Tesis defendida por

Daniel Rojano Guido

y aprobada por el siguiente comité

Dr. Alfred Barry U'Ren Cortés

Director del Comité

Dr. Raúl Rangel Rojo

Miembro del Comité

Dr. Kevin Arthur O'Donnell

Miembro del Comité

Dr. Julio César Gutiérrez Vega

Miembro del Comité

Dr. Pedro Negrete Regagnon

Coordinador del Programa de Posgrado en Óptica

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales

Director de Estudios de Posgrado

5 de Octubre de 2012

CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR DE ENSENADA

Programa de Posgrado en Ciencias

en Óptica

Generación de fotones por downconversion paramétrico, con haces de bombeo espacialmente estructurados

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de

Doctor en Ciencias

Presenta

Daniel Rojano Guido

Ensenada, Baja California, México

2012

Resumen de la tesis de Daniel Rojano, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Óptica con orientación en óptica física. Ensenada, Baja California, Octubre de 2012.

Generación de fotones por downconversion paramétrico, con haces de bombeo espacialmente estructurados

Resumen aprobado por:

Dr. Alfred Barry U'Ren Cortés

Director de Tesis

Se presenta un estudio teórico sobre el proceso paramétrico de conversión descendente cuando el perfil transversal del haz de bombeo presenta estructura espacial, en particular cuando los haces de bombeo son de la familia Helmholtz Gauss y paraxiales. Es de interés especial el mapeo de esta estructura a las correlaciones en las diferentes variables continuas que presentan las parejas de fotones y su propagación. Este mapeo de estructura espacial es importante en experimentos de formación de imágenes y patrones de interferencia no local. Se utilizan los resultados de la teoría desarrollada para haces Gaussianos con enfoque arbitrario en este tipo de experimentos, mostrando que un alto enfocamiento degrada la eficiencia de estos efectos por completo. Obtenemos resultados analíticos y numéricos para casos degenerado y no degenerado en frecuencia.

Palabras Clave: Proceso paramétrico de conversión descendente, Haces Helmholtz Gauss, Esquema de Klyshko, imágenes fantasma

Abstract of the thesis presented by Daniel Rojano Guido, in partial fulfillment of the requirements of the degree of Doctor in Sciences in Optics with orientation in physical optics. Ensenada, Baja California, October 2012.

Parametric down conversion with spatially shaped pump beams

Approved abstract by:

Dr. Alfred Barry U'Ren Cortés

Thesis Director

We present a theoretical study on the process of parametric down conversion when the transverse profile of the pump beam has spatial structure, particularly when the pump beam has the profile of a Helmholtz Gauss or paraxial beam. Of special interest is the mapping of this structure to different correlations and its propagation in the continuous variables these pairs of photons have. This mapping of spatial structure is important in imaging experiments and non local interference patterns. We use the results of the theory developed for arbitrarily focused pump Gaussian beams in these experiments, showing that a high focusing of the pump beam degrades the performance on these effects completely. We obtain analytical and numerical results for degenerate and non degenerate cases in frequency.

Keywords: Parametric down conversion, Helmholtz Gauss waves, Klyshko wave picture, Ghost imaging

Agradecimientos

Quiero agradecer al CONACyT por su apoyo económico, a mi asesor el Dr. Alfred U'Ren por su paciencia, al Dr. Covarrubias por su empeño, seguimiento y apoyo económico durante mi estancia en CICESE.

También les agradezco por todo su apoyo y comprensión al artista Howard Francis Lancaster, a toda mi familia y a mis amigos, ustedes saben quienes son.

Contenido

Página

Resumen en español **i**

Resumen en inglés **ii**

Agradecimientos **iii**

Contenido **iv**

Lista de Figuras **vi**

Lista de Tablas **x**

I. Introducción **1**

II. Proceso paramétrico de conversión descendente **6**
II.1 Fundamentos del proceso paramétrico de conversión descendente . . 7
II.1.1 Polarización atómica 7
II.1.2 Interacción de 3 fotones 8
II.2 Teoría cuántica y el estado de dos fotones 13
II.2.1 Estados enredados 20
II.3 La tasa de coincidencias y la probabilidad de detección 21
II.3.1 Operador intensidad para fotones 23
II.4 Funciones de correlación y coherencia 25

III. Haces estructurados espacialmente **28**
III.1 Haz de bombeo con estructura espacial y haces libres de difracción . 29
III.1.1 Haces Helmholtz Gauss (HzG) 30
III.1.2 Haces paraxiales 33
III.2 El desempeño de las propiedades espaciales del haz de bombeo . . . 38

IV. Correlaciones SPDC con haces de bombeo estructurado **41**
IV.1 Teoría básica de difracción 42
IV.1.1 Aproximación paraxial 42
IV.1.2 El espectro angular y su propagación 43
IV.2 Función de empatamiento de fases con haces estructurados espacialmente 45
IV.2.1 Obtención de la función de empatamiento de fases para haces con estructura espacial. 48
IV.2.2 Función de empatamiento de fases en el espacio de momentos. Marco de referencia en los planos de detección 52

Contenido (continuación)

Página

IV.3 Correlaciones y enredamiento cuántico 57
IV.3.1 Propiedades espacio temporales en parejas de fotones generadas por SPDC 57
IV.3.2 Correlaciones polar-azimutal con haces de bombeo estructurado 62
IV.4 Correlaciones en el espacio de momento transversal con haces de bombeo estructurado 65
IV.4.1 Haz de bombeo Gaussiano inclinado 66
IV.4.2 Haz de bombeo Coseno Gauss (CG) 68
IV.4.3 Haz de bombeo Bessel Gauss (BG) 69
IV.4.4 Haz de bombeo Hermite Gauss (HG) 71

V. El esquema de Klyshko 78
V.1 Función de correlación de segundo orden como la función de amplitud de probabilidad conjunta 79
V.2 El esquema de Klyshko y su interpretación física 84
V.3 Propagación de parejas de fotones en el esquema de Klyshko 87
V.4 El esquema de Klyshko con haces de bombeo estructurado 91

VI. Patrones de interferencia SPDC con haces de bombeo enfocados 97
VI.1 Formación de imagenes y patrones de difracción fantasma (GI,GD) . 97
VI.1.1 Imagenes fantasma 99
VI.1.2 Patrones de difracción fantasma 107
VI.2 Conclusiones 111

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 113

A. Notación 121

B. Formación de imagenes fantasma con ondas planas 122

Lista de Figuras

Figura Página

1 Proceso paramétrico de conversión descendente (SPDC). a)Geometría de la interacción entre los 3 campos. Un fotón de excitación con frecuencia ω_1 en el UV decae espóntaneamente en parejas de fotones con frecuencias ω_2 y ω_3 en el infrarrojo. b)Diagrama de niveles de energía virtuales. . . 9

2 Interacción de 3 fotones. a)Generación de suma de frecuencias. b)El proceso a) en sentido contrario de conversión descendente. 11

3 SPDC tipo I. Parejas de fotones surgen del cristal a lo largo de los conos concéntricos con la misma polarización pero diferente a la del haz de bombeo. 12

4 SPDC tipo II. Fotones en modo extraordinario $|V\rangle$ de cierta longitud de onda emergen en el cono superior, y en el modo ordinario $|H\rangle$ en el cono inferior. La intersección de los conos presentan enredamiento en polarización bajo cierta compensación en el cristal birrefringente. . . . 12

5 Fotodetección. Número de fotones registrados en un volumen $S(c\Delta t)$. . 25

6 Formación de haces Helmholtz Gauss. 32

7 Geometría para haces Gaussianos fundamentales. Se originan en algún punto del plano transversal $z = 0$ y forman un vector de onda transversal, tal que $k_t^2 = k^2 - k_z^2$. 33

8 Algunos de los haces HzG, propagación (tres primeras columnas) y espectro angular (cuarta columna). a)Haz CG, b)Haz BG y c)Haz MG par de segundo orden. Tomado de referencia [Gutiérrez y Bandres (2005)]. . 34

9 Haces paraxiales. Tomado de [Bandres y Gutiérrez (2004), pag. 876], con una elipticidad $\epsilon = 0$ obtenemos modos Hermite Gauss (HG), y con $\epsilon = \infty$ los modos Laguerre Gauss (LG) a partir de los Ince Gauss (IG). 35

10 Transferencia de espectro angular. Del haz de bombeo a la estructura de la tasa en coincidencias. 38

11 Cristal no lineal de longitud L y su eje óptico. La luz se propaga a lo largo del eje z. 46

12 Geometría del cuasi-empatamiento de fases a)colineal y b)no colineal. . 47

Lista de Figuras (continuación)

Figura Página

13 Periodically poled crystal. La combinación de materiales es periódica, con periodo Λ. 48

14 Marco de referencia de laboratorio para SPDC no colineal, con detectores señal D_1 y acompañante D_2. 53

15 Ángulo de walk off ρ. El haz de bombeo al desplazarse por un material birrefringente hace que su vector de onda $\hat{\boldsymbol{k}}$ y su vector de poynting $\hat{\boldsymbol{s}}$ no sean paralelos, formando un ángulo ρ entre ellos. 56

16 Geometría de ángulo azimutal φ_0 de walk-off espacial. Vectores de onda transversales para modo señal $\boldsymbol{k}_s^{\perp}$ y modo acompañante $\boldsymbol{k}_i^{\perp}$. 56

17 Geometría para SPDC no colineal. 61

18 Diagrama de correlaciones espaciales. Existen correlaciones entre variables en desintonía de ángulo polar θ_j y espectrales Ω_j para $j = s, i$. Cuando el haz de bombeo siente walk off las correlaciones espectrales-polares se acoplan con las de ángulo azimutal φ_j. 63

19 Correlaciones espaciales en ángulo polar variando la longitud del cristal L. (1)$L = 1mm$, (2)$L = 15mm$. 64

20 Correlaciones espaciales en ángulo polar modificando el perfil transversal del haz de bombeo. 65

21 Diagrama de correlaciones en momento transversal $\boldsymbol{q}$. 66

22 Haz BG de bombeo de diferentes ordenes m y sus correlaciones en componentes de momento transversal. En la parte superior se muestra la estructura espacial del haz BG y en la parte inferior la correlación en componentes $q_{sx} - q_{ix}$. 71

23 Haz de bombeo HG. Las correlaciones en componentes x y y's de momento transversal. 72

24 Gráficas de correlaciones externas en componentes de momento transversal para un haz gaussiano de bombeo. (G1) Sin walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (G2) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (G3) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 200\mu m$. 74

Lista de Figuras (continuación)

Figura Página

25 Gráficas de correlaciones externas en componentes de momento transversal para un haz CG de bombeo. (CG1) Sin walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (CG2) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (CG3) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 200\mu m$. 75

26 Gráficas de correlaciones externas en componentes de momento transversal para un haz BG $m = 2$ de bombeo. (BG1) Sin walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (BG2) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (BG3) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 200\mu m$. 76

27 Gráficas de correlaciones externas en componentes de momento transversal para un haz HG $n_x = 2$, $n_y = 2$ de bombeo. (HG1) Sin walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (HG2) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (HG3) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 200\mu m$. 77

28 Sistema óptico arbitrario SPDC. Se propagan los fotones en sistemas de transferencia H_s señal y acompañante H_i. 82

29 Sistema óptico compuesto. Se propaga a través de n diferentes planos caracterizados por una función compleja $A_j(\rho_j)$. 88

30 Diagrama de Minkowski para SPDC. a)Se muestran los cuadrivectores en forma de ondas avanzadas y retardadas a partir de un evento SPDC. b)La conexión no local entre detectores es espacialoide, se muestra con la flecha azul segmentada. 89

31 Diagrama de transacción para SPDC mediante el uso de ondas avanzadas y retardadas. La zona T en el cristal es la zona de transacción entre estas ondas. 91

32 Diagrama general de Klyshko para SPDC con haz de bombeo con estructura espacial. El bifotón $F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ se propaga del plano $\boldsymbol{\rho}_1$ al plano $\boldsymbol{\rho}_2$. Al pasar por el plano del cristal no lineal (CNL) $\boldsymbol{\rho}_m$ se modifica por las propiedades espaciales del haz de bombeo. 92

33 Diagrama de Klyshko para haz de bombeo con onda plana. a)Visto por arriba, b)versión desdoblada. 92

Lista de Figuras (continuación)

Figura Página

34 Versión del diagrama de Klyshko para un haz de bombeo enfocado. Los frentes de onda son modificados por una lente convergente con distancia focal f que modifica el haz de bombeo. 94

35 Experimento SPDC con haces estructurados. La mascarilla altera el haz de bombeo y obtenemos un haz con estructura espacial en el centro del cristal no lineal. Se escanea los perfiles transversales a través de la distancia z_2 del haz acompañante y se detecta en coincidencias. 95

36 Imposibilidad no local. Un objeto imposible conocido como la tribarra de Penrose. Creada por primera vez por el artista sueco Oscar Reutersvaerd en 1934. El recuadro con líneas punteadas crea la posibilidad local. . . 95

37 Arreglo experimental para producir imagenes fantasma. En a) la lente colectora se encuentra a una distancia d arbitraria, en b) tenemos el arreglo para el detector cubeta D_1 donde la lente colectora se ha colocado cerca del plano objeto y a la distancia focal f_c del detector D_1. 100

38 Esquema de Klyshko para GI. En el caso ideal cuando el haz de bombeo puede aproximarse por una onda plana. Un punto en el plano objeto se proyecta en un punto en el plano imagenPittman *et al.* (1995). 104

39 Simulaciones numéricas de la ecuación (165), caso degenerado. La cintura del haz de bombeo w_0 es de: a)3.0 mm, b)1.0 mm, c)0.5 mm y d)0.3 mm. 105

40 Simulaciones numéricas de la ecuación (165) para una cintura de haz de bombeo de $w_0 = 1.5mm$. En a)El parámetro D es completo y en b)solo se toma la parte $Re\{D\} = 0$. 106

41 Arreglo experimental para formar patrones de difracción/interferencia fantasma. 107

42 Simulaciones numéricas de la ecuación (171) caso degenerado. Cintura de haz de bombeo w_0= a)3.0 mm, b)2.5 mm, c)1.0 mm y d)0.5 mm. . . 110

43 Esparcimiento de vectores de onda en el esquema de Klyshko. El haz de bombeo enfocado evita el empatamiento de fases perfecto entre los tres modos. La relación uno a uno entre modos $\boldsymbol{k}_i$ y $\boldsymbol{k}_s$ se pierde. 111

44 Formación de imagenes fantasma. Caso ideal con un haz de bombeo plano. 123

Lista de Tablas

Tabla Página

I Familia de haces 37

Capítulo I

Introducción

El proceso paramétrico de conversión descendente espontáneo (SPDC, Spontaneous Parametric Down Conversion, en inglés) fue demostrado por primera vez a principios de los años 70's por D.C. Burnham y D. L. Weinberg (Burnham y Weinberg, 1970), donde descubrieron que el proceso es creado de la interacción de un haz laser intenso (haz de bombeo) en un cristal no lineal de segundo orden. Fotones individuales del haz de bombeo incidente sobre este cristal decaen de manera espontánea en parejas de fotones, muchos de estos fotones del haz de bombeo continúan a través del cristal y ocasionalmente sólo una pequeña parte decae de acuerdo a las leyes de conservación de energía y momento en dos fotones llamados señal y acompañante (Hong y Mandel, 1985; Rubin *et al.*, 1994).

Desde los años ochenta ha sido una fuente eficaz para la generación de fotones que presentan enredamiento cuántico en diferentes grados de libertad, como frecuencia, dirección de propagación e instante de emisión; variando parámetros experimentales que describen a la fuente. Se aplicó por primera vez en experimentos de coherencia y complementariedad (particula-onda) de la luz por el grupo de L. Mandel, R. Ghosh (Hong *et al.*, 1987; Ghosh y Mandel, 1987; Ou y Mandel, 1988) y el grupo de Yanhua Shih (Shih y Alley, 1988).

El estado de dos fotones producido por SPDC presenta enredamiento cuántico. Al

llevar a cabo una medición del sistema señal, se puede dar una proyección no local en el estado cuántico acompañante, lo cual no es posible en sistemas clásicos. Esto quiere decir que midiendo alguna propiedad del sistema señal, digamos su polarización (Kwiat *et al.*, 1995) sabremos de manera instantánea la polarización del sistema acompañante, no importando la separación espacial entre estos dos sistemas. La forma eficiente y relativamente sencilla de generar estos estados de dos fotones enredados, ha llevado a comprobar problemas fundamentales de la mecánica cuántica tal como la paradoja de Einstein-Podolsky-Rosen (Einstein *et al.*, 1935) conocida como EPR y la violación de desigualdades de Bell (Bell, 1966; Bohm y Bub, 1966).

Una aplicación del SPDC es la generación de fotones individuales por preparación condicional. Las correlaciones de números de fotones entre los modos señal y acompañante significan que, en la ausencia de pérdidas ópticas y otras imperfecciones experimentales, la detección del fotón acompañate anuncia la presencia de un fotón individual señal. La creación de campos ópticos en buena aproximación con un solo fotón y estos al igual que las parejas de fotones generadas son aprovechadas para experimentos de procesamiento cuántico de información[1], la cual utiliza los estados cuánticos para la transmisión segura de información clásica como la criptografía cuántica (Ekert, 1991; Bennett y Brassard, 1984; Gisin *et al.*, 2002), el uso del enredamiento para permitir la transmisión confiable de estados cuánticos en la teleportación cuántica (Bouwmeester *et al.*, 1997; Marcikik *et al.*, 2002; Barrett *et al.*, 2004), y el uso de la evolución cuántica

[1] la información cuántica es la información física que se tiene en un estado de cierto sistema cuántico. Por ejemplo, la unidad fundamental de información cuántica es el qubit para un sistema atómico de dos niveles. A diferencia de estados digitales clásicos, un sistema cuántico de dos niveles puede estar en una superposición de los dos estados en cualquier tiempo dado.

controlada para computación eficiente en computación cuántica (U'Ren *et al.*, 2003; Steane, 1998; Gottesman y Chuang, 1999).

Con frecuencia, se utiliza una descripción teórica del proceso SPDC en términos de un solo modo óptico para cada uno de los fotones generados (Raymer *et al.*, 2005). Cuando la interacción no lineal involucra un número grande de modos transversales del campo electromagnético, las correlaciones cuánticas pueden surgir en el perfil transversal de los haces generados en el dominio espacial. Los estados no clásicos del campo electromagnético que surgen de este enredamiento espacial es de gran interés en aplicaciones ya que se permite en principio la transmisión de información espacial. La investigación de estos aspectos espaciales de la luz no clásica ha generado un área en la óptica cuántica llamada en inglés *quantum imaging* (generación de imagenes cuánticas) (Shih, 2007a; Yangjian *et al.*, 2009; Basano y Ottonello, 2007; Erkmen y Shapiro, 2008), la cual estudia y explora los límites impuestos por la mecánica cuántica en la resolución de las imagenes generadas, y la codificación de información por correlaciones espaciales. La resolución es incrementada debido a que la longitud de onda efectiva de los fotones enredados es la mitad de la longitud de onda del fotón padre. Además de ser el láser una fuente eficiente para estos procesos, en la actualidad se ha reportado este fenómeno utilizando luz térmica (Valencia *et al.*, 2005; Ferri *et al.*, 2005; Xi-Hao *et al.*, 2009).

Existen diferentes técnicas para acondicionar las correlaciones en las parejas de fotones generadas por SPDC, algunos de ellos se basan en la selección apropiada del cristal no lineal, su tamaño y sus propiedades dispersivas (Grice *et al.*, 2001; Kuzucu *et al.*, 2005). Otros grupos se han basado en haces de bombeo pulsados con dispersión angular (Torres *et al.*, 2005a) o el diseño de super redes cristalinas (U'Ren *et al.*, 2006). SPDC

en configuración no colineal ha sido también propuesto como una forma de modificar la forma del frente de onda en los modos señal y acompañante (Torres *et al.*, 2005b; U'Ren *et al.*, 2003; Carrasco *et al.*, 2006; Lanco *et al.*, 2006). En SPDC no colineal, las condiciones de empatamiento de fases dentro del cristal no lineal adecuan el mapeo de las características espaciales y espectrales del haz de bombeo al ancho espectral conjunto de parejas de fotones (Terriza *et al.*, 2005; Law *et al.*, 2000; Osorio *et al.*, 2007). Este acondicionamiento espacial-espectral se ha verificado experimentalmente (Valencia *et al.*, 2007) y permite sintonizar independientemente correlaciones en frecuencia por medio del frente de onda del haz de bombeo.

Las correlaciones espaciales también pueden alterarse mediante la manipulación del frente de onda del haz de bombeo, además de que se ha demostrado la dependencia del espectro angular del haz de bombeo en el estado de dos fotones utilizando cristales delgados (Monken *et al.*, 1998), esto da mucha versatilidad ya que las parejas de fotones pueden ser preparadas en diversos estados cuánticos (Barreiro *et al.*, 2005).

En este trabajo de tesis estudiamos el proceso SPDC cuando los haces de bombeo poseen estructura espacial, los cuales se pueden generar en el laboratorio y así aprovechar la versatilidad que presentan estos para preparar estados cuánticos con características especiales. En trabajos previos los haces de bombeo para producir SPDC han sido estudiados teóricamente en su mayoría cuando el haz de bombeo presenta cierto ancho de banda espectral y tiene dimensiones finitas transversales (Joobeur *et al.*, 1996, 1994), sin embargo carecen de estructura espacial. En este trabajo se incluye este aspecto en la teoría de SPDC y se demuestra su relevancia en experimentos donde la información espacial juega un papel importante en la probabilidad de detección conjunta.

En el capítulo posterior daremos las bases de la teoría del SPDC, fotodetección, la tasa de coincidencias en parejas de fotones, el grado de coherencia y enredamiento espacial entre estas. Se estudiarán de manera breve los haces de bombeo que utilizaremos para el resto de la tesis en el capítulo 3, estos incluyen los modos láser paraxiales y los haces cuasi libres de difracción Helmholtz Gauss (HzG). Con esto en cuenta, en el capítulo 4 obtendremos la función de empatamiento de fases para este tipo de haces, las correlaciones en diferentes componentes espaciales y de momento transversal, estados de dos fotones factorizables con la manipulación de la longitud del cristal no lineal, el ancho de cintura w_0 del haz de bombeo etc.; así como estructura en las correlaciones cuando el haz de bombeo difiere de un haz Gaussiano. En el captulo 5 estudiaremos un esquema que es útil para tipos de experimentos EPR y de interferometría cuántica, como el de formación de imagenes con parejas de fotones enredados (Pittman *et al.*, 1995) que ha sido de gran ayuda para visualizar experimentos SPDC debido a las correlaciones no locales que presentan los fotones, y explicaremos como se modifica este esquema cuando el haz de bombeo difiere de uno plano. Obtendrémos una expresión general para la función de amplitud de probabilidad conjunta con este tipo de haces de bombeo y su propagación a través de sistemas ópticos arbitrarios. En el capítulo 6 aplicaremos la teoría en experimentos de imagenes/difracción fantasma y concluiremos posteriormente. Utilizamos el límite de cristal delgado y la aproximación paraxial en el marco de Fresnel.

Capítulo II

Proceso paramétrico de conversión descendente

En este capítulo damos las bases de la teoría del proceso paramétrico de conversión descendente SPDC. Este es un proceso originado por medio de la interacción de haces láser con medios no lineales donde un fotón de excitación decae espontáneamente en parejas de fotones con menor frecuencia, de modo que se conserve la energía, el momento y la correlación temporal. Los fotones comúnmente denominados señal y acompañante en general no son independientes sino que presentan enredamiento cuántico. Esto quiere decir que si por ejemplo medimos la frecuencia del fotón señal, se puede saber la frecuencia del acompañante sin necesidad de medirla.

Está fuente de luz es preferida en óptica cuántica debido a la producción efectiva de estados de un solo fotón y enredamiento cuántico de dos o más fotones, además de que es una fuente altamente direccional.

En la interacción de SPDC, la radiación incidente es desintonizada de la resonancia atómica del medio para evitar absorción. Daremos una descripción fenomenológica de este proceso, la derivación de su estado cuántico de dos fotones y la probabilidad de detección en coincidencias.

II.1 Fundamentos del proceso paramétrico de conversión descendente

Un proceso básico de interacción entre un campo electromagnético y un medio no lineal es el de amplificación paramétrica y oscilación (Yariv, 1989), en el cual dos o tres modos del campo electromagnético son acoplados. La respuesta no lineal da origen al intercambio de energía entre diferentes campos a diferentes frecuencias. De la teoría clásica (Wangsness, 1989) sabemos que se puede inducir una polarización o momento dipolar en el medio material en respuesta a un campo eléctrico presente dando origen a una redistribución de carga dentro del dieléctrico.

II.1.1 Polarización atómica

La expresión general de la polarización es por medio de una expansión en series de potencias del campo eléctrico, que en forma tensorial puede escribirse como

$$P_i = \epsilon_0 \left[\chi^{(1)}_{ij} E_j + \chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k + \chi^{(3)}_{ijk\ell} E_j E_k E_\ell + \cdots \right], \tag{1}$$

donde $\chi^{(n)}$ son los tensores de susceptibilidad no lineal para materiales anisotrópicos y E es el campo eléctrico. Por ejemplo el termino $\chi^{(2)}_{ijk} E_j E_k$ describe la combinación de dos ondas y de la interacción con el medio nos da una tercer onda, y se dice que es el mezclado de tres ondas. De la misma manera $\chi^{(3)}_{ijk\ell} E_j E_k E_\ell$ es el mezclado de cuatro ondas.

La simetría o la falta de ella, con respecto a una inversión espacial es una distinción fundamental que caracteriza a diferentes materiales. Un medio se dice que tiene centro de simetría o que es centrosimétrico, si hay un punto espacial convenientemente

escogido como el origen de coordenadas, con la propiedad de que una transformación espacial $\boldsymbol{r} \to -\boldsymbol{r}$ deja al medio invariante. Por lo que para la ecuación (1) todas las susceptibilidades pares serían cero para medios centrosimétricos. La ausencia de un centro de simetría define a un cristal no centrosimétrico, en este caso es posible obtener un $\chi^{(2)}$ diferente de cero (Boyd, 1992).

Los términos de orden mayor en la polarización nos dan términos no lineales en las ecuaciones de Maxwell que representan el acoplamiento de modos individuales así como el acoplamiento entre diferentes modos.

Cuando la situación es tal que hay un pequeño número de fotones en uno o en diferentes modos del campo electromagnético, la cuantización de este campo es requerida. Por lo tanto los términos clásicos del mezclado de 3 y 4 ondas corresponden a interacciones de 3 y 4 fotones.

El proceso paramétrico de conversión descendente es un proceso óptico no lineal donde por ejemplo, un fotón con frecuencia en el ultravioleta decae en una pareja de fotones de menor energía (Gerry y Knight, 2005) con frecuencia en el infrarrojo. Ver figura 1.

II.1.2 Interacción de 3 fotones

La interacción de tres fotones corresponde al mezclado de tres ondas en la teoría clásica, que puede ocurrir solo en un cristal con una susceptibilidad $\chi^{(2)}$ diferente de cero, por ejemplo en cristales como el Niobato de Litio, ADP (ammonium dihydrogen phosphate,

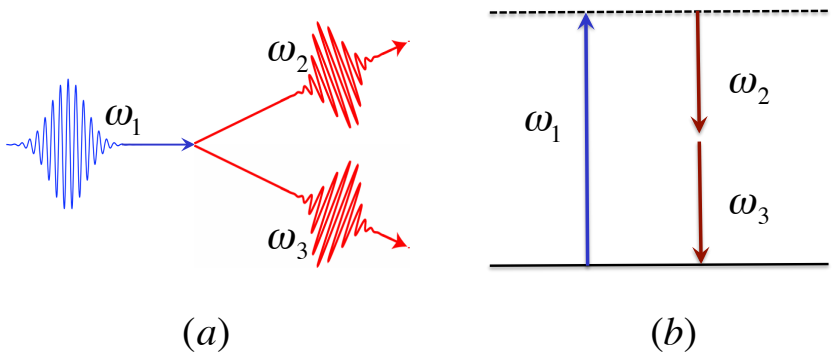

Figura 1. Proceso paramétrico de conversión descendente (SPDC). a)Geometría de la interacción entre los 3 campos. Un fotón de excitación con frecuencia ω_1 en el UV decae espóntaneamente en parejas de fotones con frecuencias ω_2 y ω_3 en el infrarrojo. b)Diagrama de niveles de energía virtuales.

$NH_4H_2PO_4$) entre otros. En un proceso microscópico en el cual los fotones poseen energía $\hbar\omega$ y momento $\hbar\boldsymbol{k}$, la conservación de energía y momento requieren que se cumplan las siguientes relaciones:

$$\hbar\omega_1 = \hbar\omega_2 + \hbar\omega_3, \tag{2}$$

$$\hbar\boldsymbol{k}_1 = \hbar\boldsymbol{k}_2 + \hbar\boldsymbol{k}_3, \tag{3}$$

respectivamente. Dividiendo entre $\hbar$ ec. (2) y (3) obtenemos las relaciones de empatamiento de fases de la óptica no lineal (Boyd, 1992).

Como un ejemplo clásico del mezclado de 3 ondas es la generación de suma de frecuencias. En este proceso los campos $\boldsymbol{E}_2$ y $\boldsymbol{E}_3$ con frecuencias ω_2 y ω_3 respectivamente, se mezclan en un medio no centrosimétrico para producir un campo $\boldsymbol{E}_1$ con frecuencia $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$. La aplicación tradicional para este proceso involucra campos eléctricos intensos que en teoría se pueden tratar clásicamente. El mezclado de 3 ondas en sentido contrario, donde un campo de alta frecuencia $\boldsymbol{E}_1$ genera dos campos $\boldsymbol{E}_2$ y $\boldsymbol{E}_3$, con menor frecuencia es posible y se le llama proceso de conversión descendente.

En la figura 2 mostramos la interacción de 3 fotones. En el caso clásico uno de los campos de baja conversión en intensidad, digamos $\boldsymbol{E}_1$, debe de estar presente inicialmente, el cual puede ser amplificado junto con la aparición de un segundo campo $\boldsymbol{E}_2$. La situación cuántica es algo diferente, ya que el estado inicial no necesita contener ninguno de los fotones de conversión descendente. Por esta razón se dice que el proceso b) de la figura 2 es espontáneo. Cuando el haz de bombeo con frecuencia ω_1 se divide en un haz señal con frecuencia ω_2 y un haz acompañante con frecuencia ω_3 donde $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$. La transición cuántica en la densidad de fotones (Yariv, 1989) puede describirse como,

$$|n_1, n_2, n_3\rangle \longrightarrow |n_1 - 1, n_2 + 1, n_3 + 1\rangle, \tag{4}$$

donde n_j con $j = 1, 2, 3$ es el número de fotones por unidad de volumen para cada uno de los modos ópticos involucrados. Este fenómeno es paramétrico debido a que el medio material no es afectado, cada átomo regresa a su estado inicial, por lo cual se utilizan niveles de energía virtuales en la figura 1 y es conocido como proceso paramétrico de conversión descendente espontáneo (SPDC).

El empatamiento de fases nos asegura una mejor eficiencia de conversión y debido a la anisotropía de los cristales utilizados en SPDC, las condiciones de empatamiento de fases pueden obtenerse solamente por una elección apropiada en polarización de los tres fotones. Los cristales uniaxiales usualmente utilizados en estos experimentos tienen un eje de simetría principal, exhiben birrefringencia. Esto significa que hay dos índices de refracción para cada frecuencia: el índice ordinario $n_o(\omega)$ y el índice extraordinario $n_e(\omega, \theta)$. El índice extraordinario depende de la frecuencia así como del ángulo θ entre el vector de propagación del campo incidente y el eje principal del cristal. El cristal

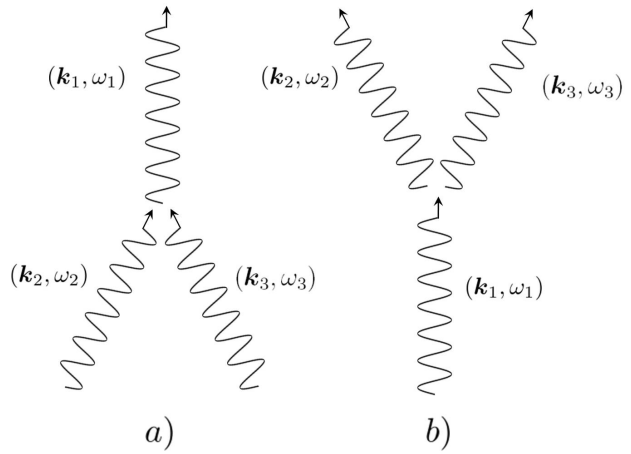

Figura 2. Interacción de 3 fotones. a)Generación de suma de frecuencias. b)El proceso a) en sentido contrario de conversión descendente.

puede ser uniaxial negativo ($n_e < n_o$) o positivo ($n_e > n_o$).

Empatamiento de fases tipo I SPDC. Las condiciones conocidas como empatamiento de fases imponen restricciones en la forma de emisión de las parejas de fotones, en este caso deben de emerger en lados opuestos de conos concéntricos alrededor del haz de bombeo, como se muestra en la figura 3. Evidentemente hay infinidad de formas de seleccionar las parejas de fotones, colocando pequeños orificios en diferentes partes de los conos. Para este caso los fotones de baja conversión se propagan como rayos ordinarios, mientras que el haz de bombeo como un haz extraordinario. La relación de dispersión para el haz de bombeo es,

$$k_1 = \frac{\omega_1 n_e(\omega_1, \theta_1)}{c}, \tag{5}$$

donde θ_1 es el ángulo entre el eje de propagación del haz de bombeo y el eje principal del cristal. Los haces de baja conversión tienen como relaciones de dispersión,

$$k_2 = \frac{\omega_2 n_o(\omega_2)}{c}; \qquad k_3 = \frac{\omega_3 n_o(\omega_3)}{c}. \tag{6}$$

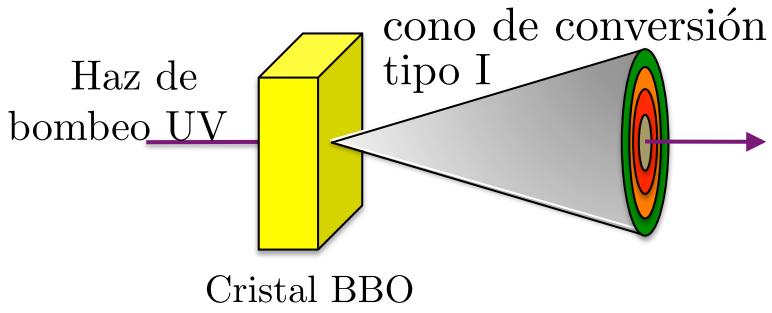

Figura 3. SPDC tipo I. Parejas de fotones surgen del cristal a lo largo de los conos concéntricos con la misma polarización pero diferente a la del haz de bombeo.

Empatamiento de fases tipo II SPDC. En este caso los fotones generados tienen diferentes polarizaciones y son ortogonales. Para cristales uniaxiales, la polarización de los haces de baja conversión son ortogonales, uno se comporta como un rayo ordinario y el otro como un rayo extraordinario. Por efectos de birrefringencia, los fotones se emiten a través de dos conos, uno para la onda ordinaria (o) y otro para la onda extraordinaria (e) como se muestra en la figura 4. El haz de bombeo puede ser un rayo ordinario o extraordinario, por ejemplo en el tipo II (ooe) tendríamos haz de bombeo $k_1 = \omega_1 n_o(\omega_1)/c$, haces de baja conversión con $k_2 = \omega_2 n_o(\omega_2)/c$ y $k_3 = \omega_3 n_e(\omega_3, \theta_3)/c$.

