

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Programa de Posgrado en Ciencias
en Optoelectrónica**

**Estudio de la evolución de la polarización en fibras ópticas
torcidas**

Tesis

Para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Ing. José Ángel Chin Valenzuela

Ensenada, Baja California, México
2015

Tesis defendida por
Ing. José Ángel Chin Valenzuela

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Alfonso García Weidner
Director del comité

Dra. Diana Tentori Santa Cruz
Dr. Santiago Camacho López
Dr. Víctor Ruiz Cortés
Dr. Sergio Andrés Águila Puentes



Dr. Pedro Negrete Regagnon
Coordinador del Posgrado en Óptica

Dr. Jesús Favela Vara
Director de Estudios de Posgrado

José Ángel Chin Valenzuela © 2015

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor

Resumen de la tesis presentada por **José Ángel Chin Valenzuela** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Óptica con orientación en Optoelectrónica.

Estudio de la evolución de la polarización en fibras ópticas torcidas

Resumen aprobado por:

Dr. Alfonso García Weidner

Se describe un estudio teórico y experimental sobre la influencia de la torsión en las propiedades de polarización para fibras con absorción (dopadas con erbio) y sin absorción, como lo son una fibra monomodo estándar y tres fibras birrefringentes (Bow-tie, Panda y elíptica). Para este propósito se establece una técnica detallada sobre el procedimiento experimental en el laboratorio incluyendo la preparación de las muestras de fibra óptica así como la calibración del equipo de medición. También se desarrollaron programas de computadora para el procesado de datos experimentales así como una secuencia y metodología de ajuste numérico, incluyendo tres métodos de prueba numérica utilizando: los vectores de Stokes de salida S_{out} , las matrices de Mueller y el producto Kroenecker de las matrices de Jones.

Se describe un procedimiento para establecer la convención de signos de polarización sin ambigüedad o inconsistencia, y se proporciona un cuadro comparativo entre las diferentes convenciones. Asimismo se describen los fundamentos de la convención de Nebraska.

A partir del modelo matemático se describe un modelo geométrico que describe el comportamiento del vector de S_{out} en la esfera de Poincaré. Está basado en una analogía con las ecuaciones de la cinemática de rotación de un cuerpo rígido (conos de cuerpo y espacio) y se ilustran los movimientos de precesión y nutación de S_{out} .

Encontramos que excepto para la fibra dopada con erbio, los resultados experimentales se ajustan bien a la teoría cuando se trata de fibras no dicróicas. El modelo para el caso de fibras dopadas requiere de algún ajuste que no se está considerando, muy probablemente debido a la influencia de la torsión en los fenómenos de absorción y consecuentemente en la ASE.

Las fibras birrefringentes están diseñadas para soportar esfuerzos de tensión σ_{ii} como los introducidos por doblado o embobinado de la fibra, siendo de mejor calidad (en secuencia) la Bow Tie, Panda y elíptica. El resultado más importante encontrado en este estudio radica en que nuestros resultados experimentales muestran que cuando estas fibras son sometidas a esfuerzos de corte σ_{ij} (torsión) la calidad con que las fibras preservan la polarización es el inverso (elíptica, panda y Bow Tie), probablemente debido a que la distribución de esfuerzos en el núcleo de la fibra es más complicado.

Palabras clave: polarización óptica, fibras ópticas monomodales, fibras dopadas con erbio, dicróismo.

Abstract of the thesis presented by **José Ángel Chin Valenzuela** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Optics with orientation in Optoelectronics.

Study of the evolution of polarization in twisted optical fibers

Abstract approved by:

Dr. Alfonso García Weidner

Abstract

A theoretical and experimental study on the influence of torque on the polarization properties for absorbing and non-absorbing fibers (doped with erbium and standard single mode fiber, birefringent fibers Bow-tie, Panda and elliptical) are described. For this purpose a detailed experimental laboratory procedure including the preparation of optical fiber samples and the calibration of the measuring equipment is established. Computer programs for processing experimental data and a numerical adjustment methodology was also developed, including three tests using numerical methods: the output Stokes vector S_{out} , Mueller matrices and the Kroenecker product of Jones's matrices.

A method for establishing the polarization sign convention without ambiguity or inconsistency is given, and a comparative table between different conventions is provided. The fundamentals of Nebraska convention are also described.

Departing from our mathematical model a geometrical model that describes the behavior of the vector of S_{out} on the Poincare sphere is described. It is based on an analogy with the equations for torque-free motion of a rigid body about a point (body and space cones) and the movements of precession and nutation of S_{out} are illustrated.

We found that except for the erbium-doped fiber, the experimental results fit well with the theory. The model for the case of doped fibers requires some adjustment which is not being considered, most likely due to the influence of the torsion on the absorption phenomena and consequently on the ASE.

Birefringent fibers are designed to withstand tensile stresses σ_{ii} as those introduced by bending or winding the fiber, being of better quality (in sequence) the Bow Tie, Panda and elliptical. The most important result found in this study is that our experimental results show that when these fibers are subjected to shear stress σ_{ij} (torque) the quality with which the fibers preserve the polarization is reversed (Elliptical, Panda and Bow Tie) probably because the stress distribution in the fiber core is more complicated.

Keywords: optical polarization, single mode optical fibers, erbium doped fibers, dichroism.

Dedicatoria

*A mis padres **José Dolores Chin Villegas** y **Mirna María Valenzuela Esquer**, sin duda alguna los pilares de mi educación y los que me han enseñado a vivir la vida con sus enseñanzas y valores. Ellos son mis principales motivadores y a los que siempre dedico cada uno de mis logros en la vida.*

*A mis **abuelos** que son una gran fuente inspiradora en mi vida, en especial a mi abuelo **Severiano Chin Díaz**, quien ya no estará presente para celebrar juntos este logro, pero se la dedico de todo corazón.*

Agradecimientos

A **dios** quien siempre me ayuda a tomar las decisiones con más sabiduría y me da la fortaleza necesaria para seguir adelante en la vida.

A mis hermanos **Mirna Melissa** y **Jorge Eduardo** quienes siempre han confiado en mí y me han dado su apoyo incondicional.

A mi novia **Itzel Karina** por sus innumerables consejos, palabras de aliento y su confianza en cada momento. Por estar siempre al pendiente de mí persona brindándome su amor y su comprensión.

Al **Dr. Alfonso García Weidner** por sus consejos, por su confianza en mi trabajo, y por brindarme muchos de sus conocimientos. Por ofrecerme su amistad y apoyo incondicional en cada momento, como investigador y como una excelente persona.

A **Miguel de Jesús Farfán** por apoyarme en cada momento con sus conocimientos técnicos en el laboratorio, brindarme sus valiosos consejos y ser más que un técnico, un gran amigo.

A **mis compañeros** de la maestría con quienes siempre conté y fueron un gran apoyo en este proceso, por brindarme su amistad incondicional y demostrarme que son más que compañeros mis amigos. En especial a mi amigo Roberto Soto.

A los miembros del comité de tesis, **Dra. Diana Tentori** por sus consejos y sus valiosas palabras de apoyo en todo momento, **Dr. Santiago Camacho**, **Dr. Víctor Ruiz** y **Sergio Águila** por aceptar ser parte de mi comité y brindarme su valioso tiempo en las revisiones.

*A **mi familia** quienes siempre han confiado en mí y me han brindado su apoyo incondicional en cada momento de mi vida.*

*A **CICESE** por brindarme en cada momento una estancia satisfactoria en sus instalaciones, y por sus actividades extracurriculares que me fueron de gran ayuda para liberar el estrés y mejorar el desempeño de mi investigación. Al personal de la **División de Física Aplicada del CICESE**.*

*A **CONACyT** por el apoyo que me brindó para mi manutención en el periodo designado para mi posgrado.*

Tabla de Contenido

	Página
Resumen español	ii
Resumen inglés	iii
Dedicatorias	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	xiii
Capítulo 1. Introducción	
1.1. Antecedentes.....	1
1.2. Objetivo y metas de la tesis.....	6
1.3. Desarrollo de la tesis.....	6
Capítulo 2. Convención de signos y descripción del experimento	
2.1. Convención de signos (Nebraska).....	8
2.2. Retardador elíptico.....	14
2.3. Medición de los parámetros de Stokes.....	19
2.3.1. Modelo matemático.....	19
2.3.2. Modelo experimental.....	20
2.3.3. Analizador de Polarización.....	22
2.4. Descripción del experimento.....	23
2.4.1. Preparación de las muestras de fibra óptica.....	23
2.4.2. Descripción del montaje experimental.....	27
2.4.3. Alineación del montaje experimental.....	28
2.4.4. Generación del marco de referencia de laboratorio.....	28
2.4.5. Mediciones de la polarización al aplicar torsión en las fibras...	30
Capítulo 3. Fibras ópticas sin absorción	
3.1. Fibras birrefringentes.....	33
3.1.1 Fibra Panda.....	33
3.1.2. Fibra Bow-tie.....	34
3.1.3. Fibra Elíptica.....	35
3.2. Fibra monomodo (SMF-28).....	37
3.3. Modelo matemático para describir el comportamiento de una fibra torcida.....	37
3.3.1. Ecuaciones básicas.....	37
3.3.2. Descripción del modelo matemático.....	42
3.3.2.1. Fase topológica.....	42
3.3.2.2. Efecto fotoelástico.....	43
3.3.2.3. Ecuaciones completas.....	48
3.3.3. Interpretación geométrica.....	50
3.4. Comprobación del modelo matemático.....	54
3.4.1. Método I: Las matrices de Mueller.....	54
3.4.2. Método II: Las ecuaciones de S_{1out} , S_{2out} y S_{3out}	56
3.4.3. Método III: Producto Kroenecker.....	57
3.5. Relación entre el modelo de ajuste para sistemas de	

coordenadas positivas y negativas.....	61
3.6. Metodología para ajustes de gráficas.....	66
3.6.1. Descripción de los parámetros importantes del modelo matemático.....	67
3.6.1.1. El parámetro b	67
3.6.1.2. El parámetro μ	67
3.6.1.3. El parámetro θ	70
3.6.1.4. El parámetro c	71
3.6.1.5. El parámetro δ_0	73
3.6.1.6. El parámetro ζ	74
3.6.2. Secuencia de ajuste de parámetros para obtener la metodología final de ajuste de gráficas.....	77
3.7. Mediciones experimentales y análisis de resultados.....	81
3.7.1. Mediciones en la fibra Bow-tie.....	81
3.7.2. Mediciones en la fibra Panda.....	84
3.7.3. Mediciones en la fibra elíptica.....	86
3.7.4. Mediciones en la fibra SMF28.....	91
Capítulo 4. Fibras ópticas con absorción	
4.1. Conceptos básicos.....	98
4.2. Fibras dopadas con erbio.....	100
4.3. Modelo matemático para una fibra torcida.....	101
4.4. Interpretación geométrica.....	106
4.5. Mediciones experimentales y análisis de resultados.....	112
Capítulo 5. Conclusiones	120
Lista de referencias bibliográficas.....	122
Anexos o Apéndices	
Apéndice I. Convención de signos.....	126
Apéndice II. Matrices convención positiva (Nebraska).....	128
Apéndice III. Matrices convención negativa (Tsao).....	132
Apéndice IV. Matrices dicroicas convención negativa.....	135

Lista de figuras

Figura		Página
1	Convenciones de signos para luz circular derecha.....	10
2	Convención de Nebraska para luz polarizada derecha e izquierda.....	11
3	El vector \vec{E} describe una elipse en el plano $z = 0$	11
4	Parámetros de la elipse de polarización.....	11
5	Esfera de Poincaré. a) Coordenadas en la esfera b) Estados de polarización en la esfera.....	14
6	Descomposición de un haz óptico en un retardador elíptico.....	15
7	Relación geométrica entre los tres retardamientos.....	16
8	Trayectoria en la esfera de Poincaré utilizando la matriz de un retardador elíptico.....	16
9	Molécula quiral helicoidal (birrefringencia circular).....	18
10	Modelo de un medio con birrefringencia lineal.....	18
11	Arreglo óptico para medir los parámetros de Stokes.....	20
12	Arreglo que describe el funcionamiento del analizador de polarización.....	22
13	Equipo básico utilizado para la realización de las muestras..	24
14	Partes del conector para fibra FC/PC.....	24
15	Preparación del pegamento epoxy.....	24
16	Horno utilizado para el secado	25
17	Discos de pulitura y lija de $12 \mu m$	25
18	Pulidora automática para férulas.....	26
19	Montaje experimental para medir los parámetros de Stokes (\vec{S}) en una fibra óptica torcida.....	27
20	Marco de referencia de laboratorio, mostrado en la esfera de Poincaré.....	30
21	Gráfica de los parámetros de Stokes en la fibra PM1550 con $\phi = 0^\circ$	31
22	Captura de pantalla de una medición en una fibra PM1550 HP con $\phi = 0^\circ$	31
23	Gráfica de los parámetros de Stokes en la fibra PM1550HP con $\phi = 90^\circ$	32
24	Captura de pantalla de una medición en una fibra PM1550HP con $\phi = 90^\circ$	32
25	Esquema de la fibra óptica tipo Panda.....	34
26	Esquema de la fibra tipo Bow-tie.....	35
27	Esquema de la fibra de revestimiento elíptico.....	36
28	Esquema de la fibra monomodo SMF-28.....	37
29	Fibra óptica con dos secciones lineal y circular R_L y R_C	38
30	Fibra torcida un ángulo θ_τ	42
31	Tensor de esfuerzos σ_{kl}	44
32	Distribución de esfuerzos en el núcleo de la fibra.....	47

Lista de figuras

Figura		Página
33	Distribución de esfuerzos para una sección a) elíptica b) rectangular.....	47
34	Distribución de esfuerzos para dos cilindros concéntricos....	47
35	Ángulo θ_τ para una barra a) con perfil circular b) con perfil no-circular	48
36	Precesión de \vec{S} alrededor de \vec{S}	51
37	Conos de precesión para \vec{S}_C y \vec{S}	51
38	Conos para ilustrar la nutación de \vec{S}	52
39	Tres tipos de cicloides que describen a \vec{S}	52
40	Epitrocoides en la esfera de Poincaré.....	53
41	Epitrocoide en la esfera de Poincaré y su correspondiente epicicloide.	53
42	Segundo epitrocoide y su proyección mapamundi.....	54
43	Gráfica del método "I" obtenida a partir del modelo matemático (ecuación 127).....	56
44	Gráfica del método "II", superposición de las ecuaciones (143-145) sobre la gráfica de la Figura 43.....	57
45	Gráfica del método "III", la superposición de la ecuación (165) sobre la gráfica de la Figura 43 y la gráfica de las ecuaciones (143-145).....	60
46	Gráfica del modelo negativo contra el modelo positivo utilizando los mismos parámetros (Tabla 8).....	64
47	Descripción gráfica de los ejes en la esfera de Poincaré para sistemas de coordenadas positivo y negativo.....	64
48	Gráfica del modelo negativo contra el modelo positivo utilizando los parámetros de la Tabla 9: se intercambian los signos de μ , b y ζ	65
49	a) Gráfica comparación del cambio de signo en b y ζ . b) Gráfica comparación del cambio de signo en μ	66
50	Gráfica que muestra la suma de una función sinusoidal de alta amplitud y baja frecuencia, con otra función sinusoidal de baja amplitud y alta frecuencia.....	68
51	Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\ out}$, $S_{2\ out}$ y $S_{3\ out}$ teórico al variar el parámetro b	69
52	Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\ out}$, $S_{2\ out}$ y $S_{3\ out}$ teórico al variar el parámetro μ	70
53	Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\ out}$, $S_{2\ out}$ y $S_{3\ out}$ teórico al variar el parámetro θ	72
54	Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\ out}$, $S_{2\ out}$ y $S_{3\ out}$ teórico al variar el parámetro c	73
55	Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\ out}$, $S_{2\ out}$ y $S_{3\ out}$ teórico al variar el parámetro δ_0	75
56	Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\ out}$, $S_{2\ out}$ y $S_{3\ out}$ teórico al variar el parámetro ζ	76

