± 0.21
es100	0.4425	25.29 ± 0.14

Una vez obtenidas las reflectancias externas R_{de} y las reflectancias R_{DM}, se calculó la reflectancia interna R_{di} para cada superficie haciendo uso de la ecuación (141). En la tabla 20 y la figura 52 se presentan los resultados obtenidos.

Tabla 20. Reflectancia interna R_{di} para superficies multiescala ($n = 1.5$).

superficie	δ_d	R_{di}	error
esl	0.2852	16.5	0.4
vss	0.3010	16.0	0.7
es100	0.4425	17.7	0.4

En la figura 52, se observa que los valores de reflectancia obtenidos presentan una

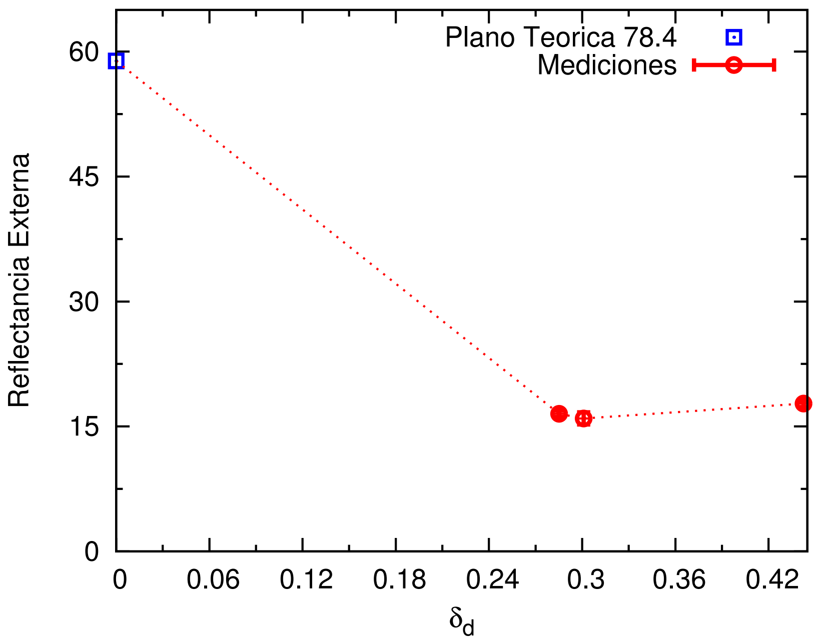


Figura 52. Medición de la reflectancia interna difusa-difusa en un dieléctrico ($n = 1.5$).

diferencia considerable con el valor teórico de la reflectancia difusa. Si bien, en los cálculos numéricos existen indicios de que la reflectancia interna disminuye conforme δ/a aumenta (figura 29), no parece posible que con superficies bidimensionales el decremento sea tan grande.

Realizando un análisis sobre las posibles fallas del método propuesto, se observó que la luz se escapaba por los lados y la región de la muestra no cubierta por la esfera; la muestra se comportaba como una guía de onda y permitía la salida de la luz por las orillas. Para evitar que la luz escapase del dieléctrico, se aplicaron películas de pintura blanca en el centro y ambas caras, dejando expuesta solamente la región necesaria para acoplar la muestra con la esfera (ver figura 53). El próposito principal de colocar las películas de pintura era el de reflejar la luz de las zonas no cubiertas por la abertura. Sin embargo, el método no funcionó, ya que la pintura también absorbe y en algunas regiones la luz continuaba escapándose. Una solución posible parece ser el depósito de películas reflejantes (aluminio), pero esto ya no se implementó debido a que sería necesario realizar seis depósitos por muestra.

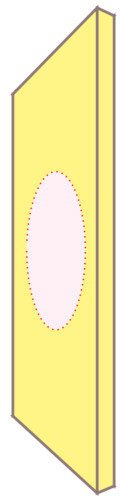


Figura 53. Ilustración del depósito pintura blanca sobre la muestra rugosa por ambas caras.

Capítulo VI

Conclusiones

La primera parte de esta tesis consistió en realizar un estudio teórico y numérico sobre la reflectancia de superficies rugosas utilizando tres métodos. Estos son: el método riguroso, la aproximación numérica de Kirchhoff y una solución analítica basada en la aproximación de Kirchhoff. Este estudio se realizó, por simplicidad, con superficies rugosas unidimensionales, considerando los casos de iluminación directa y difusa.