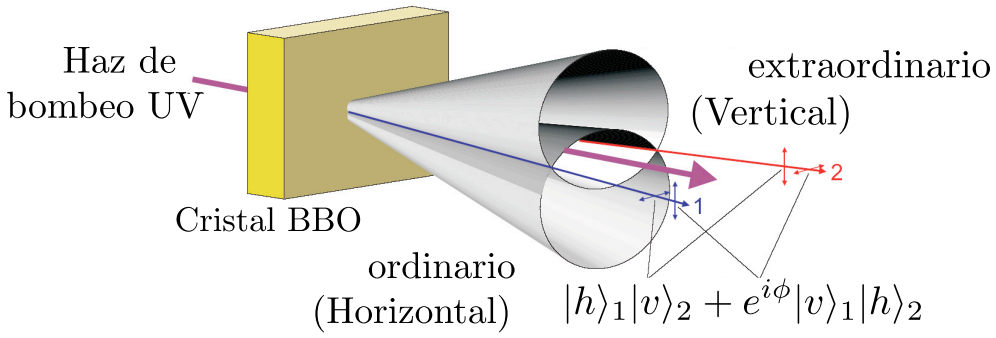

Figura 4. SPDC tipo II. Fotones en modo extraordinario $|V\rangle$ de cierta longitud de onda emergen en el cono superior, y en el modo ordinario $|H\rangle$ en el cono inferior. La intersección de los conos presentan enredamiento en polarización bajo cierta compensación en el cristal birrefringente.

II.2 Teoría cuántica y el estado de dos fotones

La teoría cuántica del proceso paramétrico de conversión descendente se deriva de la descripción clásica de la propagación del modo óptico y el medio material, utilizando la cuantización del campo electromagnético. Cuando se propaga el campo eléctrico dentro de un medio no lineal y no centrosimétrico, las componentes de polarización eléctrica aproximando a segundo orden son de la forma (Bloembergen, 1977; Shen, 1984),

$$\begin{aligned} P_i(\boldsymbol{r},t) = \epsilon_0 \int_0^\infty dt' \chi_{ij}^{(1)}(t') E_j(\boldsymbol{r}, t-t') \\ + \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t',t'') E_j(\boldsymbol{r}, t-t') E_k(\boldsymbol{r}, t-t''), \end{aligned} \tag{7}$$

donde $E_j(\boldsymbol{r},t)$ es la j-ésima componente del vector del campo eléctrico y $\chi^{(1)}$ y $\chi^{(2)}$ son los tensores de susceptibilidad de primero y segundo orden respectivamente. Esta ecuación a diferencia de (1) toma en cuenta los efectos de dispersión, esto quiere decir que los efectos de polarización en el medio no son instantáneos y se toma en cuenta está diferencia de tiempo. La sumatoria sobre todas las combinaciones de las componentes tensoriales y componentes del campo eléctrico está ímplicita. Para fuentes de luz con potencias de campo eléctrico débiles comparadas con el campo eléctrico característico de $E_{at} \approx 6 \times 10^{11} V/m$ (Boyd, 1992), solo el término lineal en (1) predomina. Sin embargo, incrementando la intensidad del campo eléctrico utilizando fuentes láser, se incrementa la importancia de los términos no lineales en la polarización. Nos enfocaremos solo en los términos no lineales de segundo orden en la interacción.

Para cuantizar el campo eléctrico, empezamos con el Hamiltoniano del campo electromagnético en el medio dieléctrico de volumen V

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2} \int_V d\boldsymbol{r} \left[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \right], \tag{8}$$

donde $\boldsymbol{D}$ es el vector de desplazamiento eléctrico, $\boldsymbol{B}$ es la inducción magnética y $\boldsymbol{H}$ es el campo magnético. Si utilizamos la definición del desplazamiento eléctrico,

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \epsilon_0 \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t), \tag{9}$$

en ecuación (8) y utilizamos (1), podemos reescribir el Hamiltoniano total del sistema como,

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}_0(t) + \mathcal{H}_I(t), \tag{10}$$

donde $\mathcal{H}_0(t)$ contiene la interacción del campo eléctrico y la componente lineal de la polarización eléctrica. La perturbación en el Hamiltoniano $\mathcal{H}_I(t)$ es la interacción no lineal dada por,

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_I(t) &= \frac{1}{2}\int_V d\boldsymbol{r}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{P}_{nl}(\boldsymbol{r},t)\\ &= \frac{1}{2}\int_V d\boldsymbol{r}\int_0^\infty dt'\int_0^\infty dt''\chi^{(2)}_{ijk}(t',t'')E_i(\boldsymbol{r},t)E_j(\boldsymbol{r},t-t')E_k(\boldsymbol{r},t-t''),\end{aligned} \tag{11}$$

donde $\boldsymbol{P}_{nl}(\boldsymbol{r},t)$ es la componente no lineal de la polarización eléctrica, y la sumatoria en índices repetidos está ímplicita. Para evitar dificultades en la cuantización del campo, se considera que no hay fronteras electromagnéticas entre el medio y el aire. Todos los efectos relacionados con refracción y birrefringencia son efectos clásicos que se pueden implementar después de que el campo es cuantizado.

De ahora en adelante nos enfocaremos únicamente en la parte no lineal del Hamiltoniano. Es también conveniente suponer que justo después del cristal tenemos dos filtros espectrales de los campos señal y acompañante, y que el haz de bombeo tiene un ancho de banda angosto en frecuencia. El estado cuántico de dos fotones incluirá las funciones que describan a los filtros del modo señal y acompañante. Como parte del proceso de

cuantización, expandimos el campo eléctrico clásico en terminos de ondas planas:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t), \tag{12}$$

con

$$\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}\sum_{\boldsymbol{k},\sigma} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\sigma}\epsilon_{\boldsymbol{k},\sigma}A_{\boldsymbol{k},\sigma}G(\omega)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} = \left[\boldsymbol{E}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\right]^*, \tag{13}$$

donde

$$\epsilon_{\boldsymbol{k},\sigma} = \sqrt{\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k},\sigma)}{2\epsilon_0 n^2(\boldsymbol{k},\sigma)}}, \tag{14}$$

ϵ_0 es la permitividad en el espacio libre, $G(\omega)$ es la función de transmisión del filtro espectral, $\mathcal{V}$ es el volumen de cuantización, $\boldsymbol{k}$ es el vector de onda, ω es la frecuencia, $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ es el vector de polarización en dos dimensiones y $A_{\boldsymbol{k},\sigma}$ es la amplitud del campo óptico. El índice σ índica la polarización del campo, éste se suma sobre componentes ortogonales del vector en dos dimensiones de polarización y $\boldsymbol{k}$ se suma sobre todos los posibles vectores de onda presentes.

Adoptamos el método usual de cuantización del campo eléctrico, haciendo a la amplitud del campo $A_{\boldsymbol{k},\sigma} \longrightarrow \hat{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$, donde $\hat{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{k},\sigma}$ es el operador de aniquilación del fotón. Por lo tanto ahora la amplitud del campo eléctrico se vuelve un operador del campo, dado por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{(+)}(\boldsymbol{r},t) \longrightarrow \hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{1}{\sqrt{\mathcal{V}}}\sum_{\boldsymbol{k},\sigma} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\sigma}\epsilon_{\boldsymbol{k},\sigma}\hat{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{k},\sigma}G(\omega)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \\ &= \left[\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\right]^\dagger. \end{aligned} \tag{15}$$

Sustituyendo la expresión (15) en la ecuación (11) del Hamiltoniano de interacción

clásico, obtenemos un operador Hamiltoniano cuántico,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{H}}_I =& \frac{1}{2\mathcal{V}^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s} \sum_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i} \sum_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p} g^*_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s} g^*_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i} g_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i} \hat{a}_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p} \\ & \times e^{i(\omega_s+\omega_i-\omega_p)t} \chi_{ijk} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s})^*_i (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i})^*_j (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p})_k \\ & \int_V e^{-i(\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_p)\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} + C.H., \end{aligned} \tag{16}$$

donde hemos distinguido a los tres campos como bombeo (p), señal (s) y acompañante (i),

$$g_{\boldsymbol{k}_m,\sigma_m} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k}_m,\sigma_m)}{2\epsilon_0 n^2(\boldsymbol{k}_m,\sigma_m)}} G\left[\omega(\boldsymbol{k}_m,\sigma_m)\right], \tag{17}$$

V es el volumen (del cristal) de interacción, y $H.C.$ representa el hermitiano conjugado. Aquí $n(\boldsymbol{k}_m,\sigma_m)$ es el índice de refracción del cristal. Hemos eliminado también terminos que no conservan la energía y definido a

$$\chi_{ijk} \equiv \chi^{(2)}_{ijk}(\omega_p = \omega_s + \omega_i) + \chi^{(2)}_{ijk}(\omega_i = \omega_s + \omega_p) + \chi^{(2)}_{ijk}(\omega_s = \omega_i + \omega_p), \tag{18}$$

con

$$\chi^{(2)}_{ijk}(\omega = \omega' + \omega'') = \int_0^\infty dt' \int_0^\infty dt'' \chi^{(2)}_{ijk}(t',t'') e^{-i(\omega' t' + \omega'' t'')}. \tag{19}$$

Del lado derecho de la ecuación (18) solo tomaremos como importante el primer término. Para encontrar el estado cuántico en cierto tiempo t, tomamos en cuenta que la interacción no lineal empieza en el tiempo $t_0 = 0$ cuando el sistema se encuentra en el estado inicial $|\psi(0)\rangle$. El estado en el tiempo t está dado por la evolución en el tiempo de un estado inicial en el tiempo $t_0 = 0$:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{\boldsymbol{U}}(t)|\psi(0)\rangle, \tag{20}$$

donde

$$\hat{\boldsymbol{U}}(t) = exp\left(\frac{1}{i\hbar}\int_0^t d\tau \hat{\boldsymbol{H}}_I(\tau)\right), \tag{21}$$

es el operador de evolución.

Si el campo óptico de bombeo es lo suficientemente débil, tal que el tiempo de interacción es pequeño comparado con el tiempo promedio entre las conversiones descendentes, entonces podemos expandir la ecuación (21) en series de potencias y quedarnos solo con los dos primeros términos de:

$$\hat{\boldsymbol{U}}(t) = 1 + \left(\frac{1}{i\hbar}\int_0^t d\tau \hat{\boldsymbol{H}}_I(\tau)\right) + \cdots . \tag{22}$$

La integral puede ser expresada en términos de la ec. (16) como,

$$\begin{aligned}\int_0^t d\tau \hat{\boldsymbol{H}}_I(\tau) =& \frac{1}{2\mathcal{V}^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s}\sum_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i}\sum_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p} g^*_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s} g^*_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i} g_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i} \hat{a}_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p} \\ & \times e^{i(\omega_s+\omega_i-\omega_p)t/2} \chi_{ijk} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s})^*_i (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i})^*_j (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p})_k \\ & \times t\mathrm{sinc}\left[(\omega_s+\omega_i-\omega_p)t/2\right] \int_V e^{-i(\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_p)\cdot\boldsymbol{r}} d\boldsymbol{r} + C.H.\end{aligned} \tag{23}$$

La integración en $\boldsymbol{r}$ nos da otra función sinc que relaciona a los vectores de onda, dando la condición de conservación de momento:

$$\begin{aligned}\int_0^t d\tau \hat{\boldsymbol{H}}_I(\tau) =& \frac{Vt}{2\mathcal{V}^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s}\sum_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i}\sum_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p} g^*_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s} g^*_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i} g_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i} \hat{a}_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p} \\ & \times \chi_{ijk} (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s})^*_i (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i})^*_j (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p})_k \mathrm{sinc}\left[(\omega_s+\omega_i-\omega_p)t/2\right] \\ & \times e^{i(\omega_s+\omega_i-\omega_p)t/2} \prod_m \mathrm{sinc}\left[(\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_p)_m l_m/2\right] \\ & \times e^{-i(\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_p)_z l_z/2} + H.C.,\end{aligned} \tag{24}$$

donde $V = l_x \times l_y \times l_z$ y l_m es la dimensión del medio no lineal en dirección m $(m = x, y, z)$.

El estado cuántico en el tiempo t se obtiene finalmente utilizando ec. (20), considerando al estado inicial como el vacío, y utilizando el hamiltoniano de interacción en la forma de la ec. (24):

$$
\begin{aligned}
|\psi(t)\rangle = |vac\rangle + \frac{Vt}{2i\hbar\mathcal{V}^{3/2}} \sum_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s} \sum_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i} \sum_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p} & g^*_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s} g^*_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i} g_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p} v_p(\boldsymbol{k}_p,\sigma_p) \\
& \times \chi_{ijk}(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_s,\sigma_s})^*_i (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_i,\sigma_i})^*_j (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_p,\sigma_p})_k \mathrm{sinc}\left[(\omega_s+\omega_i-\omega_p)t/2\right] \\
& \times e^{i(\omega_s+\omega_i-\omega_p)t/2} \prod_m \mathrm{sinc}\left[(\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_p)_m l_m/2\right] \\
& \times e^{-i(\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_i-\boldsymbol{k}_p)_z l_z/2} |\boldsymbol{k}_s,\sigma_s\rangle |\boldsymbol{k}_i,\sigma_i\rangle, \qquad (25)
\end{aligned}
$$

donde $|\boldsymbol{k}_s,\sigma_s\rangle$ y $|\boldsymbol{k}_i,\sigma_i\rangle$ son estados de Fock para fotones en modo señal $(\boldsymbol{k}_s,\sigma_s)$ y acompañante $(\boldsymbol{k}_i,\sigma_i)$, y $v_p(\boldsymbol{k}_p,\sigma_p)$ es la amplitud clásica del campo óptico correspondiente a las componentes $(\boldsymbol{k}_p,\sigma_p)$ de las ondas planas del haz de bombeo. Los efectos cuánticos en el haz de bombeo son despreciados en este tratamiento. El operador de aniquilación para los modos del haz de bombeo fue reemplazado en la ec. (25) por una amplitud clásica.

La ecuación (25) del estado cuántico puede ser simplificada, considerando las situaciones experimentales específicas y la forma de detección. Tomemos en cuenta las siguientes aproximaciones:

1.-El tiempo de interacción es lo suficientemente largo para que el término de la función sinc sea significativo solo cuando $\omega_s+\omega_i=\omega_p$. Esto se puede lograr utilizando láseres con potencias moderadas para que el intervalo de tiempo entre dos conversiones descendentes sea largo comparado con el tiempo de resolución de detección.

2.-El ancho en frecuencia de los campos de conversión descendente sea pequeño comparado con las frecuencias centrales, para que la dispersión de los índices de refracción alrededor de las frecuencias centrales $\bar{\omega}_j$ sea pequeña y pueda utilizarse una aproximación lineal. Esto se justifica utilizando filtros de ancho de banda angosto en frecuencia colocados en frente de los detectores.

3.-Los términos $g_{\boldsymbol{k}_j,\sigma_j}$ y $\chi^{(2)}_{ijk}$ son funciones que varían lentamente con respecto a $\boldsymbol{k}_j$, para que sean tomadas como constantes en los intervalos considerados para $\boldsymbol{k}_j$.

4.-El haz de bombeo se propaga a lo largo del eje z y el cristal es largo en las direcciones transversales x y y para contener todo el perfil transversal del haz de bombeo. En este caso, L_x y L_y pueden extenderse al infinito y el último termino en la tercera linea de la expresión (25) sea proporcional a

$$\delta(\boldsymbol{k}_s^{\perp} + \boldsymbol{k}_i^{\perp} - \boldsymbol{k}_p^{\perp})\text{sinc}\left[\frac{L}{2}(\boldsymbol{k}_{sz} + \boldsymbol{k}_{iz} - \boldsymbol{k}_{pz})\right], \tag{26}$$

donde $\boldsymbol{k}_j^{\perp}$ es la componente transversal del vector de onda $\boldsymbol{k}_j$ y $L = l_z$ es el ancho del cristal en la dirección de propagación z.

5.-El volumen de cuantización es lo suficientemente largo para justificar el reemplazo de las sumatorias sobre $\boldsymbol{k}$ por integrales.

6.-El haz de bombeo solo tiene polarización extraordinaria. Esta ímplicito que estamos tratando con cristales negativos birrefringentes.

Bajo estas circunstancias, la ec. (25) podemos reescribirla como

$$|\psi\rangle = |vac\rangle + \sum_{\sigma_s,\sigma_i} \int d\omega_s \int d\omega_i \int d\boldsymbol{k}_s^{\perp} \int d\boldsymbol{k}_i^{\perp} f_{\sigma_s,\sigma_i}(\boldsymbol{k}_s^{\perp}, \boldsymbol{k}_i^{\perp}; \omega_s, \omega_i)$$
$$\times |\boldsymbol{k}_s^{\perp}, \omega_s, \sigma_s\rangle |\boldsymbol{k}_i^{\perp}, \omega_i, \sigma_i\rangle, \tag{27}$$

donde $|\boldsymbol{k}_j^{\perp}, \omega_j, \sigma_j\rangle$ representa el estado de un fotón en el modo definido por la componente transversal del vector de onda $\boldsymbol{k}_j^{\perp}$, por la frecuencia ω_j y por la polarización σ_j. La función de amplitud conjunta de los modos señal y acompañante f_{σ_s,σ_i} es ahora,

$$f_{\sigma_s,\sigma_i} \approx C_{\sigma_s,\sigma_i} G_s(\omega_s) G_i(\omega_i) v(\boldsymbol{k}_s^{\perp} + \boldsymbol{k}_i^{\perp}; \omega_s + \omega_i) \mathrm{sinc}\left[\frac{L}{2}(\boldsymbol{k}_{sz} + \boldsymbol{k}_{iz} - \boldsymbol{k}_{pz})\right], \tag{28}$$

donde C_{σ_s,σ_i} es una constante de acoplamiento que depende del vector de susceptibilidad no lineal, y $G_j(\omega_j)$ es la función espectral definida por los filtros de ancho de banda angosto en frecuencia colocados en los detectores. Si la anisotropía del medio es despreciada, el desfasamiento de fases en el vector de onda longitudinal $k_{sz} + k_{iz} - k_{pz}$ se puede escribir como,

$$\sqrt{|\boldsymbol{k}_s|^2 - |\boldsymbol{k}_s^{\perp}|^2} + \sqrt{|\boldsymbol{k}_i|^2 - |\boldsymbol{k}_i^{\perp}|^2} - \sqrt{|\boldsymbol{k}_p|^2 - |\boldsymbol{k}_p^{\perp}|^2}. \tag{29}$$

II.2.1 Estados enredados

Considerando de forma general a un sistema cuántico en conjunto, compuesto por dos subsistemas A y B con espacios de Hilbert[1] $\boldsymbol{H}_A$ y $\boldsymbol{H}_B$ respectivamente, éste se describe matemáticamente por el producto tensorial,

$$\boldsymbol{H}_A \otimes \boldsymbol{H}_B, \tag{30}$$

[1]un espacio de Hilbert es un espacio lineal abstracto cuyos elementos pueden ser sumados y multiplicados por escalares reales o complejos, este generaliza la idea de un espacio euclideano y extiende los métodos del álgebra vectorial y del cálculo a dimensiones finitas o infinitas.

donde $\otimes$ representa el producto tensorial. Si ambos sistemas se pueden describir por estados puros $|\psi\rangle_A$ y $|\phi\rangle_B$ respectivamente, el estado del sistema compuesto es,

$$|\psi\rangle_A|\phi\rangle_B. \tag{31}$$

Estados del sistema compuesto que puedan ser representados de esta forma son estados separables o estados factorizables. Sin embargo no todos son estados separables. Fijando una base $\{|i\rangle_A\}$ para el primer subsistema y la base $\{|j\rangle_B\}$ para el segundo subsistema, podemos generar el estado más general con el principio de superposición del espacio $\boldsymbol{H}_A \otimes \boldsymbol{H}_B$, dado por,

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i,j} c_{ij}|i\rangle_A|j\rangle_B. \tag{32}$$

Este estado es separable solo sí $c_{ij} = c_i^A c_j^B$, obteniendo $|\psi\rangle_A = \sum_i c_i^A|i\rangle_A$ y a $|\phi\rangle_B = \sum_i c_j^B|j\rangle_B$. Es un estado no separable, o no factorizable si los coeficientes cumplen con $c_{ij} \neq c_i^A c_j^B$ y es por definición un estado enredado.

De la misma forma el estado de dos fotones (27) es un estado enredado sí la función de amplitud conjunta $f_{\sigma_s,\sigma_i}(\boldsymbol{k}_s^\perp, \boldsymbol{k}_i^\perp; \omega_s, \omega_i)$ no es separable por ejemplo en vector de onda transversal $\boldsymbol{k}_j^\perp$ para fotón señal y acompañante. Es un estado factorizable si

$$f_{\sigma_s,\sigma_i}(\boldsymbol{k}_s^\perp, \boldsymbol{k}_i^\perp; \omega_s, \omega_i) = f_{\sigma_s}(\boldsymbol{k}_s^\perp, \omega_s) f_{\sigma_i}(\boldsymbol{k}_i^\perp, \omega_i). \tag{33}$$

II.3 La tasa de coincidencias y la probabilidad de detección

Muchas de las mediciones del campo electromagnético en el dominio óptico están basadas en la absorción de fotones por medio del efecto fotoeléctrico, y ya que se detecta

a los fotones por el proceso de absorción, el campo que estamos midiendo es el asociado con el operador $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)$. Si el campo efectua una transición del estado inicial $|\psi_i\rangle$ al estado final $|\psi_f\rangle$, en el que un fotón con polarización arbitraria haya sido absorbido, el elemento de matriz del operador del campo toma la forma (Glauber, 1963),

$$\langle\psi_f|\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)|\psi_i\rangle. \tag{34}$$

La tasa a la que el fotodetector registra fotones es proporcional a la suma sobre todos los estados finales $|\psi_f\rangle$ de la magnitud al cuadrado de los elementos de matriz (34). Nosotros estamos interesados en la probabilidad de detectar parejas de fotones por lo que utilizamos dos fotodetectores situados en diferentes puntos $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$, en instantes t_1 y t_2 para detectar coincidencias. Por lo tanto la tasa total a la que estas transiciones ocurren es proporcional a,

$$\begin{aligned}&\sum_{\psi_f}|\langle\psi_f|\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)|\psi_i\rangle|^2\\ &=\langle\psi_i|\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)|\psi_i\rangle,\end{aligned} \tag{35}$$

tal tasa se interpreta como la probabilidad por unidad de tiempo al cuadrado que un fotón sea registrado en $\boldsymbol{r}_1$ en el tiempo t_1 y su pareja en $\boldsymbol{r}_2$ en el tiempo t_2.

En general, si el estado inicial no es un estado puro $|\psi_i\rangle$, si no es un ensemble de estados caracterizados por su operador densidad $\hat{\rho}$, tal que

$$\hat{\rho}=\sum_i p(\psi_i)|\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \tag{36}$$

donde $p(\psi_i)$ es la probabilidad asociada con el estado inicial $|\psi_i\rangle$. Tenemos que promediar la expresión (35) sobre el ensamble de todos los estados iniciales con peso $p(\psi_i)$.

Por lo que podemos escribir la tasa de fotodetección en coincidencias R_c como,

$$\begin{aligned} R_c &= C\sum_{\psi_i} p(\psi_i)\sum_{\psi_f} |\langle\psi_f|\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)|\psi_i\rangle|^2 \\ &= C\sum_{\psi_i} p(\psi_i)\sum_{\psi_f}\langle\psi_i|\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)|\psi_f\rangle \\ &\times \langle\psi_f|\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)|\psi_i\rangle \\ &= C\sum_{\psi_i} p(\psi_i)\langle\psi_i|\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)|\psi_i\rangle \end{aligned} \tag{37}$$

donde hemos sumado sobre todas las proyecciones de los estados finales $|\psi_f\rangle$, que por definición es el operador unidad, y C es una constante característica del detector. Finalmente podemos reescribir a la expresión anterior como,

$$\begin{aligned} R_c &= CTr\left[\hat{\rho}\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\right] \\ &= C\langle\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{E}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{E}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle. \end{aligned} \tag{38}$$

La probabilidad de detección es por lo tanto proporcional al valor esperado del producto escalar de los operadores del campo eléctrico $\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r}_j,t_j)$ y $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_j,t_j)$ con $j = 1,2$. Este orden natural de los operadores del campo eléctrico es debido a que el proceso de detección es absorción, caracterizado por el operador de absorción $\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_j,t_j)$.

II.3.1 Operador intensidad para fotones

Como en el tratamiento clásico de fotodetección es conveniente asociar un operador de intensidad definido por el producto escalar

$$\hat{I}(\boldsymbol{r},t) = \hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)\cdot\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t), \tag{39}$$

sobre todo el espacio de interacción. El operador $\hat{I}(\boldsymbol{r},t)$ es la intensidad asociada al vector de campo eléctrico $\hat{\boldsymbol{E}}$. De los diferentes operadores del campo que pueden ser

definidos por una expansión en ondas planas como (15), los unicos donde $\epsilon_{\boldsymbol{k},\sigma} = 1$ tienen un significado especial; la intensidad correspondiente juega el papel de una densidad de fotones y es relacionada con medidas fotoeléctricas. Considerando la integral de la intensidad correspondiente sobre todo el espacio,

$$\int_{L^3} \hat{I}(\boldsymbol{r},t)d^3r = \frac{1}{L^3}\int_{L^3} \sum_{\boldsymbol{k}_m,\sigma_m} \sum_{\boldsymbol{k}'_m\sigma'_m} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}_m\sigma_m}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'_m\sigma'_m}(\boldsymbol{e}^*_{\boldsymbol{k}_m\sigma_m}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}'_m\sigma'_m})e^{i[(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}-(\omega'-\omega)t]}d^3r,$$

que después de intercambiar sumatorias con integrales formalmente, se lleva a cabo la integración sobre todo el espacio y se obtiene $L^3\delta_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}$. Por lo tanto tenemos que,

$$\int_{L^3} \hat{I}(\boldsymbol{r},t)d^3r = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma}\sum_{\boldsymbol{k}'\sigma'} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}'\sigma'}(\boldsymbol{e}^*_{\boldsymbol{k}\sigma}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}'\sigma'}),$$

y que utilizando las propiedades de ortonormalidad de los vectores unitarios de polarización (Mandel y Wolf, 1995), esto se reduce a,

$$\int_{L^3} \hat{I}(\boldsymbol{r},t)d^3r = \sum_{\boldsymbol{k}\sigma} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\sigma} = \hat{n}, \tag{40}$$

donde $\hat{n}$ es el operador de número total de fotones. Por lo tanto la intensidad $\hat{I}(\boldsymbol{r},t)$ juega el papel de densidad de número de fotones por unidad de volumen o densidad de fotones. Aunque el operador de intensidad tiene las dimensiones de fotones por unidad de volumen, intentos por interpretar esto como un operador que localiza a los fotones en el espacio tiempo $\boldsymbol{r},t$ en un sentido estricto nos deja contradicciones. Por ejemplo los operadores de intensidad asociados a una detección conjunta donde tenemos las intensidades $\hat{I}_1(\boldsymbol{r}_1,t_1)$ y $\hat{I}_2(\boldsymbol{r}_2,t_2)$, no conmutan en general. Por lo tanto $\hat{I}(\boldsymbol{r},t)$ no es un operador que localiza en un lugar preciso $\boldsymbol{r}$ y en un tiempo t a los fotones. Esta es una razón de utilizar medidas de correlaciones con operadores ordenados en la forma $\hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\mu}\hat{a}_{\boldsymbol{k}\mu}$ cuando el proceso de fotodetección es absorción, de esta manera localizamos de manera indirecta la presencia de fotones.

Las cuentas registradas por un detector cuya superficie S es normal al campo incidente y está expuesto por un tiempo finito Δt, son interpretadas de forma más natural como una medida del número de fotones en un volumen cilíndrico cuya base es la superficie sensitiva del detector y cuya altura es $c\Delta t$ como se muestra en la figura 5.

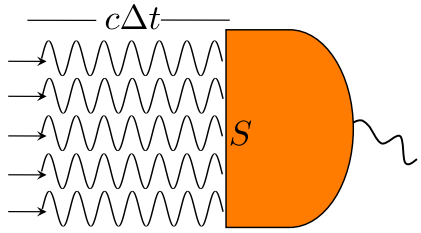

Figura 5. Fotodetección. Número de fotones registrados en un volumen $S(c\Delta t)$.

En muchas de las situaciones en óptica, y que trataremos a lo largo de esta tesis, los campos con los cuales estamos interesados son cuasi-monocromáticos, con un ancho en frecuencia que es pequeño comparado con la frecuencia central. El parámetro (14) en la expansión modal (15) no varía significantemente sobre el rango de modos ocupados del campo, y se comporta como una constante bajo la sumatoria de los modos ocupados (Mandel y Wolf, 1995).

II.4 Funciones de correlación y coherencia

El campo electromagnético se considera como un sistema dinámico con un número infinito de grados de libertad. Nuestro conocimiento acerca de las condiciones de tal campo es incompleto o impreciso para considerar un estado puro $|\psi\rangle$. El actual estado será uno mixto caracterizado por su operador de densidad $\hat{\rho}$ y se define la función de

correlación de segundo orden (Glauber, 1963) como,

$$G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = Tr\Big\{\hat{\rho}\hat{\boldsymbol{E}}_{\mu}^{(-)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{\boldsymbol{E}}_{\mu}^{(-)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{\boldsymbol{E}}_{\mu}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)\hat{\boldsymbol{E}}_{\mu}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\Big\}, \tag{41}$$

el cual es interpretado como el promedio del ensamble de $I(\boldsymbol{r}_1,t_1)I(\boldsymbol{r}_2,t_2)$.

Las correlaciones pueden extenderse sobre intervalos considerables de distancia y tiempo, y esto es esencial en la idea de coherencia. En óptica física el término es usado para denotar una tendencia de dos valores del campo en puntos separados en espacio-tiempo y que se puedan obtener ciertos valores correlacionados. Se define la función cuántica de coherencia de segundo orden por,

$$g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = \frac{G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)}{G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_1,t_1)G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2;\boldsymbol{r}_2,t_2)}, \tag{42}$$

donde,

$$G^{(1)}(\boldsymbol{r}_i,t_i;\boldsymbol{r}_i,t_i) = Tr\Big\{\hat{\rho}\hat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r}_i,t_i)\hat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r}_i,t_i)\Big\} \qquad i=1,2$$

es la intensidad de la luz en el punto espacio temporal $\boldsymbol{r}_i,t_i$ y Tr es la traza de los elementos de matriz. Un campo es coherente si, $|g^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|^2 = 1$ que requiere de la factorización de $G^{(2)}$, de acuerdo a

$$G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = G^{(1)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)G^{(1)}(\boldsymbol{r}_2,t_2). \tag{43}$$

Sin embargo si las condiciones de nuestro campo son conocidas de manera que podamos definir a un estado puro $|\Psi\rangle$, la correlación de segundo orden es simplemente la tasa de coincidencias,

$$G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2) = \Big|\hat{\boldsymbol{E}}_{\mu}^{(+)}(\boldsymbol{r}_2,t_2)\hat{\boldsymbol{E}}_{\mu}^{(+)}(\boldsymbol{r}_1,t_1)|\Psi\rangle\Big|^2 = |f(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)|^2. \tag{44}$$

Esta ecuación se dice que no presenta enredamiento cántico si cumple con la condición (43) o que la función $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2)$ es factorizable, y que la podemos escribir como

$f(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2) = f(\boldsymbol{r}_1, t_1) f(\boldsymbol{r}_2, t_2)$. Para obtener la tasa de coincidencias marginal para un solo modo, o tasa de cuentas simples, digamos en el modo 1, $R_1(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ se obtiene integrando ec. (44) con respecto a variables en el modo 2. Esto es, considerando un campo estadísticamente estacionario,

$$R_1(\boldsymbol{r}_1, t; \boldsymbol{r}_1, t) = \int d\boldsymbol{r}_2 G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t; \boldsymbol{r}_2, t). \tag{45}$$

La analogía matemática entre la tasa de coincidencias y la teoría de coherencia parcial es evidente cuando la función de amplitud conjunta $f(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ se relaciona con la función de correlación de segundo orden $G^{(2)}(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2)$ y tiene que ver con los criterios de separabilidad de estas funciones. La separabilidad en la función (43) se asocia con la presencia de coherencia y por lo tanto alta visibilidad en las franjas de interferencia, mientra que la separabilidad en la función de amplitud conjunta se asocia con la ausencia de enredamiento cuántico (Saleh *et al.*, 2000), y presenta baja visibilidad en las franjas de interferencia para experimentos asociados con parejas de fotones. Haciendo las dimensiones de una fuente incoherente más pequeña, se vuelve mas separable la función de correlación y más coherente se vuelve el campo. En contraste mientras se hacen mas angostas las dimensiones del haz de bombeo para una fuente SPDC, se vuelve más separable la función de amplitud conjunta y menos enredado es el campo de parejas de fotones.

Capítulo III

Haces estructurados espacialmente

Parte del trabajo de esta tesis trata con los haces de bombeo en el medio no centrosimétrico y su desempeño para generar las parejas de fotones. La propagación de campos ópticos así como la estructura espacial de estos ha sido estudiado en gran medida por Julio César Gutiérrez Vega, su equipo en Monterrey y por Sabino Chávez Cerda de forma experimental y numéricamente.

Un haz láser tiene un perfil transversal descrito matemáticamente por una función gausiana; por esta razón comúnmente se conoce como haz Gausiano. Los haces con estructura espacial son aquellos los cuales difieren de un perfil gaussiano, por ejemplo los haces Bessel se describen matemáticamente con una función Bessel, estos presentan anillos laterales. Algunos de estos haces no presentan difracción al menos en una distancia de 10 a 15 metros (Durnin, 1987), a estos haces se les llama adifraccionales o haces invariantes, ya que conservan su perfil transversal cierta distancia después de salir de la fuente. Los haces invariantes son un campo joven en la óptica moderna que se expande rápidamente y vamos a utilizar algunos de ellos para generar parejas de fotones. En este capítulo mostraremos las características generales de estos tipos de haces para aplicarlos posteriormente a SPDC como haces de bombeo. Los resultados aquí presentados pueden consultarse en las siguientes referencias (Durnin, 1987; Gutiérrez y Bandres, 2005; Gutiérrez *et al.*, 2000; Bandres *et al.*, 2004; Bandres y Gutiérrez, 2004). Este capítulo no incluye trabajo original realizado por el autor de la tesis; se incluye a

manera de resumen.

III.1 Haz de bombeo con estructura espacial y haces libres de difracción

Estamos interesados en la generación de parejas de fotones por medio de haces con estructura espacial, que la podemos encontrar en modos láser como los haces cuasi libres de difracción y paraxiales.

Sabemos que cualquier campo óptico de longitud de onda λ confinado inicialmente en una área de radio r en el plano transversal a la dirección de propagación z presentará difracción al propagarse. La distancia característica donde estos efectos son notables es el rango de Rayleigh (Hecht, 2002; Siegman, 1986) r^2/λ. Esto es sin lugar a dudas cierto para un haz Gaussiano que posee un tamaño de mancha (spot size en inglés) que diverge a un ángulo proporcional a λ/r, a distancias de propagación $z >> r^2/\lambda$.

Una solución a la ecuación de onda para campos escalares propagándose en el espacio libre $z \geq 0$ es,

$$E(\boldsymbol{\rho}, z \geq 0, t) = e^{i(k_z z - \omega t)} \int_0^{2\pi} A(\phi) e^{ik_t(x cos\phi + y sen\phi)} d\phi, \tag{46}$$

donde $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$, $k_z^2 + k_t^2 = k^2$ y $A(\phi)$ es una función compleja arbitraria de ϕ. Cuando k_z es Real, la ecuación (46) representa a campos ópticos libres de difracción (Durnin, 1987; Gori *et al.*, 1987; Szwaykowki y Castañeda, 1991), en el sentido que su perfil transversal en intensidad promedio en el tiempo, en $z = 0$ es reproducido para todo

$z > 0$, esto es,

$$I(\boldsymbol{\rho}, z = 0) = I(\boldsymbol{\rho}, z \geq 0) = \frac{1}{2}|E(\boldsymbol{r}, t)|^2. \tag{47}$$

Cuando el campo tiene simetría axial, $A(\phi)$ es independiente de ϕ y resolviendo ecuación (46) la amplitud del campo es proporcional a,

$$E(\boldsymbol{r}, t) \propto e^{i(k_z z - \omega t)} J_0(k_t \rho), \tag{48}$$

donde J_0 es la función Bessel de orden cero y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Cuando $0 < k_t < \omega/c$ la solución es un haz libre de difracción cuya intensidad decae a una tasa inversamente proporcional a $k_t \rho$, de tal modo la distribución de intensidad no es cuadráticamente integrable, por lo que se necesitaría una cantidad infinita de energía para crear un haz Bessel sobre un plano, a estos haces se les llama haces libres de difracción ideales. Sin embargo, a pesar de esto se puede crear tal haz en una área finita y propagarlo.

En vista de que los haces libres de difracción no son realizables físicamente se han descrito modificaciones a estos haces Bessel, los cuales tienen energía finita y son libres de difracción en cierto rango donde no presentan divergencia significativa. En 1987 Gori (Gori *et al.*, 1987) y colaboradores presentarón los haces Bessel Gauss los cuales pueden ser realizados experimentalmente.