Lista de figuras

Figura		Página
57	Gráfica que muestra el ajuste del parámetro b en las curvas teóricas.....	77
58	Gráfica que muestra el ajuste de los parámetros b y μ en las curvas teóricas.....	78
59	Gráfica que muestra el ajuste de los parámetros b , μ y θ en las curvas teóricas.....	78
60	Gráfica que muestra el ajuste de los parámetros b , μ , θ y c en las curvas teóricas	79
61	Gráfica que muestra el ajuste de los parámetros b , μ , θ , c y δ_0 en las curvas teóricas.....	79
62	Gráfica que muestra el ajuste final de los parámetros b , μ , θ , c , δ_0 y ζ en las curvas teóricas.....	80
63	Interfaz gráfica desarrollada para los ajustes teóricos.....	80
64	Ajustes para la fibra HB1500T, torsión positiva y a una longitud de onda de 1530 nm. a) $\phi = 20^\circ$, b) $\phi = 50^\circ$, c) $\phi = 80^\circ$, d) $\phi = 110^\circ$	82
65	Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 0^\circ$ en la fibra HB1500T, torsión positiva y longitud de onda de 1530 nm...	83
66	Diagrama de los esfuerzos en una fibra birrefringente Bow-tie.....	84
67	Ajustes para la fibra PM1550HP, torsión positiva y a una longitud de onda de 1550 nm. a) $\phi = 0^\circ$, b) $\phi = 30^\circ$, c) $\phi = 60^\circ$, d) $\phi = 90^\circ$	84
68	Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 90^\circ$ en la fibra PM1550HP, torsión positiva y longitud de onda de 1550 nm.....	85
69	Ajustes para la fibra FSPM6621, torsión positiva a una longitud de onda de 1525 nm.....	87
70	Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 30^\circ$ en la fibra FSPM6621, torsión positiva y longitud de onda de 1525 nm.....	87
71	Ajustes para la fibra FSPM6621 a una longitud de onda de 1540 nm a) $\phi = 60^\circ (-\tau)$, b) $\phi = 60^\circ (+\tau)$	88
72	Ajustes para la fibra FSPM6621, torsión positiva y a una longitud de onda de 1550 nm. a) $\phi = 0^\circ$, b) $\phi = 90^\circ$	89
73	Ajustes para la fibra FSPM6621, longitud de onda de 1565 nm. a) $\phi = 0^\circ (-\tau)$, b) $\phi = 0^\circ (\tau)$, c) $\phi = 90^\circ (-\tau)$, d) $\phi = 90^\circ (\tau)$	90
74	Figura 74. Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 0^\circ$ en la fibra FSPM6621, torsión positiva y longitud de onda de 1565 nm.....	91
75	Ajustes para la fibra SMF28 a una longitud de onda de 1525 nm a) $\phi = 0^\circ$, b) $\phi = 30^\circ$, c) $\phi = 60^\circ$, d) $\phi = 90^\circ$, e) $\phi = 120^\circ$, f) $\phi = 150^\circ$	93

Lista de figuras

Figura		Página
76	Ajustes para la fibra SMF28 a una longitud de onda de 1545 nm. a) $\phi = 0^\circ (\pm\tau)$, b) $\phi = 30^\circ (\pm\tau)$, c) $\phi = 60^\circ (\pm\tau)$	94
77	Ajustes para la fibra SMF28 a una longitud de onda de 1545 nm d) $\phi = 90^\circ (\pm\tau)$, e) $\phi = 120^\circ (\pm\tau)$, f) $\phi = 150^\circ (\pm\tau)$	95
78	Representación en la esfera de Poincaré para los ajustes $\phi = 30^\circ$ y $\phi = 60^\circ$ en la fibra SMF28, torsión positiva y longitud de onda de 1525 nm.....	96
79	Dicroísmo lineal.....	98
80	Dicroísmo circular.....	98
81	Diagrama simplificado de niveles de energía para Er^{3+}	100
82	Diagrama ASE para una fibra dopada con erbio.....	101
83	Absorción elíptica α	102
84	Interfaz gráfica desarrollada para los ajustes teóricos (dicroicos).....	105
85	Trayectorias generadas por un retardador dicroico $M_{BD}(\delta_\tau, \alpha)$	111
86	Proyección de los estados \vec{S} sobre la superficie de la esfera	111
87	Absorción de E_y	112
88	Absorción en la esfera de Poincaré.....	112
89	Ajustes para la fibra EDOS-103, torsión positiva, $\phi = 0^\circ$ y a una longitud de onda de 1540 nm. a) S_{out} , b) S_{1out} , c) S_{2out} , d) S_{3out}	114
90	Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi =$ 0° en la fibra EDOS-103 para $\lambda = 1540$ nm.....	114
91	Ajustes para la fibra EDOS-103, torsión positiva, $\phi = 0^\circ$ y a una longitud de onda de 1550 nm. a) S_{out} , b) S_{1out} , c) S_{2out} , d) S_{3out}	115
92	Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi =$ 0° en la fibra EDOS-103 para $\lambda = 1550$ nm.....	116
93	Ajustes para la fibra EDOS-103, torsión positiva, $\phi = 30^\circ$ y a una longitud de onda de 1550 nm a) S_{out} , b) S_{1out} , c) S_{2out} , d) S_{3out}	117
94	Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi =$ 30° en la fibra EDOS-103 para $\lambda = 1550$ nm.....	117
95	Ajustes para la fibra EDOS-103, torsión positiva, $\phi = 60^\circ$ y a una longitud de onda de 1550 nm a) S_{out} , b) S_{1out} , c) S_{2out} , d) S_{3out}	118
96	Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi =$ 60° en la fibra EDOS-103 para $\lambda = 1550$ nm.....	119

Lista de tablas

Tabla		Página
1	Vector de Stokes expresado con diferentes parámetros del EP.....	13
2	Parámetros más importantes de la fibra Panda PM 1550 HP.....	34
3	Parámetros más importantes de la fibra Bow-tie (HB1500T).....	35
4	Parámetros más importantes de la fibra elíptica (FSPM 6621).....	36
5	Parámetros más importantes de la fibra monomodo (SMF-28).....	37
6	Valores numéricos utilizados para graficar resultados.....	55
7	Vector de Stokes expresado para coordenadas negativa.....	61
8	Valores numéricos utilizados para graficar ambos modelos (positivo y negativo).....	63
9	Valores numéricos utilizados para graficar ambos modelos con los cambios realizados a μ , b y ζ	65
10	Valores numéricos para los ajustes de la fibra HB1500T a una longitud de onda de 1530 nm	81
11	Valores numéricos para los ajustes de la fibra PM1550HP a una longitud de onda de 1550 nm	85
12	Valores numéricos para los ajustes de la fibra FSPM6621, a $\phi = 30^\circ$ y $\lambda = 1525 nm$	86
13	Valores numéricos para los ajustes de la fibra FSPM6621 a una longitud de onda de 1540 nm	88
14	Valores numéricos para los ajustes de la fibra FSPM6621 a una longitud de onda de 1550 nm	89
15	Valores numéricos para los ajustes de la fibra FSPM6621 a una longitud de onda de 1565 nm	90
16	Valores numéricos para los ajustes de la fibra SMF28 a una longitud de onda de 1525 nm	92
17	Valores numéricos para los ajustes de la fibra SMF28, torsión positiva y $\lambda = 1545 nm$	92
18	Valores numéricos para los ajustes de la fibra SMF28, torsión negativa y $\lambda = 1545 nm$	93
19	Parámetros más importantes de la fibra dopada con erbio EDOS-103.....	101
20	Valores numéricos para los ajustes de la fibra EDOS-103 a una longitud de onda de 1540 nm	113
21	Valores numéricos para los ajustes de la fibra EDOS-103 a una longitud de onda de 1550 nm	115

Capítulo 1. Introducción

1.1 Antecedentes

La presente tesis constituye un trabajo tanto teórico como experimental sobre el efecto que produce la torsión mecánica de una fibra óptica sobre el estado de polarización de la luz que transita por ella. Se consideraron los casos de fibras ópticas con y sin absorción.

En cuanto al trabajo experimental se utilizó una técnica de medición propia desarrollada en CICESE (D. Tentori *et al*, 2009 y 2012) distinta a las reportadas en la literatura (D. Tentori *et al*, 2009 y 2012). Esta técnica es útil no solo para trabajos experimentales sobre fibras torcidas sino para diferentes experimentos con fibras ópticas que se llevan a cabo en CICESE. Sin embargo no existe un escrito que sirva como guía para futuros experimentos, razón por la cual se decidió incorporar en esta tesis (capítulo 2) una descripción detallada del proceso experimental.

En cuanto al trabajo teórico, también se cuenta con un modelo matemático desarrollado en CICESE. Este modelo está basado en parámetros ópticos de la fibra que deben ser determinados experimentalmente. Sin embargo no se cuenta con una metodología de análisis para el ajuste entre los datos experimentales y el modelo teórico. En esta tesis se desarrolló esta metodología y programas de computadora con una interface visual que no solo son útiles para el presente trabajo sino para futuros trabajos de investigación que se piensan realizar en CICESE. Debido a que los estudios de polarización óptica publicados siempre están referidos a alguna convención de signos que se adopta de antemano, fue necesario incorporar la relación que existe entre la convención de signos adoptada para el presente trabajo (convención de Nebraska o positiva) y la convención negativa (Tsao) utilizada sobre todo en publicaciones de fibras ópticas. Esto permite establecer una comparación directa entre trabajos realizados con diferentes convenciones de signos, ya se trate de trabajos publicados o de resultados experimentales hechos por el mismo grupo de trabajo del CICESE.

Por otra parte se amplió el modelo teórico incluyendo una descripción geométrica del mismo basado en las ecuaciones de la cinemática de la rotación de un cuerpo rígido (cono espacial y cono del cuerpo), lo cual nos posibilita en un futuro el desarrollar una técnica de ajuste de datos en 3D (esfera de Poincaré); en la presente tesis aún se utiliza un ajuste numérico en 2D (Vector de Stokes vs Torsión). Otra contribución a este modelo fue la incorporación de medios con absorción en la parte final de este trabajo.

Este es un tema complicado y no estaba dentro de los objetivos iniciales de la tesis, por lo que no se hizo un análisis tan detallado como el expuesto para fibras sin absorción.

El italiano Emilio G. Segrè (premio Nobel de física en 1959) escribió en relación a la convención de signos de polarización: “Cuando los signos están involucrados, incluso dos físicos alemanes tan escrupulosos como Lorentz y Zeeman pueden cometer errores”. El origen de la convención de signos en la teoría electromagnética proviene del hecho de que la solución de la ecuación de onda se puede expresar de cuatro diferentes maneras, dependiendo de cómo se elige la solución tipo $e^{\pm i(\pm \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$. Se puede decir que en óptica uno de los puntos de mayor interés ha sido la evolución de la fase y típicamente se ha preferido utilizar una expresión del tipo $e^{i(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r})}$ ya que la onda avanza (+) o se retrasa (-) con un incremento en la fase ($\omega t + \delta$). Por otra parte, en física de partículas (incluyendo la óptica cuántica) se tiene que la ecuación de Schrödinger contiene una (primera) derivada respecto al tiempo en lugar de la segunda derivada temporal que aparece en la ecuación de onda en teoría electromagnética. Como resultado la energía cinética de la partícula es positiva solo si la solución tipo $e^{i(-\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r})}$ es utilizada. Debido a las aplicaciones de la luz polarizada en diferentes campos tecnológicos como lo son la industria de la metalurgia, industria azucarera, industria farmacéutica, tecnología de hidrocarburos; así como sus aplicaciones en diferentes campos de la investigación científica que abarcan a la medicina, química, astronomía, biología y física, diferentes convenciones han sido utilizadas la mayoría de las veces sin hacer las aclaraciones pertinentes. Normalmente no se puede apreciar la convención utilizada con tan solo ver las matrices de polarización ya que como se verá más adelante, se necesita mayor información. Un error muy grave que se puede cometer es mezclar los criterios de las diferentes convenciones, por ejemplo tomar el signo del parámetro de Stokes S_3 de una convención positiva y multiplicarlo por una matriz de polarización de una convención negativa.

Históricamente hablando, los primeros en tratar de establecer un criterio único sobre la convención de signos fue la IAU (International Astronomical Union). Después de un gran esfuerzo, en 1942 la IRE (Institute of Radio Engineers, U.K) publica unas recomendaciones sobre la elección de signos en luz polarizada. En 1963 la IRE se fusiona con su análogo estadounidense (AIEE) para formar la actual IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) la cual en diferentes publicaciones (1972, 1983, 1990, 1993, 1997, 2004) amplía estas recomendaciones. Estas publicaciones sucesivas son esencialmente las mismas (IEEE Standard definition of terms) con las actualizaciones correspondientes. Estas publicaciones no son sobre polarización, son una serie de definiciones (a

manera de diccionario) sobre términos utilizados en ingeniería de radio, propagación y antenas y solo algunos párrafos dentro de estas publicaciones se tienen a los estados de polarización. Además hay que mencionar que se le dedica un párrafo pequeño a cada concepto o definición (por ejemplo para polarización elíptica) y raramente se incluyen ecuaciones o algún dibujo, y cuando lo hacen estamos hablando de uno o dos pares de ecuaciones. Además no establecen un criterio en cuanto a usar sistemas coordenados espaciales positivos o negativos. Aun así, en la literatura se le refiere como la convención de signos de la IEEE, y desde su primera publicación, empezaron a desaparecer las citas de libros de texto en óptica en los artículos científicos de astronomía por no estar apegados a esta convención (T. Robishaw, 2008). Desafortunadamente, los libros de texto en óptica no tienen un criterio unificado en cuanto a la convención de signos y pocos utilizan la convención de Nebraska (descrita a continuación).

La única otra convención de signos publicada como tal en la literatura es la convención de Nebraska. En las memorias de un congreso sobre elipsometría celebrado en la universidad de Nebraska en 1969 (R. H. Mueller 1969) se establece un criterio de signos de polarización, el cual utiliza sistemas de coordenadas positivos y es particularmente útil en el campo de la óptica. Diez años más tarde, en un segundo congreso se publica la convención de signos con mayor detalle (Hauge P. et al 1980), así como la elección de coordenadas en la esfera de Poincaré. A diferencia de las publicaciones de la IEEE, esta es una publicación de 26 páginas dedicadas a definir los términos con mayor claridad, contiene 6 figuras y alrededor de 170 ecuaciones. En la presente tesis se utiliza la convención de Nebraska.

Respecto a las fibras ópticas sin absorción, en 1979 (R. Ulrich et al, 1979) publicó un modelo que describe las propiedades de polarización en una fibra torcida, en este trabajo se muestran los resultados experimentales de la evolución del estado de polarización para una fibra torcida, usando un modulador electroóptico tipo Kerr, donde la orientación azimutal del campo modulador fue rotada lentamente alrededor de la fibra. Mediciones similares utilizando un modulador magnetoóptico (Faraday) fueron reportadas en el mismo trabajo. Este trabajo de Ulrich ha sido tomado como base para otras publicaciones posteriores sobre fibras torcidas. Este modelo supone que el único efecto de la torsión en la fibra es una actividad óptica inducida (R.E. Schuh et al, 1995; M. Monerie et al, 1981; W. Eickhoff et al, 1981; T. Chartier et al, 2003). Posteriormente en un par de trabajos (D. Tentori *et al*, 2009 y 2012) se propuso un nuevo modelo que incorpora tanto el efecto geométrico como el efecto fotoelástico

debido a la torsión de la fibra, mismo que se utiliza en este trabajo. Para describir el efecto fotoelástico, *i.e.* los cambios en el índice de refracción debido a la presencia de un estado de esfuerzos, se requiere tener las ecuaciones que describen los esfuerzos en una barra torcida. Estos esfuerzos dependen básicamente de la forma de la sección transversal de la barra, que en el caso de Ulrich, considera a la fibra óptica como una barra con sección transversal circular. En la literatura científica incluyendo los libros de texto de teoría de elasticidad se encuentran las ecuaciones de esfuerzo debido a la torsión de barras circulares, elípticas, triangulares y rectangulares. Difícilmente se encuentran las ecuaciones de esfuerzo para otro tipo de sección transversal, lo cual por cierto es un problema bastante complejo, excepto para la sección circular. La falta de publicaciones sobre barras torcidas con otro tipo de sección transversal a las ya mencionadas se deben a dos motivos: a) el cálculo es muy complicado, b) sus aplicaciones son muy limitadas. Para entender esto último hay que considerar que este problema (de torsión) es fundamentalmente utilizada por ingenieros mecánicos y civiles. Las torsiones que estas ramas de la ingeniería estudian son tales que el torque aplicado (proporcional a la fuerza aplicada) puede ser muy grande, pero el ángulo que la barra gira debido a la torsión es muy pequeño, digamos de un par de grados. Normalmente estas barras torcidas corresponden a máquinas, herramientas o pilares de una construcción; por ejemplo una barra metálica que une a dos engranes. Mientras que en fibras ópticas tenemos un caso muy distinto y que difícilmente se encuentra en otra parte. Para las fibras ópticas, debido a que son muy delgadas se requiere de un torque (o momento de fuerza) muy pequeño para girar a la fibra. Por otro lado, una fibra óptica de algunos centímetros de longitud se puede torcer 360° sin ningún problema, cosa que es imposible para una barra estructural o una herramienta metálica. El modelo utilizado en esta tesis (D. Tentori *et al*, 2009 y 2012) supone que la sección transversal de la fibra tiene una forma oval y no hay ecuaciones de elasticidad reportadas en la literatura para este caso. Por eso el modelo requiere de la medición experimental del comportamiento de la fibra para poder establecer el valor numérico de los parámetros en las ecuaciones de polarización óptica para dicha fibra.