Uno de los objetivos de esta tesis era explorar la validez de las teorías basadas en la aproximación de Kirchhoff en el cálculo de la reflectancia difusa-difusa. Esto, debido al interés de realizar cálculos con superficies bidimensionales y a que, en este momento, el cálculo riguroso con este tipo de superficies está fuera del alcance de nuestra capacidad de cómputo. Por simplicidad se analizó primer el caso de un conductor perfecto y se encontró que la solución analítica está muy limitada en su rango de aplicación. En particular, se encontró que para rugosidades del orden de 0.4λ y mayores la teoría analítica falla por completo, por lo que se decidió que no valía la pena desarrollar e implementarla en dieléctricos. La solución numérica de la aproximación de Kirchhoff sólo entregaba resultados confiables cuando la longitud de correlación era mucho mayor que la longitud de onda $a \gg \lambda$. El único método que arrojó resultados confiables para todos los casos fue el método riguroso, aunque se encontraron algunas limitaciones para ángulos rasantes de incidencia y superficies multiescala, sobre todo en el caso de reflexión interna.

Se implementó la aproximación numérica de Kirchhoff y el método riguroso para el caso de un dieléctrico. No fue posible realizar el cálculo de la reflectancia directa-difusa para ángulos mayores a 80 grados y, de hecho, para estar seguros de la confiabilidad de los cálculos se tomó como ángulo máximo de incidencia 75 grados. Para ángulos mayores, la reflectancia directa-difusa se estimó mediante una interpolación entre el ángulo máximo y 90 grados, en donde la reflectancia debe ser uno.

En lo que se refiere la reflectancia externa difusa-difusa, se encontró que cuando la aproximación de Kirchhoff funciona, la reflectancia es función del cociente δ/a y disminuye al aumentar dicho cociente. Es decir, que la reflectancia difusa-difusa disminuye en función de la desviación estándar de pendientes en la superficie. La dependencia de la reflectancia externa difusa-difusa con respecto a la desviación estándar de pendientes se ve alterada cuando la superficie tiene detalles comparables con la longitud de onda. Esto se da cuando disminuye la longitud de correlación. Eventualmente, la inclusión de detalles muy finos, como los que se encuentran en superficies con función de correlación exponencial negativa, puede invertir la tendencia encontrada con superficies con espectro gaussiano, aumentando la reflectancia en función del parámetro de rugosidad δ. En estos casos la aproximación de Kirchhoff no funciona.

El caso de la reflectancia interna es aún mas complicado, ya que la aproximación de Kirchhoff no funciona en ninguno de los casos. Concluimos con esto que no vale la pena desarrollar una teoría basada en la aproximación numérica de Kirchhoff para superficies con variaciones en dos dimensiones. Los resultados obtenidos con el método riguroso muestran que la reflectancia interna difusa-difusa disminuye en función de la desviación estándar de pendientes en la superficie, independientemente de la función de correlación utilizada.

Utilizando el método riguroso, se realizaron cálculos de reflectancia para superficies rugosas de silicio con el método riguroso. Se encontró que la reflectancia es función del parámetro δ. Se observó que, si se tienen superficies con función de correlación gaussiana, la reflectancia difusa-difusa aumenta al aumentar δ. En cambio, si se tienen superficies con función de correlación exponencial negativa la reflectancia disminuye considerablemente en función del parámetro de rugosidad δ.

La segunda parte de esta tesis consistió de un estudio experimental en el que se utilizaron superficies caracterizadas. Se encontró que, con las superficies multiescala la reflectancia aumenta en función de la desviación estándar de pendientes, tal y como lo predicen los cálculos realizados para superficies con variación en una sola dirección. Para superficies gaussianas con variaciones en una y dos direcciones, se encontró que la reflectancia también disminuía en función de la desviación estándar de pendientes, tal y como lo predicen los cálculos numéricos.

Se realizaron mediciones de reflectancia difusa-difusa y directa-difusa para superficies rugosas de silicio. En ambos casos, se observó que la reflectancia disminuye drásticamente con respecto a la de una superficie plana conforme aumenta la desviación estándar de pendientes. También se observó que los valores obtenidos para la reflectancia directa-difusa y la difusa-difusa son muy parecidos. Esto se debe a que el contraste entre los índices de refracción es grande.