III.1.1 Haces Helmholtz Gauss (HzG)

Julio C. Gutiérrez y Miguel A. Bandres (Gutiérrez y Bandres, 2005) presentan un estudio riguroso de la propagación de un haz libre de difracción arbitrario cuya perturbación en el plano $z = 0$ es modulado por una envolvente Gaussiana. A estos haces los llamarón haces Helmholtz Gauss (HzG) debido a que los haces adifraccionales son soluciones de

la ecuación de Helmholtz.

Estos haces poseen energía finita y pueden obtenerse experimentalmente con buena aproximación. Los haces Bessel son un caso especial de estos haces. Estos se pueden representar por medio de tres factores: una amplitud compleja que depende solo de la coordenada de propagación z, un haz Gaussiano y una versión compleja de la estructura transversal del haz libre de difracción.

El espectro angular de estos haces se localiza en un anillo en el espacio frecuencial y, mientras el radio medio del anillo es definido exclusivamente por la estructura transversal del haz adifraccional ideal, el ancho del anillo es controlado solamente por la envolvente gaussiana.
A un haz HzG $U(\boldsymbol{r})$ lo podemos escribir como,

$$U(\boldsymbol{r}) = e^{-i\frac{k_t^2}{2k}\frac{z}{\mu}} GB(\boldsymbol{r}) W\left(\frac{x}{\mu}, \frac{y}{\mu}; k_t\right), \tag{49}$$

donde W representa al haz libre de difracción ideal, $GB(\boldsymbol{r})$ es el haz Gaussiano fundamental dado por,

$$GB(\boldsymbol{r}) = \frac{e^{ikz}}{\mu} e^{-\frac{r^2}{\mu w_0^2}}, \tag{50}$$

donde w_0 es la cintura del haz, y el parámetro

$$\mu(z) = 1 + i\frac{z}{z_R}, \tag{51}$$

con la distancia de Rayleigh $z_R = kw_0^2/2$ para un haz Gaussiano.

Mientras que el argumento de la función W en el plano $z = 0$ es real, fuera de este plano es complejo con el resultado que el perfil transversal definido por W cambiará de

su forma original en un plano $z > 0$. Esta función admite la representación integral,

$$W\left(\frac{x}{\mu}, \frac{y}{\mu}; k_t\right) = \int_0^{2\pi} A(\phi) e^{ik_t\left(\frac{x}{\mu}cos\phi + \frac{y}{\mu}sen\phi\right)} d\phi. \tag{52}$$

Notemos que en ec. (49), cuando la cintura del haz gaussiano es muy grande, $w_0 \to \infty$,

$$U(\boldsymbol{r}) = e^{i(k - \frac{k_t^2}{2k})z} W(\boldsymbol{\rho}; k_t), \tag{53}$$

la cual es la ecuación de un haz libre de difracción ideal (46), solo que expresada con su vector de onda en la aproximación paraxial.

Un haz HzG se forma por una superposición coherente de haces Gaussianos fundamentales cuyas cinturas de haz coinciden con el plano $z = 0$, y cuyo eje de propagación yace en la superficie de un cono con un ángulo de la mitad de la apertura del anillo, $\theta_0 = sen^{-1}(k_t/k) \approx k_t/k$, cuyas amplitudes están moduladas angularmente por la función $A(\phi)$ (ver figura 6 y 7).

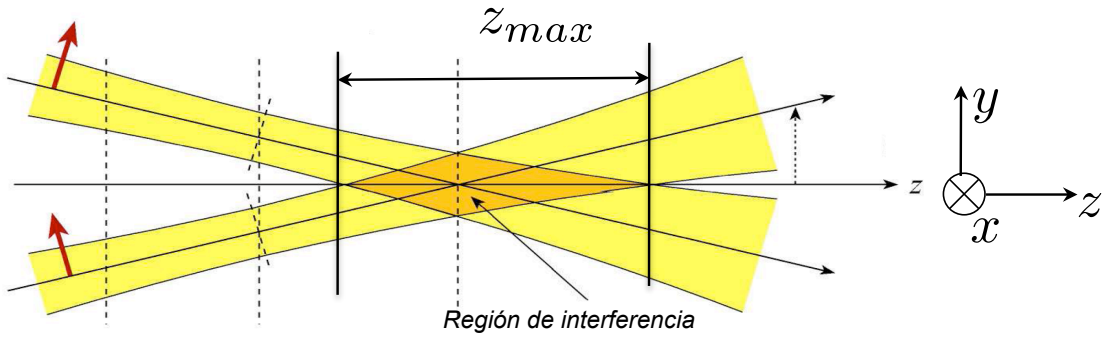

Figura 6. Formación de haces Helmholtz Gauss.

Los haces adifraccionales ideales son soluciones exactas a la ecuación de Helmholtz en los diferentes sistemas coordenados, por ejemplo tenemos a las ondas planas en coordenadas cartesianas, a los haces Bessel en coordenadas cilíndricas círculares, los

haces Mathieu (Gutiérrez *et al.*, 2000, 2001) en coordenadas cilíndricas elípticas y a los haces parabólicos (Bandres *et al.*, 2004) en coordenadas cilíndricas parabólicas. Nos enfocaremos solo en algunos de estos casos, por ejemplo el haz Bessel representa el mas simple de los haces no difractivos. Uno de los mayores atractivos de los haces HzG es que se puede tener toda una familia de haces que pueden tomar perfiles transversales prácticamente arbitrarios. Generalmente aquellos que posean una característica de simetría pueden ser de utilidad. Mostramos los principales en la figura 8.

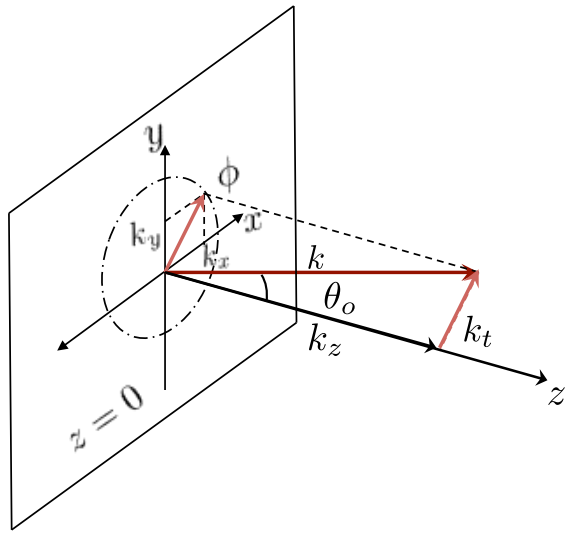

Figura 7. Geometría para haces Gaussianos fundamentales. Se originan en algún punto del plano transversal $z = 0$ y forman un vector de onda transversal, tal que $k_t^2 = k^2 - k_z^2$.

III.1.2 Haces paraxiales

Otra familia importante de haces con estructura espacial son los haces Hermite Gauss (HG) y Laguerre Gauss (LG) que tienen 3 propiedades: Forman dos familias de soluciones exactas a la ecuación de onda paraxial (68), son eigenmodos de resonadores estables y no cambian su forma al propagarse, es decir, son estables estructuralmente. La solución fundamental de la ecuación paraxial es el haz Gaussiano. Una tercer fa-

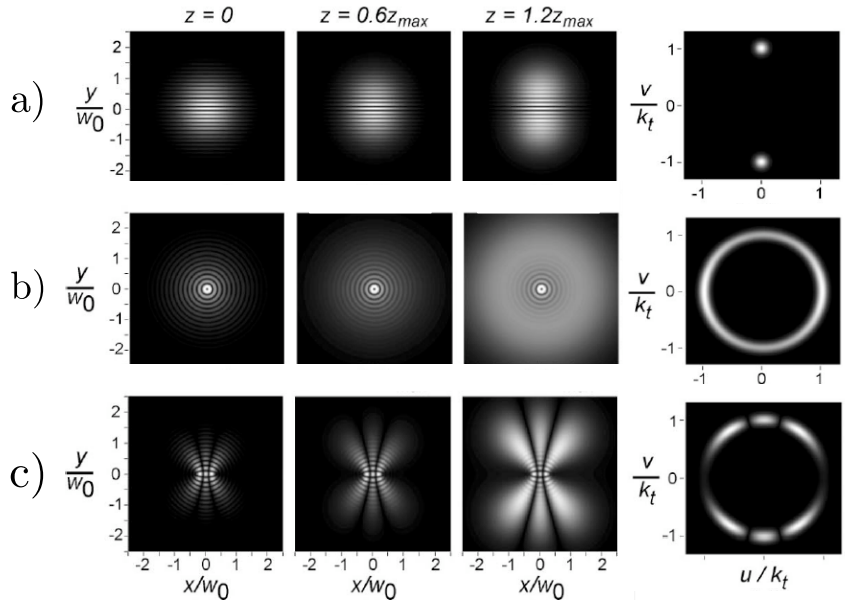

Figura 8. Algunos de los haces HzG, propagación (tres primeras columnas) y espectro angular (cuarta columna). a)Haz CG, b)Haz BG y c)Haz MG par de segundo orden. Tomado de referencia [Gutiérrez y Bandres (2005)].

milia de haces paraxiales se ha estudiado y son conocidos como los haces Ince Gauss (IG) (Bandres y Gutiérrez, 2004; Schwarz *et al.*, 2004), que son soluciones a la ecuación de onda paraxial en coordenadas elípticas y cuyo perfil transversal dependen de su elipticidad ϵ. Estos constituyen la transición entre los modos LG y HG (Ver figura 9). Su distribución transversal de estos haces están descritos por los polinomios Ince (Abramowitz y Stegun, 1964) y cualquier campo paraxial puede ser expresado como una superposición de estos haces. Mostramos en la tabla III.1.2 los diferentes tipos de haces que son solución a la ecuación paraxial de onda y a la ecuación de Helmholtz en diferentes tipos de coordenadas.

La solución fundamental de la ecuación de onda paraxial es el haz Gaussiano fundamental, que podemos expresar como,

$$G(\boldsymbol{r}) = \frac{w_0}{w(z)} exp\left[-\frac{r^2}{w(z)^2} + i\frac{kr^2}{2R(z)} - i\psi(z)\right], \tag{54}$$

donde $w(z)^2 = w_0^2(1+z^2/z_R^2)$ es el ancho del haz, $R(z) = z + z_R^2/z$ el radio de curvatura

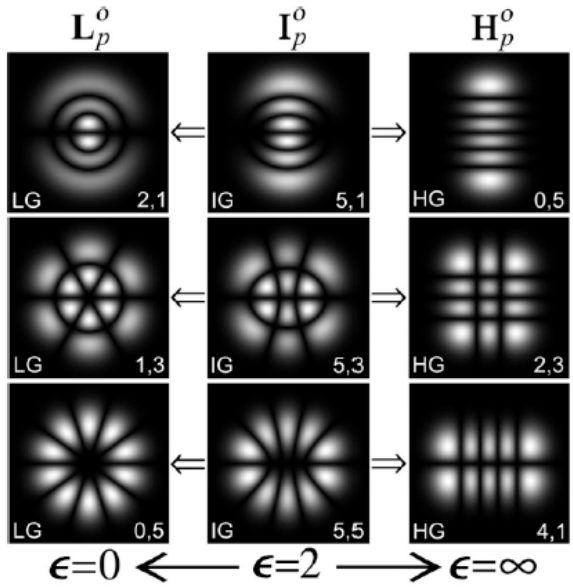

Figura 9. Haces paraxiales. Tomado de [Bandres y Gutiérrez (2004), pag. 876], con una elipticidad $\epsilon = 0$ obtenemos modos Hermite Gauss (HG), y con $\epsilon = \infty$ los modos Laguerre Gauss (LG) a partir de los Ince Gauss (IG).

del frente de onda, $\psi(z) = arctan(z/z_R)$ es el Gouy shift, y w_0 es el ancho del haz en $z = 0$.

Para obtener soluciones de la ecuación paraxial de onda en coordenadas elípticas, se considera un haz cuyo envolvente compleja modula a un haz gaussiano,

$$IG(\boldsymbol{r}) = E(\xi)N(\eta)e^{iZ(z)}G(\boldsymbol{r}). \tag{55}$$

En un plano transversal al eje de propagación z, se defininen a las coordenadas elípticas como,

$$x = f(z)cosh(\xi)cos(\eta), \tag{56}$$

$$y = f(z)senh(\xi)sin(\eta), \tag{57}$$

$$Z = z, \tag{58}$$

donde $\xi \in [0, \infty)$ y $\eta \in [0, 2\pi)$.

Sustituyendo en ec. paraxial las funciones reales $E(\xi)$, $N(\eta)$ y $Z(z)$, estas satisfacen 3 ecuaciones diferenciales. La ecuación para $N(\eta)$ es la ecuación periódica de segundo orden que tiene dos familias de soluciones independientes, llamados los polinomios pares Ince $C_p^m(\eta, \epsilon)$ y polinomios impares Ince $S_p^m(\eta, \epsilon)$ de orden p y grado m, donde $0 \leq m \leq p$ para funciones pares, y $1 \leq m \leq p$ para funciones impares. El parámetro de elipticidad es $\epsilon = 2f_0^2/w_0^2$, donde f_0 es la separación semifocal. Curvas de constante ξ son elipses confocales y curvas con constante η son hipérbolas confocales. Los haces IG exhiben una estructura elíptica cuya forma permanece invariante con la propagación.

La relación entre los haces ince a un modo Laguerre gauss (LG) ocurre cuando las coordenadas elípticas tienden a las coordenadas cilíndricas círculares, esto es cuando $f_0 \to 0$. Los modos LG normalizados pares (e) y nones (o) con número radial n y número azimutal ℓ son de la forma,

$$\begin{aligned} LG_{n,\ell}^{e,o}(r, \phi, z) = & \left[\frac{4n!}{(1+\delta_{0,\ell})\pi(n+\ell)}\right]^{1/2} \frac{1}{w(z)} \begin{pmatrix} cos\ell\phi \\ sen\ell\phi \end{pmatrix} \\ & \times \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right]^{\ell} L_n^{\ell}\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) exp\left[\frac{-r^2}{w^2(z)}\right] \\ & \times exp\left[ikz + i\frac{kr^2}{2R(z)} - i(2n+\ell+1)\psi(z)\right], \end{aligned} \tag{59}$$

donde $L_n^{\ell}(\cdot)$ son los polinomios de Laguerre generalizados. La dependencia angular azimutal de estos modos hace que su fase sea círcular con respecto al eje de propagación. De la misma forma se pueden construir modos Ince Gauss (HIG) con helicidad de la

forma,

$$HIG^{\pm}_{p,m} = IG^{e}_{p,m}(\xi,\eta,\epsilon) \pm iIG^{o}_{p,m}(\xi,\eta,\epsilon), \tag{60}$$

donde la fase rota en una elipse a lo largo de una línea definida por $|x| \leq f, 0, z$. El signo en ec. (60) define la dirección de la rotación. Estos haces así como los LG, BG y Mathieu gauss (MG) de orden superior pueden ser utilizados en pinzas ópticas (Novotny *et al.*, 1997), trampas de átomos (Gahagan y Swartzlander, 1996) y transferencia de momento angular a microparticulas (Galajda y Ormos, 2003).

La transición de los modos Ince a los modos Hermite Gauss (HG) ocurre cuando $f_0 \to \infty$. En la figura 9 se muestran los perfiles transversales de los modos ince y sus transiciones a modos LG y HG. Los modos HG normalizados son,

$$\begin{aligned} HG_{n_x,n_y}(x,y,z) = & \left(\frac{1}{2^{n_x+n_y-1}\pi n_x! n_y!}\right)^{1/2} \frac{1}{w(z)} \\ & \times H_{n_x}\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_{n_y}\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) exp\left[\frac{-r^2}{w^2(z)}\right] \\ & exp\left[ikz + \frac{ikr^2}{2R(z)} - i(n_x+n_y+1)\psi(z)\right], \end{aligned} \tag{61}$$

donde $H_n(\cdot)$ son los polinomios de Hermite de orden n. En la tabla III.1.2 resumimos los haces mas representativos que poseen estructura espacial.

Tabla I. Familia de haces

Paraxiales	No paraxiales (Helmholtz Gauss)
HG (Coordenadas cartesianas)	Coseno-Gauss (CG)
IG (Coordenadas elípticas)	Mathieu-Gauss (MG)
LG (Coordenadas polares)	Bessel-Gauss (BG)
(Coordenadas parabólicas)	Parabólicos-Gauss (PG)

III.2 El desempeño de las propiedades espaciales del haz de bombeo

Hemos revisado unos ejemplos de los diferentes haces con estructura espacial que se pueden obtener en laboratorio y que han sido clasificados por sus diferentes propiedades de propagación y algunas aplicaciones. En esta tesis exploramos la transferencia de estructura espacial de los haces de bombeo a las parejas de fotones. Se ha demostrado la dependencia del espectro angular del haz de bombeo en el estado de dos fotones generado por SPDC. Esta dependencia muestra que las parejas de fotones pueden ser preparadas en diversos estados cuánticos, por medio de la manipulación del haz de bombeo. Esto tiene efectos importantes en la tasa de coincidencias como veremos mas adelante. Para ilustrar esta idea, describimos un experimento donde se modifica al haz de bombeo (Ribeiro *et al.*, 2004; Monken *et al.*, 1998) y lo mostramos en la figura 10.

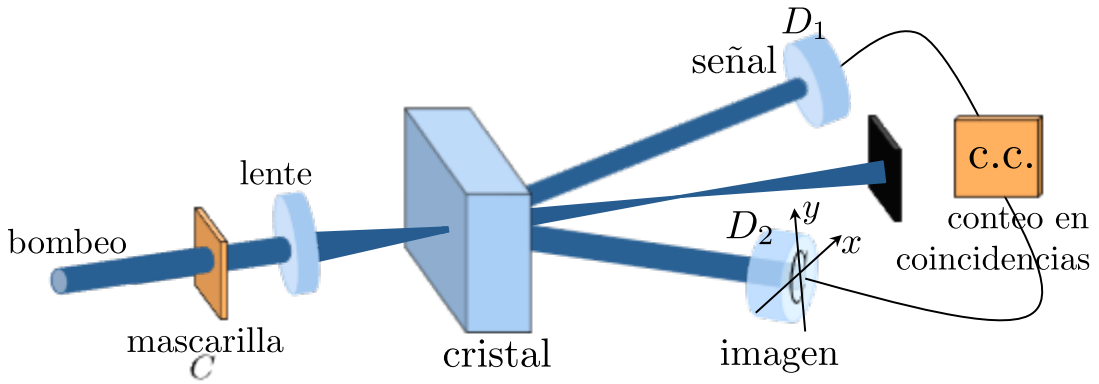

Figura 10. Transferencia de espectro angular. Del haz de bombeo a la estructura de la tasa en coincidencias.

Un haz de bombeo pasa por una mascarilla y una lente antes de llegar al cristal no lineal. La mascarilla tiene una apertura con una letra C. La lente se utiliza para formar la imágen de la letra después del cristal. Los modos SPDC son detectados en el plano donde la imágen de la mascarilla se forma. Con esta condición es posible recuperar la

forma de la imagen en la distribución de tasa de coincidencias transversales. El detector señal se mantiene fijo mientras en el otro se escanea el plano (x, y) transversal de detección.

El conteo en coincidencias puede ser calculado, como una función de las coordenadas transversales de los detectores. La amplitud de probabilidad de la tasa de conteo en coincidencias (Monken *et al.*, 1998) está dada por:

$$A_c(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, Z_{AD}) = C \int d\boldsymbol{\rho} W(\boldsymbol{\rho}, Z_A) e^{i\frac{K_p}{2Z_{AD}}|\boldsymbol{R}-\boldsymbol{\rho}|^2}, \tag{62}$$

donde C es una constante, $\boldsymbol{R}$ son las coordenadas en los planos de detección, $W(\boldsymbol{\rho}, Z_A)$ es la distribución del haz de bombeo en amplitud. Notando que ec. (62) corresponde la propagación de Fresnel de la amplitud $W(\boldsymbol{\rho}, Z_{AD})$ del plano situado a una distancia Z_A del plano de la mascarilla a una distancia Z_{AD} del cristal al plano de detección; el cual son los planos de los detectores, la amplitud puede ser escrita como,

$$A_c(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, Z_{AD}) \propto W(\boldsymbol{R}, Z_{AD}). \tag{63}$$

Esta ec. (63) nos dice que la intensidad a una distancia Z_{AD} del cristal, es reproducido exactamente por el perfil en coincidencias transversal $R_c(\boldsymbol{\rho_1}, \boldsymbol{\rho}_2) = |A_c(\rho_1, \rho_2, Z_{AD})|^2$, al menos por un factor de escala el cual depende en las longitudes de onda de los fotones señal y acompañante y en las distancias relativas de los detectores. Esta dependencia esta dada por

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_{AD}} &= \frac{\omega_s}{\omega_i}\frac{1}{z_1} + \frac{\omega_i}{\omega_s}\frac{1}{z_2}, \\ \boldsymbol{R} &= \frac{\omega_s}{\omega_p}\frac{Z_{AD}}{z_1}\boldsymbol{\rho}_1 + \frac{\omega_i}{\omega_p}\frac{Z_{AD}}{z_2}\boldsymbol{\rho}_2, \end{aligned} \tag{64}$$

donde z_1 y z_2 son las distancias entre el cristal y el detector señal y acompañante respectivamente, y $\boldsymbol{\rho}_1$ son las coordenadas transversales del detector señal y $\boldsymbol{\rho}_2$ las

coordenadas transversales del detector acompañante. La ec.(63) muestra que la distribución en coincidencias depende en el propagador de Fresnel del perfil transversal del bombeo. El espectro angular del haz de bombeo se transfiere a las correlaciones entre modos señal y acompañante, mientras que las intensidades locales no son afectadas (Monken *et al.*, 1998). Esta estructura depende de la distribución transversal del campo eléctrico preparada en el bombeo, y depende de la relación entre las frecuencias de los 3 haces y las distancias de propagación libre. Esto permite implementar y manipular las correlaciones espaciales manipulando el haz de bombeo. Otro aspecto importante es que la distribución en coincidencias depende de la suma de las coordenadas de los detectores señal y acompañante y no de un solo detector, esto es huella del enredamiento que presentan las parejas de fotones.

Capítulo IV

Correlaciones SPDC con haces de bombeo estructurado

La investigación en las propiedades espaciales de la luz ha sido acompañada por el estudio de la naturaleza misma de la luz. El desarrollo de la teoría de difracción y todas sus aplicaciones representan un claro ejemplo de como una teoría física puede describir a la naturaleza. A pesar del éxito de la óptica clásica, se sabe que hay que hacer enmiendas para describir los efectos cuánticos cuando tratamos con ciertos tipos especial de luz tal como lo es el SPDC. En este aspecto, las correlaciones transversales entre las parejas de fotones producidas en SPDC han contribuido a este propósito. La teoría de óptica cuántica sobre los efectos espaciales que han sido desarrollados hasta la fecha están basados en la teoría de difracción clásica y en la teoría de coherencia (Glauber, 1963) y se ha mostrado que tiene su analogía con fuentes de parejas de fotones (Joobeur *et al.*, 1996; Saleh *et al.*, 2000). Estos conceptos fueron esenciales en el desarrollo de la teoría cuántica de coherencia y siguen siendo esenciales en el diseño y razonamiento de varios experimentos de óptica cuántica.

El experimento de la doble rendija por ejemplo nos proporciona un método eficaz para determinar el área de coherencia de un campo óptico a cierta distancia de una fuente. Utilizando este método se ha podido medir la longitud de coherencia transversal de uno de los modos generados por SPDC (Ribeiro *et al.*, 1994) y se observó que la longitud de coherencia es la misma que para una fuente térmica. La misma técnica se ha

aplicado también al haz de parejas de fotones generadas por SPDC y se demostró que la longitud de coherencia transversal del éstas es mucho más grande que el del estado de un solo fotón (Fonseca *et al.*, 1999). Una teoría multimodal cuántica fue necesaria para explicar los resultados experimentales en este caso.

Para comenzar este capitulo discutiremos algunos aspectos fundamentales de la teoría de difracción, los cuales nos ayudan a comprender la teoría cuántica de correlaciones espaciales y de momento transversal en las parejas de fotones.

IV.1 Teoría básica de difracción

Un tema importante y básico en las correlaciones espaciales recae en las aproximaciones paraxiales y en el regimen de Fresnel. La mayor parte de la teoría de óptica cuántica concerniente a SPDC fue desarrollada dentro de estas aproximaciones y describe de manera efectiva a la mayoría de las situaciones experimentales que han sido reportadas hasta la fecha.

IV.1.1 Aproximación paraxial

Si un haz monocromático se propaga en la dirección z en un medio isotrópico, podemos escribir las componentes de k_z como,

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_\perp^2} \approx k\left(1 - \frac{k_\perp^2}{2k^2}\right), \tag{65}$$

donde $k_\perp$ son las componentes transversales del vector de onda y donde la aproximación se obtiene haciendo una expansión en series de Taylor y es válida cuando $k_\perp^2 << k^2$. Si dibujaramos rayos desde el origen a un punto en el espacio $\boldsymbol{k}$ satisfaciendo la ec.

(65), tendríamos rayos paraxiales. En este sentido la aproximación de Fresnel y la aproximación paraxial son lo mismo. Sabemos que en óptica clásica un campo $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$, satisface a la ecuación de onda:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 0, \tag{66}$$

y si uno considera que el campo es monocromático con una dependencia armónica en el tiempo, tal que $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \mathcal{E}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$, donde ω es la frecuencia angular, uno llega a la ecuación de Helmholtz:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{67}$$

Si ahora consideramos solo ondas paraxiales que se propaguen cerca del eje de propagación z podemos escribir $\mathcal{E}(\boldsymbol{r}) = U(\boldsymbol{r})e^{ik_z z}$, donde $U(\boldsymbol{r})$ es una función que varía lentamente en $\boldsymbol{r}$ tal que $\mathcal{E}(\boldsymbol{r})$ mantiene una estructura de onda plana para distancias en el orden de una longitud de onda. Utilizando esta forma de $\mathcal{E}(\boldsymbol{r})$ en la ec. de Helmholtz, obtenemos la ec. de onda paraxial,

$$\left(\nabla_\perp^2 + 2ik\partial_z\right)\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{68}$$

donde $\nabla_\perp^2$ es el operador laplaciano transversal. Al derivar (68) se toma en cuenta que el término $\partial_z^2\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})$ es muy pequeño comparado con una longitud de onda: $\partial_z^2\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}) << k\partial_z\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})$. Ha sido demostrado por varios autores que la ecuación de Helmholtz paraxial es análoga a la ecuación de Schrödinger (Stoler, 1981).

IV.1.2 El espectro angular y su propagación

La teoría cuántica que explica las correlaciones transversales de los fotones hace uso de diversas técnicas de óptica de Fourier, en particular la propagación del espectro angular. Considerando un campo escalar monocromático que se encuentra lejos de la

fuente y que satisface la ec. de Helmholtz (67), la amplitud de este campo puede ser representado (Goodman, 1996) como,

$$U(\boldsymbol{\rho}, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{k}_\perp u(\boldsymbol{k}_\perp, z) e^{i\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}}, \tag{69}$$

donde el haz se propaga en la dirección z, $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ son las coordenadas espaciales transversales y $\boldsymbol{k}_\perp = (k_x, k_y)$ son las componentes transversales del vector de onda $\boldsymbol{k}$. El espectro angular $u(\boldsymbol{k}_\perp, z)$ es la transformada de Fourier inversa del campo:

$$u(\boldsymbol{k}_\perp, z) = \int_{\mathbb{R}^2} d\boldsymbol{k}_\perp U(\boldsymbol{\rho}, z) e^{-i\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}}. \tag{70}$$

Uno puede pensar en el espectro angular de la ecuación (69) como una expansión del campo $U(\boldsymbol{\rho}, z)$ en terminos de ondas planas $e^{i\boldsymbol{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}}$, en donde el espectro angular $u(\boldsymbol{k}_\perp, z)$ es como una función de peso. Conforme el campo se propaga, su espectro angular cambia. Combinando la ecuación (68) con (69) es fácil demostrar que el espectro angular de un campo en $z = 0$ se propaga como,

$$u(\boldsymbol{k}_\perp, z) = u(\boldsymbol{k}_\perp, 0) e^{ik_z z}. \tag{71}$$

Para que sea de utilidad, la componente k_z debe de ser expresada en términos de sus componentes transversales $\boldsymbol{k}_\perp$. Para medios isotrópicos esto puede realizarse con la ec. (65).

Cuando tenemos un medio anisotrópico, el cual es el caso de los cristales no lineales utilizados para SPDC, la expresión para k_z en terminos de $k_\perp$ puede ser muy complicada (Born y Wolf, 1999). Restringiremos este análisis para el caso de cristales uniaxiales solamente ya que en la mayoría de los casos los fotones generados por SPDC utilizan este tipo de cristales, además de que no hay física nueva cuando se genera SPDC por

cristales biaxiales.

Consideramos ahora la geometría de la figura 11 donde un cristal uniaxial de ancho L es cortado para tener su eje óptico formando un ángulo θ con su normal, el cual esta orientada paralelo al eje z. En este medio la *superficie del vector de onda* tiene dos hojas definidas por,

$$\frac{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}{n_o^2} = \frac{\omega^2}{c^2}, \tag{72}$$

despejando k_z de (72) y con el uso de la aproximación paraxial podemos reescribirlo como,

$$k_z = \sqrt{\left(n_o \frac{\omega}{c}\right)^2 - |\boldsymbol{k}_\perp|^2} \approx n_o \frac{\omega}{c} - \frac{c}{2n_o\omega}|\boldsymbol{k}_\perp|^2, \tag{73}$$

para ondas planas con polarización ordinaria (ortogonal al eje óptico), y

$$\left(\frac{cos^2\theta}{n_e^2} + \frac{sen^2\theta}{n_o^2}\right) k_x^2 + \frac{k_y^2}{n_e^2} + \left(\frac{cos^2\theta}{n_o^2} + \frac{sen^2\theta}{n_e^2}\right) k_z^2$$
$$+ \left(\frac{1}{n_e^2} - \frac{1}{n_o^2}\right) sen(2\theta) k_x k_z = \frac{\omega^2}{c^2}, \tag{74}$$

para ondas con polarización extraordinaria, donde n_o y n_e son los índices de refracción ordinario y extraordinario respectivamente. Esta ecuación (74) se puede resolver para k_z. Utilizaremos en este trabajo solamente ondas con polarización ordinaria.

IV.2 Función de empatamiento de fases con haces estructurados espacialmente

El empatamiento de fases nos asegura una buena eficiencia para interacciones no lineales. Esencialmente esto significa obtener la relación de fase adecuada entre las ondas interactuantes en la dirección de propagación. El desempatamiento de fases debe ser

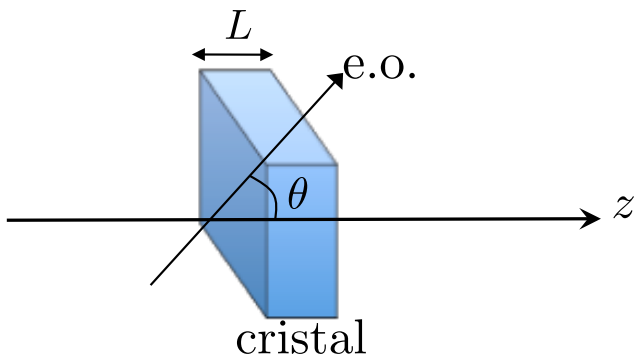

Figura 11. Cristal no lineal de longitud L y su eje óptico. La luz se propaga a lo largo del eje z.

cercano a cero, esto se muestra en la figura 12 (colineal y no colineal) para vectores de onda de bombeo k_p, señal k_s y acompañante k_i. Esto es,

$$\Delta k = k_p - k_s - k_i, \tag{75}$$

donde sí $\Delta k = 0$ implica empatamiento de fases perfecto. Una técnica usual para lograr el empatamiento de fases es donde se explota la birrefringencia del cristal no lineal, y puede ser de tipo I como vimos con anterioridad, donde los modos señal y acompañante tienen la misma polarización, o tipo II donde los modos señal y acompañante tienen diferente polarización.

Un empatamiento de fases crítico significa que un ajuste angular en el cristal (o en el haz de bombeo) se utiliza para encontrar la configuración adecuada, mientras que en el empatamiento de fases no crítico todas las direcciones de polarización yacen a lo largo de los ejes del cristal y la posición angular es por lo tanto un parámetro sensible (ver figura 11).

Por último una técnica de importancia es el cuasi empatamiento de fases, donde el

empatamiento de fases no ocurre realmente, pero donde las eficiencias de conversión son obtenidas sin embargo, en un cristal donde el signo de la no linealidad varía periódicamente. Tal variación en no linealidad se logra por *periodic - poling* (U'Ren *et al.*, 2006, 2005) como se muestra en la figura 13, donde $\chi^{(2)}$ cambia de signo cierto periodo. Para este caso ahora $\Delta k \to \Delta k + 2\pi m/\Lambda$, donde Λ es el periodo.

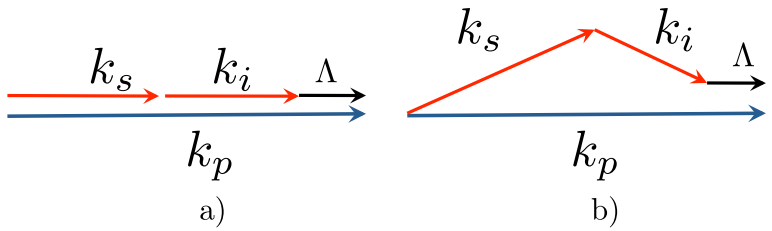

Figura 12. Geometría del cuasi-empatamiento de fases a)colineal y b)no colineal.

Una versión simplificada del SPDC es mediante el uso de haces de bombeo con perfil transversal plano, esto es por supuesto una idealización matemática, ya que con esto obtenemos un empatamiento de fases perfecto. En el capítulo anterior estudiamos algunos de los haces de bombeo que utilizaremos en el resto de la tesis, por lo que es necesario una función de empatamiento de fases diferente a la delta de Dirac de la ecuación (26) para vectores de momento transversal. Recordemos que esta se obtuvo tomando en cuenta la aproximación de cristal infinitamente largo en su parte transversal, comparado con el perfil transversal del haz de bombeo en ec. (16), donde los límites de la integral pueden extenderse al infinito y obtuvimos la delta de Dirac para una onda plana.

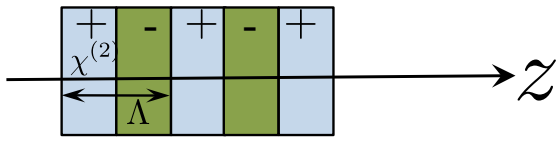

Figura 13. Periodically poled crystal. La combinación de materiales es periódica, con periodo Λ.

IV.2.1 Obtención de la función de empatamiento de fases para haces con estructura espacial.

Para haces de bombeo con perfil transversal diferente al de una onda plana como en la integral de ec. (16), definimos la función de empatamiento de fases para cualquier haz de bombeo como,

$$\Phi(\boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{k}_i) = \int_V d(x,y,z)\alpha(x,y,z)e^{-i(\boldsymbol{k}_s+\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{76}$$

donde $d(x,y,z)$ es la no linealidad del cristal, $\alpha(x,y,z)$ puede ser cualquier haz de bombeo y la integral se extiende sobre todo el volumen del cristal. Tomaremos siempre una no linealidad constante y dimensiones transversales del cristal grandes para contener todo el perfil transversal del haz de bombeo.

Consideremos ahora la geometría de la figura 7 del capítulo 3 para ondas gaussianas en dirección arbitraria que se propagan a lo largo del eje $z > 0$ de la forma,

$$u(\boldsymbol{r}) = e^{-i\frac{k_t^2}{2k}\frac{z}{\mu}}GB(\boldsymbol{r})e^{i\left(k_x\frac{x}{\mu(z)}+k_y\frac{y}{\mu(z)}\right)}, \tag{77}$$

cuyo vector de onda transversal tiene una proyección $k_t = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ en el plano transversal $z = 0$ (ver figura7) formando un ángulo azimutal $\phi = tan^{-1}(k_y/k_x)$.