En 1815 Jean-Baptiste Biot publica el primer trabajo sobre dicroísmo circular, el cual incluye un análisis de la birrefringencia circular. El microbiólogo Louis Pasteur en su tesis doctoral (1848) es el primero en descubrir que estos fenómenos están relacionados con la simetría molecular. Casi de inmediato, en 1852 el médico cirujano William Bird Herapath observa por primera vez el dicroísmo lineal en un cristal de sulfato de iodoquinina, hoy en día conocido como herapatita en su honor. Hacia finales del siglo XIX y principios del XX se habían publicado libros dedicados exclusivamente al dicroísmo (y birrefringencia

circular). El dicroísmo lineal tuvo que esperar hasta el siglo XX para empezar a ser un tema importante en la literatura. Esto se debe a que el dicroísmo circular aparece frecuentemente en moléculas orgánicas en forma natural, con lo cual se disponía de muchos materiales con dicroísmo circular para realizar estudios y experimentos. El dicroísmo lineal se vuelve un tema importante después de la invención del primer polarizador dicroico conocido como hoja Polaroid en 1927 por Edwin H. Land cuando solo tenía 19 años de edad, mismo año que funda la compañía Polaroid para explotar su patente (posteriormente desarrolla la fotografía instantánea). Land utiliza en su primer polarizador pequeños cristales de herapatita. Actualmente es el polarizador más utilizado en el mundo y ampliamente difundido en distintas ramas de la industria. Las primeras generaciones de pantallas digitales (para PC, relojes, etc) usaron estos polarizadores. Estos polarizadores están lejos de tener la alta calidad de un polarizador cristalino de calcita (polarizador no dicroico), pero su precio es extremadamente más barato. Sin embargo el tema de dicroísmo elíptico, es decir de materiales que exhiben simultáneamente dicroísmo circular y lineal, es un tema menos publicado. Los materiales con birrefringencia híbrida, es decir que presentan simultáneamente retardamiento de fase y dicroísmo, no se desarrollaron a la par de los estudios sobre dicroísmo (puro). En particular el tema de birrefringencia híbrida fue poco estudiado durante el siglo XX y el presente siglo. No hay libros de texto sobre este tema, algunos libros lo describen someramente y los artículos científicos son escasos. Los trabajos más importantes en este tema fueron realizados por H. Kubo (H. Kubo et al, 1983, 1985) quien utilizando matrices y ecuaciones diferenciales hace una descripción de la propagación óptica en un medio con birrefringencia híbrida. Otros autores como Kemp (Kemp *et al*, 2005) y Park (J Park et al, 2006) entre otros, realizan un estudio utilizando álgebra geométrica. Los modelos de propagación publicados en estos trabajos, fueron utilizados como base para la descripción geométrica de la evolución del vector de Stokes en la esfera de Poincaré para una fibra con birrefringencia híbrida en el último capítulo de la tesis. Las ecuaciones expuestas en la tesis fueron expresadas en términos del álgebra vectorial.

En 2002 el ganador del premio Oersted, David Hestenes, principal *expositor* del álgebra geométrica actual, dio un famoso discurso (D. Hestenes, 2002) en el cual critica al sistema educativo actual por el excesivo uso del álgebra matricial/vectorial y la poca difusión del álgebra geométrica. En el siglo XIX William Kingdon Clifford y Hermann Günther Grassmann fundaron lo que ahora se conoce como álgebra geométrica o álgebras de Clifford. Clifford fue la primera persona en publicar que la gravitación es la manifestación de una geometría anticipándose a la teoría de la relatividad general. En el álgebra geométrica sus elementos representan figuras geométricas tales como líneas, esferas, cubos, flechas

que rotan, etc.; no requiere de un sistema coordinado de referencia (a diferencia de vectores y matrices) y se considera una herramienta unificada que puede expresar en forma única las ecuaciones de física clásica y física moderna. En particular en polarización óptica las operaciones de rotación son fundamentales. En algebra geométrica un bivector es un rotor y se representa por un arco, que comparativamente (con el álgebra vectorial) sería pensar en un vector curvo, en lugar del clásico vector que se representa con una línea recta. El álgebra geométrica ha incursionado en el campo de la polarización óptica sobre todo gracias a los trabajos de de N. Frigo (1986), J. P. Gordon y H. Kogelnik (2000), Charles S. Brown (1992, 1995) y T. Tudor (2008, 2010a, 2010b, 2012).

1.2 Objetivo y metas de la tesis

Conforme a lo planteado en el anteproyecto inicial, el objetivo de esta tesis es el realizar un estudio sobre la evolución de la polarización en fibras ópticas torcidas. Esto incluye tanto a fibras monomodales estándar, así como fibras birrefringentes. Para lograr esto se propusieron las siguientes metas:

- Realizar un estudio experimental sobre el comportamiento de fibras torcidas monomodales estándar (SMF 28) y fibras birrefringentes (Panda, Bow-tie) utilizando la técnica reportada por D. Tentori *et al*, (2009 y 2012).
- Paralelamente pensamos ajustar el modelo mencionado con base en los resultados experimentales o en su defecto proponer un nuevo modelo basado ya sea en las matrices de Jones o en las ecuaciones de modos acoplados.
- Una parte de interés particular en este modelo es lo relativo a la fase topológica. El modelo de Ulrich (R. Ulrich et al, 1979) así como los posteriores trabajos publicados sobre el tema no incluyen la fase topológica. Uno de los objetivos de la tesis es la medición experimental de la fase topológica en una fibra monomodo estándar y compararla con la de las fibras birrefringentes.

1.3 Desarrollo de la tesis

En el capítulo 2 se describen los aspectos de la convención de Nebraska que serán utilizados en la tesis. Basados en los trabajos de J. W. Simmons et al (1970), R. H. Muller (1969), D. Clarke (1974), el capítulo 3 y el apéndice 2 en el libro de H. Fujiwara (2007), "Convention confusions" dentro del libro (R. T. Holm, 1991) y el capítulo "polarimetric definitions" dentro del libro (T. Gehrels, 1974) se desarrolló

un cuadro comparativo que identifica las características de las diferentes convenciones de signos en polarización. Esta información es ampliada en el Apéndice I. Posteriormente se hace una descripción de las características de un retardador elíptico y el procedimiento para medir los parámetros de Stokes en una fibra óptica. Finalmente se realiza una detallada descripción del proceso experimental.

En el capítulo 3 se estudian las fibras ópticas sin absorción y es la parte medular de la tesis. Primero se describen las características de las fibras ópticas que se van a utilizar. A continuación se describe el modelo matemático para una fibra torcida incluyendo una interpretación geométrica. Posteriormente se llevan a cabo tres métodos para verificar el procedimiento numérico del modelo matemático; esto parecería un tanto innecesario pero es muy importante ya que en el pasado se han incurrido en errores de procedimiento de cálculos numéricos. Después se desarrolla una técnica para la secuencia de ajuste numérico de los seis parámetros involucrados en los datos experimentales obtenidos. Finalmente se muestran los resultados de las mediciones experimentales obtenidas para los cuatro tipos de fibra óptica utilizadas: fibra Panda, fibra Bow-Tie, fibra elíptica y fibra monomodo SMF28; al final se incluye un análisis de resultados.

En el capítulo 4 se estudian las fibras ópticas con absorción. Primero se describen las características de absorción de una fibra óptica dopada con erbio. Posteriormente se describe el modelo matemático que se va a utilizar, incluyendo una interpretación geométrica del mismo. Finalmente se muestran los resultados de las mediciones experimentales y se hace un análisis de los resultados obtenidos.

En el capítulo 5 enlistamos las principales conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2. Convención de signos y descripción del experimento

2.1 Convención de signos (Nebraska)

Una onda electromagnética viajando en un medio se puede describir clásicamente por los vectores \vec{E} y \vec{H} , los cuales representan el vector de campo eléctrico y magnético respectivamente. Esta propagación es descrita por la ecuación de onda,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = v_L^2 \nabla^2 \vec{E} \quad (1)$$

donde t es el tiempo y v_L es la velocidad de la luz en el medio. La función de onda $E(\vec{r}, t)$ donde \vec{r} es un vector de posición puede expresarse mediante una función armónica, en cuyo caso aparecen cuatro soluciones posibles para la ecuación (1) dadas por $e^{\pm i(\pm \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$, siendo ω la frecuencia angular y \vec{k} es el vector de propagación paralelo al vector unitario \hat{k} asociado al número de propagación (o de onda) k ,

$$\vec{k} = k \hat{k} = \frac{\omega}{v_L} \hat{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k}, \quad (2)$$

siendo λ la longitud de onda. Si consideramos que un haz de luz se propaga a lo largo de la dirección z el vector de campo eléctrico \vec{E} (y el vector de \vec{H}) sólo tendrán componentes en x y y lo cual simplifica su descripción matemática sin perder ninguna generalidad. Al propagarse la onda debido a que las componentes de E_x y E_y pueden tener una diferencia de fase δ_p , la punta del vector \vec{E} describe una hélice en el espacio a partir de la cual se define el estado de polarización EP. A lo largo del tiempo diferentes autores han considerado diferentes criterios para establecer cuando el estado de polarización es *positivo* o *negativo*, aunque hay que aclarar que estos dos términos son de carácter subjetivo, ya que como veremos a continuación en la definición del estado de polarización están involucrados varios parámetros algunos positivos y otros negativos. Un criterio más o menos generalizado considera los términos positivo y negativo en función del sistema de coordenadas utilizadas. Para un sistema coordenado x, y, z con vectores unitarios, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ paralelos a los ejes x, y, z respectivamente, se dice que el sistema coordenado es positivo si $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, y es negativo si $\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{k}$.

Debido a que los estudios de polarización óptica fueron desarrollándose durante la primera mitad del siglo XX por especialistas de diferentes áreas (químicos, biólogos, físicos, astrónomos), cada quien fue escogiendo una convención de signos o marco de referencia distintos. En el apéndice I se muestra una tabla comparativa de diferentes convenciones, basada en el trabajo de D. Clarke (1974). Para

establecer una convención de signos completa y consistente, se deben tomar en cuenta cuatro criterios o convenciones al definir un estado de polarización derecho o positivo: 1) el signo de la dependencia temporal de una onda plana $e^{i\omega t}$ ó $e^{-i\omega t}$, 2) la forma del vector de Jones, 3) el signo del parámetro de Stokes S_3 , 4) la helicidad. Solo dos de estas decisiones se pueden tomar en forma independiente y las otras dos quedaran automáticamente definidas. Utilizando el mismo orden en las columnas del apéndice I, en la Figura 1 desarrollamos un cuadro mostrando las cuatro posibles convenciones de signos de polarización que se pueden elegir.

Por ejemplo, en la primera columna de la Figura 1, para la convención de Nebraska el vector de campo eléctrico de una onda plana monocromática está dada por (P. Hauge, 1980)

$$\vec{E}_T = \vec{E}_x + \vec{E}_y, \quad (3)$$

$$\vec{E}_{x,y}(z, t) = \text{Re}[\vec{A}_{x,y} e^{i(\omega t - kz + \delta_{x,y})}] , \quad (4)$$

esto es,

$$\vec{E}_x = \hat{i}E_x = \hat{i}A_x \cos(\omega t - kz + \delta_x) , \quad (5)$$

$$\vec{E}_y = \hat{j}E_y = \hat{j}A_y \cos(\omega t - kz + \delta_y) , \quad (6)$$

$$\delta_p = \delta_y - \delta_x , \quad (7)$$

donde $A_{x,y}$ son las amplitudes del campo eléctrico. De la ecuación (4) observamos una dependencia temporal $e^{i\omega t}$ y de la ecuación (7) se determina el vector de Jones $\vec{E} = (A_x, A_y e^{i\delta_p})^T$, donde el superíndice T significa transpuesto. Consecuentemente el signo del parámetro de Stokes S_3 se toma como positivo. Finalmente, con referencia a un sistema coordenado positivo la onda se propaga en la dirección positiva de z y la punta del vector \vec{E} describe una hélice derecha o positiva en la medida que se propaga en el espacio (Figura 2), independientemente de la ubicación del observador. Una hélice es positiva cuando su sentido de giro sigue el sentido de giro del producto vectorial $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$, también conocida como la regla de la mano derecha.

Es interesante notar en la Figura 2 que cuando la hélice gira en el espacio describe un determinado sentido de giro (i.e. horario) y cuando la misma onda se observa en cualquier plano $z = cte$ observamos un sentido de giro opuesto (i.e. antihorario) al observar únicamente su variación en el tiempo.

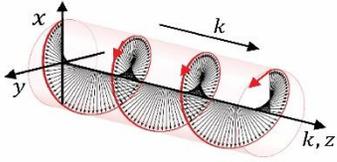
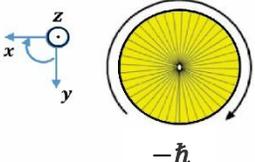
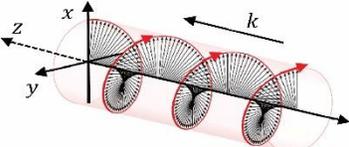
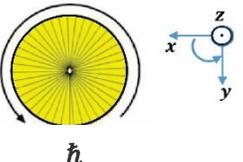
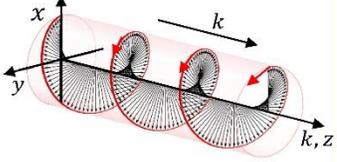
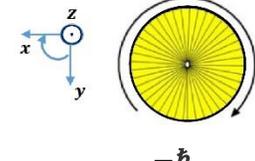
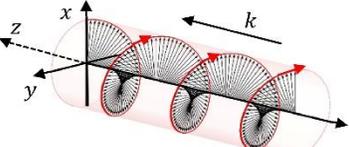
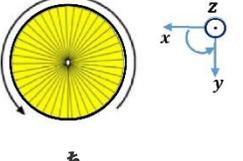
1) Forma exponencial de la onda plana ($\pm\omega t$)	$e^{i(\omega t - kz + \delta_p)}$ * Nebraska	$e^{i(\omega t + kz + \delta_p)}$
2) Forma del vector de Jones $\begin{pmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\delta_p} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} \\ e^{+i\pi/4} \end{pmatrix}$ $\delta_p = \delta_y - \delta_x = \pi/2$	$\begin{pmatrix} e^{+i\pi/4} \\ e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$ $\delta_p = -\pi/2$, ó $\bar{\delta}_p = \delta_x - \delta_y$
3) Signo del parámetro de Stokes S_3	+ S_3	- S_3
4) Hélice de la onda Plana Valor esperado del momento angular del spin \hbar (SAM) ó del momentum $\hbar k$ $\hbar = h/2\pi$	(+) <i>Espacio</i>  <i>Tiempo (z = cte)</i>  $-\hbar$	(-) <i>Espacio</i>  <i>Tiempo (z = cte)</i>  \hbar
1) Forma exponencial de la onda plana ($\pm\omega t$)	$e^{i(-\omega t - kz + \delta_p)}$	$e^{i(-\omega t + kz + \delta_p)}$ * IEEE
2) Forma del vector de Jones $\begin{pmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\delta_p} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e^{+i\pi/4} \\ e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$ $\delta_p = -\pi/2$, ó $\bar{\delta}_p = \delta_x - \delta_y$	$\begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} \\ e^{+i\pi/4} \end{pmatrix}$ $\delta_p = \delta_y - \delta_x = \pi/2$
3) Signo del parámetro de Stokes S_3	- S_3	+ S_3
4) Hélice de la onda Plana Valor esperado del momento angular del spin \hbar (SAM) ó del momentum $\hbar k$ $\hbar = h/2\pi$	(+) <i>Espacio</i>  <i>Tiempo (z = cte)</i>  $-\hbar$	(-) <i>Espacio</i>  <i>Tiempo (z = cte)</i>  \hbar

Figura 1. Convenciones de signos para luz circular derecha.