Se realizaron mediciones de reflectancia con medios no homogéneos. Se utilizaron muestras de acrílico y teflón que tiene apariencia lechosa debido a que contienen heterogeneidades con dimensiones micro y submicrometricas. La muestra de acrílico es amarillenta y la de teflón blanca. En ambos casos, se encontró que la reflectancia disminuye considerablemente en comparación con la de una superficie plana. También se observó que, cuando la desviación estándar de pendientes es pequeña, la reflectancia disminuye aún más.

Concluimos entonces que, dependiendo de la escala del detalle lateral de la superficie y del contraste entre los índicies de refracción, el efecto de la rugosidad puede aumentar o disminuir la reflectancia con respecto a la que se tiene con una superficie plana.

Referencias

Allen, W. A. (1973). Transmission of isotropic light across a dielectric surface in two and three dimensions three dimensions. *Journal of the Optical Society of America*, 63: 664–666.

Beckmann, P. y Spizzichino, A. (1963). *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*. International series of monographs on electromagnetic waves. Pergamon Press.

Born, M. y Wolf, E. (1980). *Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light*. Pergamon Press.

Church, E. L. (1988). Fractal surface finish. *Applied Optics*, 27(8): 1518–1526.

Gershun, A. (1945). Fresnel reflection of diffusely incident light. *Journal of the Optical Society of America*, 35(2): 162–162.

Goldstein, D. (2003). *Polarized Light, Revised and Expanded*. Optical Engineering. Taylor & Francis.

Goodman, J. (1985). *Statistical optics*. Wiley.

Green, M. A., Emery, K., Hishikawa, Y., y Warta, W. (2010). Solar cell efficiency tables (version 35). *Progress in Photovoltaics: Research and Applications*, 18(2): 144–150.

Kortüm, G. (1969). *Reflectance spectroscopy: principles, methods, applications*. Springer-Verlag, New York.

Kubelka, P. (1948). New contributions to the optics of intensely light-scattering materials. part i. *Journal of the Optical Society of America*, 38(5): 448–457.

Kubelka, P. y Munk, F. (1931). Ein beitrag zur optik der farbanstriche. *Z Technichse Physik*, 12: 593–620.

Labsphere, I. (2012). *Thechnical guide a Integrating Sphere Radiometry and Photometry*. Labsphere, North Sutton, N.H.

Maradudin, A., Michel, T., McGurn, A., y Méndez, E. (1990). Enhanced backscattering of light from a random grating. *Annals of Physics*, 203(2): 255–307.

Maradudin, A. A. y Michel, T. (1990). The transverse correlation length for randomly rough surfaces. *Journal of Statistical Physics*, 58: 485–501.

Molenaar, R., ten Bosch, J. J., y Zijp, J. R. (1999). Determination of Kubelka-Munk scattering and absorption coefficients by diffuse illumination. *Applied Optics*, 38(10): 2068–2077.

Ogilvy, J. (1991). *Theory of wave scattering from random rough surfaces*. A. Hilger.

Pickering, J. W., Prahl, S. A., van Wieringen, N., Beek, J. F., Sterenborg, H. J. C. M., y van Gemert, M. J. C. (1993). Double-integrating-sphere system for measuring the optical properties of tissue. *Applied Optics*, 32(4): 399–410.

Saunderson, J. L. (1942). Calculation of the color of pigmented plastics. *Journal of the Optical Society of America*, 32: 727–736.

Stern, F. (1964). Transmission of isotropic radiation across an interface between two dielectrics. *Applied Optics*, 3(1): 111–113.

Terán-Bobadilla, E. (2010). *Consecuencias del esparcimiento múltiple en la absorción de algunos sistemas biológicos*. Tesis de doctorado, (Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada).

Tompkins, H. (2006). *A User's Guide to Ellipsometry*. Dover Publications.

Walsh, J. W. (1924). The reflection factor of a polished glass surface for diffused light. *Department of Scientific and Industrial Research (Brit.), Illumination Research, Technical paper*, 2(10).

Wang, L., Jacques, S. L., y Zheng, L. (1995). MCML - Monte Carlo modeling of light transport in multi-layered tissues. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 47(2): 131–146.