Como ejemplo tomaremos los haces HzG, los cuales pueden ser realizados por medio de una superposición de estas ondas si los vectores de onda transversales k_t son re-

stringuidos a un único valor. Por lo tanto podemos describir al campo total $U(\boldsymbol{r})$ en un plano $z > 0$ como,

$$U(\boldsymbol{r}) = \int_{-\pi}^{\pi} A(\phi) u(\boldsymbol{r}) d\phi, \tag{78}$$

que tomando la transformada de Fourier de ec.(78), obtenemos

$$\mathfrak{F}\{U(\boldsymbol{r})\} = \int_{-\pi}^{\pi} A(\phi) \mathfrak{F}\{u(\boldsymbol{r})\} d\phi, \tag{79}$$

y separando ahora en componentes x, y y z, tenemos

$$\mathfrak{F}\{u(\boldsymbol{r})\} = \frac{e^{-i\frac{k_t^2}{2k}\frac{z}{\mu(z)}} e^{ikz}}{2\pi\mu(z)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{\mu(z)w_0^2} + i\left(\frac{k_x}{\mu(z)} - u\right)x} dx$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{\mu(z)w_0^2} + i\left(\frac{k_y}{\mu(z)} - v\right)y} dy. \tag{80}$$

Resolvemos las integraciones y ordenando términos obtenemos,

$$\mathfrak{F}\{u(\boldsymbol{r})\} = D(z) e^{-\frac{w_0^2 \mu(z)}{4}\xi^2} e^{\frac{w_0^2}{2}(k_x u + k_y v)}, \tag{81}$$

donde $\xi^2 = u^2 + v^2$ es la coordenada radial en el espacio de frecuencias espaciales, $k_t^2 = k_x^2 + k_y^2 = k sen\theta_o$, y

$$D(z) = \frac{w_0^2}{2} e^{-\frac{1}{4}w_0^2 k_t^2} e^{ikz}, \tag{82}$$

es un factor de amplitud que solo depende de la coordenada z. La ecuación (81) nos ayuda a resolver la integral en la función de empatamiento de fases. Sustituyendo ec.(81) en ec.(79) obtenemos el espectro angular $\aleph(u, v; z)$ del haz de bombeo HzG,

$$\aleph(u, v; z) = D(z) e^{-\frac{\mu(z)w_0^2}{4}\xi^2} \int_{-\pi}^{\pi} A(\phi) e^{\frac{1}{2}w_0^2(k_x u + k_y v)} d\phi. \tag{83}$$

La integral puede ser descrita como el perfil del haz libre de difracción ideal como,

$$W\left(\frac{w_0^2}{2i}u, \frac{w_0^2}{2i}v; k_t\right) = \int_{-\pi}^{\pi} A(\phi) e^{\frac{1}{2}w_0^2(k_x u + k_y v)} d\phi, \tag{84}$$

por lo que el espectro angular esta dado por,

$$\aleph(u,v;z) = D(z)e^{-\frac{\mu(z)w_0^2}{4}\xi^2} W\left(\frac{w_0^2}{2i}u, \frac{w_0^2}{2i}v; k_t\right). \tag{85}$$

Con este último resultado y las consideraciones al principio de esta sección, podemos realizar la integración de la ecuación (76). Esta la reescribimos como,

$$\Phi(\boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{k}_i) = d\int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_z z}dz \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,y,z)e^{-i(k_x x + k_y y)}dxdy, \tag{86}$$

donde $U(x,y,z)$ es cualquier haz de la familia HzG y se integra a lo largo de las dimensiones del cristal de longitud L en la componente z. La integral doble para las componentes transversales en (86), representan al espectro angular multiplicado por un factor de 2π en coordenadas de frecuencia espacial para modos señal y acompañante en un proceso SPDC. Las componetes del vector de onda estan definidas como:

$$k_j = k_{sj} + k_{ij}, \qquad j = x, y, z. \tag{87}$$

Tomando en cuenta que la componente radial en el espacio frecuencial para los modos señal y acompañante ahora es, $\xi^2 \to k_\perp^2 = (k_{sx}+k_{ix})^2 + (k_{sy}+k_{iy})^2$, sustituyendo ec. (85) en ec. (86) e integrando en coordenada z, obtenemos con $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_s + \boldsymbol{k}_i$,

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \pi d L w_0^2 e^{-\frac{w_0^2}{4}(k_t^2+k_\perp^2)} W\left(\frac{w_0^2}{2i}k_x, \frac{w_0^2}{2i}k_y; k_t\right) \text{sinc}\left[\frac{L}{2}\left(\frac{k_\perp^2}{2k} - \Delta k\right)\right], \tag{88}$$

donde $\Delta k = k - k_s - k_i$. Cuando $k_t \to 0$ en ec. (88), la función $W \to 1$ y la función de empatamiento de fases para un haz Gaussiano fundamental se recupera. También debido a que el argumento de la función W es imaginario el haz ya no se comporta como un haz libre de difracción ideal, mas que en cierto rango de la zona paraxial del eje de propagación (ver figura 6), donde la superposición de todos los haces gaussianos es efectiva en una distancia $z_{max} = w_0/sen\theta_o \approx w_0 k/k_t$.

Ahora necesitamos normalizar la función de empatamiento de fases para un caso realista, debido a las dimensiones finitas del cristal. Necesitamos encontrar la constante c de normalización de la siguiente ecuación:

$$|c|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |U(x,y)|^2 dxdy = 1,$$

donde $U(x,y)$ es un haz HzG en el plano $z = 0$. Sustituyendo ec.(49) con $z = 0$ en la última expresión y despejando c obtenemos,

$$c = \frac{1}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} W(x,y;k_t) \right|^2 \right)^{1/2}},$$

por lo que la función normalizada es,

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \pi d L w_0^2 e^{-\frac{w_0^2}{4}(k_t^2 + k_\perp^2)} \Xi(\boldsymbol{k}) \text{sinc} \left[\frac{L}{2} \left(\frac{k_\perp^2}{2k} - \Delta k \right) \right], \tag{89}$$

donde el perfil transversal es,

$$\Xi(\boldsymbol{k}) = \frac{W\left(\frac{w_0^2}{2i} k_x, \frac{w_0^2}{2i} k_y; k_t \right)}{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} W(x,y;k_t) \right|^2 \right)^{1/2}}, \tag{90}$$

donde $U(x,y,z=0;k_t) = e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} W(x,y;k_t)$. Para los haces paraxiales, el procedimiento es similar al utilizado para los haces HzG, y su función de empatamiento de fases normalizada es,

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \pi d L w_0^2 \Xi(\boldsymbol{k}) e^{-\frac{1}{4} w_0^2 k_\perp^2} \text{sinc} \left[\frac{L}{2} \left(\frac{k_\perp^2}{2k} - \Delta k \right) \right]. \tag{91}$$

Notemos que para para las expresiones (89) y (91) se obtuvo una parte constante, otra que depende del perfil transversal del haz de bombeo $\Xi(\boldsymbol{k})$ y una parte longitudinal dada por la función sinc. Fue posible está separación en componentes transversales y longitudinales, ya que la ecuación de Helmholtz es separable hasta en 11 sistemas

coordenados (Kalnins y Miller, 1976). Ahora también tenemos un desempatamiento de fases efectivo en el argumento de la función sinc, formado por una parte transversal y una parte longitudinal de la forma,

$$\Delta k_{eff} = \frac{k_{\perp}^2}{2k} - \Delta k = \frac{(k_{sx} + k_{ix})^2 + (k_{sy} + k_{iy})^2}{2k} - (k - k_{sz} - k_{iz}). \tag{92}$$

IV.2.2 Función de empatamiento de fases en el espacio de momentos. Marco de referencia en los planos de detección

La estructura espacial del estado de dos fotones se modifica por medio de efectos de walk-off y por una geometría no colineal en el arreglo experimental (Terriza *et al.*, 2005; Lanco *et al.*, 2006). La importancia de estos efectos dependen de los ángulos de propagación de las parejas de fotones y en el ancho del cristal no lineal. Consideramos un cristal uniaxial como BBO o $LiNbO_3$ en una configuración SPDC tipo I (eoo).

El cristal es iluminado por un haz de bombeo cuasimonocromático que se propaga en la dirección z (figura 14). Por simplicidad tomaremos en cuenta que los fotones generados se propagan en el plano (x, z) y no presentan walk-off espacial, mientras que el haz de bombeo puede presentarlo y lo tomaremos en cuenta más adelante. Para representar al estado de dos fotones en el marco de referencia de los planos de detección utilizamos las siguientes relaciones:

$$\mathbf{k}_s = q_{sx}\hat{\mathbf{x}}_1 + q_{sy}\hat{\mathbf{y}}_1 + q_{sz}\hat{\mathbf{z}}_1, \tag{93}$$

$$\mathbf{k}_i = q_{ix}\hat{\mathbf{x}}_2 + q_{iy}\hat{\mathbf{y}}_2 + q_{iz}\hat{\mathbf{z}}_2. \tag{94}$$

Los vectores unitarios en los sistemas de referencia para cada fotón se obtienen por medio de una transformación de coordenadas rotando un ángulo que por simplicidad

tomamos como, $\vartheta = \theta_s \approx \theta_i$ con respecto al eje z (ver figura 14),

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\mathbf{x}}cos\vartheta + \hat{\mathbf{z}}sen\vartheta, \qquad \hat{\mathbf{x}}_2 = \hat{\mathbf{x}}cos\vartheta - \hat{\mathbf{z}}sen\vartheta,$$

$$\hat{\mathbf{y}}_1 = \hat{\mathbf{y}}_2 = \hat{\mathbf{y}},$$

$$\hat{\mathbf{z}}_1 = -\hat{\mathbf{x}}sen\vartheta + \hat{\mathbf{z}}cos\vartheta, \qquad \hat{\mathbf{z}}_2 = \hat{\mathbf{x}}sen\vartheta + \hat{\mathbf{z}}cos\vartheta.$$

Las componentes de los vectores de onda en el marco de refencia de laboratorio están dados por el producto punto,

$$\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r} = (q_{sx}cos\vartheta - q_{sz}sen\vartheta)\, x + q_{sy}y + (q_{sx}sen\vartheta + q_{sz}cos\vartheta)\, z, \tag{95}$$

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = (q_{ix}cos\vartheta + q_{iz}sen\vartheta)\, x + q_{iy}y + (-q_{ix}sen\vartheta + q_{iz}cos\vartheta)\, z. \tag{96}$$

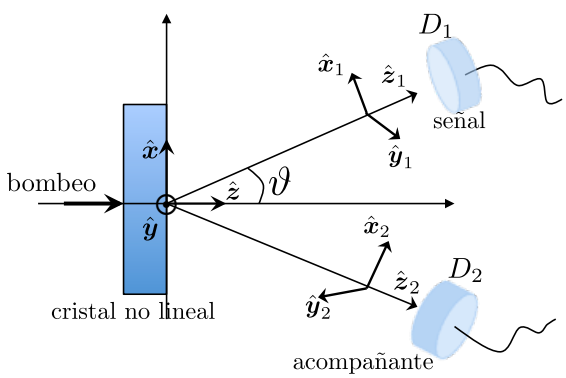

Figura 14. Marco de referencia de laboratorio para SPDC no colineal, con detectores señal D_1 y acompañante D_2.

Sumando ecuaciones (95) y (96), obtenemos para las componentes [1] x, y y z las siguientes relaciones,

$$k_x = k_{sx} + k_{ix} = q_{+x}cos\vartheta - q_{-z}sen\vartheta, \tag{97}$$

$$k_y = k_{sy} + k_{iy} = q_{+y}, \tag{98}$$

[1] Utilizamos la notación, $q_{\pm x} = q_{sx} \pm q_{ix}$ y $q_{\pm y} = q_{sy} \pm q_{iy}$.

$$k_z = k_{sz} + k_{iz} = q_{-x} sen\vartheta + q_{+z} cos\vartheta. \tag{99}$$

También necesitamos el jacobiano de la transformación para las dos integrales en vectores de onda $\boldsymbol{k}_s$ y $\boldsymbol{k}_i$, como es igual a uno para este caso entonces utilizamos,

$$\int d\boldsymbol{k}_s \int d\boldsymbol{k}_i \longrightarrow \int d\boldsymbol{q}_s \int d\boldsymbol{q}_i,$$

por lo que el estado de dos fotones en el sistema de referencia de los planos de detección podemos reescribirlo como,

$$|\psi\rangle_{\boldsymbol{q}} = |0\rangle + \kappa \int \int d\boldsymbol{q}_s d\boldsymbol{q}_i f_{\boldsymbol{q}} \left(\boldsymbol{q}_s, \boldsymbol{q}_i\right) \hat{a}^\dagger \left(\boldsymbol{q}_s\right) \hat{a}^\dagger \left(\boldsymbol{q}_i\right) |0\rangle \,, \tag{100}$$

donde,

$$f_{\boldsymbol{q}} \left(\boldsymbol{q}_s, \boldsymbol{q}_i\right) = \delta \left(\omega_p - \omega_s - \omega_i\right) g \left(q_{sz}\right) g \left(q_{iz}\right) \Phi \left(\boldsymbol{q}_s + \boldsymbol{q}_i\right), \tag{101}$$

y κ es una constante. La función de empatamiento de fases la podemos integrar de la siguiente manera,

$$\Phi \left(\boldsymbol{q}_s + \boldsymbol{q}_i\right) = d \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-L/2}^{L/2} \alpha \left(x, y, z\right) e^{-i(k_x)x} e^{-i(k_y)y} e^{i(k_z)z} dx dy dz. \tag{102}$$

Las componentes en vectores de onda para los argumentos de las funciones exponenciales de la ecuación (102), están dadas por expresiones (97), (98) y (99). Cuando el haz de bombeo $\alpha \left(x, y, z\right)$ es un haz de la familia Helmholtz Gauss (HzG) o haces paraxiales, la función de empatamiento de fases es

$$\Phi \left(\boldsymbol{q}_s + \boldsymbol{q}_i\right) = \sqrt{2\pi} d L w_0 e^{\frac{1}{8} k_{tp}^2 w_0^2} \Xi \left(\boldsymbol{q}_{s_\perp}, \boldsymbol{q}_{i_\perp}\right) e^{-\frac{1}{4} w_0^2 \left(q_\perp^2 + k_{tp}^2\right)} \text{sinc}[\frac{L}{2} \left(\Delta k_{eff}\right)], \tag{103}$$

y

$$\Phi \left(\boldsymbol{q}_s + \boldsymbol{q}_i\right) = \pi d L w_0^2 \Xi \left(\boldsymbol{q}_{s_\perp}, \boldsymbol{q}_{i_\perp}\right) e^{-\frac{1}{4} w_0^2 q_\perp^2} \text{sinc}[\frac{L}{2} \left(\Delta k_{eff}\right)], \tag{104}$$

respectivamente, donde $\Xi \left(\boldsymbol{q}_{s_\perp}, \boldsymbol{q}_{i_\perp}\right)$ es el espectro angular que depende del perfil transversal de cada haz en el marco de referencia de los detectores. En estas ecuaciones tenemos

una parte transversal y una parte longitudinal intrínseca debido a las ecuaciones de transformación (97) - (99). La parte transversal es,

$$q_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 = (q_{+x}cos\vartheta - q_{-z}sen\vartheta)^2 + q_{+y}^2, \tag{105}$$

y la parte longitudinal es,

$$\Delta k = k - (q_{-x}sen\vartheta + q_{+z}cos\vartheta)\,, \tag{106}$$

donde k_p es el número de onda del haz de bombeo. Ahora con ecuaciones (103) y (104) podemos obtener las correlaciones de parejas de fotones en grado de libertad de vector de onda transversal (q_{sx}, q_{iy}) haciendo uso de la aproximación paraxial para las componentes de $\boldsymbol{q}$. Si ahora consideramos un cristal con longitud considerable, de tal forma que el haz de bombeo sufre walk off espacial como se muestra en la figura 15, la ecuación (92) se modifica en su parte longitudinal como,

$$\Delta k = k - (k_{sz} + k_{iz}) + \boldsymbol{\delta} \cdot \boldsymbol{k}_{\perp}, \tag{107}$$

donde $\boldsymbol{\delta}$ es el vector desplazamiento cuya proyección tiene componentes,

$$\boldsymbol{\delta} = (tan\rho cos\varphi_0, tan\rho sen\varphi_0),$$

donde φ_0 es el ángulo azimutal de walk-off espacial (ver figura 16), y $\boldsymbol{k}_{\perp} = (k_{sx} + k_{ix}, k_{sy} + k_{iy})$

En ec. (107) tenemos la expresión mas general tomando en cuenta las ecuaciones de transformación. Tomemos como ejemplo un caso simple donde el ángulo de propagación polar ϑ (caso degenerado) es el mismo para las parejas de fotones, forman un ángulo azimutal $\varphi_i = \varphi_s + \pi$ y $\varphi_s \to \varphi$, en la aproximación paraxial para componentes q_{iz} y q_{sz}. Tomando también en cuenta que el desempatamiento de fases longitudinal $k -$

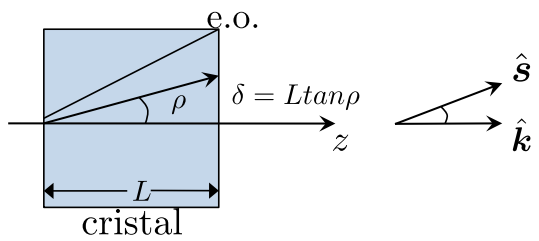

Figura 15. Ángulo de walk off ρ. El haz de bombeo al desplazarse por un material birrefringente hace que su vector de onda $\hat{\boldsymbol{k}}$ y su vector de poynting $\hat{\boldsymbol{s}}$ no sean paralelos, formando un ángulo ρ entre ellos.

$k_{sz}cos\vartheta_s - k_{iz}cos\vartheta_i = 0$ y transversal $k_{sz}sen\vartheta_s = -k_{iz}sen\vartheta_i$ sea satisfecho, obtenemos,

$$\Delta k = -q_{-x}sen\vartheta + \left(\frac{|q_s|^2}{2k_s} + \frac{|q_i|^2}{2k_i}\right) cos\vartheta +$$

$$\left\{\left[q_{-x}cos\vartheta + \left(\frac{|q_s|^2}{2k_s} + \frac{|q_i|^2}{2k_i}\right) sen\vartheta\right] cos(\varphi + \varphi_0) + q_{-y}sen(\varphi + \varphi_0)\right\} tan\rho. \qquad (108)$$

Esta relación es importante para el caso de configuraciones no colineales o un haz enfocado, donde el momento angular de spin y el momento angular orbital de las parejas de fotones dependen en gran medida de su dirección de propagación (Valencia *et al.*, 2007). La presencia del vector de walk off debido a la birrefringencia del cristal es también un factor importante en la estructura espacial del estado de dos fotones (Torres *et al.*, 2005a; Terriza *et al.*, 2005). Estas ecuaciones las utilizaremos en la sección 4.4 donde se estudian correlaciones en componentes de vector de onda transversal.

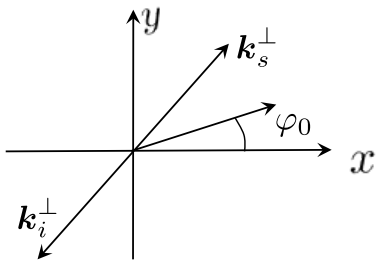

Figura 16. Geometría de ángulo azimutal φ_0 de walk-off espacial. Vectores de onda transversales para modo señal $\boldsymbol{k}_s^{\perp}$ y modo acompañante $\boldsymbol{k}_i^{\perp}$.

IV.3 Correlaciones y enredamiento cuántico

El proceso de conversión descendente resulta en la generación de parejas de fotones altamente correlacionadas constituyendo un estado cuántico enredado (Hong y Mandel, 1985; Rubin *et al.*, 1994; Klyshko, 1982). La conservación de la energía da correlaciones a cada componente espectral de la onda señal y una correspondiente acompañante. De forma similar, la conservación de momento (o empatamiento de fases) da coorelaciones entre parejas en su dirección de propagación. Como resultado de esto, las parejas de fotones tienen ciertas propiedades espacio temporales en correlación que podemos representar por medio de sus ángulos de emisión y tiempos de emisión. Estas han sido demostradas (Joobeur *et al.*, 1994) con efectos de coherencia y experimentos en violaciones de desigualdades de Bell (Ou y Mandel, 1988). Como veremos más adelante, estas correlaciones se modifican en gran medida por el ancho de banda del haz de bombeo, su perfil transversal y la longitud del cristal. Primero daremos un resumen de trabajos previos sobre estas correlaciones y posteriormente demostraremos como se modifican las correlaciones con haces de bombeo mas exóticos en el regimen espacial y de momento transversal.

IV.3.1 Propiedades espacio temporales en parejas de fotones generadas por SPDC

Los haces señal y acompañante tiene espectros que varían con la dirección de propagación, formando anillos cuyos ángulos y tiempo de coherencia son dependientes también de la dirección, por lo que estos haces no son espectralmente puros en primer orden

(Saleh, 1978).[2] Como sabemos, la función de coherencia de 2do. orden (44) determina la tasa de coincidencias entre modos señal y acompañante como función de su retraso en tiempos y direcciones de propagación, por lo tanto gobierna el grado de enredamiento espacio-temporal entre fotones. Los ángulos y tiempos de enredamiento que representan anchos angular y temporal de la función de segundo orden de coherencia también son dependientes de la dirección.

El caso ideal es el escenario de una onda plana monocromática interactuando con un cristal no lineal infinitamente largo. La conservación de energía y momento para este caso restringen a la luz de baja conversión a que sea monocromática en cada dirección. Cada dirección o rayo señal tiene una y sólo una sola dirección acompañante que empata a la señal, por lo tanto el ángulo de enredamiento es cero en cualquier otra parte y la tasa de coincidencias en direcciones empatadas es independiente del retraso en el tiempo, el tiempo de enredamiento es infinito.

Para el caso no ideal el cristal es de longitud finita y en general se cumple que:

-Cuando el haz de bombeo presenta ancho espectral, el empatamiento en energía es más flexible. Como resultado el modo señal ya no es monocromático y está enredado con fotones acompañantes en un sector de ángulos finitos en la direción polar (Joobeur *et al.*, 1994).

[2]sí el grado de coherencia puede ser separado en un producto de componentes dependientes solo en coordenadas espaciales y otra solo en tiempos de retraso, muchos problemas en teoría de coherencia se simplifican. Esta propiedad puede expresarse en el dominio espectral, por lo que son espectralmente puros.

-Cuando el haz de bombeo es una onda plana, el ángulo de enredamiento en la dirección azimutal φ_s^e es cero y el tiempo de enredamiento es infinito (Joobeur *et al.*, 1994, 1996).

-Cuando el bombeo tiene ancho transversal finito, el vector de onda de bombeo ocupa un cono de ángulo finito de tal manera que la conservación de momento en la dirección transversal puede ser satisfecha en más de una manera. Esto afecta a los ángulos de coherencia y enredamiento, resultando en un ángulo azimutal de enredamiento no cero así como un tiempo de enredamiento finito.

Cada vector de onda $\boldsymbol{k}_j$ con $j = s, i$ contiene información acerca de la frecuencia y dirección de propagación para el fotón j que podemos representar como,

$$\boldsymbol{k}_j(\omega_j, \theta_j, \varphi_j) = \frac{n_j(\omega_j, \theta_j, \varphi_j)\omega_j}{c}(sen\theta_j cos\varphi_j, sen\theta_j sen\varphi_j, cos\theta_j), \tag{109}$$

donde θ_j es el ángulo polar, φ_j es el ángulo azimutal y ω_j es la frecuencia angular.

Se puede expresar a la función de amplitud conjunta como una función de 6 argumentos,

$$f(\boldsymbol{k}_s, \boldsymbol{k}_i) \rightarrow f(\omega_s, \theta_s, \varphi_s, \omega_i, \theta_i, \varphi_i),$$

y es conveniente seleccionar vectores de onda centrales $\boldsymbol{k}_s^0$ y $\boldsymbol{k}_i^0$ que sean empatados en frecuencia y fase para los vectores de onda centrales del bombeo $\boldsymbol{k}_p^0 = k_p^0\hat{z}$, además de tomar los vectores de onda $\boldsymbol{k}_s^0$ y $\boldsymbol{k}_i^0$ en el plano $x - z$. Estos vectores de onda se determinan por sus ángulos azimutales $\varphi_s = 0$ y $\varphi_i = \pi$, ángulos polares θ_s y θ_i y frecuencias centrales ω_s^0 y ω_i^0 que se muestran en la figura 17.

Para obtener el estado de dos fotones adecuado en esta representación, se expanden los vectores de onda $\boldsymbol{k}_s$ y $\boldsymbol{k}_i$ a primer orden en frecuencia y en desviaciones angulares de sus valores centrales (Joobeur *et al.*, 1996), y el estado cuántico para SPDC tipo I (eoo) puede escribirse en esta representación como

$$|\zeta\rangle = \int d\omega_s d\theta_s d\varphi_s \int d\omega_i d\theta_i d\varphi_i f(\omega_s, \theta_s, \varphi_s, \omega_i, \theta_i, \varphi_i)|\omega_s, \theta_s, \varphi_s\rangle_s |\omega_i, \theta_i, \varphi_i\rangle_i. \quad (110)$$

donde,

$$f(\omega_s, \theta_s, \varphi_s, \omega_i, \theta_i, \varphi_i) = NA(\omega_s + \omega_i)B(\boldsymbol{k}_s^{\perp}, \boldsymbol{k}_i^{\perp})\text{sinc}\left(\frac{L}{2}\Delta_{keff}\right), \quad (111)$$

donde la susceptibilidad de segundo orden y el jacobiano que se utilizan para transformar de dk^3 a $d\omega d\theta d\varphi$ se toman como funciones que cambian lentamente en comparación con el resto de la función y son incluidos en la constante de normalización N, $A(\omega_s+\omega_i)$ es la distribución espectral del haz de bombeo, el cual se considera lo suficientemente pequeño para que la distribución espacial en el plano transversal sea independiente de la frecuencia, y $B(\boldsymbol{k}_s^{\perp}, \boldsymbol{k}_i^{\perp})$ es la transformada de Fourier de la distribución de amplitud del haz de bombeo. Por lo tanto la ecuación (111) es el producto de 3 funciones que representan los efectos del ancho espectral del bombeo, el ancho transversal del haz de bombeo y la longitud del cristal.

La función $f(\omega_s, \theta_s, \varphi_s, \omega_i, \theta_i, \varphi_i)$ puede exhibir varios tipos de correlaciones. Estas correlaciones pueden existir entre variables para el mismo fotón (correlaciones internas), así como para variables correspondientes a diferentes fotones (correlaciones externas). La interpretación física es que para cierto filtro actuando en las componentes x para fotón señal nos da una proyección no local en la variable y para el fotón acompañante o viceversa. Por ejemplo el ángulo polar de enredamiento θ_s^e y el tiempo de enredamiento

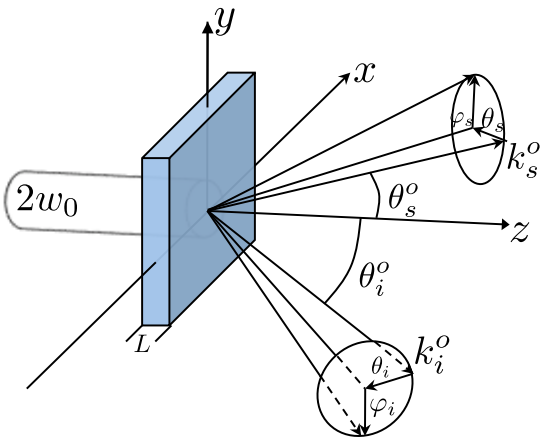

Figura 17. Geometría para SPDC no colineal.

τ^e dependen de una manera complicada en el ancho de banda del haz de bombeo, $\Delta\omega_p$, del ancho del haz de bombeo w y de la longitud del cristal L (Joobeur *et al.*, 1994, 1996).

Mediante el uso de la función de correlación de segundo orden (41), las propiedades espacio-temporales de las parejas de fotones pueden resumirse en los siguientes puntos:

- El ángulo de enredamiento azimutal φ_s^e depende inversamente proporcional al ancho w.
- El ángulo polar de enredamiento θ_s^e depende en general de $\Delta\omega_p$, w y L. Para un arreglo SPDC I no colineal y degenerado depende solamente de L, $\Delta\omega_p$ y es independiente de w.
- La dependencia del ángulo polar de enredamiento θ_s^e en L es similar a la dependencia de φ_s^e en w; ambos disminuyen cuando L o w se reducen.
- El ángulo θ_s^e es controlado por la longitud L, aumenta para L pequeños y disminuye para L grandes. Esto es posible cuando el haz de bombeo tiene $\Delta\omega_p$ pequeño (cuasimonocromático).

- El ancho de banda $\Delta\omega_p$ tiene efecto en θ_s^e en valores grandes ($\Delta\omega_p > 10^-4\omega_p^o$). Se hace muy grande el valor de θ_s^e.

- El tiempo de enredamiento $\tau^e \to 0$ cuando $w \to 0$ y $\tau^e \to \infty$ cuando $w \to \infty$. No depende de la longitud del cristal L.

- El ancho $\Delta\omega_p$ no tiene efecto en τ^e (Friberg *et al.*, 1985).

IV.3.2 Correlaciones polar-azimutal con haces de bombeo estructurado

Las correlaciones espacio temporales de las parejas de fotones han sido estudiadas para haces de bombeo con ancho de banda finito, y con cierta sección transversal, que ahora extendemos en nuestro estudio para haces de bombeo con estructura espacial. La función de amplitud conjunta la podemos escribir, para este tipo de haces de bombeo como

$$f(\omega_s, \theta_s, \varphi_s, \omega_i, \theta_i, \varphi_i) = NA(\omega_s + \omega_i)\Xi(\boldsymbol{k}_s^\perp, \boldsymbol{k}_i^\perp)\text{sinc}\left(\frac{L}{2}\Delta_{keff}\right), \tag{112}$$

donde la forma de la función $\Xi(\boldsymbol{k}_s^\perp, \boldsymbol{k}_i^\perp)$ es el espectro angular del haz de bombeo que ahora depende de la estructura del perfil transversal del haz. Para el caso de estas variables continuas espaciales podremos tener correlaciones entre las variables de desintonía y mostramos un diagrama en la figura 18.

Al variar parámetros experimentales podemos modificar las correlaciones en las diferentes variables para las parejas de fotones generadas, y es notorio cuando se modifica la longitud del cristal y se altera la cintura del haz de bombeo o su perfil transversal. En la figura 19 mostramos el efecto en la longitud del cristal, donde graficamos para dar mas claridad, la parte longitudinal, la parte transversal y su producto en correlaciones

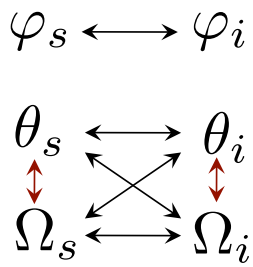

Figura 18. Diagrama de correlaciones espaciales. Existen correlaciones entre variables en desintonía de ángulo polar θ_j y espectrales Ω_j para $j = s, i$. Cuando el haz de bombeo siente walk off las correlaciones espectrales-polares se acoplan con las de ángulo azimutal φ_j.

polares dada por la función de empatamiento de fases. Utilizamos las ecuaciones de Sellmeier (Yee *et al.*, 1987) para la dispersión en un cristal KTP con haz de bombeo Gaussiano cuyo ancho de cintura $w_0 = 50\mu m$, longitud de onda de bombeo $\lambda_p = 0.4\mu m$, longitudes de onda señal y acompañate, $\lambda_s = \lambda_i = 0.80\mu m$, ángulos de propagación $\theta_s^o = 3^o$, $\theta_i^o = -3^o$ respectivamente, ángulos azimutales $\varphi_s = 0^o$, $\varphi_i = \pi$, sin walk-off espacial y solo variamos la longitud del cristal L.

Como se aprecia en la figura 19 (2), la función sinc que es la parte longitudinal se hace muy delgada para una longitud del cristal grande, y para un cristal infinitamente largo tendríamos una correlación perfecta. De lo contrario estas se atenúan cuando tenemos un cristal delgado y no variamos la cintura del haz de bombeo w_0 como se muestra en la figura 19 (1).

En la figura 20 mostramos el efecto del perfil transversal del haz de bombeo cuando tenemos un haz Bessel Gauss de orden 2. Para el haz Gaussiano con ancho de cintura $w_0 = 23\mu m$, longitud del cristal KTP $L = 1mm$, ángulos de propagación $\theta_s^0 = 3^o$, $\theta_i^0 = -3^o$, sin walk-off espacial y mismas longitudes de onda que en el caso anterior. El haz Bessel Gauss tiene los mismos parámetros que el Gaussiano, es de orden $m = 2$ y

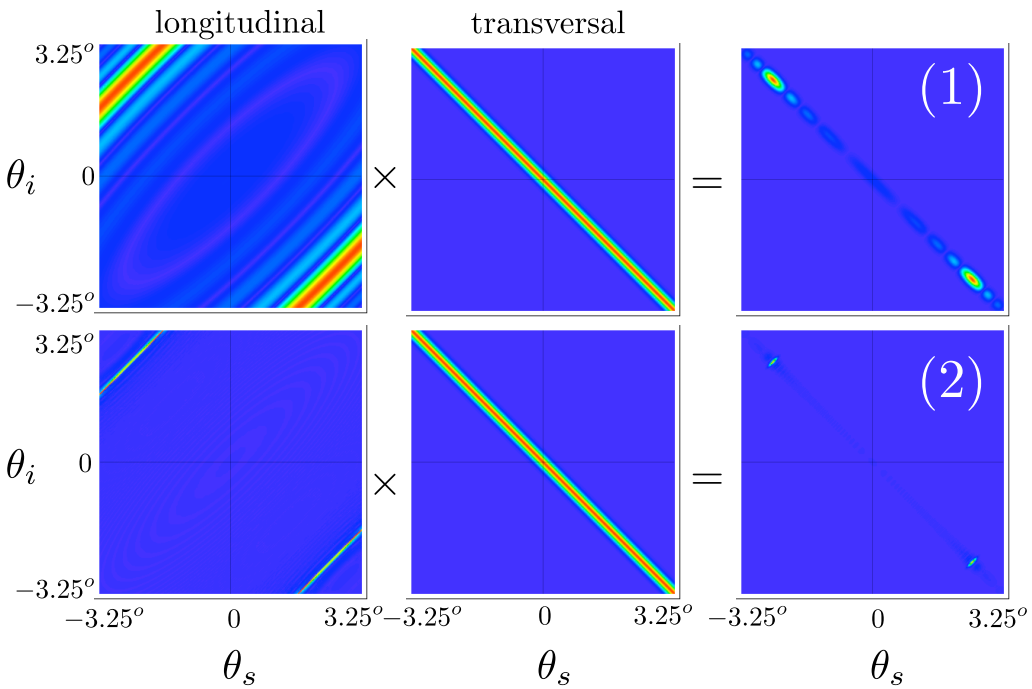

Figura 19. Correlaciones espaciales en ángulo polar variando la longitud del cristal L. (1)$L = 1mm$, (2)$L = 15mm$.

tiene un ángulo de haz de bombeo que define al anillo del espectro angular de $\theta_p = 0.5^o$. Con estos parámetros logramos obtener un estado factorizable en ángulos polares. El haz de bombeo BG modifica la parte transversal de estas correlaciones teniendo dos barras de anticorrelación en vez de una como en el caso Gaussiano. El grosor de estas barras muestran sí las correlaciones son débiles cuando son anchas o fuertes si son delgadas, y se controlan en la parte longitudinal por $1/L$ y en la parte transversal por $1/w_0$.