Podemos analizar la naturaleza de la curva descrita por la punta del vector de campo eléctrico, si eliminamos la variable tiempo t en las ecuaciones (5) y (6):

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{A_x A_y} \cos \delta_p = \sin^2 \delta_p \quad (8)$$

esta ecuación corresponde a una elipse (ver Figuras 3 y 4), por lo que la onda de la relación (3) se dice que está elípticamente polarizada, lo cual incluye los casos de polarización lineal y circular.

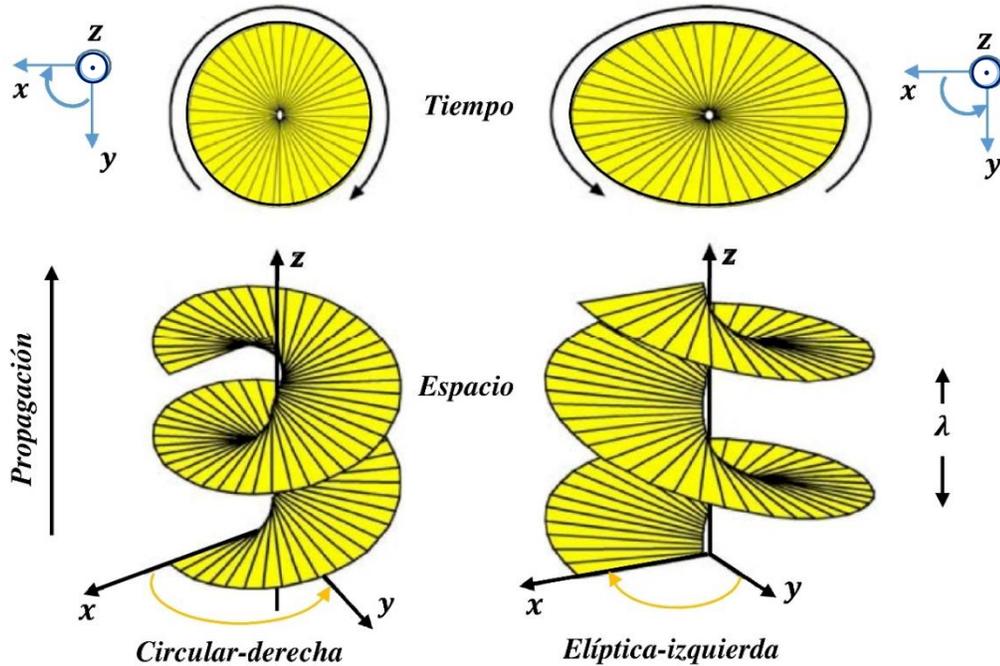


Figura 2. Convención de Nebraska para luz polarizada derecha e izquierda.

En la Figura 3 la elipse que describe al estado de polarización tiene una inclinación ψ_p y sus coeficientes de elipticidad ε_p y amplitud A_m se definen por,

$$\tan \varepsilon_p = \frac{b}{a} \quad (9)$$

$$\tan A_m = \frac{A_y}{A_x} \quad (10)$$

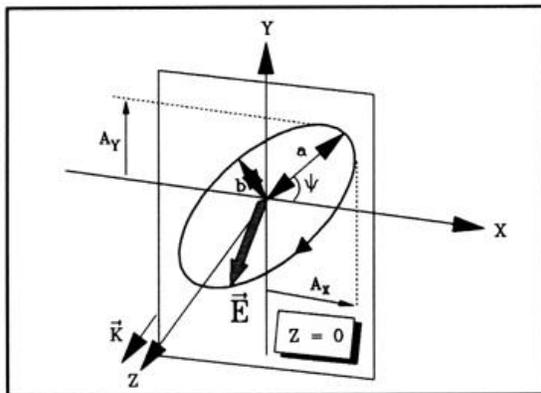


Figura 3. El vector \vec{E} describe una elipse en el plano $z = 0$ (Weidner A. G.,1992).

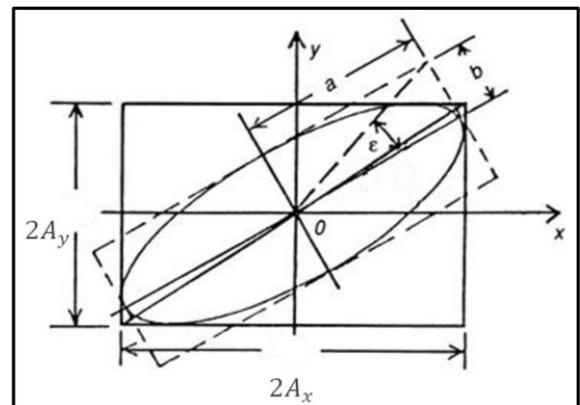


Figura 4. Parámetros de la elipse de polarización (Collett. E., 2003).

Alternativamente, el estado de polarización puede ser totalmente caracterizado por cuatro cantidades físicamente medibles, conocidas como el vector de Stokes $\vec{S} = (S_0, S_1, S_2, S_3)^T$. El primer elemento S_0 representa intensidad luminosa total I del haz óptico, de tal manera que en el caso de luz parcialmente polarizada podemos escribir

$$S_0 = S_{0P} + S_{0N} , \quad (11)$$

donde S_{0P} es la intensidad luminosa de la luz polarizada y S_{0N} la intensidad de la luz no polarizada. Se define al grado de polarización DP [%] de la siguiente manera (W. Schurcliff, 1962),

$$DP = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{S_0^2}} , \quad (12)$$

para luz totalmente polarizada $DP = 100\%$, $S_0 = S_{0P}$ y los parámetros de Stokes se pueden calcular a partir de los vectores de Jones de la siguiente manera

$$S_i = E^\dagger \sigma_i E, \quad (13)$$

donde el superíndice \dagger significa transpuesta conjugada o transpuesta hermitiana, σ_0 es la matriz identidad y $\sigma_{1,2,3}$ son las matrices sigma de Pauli (J. N. Damask, 2005) definidas como,

$$\sigma_0 = [\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad (14)$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} , \quad (15)$$

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad (16)$$

$$\sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} . \quad (17)$$

Estas matrices son hermíticas y unitarias, $\sigma_i^\dagger = \sigma_i$, $\sigma_i^\dagger \sigma_i = [\mathbb{I}]$. A la expresión $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ se le conoce como operador vectorial de Pauli o *vector de Pauli*; hay que notar que los elementos de este *vector* son tres matrices. Los subíndices de las matrices σ_i se pueden permutar cíclicamente. En los libros de texto de física la dirección de z se denota por σ_1 mientras que aquí se denota por σ_3 ; entonces nuestras matrices de Pauli tienen la equivalencia $\sigma_{1F} \rightarrow \sigma_3, \sigma_{2F} \rightarrow \sigma_1, \sigma_{3F} \rightarrow \sigma_2$. Las matrices definidas por las ecuaciones (15 a 17) son muy utilizadas cuando se estudia la polarización óptica (C. S. Brown, 1992; O. Arteaga et al, 2009; J. N. Damask, 2005; J. P. Gordon et al, 2000). Históricamente las matrices de espín de Pauli describen el espín del electrón, el cual es hacia arriba o abajo en la dirección z ; mientras que en polarización óptica históricamente se ha considerado

a un estado horizontal como paralelo a x . Utilizando la ecuación (13) se pueden encontrar las expresiones para los parámetros de Stokes los cuales se muestran en la Tabla 1, donde * significa el complejo conjugado.

Tabla 1. Vector de Stokes expresado con diferentes parámetros del EP.

	$(E^\dagger \sigma_i E)$	(A_x, A_y, δ_p)	(ϵ, ψ)
S_0	$E_x E_x^* + E_y E_y^*$	$A_x^2 + A_y^2$	S_0
S_1	$E_x E_x^* - E_y E_y^*$	$A_x^2 - A_y^2$	$S_0 \cos 2\epsilon_p \cos 2\psi_p$
S_2	$E_x E_y^* + E_y E_x^*$	$2A_x A_y \cos \delta_p$	$S_0 \cos 2\epsilon_p \sin 2\psi_p$
S_3	$i(E_x E_y^* - E_y E_x^*)$	$2A_x A_y \sin \delta_p$	$S_0 \sin 2\epsilon_p$

Nótese que para luz no polarizada $DP = 0\%$ y el vector de Stokes se reduce a $\vec{S} = (S_0, 0, 0, 0)^T$. El parámetro S_1 representa la intensidad luminosa de luz lineal horizontal (que denotamos con H), S_2 representa la intensidad luminosa de luz lineal inclinada a un ángulo de $\psi = 45^\circ$ (que denotamos con Q) y S_3 representa la intensidad luminosa de luz con polarización circular derecha (que denotamos con R). Cuando $DP = 100\%$, se observa que los parámetros de Stokes no son independientes y cumplen con

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (18)$$

la cual es la ecuación de una esfera en el espacio de polarización definido por S_1, S_2, S_3 y es conocida como la esfera de Poincaré (ver Figura 5). Se puede considerar a esta esfera como la representación geométrica de los parámetros de Stokes, cuyas componentes S_1, S_2, S_3 , expresan las coordenadas cartesianas de un punto M sobre la esfera tal como se observa en la Figura 5. Esta es una esfera de radio S_0 , y si normalizamos el vector para una intensidad luminosa unitaria ($S_0 = 1$), se obtiene una esfera unitaria. Entonces, cualquier estado de polarización posible puede ser representado por un punto M sobre la esfera de Poincaré y puede ser definido tanto por sus coordenadas cartesianas M (S_1, S_2, S_3), como por sus dos coordenadas esféricas M ($2\psi, 2\epsilon$), denominadas longitud y latitud. Es importante notar que las coordenadas en la esfera de Poincaré ($2\psi, 2\epsilon$) representan el doble del valor de los parámetros ψ y ϵ , los cuales se pueden calcular a partir de los parámetros de Stokes de la siguiente manera (E. Collet, 2003)

$$\tan 2\psi_p = \frac{S_2}{S_1} = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \delta_p, \quad (19)$$

$$\sin 2\epsilon_p = \frac{S_3}{S_0} = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 + A_y^2} \sin \delta_p. \quad (20)$$

Otra manera de definir el estado de polarización es a partir del vector de Jones (\vec{V}), el cual se obtiene a partir de la representación fasorial de las ecuaciones (5) y (6), haciendo $\vec{E}_T = \vec{V}_t$ obtenemos,

$$\vec{V}_t = \begin{pmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Normalmente se multiplica esta expresión por un factor de fase $e^{-i\delta_x}$ que representa un corrimiento del sistema coordenado lo largo del eje z , y expresar al vector de Jones como

$$\vec{V} = e^{-i\delta_x} \vec{V}_t = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y e^{i\delta_p} \end{pmatrix} = \sqrt{I} \begin{bmatrix} \sin \alpha_\alpha \\ \cos \alpha_\alpha e^{i\delta_p} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

$$I = A_x^2 + A_y^2. \quad (23)$$

Se dice que dos estados de polarización V_1 y V_2 son ortogonales o linealmente independientes, cuando su producto interno hermitiano (o hermitico) es nulo (C. Brosseau, 1998)

$$V_1^\dagger \cdot V_2 = 0. \quad (24)$$

De acuerdo a la convención de Nebraska los ejes de la esfera deben cumplir con el producto vectorial $S_1 \times S_2 = S_3$, es decir, constituyen un sistema coordenado derecho.

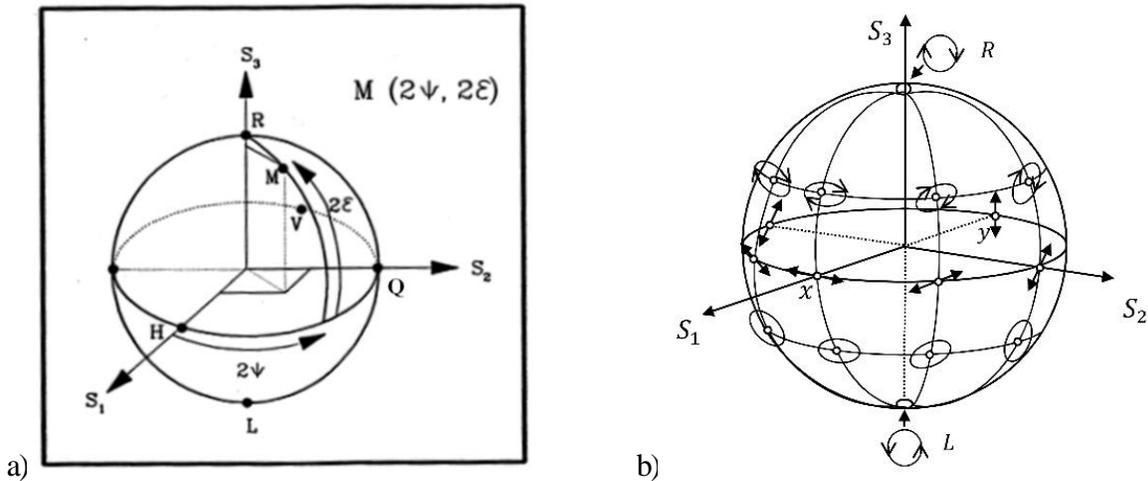


Figura 5. Esfera de Poincaré. a) Coordenadas en la esfera de Poincaré b) Estados de polarización en la esfera de Poincaré.

2.2 Retardador elíptico

Un medio con birrefringencia elíptica Δn_E , cumple con la siguiente ecuación constitutiva (A. Yariv A. et al, 1984)

$$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E} + i\epsilon_0 \vec{G} \times \vec{E}, \quad (25)$$

donde \vec{D} es el vector de desplazamiento eléctrico, ϵ_0 es la permitividad del vacío, $[\epsilon]$ es el tensor dieléctrico sin actividad óptica y \vec{G} es el vector de giro paralelo a la dirección de la propagación. El

producto cruz puede ser representado por el producto del campo eléctrico con el tensor antisimétrico $[\mathbf{G}]$,

$$i\epsilon_0 \vec{\mathbf{G}} \times \vec{\mathbf{E}} = i\epsilon_0 \begin{bmatrix} 0 & -G_z & G_y \\ G_z & 0 & -G_x \\ -G_y & G_x & 0 \end{bmatrix} \vec{\mathbf{E}} = i\epsilon_0 [\mathbf{G}] \vec{\mathbf{E}} , \quad (26)$$

y entonces, la ecuación (25), se convierte en

$$\vec{\mathbf{D}} = [\epsilon] \vec{\mathbf{E}} + i\epsilon_0 [\mathbf{G}] \vec{\mathbf{E}} = ([\epsilon] + i\epsilon_0 [\mathbf{G}]) \vec{\mathbf{E}} . \quad (27)$$

Utilizando la ecuación (27) se puede escribir la correspondiente ecuación de Fresnell de los frentes de onda (A. Yariv A. *et al*, 1984) por medio de la cual se establece que cuando un haz óptico incide en un retardador óptico (ver Figura 6), el haz de luz se descompone en dos estados de polarización ortogonales conocidos como estados de polarización característicos o eigenestados, los cuales viajan a velocidades distintas V_s y V_f , por lo cual sufren un desfaseamiento o retardamiento entre sí. Los subíndices s y f corresponden a la onda lenta y rápida respectivamente. Dependiendo de la naturaleza de los eigenestados (o eigenvectores) los retardadores pueden ser lineales, circulares o elípticos, siendo este último el caso más general. La matriz de polarización M de un retardador óptico corresponde al de una matriz de rotación en el espacio de los estados de polarización (esfera de Poincaré). Esta matriz es unitaria y en el caso de las matrices de Jones cumple con,

$$M = \begin{bmatrix} J_{XX} & J_{XY} \\ J_{YX} & J_{YY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{XX} & -J_{YX}^* \\ J_{YX} & J_{XX}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + iB & -C + iD \\ C + iD & A - iB \end{bmatrix} , \quad (28)$$

$$|J_{XX}|^2 + |J_{YX}|^2 = |J_{XY}|^2 + |J_{YY}|^2 = A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1 . \quad (29)$$

Las matrices de polarización pueden ser homogéneas o inhomogéneas; se dice que son homogéneas cuando sus eigenvectores son ortogonales y permanecen constantes a lo largo de todo el medio o material. En general, el producto de dos matrices homogéneas produce una matriz que no es homogénea.