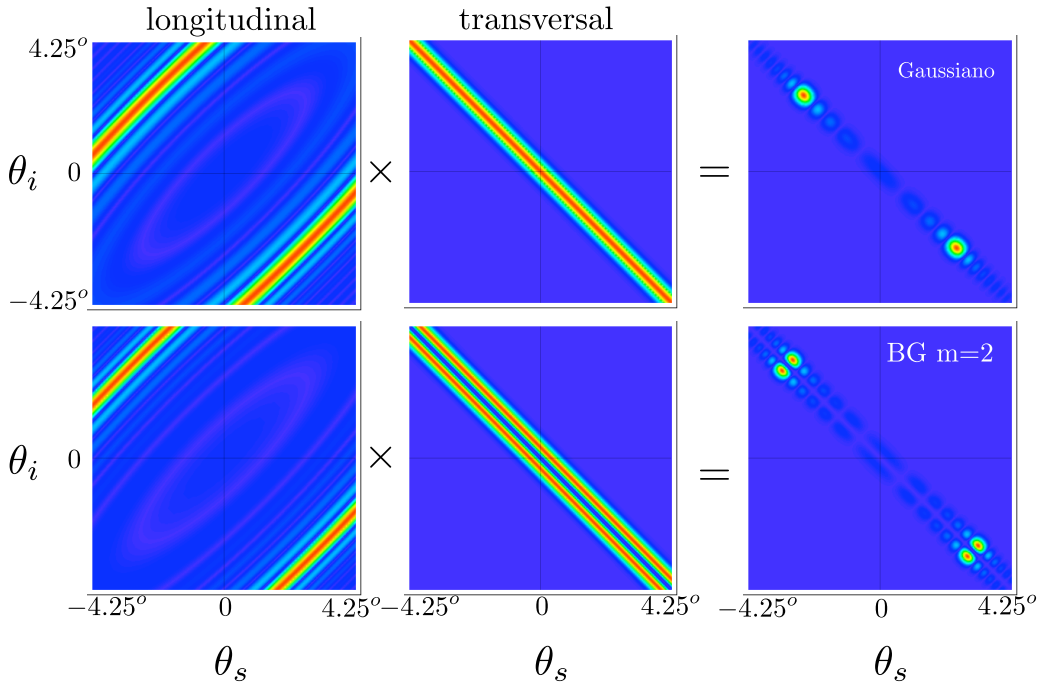

Figura 20. Correlaciones espaciales en ángulo polar modificando el perfil transversal del haz de bombeo.

IV.4 Correlaciones en el espacio de momento transversal con haces de bombeo estructurado

Para un haz monocromático podemos estudiar las correlaciones en el espacio de momentos $\boldsymbol{q}$, con la función de amplitud conjunta (101) y (102), tomando en cuenta todo el desempatamiento de fases Δk_{eff} obtenemos correlaciones en compontes de este vector como se muestra en el diagrama 21, que como mas adelante veremos hay similitud entre las correlaciones en variables polares azimutales y componentes x y y de $\boldsymbol{q}$.

Para los haces de bombeo HzG sabemos que su espectro angular se encuentra localizado en un anillo. Dependiendo de su espectro angular obtenemos un haz con diferente estructura espacial, y podríamos generar una infinidad de combinaciones. En

esta sección mostrarémos solo algunos ejemplos para haces comúnmente utilizados en la práctica y sus respectivas correlaciones.

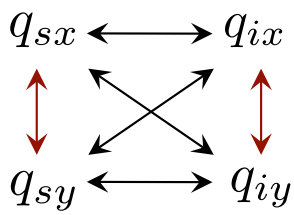

Figura 21. Diagrama de correlaciones en momento transversal $\boldsymbol{q}$.

IV.4.1 Haz de bombeo Gaussiano inclinado

Para un haz Gaussiano inclinado el espectro angular está localizado en un punto sobre el anillo y es de la forma,

$$A(\phi) = \delta(\phi - \phi_0). \tag{113}$$

Al integrar la función [3] W con $\mu = 1$ obtenemos,

$$W(x, y; k_t) = e^{ik_t(xcos\phi_0 + ysen\phi_0)}, \tag{114}$$

que al hacer el cambio de variables obtenemos,

$$W\left(\frac{w_0^2}{2i}k_x, \frac{w_0^2}{2i}k_y; k_t\right) = e^{\frac{1}{2}w_0^2 k_t(k_x cos\phi_0 + k_y sen\phi_0)}. \tag{115}$$

Con la expresión (114) podemos calcular la constante de normalización y la expresión (115) nos representa el perfil transversal del haz de bombeo en el espacio de momentos $\boldsymbol{k}$. Notemos que las compontes de $\boldsymbol{k}$ se relacionan con las componentes de $\boldsymbol{q}$ por las relaciones (97)-(99). Resolviendo la integral doble,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} dxdy = \frac{\pi}{2}w_0^2,$$

[3] $k_x = k_t cos\phi$ y $k_y = k_t sen\phi$

la constante de normalización es,

$$c = \frac{1}{w_0\sqrt{\pi/2}}.$$

El perfil transversal para este caso es entonces,

$$\Xi(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{w_0\sqrt{\pi/2}} e^{\frac{1}{2}w_0^2 k_t(k_x cos\phi_0 + k_y sen\phi_0)}, \tag{116}$$

y su función de empatamiento de fases,

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \sqrt{2\pi} dL w_0 e^{-\frac{w_0^2}{4}(k_t^2+k_\perp^2)} e^{\frac{1}{2}w_0^2 k_t(k_x cos\phi_0 + k_y sen\phi_0)} \text{sinc}\left[\frac{L}{2}\left(\frac{k_\perp^2}{2k} - \Delta k\right)\right]. \tag{117}$$

Notemos que para un haz Gaussiano el vector de onda transversal $\boldsymbol{k}_t = 0$ obtenemos la forma conocida,

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \sqrt{2\pi} dL w_0 e^{-\frac{w_0^2}{4}k_\perp^2} \text{sinc}\left[\frac{L}{2}\left(\frac{k_\perp^2}{2k} - \Delta k\right)\right]. \tag{118}$$

En la figura 24 mostramos las correlaciones en las componentes de momento transversal para un haz Gaussiano en un cristal KTP. Gráficamos las correlaciones externas con y sin walk-off espacial. Utilizamos longitudes de onda $\lambda_s = \lambda_i = 0.80\mu m$ de fotón señal y acompañante, longitud de onda de bombeo de $\lambda_p = 0.4\mu m$, un cristal de $L = 10mm$ de longitud, ángulos de propagación $\theta_s^0 = 1^o$ y $\theta_i^0 = -1^o$, ángulos azimutales $\varphi_s^0 = 0^o$, $\varphi_i^o = \pi$; un ángulo de walk-off para el haz de bombeo de $\rho = 0.7^o$ y ángulo azimutal $\varphi_0 = 90^o$, anchos de cintura de haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$ y $w_0 = 200\mu m$.

Observamos que para un haz de bombeo Gaussiano y considerando que no presenta walk-off espacial en el panel superior izquierdo ($G1$) de la figura 24, tenemos un rango de correlaciones positivas para componentes $q_{sx} - q_{ix}$, anticorrelaciones en componentes $q_{sy} - q_{iy}$ y sin correlación en las dos gráficas inferiores de ($G1$). Cuando el haz de bombeo sufre walk-off espacial en el panel superior derecho ($G2$) las correlaciones en las gráficas

inferiores se activan y para las componentes $q_{sy} - q_{iy}$ cambia de ser una correlación negativa en el panel $(G1)$ a ser una correlación positiva. Esto está relacionado con el vector de walk-off cuya orientación de ángulo azimutal es de $\varphi_0 = 90^o$ que tomamos en cuenta como ejemplo (ver figura16). Debido a esto las correlaciones en componentes $q_{sx} - q_{ix}$ no se alteran. En el panel inferior $(G3)$ con la misma magnitud de walk-off espacial, solo aumentamos el ancho de la cintura del haz de bombeo y obtenemos anticorrelación en las dos gráficas superiores y estados factorizables en las dos gráficas inferiores.

IV.4.2 Haz de bombeo Coseno Gauss (CG)

El haz CG resulta de la superposición de dos ondas planas y se puede reproducir fácilmente en laboratorio con un experimento de Young. Si su espectro angular está localizado por dos puntos en el anillo frecuencial,

$$A(\phi) = \frac{1}{2}\delta(\phi - \pi/2) + \frac{1}{2}\delta(\phi + \pi/2), \tag{119}$$

obtenemos después de realizar el mismo procedimiento matemático que para el caso Gaussiano, la función de empatamiento de fases para estos haces dada por,

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \sqrt{2\pi} dLw_0 \frac{e^{-\frac{w_0^2}{4}(k_t^2+k_\perp^2)}}{\sqrt{cosh(\frac{1}{2}w_0^2k_t^2)}} cosh\left(\frac{1}{2}k_t w_0^2 k_y\right) \text{sinc}\left[\frac{L}{2}\left(\frac{k_\perp^2}{2k} - \Delta k\right)\right]. \tag{120}$$

Para este haz utilizamos los mismos parámetros que en el caso Gaussiano para diferenciar las correlaciones con este haz de bombeo, mostramos los resultados en figuras 25. A diferencia del haz Gaussiano, el panel superior izquierdo $(CG1)$ presenta anticorrelación para las gráficas superiores y ausencia de correlación para las gráficas inferiores. Notemos que para todos los casos no hay correlaciones en las gráficas inferiores de los tres paneles. Para el panel $(CG2)$ y $(CG3)$ las correlaciones en componentes

$q_{sy} - q_{iy}$ son similares a las del haz Gaussiano.

IV.4.3 Haz de bombeo Bessel Gauss (BG)

Para un haz cuyo espectro angular es constante, hagamos a $A = 1/2\pi$, calculamos la integral,

$$W(x, y; k_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik_t(xcos\phi + ysen\phi)} d\phi, \tag{121}$$

con el cambio a variables polares, $x = rcos\theta$ y $y = rsen\theta$ obtenemos,

$$W(x, y; k_t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik_t rcos(\phi-\theta)} d\phi, \tag{122}$$

esta función se integra por medio de las transformadas integrales para funciones Bessel. Con el resultado,

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{2\pi+\alpha} e^{in\beta - izsen\beta} d\phi, \tag{123}$$

donde α es cualquier ángulo. Notando que $cos(\phi - \theta) = sen(\phi - \theta + \pi/2)$ y haciendo a $\beta = \phi - \theta + \pi/2$ en la integral (122) obtenemos,

$$W(x, y; k_t) = J_0(k_t r), \tag{124}$$

donde $J_0(k_t r)$ es la función Bessel de orden cero y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Haciendo el cambio de variables,

$$W\left(\frac{w_0^2}{2i}k_x, \frac{w_0^2}{2i}k_y; k_t\right) = J_0\left(k_t \frac{w_0^2}{2i}k_\perp\right) = I_0\left(\frac{1}{2}k_t w_0^2 k_\perp\right), \tag{125}$$

donde $I_0(\cdot)$ es la función modificada de Bessel de orden cero. Ahora la integral a resolver es,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| J_0(k_t r) e^{-\frac{r^2}{w_0^2}} \right|^2 dxdy \rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} J_0^2(k_t r) e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} rdrd\phi, \tag{126}$$

que podemos resolver utilizando el resultado (Watson, 1966),

$$\int_0^{\infty} e^{-p^2t^2} J_\nu(at) J_\nu(bt) tdt = \frac{1}{2p^2} e^{-\frac{a^2+b^2}{4p^2}} I_\nu\left(\frac{ab}{2p^2}\right). \tag{127}$$

Por lo tanto, utilizando (127) en (126),

$$\int_0^\infty e^{-\frac{2r^2}{w_0^2}} J_0(k_t r) J_0(k_t r) r dr = \frac{1}{4} w_0^2 e^{-\frac{1}{4}k_t^2 w_0^2} I_0\left(\frac{1}{4}k_t^2 w_0^2\right),$$

y así obtenemos la función de empatamiento de fases para un haz Bessel Gauss orden cero,

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \sqrt{2\pi} d L w_0 e^{-\frac{w_0^2}{4}(k_t^2+k_\perp^2)} \frac{e^{\frac{1}{8}k_t^2 w_0^2}}{\sqrt{I_0(\frac{1}{4}k_t^2 w_0^2)}} I_0\left(\frac{1}{2}k_t w_0^2 k_\perp\right) \operatorname{sinc}\left[\frac{L}{2}\left(\frac{k_\perp^2}{2k} - \Delta k\right)\right]. \tag{128}$$

Para un haz de bombeo BG de orden m la función (128) es ahora,

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \sqrt{2\pi} d L w_0 e^{-\frac{w_0^2}{4}(k_t^2+k_\perp^2)} \frac{e^{\frac{1}{8}k_t^2 w_0^2} e^{im(\theta-\pi/2)}}{\sqrt{I_m(\frac{1}{4}k_t^2 w_0^2)}} I_m\left(\frac{1}{2}k_t w_0^2 k_\perp\right) \operatorname{sinc}\left[\frac{L}{2}\left(\frac{k_\perp^2}{2k} - \Delta k\right)\right], \tag{129}$$

donde $I_m(\cdot)$ es la función modificada de Bessel de orden m.

Mostramos los resultados numéricos en la figura 26 para un haz BG de orden $m = 2$. En la figura 22 vemos la separación que sufren las correlaciones en momento transversal $q_{sx} - q_{ix}$ cuando el haz de bombeo es de orden superior al cero. Para el orden $m = 0$ la correlación es análoga al haz gaussiano y conforme aumentamos el orden la separación incrementa, y está relacionado con la mancha central obscura del haz Bessel.

Para la figura 26 las correlaciones se *parten* en dos lóbulos. Los ensanchamientos debido al efecto de walk-off espacial son similares a los casos anteriores pero ahora en dos partes haciendo las correlaciones mas excéntricas. En las gráficas del panel inferior ($BG3$) tenemos algo similar a un anillo.

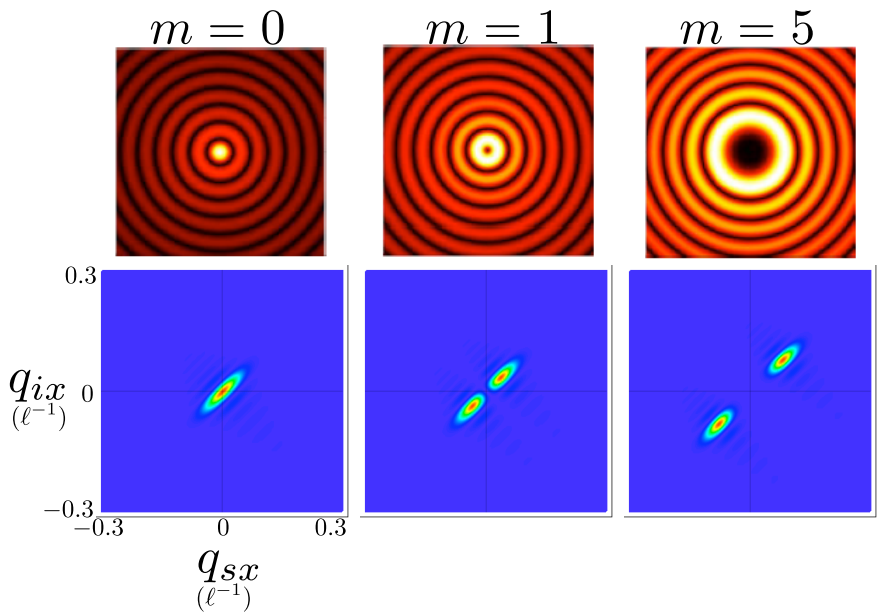

Figura 22. Haz BG de bombeo de diferentes ordenes m y sus correlaciones en componentes de momento transversal. En la parte superior se muestra la estructura espacial del haz BG y en la parte inferior la correlación en componentes $q_{sx} - q_{ix}$.

IV.4.4 Haz de bombeo Hermite Gauss (HG)

Tomaremos de la familia de los haces paraxiales, a los haces Hermite Gauss, los cuales son solución a la ecuación de onda paraxial en coordenadas cartesianas. Su función de empatamiento de fases es,

$$\Phi(\boldsymbol{k}) = \pi d L w_0 \left(\frac{1}{2^{n_x+n_y-1}\pi n_x! n_y!} \right)^{1/2} (-i)^{n_x+n_y} H_{n_x}\left(\frac{w_0}{\sqrt{2}}k_x\right) H_{n_y}\left(\frac{w_0}{\sqrt{2}}k_y\right) \times \mathrm{sinc}\left[\frac{L}{2}\left(\frac{k_\perp^2}{2k} - \Delta k\right)\right], \tag{130}$$

donde las funciones $H(\cdot)$ son los polinomios de Hermite de orden n.

Mostramos las correlaciones para estos haces de bombeo en la figura 27 para un haz HG(2,2) ($n_x = 2, n_y = 2$). Para estas gráficas el número en orden que corresponde al haz de bombeo es el número de nodos (zonas obscuras) que vemos en las gráficas en las correspondientes direcciones x ó y, $(q_{sx} - q_{ix})$ ó $(q_{sy} - q_{iy})$ respectivamente. En el

último panel ($HG3$) las gráficas inferiores nos dan reminiscencia del perfil en intensidad del haz de bombeo.

En la figura 23 mostramos la estructura que se obtiene en correlaciones q con dos haces de bombeo HG de diferente orden. El número de nodos de los haces de bombeo en sus componentes x y y, son los nodos que presentan las correlaciones en sus componentes de momento transversal respectivos.

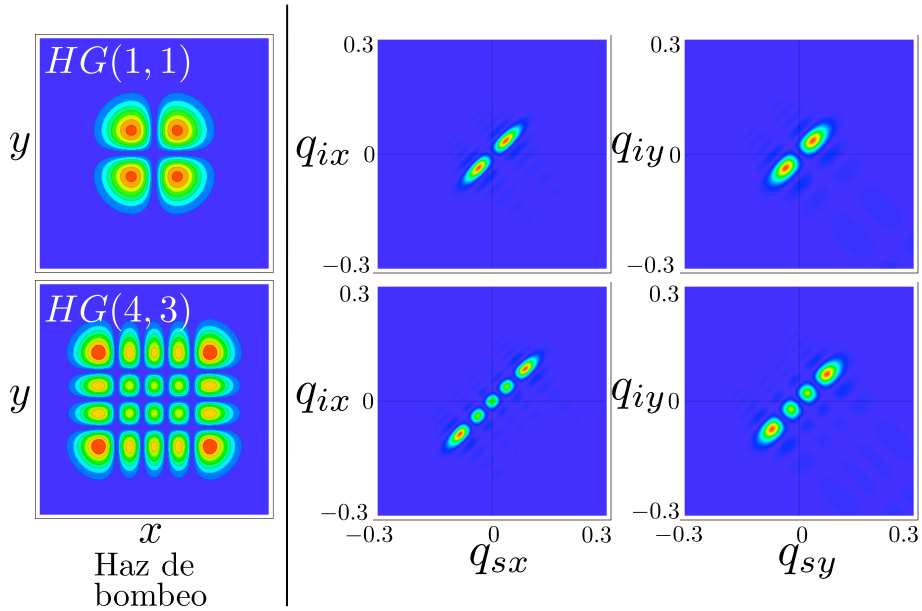

Figura 23. Haz de bombeo HG. Las correlaciones en componentes x y y's de momento transversal.

En resumen, en este capítulo analizamos los grados de libertad en frecuencia y momento transversal en el estado cuántico de dos fotones que en general no puede ser factorizado y se dice que presenta un enredamiento multi-parámetros, el estado es enredado en componentes ω y $\boldsymbol{q}$ en general. El diagrama 21 es el análogo del diagrama 18 para ángulos polares (q_{sx}, q_{ix}) y azimutales (q_{sy}, q_{iy}), donde las correlaciones entre ángulos polares y azimutales (entre componentes x y y para foton señal y acompañante)

se activan cuando el ángulo de walk-off espacial es diferente de cero. Otro resultado interesante es el parecido de estas correlaciones en la estructura espacial del haz de bombeo en el caso de haces HG, y el parecido con el espectro angular en el caso de los haces BG de orden superior.

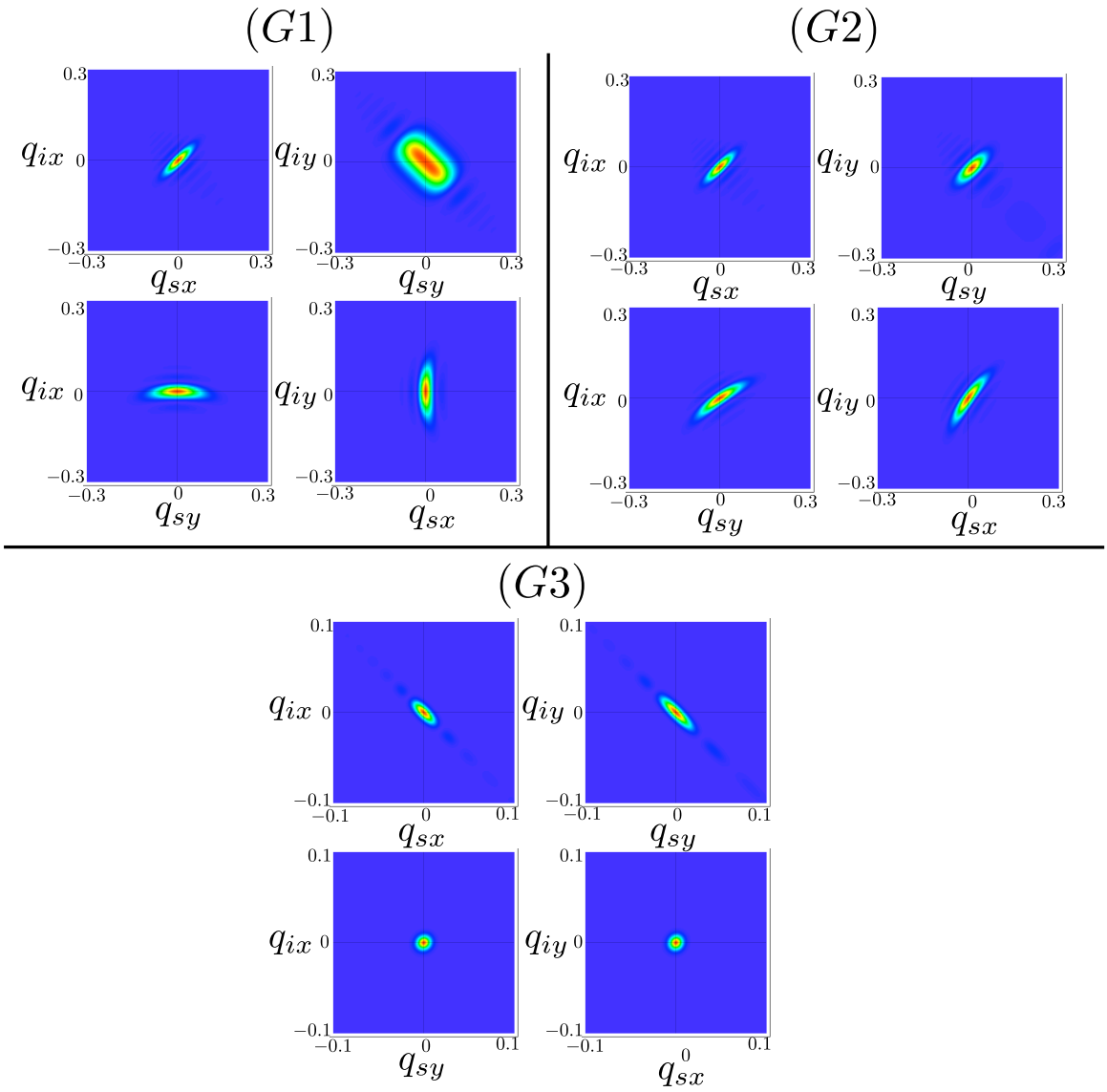

Figura 24. Gráficas de correlaciones externas en componentes de momento transversal para un haz gaussiano de bombeo. (G1) Sin walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (G2) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (G3) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 200\mu m$.

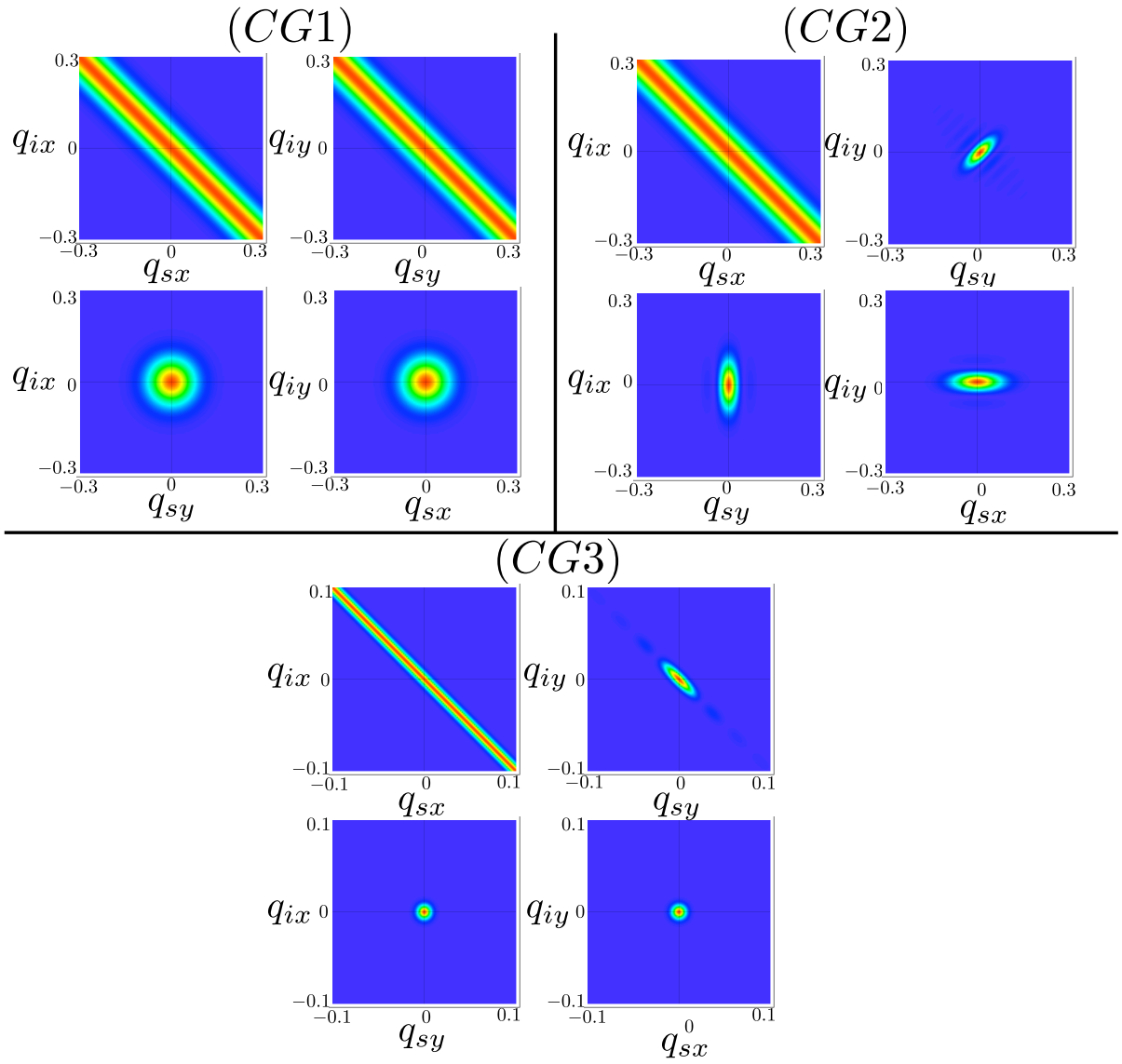

Figura 25. Gráficas de correlaciones externas en componentes de momento transversal para un haz CG de bombeo. (CG1) Sin walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (CG2) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (CG3) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 200\mu m$.

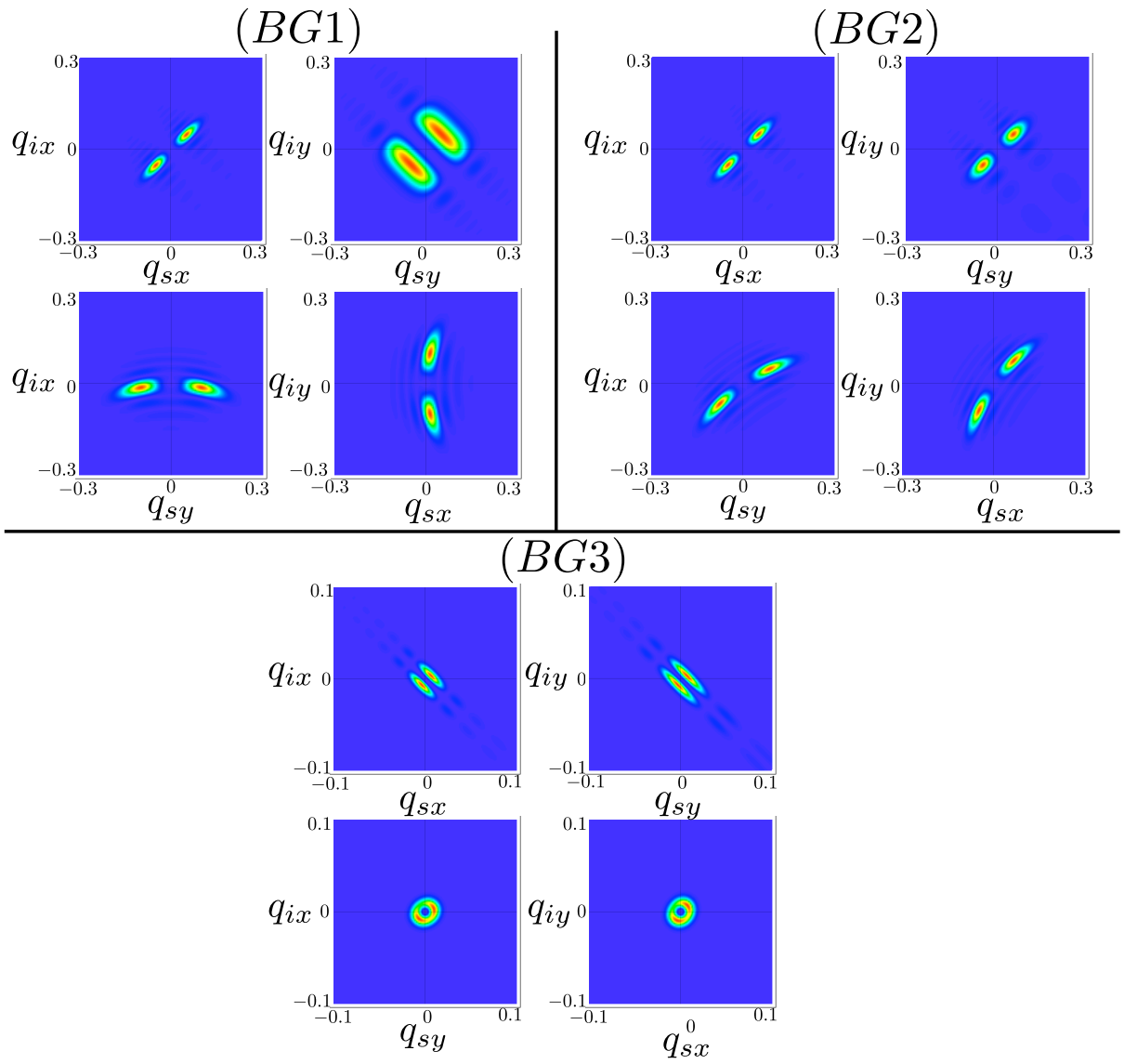

Figura 26. Gráficas de correlaciones externas en componentes de momento transversal para un haz BG $m = 2$ de bombeo. (BG1) Sin walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (BG2) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (BG3) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 200\mu m$.

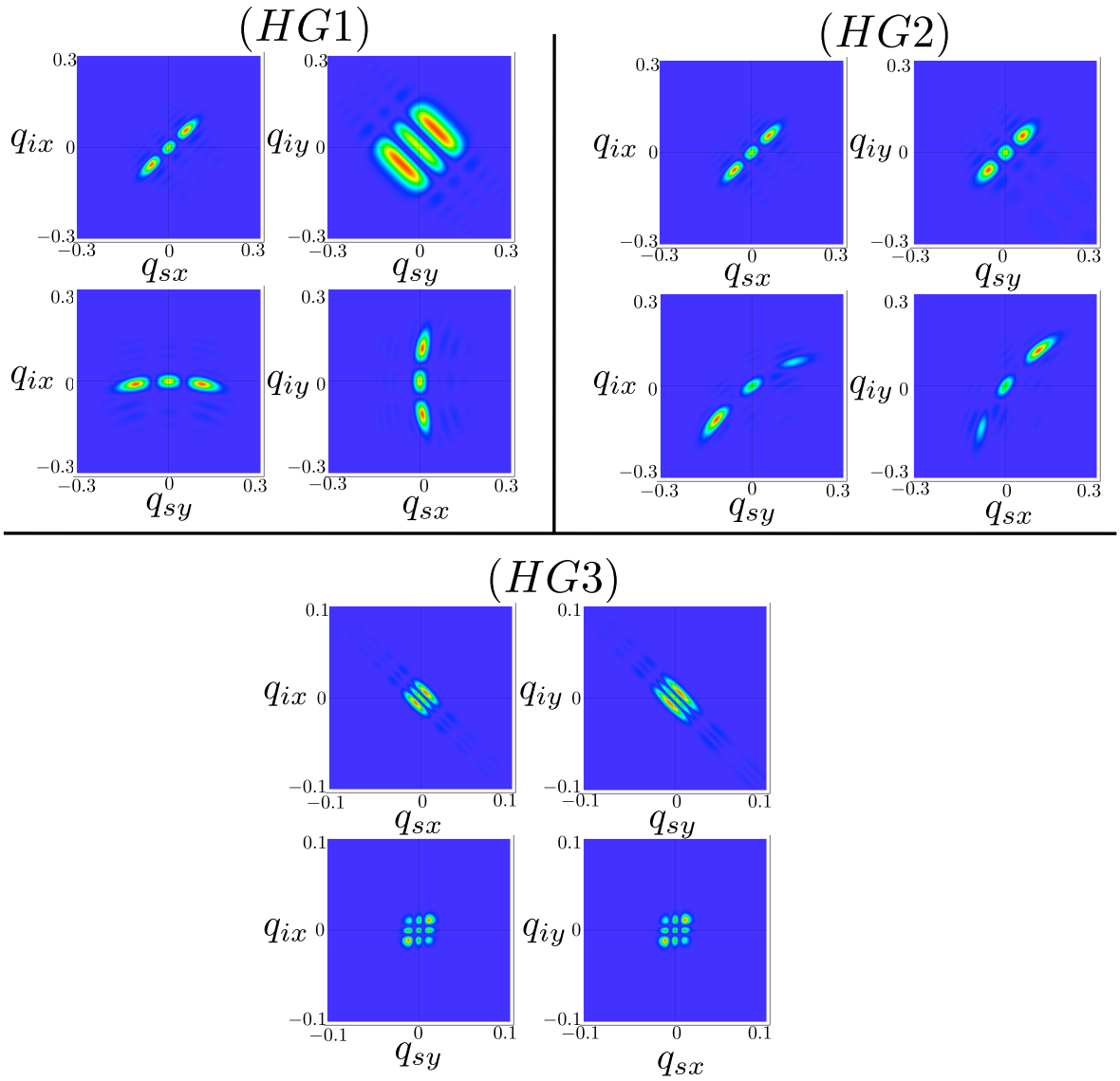

Figura 27. Gráficas de correlaciones externas en componentes de momento transversal para un haz HG $n_x = 2$, $n_y = 2$ de bombeo. (HG1) Sin walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (HG2) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 20\mu m$. (HG3) Con walk-off espacial y cintura del haz de bombeo de $w_0 = 200\mu m$.

Capítulo V

El esquema de Klyshko

Un método útil de gran ayuda en la planeación e interpretación de experimentos con fotones enredados que exploran las correlaciones espaciales entre las parejas de fotones fue introducido por A.V. Belinski y D.N. Klyshko (Belinski y Klyshko, 1994; Klyshko, 1998). Este método conocido como el esquema de onda avanzada o esquema de Klyshko consiste en asociar la detección en coincidencias y post selección a una inversión temporal en la propagación de uno de los haces en el arreglo experiemental. El cristal no lineal juega el papel de un espejo espectral, en el sentido que cambia la frecuencia del haz al reflejarse en él (SPDC no degenerado), y cabe notar que el tipo de espejo a tratar depende de las propiedades espaciales del haz de bombeo. El patrón de interferencia que se obtiene en coincidencias será igual al patrón obtenido de a cuerdo al esquema de onda avanzada descrito. Este esquema trabaja independientemente de los componentes ópticos colocados en los brazos señal o acompañante. Generalizamos este concepto para haces de bombeo con estructura espacial.