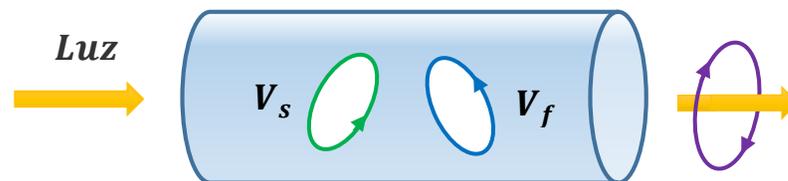


Figura 6. Descomposición de un haz óptico en un retardador elíptico.

El retardamiento δ de un retardador se puede calcular a partir de (D. Kliger, 1990),

$$\delta = \omega \Delta t = k DCO = \phi_f - \phi_s = \frac{2\pi}{\lambda} (n_s - n_f) L = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n L , \quad (30)$$

donde DCO es la diferencia de camino óptico, $\phi_{f,s}$ es la fase (rápida, lenta), L es la longitud del medio, Δ simboliza un incremento, n es el índice de refracción y Δn es la birrefringencia. En particular para un retardador elíptico, su retardamiento δ_E puede descomponerse como la suma pitagórica de los retardamientos lineal δ_L y circular δ_C ,

$$\delta_E = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_E L, \quad (31)$$

$$\delta_E^2 = \delta_L^2 + \delta_C^2, \quad (32)$$

y de esta última ecuación se obtiene,

$$\Delta n_E^2 = \Delta n_L^2 + \Delta n_C^2. \quad (33)$$

Podemos construir un triángulo rectángulo como el que se muestra en la Figura 7 para obtener las relaciones entre los distintos retardamientos,

$$\text{sen } 2\mu = \frac{\delta_C}{\delta_E}, \quad (34)$$

$$\text{cos } 2\mu = \frac{\delta_L}{\delta_E}. \quad (35)$$

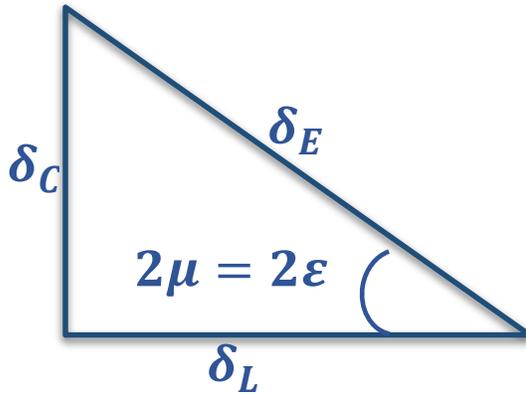


Figura 7. Relación geométrica entre los tres retardamientos.

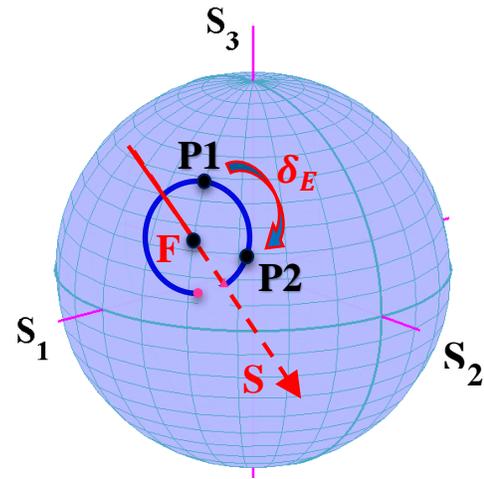


Figura 8. Trayectoria en la esfera de Poincaré utilizando la matriz de un retardador elíptico.

La matriz de Jones general para un retardador sin absorción está dada por

$$\mathbf{M} = e^{i\left(\frac{|\bar{\mathbb{F}}|}{2}\right)\hat{\mathbb{F}} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \frac{|\bar{\mathbb{F}}|}{2} \sigma_0 + i \text{sen} \frac{|\bar{\mathbb{F}}|}{2} \hat{\mathbb{F}} \cdot \vec{\sigma}, \quad (36)$$

donde $\bar{\mathbb{F}} = |\bar{\mathbb{F}}| \hat{\mathbb{F}}$ y $\hat{\mathbb{F}}$ es un vector unitario en la dirección del eje rápido opuesto al vector de birrefringencia $\hat{\mathbb{S}} = -\hat{\mathbb{F}}$. Para el caso de un retardador elíptico alineado con el eje x tenemos que

$$\bar{\mathbb{F}}_{Eo} = [\cos(2\mu), 0, \text{sen}(2\mu)] \delta_E, \quad (37)$$

con lo cual podemos obtener la matriz \mathbf{M}_E descrita en la ecuación AII. 12 del apéndice II.

La representación geométrica de una placa retardadora en la esfera de Poincaré, es la de un eje de giro \vec{S} que va desde el eigenvector rápido (F) hacia el eigenvector lento (S), de tal manera que cuando incide un estado de polarización P_1 , es girado positivamente (hélice positiva) por el eje $\vec{S} = \vec{FS}$ un ángulo igual al del retardamiento (δ_E) hasta obtener el estado de polarización emergente P_2 , como se muestra en la Figura 8 (A. Weidner, 1992). Este es un caso muy sencillo, y la trayectoria en la esfera de Poincaré es la de un círculo centrado en el eigenvector rápido $F = (30^\circ, 45.5)$.

Retardador circular. Los materiales que exhiben birrefringencia circular, típicamente tienen una estructura molecular helicoidal, sus moléculas son conocidas como moléculas quirales (ver Figura 9); esto es que no se pueden superponer a su imagen espejo por ser formas opuestas, a diferencia de los objetos aquirales (como un cubo). Cuando un haz óptico incide en un retardador circular, el haz de luz se descompone en dos estados de polarización circulares (R) y (L) los cuales viajan a velocidades distintas V_s y V_f , por lo cual sufren un desfaseamiento. Para un medio con birrefringencia circular $\Delta n_c = n_L - n_R$ y su estado de polarización de salida esta girado a un ángulo θ_c respecto al estado de polarización de entrada. Los materiales que producen un giro positivo θ_c son llamados dextrógiros o derechos y en caso contrario son llamados levógiros o izquierdos ($-\theta_c$). Para una rotación dextrógira se tiene que la velocidad de la luz derecha (R) es más rápida que la velocidad de la luz izquierda (L), $V_R > V_L$. Por ejemplo un estado lineal vertical V incidente seguirá la trayectoria $V \rightarrow Q \rightarrow H$ sobre el ecuador de la esfera de Poincaré. Es importante notar que el ángulo θ_c al que gira el estado de polarización es la mitad del ángulo de retardamiento δ_c , esto es,

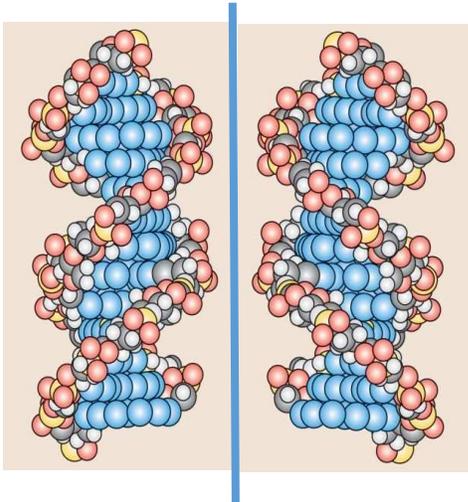
$$\delta_c = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_c L = 2 \theta_c . \quad (38)$$

Para determinar la matriz de Jones de un retardador circular podemos hacer uso de la ecuación (36), solo sustituyendo su respectivo valor de \vec{F}_C , el cual está dado por

$$\vec{F}_C = (0, 0, 1) \delta_c , \quad (39)$$

y el resultado es la matriz M_C descrita por la ecuación AII. 24 del apéndice II.

Retardador lineal. Cuando un haz óptico incide en un retardador lineal, el haz de luz se descompone en dos estados de polarización lineales (H) y (V) los cuales viajan a velocidades distintas V_s y V_f , por lo cual sufren un desfaseamiento. A diferencia de un medio con birrefringencia circular, en un medio con birrefringencia lineal los átomos de la red cristalina no están girados y las fuerzas de enlace de los electrones son anisotrópicas. El modelo que representa a un medio con birrefringencia lineal se muestra en la imagen de la Figura 10.



Espejo

Figura 9. Molécula quiral helicoidal (birrefringencia circular).

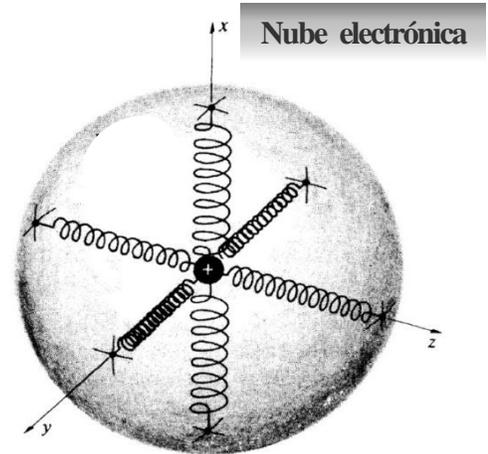


Figura 10. Modelo de un medio con birrefringencia lineal. (Hecht & Zajac 2003).

Para un medio con birrefringencia lineal $\Delta n_L = n_s - n_f$ la ecuación constitutiva (25) se reduce a,

$$\vec{D} = [\epsilon] \vec{E} . \quad (40)$$

La gran mayoría de materiales que exhiben birrefringencia lineal son no magnéticos, es decir su permeabilidad magnética $\mu_m \approx 1$, por lo que cumplen con la relación de Maxwell $\epsilon = n^2$ (E. Hecht et al, 2003). El retardamiento lineal δ_L es,

$$\delta_L = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n_L L . \quad (41)$$

Para determinar la matriz de Jones M_L de un retardador lineal podemos hacer uso de la ecuación (36).

Para el caso particular de este retardador tenemos que

$$\bar{F}_L = (1, 0, 0) \delta_L, \quad (42)$$

y el resultado de la sustitución de la ecuación (42) en la ecuación (36) es la matriz M_L descrita por la ecuación AII. 19 del apéndice II.

La matriz de una placa retardadora cuyo eje rápido tiene una inclinación Ψ_F , se puede obtener aplicando la fórmula para la rotación de matrices

$$M(\Psi_F) = R(-\Psi_F) M R(\Psi_F) , \quad (43)$$

donde la matriz de rotación $R(\Psi_F)$ está dada por

$$R(\Psi_F) = \begin{bmatrix} \cos(\Psi_F) & \text{sen}(\Psi_F) \\ -\text{sen}(\Psi_F) & \cos(\Psi_F) \end{bmatrix} \quad (44)$$

para el cálculo de Jones y

$$\mathbf{R}_m(\Psi_F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\Psi_F) & \text{sen}(2\Psi_F) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(2\Psi_F) & \cos(2\Psi_F) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

para las matrices de Mueller.

2.3 Medición de los parámetros de Stokes

2.3.1 Modelo matemático

El procedimiento experimental más utilizado para medir el estado de polarización de la luz hace uso de los parámetros de Stokes. Estos parámetros nos dicen por medio de las amplitudes de las componentes del campo eléctrico, el estado de polarización de la misma.

El método más utilizado para medir los parámetros de Stokes es por medio de un arreglo constituido principalmente por una placa retardadora y un polarizador como se observa en la Figura 11. De acuerdo a este arreglo es posible establecer un método matemático para la obtención de los parámetros de Stokes. Para obtener matemáticamente el valor de los parámetros de Stokes (S_0, S_1, S_2, S_3) es necesario definir las matrices de Mueller para una placa retardadora y para un polarizador lineal. La matriz de Mueller para un retardador lineal es

$$\mathbf{M}_{Lm}(\Psi_F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\Psi_F) + \text{sen}^2(2\Psi_F) \cos \delta_L & \text{sen} 4\Psi_F \text{sen}^2\left(\frac{\delta_L}{2}\right) & -\text{sen}(2\Psi_F) \text{sen} \delta_L \\ 0 & \text{sen} 4\Psi_F \text{sen}^2\left(\frac{\delta_L}{2}\right) & \text{sen}^2(2\Psi_F) + \cos^2(2\Psi_F) \cos \delta_L & \cos(2\Psi_F) \text{sen} \delta_L \\ 0 & \text{sen}(2\Psi_F) \text{sen} \delta_L & -\cos(2\Psi_F) \text{sen} \delta_L & \cos \delta_L \end{bmatrix}, \quad (46)$$

donde δ_L es el retardamiento lineal y Ψ_F es la inclinación del eje rápido. La matriz de Mueller para un polarizador lineal es,

$$\mathbf{P}_m(\Psi_P) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\Psi_P) & \text{sen}(2\Psi_P) & 0 \\ \cos(2\Psi_P) & \cos^2(2\Psi_P) & \left(\frac{1}{2}\right) \text{sen}(4\Psi_P) & 0 \\ \text{sen}(2\Psi_P) & \left(\frac{1}{2}\right) \text{sen}(4\Psi_P) & \text{sen}^2(2\Psi_P) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

donde Ψ_P es la inclinación del eje de transmisión del polarizador.

Una vez definidas estas matrices el procedimiento para calcular el vector de Stokes de salida (S_{out}), es por medio de la ecuación (48):

$$\mathbf{S}_{out} = \begin{bmatrix} S'_0 \\ S'_1 \\ S'_2 \\ S'_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{P}_m(\Psi_P)][\mathbf{M}_{Lm}(\delta_L, \Psi_F)] \cdot \mathbf{S}_i = [\mathbf{P}_m(\Psi_P)][\mathbf{M}_{Lm}(\delta_L, \Psi_F)] \cdot \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}, \quad (48)$$

donde S_i es un vector que representa un haz luminoso de entrada con una polarización arbitraria. Una vez resuelta la ecuación (48) obtenemos el vector de salida (\mathbf{S}_{out}) el cual contiene la información de los cuatro parámetros de Stokes de salida. Del vector \mathbf{S}_{out} se utilizará el parámetro $S'_0 = I'$ el cual representa la intensidad total del \mathbf{S}_{out} , y está dado por,

$$S'_0 = I' = I'(\Psi_F, \delta_L, \Psi_P) = \frac{1}{2} \{ S_0 + (S_1 \cos 2\Psi_F + S_2 \sin 2\Psi_F) \cos 2(\Psi_P - \Psi_F) \\ + (S_2 \cos 2\Psi_F - S_1 \sin 2\Psi_F) \sin 2(\Psi_P - \Psi_F) \cos \delta_L + S_3 \sin 2(\Psi_P - \Psi_F) \sin \delta_L \}, \quad (49)$$

donde es posible observar que la intensidad transmitida (S'_0) es fuertemente dependiente de variaciones de los parámetros: Ψ_F , δ_L y Ψ_P .

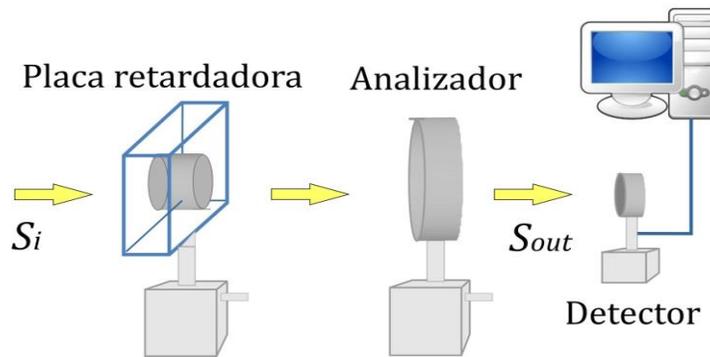


Figura 11. Arreglo óptico para medir los parámetros de Stokes.