V.1 Función de correlación de segundo orden como la función de amplitud de probabilidad conjunta

Con una expresión más general para la función de empatamiento de fases que toma en consideración haces HzG o paraxiales, tomamos la tasa de coincidencias de parejas de fotones en los detectores señal D_1 y acompañante D_2 localizados en las posiciones espaciales $\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $\boldsymbol{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ respectivamente (ver figura 14), la cual es proporcional a la función de correlación de segundo orden de la forma,

$$G^{(2)}\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\right) = \left|\langle 0| \hat{\boldsymbol{E}}_2^{(+)}\left(\boldsymbol{r}_2, t_2\right), \hat{\boldsymbol{E}}_1^{(+)}\left(\boldsymbol{r}_1, t_1\right)|\psi\rangle\right|^2 = \left|F\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\right)\right|^2, \tag{131}$$

donde $F\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\right)$ es la función de amplitud conjunta en el espacio de coordenadas. Los fotones emitidos viajan a través de sistemas ópticos arbitrarios (1 para fotón señal y 2 para fotón acompañante) y crean los operadores del campo eléctrico en el espacio libre (Saleh *et al.*, 2000),

$$\hat{\boldsymbol{E}}_1^{(+)}\left(\boldsymbol{r}_1, t\right) = \int d\boldsymbol{q}_s H_s\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{q}_s\right) e^{-i\omega_s t} \hat{a}(\boldsymbol{q}_s), \tag{132}$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}_2^{(+)}\left(\boldsymbol{r}_2, t\right) = \int d\boldsymbol{q}_i H_i\left(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{q}_i\right) e^{-i\omega_i t} \hat{a}\left(\boldsymbol{q}_i\right), \tag{133}$$

en el plano de detección (ver figura 28). El factor $H_s\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{q}_s\right)$ es la transformada de Fourier de una función arbitraria del sistema óptico señal y de manera similar para el acompañante $H_i\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}_i\right)$. La función de amplitud de probabilidad conjunta (F.A.P.C.) en posiciones $\boldsymbol{r}_1$ y $\boldsymbol{r}_2$ en los tiempos t_1 y t_2 es en general de la forma,

$$F_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\right) = \int\int e^{-i(\omega_s t_1 + \omega_i t_2)} f_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{q}_s, \boldsymbol{q}_i\right) H_s\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{q}_s\right) H_i\left(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{q}_i\right) d\boldsymbol{q}_s d\boldsymbol{q}_i. \tag{134}$$

Esta función de amplitud de probabilidad puede ser complicada dependiendo de la función de amplitud conjunta en el espacio de momentos $f_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q}_s, \boldsymbol{q}_i)$, del arreglo experimental, etc. y podemos simplificar el análisis haciendo las siguientes aproximaciones:

(1) **Filtors espectrales**: Filtros en frente de los detectores que sólo dejan pasar un rango pequeño de longitudes de onda con frecuencias centrales Ω_s y Ω_i que satisfagan a la delta de Dirac en ecuación (101) donde,

$$\omega_s = \Omega_s + \nu, \qquad \nu << \Omega_s, \tag{135}$$

$$\omega_i = \Omega_i + \nu', \qquad \nu' << \Omega_i. \tag{136}$$

Por lo tanto, si se cumple con las condiciones (135) y (136) entonces,

$$\delta(\omega_p - \omega_s - \omega_i) \to \delta(\nu + \nu'). \tag{137}$$

(2) **Expansión en series de Taylor**: Expandiendo componentes q_{sz} y q_{iz} usando la aproximación paraxial,

$$q_{\mu z} \approx k_\mu^0 + \frac{\nu}{v_s} - \frac{\left|\boldsymbol{q}_{\mu_\perp}\right|^2}{2k_\mu^0} \qquad \mu = s, i, \tag{138}$$

donde k_μ^0 es el vector de onda central, v_μ es la velocidad de grupo y $\boldsymbol{q}_{\mu_\perp}$ es el vector de onda transversal con $\mu = s, i$. Separando componentes transversales de componentes longitudinales en $\boldsymbol{q}$'s, la F.A.P.C. ahora puede escribirse como,

$$F_{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2) = C \int d\boldsymbol{q}_{s_\perp} \int d\boldsymbol{q}_{i_\perp} \int dq_{sz} \int dq_{iz} e^{-i(\omega_s t_1 + \omega_i t_2)} \delta(\nu + \nu')$$
$$\times \tilde{\alpha}(\boldsymbol{q}_s, \boldsymbol{q}_i) H_s(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{q}_s) H_i(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{q}_i), \tag{139}$$

donde C denota términos constantes y donde,

$$\tilde{\alpha}(\boldsymbol{q}_s, \boldsymbol{q}_i) = \Xi\left(\boldsymbol{q}_{s_\perp}, \boldsymbol{q}_{i_\perp}\right) e^{-\frac{1}{4} w_0^2 q_\perp^2} \mathrm{sinc}[\frac{L}{2}(\Delta k_{eff})], \tag{140}$$

representa a los haces con estructura espacial estudiados, éste es un término en común que contribuye en las integrales (134). Matemáticamente es la transformada de Fourier del haz de bombeo, en el marco de referencia de detección en el espacio de momentos de fotón señal y acompañante $\boldsymbol{q}_s$ y $\boldsymbol{q}_i$ respectivamente.

Considerando la aproximación en (138), y las ecuaciones de transformación para el marco de referencia de detección de la sección 4.2.2, tenemos que las componentes x y z del vector de onda son,

$$k_x \approx q_{+x} cos\vartheta + \left(k_i^0 - k_s^0\right) sen\vartheta + \left(\frac{\nu'}{v_i} - \frac{\nu}{v_s}\right) sen\vartheta + \left(\frac{\left|\boldsymbol{q}_{s_\perp}\right|^2}{2k_s^0} - \frac{\left|\boldsymbol{q}_{i_\perp}\right|^2}{2k_i^0}\right) sen\vartheta, \quad (141)$$

$$k_z \approx q_{-x} sen\vartheta + \left(k_i^0 + k_s^0\right) cos\vartheta + \left(\frac{\nu'}{v_i} + \frac{\nu}{v_s}\right) cos\vartheta - \left(\frac{\left|\boldsymbol{q}_{s_\perp}\right|^2}{2k_s^0} + \frac{\left|\boldsymbol{q}_{i_\perp}\right|^2}{2k_i^0}\right) cos\vartheta, \quad (142)$$

donde k_j^0 son los número de onda con frecuencia central Ω_j. Estas ecuaciones son separables [1] en componentes x y y. También podemos aproximar las diferenciales en componentes z de (139) como[2], $dq_{sz} \approx d(\frac{\nu}{c})$ y $dq_{iz} \approx d(\frac{\nu'}{c})$. Realizando la integración en ν' obtenemos ahora,

$$F_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2\right) = C_1 \int d\boldsymbol{q}_{s_\perp} \int d\boldsymbol{q}_{i_\perp} \int d\nu e^{-i\nu(t_1 - t_2)} \tilde{\alpha}\left(\boldsymbol{q}_s, \boldsymbol{q}_i\right)$$

$$\times H_s\left(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, \boldsymbol{q}_{s_\perp}; \Omega_s\right) H_i\left(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, \boldsymbol{q}_{i_\perp}; \Omega_i\right), \quad (143)$$

donde hemos simplificado las funciones H_μ por sus componentes transversales $\boldsymbol{q}_{\mu_\perp}$ y la frecuencia angular central Ω_μ. El argumento de la función sinc, Δk_{eff} de la ecuación (140) está ahora evaluado en $\nu = \nu'$.

---

[1] Nos referimos a que son separables en componentes $q_x = (q_{sx}, q_{ix})$ y $q_y = (q_{sy}, q_{iy})$.

[2] Tomando el diferencial de ec.(**??**) , $dq_{\mu z} \approx v_\mu^{-1} d\nu = \frac{d}{d\Omega_\mu}[\frac{\Omega_\mu}{c} n_\mu(\Omega_\mu)] d\nu = [n_\mu(\Omega_\mu)/c] d\nu + \left[\frac{\Omega_\mu}{c} \frac{d}{d\Omega_\mu} n_\mu(\Omega_\mu)\right] d\nu \approx \frac{d\nu}{c}$. Con, $n_\mu(\Omega_\mu) \approx 1$.

(3) **Componentes de momento transversal independientes de la frecuencia**: Suponiendo que sólo la parte longitudinal depende de la frecuencia, sólo para k_z la aproximación paraxial (138) es válida. Las componentes transversales para Δk_{eff} son,

$$q_{\perp}^2 \approx \left[q_{+x} cos\vartheta - \left(k_s^0 - k_i^0\right) sen\vartheta\right]^2,$$
$$+\left[\left(\frac{k_s^0}{k_i^0} - 1\right)\left|\boldsymbol{q}_{i_\perp}\right|^2 + \left(\frac{k_i^0}{k_s^0} - 1\right)\left|\boldsymbol{q}_{s_\perp}\right|^2\right] sen^2\vartheta + q_{+y}^2, \tag{144}$$

y

$$\Delta k = -k_p + \left(k_s^0 + k_i^0\right) cos\vartheta + \left(\frac{\nu}{v_s} - \frac{\nu}{v_i}\right) cos\vartheta + q_{-x} sen\vartheta - \left(\frac{\left|\boldsymbol{q}_{s_\perp}\right|^2}{2k_s^0} + \frac{\left|\boldsymbol{q}_{i_\perp}\right|^2}{2k_i^0}\right) cos\vartheta. \tag{145}$$

para las componentes transversales.

Para la función $\tilde{\alpha}\left(\boldsymbol{q}_s, \boldsymbol{q}_i\right)$, la contribución longitudinal es,

$$\Delta\left(\boldsymbol{q}_{s_\perp}, \boldsymbol{q}_{i_\perp}; t_1 - t_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{-i\nu(t_1 - t_2)} \mathrm{sinc}[\frac{L}{2}\left(\Delta k_{eff}\right)], \tag{146}$$

donde hemos extendido los límites de integración al infitino en coordenadas ν, ya que hemos tomado en cuenta filltros espectrales.

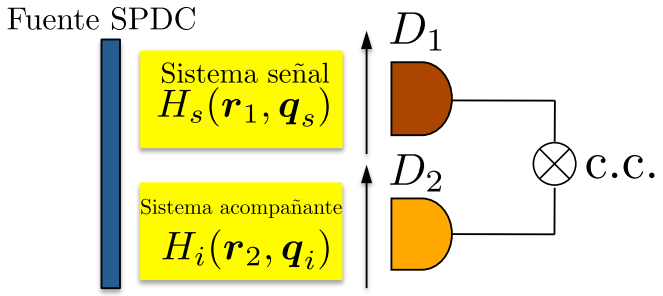

Figura 28. Sistema óptico arbitrario SPDC. Se propagan los fotones en sistemas de transferencia H_s señal y acompañante H_i.

(4) **Aproximación lineal (ángulos de emisión pequeños)**: Esta aproximación la tomamos para poder integrar ec. (146) e interpretar los resultados físicamente.

Tomaremos solo los vectores de onda transversales lineales. Notemos que por conservación de momento transversal en ecuación (144) $(k_s^0 - k_i^0)\, sen\vartheta = 0$, por lo tanto toda la parte transversal es cero. Para la parte longitudinal en ecuación (145), por conservación de momento longitudinal, $-k_p + (k_s^0 + k_i^0)\, cos\vartheta = 0$ y sí tomamos en cuenta solo ángulos de emisión pequeños, entonces $\Delta q \approx \left(\frac{\nu}{v_s} + \frac{\nu_\cdot}{v_i}\right)$. Tomando todo esto en consideración, la ecuación (146) es ahora sólo función del tiempo,

$$\Delta_1 \left(T = t_1 - t_2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu e^{-i\nu T} \mathrm{sinc}\left(\frac{L}{2} D\nu\right) = \frac{1}{DL} \qquad DL > T > 0, \tag{147}$$

donde DL es la diferencia en tiempo que los fotones señal y acompañante tardan en cruzar el cristal. Esta ecuación (147) nos da la función rectángulo, donde es diferente de cero para tiempos, $T > 0$. Por lo que a primer orden podemos escribir a la F.A.P.C. como,

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2\right) = C_2 \Delta_1\left(T\right) \int d\boldsymbol{q}_{s_\perp} \int d\boldsymbol{q}_{i_\perp} \Xi\left(\boldsymbol{q}_{s_\perp}, \boldsymbol{q}_{i_\perp}\right) e^{-\frac{1}{4} w_0^2 q_\perp^2} \\ \times H_s\left(\boldsymbol{\rho}_1, z_1, \boldsymbol{q}_{s_\perp}; \Omega_s\right) H_i\left(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, \boldsymbol{q}_{i_\perp}; \Omega_i\right), \end{aligned} \tag{148}$$

donde $\boldsymbol{\rho}_1 = (x_1, y_1)$ y $\boldsymbol{\rho}_2 = (x_2, y_2)$ son las componentes en los planos de detección señal y acompañante respectivamente, $\Xi\left(\boldsymbol{q}_{s_\perp}, \boldsymbol{q}_{i_\perp}\right)$ es el espectro angular del perfil transversal del haz de bombeo definido por la función de empatamiento de fases en el espacio de momentos (marco de referencia de detectores), Δ_1 es diferente de cero para diferencias de tiempo de arribo $t_1 - t_2$ del orden de nano segundos y depende del tipo de fotodetectores utilizados. Este resultado es uno de los principales de esta tesis, daremos una interpretación física y una aplicación de interés en las siguientes secciones.

V.2 El esquema de Klyshko y su interpretación física

Para dar una interpretación del proceso no local de la tasa de coincidencias, hacemos uso de la interpretación de *Klyshko de onda avanzada.* Para ver este proceso, la ecuación (134) la escribimos para el caso monocromático como,

$$F_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\right)=\int\int e^{-i(\omega_s t_1+\omega_i t_2)}f_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{q}_s,\boldsymbol{q}_i\right)H_s\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{q}_s\right)H_i\left(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{q}_i\right)d\boldsymbol{q}_s d\boldsymbol{q}_i$$

$$\approx\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{q}_s H_s\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{q}_s\right)e^{-i\Omega_s t_1}\int d\boldsymbol{q}_i H_i\left(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{q}_i\right)e^{-i\Omega_i t_2}\alpha\left(\boldsymbol{r}\right)e^{-i(\boldsymbol{q}_s+\boldsymbol{q}_i)\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\approx\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{q}_s e^{i\boldsymbol{q}_s\cdot\boldsymbol{r}_1}e^{-i\Omega_s t_1}\int d\boldsymbol{q}_i e^{i\boldsymbol{q}_i\cdot\boldsymbol{r}_2}e^{-i\Omega_i t_2}\alpha\left(\boldsymbol{r}\right)e^{-i(\boldsymbol{q}_s+\boldsymbol{q}_i)\cdot\boldsymbol{r}},$$

donde hemos omitido constantes en la función de amplitud conjunta. Integrando solo la parte angular para las *q's* (integración del cono de emisión),

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}sen\theta d\theta d\phi e^{iq_s|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}|cos\theta}=2\pi\frac{e^{iq_s|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}|}}{iq_s\left|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}\right|},$$

esta es la contribución de vectores $\boldsymbol{q}$ que llegan al detector señal (Steuernagel y Rabitz, 1998), donde las contribuciones de $\theta=\pi$ las hemos eliminado ya que no llegan al detector. De la misma forma para el detector acompañante.

Tenemos ondas esféricas para los paquetes de onda señal y acompañante, similar a la teoría de difracción de Fresnel-Kirchhoff, por lo que podemos ver al sistema como,

$$F_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\right)\approx\int d\boldsymbol{r}\alpha\left(\boldsymbol{r}\right)K\left(\boldsymbol{q}_s,|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}|\right)K\left(\boldsymbol{q}_i,|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}|\right),\tag{149}$$

donde $K\left(\boldsymbol{q}_s,|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}|\right)$ y $K\left(\boldsymbol{q}_i,|\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}|\right)$ son los propagadores de los modos señal y acompañante y $\alpha(\boldsymbol{r})$ es el perfil del haz de bombeo. La mayor diferencia entre la teoría de Fresnel-Kirchhoff (Born y Wolf, 1999; Steuernagel y Rabitz, 1998) y la ecuación (149) es el cambio de frecuencia que la función de onda sufre cuando pasa por el cristal,

expresado por los valores $\boldsymbol{q}_s$ y $\boldsymbol{q}_i$ y las dimensiones de la integración, que en este caso se integra sobre un vólumen de interacción. Una de estas dos ondas es la *onda avanzada*. Estas ondas avanzadas son soluciones de la ecuación de onda electromagnética clásica y otras ecuaciones de onda, que contienen la segunda derivada en el tiempo. Las solución a estas ecuacions siempre tienen una parte de onda *retardada* y otra parte de onda *avanzada*, ésta última es comúnmente ignorada ya que no tiene interpretación física en la electrodinámica clásica.

Notemos que considerando al cristal como un paralelepípedo, su transformada de Fourier es la función *sinc* cuando el haz de bombeo $\alpha(\boldsymbol{r})$ es una onda plana. Cuando el haz de bombeo difiere de uno plano, la transformada de Fourier es la función *sinc* multiplicada por un factor transversal (ecuacion (140)). Para una onda plana tendríamos sólo en el argumento de la función *sinc*, la contribución de Δk (ec. (145)). Para un haz Gaussiano, la función $\Xi\left(\boldsymbol{q}_s, \boldsymbol{q}_i\right) = 1$ en ec.(140), $k_{tp} = 0$ y todo el argumento en la función *sinc* de ec.(145) es válido. Para haces de bombeo con mayor estructura en su perfil transversal la F.A.P.C. será menos separable en sus componentes x y y. Sólo para el caso de un haz Gaussiano, CG y HG es posible esta separabilidad, debido al sistema coordenado donde están definidos.

Es importante la separabilidad en la F.A.P.C. como hemos visto para generar estados factorizables, además de poder realizar el cálculo análitico de las integrales. Por ejemplo, de la ecuación (148) para un haz gaussiano la tasa de coincidencias a primer orden es,

$$F_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2\right) = C_2 \Delta_1\left(T\right) \int d\boldsymbol{q}_{s_\perp} \int d\boldsymbol{q}_{i_\perp} e^{-\frac{1}{4} w_0^2 q_\perp^2}$$

$$\times H_s\left(\boldsymbol{\rho}_1, z_1; \boldsymbol{q}_{s_\perp}; \Omega_s\right) H_i\left(\boldsymbol{\rho}_2, z_2, \boldsymbol{q}_{i_\perp}; \Omega_i\right), \tag{150}$$

donde $q_{\perp}^{2}$ se puede separar en componentes x y y para fotón señal y acompañante (ver ec.(180) y ec. (181) en apéndice B). Si las funciones H_s y H_i son sistemas ópticos $2f$ tenemos la transformada de Fourier de ésta función gaussiana y en general, para el sistema de dos fotones, obtendríamos la imagen en coincidencias del haz de bombeo.

Otra forma conveniente de ver a la F.A.P.C. de la ecuación (134) es dejando sólo la dependencia espacial[3],

$$\begin{aligned} F_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\right) &= \int\int f_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{q}_s,\boldsymbol{q}_i\right) H_s\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{q}_s\right) H_i\left(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{q}_i\right) d\boldsymbol{q}_s d\boldsymbol{q}_i \\ &= \int d\boldsymbol{q}_s \int d\boldsymbol{q}_i \int d\boldsymbol{r}\alpha\left(\boldsymbol{r}\right) e^{-i\left(\boldsymbol{q}_s+\boldsymbol{q}_i\right)\cdot\boldsymbol{r}} H_s\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{q}_s\right) H_i\left(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{q}_i\right) \\ &= \int d\boldsymbol{r}\alpha\left(\boldsymbol{r}\right) \int d\boldsymbol{q}_s H_s\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{q}_s\right) e^{-i\boldsymbol{q}_s\cdot\boldsymbol{r}} \int d\boldsymbol{q}_i H_i\left(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{q}_i\right) e^{-i\boldsymbol{q}_i\cdot\boldsymbol{r}}, \end{aligned}$$

que identificando las transformadas de Fourier para las funciones de respuesta al impulso, la función de onda puede escribirse como,

$$F_{\boldsymbol{q}}\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2\right) = \int d\boldsymbol{r}\alpha\left(\boldsymbol{r}\right) h_s\left(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}\right) h_i\left(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}\right). \tag{151}$$

La magnitud al cuadrado de la F.A.P.C. (148) en cualquiera de estas representaciones, nos proporciona información en la medición del ensamble de parejas de fotones preparadas en el mismo estado.

[3]esto se justifica si tenemos filtros espectrales en el arreglo experimental, dejando pasar únicamente cierto ancho de banda.

V.3 Propagación de parejas de fotones en el esquema de Klyshko

Ahora con la ecuación (148) procedemos a analizar las funciones de transferencia (Shih, 2007b; Shih y Alley, 1988) con componentes transversales $\boldsymbol{\rho} = (x, y)$ de manera explícita, a estas las podemos escribir en la aproximación paraxial como,

$$H_j\left(\boldsymbol{\rho}_j, z_j; \boldsymbol{q}_\perp\right) = -i\frac{1}{\lambda}\frac{e^{ikz_j}}{z_j}\int_\sigma \tilde{A}\left(\boldsymbol{\rho}\right) h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}\right|, \frac{k}{z_j}\right) d\boldsymbol{\rho}, \tag{152}$$

donde λ es la longitud de onda, z_j es la distancia de propagación, $\tilde{A}\left(\boldsymbol{\rho}\right)$ representa a la amplitud compleja o la función de distribución en términos de las coordenadas transversales $\boldsymbol{\rho}$, las cuales pueden ser constantes, una función de apertura simple o la combinación de estas dos y donde,

$$h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}\right|, \frac{k}{z_j}\right) = e^{i\frac{k}{2z_j}\left|\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}\right|^2}, \tag{153}$$

es el factor de Fresnel (ver apéndice A).

Si la propagación involucra n etapas con funciones de apertura $A_i(\boldsymbol{\rho}_i)$ con coordenadas transversales $\boldsymbol{\rho}_i$ (con $i = 0, 1, 2...n-1$) como se muestra en la figura 29, separadas del plano subsiguiente por una distancia ℓ_i. La función de transferencia óptica la reescribimos ahora como,

$$\begin{aligned} H_\mu\left(\boldsymbol{\rho}_n; \boldsymbol{q}_\mu\right) = \frac{e^{ik_\mu \ell_T}}{\ell_T}\int d\boldsymbol{\rho}_{n-1}\ldots\int d\boldsymbol{\rho}_0 A_{n-1}(\boldsymbol{\rho}_{n-1})\ldots A_0(\boldsymbol{\rho}_0) \\ \times h(|\boldsymbol{\rho}_n - \boldsymbol{\rho}_{n-1}|, \frac{k_\mu}{\ell_{n-1}})\ldots h(|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_0|, \frac{k_\mu}{\ell_0}) \\ \times e^{i\boldsymbol{\rho}_0\cdot\boldsymbol{q}_\mu}, \qquad \mu = s, i, \end{aligned} \tag{154}$$

donde $\ell_T = \ell_0 + \ell_1 + ... + \ell_{n-1}$ es la distancia total de propagación.

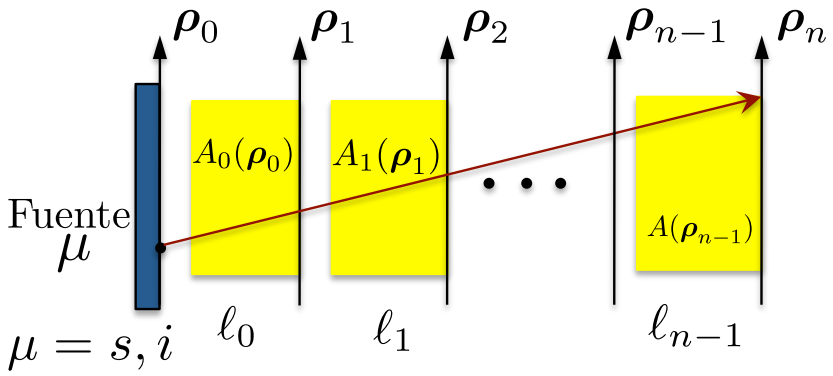

Figura 29. Sistema óptico compuesto. Se propaga a través de n diferentes planos caracterizados por una función compleja $A_j(\rho_j)$.

En este marco al sistema de parejas de fotones puede tratarse como un sistema clásico, siempre y cuando se contrapropáge a un fotón.

Este esquema de propagación se utiliza cuando el enredamiento cuántico de las parejas de fotones está presente. Este esquema se utiliza para procesamiento cuántico de información (Garrison y Chiao, 2008). El enredamiento cuántico de las parejas de fotones se ha utilizado en conjunción con canales de información ordinaria, para crear ciertas propiedades que son aplicables en la computación cuántica (U'Ren *et al.*, 2003; Brendel *et al.*, 1999; Steane, 1998), criptografía cuántica (Gisin *et al.*, 2002) y teleportación cuántica (Marcikik *et al.*, 2002; Shih, 2001; Bouwmeester *et al.*, 1997) entre otras. Entendamos por información ordinaria o macroscópica a la que puede transmitirse a la velocidad de la luz. Cualquier otro tipo de información se considera microscópica (Cramer, 1980), ya que pueden afectar el comportamiento de sistemas físicos pero no son de utilidad para comunicación entre observadores.

Las conexiones entre estos sistemas como el mostrado en la figura 30, donde estan involuctrados una fuente y los detectores en un diagrama de Minkowski, están siempre

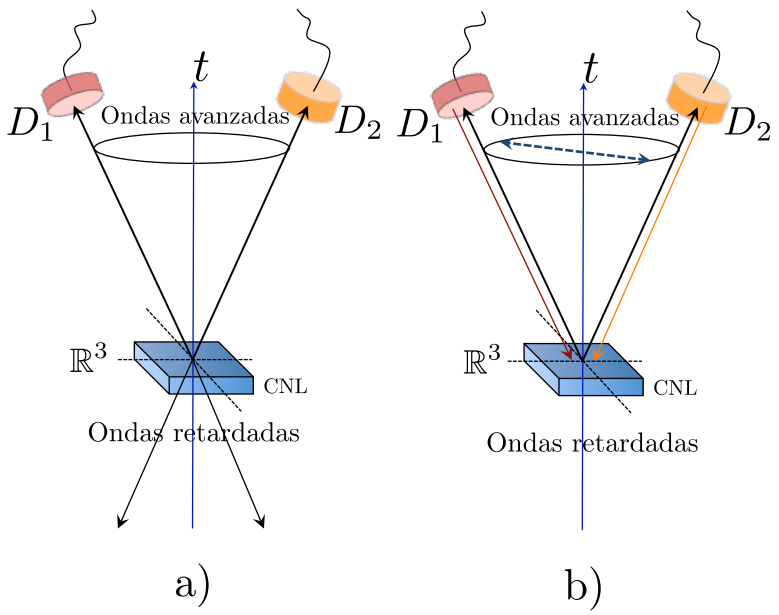

Figura 30. Diagrama de Minkowski para SPDC. a)Se muestran los cuadrivectores en forma de ondas avanzadas y retardadas a partir de un evento SPDC. b)La conexión no local entre detectores es espacialoide, se muestra con la flecha azul segmentada.

conectados por conos de luz tal cual canales de información ordinaria pero debido al enredamiento cuántico estas conecciones pueden zig zagear en el tiempo para efectuar una propagación efectiva espacialoide, ver por ejemplo el libro (Penrose, 2005). Está es una manera de interpretar al estado de dos fotones cuando es un eigenestado antes de la medición. Estos son los procesos de información cuántica que violan el principio de causalidad.

Otro esquema de estos procesos está basada en la interpretación transaccional de la mecánica cuántica de J. Cramer (Cramer, 1986, 1980). Esta interpretación nos da una descripción del estado cuántico como un paquete de onda ψ, que está presente en el espacio real y provee, por medio de un mecánismo físico, los efectos de correlación no local con el uso de *ondas avanzadas* (ver figura 31). Estas ideas vienen de la teoría de Wheeler y Feynman (Wheeler y Feynman, 1945, 1949), sobre el mecanismo de radiación

entre un emisor y un detector[4]. Este uso de ondas avanzadas fue utilizado por primera vez por Tetrode (Tetrode, 1922) y otros (Dirac, 1938; Fokker, 1929) donde proponen condiciones a la frontera simétricas en el tiempo, que aseguran que una onda electromagnética esta compuesta de una amplitud la mitad onda avanzada y la otra mitad onda retardada (soluciones Lienard-Wiechert a las ec's de Maxwell); y que tales ondas son características del proceso de emisión y absorción.

Esto también puede ser visualizado como una onda estacionaria en el espacio-tiempo, con los límites de la onda siendo el emisor y el receptor, entre los cuales rebota la onda como una onda avanzada (desde el receptor) y una onda retardada (desde el emisor). Se dice que existe una transacción entre emisor y receptor. Cramer utiliza una versión generalizada (Cramer, 1980) de esa teoría para interpretar la paradoja del EPR considerando como ejemplo el experimento de Freedman y Clauser (Clauser y Horne, 1974; Freedman y Clauser, 1972; Clauser y Shimony, 1978), el primer experimento publicado donde se demuestra la violación a las desigualdades de Bell. Desde este punto de vista, hay un acuerdo vía 3 rutas de ondas retardadas y avanzadas entre los dos detectores y el punto de emisión. La transacción solo se puede formar sí las condiciones a la frontera y leyes de conservación son observadas consistentemente en los 3 puntos.

[4]Esta teoría es característica de los procesos de emisión y absorción para todas las partículas y ondas, ya sean fermiones o bosones, partículas cargadas o no, con masa o sin masa.

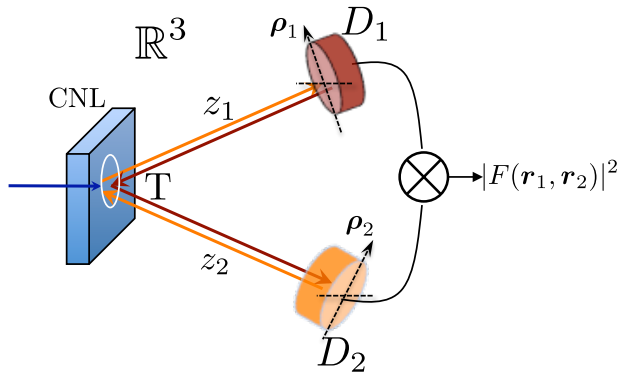

Figura 31. Diagrama de transacción para SPDC mediante el uso de ondas avanzadas y retardadas. La zona T en el cristal es la zona de transacción entre estas ondas.

V.4 El esquema de Klyshko con haces de bombeo estructurado

En nuestra teoría además de que los arreglos experimentales pueden tener varios elementos ópticos involucrados en las funciones de transferencia H_μ con $\mu = s, i$, el haz de bombeo podrá tener prácticamente cualquier perfil transversal por medio de la ecuación (148). Tomando el esquema de onda avanzada de Klyshko en la figura 32 podemos pensar en la F.A.P.C. que se propaga de una fuente con coordenadas transversales $\boldsymbol{\rho}_1$ y que al pasar por el cristal con coordenadas $\boldsymbol{\rho}_m$ es modificado como consecuencia del perfil transversal del bombeo, tal cual una mascarilla que modifica el perfil transversal de un campo óptico al propagarse a través de ella, hasta llegar al detector que es escaneado en el plano transversal $\boldsymbol{\rho}_2$.

Cuando el haz de bombeo se aproxima por una onda plana, consideremos lo que pasa en la figura 33. El vector de onda $\boldsymbol{k}_p$ esta siempre en la dirección z y debido a una gran sección transversal del haz de bombeo, vemos que existen varios puntos en la parte transversal del cristal donde las parejas de fotones pueden crearse. De todas

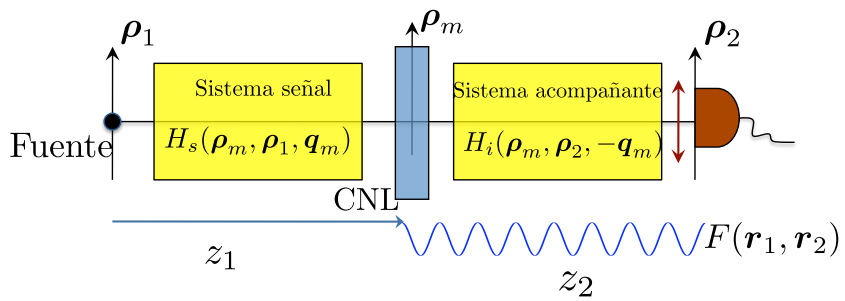

Figura 32. Diagrama general de Klyshko para SPDC con haz de bombeo con estructura espacial. El bifotón $F(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ se propaga del plano $\boldsymbol{\rho}_1$ al plano $\boldsymbol{\rho}_2$. Al pasar por el plano del cristal no lineal (CNL) $\boldsymbol{\rho}_m$ se modifica por las propiedades espaciales del haz de bombeo.

estas posibilidades existe una amplitud de probabilidad señal (en forma de rayo) que puede resultar en el punto P. La amplitud acompañante que se crea en el mismo punto en el cristal y se propaga a un ángulo opuesto al del señal con respecto a $\boldsymbol{k}_p$. Como puede verse, a cada punto P en el brazo señal corresponde un amplio rango de puntos en el brazo acompañante. En el esquema de onda avanzada (figura 33 b) se puede ver al punto P como fuente de ondas que viajan hacía el cristal (Pittman *et al.*, 1996a), el cual se comporta como un espejo plano y las ondas viajan hacía el brazo acompañante[5].

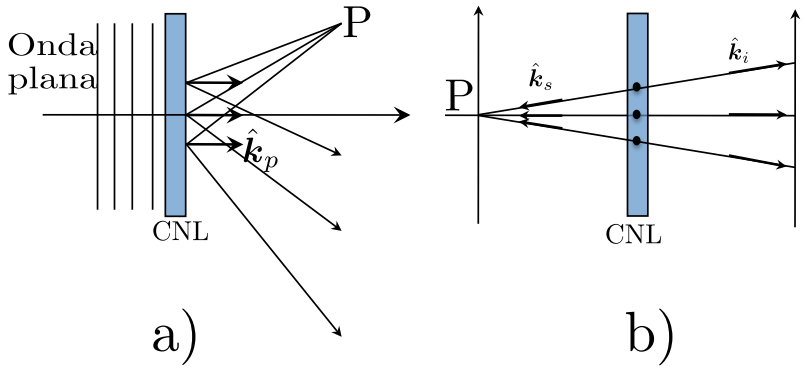

Figura 33. Diagrama de Klyshko para haz de bombeo con onda plana. a)Visto por arriba, b)versión desdoblada.

Para el caso de un haz de bombeo enfocado utilizaríamos la ecuación (150). Viendo la figura 34 donde los frentes de onda planos ahora son enfocados a un punto f, los

[5]Estos modelos incluyen la aproximación de cristal delgado.

rayos que pasan por el cristal son frentes de onda esféricos cuyo radio de curvatura son determinados por la distancia de la posición de la lente hasta su plano focal. De nuevo cada punto de creación produce una amplitud de probabilidad señal en forma de rayo el cual alcanza el punto P, y el correspondiente rayo acompañante se propaga a un ángulo igual pero opuesto con respecto a $\boldsymbol{k}_p$, siempre cumpliendo con,

$$|\boldsymbol{k}_s| sen\alpha_s = |\boldsymbol{k}_i| sen\alpha_i, \tag{155}$$

donde α_s y α_i son los ángulos polares de emisión de los fotones.

Con este tipo particular de bombeo los rayos señal se cruzan en un punto en particular P, y los rayos acompañantes se cruzan en un punto P' en lugar de diverger como en el caso de una onda plana. El resultado es una imagen en P' detectando en coincidencias cuando se escanea en el brazo acompañante en dicho punto.

En principio la ecuación (155) no se cumple estrictamente para este escenario, esto se debe a que los vectores de onda de bombeo en los extremos del haz enfocado ya no forman un ángulo β con el eje óptico del cristal, y las condiciones de empatamiento de fases deberá cambiar. A pesar de que esto es rigurosamente cierto, en situaciones prácticas esto es despreciable cuando el enfocamiento es débil, haciendo que β no sea mas grande que varios mili radianes, un rango donde la curva de sintonización no cambie apreciablemente, y si la resolución límitada del detector acompañante es del orden de milímetros por su diámetro, estas figuras nos dan un análisis real del fenómeno.