2.3.2 Método experimental

Una vez obtenida matemáticamente la ecuación (49) que define el parámetro S'_0 , es posible realizar el método experimental conocido, y el cual se puede observar en la Figura 11. Partiendo de este arreglo óptico es necesario medir cuatro intensidades luminosas para determinar los parámetros de Stokes del haz incidente (S_i). A continuación se describirán los pasos a seguir para tomar las lecturas de intensidad necesarias:

- 1.- Introducir el estado de polarización a medir el cual se representa por el vector S_i .
- 2.- Utilizando el arreglo de la Figura 11 se coloca la placa retardadora con $\Psi_F = 0^\circ$ y el analizador con $\Psi_P = 45^\circ$. Consideraremos el caso en que $\delta_L = 90^\circ$. Se toman las lecturas de la intensidad luminosa transmitida (I_Q), la cual es obtenida por medio de la sustitución de los parámetros $\Psi_F = 0^\circ$, $\delta_L = 90^\circ$ y $\Psi_P = 45^\circ$ en la ecuación (49),

$$I_Q = I'(0^\circ, 90^\circ, 45^\circ) = (0.5)(S_0 + S_3) . \quad (50)$$

3.- Las 3 lecturas siguientes se realizan con $\Psi_P = \Psi_F$, ya que si estos ejes son paralelos la luz no sufrirá ningún cambio en su estado de polarización debido a la placa retardadora, y por otro lado nos permite normalizar las mediciones de intensidad luminosa. Alternativamente, se podría colocar a la placa retardadora después del analizador, sin importar su orientación. Se procede a tomar lectura de las intensidades luminosas para tres inclinaciones del analizador ($\Psi_P = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$) con la finalidad de obtener las intensidades I_0, I_{45}, I_{90} respectivamente,

$$I_0 = I'(\Psi_F, \delta_L, \Psi_P) = I'(0^\circ, 0^\circ, 0^\circ) = (0.5)(S_0 + S_1) , \quad (51)$$

$$I_{45} = I'(\Psi_F, \delta_L, \Psi_P) = I'(45^\circ, 0^\circ, 45^\circ) = (0.5)(S_0 + S_2) , \quad (52)$$

$$I_{90} = I'(\Psi_F, \delta_L, \Psi_P) = I'(90^\circ, 0^\circ, 90^\circ) = (0.5)(S_0 - S_1) , \quad (53)$$

donde las intensidades I_0, I_{45} e I_{90} se obtienen de manera similar a la intensidad I_Q , es decir sustituyendo los valores de Ψ_F, δ_L, Ψ_P respectivamente en la ecuación (49).

4.- Por último utilizando el valor de las intensidades (I_Q, I_0, I_{45}, I_{90}) es posible encontrar el vector de Stokes del haz incidente (S_i). La finalidad por la cual se miden cuatro intensidades luminosas es la de obtener un sistema de cuatro ecuaciones simultaneas (50) a (53). Resolviendo este sistema de ecuaciones por cualquier método conocido es posible encontrar los cuatro parámetros de Stokes, estos parámetros están dados por,

$$S_0 = I_0 + I_{90} , \quad (54)$$

$$S_1 = I_0 - I_{90} , \quad (55)$$

$$S_2 = 2I_Q - S_0 , \quad (56)$$

$$S_3 = 2I_{45} - S_0 . \quad (57)$$

Cabe destacar que ésta combinación es muy utilizada por su simplicidad, pero es posible establecer diferentes combinaciones en las orientaciones del polarizador (Ψ_P) y el retardador (Ψ_F), o en su caso del retardamiento de la placa retardadora (δ_L), con las cuales se pueden obtener los valores de los parámetros de Stokes de S_i .

2.3.3 Analizador de Polarización

Utilizando los principios descritos anteriormente para medir los parámetros de Stokes, se han desarrollado dispositivos electrónicos capaces de realizar estas mediciones automáticamente.

El analizador de polarización (ver Figura 12) es un dispositivo utilizado para medir el estado de polarización de un haz incidente. Este dispositivo utiliza un esquema de detección estacionario de cuatro fotodiodos para detectar rápidamente y con precisión los estados de polarización. El haz se divide en cuatro haces separados por medio de divisores de haz de tal manera que se conserven intensidades similares en estos cuatro haces, de tal manera que:

$$T_0 = \frac{1}{4}, T_1 = \frac{1}{3}, T_2 = \frac{1}{2},$$

donde T_0 , T_1 y T_2 son las transmitancias en intensidad de los divisores Dh_0 , Dh_1 y Dh_2 respectivamente. Entonces si el estado de polarización incidente S_i tiene una intensidad luminosa I_i , cada una de las placas retardadoras recibe la misma intensidad luminosa $I_i/4$.

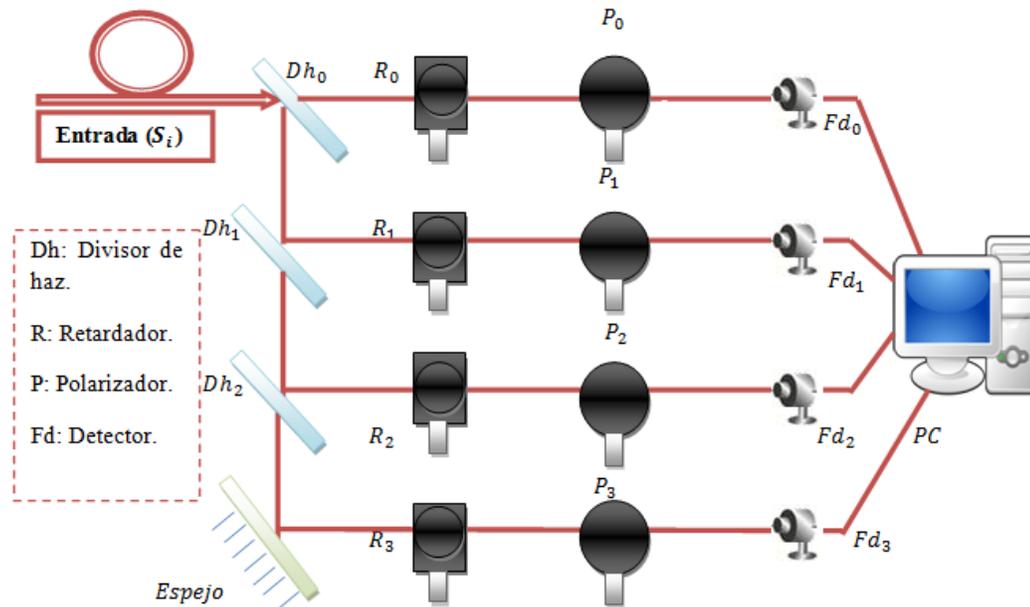


Figura 12. Arreglo que describe el funcionamiento del analizador de polarización.

Cada haz se hace pasar a través de elementos polarizadores y retardadores apropiados. El dispositivo tiene las combinaciones necesarias entre Ψ_F , δ_L y Ψ_P de los retardadores y los polarizadores para obtener las cuatro intensidades de potencia necesarias para medir el estado de polarización.

Una vez obtenidas estas cuatro intensidades, la información es dirigida hacia una computadora en la cual por medio de un software se obtienen los cuatro parámetros de Stokes descritos

matemáticamente en las ecuaciones (54-57). El sistema calcula la potencia óptica, horizontal, a 45° y circular según la definición de los parámetros de Stokes.

Por último una vez obtenidos los cuatro parámetros de Stokes es posible utilizar la esfera de Poincaré para visualizar en una pantalla el estado de polarización obtenido.

Un punto muy importante a destacar es el hecho de que en el arreglo de la Figura 12 el uso de las placas retardadoras R_1 , R_2 , y R_3 solo afectan el porcentaje de transmisión de la intensidad (por absorción). Esto es debido a que la orientación de estas tres placas corresponde a la inclinación del eje de transmisión de su respectivo polarizador ($\Psi_F = \Psi_P$) por lo cual su función no es la de actuar como un retardador. De acuerdo al punto anterior es muy factible que en un analizador de polarización electrónico estas tres placas retardadoras sean omitidas y sustituidas por algún arreglo electrónico (por ejemplo un divisor de voltaje) el cual compense el porcentaje de intensidad que afecta el hecho de que un retardador esté colocado en el arreglo óptico del analizador de polarización.

2.4 Descripción de experimento

Con el propósito de observar el comportamiento de la polarización en fibras birrefringentes y en fibras monomodales al ejercer en ellas una torsión, es necesario realizar los experimentos pertinentes. Este proceso está compuesto por una serie de pasos de similar importancia cada uno de ellos. Estos pasos serán detallados posteriormente y se pueden resumir en los siguientes puntos:

- Preparación de las muestras de fibra óptica.
- Descripción del montaje experimental.
- Alineación del montaje experimental.
- Generación del marco de referencia de laboratorio.
- Mediciones de la polarización al aplicar torsión en las fibras.

2.4.1 Preparación de las muestras de fibra óptica

Cuando se realizan experimentos de laboratorio utilizando una fibra óptica, el primer paso a desarrollar, es la preparación de las muestras de fibra óptica. Para realizar este trabajo se tienen que considerar muchos factores, debido a que la fibra es sumamente delicada y propensa a contaminarse en el área de trabajo.

Lo primero que se debe tomar en cuenta al momento de preparar las muestras, es mantener el área de trabajo limpia, para evitar que agentes externos contaminen la fibra. Una vez hecho esto se selecciona el material y equipo a utilizar en el proceso (ver Figura 13). En todo momento se debe tener

la precaución de “Siempre mantener en el lugar de trabajo un recipiente especial para depositar los residuos de la fibra, y recordar que lo ideal es utilizar lentes de seguridad y guantes de protección”.

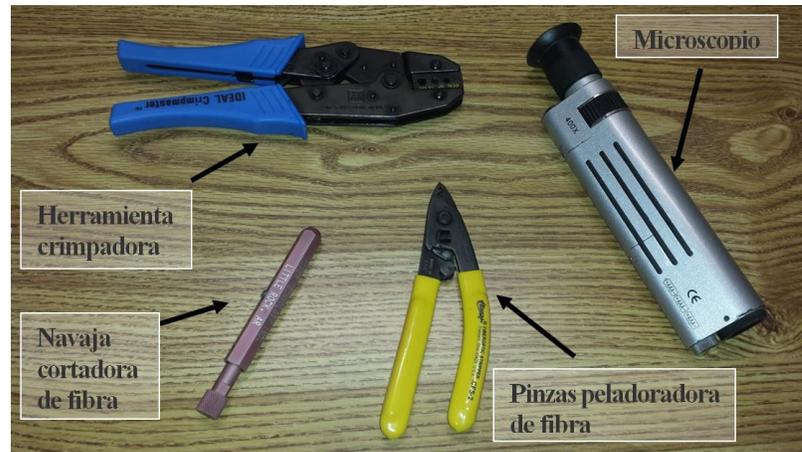


Figura 13. Equipo básico utilizado para la realización de las muestras.

Los pasos a seguir para la preparación de las muestras es la siguiente:

1. Medir con precisión el tramo de fibra a utilizar y cortarlo utilizando las pinzas adecuadas para fibra, tratando de hacer un corte fino.
2. Fijar la fibra con cinta adhesiva en un punto de altura media sobre la mesa, con la finalidad de facilitar su manejo en el proceso.
3. Tener a la mano los conectores a utilizar, para este caso se utilizaron conectores tipo FC/PC; este tipo de conectores se pueden ver en la Figura 14. Posteriormente se procede a introducir la bota protectora del conector a través de la fibra, para después conectar el anillo de seguridad del conector (tubo de crimpar).



Figura 14. Partes del conector para fibra FC/PC.

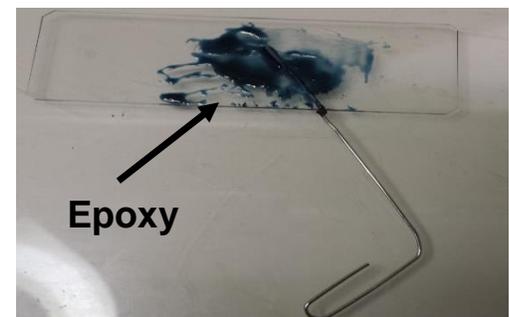


Figura 15. Preparación del pegamento epoxy.

4. Retirar con sumo cuidado el revestimiento, 3 cm aproximadamente, utilizando las pinzas peladoras de fibra.
5. Utilizando alcohol isopropílico limpiar la fibra y verificar que no le quede ningún residuo del revestimiento.
6. Hacer la preparación del pegamento epoxy en una superficie especial. Este pegamento se utilizará para adherir la fibra al conector (ver Figura 15). El pegamento se debe untar en la punta de la férula y dentro de la cápsula del conector (parte por donde se introduce la fibra). Lo recomendable para realizar un pegado más eficaz y más limpio, es utilizar una jeringa para inyectar el pegamento en el conector.
7. Tomar la punta de la fibra y con mucho cuidado y de manera pausada y constante introducir la fibra óptica a través del conector hasta que la punta de la fibra salga por la férula.
8. Una vez introducida la fibra dentro del conector es necesario que el pegamento seque para seguir con el procedimiento. Para acelerar el secado del pegamento se utiliza un horno especial para conectores (ver Figura 16), en el cual se introduce el conector a una temperatura de 60 °C, y en aproximadamente una o dos horas el pegamento seca y la fibra queda completamente adherida al conector.
9. Con precisión, fijar el anillo de seguridad del conector (crimpear), con la herramienta crimpadora.
10. Cortar la fibra óptica restante sobre la férula del conector, utilizando la navaja de corte de fibra.



Figura 16. Horno utilizado para el secado.

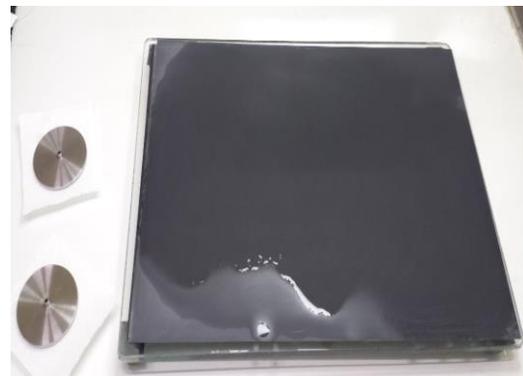


Figura 17. Discos de pulitura y lija de 12 μm .

11. Depositar la fibra desechada en el recipiente para residuos y limpiar el conector con alcohol isopropílico.
12. Empezar con el proceso de pulido de la férula (ver Figura 17). Este proceso inicia utilizando una lija de $12\mu m$, y por medio de los discos de pulitura se realiza el pulido en forma circular o de ochos, limpiando constantemente el conector mientras se pule. Este proceso se debe realizar con el cuidado de no exceder el pulido y dañar el núcleo de la fibra.
13. El proceso de pulido continúa, pero utilizando una pulidora automática, en este dispositivo se utiliza inicialmente una lija de $5\mu m$ (color azul, véase Figura 18), y por último se utiliza una lija de $1\mu m$ (color rosa, véase Figura 18), para darle el acabado final a la férula. Es importante destacar que el procedimiento de pulido más adecuado es utilizando las siguientes lijas en forma consecutiva: $12\mu m$, $9\mu m$, $3\mu m$, $1\mu m$ y por último $0.3\mu m$.
14. Se limpia el conector y se comprueba la calidad de la conectorización por medio de un microscopio especial para conectores de fibra, en el cual debe verse claramente el núcleo de la fibra y a su alrededor la férula.



Figura 18. Pulidora automática para férulas.

15. Por último, todo este proceso se lleva a cabo en la otra punta de la fibra. Algo muy importante que se tiene que tomar en cuenta al colocar el segundo conector, es alinearlos con el primero para que sus muescas de referencia coincidan una con la otra. Esto ayuda a que al colocar la muestra en el montaje experimental no presente torsión por una mala conectorización. La fibra conectorizada se cuelga de uno de los conectores por un par de días, con la finalidad de aminorar cualquier torsión residual que se podría convertir en una birrefringencia residual. Una vez

hecho esto se obtiene una muestra de fibra óptica apta para realizar mediciones en el laboratorio.

2.4.2 Descripción del montaje experimental

El estudio experimental sobre el comportamiento de las fibras birrefringentes al sufrir una torsión se realizará utilizando el arreglo óptico mostrado en la Figura 19 (D. Tentori, *et al*, 2012).

El arreglo óptico está compuesto por: la fuente de luz proveniente de un diodo láser sintonizable (Hewlett Packard 8168c), un aislador óptico el cual se utiliza para proteger el láser de la luz reflejada, un controlador de polarización (anillos de Lefevre) con el cual se produce una polarización circular en la cara de entrada del prisma polarizador de calcita, se utilizan tres acopladores de aire / fibra (montaje Melles Griot x, y, z con objetivo de microscopio de 10x).

El acoplador 1 colima la señal antes de pasar a través del polarizador lineal, el cual tiene su eje de transmisión con una inclinación ϕ . El acoplador 2 lanza la señal polarizada en la muestra de fibra (con conectores FC / PC en ambos extremos).