Entre más difiera el haz de bombeo de una onda plana, el analísis de Klyshko se vuelve más complicado. La pregunta ahora es que pasará por ejemplo cuando el haz de bombeo es un haz de la familia HzG, o de los haces paraxiales?. Como hemos estudiado,

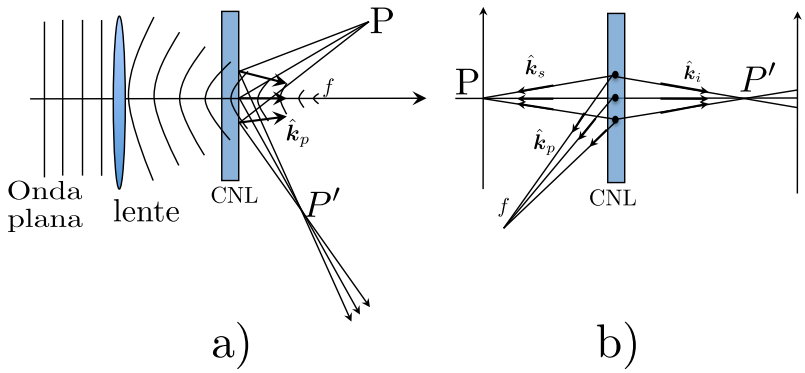

Figura 34. Versión del diagrama de Klyshko para un haz de bombeo enfocado. Los frentes de onda son modificados por una lente convergente con distancia focal f que modifica el haz de bombeo.

el espectro angular del haz de bombeo debe de transferirse al estado de dos fotones, siempre y cuando tomemos en cuenta la aproximación de cristal delgado. Bajo este contexto, podremos formar patrones de interferencia dependiendo de la modificación de nuestro haz de bombeo. Un arreglo experimental propuesto en particular se muestra en la figura 35, donde el haz de bombeo plano pasa por una mascarilla con dos orificios, en seguida una lente, de tal forma que se forme el patrón de interferencia en el centro del cristal. En otras palabras tendríamos un haz de bombeo CG en el cristal y sería un haz Bessel si la mascarilla fuera un anillo.

El patrón de interferencia se encuentra en el centro del cristal y cada orden de interferencia contribuye al estado de dos fotones. Se escanea el plano transversal del detector acompañante D_2 y se traslada a lo largo del eje z_2. Conforme se aumenta la distancia z_2 podemos obtener el perfil transversal de la propagación del haz (campo cercano), o su espectro angular dependiendo de las distancias relativas entre detectores D_1 y D_2 incluyendo una lente en el brazo señal (campo lejano). Tomando en cuenta el esquema de onda avanzada y la distancia z_{max} del haz de bombeo (ver capítulo 3) se

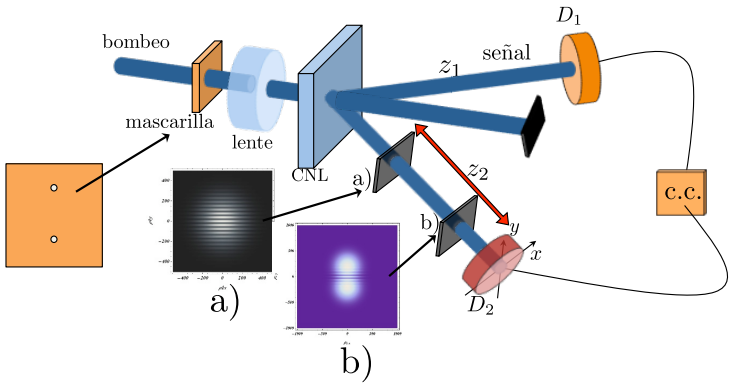

Figura 35. Experimento SPDC con haces estructurados. La mascarilla altera el haz de bombeo y obtenemos un haz con estructura espacial en el centro del cristal no lineal. Se escanea los perfiles transversales a través de la distancia z_2 del haz acompañante y se detecta en coincidencias.

logra obtener distancias casi el doble de z_{max} del haz de bombeo. Esto es tomando en cuenta las distancias desde el detector señal D_1 hasta el plano de escaneo del detector acompañante D_2 pasando por el cristal. Proponemos como trabajo a futuro está línea de trabajo experimental para corroborar los datos númericos y complementar el estudio.

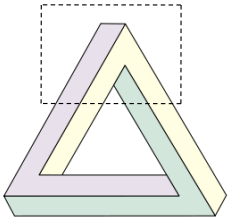

Figura 36. Imposibilidad no local. Un objeto imposible conocido como la tribarra de Penrose. Creada por primera vez por el artista sueco Oscar Reutersvaerd en 1934. El recuadro con líneas punteadas crea la posibilidad local.

Para concluir este capítulo mostramos el dibujo de un objeto imposible, una tribarra (Penrose, 2005) en figura 36. Es claro que esta figura en $3D$ no puede existir en un espacio euclideano. Aún así *localmente* no hay nada imposible acerca de la figura. La imposibilidad es no local, y desaparece si uno considera sólo una pequeña región en el dibujo. Lo importante aquí es que, haciendo la analogía de la imagen de la tribarra

con los sistemas SPDC enredados que hemos estudiado, es que el análisis del sistema total en sus partes independientes es inútil. Las parejas de fotones generadas por SPDC deben de tomarse como proyecciones de una realidad cuya dimensionalidad es mayor (el espacio de configuraciones), las cuales no pueden estar influenciadas por procesos de información macroscópica o alguna fuerza de interacción entre ellas (Bohm, 1980).

Capítulo VI

Patrones de interferencia SPDC con haces de bombeo enfocados

Como parte de las aplicaciones de nuestro estado de dos fotones para haces de bombeo estructurados, mostramos el efecto de enfocamiento en patrones de interferencia fantasma (GI, Ghost Imaging y GD, Ghost Diffraction, en inglés) para un arreglo experimental SPDC tipo I no colineal, caso degenerado y no degenerado. Obtuvimos resultados analíticos para este enfocamiento en el haz gaussiano de bombeo con cintura w_0, además de un parámetro complejo D, el cual resulta como consecuencia del efecto de enfocamiento. Confirmamos también por medio de simulaciones numéricas, que este enfocamiento degrada el patrón de interferencia o imagen en el plano de detección al grado de suprimir estos efectos en su totalidad.

VI.1 Formación de imagenes y patrones de difracción fantasma (GI,GD)

GI es uno de los propiedades más interesantes del enredamiento cuántico en el espacio coordenado y momento transversal. El primer ejemplo de este tipo de enredamiento es conocido como la paradoja EPR de 1935 (Einstein *et al.*, 1935), el cual no puede ser entendido por medio de la física clásica. No fue hasta 1995 que Pittman y colaboradores (Pittman *et al.*, 1995; Bennink *et al.*, 2004) demostrarón por primera vez este fenómeno experimentalmente para las variables conjugadas de momento y posición. Aunque el

GI y GD (Strekalov *et al.*, 1995) es un fenómeno muy conocido y él cual puede ser producido por una fuente correlacionada clásicamente (Bennink *et al.*, 2002, 2004), sigue siendo útil para aplicaciones de mejoramiento de tecnologías usando fuentes de fotones enredadas, ya que un sistema de parejas de fotones en su estado enredado exhibe efectos que no pueden lograrse con una fuente correlacionada clásicamente. El fenómeno de GI y GD ha sido utilizado para identificar el enredamiento entre estas parejas (D'Angelo *et al.*, 2004), como sensor utilizando una fuente no degenerada (Karmakar y Shih, 2010; Rubin y Shih, 2008), etc. Además se han estudiado los límites entre los efectos que se pueden obtener con una fuente clásica y una cuántica (Abouraddy *et al.*, 2001; Yangjian *et al.*, 2009; Santos *et al.*, 2008; Pittman *et al.*, 1996b), y mas recientemente el estudio de GI con una fuente térmica (Ferri *et al.*, 2005; Xi-Hao *et al.*, 2009; Ferri *et al.*, 2008; Gatti *et al.*, 2004; Valencia *et al.*, 2005).

Este fenómeno esta basado en las correlaciones (Rubin, 1996) presentes en las parejas de fotones señal y acompañante que estudiamos en el capítulo 5. En los arreglos experimentales típicos, mientras el fotón señal recorre un arreglo con elementos ópticos sin resolución espacial, el fotón acompañante es resuelto espacialmente en la detección. Las correlaciones espaciales entre modos señal y acompañante, las cuales pueden convertirse uno a uno bajo ciertas condiciones idealizadas de empatamiento de fases, ímplican que la tasa de detección en coincidencias como función del detector acompañante, pueden formar una imagen o un patrón de interferencia-difracción de una mascarilla colocada en el brazo señal. Debido a que no hay mascarilla por donde pasa el fotón acompañante y es en este brazo donde se detecta la imagen/patrón de difracción adopta el nombre de imagenes/patrón de difracción fantasma.

Como hemos visto en el capítulo anterior las ideas de onda avanzada de Klyshko han sido útiles en el desarrollo y comprensión de estos sistemas, demostrando que para el caso ideal donde los fotones de bombeo crean las parejas de fotones, los vectores de onda transversales cumplen con la relación $\boldsymbol{q}_s = -\boldsymbol{q}_i$ y esto puede interpretarse como un rayo que pasa a través de todo el sistema señal-acompañante. Los modos señal y acompañante se toman como un solo fotón (Steuernagel y Rabitz, 1998; Abouraddy *et al.*, 2002) que toma su camino a través del sistema, invirtiendo por ejemplo la dirección de propagación del modo señal. Bajo este esquema el haz señal se propaga del detector D_1 al cristal, la conservación de momento transversal ideal implica que el vector señal k_s contrapropagándose se convierta en un vector de onda acompañante k_i bien definido que se propaga hacía el detector D_2. Esto es la base para este tipo de experimentos en términos de una construcción equivalente a la óptica geométrica.

En este capítulo trabajamos con la F.A.P.C.(148) en la aproximación de cristales delgados donde la dependencia espacial es simplificada considerablemente.

VI.1.1 Imagenes fantasma

El arreglo experimental que estudiamos para GI se muestra en la figura 37 (b). Un haz gaussiano con cintura w_0 se utiliza para bombear un cristal no lineal, el cual consideramos está cortado para SPDC tipo I y producir parejas de fotones en configuración no colineal. Las parejas emergen del cristal con frecuencias ω_s y ω_i para fotón señal y acompañante respectivamente. El haz señal pasa a través de una lente convexa con distancia focal f a una distancia d_1 del cristal con coordenadas transversales $\boldsymbol{\rho}_l$, en seguida a una distancia s_o de la lente ilumina una mascarilla con coordenadas transversales $\boldsymbol{\rho}_o$;

la mascarilla está descrita por la función de transmitancia $A(\boldsymbol{\rho}_o)$. Detrás de la máscara se encuentra una lente de colección de distancia focal f_c a una distancia d del detector señal D_1, con coordenadas transversales $\boldsymbol{\rho}_1$. Este se puede considerar como un detector cubeta sí idealmente toda la luz en el brazo señal del arreglo puede ser colectada por un detector puntal en $\boldsymbol{\rho}_1 = 0$.

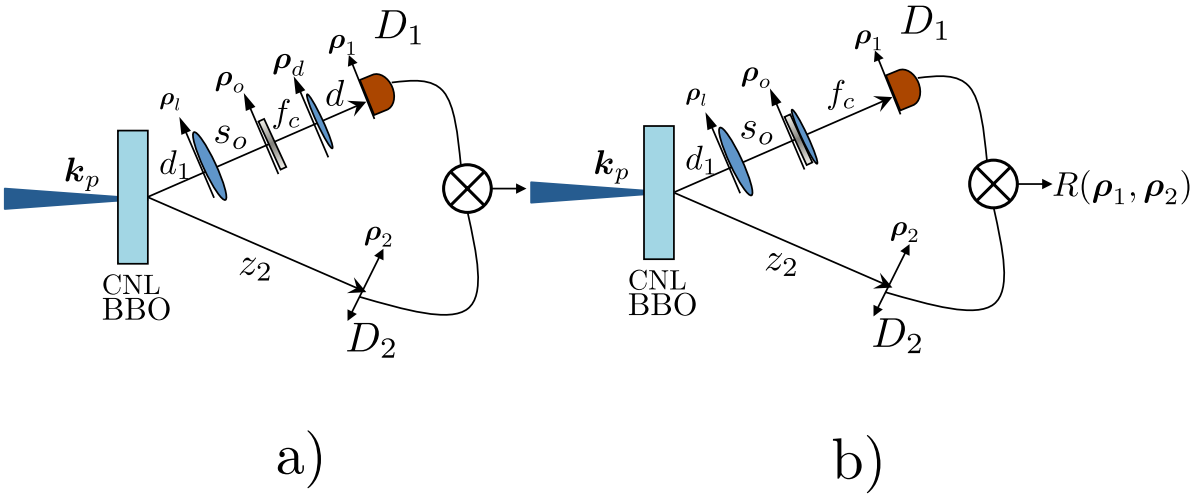

Figura 37. Arreglo experimental para producir imagenes fantasma. En a) la lente colectora se encuentra a una distancia d arbitraria, en b) tenemos el arreglo para el detector cubeta D_1 donde la lente colectora se ha colocado cerca del plano objeto y a la distancia focal f_c del detector D_1.

El fotón acompañante se propaga libremente una distancia z_2 hasta alcanzar al detector D_2 descrito por coordenadas transversales $\boldsymbol{\rho}_2$. Un detector puntual movible que en principio puede ser reemplazado por una fibra óptica escanea el plano transversal de detección.

En los cálculos posteriores estaremos interesados en la tasa de coincidencias entre los planos de detección D_1 con coordenadas transversales $\boldsymbol{\rho}_1$ y detector D_2 con coordenadas

transversales $\boldsymbol{\rho}_2$ expresada como,

$$\begin{aligned} R(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) &\equiv \langle \Psi | a(\boldsymbol{\rho}_2)^\dagger a(\boldsymbol{\rho}_1)^\dagger a(\boldsymbol{\rho}_1) a(\boldsymbol{\rho}_2) | \Psi \rangle \\ &= \left| F\left(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2\right) \right|^2 . \end{aligned} \tag{156}$$

Notemos que la cantidad física de interés entre un detector puntual D_1 en $\boldsymbol{\rho}_1 = 0$ y un detector puntal móvil colocado colocado a una distancia z_2 es la tasa de coincidencias $R(0, \boldsymbol{\rho}_2)$. El efecto de GI se manifiesta cuando la tasa de conicidencia como función de $\boldsymbol{\rho}_2$ revela la estructura espacial de la mascarilla $A(\boldsymbol{\rho}_o)$.

Para el caso más general de la figura 37 (a) y aplicando la ecuación (154), la función de transferencia para el modo señal es,

$$\begin{aligned} H_s\left(\boldsymbol{\rho}_1; \boldsymbol{q}_s\right) \propto & \int d\boldsymbol{\rho}_d \int d\boldsymbol{\rho}_0 \int d\boldsymbol{\rho}_l \int d\boldsymbol{\rho}_s e^{i\boldsymbol{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_s\right|, \frac{k_s}{d_1}\right) \\ & \times h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_l\right|, \frac{-k_s}{f}\right) h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}_l\right|, \frac{k_s}{s_0}\right) A\left(\boldsymbol{\rho}_0\right) h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_d - \boldsymbol{\rho}_0\right|, \frac{k_s}{d}\right) \\ & \times h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_d\right|, -\frac{k_s}{f_c}\right) h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_d\right|, \frac{k_s}{f_c}\right), \end{aligned}$$

que aplicando las propiedades de las funciones gaussianas del apéndice A y pegando la lente colectora a la mascarilla, esto es, haciendo a $d = f_c$ como en la figura 37 (b) simplificamos la expresión anterior como,

$$\begin{aligned} H_s\left(\boldsymbol{\rho}_1; \boldsymbol{q}_s\right) \propto & \int d\boldsymbol{\rho}_0 \int d\boldsymbol{\rho}_l \int d\boldsymbol{\rho}_s e^{i\boldsymbol{q}_s \cdot \boldsymbol{\rho}_s} h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_l - \boldsymbol{\rho}_s\right|, \frac{k_s}{d_1}\right) \\ & \times h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_l\right|, \frac{-k_s}{f}\right) h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}_l\right|, \frac{k_s}{s_0}\right) \\ & \times A\left(\boldsymbol{\rho}_0\right) h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_0\right|, -\frac{k_s}{f_c}\right) h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_0\right|, \frac{k_s}{f_c}\right), \end{aligned} \tag{157}$$

donde hemos omitido factores de fase constante, $\boldsymbol{\rho}_s$ son las coordenadas transversales de fuente, $\boldsymbol{\rho}_o$ y $\boldsymbol{\rho}_l$ representan las coordenadas transversales del objeto y de la lente

respectivamente, $h\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, \frac{-k_s}{f}\right)$ es el factor de fase cuadrático asociado a la lente con distancia focal f, $A(\boldsymbol{\rho}_o)$ representa a la mascarilla que puede ser de amplitud, fase o una combinación de las dos, y $h\left(|\boldsymbol{\rho}_0|, \frac{-k_s}{f_c}\right)$ es el factor cuadrático de fase de la lente colectora con distancia focal f_c.

Para el modo acompañante solo tenemos propagación libre y su función de transferencia es,

$$H_i\left(\boldsymbol{\rho}_2; \boldsymbol{q}_i\right) \propto \int d\boldsymbol{\rho}_i h\left(|\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_i|, \frac{k_i}{z_2}\right) e^{i\boldsymbol{q}_i \cdot \boldsymbol{\rho}_i}, \tag{158}$$

donde $\boldsymbol{\rho}_i$ son las coordenadas transversales de la fuente. Sustituyendo (157) y (158) en ec.(156), obtenemos la tasa de coincidencias,

$$\begin{aligned} R\left(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2\right) \propto \Bigg| & h\left(|\boldsymbol{\rho}_2|, \frac{k_s}{M s_o} + i\frac{2k_i}{z_2 w_0^2 \alpha}\right) h\left(|\boldsymbol{\rho}_1|, \frac{k_s}{f_c}\right) \\ & \times \int d\boldsymbol{\rho}_0 A\left(\boldsymbol{\rho}_0\right) h\left(|\boldsymbol{\rho}_0|, \frac{k_s}{s_0}\right) e^{-i\frac{k_s}{f_c}\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \boldsymbol{\rho}_0} \\ & \times \int d\boldsymbol{\rho}_l h\left(|\boldsymbol{\rho}_l|, D\right) e^{-i\left(\frac{k_s}{M s_o}\boldsymbol{\rho}_2 + \frac{k_s}{s_o}\boldsymbol{\rho}_0\right) \cdot \boldsymbol{\rho}_l} \Bigg|^2, \end{aligned} \tag{159}$$

donde

$$\alpha = k_s/d_1 + k_i/z_2, \tag{160}$$

y M representa la magnificación del sistema, dada por,

$$M = \frac{\frac{\omega_s}{\omega_i} z_2 + d_1}{s_o}. \tag{161}$$

En la ecuación (159) hemos definido un parámetro D y es de la forma,

$$D = k_s\left(\frac{1}{\frac{\omega_s}{\omega_i} z_2 + d_1} + \frac{1}{s_0} - \frac{1}{f} + i\frac{2}{d_1 w_0^2 \alpha}\right), \tag{162}$$

que se relaciona con la formación de imagenes cuando se coloca una lente en el sistema con distancia focal f y al efecto de enfocar el haz de bombeo Gaussiano, caracterizado

por su cintura w_0. D es una cantidad compleja, donde la parte imaginaria se elimina en el límite de onda plana cuando $w_0 \to \infty$. Definimos una distancia imagen s_i para este arreglo como,

$$s_i = \frac{\omega_s}{\omega_i} z_2 + d_1, \tag{163}$$

así obtenemos la definición común de magnificación como $M = s_i/s_o$. Utilizando esta distancia imagen, $\alpha = k_i s_i/(d_1 z_2)$ podemos escribir al parámetro D como,

$$D = k_s \left(\frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_o} - \frac{1}{f} \right) + i \frac{2(s_i - d_1)}{w_0^2 s_i}. \tag{164}$$

Esta condición es de utilidad para definir la posición del plano de detección donde la condición de lentes delgadas sea satisfecha, cuando $\mathrm{Re}(D) = 0$, para z_2 (con valores de d_1, s_0 y f fijos). En el caso degenerado esta condición es equivalente a la versión de onda avanzada del sistema (esquema de Klyshko) así como para la versión no degenerada excepto en que la distancia imagen efectiva es afectada por el factor ω_s/ω_i de la ec.(163).

Para un detector cubeta donde toda la luz se concentra en $\boldsymbol{\rho}_1 = 0$, la tasa de coincidencias la podemos escribir como,

$$R\left(0, \boldsymbol{\rho}_2\right) \propto e^{-\frac{2d_1|\boldsymbol{\rho}_2|^2}{w_0^2 s_i}} \left| \int d\boldsymbol{\rho}_0 A\left(\boldsymbol{\rho}_0\right) G(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_0) \right|^2, \tag{165}$$

en términos de la siguiente definición:

$$G(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_0) = e^{i\frac{k_s|\boldsymbol{\rho}_0|^2}{2s_o}} \int d\boldsymbol{\rho}_l e^{i\frac{D}{2}|\boldsymbol{\rho}_l|^2} e^{-i\frac{k_s}{s_o}\left(\frac{1}{M}\boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_0\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l}. \tag{166}$$

Si nos concentramos en que se cumpla $\mathrm{Re}(D) = 0$, ec(166) es ahora,

$$G(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_0) = e^{i\frac{k_s|\boldsymbol{\rho}_0|^2}{2s_o}} \int d\boldsymbol{\rho}_l e^{-\frac{\omega_s}{\omega_i}\frac{z_2}{w_0^2 s_i}|\boldsymbol{\rho}_l|^2} e^{-i\frac{k_s}{s_o}\left(\frac{1}{M}\boldsymbol{\rho}_2 + \boldsymbol{\rho}_0\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l}. \tag{167}$$

Está función $G(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_0)$ puede ser interpretada como la función de punto extendido, la cual describe la respuesta de un sistema formador de imagenes a una fuente puntual u objeto puntual. La imagen del objeto es la convolución de la mascarilla del objeto y la función de punto extendido (Goodman, 1996). La función de punto extendido $G(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_0)$ tiene un ancho el cual desaparece en el límite de onda plana ($w_0 \to \infty$) y se vuelve mas grande cuando el haz de bombeo es mas enfocado. Para el límite de onda plana,

$$G(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_0) \propto e^{i\frac{k_s|\boldsymbol{\rho}_o|^2}{2s_o}} \delta\left(\boldsymbol{\rho}_o + \frac{1}{M}\boldsymbol{\rho}_2\right), \tag{168}$$

donde tenemos una formación de imagenes ideal, que ímplica una correspondencia uno a uno entre el plano objeto $\boldsymbol{\rho}_o$ y el plano imagen $\boldsymbol{\rho}_2$ (ver el esquema de Klyshko de la figura 38). En el apendice B mostramos como se simplifica la teoría para el caso de una onda plana.

La función gaussiana $G(\boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_0)$ que aparece en ec.(165) se interpreta como una función de apertura en el plano imagen. Cuando el haz de bombeo se enfoca esta función hace que el campo de visión de la imagen se vea límitado.

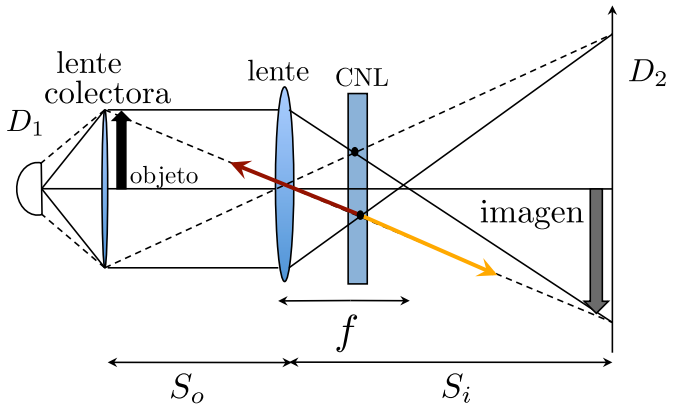

Figura 38. Esquema de Klyshko para GI. En el caso ideal cuando el haz de bombeo puede aproximarse por una onda plana. Un punto en el plano objeto se proyecta en un punto en el plano imagenPittman *et al.* (1995).

Hemos hecho simulaciones numéricas para el caso de una doble rendija y mostramos los resultados en la figura 39. Para estas simulaciones tomamos en cuenta parejas de fotones generadas en un cristal no lineal BBO por un haz de bombeo con longitud de onda $\lambda_p = 0.35\mu m$, cortado de tal forma que los ángulos de emisión de los modos señal y acompañante con frecuencias para fotón señal y acompañante $\lambda_s = \lambda_i = 0.70\mu m$ respectivamente, satisfagan el empatamiento de fases. Las rendijas tiene dimensiones rectangulares de $0.15 \times 1.1mm$ y están separadas del centro de la primera rendija al centro de la segunda rendija por $0.47mm$.

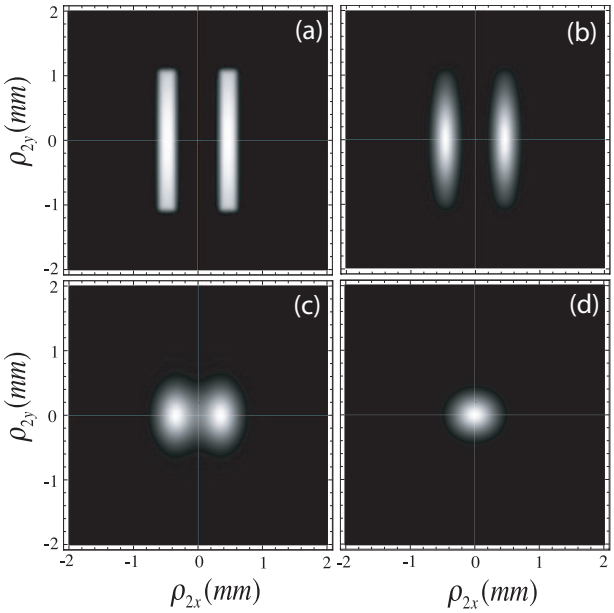

Figura 39. Simulaciones numéricas de la ecuación (165), caso degenerado. La cintura del haz de bombeo w_0 es de: a)3.0 mm, b)1.0 mm, c)0.5 mm y d)0.3 mm.

Hemos seleccionado las distancias involucradas en el brazo señal como: $d_1 = 600mm$, $f = 400mm$, $s_o = 600mm$; notar que $R(0, \boldsymbol{\rho}_2)$ es independiente de la distancia f_c. Para el brazo acompañante, $z_2 = 600mm$. La elección de estos parámetros satisfacen $R(0, \boldsymbol{\rho}_2)$ y obtenemos una magnificación de $M = 2$.

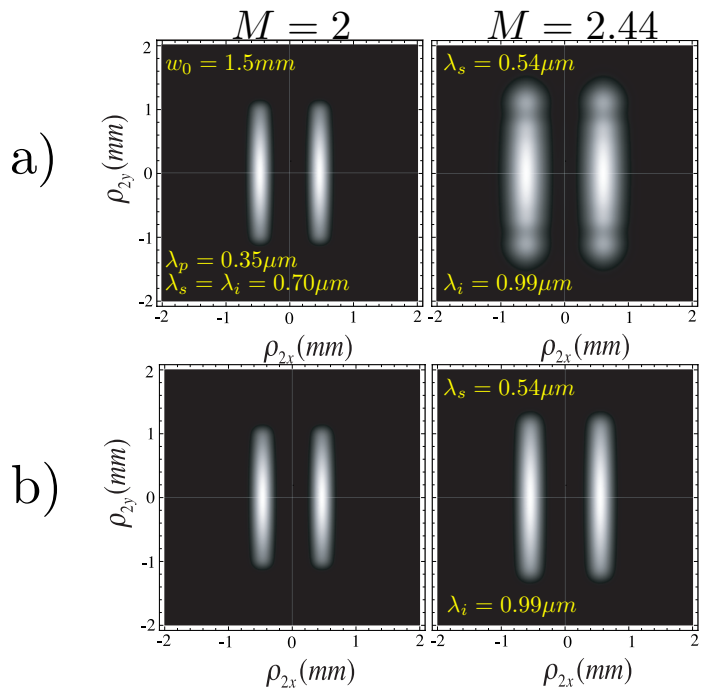

Figura 40. Simulaciones numéricas de la ecuación (165) para una cintura de haz de bombeo de $w_0 = 1.5mm$. En a)El parámetro D es completo y en b)solo se toma la parte $Re\{D\} = 0$.

Modificando el arreglo para uno basado en frecuencias no degeneradas mientras mantenemos fijas las distancias de d_1, s_o, la distancia focal de la lente f y ajustando la distancia z_2 para que la parte Real del parámetro D siga siendo cero, obtenemos un factor de magnificación idéntico determinado por,

$$M = \frac{f}{s_o - f}. \tag{169}$$

Mostramos los resultados numéricos en la figura 39 donde se utiilizaron los siguientes parámetros: cintura del haz $w_0 = 1.5mm$, longitudes de onda $\lambda_p = 0.35\mu m$, $\lambda_s = 0.54\mu m$ y $\lambda_i = 0.99\mu m$.

Para el caso no degenerado y dejando la misma distancia z_2 que en el caso degenerado, notemos que la parte Real del parámetro D no es cero, esto nos deja una imagen con mayor magnificación de $M = 2.44$ pero con menor resolución como se muestra en

la figura 40a. En esta figura también mostramos el caso ideal donde hemos hecho a la parte Real cero y la imagen resultante tiene mayor magnificación sin modificar su resolución.

VI.1.2 Patrones de difracción fantasma

Para estudiar los patrones de difracción fantasma GD mostramos en la figura 41 el prototipo experimental que tomamos en cuenta, el cual es similar al realizado experimentalmente por Strekalov (Strekalov *et al.*, 1995) y aunque obtienen una ecuación para el caso de un haz gaussiano de la tasa de coincidencias, aquí obtendrémos una ecuación más general donde incluimos enfocamiento arbitrario para casos degenerado y no degenerado.

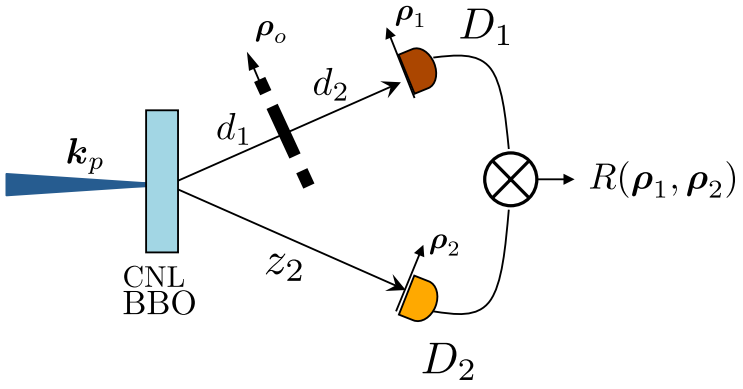

Figura 41. Arreglo experimental para formar patrones de difracción/interferencia fantasma.

De nuevo consideramos caso no degenerado y las condiciones necesarias para el empatamiento de fases para un haz de bombeo Gaussiano con cintura w_0. El fotón señal se propaga una distancia d_1 para alcanzar la mascarilla caracterizada por la función $A(\boldsymbol{\rho}_o)$ propagándose una distancia d_2 hasta el detector señal D_1. El plano de la mascarilla y el del detecotr señal están descritos por coordenadas transversales $\boldsymbol{\rho}_o$ y $\boldsymbol{\rho}_1$ respectivamente. Consideraremos un detector puntual, caracterizado por coordenadas

$\boldsymbol{\rho}_1 = 0$ que puede ser realizado físicamente colocando un pequeño orificio en el plano del detector señal. Notemos que esto es diferente a un detector cubeta como en el caso de GI donde hay una lente colectora antes del detector.

La función de transferencia para el brazo señal es,

$$H_s\left(\boldsymbol{\rho}_1;\boldsymbol{q}_s\right) \propto \int d\boldsymbol{\rho}_0 \int d\boldsymbol{\rho}_s h\left(|\boldsymbol{\rho}_s - \boldsymbol{\rho}_0|, \frac{k_s}{d_1}\right) \times A\left(\boldsymbol{\rho}_0\right) h\left(|\boldsymbol{\rho}_0 - \boldsymbol{\rho}_1|, \frac{k_s}{d_2}\right) e^{i\boldsymbol{q}_s\cdot\boldsymbol{\rho}_s}. \tag{170}$$

El fotón acompañante se propaga libremente una distancia z_2 hasta llegar a un detector D_2 con coordenadas transversales $\boldsymbol{\rho}_2$. Un detector puntal ideal puede ser aproximado por la punta de una fibra óptica colocada en este plano y ser desplazada transversalmente. La función de transferencia para el brazo acompañante es igual a la ec. (158).

La tasa de coincidencias resultante $R(0,\boldsymbol{\rho}_2)$ entre un detector puntual D_1 en $\boldsymbol{\rho}_1 = 0$ y un detector puntual movible colocado en $\boldsymbol{\rho}_2$ es la cantidad física de interés. Sustituyendo las funciones de transferencia en ec.(156) y después de un poco de álgebra obtenemos,

$$R\left(0,\boldsymbol{\rho}_2\right) \propto e^{-\frac{2d_1}{w_0^2 z_0}|\boldsymbol{\rho}_2|^2} \left| \int d\boldsymbol{\rho}_0 \left[A\left(\boldsymbol{\rho}_0\right) e^{-\frac{(z_0-d_1)}{w_0^2 z_0}|\boldsymbol{\rho}_0|^2} \times e^{i\frac{k_s}{2d_2}|\boldsymbol{\rho}_0|^2} \right] e^{i\frac{k_s}{2z_0}|\boldsymbol{\rho}_0|^2} e^{-i\frac{k_s}{z_0}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\boldsymbol{\rho}_2} \right|^2, \tag{171}$$

en términos de la definición

$$z_0 = d_1 + \frac{\omega_s}{\omega_i} z_2. \tag{172}$$

La ecuación (171) contiene una función de apertura definida en el plano de detección $\boldsymbol{\rho}_2$, dada por la función gaussiana que multiplica el patrón de intensidad, asociado al

patrón de difracción de Fresnel de la amplitud compleja que aparece en corchetes. La F.A.P.C. del sistema se describe tal cual un sistema de Klyshko por la tasa de coincidencias entre un detector puntual D_1 y un detector puntual movible D_2, y representa el patrón de difracción de Fresnel de la amplitud del campo eléctrico sobre el plano de la mascarilla a una distancia z_0.

La amplitud compleja en el plano de la mascarilla con coordenadas $\boldsymbol{\rho}_o$ también contiene una función de apertura y es proporcional al ancho de la cintura del haz de bombeo w_0, al igual que la función de apertura en el plano de detección. Ambas aperturas se eliminan en el límite de onda plana ($w_0 \to \infty$) y se vuelven mas agudas cuando se aumenta el enfoque. En el límite de onda plana la ecuación (171) es,

$$R\left(0,\boldsymbol{\rho}_2\right) \propto \left| \int d\boldsymbol{\rho}_0 \left[A\left(\boldsymbol{\rho}_0\right) e^{i\frac{k_s}{2d_2}|\boldsymbol{\rho}_0|^2} \right] e^{i\frac{k_s}{2z_0}|\boldsymbol{\rho}_0|^2} e^{-i\frac{k_s}{z_0}\boldsymbol{\rho}_0\cdot\boldsymbol{\rho}_2} \right|^2 . \tag{173}$$

Está ecuación es similar al patrón de difracción en la aproximación de Fresnel en el esquema de onda avanzada.

Mostramos los resultados numéricos para la tasa de coincidencias $R(0,\boldsymbol{\rho}_2)$ en la figura 42 donde seleccionamos los siguientes parámetros: distancia del cristal a la mascarilla $d_1 = 500mm$, distancia de la mascarilla al plano de detección señal $d_2 = 500mm$, y la distancia al plano de detección acompañante $z_2 = 1200mm$.