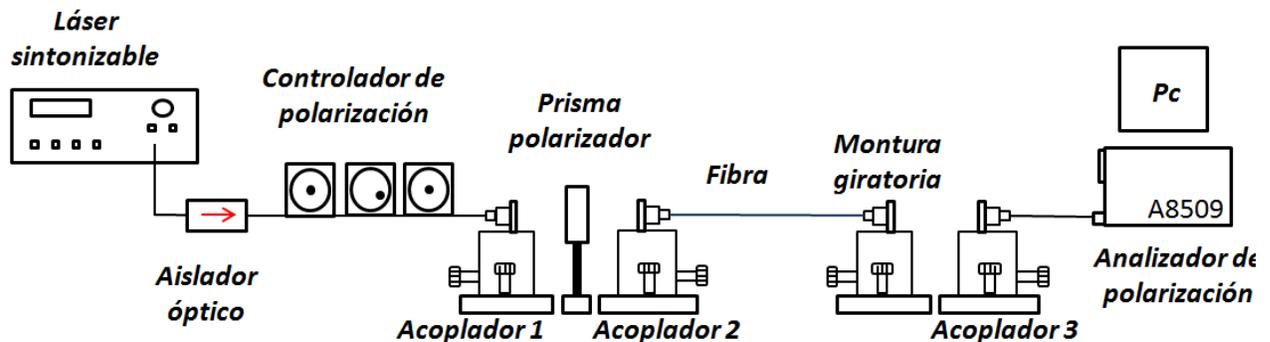


Figura 19. Montaje experimental para medir los parámetros de Stokes (\vec{S}) en una fibra óptica torcida.

El extremo de salida de la muestra se fija a un montaje rotatorio soportado por una base con inclinación $X - Y$. La escala del montaje giratorio se utiliza para medir el ángulo de torsión aplicado a la muestra de fibra. La señal de luz que emerge desde el colimador de fibra unido a la montura giratoria (Thorlabs) es lanzado por el acoplador 3 hacia un cable de fibra monomodo conectado a un analizador de polarización (Agilent 8509C). Este instrumento se utiliza para medir los estados de polarización de salida de la señal. Para lograr esto, el prisma de polarización está montado en un escenario giratorio automatizado apoyado por una montura mecánica de traslación lineal programable. El acoplador 2 también está montado en una montura mecánica lineal programable. Estas monturas de rotación y traslación automáticas son capaces de reproducir las posiciones seleccionadas; por lo tanto, permiten

mantener la alineación óptica de la instalación después de retirar y reemplazar los componentes ópticos, durante la creación del sistema de referencia del laboratorio o el cambio del SOP de entrada lineal.

2.4.3 Alineación del montaje experimental

El montaje experimental mostrado en la Figura 19, es un arreglo óptico basado en la utilización de fibra óptica, por lo cual su alineación debe tener una gran fineza. El objetivo primordial de la alineación en este arreglo es conseguir el mejor acoplamiento posible del haz de luz en el núcleo de la fibra. Tomando en cuenta que la máxima potencia que ofrece la fuente de luz láser (Hewlett Packard 8168c) es de -4 dBm , si no se consigue una buena alineación esta potencia puede reducirse a cero e imposibilitar los experimentos.

Inicialmente se contaba con una parte del arreglo alineado, y considerando que esta parte del arreglo estaba fija, su alineación no recibió cambio alguno, se mantuvo todo el tiempo en la misma posición.

Fue necesario mover la montura giratoria (ver Figura 19) continuamente al terminar las mediciones de cada fibra, debido a que cada fibra tenía una longitud aproximada de 1.5 m , pero no exactamente por lo tanto las posiciones de la montura no fueron las mismas para cada fibra. El detalle fino de la alineación de la montura giratoria recaía en el hecho de que se tenía que estar girando continuamente, con lo cual si la montura se desalineara, el haz de luz saliente de la montura giratoria se saldría del eje óptico del montaje experimental, haciendo que no se acoplara la luz en el acoplador 3 inhabilitando las mediciones.

La alineación de esta montura se realizó utilizando un láser con $\lambda = 632 \text{ nm}$ (visible). Este láser se colocó en contrapropagación y con un sistema de ejes cartesianos colocado en la montura giratoria se ajustaron sus ejes X y Y . Una vez hecho esto se colocó una pantalla blanca con un agujero alineado con el eje óptico del montaje experimental, y utilizando el fenómeno óptico de interferencia se alineó la montura giratoria utilizando el patrón de anillos resultante, haciendo que su eje óptico se centrara en el patrón de anillos. Me asegura de que al girar la montura de 0° a 360° su eje óptico seguirá alineado con el eje óptico del montaje experimental, permitiendo así las mediciones al torcer la fibra para cualquier ángulo.

2.4.4 Generación del marco de referencia

Para iniciar con el estudio experimental, es necesario hacer una correcta inicialización del equipo a utilizar. El primer paso es encender la fuente de luz láser (Hewlett Packard 8168c), esto es debido a que

su estabilización puede tardar alrededor de una hora. Se procede a encender la computadora que es parte del analizador de polarización (Agilent 8509C) y posee el software controlador del mismo. Una vez completado el arranque de la computadora, se procede a encender el analizador de polarización, posteriormente se inicia la aplicación diseñada por el fabricante para el uso del analizador de polarización (“LPA”, por sus siglas en inglés).

Las mediciones se tienen que hacer respaldadas por un marco de referencia de laboratorio, por lo cual el primer paso antes de medir es la realización del mismo.

Al iniciar la aplicación LPA, lo primero es calibrar el cero del analizador de polarización, con la finalidad de obtener resultados más precisos con respecto a la medición de potencia del láser. Posteriormente se seleccionan los estados de polarización que servirán como referencia para ajustar el marco de referencia del montaje experimental, los cuales son tres estados de polarización lineal con inclinaciones ϕ : 0° , 60° y 120° .

Las instrucciones para realizar el marco de referencia se describen a continuación:

1. Se debe liberar el espacio entre el acoplador uno y el acoplador tres, para esto es necesario retirar del eje óptico el prisma polarizador y el acoplador dos. Este procedimiento es realizado automáticamente por la aplicación “CBA”, con la cual por medio de motores pueden mover con mucha precisión las monturas en las que se encuentran estos elementos ópticos.
2. Se selecciona la longitud de onda y la potencia a trabajar con el láser (Agilent 8509C). Este dispositivo genera luz linealmente polarizada. Posteriormente se modifica la orientación relativa de los anillos del controlador de polarización hasta obtener un estado de polarización circular.
3. Posteriormente se coloca de nuevo el prisma polarizador en el eje óptico, se selecciona el estado de polarización lineal y se le pone una marca de 0° a “A” en el recuadro “Markers” de la aplicación “LPA”, y se rota el ángulo del polarizador (ángulo azimutal) 60° , hecho esto se selecciona la marca “B”, y posteriormente se vuelve a rotar el prisma polarizador 60° , una vez rotado el prisma a una posición de 120° se selecciona la marca “C” y se presiona el botón “3pt Ref” para asegurar que se establezcan las referencias realizadas.

4. Debido a que la polarización circular inicial se medirá con un analizador de polarización no calibrado, la potencia de la señal es la misma para los tres SOPs (estados de polarización) de referencia; por lo tanto, este proceso tiene que ser repetido tres veces, para obtener mayor fidelidad de las mediciones. Por último, para verificar el marco de referencia se rota el prisma de polarización desde el primero hasta el tercer estado de polarización de referencia como se observa en la Figura 20, la trayectoria representada por la polarización de salida son puntos que están en el ecuador.

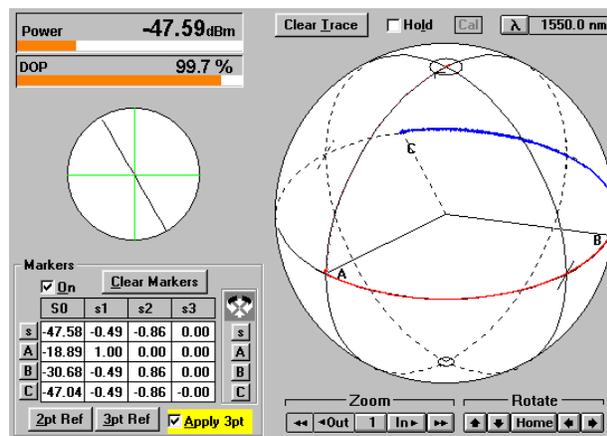


Figura 20. Marco de referencia de laboratorio, mostrado en la esfera de Poincaré.

2.4.5 Mediciones de la polarización al aplicar torsión en las fibras

El primer paso que se debe realizar es colocar la muestra de fibra en el montaje experimental. De acuerdo a la Figura 19, un conector se inserta en el acoplador 2 y el otro conector en la montura giratoria, cuidando mantener ambas puntas en la misma orientación para evitar que se tuerza la fibra en el proceso. Para mantener esta orientación al insertar la muestra de fibra en la configuración óptica, es necesario alinear el ranurado de los anillos de acoplamiento utilizados para fijar la muestra de fibra al segundo acoplador y a la montura giratoria.

Una vez colocada la muestra en el arreglo experimental es posible empezar con las mediciones necesarias.

Para la mayoría de las muestras se realizó el mismo número de mediciones con el fin de realizar las comparaciones pertinentes en cada una de ellas.

Gracias al láser sintonizable se realizaron las mediciones para varias longitudes de onda, tales como: 1525 nm, 1540 nm, 1550 nm, 1565 nm, entre otras. Con esto se obtuvo un rango espectral para

hacer más completo el estudio experimental. Se sabe que las fibras birrefringentes poseen dos ejes perpendiculares en su estructura (lento y rápido), por lo que para cubrir un cuadrante en cuanto a la polarización del haz de luz de entrada, se varió el ángulo ϕ del prisma polarizador de 0° hasta 90° , en pasos de 30° . Para cada ángulo del prisma polarizador se realizaron las mediciones de la polarización al torcer la fibra desde $\tau = 0^\circ$ hasta $\tau = 720^\circ$. Cada medición fue capturada, obteniendo así los parámetros de Stokes del haz de salida. Estos parámetros fueron posteriormente graficados en la esfera de Poincaré utilizando un código de programación en Matlab, como puede verse en las Figuras 21 y 23; además se realizaron capturas de pantalla del comportamiento de la polarización en la esfera de Poincaré del software del controlador de polarización (Agilent 8509C), como puede verse en las Figuras 22 y 24.

Es interesante notar que las trayectorias en la esfera de Poincaré desplegadas en la pantalla del analizador de polarización (ver Figuras 22 y 24) son inexactas y ruidosas. Por esta razón, surge la necesidad de capturar los datos registrados en la memoria del aparato y procesarlos con algún programa de computadora (Matlab) para obtener las imágenes más claras y limpias en la esfera de Poincaré (ver Figuras 21 y 23).

El análisis cuidadoso de la configuración óptica descrita anteriormente muestra exactamente la forma en que se pueden medir los estados de polarización de señal en las caras de entrada y salida de la muestra de fibra utilizando el mismo sistema de referencia.

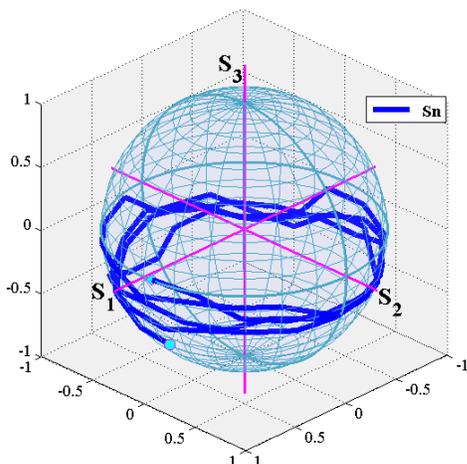


Figura 21. Gráfica de los parámetros de Stokes en la fibra PM1550 con $\phi = 0^\circ$.

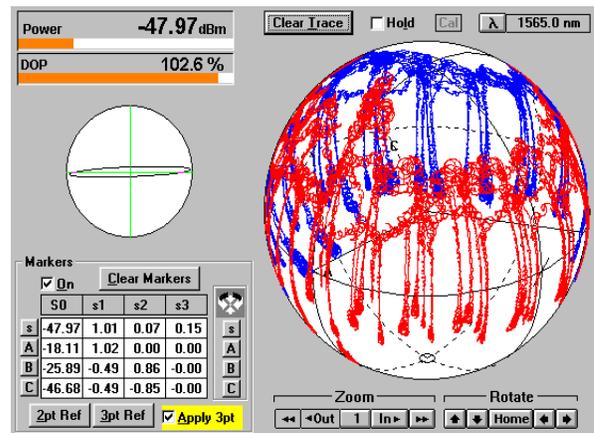


Figura 22. Captura de pantalla de una medición en una fibra PM1550 HP con $\phi = 0^\circ$.

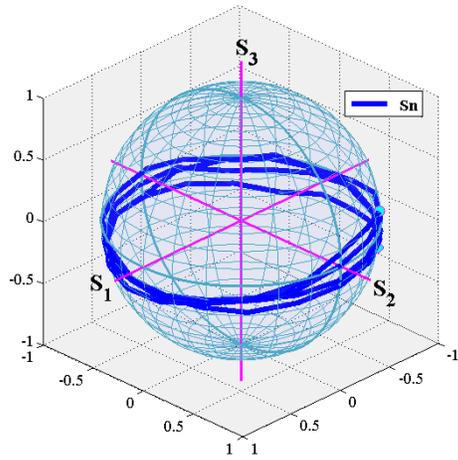


Figura 23. Gráfica de los parámetros de Stokes en la fibra PM1550HP con $\phi = 90^\circ$.

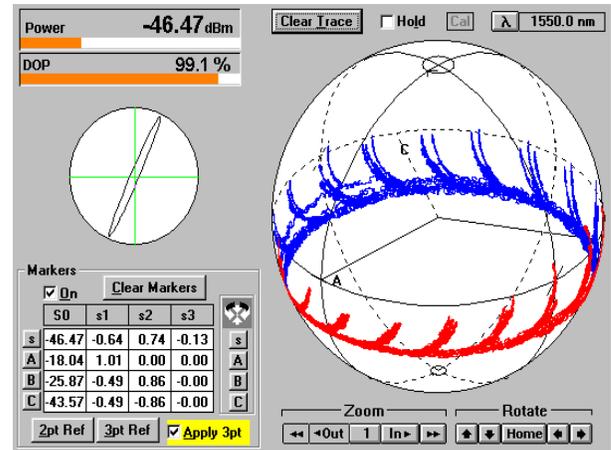


Figura 24. Captura de pantalla de una medición en una fibra PM1550HP con $\phi = 90^\circ$.

Capítulo 3. Fibras ópticas sin absorción

3.1 Fibras Birrefringentes

Aunque las fibras ópticas tienen una estructura ideal circular simétrica, todavía presentarán un efecto de birrefringencia (aleatoria) debido a la tensión residual en la fibra. Por este motivo se utilizan para preservar la polarización. Las fibras que mantienen la polarización (PMF, por sus siglas en inglés) ó fibras birrefringentes. Estas fibras trabajan mediante la introducción intencional de una birrefringencia lineal sistemática en la fibra, de modo que hay dos modos de polarización lineal bien definidos que se propagan a lo largo de la fibra con velocidades de fase distintas.

Hay dos familias de fibras birrefringentes, dependiendo de la manera en que se logra la birrefringencia: fibras birrefringentes por forma y fibras birrefringentes por estrés. En la familia de fibras birrefringentes por forma, la birrefringencia se crea como un resultado de la forma asimétrica del núcleo para los dos ejes (lento y rápido). Las fibras de núcleo elíptico serían un ejemplo típico de las fibras birrefringentes por forma. Las fibras birrefringentes por estrés tienen un núcleo casi circular, y son fibras en las cuales la birrefringencia se crea por medio de la aplicación de un estrés al núcleo de la fibra, como ejemplo de estas fibras están la tipo Panda y la Bow-tie.

3.1.1 Fibra Panda

Las fibras Panda están especialmente diseñadas para resolver el problema de la polarización aleatoria. En ellas se ha incorporado una fuerte birrefringencia en su estructura, por medio de la introducción de dos varillas (no necesariamente cilíndricas) de estrés de una composición de vidrio modificada (con un grado diferente de expansión térmica) en la preforma y en lados opuestos del núcleo como se muestra en la Figura 25. En una fibra Panda, se aplica un esfuerzo de tracción en la dirección X , y un esfuerzo de compresión en la dirección Y , como resultado del efecto foto-elástico, se induce birrefringencia (Optipedia, 2014). Cuando la polarización de la luz acoplada en la fibra se alinea con uno de los ejes de birrefringencia, su estado de polarización lineal se mantiene incluso si la fibra se dobla (R. P. Photonics, 2014).