Para las figuras donde mostramos los resultados numéricos para el caso de GI y GD donde podemos aproximar al haz de bombeo como una onda plana para ancho de cintura de $w_0 = 3mm$ o mayor, para los parámetros experimentales que escogimos, de lo contrario tenemos los resulatados más generales en las ecuaciones (165) y (171). Además

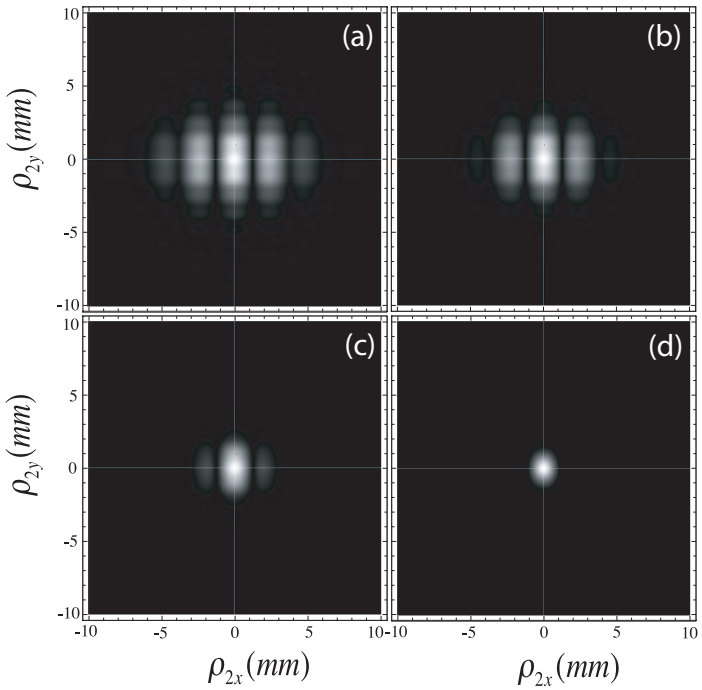

Figura 42. Simulaciones numéricas de la ecuación (171) caso degenerado. Cintura de haz de bombeo w_0= a)3.0 mm, b)2.5 mm, c)1.0 mm y d)0.5 mm.

el esquema de Klyshko lo podemos seguir aplicando para haces de bombeo diferentes al de una onda plana, esto implica por supuesto una desviación en la conservación del momento transversal perfecto. Con esto en mente, en el esquema de Klyshko el modo señal con vector de onda bien definido k_s contrapropagándose está correlacionado a una gama de vectores acompañantes k_i's, que se propagan hacía un plano de detección en lugar de un solo rayo caracterizado por su vector de onda k_i como se muestra en la figura 43.

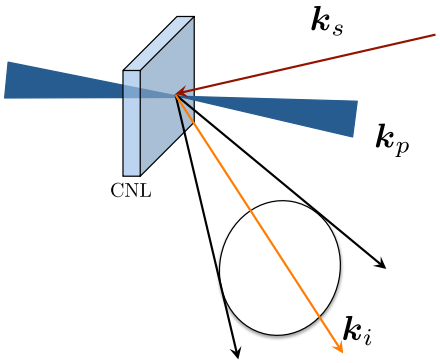

Figura 43. Esparcimiento de vectores de onda en el esquema de Klyshko. El haz de bombeo enfocado evita el empatamiento de fases perfecto entre los tres modos. La relación uno a uno entre modos $\boldsymbol{k}_i$ y $\boldsymbol{k}_s$ se pierde.

VI.2 Conclusiones

Este trabajo de tesis se concentro en el acondicionamiento de parejas de fotones generadas por el proceso paramétrico de conversión descendente espontáneo, cuando el haz de bombeo presenta estructura espacial, esto es, cuando el perfil transversal del haz de bombeo difiere de un haz de bombeo Gaussiano u onda plana.

Se tomaron como ejemplos de haces de bombeo a los modos láser paraxiales y los haces cuasi libres de difracción Helmholtz Gauss. A partir de la expresión general para la función de empatamiento de fases en el marco de referencia de los detectores, se obtuvieron los diferentes tipos y acondicionamientos en correlaciones espaciales entre parejas de fotones en amplitud de probabilidad conjunta. Se estudiaron las correlaciones en desintonías de ángulos polares-azimutales y espectrales, así como en el espacio de momentos transversal. Se demostró que podemos tener una gran variedad de correlaciones variando los parámetros de walk-off espacial, cintura del haz de bombeo w_0, longitud del cristal L y espectro angular del haz de bombeo $\Xi(\boldsymbol{q}_{s_\perp}, \boldsymbol{q}_{i_\perp})$. En la aproximación de cristal delgado podemos reconstruir el perfil transversal del haz de bombeo detectando

en coincidencias.

Se propuso un esquema de Klyshko más general para este tipo de haces cuando las parejas de fotones presentan enredamiento. Obtuvimos la ecuación general para la función de amplitud de probabilidad conjunta para haces de bombeo estructurados espacialmente, y su propagación para sistemas ópticos arbitrarios. Con esta herramienta logramos obtener de una forma sencilla para experimentos de GI y GD resultados generales de forma analítica y numérica, cuando se utilizan haces de bombeo Gaussianos enfocados arbitrariamente.

Este estudio que se llevó a cabo se enfoco en su mayoría para SPDC tipo I y puede ser implementada para tipo II fácilmente. La teoría es eficiente bajo ciertas aproximaciones y puede ser aplicada para experimentos reales en laboratorio que será de interés en aplicaciones futuras, por la variedad de estados cuánticos que pueden obtenerse mediante el acondicionamiento de las parejas de fotones al manipular el haz de bombeo.

Referencias bibliográficas

Abouraddy, A. F., Saleh, B. E. A., Sergienko, A. V., y Teich, M. C. (2001). Role of entanglement in two photon imaging. *Phys. Rev. Lett.*, **87**(12): 3602.

Abouraddy, A. F., Saleh, B. E. A., Sergienko, A. V., y Teich, M. C. (2002). Entangled-photon fourier optics. *J. Opt. Soc. Am. B*, **19**(5): 1174–1184.

Abramowitz, M. y Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York.

Bandres, M. A. y Gutiérrez, J. C. (2004). Ince-gaussian modes of the paraxial wave equation and stable resonators. *J. Opt. Soc. Am. A*, **21**(5): 873–880.

Bandres, M. A., Gutiérrez, V. J. C., y Chávez, C. S. (2004). Parabolic nondiffracting optical wave fields. *Opt. Lett.*, **29**(1): 44–46.

Barreiro, J. T., Langford, N. K., Peters, N. A., y Kwiat, P. G. (2005). Generation of hyperentangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **95**(26).

Barrett, M. D., Chiaverini, J., Schaetz, T., J., B., Itano, W. M., Jost, J. D., Knill, E., Langer, C., Leibfried, D., Ozeri, R., y Wineland (2004). Deterministic quantum teleportation of atomic qubits. *Nature*, **429**: 737–739.

Basano, L. y Ottonello, P. (2007). Use of an intensity threshold to improve the visibility of ghost images produced by incoherent light. *App. Opt.*, **46**(25): 6291–6296.

Belinski, A. V. y Klyshko, D. N. (1994). *JETP*, **78**: 259.

Bell, J. S. (1966). On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, **38**(3): 447–452.

Bennett, C. H. y Brassard, G. (1984). Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. En *Proceedings of IEEE International conference on computers, systems and signal processing*, páginas 175–179, Bangalore, India.

Bennink, R. S., Bentley, S. J., y Boyd, R. W. (2002). Two photon coincidence imaging with a classical source. *Phys. Rev. Lett.*, **89**(11): 3601.

Bennink, R. S., Bentley, S. J., W., B. R., y Howell, J. C. (2004). Realization of the epr paradox using momentum- and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, **92**(21): 403.

Bloembergen, N. (1977). *Nonlinear Optics*. Pearson Addison Wesley, London.

Bohm, D. (1980). *Wholeness and the implicate order*. Routledge classic, New York.

Bohm, D. y Bub, J. (1966). A proposed solution of the measurement problem in quantum mechanics by a hidden variable theory. *Rev. Mod. Phys.*, **38**(3): 453–469.

Born, M. y Wolf, E. (1999). *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Cambridge University Press, New York.

Bouwmeester, D., Pan, J.-W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H., y Zeilinger, A. (1997). Experimental quantum teleportation. *Nature*, **390**: 575–579.

Boyd, R. W. (1992). *Nonlinear Optics*. Academic Press, New York.

Brendel, J., Gisin, N., Tittel, W., y Zbinden, H. (1999). Pulse energy-time entangled twin-photon source for quantum communication. *Phys. Rev. Lett.*, **82**(12): 2594–2597.

Burnham, D. C. y Weinberg, D. L. (1970). Observation of simultaneity in parametric production of optical photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **25**(2): 84–87.

Carrasco, S. *et al.* (2006). *Phys. Rev. A*, **73**(6): 3802.

Clauser, J. F. y Horne, M. A. (1974). Experimental consequences of objective local theories. *Phys. Rev. D*, **10**(2): 526–535.

Clauser, J. F. y Shimony, A. (1978). *Rep. Prog. Phys.*, **41**(12): 1881.

Cramer, J. G. (1980). Generalized absorber theory and the einstein-podolsky-rosen paradox. *Phys. Rev. D*, **22**(2): 362–376.

Cramer, J. G. (1986). The transactional interpretation of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, **58**(3): 647–687.

D'Angelo, M., Yoon-Ho, K., Kulik, S. P., y Shih, Y. H. (2004). Identifying entanglement using quantum ghost interference and imaging. *Phys. Rev. Lett.*, **92**(23): 3601.

Dirac, P. A. M. (1938). *Proc. R. Soc. London A*, **167**: 148–169.

Durnin, J. (1987). Exact solutions for nondiffracting beams. the scalar theory. *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**(4): 651–654.

Einstein, A., Rosen, N., y Podolsky, B. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, **47**(10): 777–780.

Ekert, A. K. (1991). Quantum cryptography based on bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, **67**(6): 661–663.

Erkmen, B. I. y Shapiro, J. H. (2008). Unified theory of gi with gaussian state light. *Phys. Rev. A*, **77**(4): 3809.

Ferri, F., Magatti, D., Gatti, A., Bache, M., Brambrilla, E., y Lugiato, L. A. (2005). High resolution ghost image and ghost diffraction experiments with thermal light. *Phys. Rev. Lett.*, **94**(18): 3602.

Ferri, F., Magatti, D., Sala, V. G., y Gatti, A. (2008). Longitudinal coherence in thermal ghost imaging. *Appl. Phys. Lett.*, **92**(26): 1109.

Fokker, A. D. (1929). Ein invarianter variationssatz für die bewegung mehrerer elektrischer massenteilchen. *Zeit. Phys. A*, **58**(5-6): 386–393.

Fonseca, E. J. S., Barbosa, G. A., Monken, C. H., y S., P. (1999). Transverse coherent length of down-converted light in the two-photon state. *Phys. Rev. A*, **59**(2): 1608–1614.

Freedman, S. J. y Clauser, J. F. (1972). Experimental test of local-hidden variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, **28**(14): 938–941.

Friberg, S., Hong, C. H., y Mandel, L. (1985). Measurement of time delays in the parametric production of photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **54**(18): 2011–2013.

Gahagan, K. T. y Swartzlander, G. A. J. (1996). Optical vortex trapping of particles. *Opt. Lett.*, **21**(11): 827–829.

Galajda, P. y Ormos, P. (2003). Orientation of flat particles in optical tweezers by linearly polarized light. *Opt. Expr.*, **11**(5): 446–451.

Garrison, J. C. y Chiao, R. Y. (2008). *Quantum Optics*. Oxford University, New York.

Gatti, A., Brambilla, E., Bache, M., y Lugiato, L. A. (2004). Ghost imaging with thermal light. comparing entanglement and classical correlation. *Phys. Rev. Lett.*, **93**(9): 3602.

Gerry, C. y Knight, P. (2005). *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press.

Ghosh, R. y Mandel, L. (1987). Observation of nonclassical effects in the interference of two photons. *Phys. Rev. Lett.*, **59**(17): 1903–1905.

Gisin, N., Ribordy, G., Tittel, W., y Zbinden, H. (2002). Quantum cryptography. *Rev. Mod. Phys.*, **74**(1): 145–195.

Glauber, R. J. (1963). The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.*, **130**(6): 2529–2539.

Goodman, J. W. (1996). *Introduction to Fourier Optics*. McGraw Hill, Boston.

Gori, F., Guattari, G., y Padovani, C. (1987). Bessel gauss beams. *Opt. Comm.*, **64**(6): 491–495.

Gottesman, D. y Chuang, I. L. (1999). Demonstrating the viability of universal quantum computation using teleportation and single-qubit operations. *Nature*, **402**: 390–393.

Grice, W. P., U'Ren, A. B., y Walmsley, I. A. (2001). Eliminating frequency and space-time correlations in multiphon states. *Phys. Rev. A*, **64**(6): 3815.

Gutiérrez, J. C. y Bandres, M. A. (2005). Helmholtz-gauss waves. *J. Opt. Soc. Am. A*, **22**(2): 289–298.

Gutiérrez, V. J. C., Iturbe-Castillo, M. D., y Chávez, C. S. (2000). Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams. *Opt. Lett.*, **25**(20): 1493–1495.

Gutiérrez, V. J. C., Iturbe-Castillo, M. D., Ramírez, G. A., Tepichín, E., Rodríguez, D. R. M., Chávez, C. S., y New, G. H. C. (2001). Experimental demonstration of optical mathieu beams. *Opt. Comm.*, **195**(1-4): 35–40.

Hecht, E. (2002). *Optics*. Addison Wesley.

Hong, C. K. y Mandel, L. (1985). Theory of parametric frequency down conversion of light. *Phys. Rev. A*, **31**(4): 2409–2418.

Hong, C. K., Ou, Z. Y., y Mandel, L. (1987). Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference. *Phys. Rev. Lett.*, **59**(18): 20244–2046.

Joobeur, A., Saleh, B. E. A., y Teich, M. C. (1994). Spatiotemporal coherence properties of entangled light beams generated by parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, **50**(4): 3349–3361.

Joobeur, A., Saleh, B. E. A., Larchuk, T. S., y Teich, M. C. (1996). Coherence properties of entangled light beams generated by parametric down conversion: Theory and experiment. *Phys. Rev. A*, **53**(6): 4360–4371.

Kalnins, E. G. y Miller, W. J. (1976). Lie theory and separation of variables. 11. the epd equation. *J. Math. Phys.*, **17**(3): 369.

Karmakar, S. y Shih, Y. H. (2010). Quantum sensor using two-color ghost imaging technology. En *Frontiers in Optics (FiO)*, Rochester, New York.

Klyshko, D. N. (1982). *Sov. Phys. JETP*, **56**: 753.

Klyshko, D. N. (1998). Combine epr and two slits experiments: Interference of advanced waves. *Phys. Lett. A*, **132**(6-7): 299–304.

Kuzucu, O. *et al.* (2005). Two photon coincident-frequency entanglement via extended phase matching. *Phys. Rev. Lett.*, **94**(8): 3601.

Kwiat, P. G., Mattle, K., Weinfurter, H., y Zeilinger, A. (1995). New high-intensity source of polarization entangled photon pairs. *Phys. Rev. Lett.*, **75**(24): 4337–4341.

Lanco, L. *et al.* (2006). Semiconductor waveguide source of counterpropagating twin photons. *Phys. Rev. Lett.*, **97**(17): 3901.

Law, C. K., Walmsley, I., y Eberly, J. H. (2000). Continous frequency entanglement: effective finite hilbert space and entropy control. *Phys. Rev. Lett.*, **84**(23): 5304–5307.

Mandel, L. y Wolf, E. (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press.

Marcikik, I., Riedmatten, H. d., Tittel, W., Zbinden, H., y Gisin, N. (2002). Long distance teleportation of qubits at telecommunication wavelengths. *Nature*, **421**: 509–513.

Monken, C. H., Ribeiro, P. S., y Padua, S. (1998). Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, **57**(4): 3123–3126.

Novotny, L., Bian, R. X., y Xie, X. S. (1997). Theory of nanometric optical tweezers. *Phys. Rev. Lett.*, **79**(4): 645–648.

Osorio, C. I., Molina-Terriza, G., Font, B. G., y Torres, J. P. (2007). Azimuthal distinguishability of entangled photons generated in spontaneous parametric down-conversion. *Opt. Expr.*, **15**(22): 14636–14643.

Ou, Z. Y. y Mandel, L. (1988). Violation of bells inequality and classical probability in a two photon correlation experiment. *Phys. Rev. Lett.*, **61**(1): 50–53.

Penrose, R. (2005). *The road to reality*. Alfred A. Knopf, New York.

Pittman, T. B., Shih, Y. H., Strekalov, D. V., y Sergienko, A. V. (1995). Optical imaging by means of two photon quantum entanglement. *Phys. Rev. A*, **52**(5).

Pittman, T. B., Strekalov, D. V., Klyshko, D. N., Rubin, M. H., Sergienko, A. V., y Shih, Y. H. (1996a). Two photon geometric optics. *Phys. Rev. A*, **53**(4): 2804–2815.

Pittman, T. B., Strekalov, D. V., Migdall, A., Rubin, M. H., Sergienko, A. V., y Shih, Y. H. (1996b). Can two-photon interference be considered the interference of two photons? *Phys. Rev. Lett.*, **77**(10): 1917–1920.

Raymer, M. G., Noh, J., Banaszek, K., y Walmsley, I. A. (2005). Pure state single photon wave packet generation by parametric down conversion in a distributed microcavity. *Phys. Rev. A*, **72**(2): 3825.

Ribeiro, P. H. S., Monken, C. H., y Barbosa, G. A. (1994). Measurement of coherence area in parametric downconversion luminescence. *Appl. Opt.*, **33**(3): 352–355.

Ribeiro, P. H. S., Caetano, D. P., Monken, C. H., Pardal, J. T. C., y Khoury, A. Z. (2004). Manipulation of quantum spatial properties of light. *J. Mod. Opt.*, **51**(6-7): 983–990.

Rubin, M. H. (1996). Transverse correlation in optical spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, **54**(6): 5349–5360.

Rubin, M. H. y Shih, Y. H. (2008). Resolution of ghost imaging for non degenerate parametric down conversion. *Phys. Rev. A*, **78**(3): 3836.

Rubin, M. H., Klyshko, D. N., Shih, Y. H., y Sergienko, A. V. (1994). Theory of two-photon entanglement in type ii optical parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, **50**(6): 5122–5133.

Saleh, B. E. A. (1978). *Photoelectron statics*. Springer, Berlin.

Saleh, B. E. A., Abouraddy, A. F., Sergienko, A. V., y Teich, M. C. (2000). Duality between partial coherence and partial entanglement. *Phys. Rev.*, **62**(4).

Santos, I. F., Aguirre, G. J. G., y Padua, S. (2008). Comparing quantum imaging with classical second order incoherent imaging. *Phys. Rev. A*, **77**(4): 3832.

Schwarz, U. T., Bandres, M. A., y Gutiérrez, J. C. (2004). Observation of ince-gaussian modes in stable resonators. *Opt. Lett.*, **29**(16): 1870–1872.

Shen, Y. R. (1984). *The Principles of Nonlinear Optics*. John Wiley, New York.

Shih, Y. y Alley, C. (1988). New type of einstein-podolsky-rosen bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion. *Phys. Rev. Lett.*, **61**(26): 2921–2924.

Shih, Y. H. (2001). Quantum entanglement and quantum teleportation. *Ann. Phys.*, **513**(1): 19–34.

Shih, Y. H. (2007a). Quantum imaging. *IEEE Journal of selected topics in Quantum Electronics*, **13**(4): 1016–1030.

Shih, Y. H. (2007b). The physics of 2 is not 1+1. *recuperado de, arXiv.org/abs/0706.2097*.

Siegman, A. E. (1986). *Lasers*. University Science, Mill Valley, Ca.

Steane, A. (1998). Quantum computing. *Rep. Prog. Phys.*, **61**(2): 117.

Steuernagel, O. y Rabitz, H. (1998). Spontaneous parametric down-conversion for an arbitrary monochromatic pump beam. *Opt. Comm.*, **154**(5-6): 285–289.

Stoler, D. (1981). Operator methods in physical optics. *J. Opt. Soc. Am.*, **71**(3): 334–341.

Strekalov, D. V., Sergienko, A. V., Klyshko, D. N., y Shih, Y. H. (1995). Observation of two photon ghost interference and diffraction. *Phys. Rev. Lett.*, **74**(18): 3600–3603.

Szwaykowki, P. y Castañeda, J. O. (1991). Nondiffracting beams and the self-imaging phenomenon. *Opt. Comm.*, **83**(1-2): 1–4.

Terriza, G. m., Minardi, S., Deyanova, Y., Osorio, C. I., Hendrych, M., y Torres, J. P. (2005). Control of the shape of the spatial mode function of photons generated in noncollinear spontaneous parametric down-conversion. *Phys. Rev. A*, **72**(6): 5802.

Tetrode, H. (1922). über den wirkungszusammenhang der welt. eine erweiterung der klassischen dynamik. *Zeit. Phys. A*, **10**(1): 317–328.

Torres, J. P. *et al.* (2005a). Engineering the frequency correlations of entangled two-photon states by achromatic phase matching. *Opt. Lett.*, **30**(3): 314–316.

Torres, J. P., Molina-Terriza, G., y Torner, L. (2005b). The spatial shape of entangled photon states generated in non-collinear, walking parametric downconversion. *J. Opt. B*, **7**(9): 235–239.

U'Ren, A. B. *et al.* (2006). Generation of two photon states with an arbitrary degree of entanglement via nonlinear crystal superlattices. *Phys. Rev. Lett.*, **97**(22): 3602.

U'Ren, A. B., Banaszek, K., y Walmsley, I. A. (2003). Photon engineering for quantum information processing. *Quant. Inf. Comput.*, **3**: 480.

U'Ren, A. B., Erdmann, R., y Walmsley, I. A. (2005). Synthesis of time-bin entangled states via tailored group velocity matching. *J. Mod. Opt.*, **52**(16): 2197–2205.

Valencia, A., Scarcelli, G., D'Angelo, M., y Shih, Y. H. (2005). Two photon imaging with thermal light. *Phys. Rev. Lett.*, **94**(6): 3601.

Valencia, A., Ceré, A., Shi, X., Molina-Terriza, G., y Torres, J. P. (2007). Shaping the waveform of entangled photons. *Phys. Rev. Lett.*, **99**(24): 3601.

Wangsness, R. K. (1989). *Campos electromagnéticos*. Limusa, México.

Watson, G. N. (1966). *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge University Press.

Wheeler, J. A. y Feynman, R. P. (1945). Interation with the absorber as the mechanism of radiation. *Rev. Mod. Phys.*, **17**(2-3): 157–181.

Wheeler, J. A. y Feynman, R. P. (1949). Classical electrodynamics in terms of direct interparticle action. *Rev. Mod. Phys.*, **21**(3): 425–433.

Xi-Hao, C., Qian, L., Kai-Hong, L., y Ling-An, W. (2009). Lensless ghost imaging with true thermal light. *Opt. Lett.*, **34**(5): 695–697.

Yangjian, C., Qiang, L., y Korotkova, O. (2009). Ghost imaging with twisted gaussian schell-model beam. *Opt. Expr.*, **17**(4): 2453–2464.

Yariv, A. (1989). *Quantum electronics*. John Wiley, New York.

Yee, F. T., Huang, C. E., Hu, B. Q., Eckardt, R. C., Fan, Y. X., Byer, R. L., y Feigelson, R. S. (1987). Second harmonic generation and accurate index of refraction measurements in flux-grown ktiopo (ktp). *Appl. Opt.*, **26**(12): 2390–2394.

Apéndice A

Notación

La notación que utilizamos $h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_j - \boldsymbol{\rho}\right|, \frac{k}{z_j}\right)$ para las funciones gaussianas simplifica los cálculos para sistemas con muchos elementos ópticos. Son propiedades de estas funciones las siguientes:

$$h\left(\left|\boldsymbol{\rho}\right|, \beta_1 + \beta_2\right) = h\left(\left|\boldsymbol{\rho}\right|, \beta_1\right) h\left(\left|\boldsymbol{\rho}\right|, \beta_2\right), \tag{174}$$

$$h^*\left(\left|\boldsymbol{\rho}\right|, \beta\right) = h\left(\left|\boldsymbol{\rho}\right|, -\beta\right), \tag{175}$$

$$h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_2\right|, \beta\right) = h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_1\right|, \beta\right) h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_2\right|, \beta\right) e^{-i\beta\boldsymbol{\rho}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_2}, \tag{176}$$

$$\int d\boldsymbol{\rho} h\left(\left|\boldsymbol{\rho}\right|, \beta\right) e^{i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\rho}} = i\frac{2\pi}{\beta} h\left(\left|\alpha\right|, -\frac{1}{\beta}\right). \tag{177}$$

Notemos que la ecuación 7 es la transformada de Fourier de una gaussiana, que nos resulta en otra función gaussiana.

Apéndice B

Formación de imagenes fantasma con ondas planas

Para el arreglo experimental de formación de imagenes fantasma de la figura 44, la F.A.P.C. es de la forma,

$$F\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2\right)\propto\int d\boldsymbol{q}_{s_\perp}\int d\boldsymbol{q}_{i_\perp}\Xi\left(\boldsymbol{q}_{s_\perp},\boldsymbol{q}_{i_\perp}\right)e^{-\frac{1}{4}w_0^2q_\perp^2}\int d\boldsymbol{\rho}_s\int d\boldsymbol{\rho}_l\int d\boldsymbol{\rho}_0 e^{i\boldsymbol{q}_{s_\perp}\cdot\boldsymbol{\rho}_s}$$
$$\times h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_l-\boldsymbol{\rho}_s\right|,\frac{k_s}{d_1}\right)h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_l\right|,\frac{-k_s}{f}\right)h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\rho}_l\right|,\frac{k_s}{s_0}\right)A\left(\boldsymbol{\rho}_0\right)h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_0\right|,\frac{k_s}{f_c}\right)$$
$$\times h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_0\right|,\frac{-k_s}{f_c}\right)\int d\boldsymbol{\rho}_i h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_i\right|,\frac{k_i}{z_2}\right)e^{i\boldsymbol{q}_{i_\perp}\cdot\boldsymbol{\rho}_i},\tag{178}$$

donde $\boldsymbol{q}_{j\perp}$ son los vectores de onda transversales para modos señal y acompañante $j=s,i$ respectivamente, $\boldsymbol{\rho}_j$ son los planos transversales de los diferentes componentes ópticos y $\Xi(\boldsymbol{q}_{js\perp},\boldsymbol{q}_{i\perp})$ es el espectro angular del haz de bombeo. Sí el haz de bombeo es una onda plana, entonces,

$$\Xi\left(\boldsymbol{q}_{s_\perp},\boldsymbol{q}_{i_\perp}\right)e^{-\frac{1}{4}w_0^2q_\perp^2}\rightarrow\delta^{(2)}\left(\boldsymbol{q}_{s_\perp}+\boldsymbol{q}_{i_\perp}\right).\tag{179}$$

La integral en vectores de onda transversales es,

$$\int d\boldsymbol{q}_{s_\perp}\int d\boldsymbol{q}_{i_\perp}\delta^{(2)}\left(\boldsymbol{q}_{s_\perp}+\boldsymbol{q}_{i_\perp}\right)e^{i\boldsymbol{q}_{s_\perp}\cdot\boldsymbol{\rho}_s}e^{i\boldsymbol{q}_{i_\perp}\cdot\boldsymbol{\rho}_i}=\delta^{(2)}\left(\boldsymbol{\rho}_{i_\perp}-\boldsymbol{\rho}_{s_\perp}\right),\tag{180}$$

y si es un haz gaussiano, donde $q_\perp^2\approx q_{+x}^2+q_{+y}^2=\left(q_{sx}+q_{ix}\right)^2+\left(q_{sy}+q_{iy}\right)^2$ entonces,

$$\int d\boldsymbol{q}_{s_\perp}\int d\boldsymbol{q}_{i_\perp}e^{-\frac{1}{4}w_0^2q_\perp^2}e^{i\boldsymbol{q}_{s_\perp}\cdot\boldsymbol{\rho}_s}e^{i\boldsymbol{q}_{i_\perp}\cdot\boldsymbol{\rho}_i}=\frac{4\pi}{w_0^2}\delta\left(\rho_{ix}-\rho_{sx}\right)\delta\left(\rho_{iy}-\rho_{sy}\right)e^{-\frac{1}{w_0^2}\left|\boldsymbol{\rho}_s\right|^2},\tag{181}$$

por lo que si se cumple ecuación (180), la ecuación (178) es ahora,

$$F\left(\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2\right)\propto\int d\boldsymbol{\rho}_s\int d\boldsymbol{\rho}_l\int d\boldsymbol{\rho}_0 h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_l-\boldsymbol{\rho}_s\right|,\frac{k_s}{d_1}\right)h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_l\right|,\frac{-k_s}{f}\right)$$

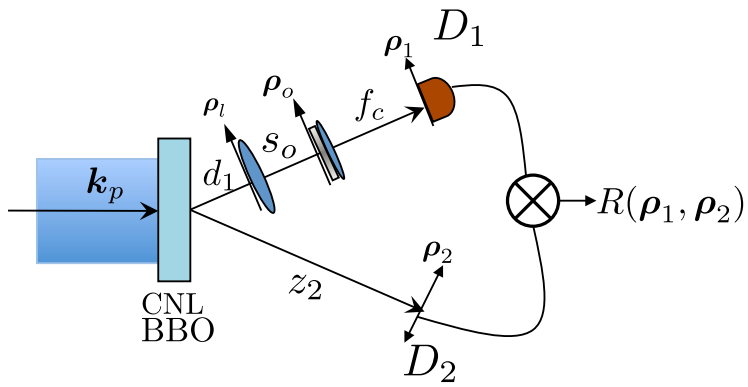

Figura 44. Formación de imagenes fantasma. Caso ideal con un haz de bombeo plano.

$$\times h\left(|\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\rho}_l|,\frac{k_s}{s_0}\right)A\left(\boldsymbol{\rho}_0\right)h\left(|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_0|,\frac{k_s}{f_c}\right)h\left(|\boldsymbol{\rho}_0|,\frac{-k_s}{f_c}\right)h\left(|\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_s|,\frac{k_i}{z_2}\right). \quad (182)$$

Para el haz gaussiano obtenemos una ecuación similar a (182) sólo que multiplicada por el factor $e^{-\frac{1}{w_0^2}|\boldsymbol{\rho}_s|^2}$. Aplicando las propiedades de las funciones gaussianas del apéndice A e integrando primero en variables fuente señal en ecuación (182) tenemos que,

$$\int d\boldsymbol{\rho}_s h\left(|\boldsymbol{\rho}_l-\boldsymbol{\rho}_s|,\frac{k_i}{d_1}\right)h\left(|\boldsymbol{\rho}_2-\boldsymbol{\rho}_s|,\frac{k_i}{z_2}\right)=h\left(|\boldsymbol{\rho}_l-\boldsymbol{\rho}_2|,\frac{k_ik_s}{k_id_1+k_sz_2}\right). \quad (183)$$

La ecuación (183) es otra propiedad que cumplen las funciones gaussianas. Integrando ahora en variables transversales de la lente (l) y con el resultado (183),

$$\begin{aligned}
&\int d\boldsymbol{\rho}_l h\left(|\boldsymbol{\rho}_l-\boldsymbol{\rho}_2|,\frac{k_ik_s}{k_id_1+k_sz_2}\right)h\left(|\boldsymbol{\rho}_l|,\frac{-k_s}{f}\right)h\left(|\boldsymbol{\rho}_0-\boldsymbol{\rho}_l|,\frac{k_s}{s_0}\right)\\
&=h\left(|\boldsymbol{\rho}_2|,\frac{k_ik_s}{k_id_1+k_sz_2}\right)h\left(|\boldsymbol{\rho}_0|,\frac{k_s}{s_0}\right)\int d\boldsymbol{\rho}_l h\left(|\boldsymbol{\rho}_l|,\frac{k_ik_s}{k_id_1+k_sz_2}\right)\\
&\qquad\times h\left(|\boldsymbol{\rho}_l|,\frac{-k_s}{f}\right)h\left(|\boldsymbol{\rho}_l|,\frac{k_s}{s_0}\right)e^{-i\left(\frac{k_ik_s}{k_id_1+k_sz_2}\boldsymbol{\rho}_2+\frac{k_s}{s_0}\boldsymbol{\rho}_0\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l}\\
&=h\left(|\boldsymbol{\rho}_2|,\frac{k_ik_s}{k_id_1+k_sz_2}\right)h\left(|\boldsymbol{\rho}_0|,\frac{k_s}{s_0}\right)\int d\boldsymbol{\rho}_l e^{-i\left(\frac{k_ik_s}{k_id_1+k_sz_2}\boldsymbol{\rho}_2+\frac{k_s}{s_0}\boldsymbol{\rho}_0\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l}\\
&\qquad\times h\left(|\boldsymbol{\rho}_l|,\frac{k_ik_s}{k_id_1+k_sz_2}+\frac{k_s}{s_0}-\frac{k_s}{f}\right)
\end{aligned}$$

La integral en la expresión anterior se simplifica si se cumplen las siguientes condiciones, para el caso no degenerado,

$$\frac{k_i k_s}{k_i d_1 + k_s z_2} + \frac{k_s}{s_0} = \frac{k_s}{f}, \tag{184}$$

y para el caso degenerado,

$$\frac{1}{d_1 + z_2} + \frac{1}{s_0} = \frac{1}{f}, \tag{185}$$

pero como $s_i = d_1 + z_2$, entonces se cumple $\frac{1}{s_i} + \frac{1}{s_0} = \frac{1}{f}$, donde d_i es la distancia de la lente hacia el cristal y del cristal hasta el detector D_2, es la distancia imagen en un sistema formador de imagenes clásico (el cristal se comporta como un espejo plano). La interpretación de Klyshko es que el detector D_1 sirve como fuente de *ondas avanzadas*, que se propagan en sentido inverso en el tiempo a través del sistema señal, siendo éstas después moduladas por el haz de bombeo en la cara de cristal, viajan posteriormente como ondas retardadas por el sistema acompañante y son absorbidas por el detector D_2. Por lo tanto para el caso no degenerado se cumple la ecuación (184) y la F.A.P.C. es,

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \propto & \int d\boldsymbol{\rho}_0 h\left(|\boldsymbol{\rho}_1 - \boldsymbol{\rho}_0|, \frac{k_s}{f_c}\right) h\left(|\boldsymbol{\rho}_0|, \frac{-k_s}{f}\right) h\left(|\boldsymbol{\rho}_2|, \frac{k_i k_s}{k_i d_1 + k_s z_2}\right) \\ & \times A(\boldsymbol{\rho}_0) h\left(|\boldsymbol{\rho}_0|, \frac{k_s}{s_0}\right) \int d\boldsymbol{\rho}_l e^{-ik_s\left(\frac{k_i}{k_i d_1 + k_s z_2}\boldsymbol{\rho}_2 + \frac{1}{s_0}\boldsymbol{\rho}_0\right)\cdot\boldsymbol{\rho}_l} \\ = & h\left(|\boldsymbol{\rho}_2|, \frac{k_i k_s}{k_i d_1 + k_s z_2}\right) h\left(|\boldsymbol{\rho}_1|, \frac{k_s}{f_c}\right) \int d\boldsymbol{\rho}_0 A(\boldsymbol{\rho}_0) h\left(|\boldsymbol{\rho}_0|, \frac{k_s}{s_0}\right) \\ & \times e^{-i\frac{k_s}{f_c}\boldsymbol{\rho}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_0} \delta\left(\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{\boldsymbol{\rho}_2}{M}\right), \end{aligned}$$

donde $M = \frac{d_1 + \frac{\omega_s}{\omega_i} z_2}{s_0}$ es el factor de amplificación. La F.A.P.C. para una onda plana de bombeo la podemos escribir como una convolución de la forma,

$$F(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) \propto h\left(|\boldsymbol{\rho}_2|, \frac{k_s k_i}{k_i d_1 + k_s z_2}\right) h\left(|\boldsymbol{\rho}_1|, \frac{k_s}{f_c}\right)$$

$$\times \left\{ A\left(\boldsymbol{\rho}_0\right) h\left(\left|\boldsymbol{\rho}_0\right|, \frac{k_s}{s_0}\right) e^{-i\frac{k_s}{f_c}\boldsymbol{\rho}_1\cdot\boldsymbol{\rho}_0} \right\} \otimes \delta\left(\boldsymbol{\rho}_0 + \frac{\boldsymbol{\rho}_2}{M}\right). \tag{186}$$

La función delta nos da la correlación punto objeto (plano transversal $\boldsymbol{\rho}_0$) a un punto imagen (plano transversal $\boldsymbol{\rho}_2$), que es el resultado de la superposición coherente de un conjunto de estados de dos fotones, que hacen posible el fenómeno de *imagenes fantasma*. La tasa de coincidencias es,

$$R(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2) = \left|F\left(\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2\right)\right|^2 \propto \left|A\left(-\boldsymbol{\rho}_2/M\right)\right|^2, \tag{187}$$

por lo que obtenemos la imagen de la mascarilla en el plano de detección D_2 invertida y con magnificación M.