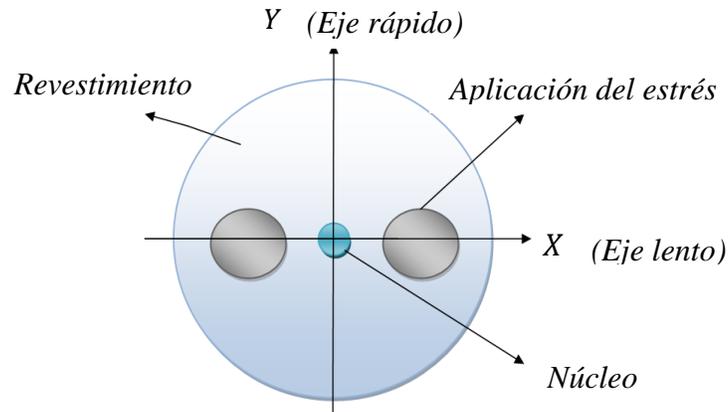


Figura 25. Esquema de la fibra óptica tipo Panda.

Los parámetros más importantes de la fibra Panda utilizada se pueden observar en la Tabla 2.

Tabla 2. Parámetros más importantes de la fibra Panda (PM1550HP).

Modelo: PM1550 HP	
Diámetro del núcleo	8.5 μm
Diámetro del revestimiento	125 \pm 2 μm
Longitud de onda de operación	1440 – 1625 nm
Longitud de batido	\leq 5 mm a 1550 nm

La longitud de batido L_b en una fibra birrefringente (para una longitud de onda particular) es la distancia (típicamente de unos pocos milímetros) tal que la diferencia de fase entre los modos rápido y lento es de 2π (Fibercore b, 2014). El retardamiento está dado por la siguiente ecuación

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n L, \quad (58)$$

donde λ es la longitud de onda, Δn es la birrefringencia y L es la longitud de la fibra. Utilizando la definición de longitud de batido se sabe que para una longitud (L) igual a la longitud de batido (L_b), el retardamiento (δ_L) debe ser igual a π , de esta manera podemos encontrar la ecuación para la longitud de batido, la cual está dada por

$$L_B = \frac{\lambda}{2\Delta n}. \quad (59)$$

3.1.2 Fibra Bow-tie

La fibra Bow-tie es una fibra birrefringente por estrés, en esta fibra la tensión a través del núcleo es creada por la adición de dos zonas de alta tensión que asemejan una corbata de moño (Bow-tie) como se observa en la Figura 26. El estrés induce una birrefringencia,

es decir, se crean dos diferentes índices de refracción: un mayor índice paralelo y un menor índice perpendicular a la tensión aplicada. Para obtener diferentes niveles de birrefringencia en esta fibra en su fabricación se modifican: la forma exacta de los arcos, su separación al núcleo y su composición (Fibercore a, 2014). Este tipo de fibras birrefringentes son capaces de crear más birrefringencia que cualquier otro diseño conocido, simplemente porque se basa en dos cuñas opuestas, siendo este el medio más simple y más eficaz de la aplicación de estrés a un punto (Fibercore c, 2014).

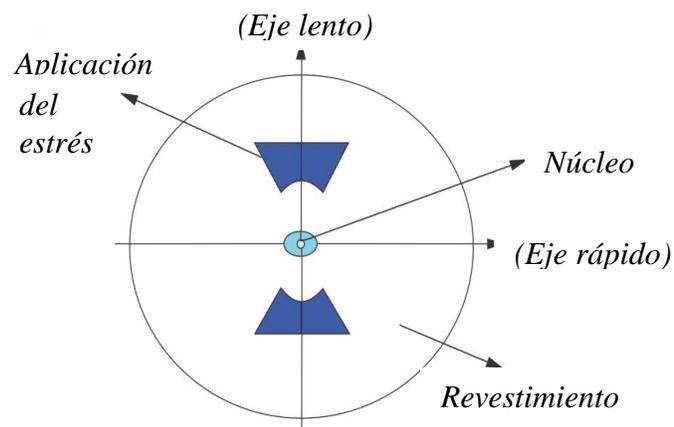


Figura 26. Esquema de la fibra tipo Bow-tie.

Los parámetros más importantes de la fibra Bow-tie utilizada se pueden observar en la Tabla 3.

Tabla 3. Parámetros más importantes de la fibra Bow-tie (HB1500T).

Modelo: HB1500T	
Concentricidad núcleo-revestimiento	< 0.6 μm
Diámetro del revestimiento	125 \pm 1 μm
Longitud de onda de operación	1550 – 1650 nm
Longitud de batido	\leq 2 mm a 633 nm

3.1.3 Fibra Elíptica

Estas fibras birrefringentes pueden ser de dos tipos, de núcleo elíptico y de revestimiento elíptico. Para nuestros experimentos utilizamos las fibras de revestimiento elíptico. En este tipo de fibras su revestimiento interior se deforma para conseguir la forma de una elipse (ver Figura 27) con una elipticidad de

$$\varepsilon_f = \left(\frac{r_2}{r_1}\right) - 1, \quad (60)$$

para proporcionar una tensión mecánica anisotrópica sobre el núcleo circular, donde r_1 y r_2 son los semiejes del revestimiento. En las fibras de revestimiento elíptico la distribución de la tensión alrededor del núcleo es casi uniforme, por lo tanto este tipo de fibras podría mostrar un comportamiento no dispersivo tal como la fibra panda.

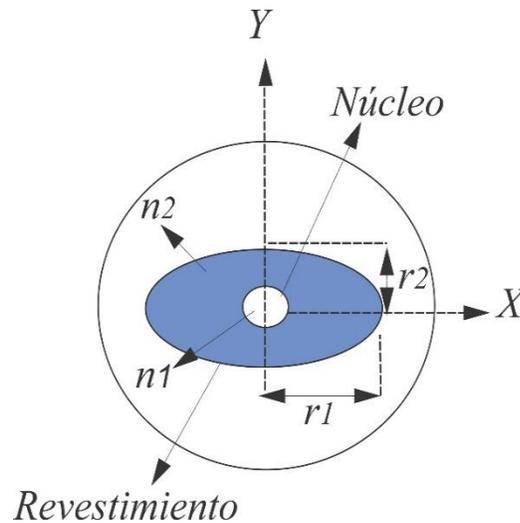


Figura 27. Esquema de la fibra de revestimiento elíptico.

Las fibras de revestimiento elíptico pueden tener algunas ventajas con respecto a las fibras con núcleo elíptico en los siguientes aspectos: la birrefringencia solo es debida a componentes de estrés, la birrefringencia puede ser incrementada con una mayor concentración del material en el revestimiento elíptico sin alterar el núcleo y manteniéndolo en condiciones de menos pérdidas. Sin embargo el proceso de fabricación de estas fibras es más complicado y la calidad con la que preservan la polarización es notablemente más baja que en otros tipos de fibras birrefringentes (PMF). Por esta razón estas fibras han estado desapareciendo del mercado. Los parámetros más importantes de la fibra elíptica utilizada se pueden observar en la Tabla 4.

Tabla 4. Parámetros más importantes de la fibra elíptica (FSPM 6621).

Modelo: FSPM 6621	
Diámetro del núcleo	8 μm
Longitud de onda de operación	1300 nm
Longitud de batido (633 nm)	1.6 mm
Eje mayor de la elipse	75 μm
Eje menor de la elipse	30 μm
Diámetro del revestimiento exterior	125 μm

3.2 Fibra monomodo (SMF-28)

Las fibras monomodo son fibras en las cuales únicamente se propaga un modo de luz. El diámetro del revestimiento de estas fibras es de $125 \mu\text{m}$, igual que en las multimodo, sin embargo el diámetro del núcleo es mucho menor, de unas $9 \mu\text{m}$ aproximadamente. Este hecho hace que su transmisión sea paralela al eje de la fibra y que, a diferencia de las fibras multimodo, las fibras monomodo permitan alcanzar grandes distancias y transmitir elevadas tasas de información. La estructura interna de una fibra SMF-28 puede verse en la Figura 28.

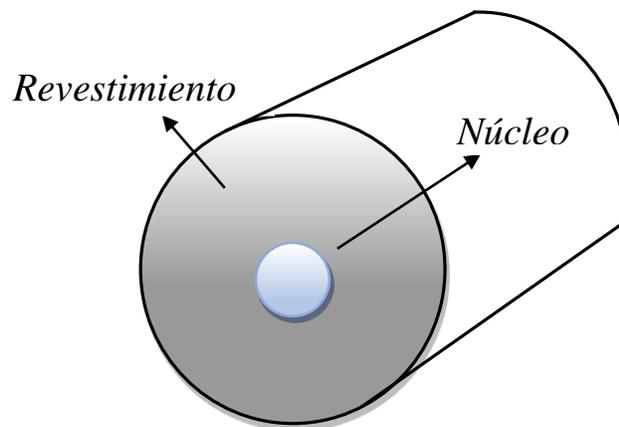


Figura 28. Esquema de la fibra monomodo SMF-28.

Los parámetros más importantes de la fibra SMF-28 utilizada se pueden observar en la Tabla 5.

Tabla 5. Parámetros más importantes de la fibra monomodo (SMF-28).

Modelo: SMF-28	
Diámetro del núcleo	$8.2 \mu\text{m}$
Diámetro del revestimiento	$125 \pm 1 \mu\text{m}$
Longitud de onda de operación	$1310 - 1550 \text{ nm}$
Concentricidad núcleo-revestimiento	$< 0.5 \mu\text{m}$

3.3 Modelo matemático para describir el comportamiento de una fibra torcida

3.3.1 Ecuaciones básicas

Supongamos que tenemos una fibra óptica que en general exhibe birrefringencia lineal y birrefringencia circular como se muestra en la Figura 29, en la cual hemos considerado un intervalo Δz el cual consiste de dos secciones: una caracterizada por un retardamiento

lineal por unidad de longitud $R_L = \delta_L/z$ y otra por un retardamiento circular por unidad de longitud $R_C = \delta_C/z$. Para un haz de luz que se propague en la fibra, tenemos que su vector de Stokes para una distancia z es $\mathcal{S}(z)$ y para una distancia $z + \Delta z$ es $\mathcal{S}(z + \Delta z)$. Ambos vectores están relacionados por

$$\mathcal{S}(z + \Delta z) = M_{\Delta z} \mathcal{S}(z), \quad (61)$$

donde $M_{\Delta z}$ representa la matriz de Mueller para una sección delgada de espesor Δz . Substrayendo $\mathcal{S}(z)$ en ambos lados de la ecuación (61) obtenemos que el cambio $\Delta \mathcal{S}$ en el vector de Stokes es

$$\Delta \mathcal{S}(z) = \mathcal{S}(z + \Delta z) - \mathcal{S}(z) = (M_{\Delta z} - [\mathbb{I}])\mathcal{S}(z) = \mathfrak{M} \mathcal{S}(z). \quad (62)$$

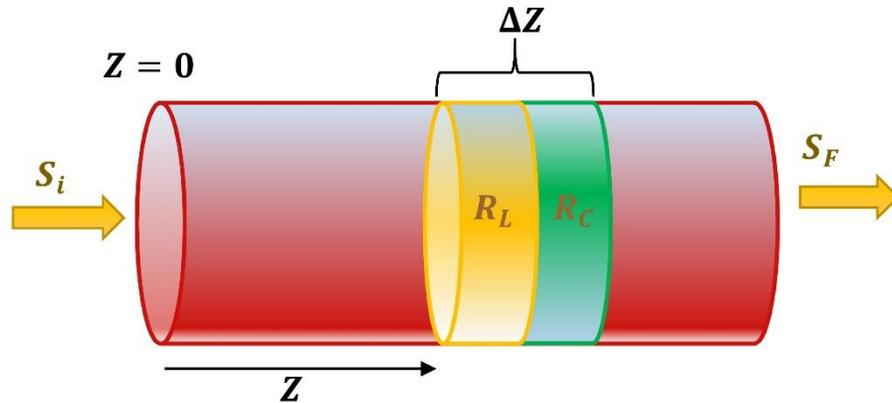


Figura 29. Fibra óptica con dos secciones R_L y R_C .

El cambio $\Delta \mathcal{S} = \Delta \mathcal{S}_L + \Delta \mathcal{S}_C$ se produce debido a los cambios $\Delta \delta_L = (k \Delta n_L)\Delta z = R_L \Delta z$ en la birrefringencia lineal y a los cambios $\Delta \delta_C = (2 \theta_\tau)\Delta z = R_C \Delta z$ en la birrefringencia circular. De las ecuaciones (AII.21 y AII.25) del Apéndice II tenemos que las matrices de Mueller para estas secciones caracterizadas por R_L y R_C son

$$M_{Lm}(\Delta \delta_L) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos R_L \Delta z & \text{sen } R_L \Delta z \\ 0 & 0 & -\text{sen } R_L \Delta z & \cos R_L \Delta z \end{bmatrix}, \quad (63)$$

$$M_{Cm}(\Delta \delta_C) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos R_C \Delta z & \text{sen } R_C \Delta z & 0 \\ 0 & -\text{sen } R_C \Delta z & \cos R_C \Delta z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Si consideramos que el espesor $\Delta z \rightarrow 0$, entonces $\Delta z \rightarrow dz$, $\Delta \mathbf{S} \rightarrow d\mathbf{S}$ y los retardamientos $\Delta \delta_L \rightarrow 0$ y $\Delta \delta_C \rightarrow 0$. Por lo tanto utilizando la ecuación (62) podemos escribir,

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \mathfrak{M} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \{(\mathbf{M}_{Lm}(\Delta \delta_L) + \mathbf{M}_{Cm}(\Delta \delta_C)) - [\mathbb{I}]\} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos R_L \Delta z & \text{sen } R_L \Delta z \\ 0 & 0 & -\text{sen } R_L \Delta z & \cos R_L \Delta z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_C dz & 0 \\ 0 & -R_C dz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_C dz & 0 \\ 0 & -R_C dz & 0 & R_L dz \\ 0 & 0 & -R_L dz & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (65)$$

Si la fibra es sujeta a una torsión mecánica, entonces el comportamiento del vector de Stokes S_F en cualquier punto z debido al efecto fotoelástico lo podemos determinar de la siguiente manera. Considerando que S es el vector de Stokes en el segmento inicial, entonces tenemos que el vector de Stokes en el siguiente segmento está dado por

$$\mathbf{S}_F = \mathbf{S} + d\mathbf{S} = \mathbf{S} + \mathfrak{M}_{dz} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & R_C dz & 0 \\ 0 & -R_C dz & 1 & R_L dz \\ 0 & 0 & -R_L dz & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

De esta última ecuación podemos obtener la derivada $\frac{dS_F}{dz}$ a partir de lo cual podemos escribir

$$\frac{dS_0}{dz} = 0, \quad (67)$$

$$\frac{dS_1}{dz} = R_C S_2, \quad (68)$$

$$\frac{dS_2}{dz} = -R_C S_1 + R_L S_3, \quad (69)$$

$$\frac{dS_3}{dz} = -R_L S_2. \quad (70)$$

Derivando la ecuación (69) tenemos que

$$\frac{d^2 S_2}{dz^2} = -R_C \frac{dS_1}{dz} + R_L \frac{dS_3}{dz} = -S_2 [(R_C)^2 + (R_L)^2]. \quad (71)$$

De la ecuación (71) definimos

$$R_E = \sqrt{(R_C)^2 + (R_L)^2}. \quad (72)$$

La solución de la ecuación diferencial mostrada en la ecuación (71) es de la forma

$$S_2 = C_1 \operatorname{sen}(R_E z) + C_2 \operatorname{cos}(R_E z) , \quad (73)$$

aplicando el resultado de la ecuación (71) en la ecuación (68) tenemos que

$$S_1 = \frac{R_C}{R_E} [-C_1 \operatorname{cos}(R_E z) + C_2 \operatorname{sen}(R_E z)] + C_3 , \quad (74)$$

y de la misma manera, de la ecuación (70) tenemos que

$$S_3 = \frac{R_L}{R_E} [C_1 \operatorname{cos}(R_E z) - C_2 \operatorname{sen}(R_E z)] + C_4 . \quad (75)$$

Si el vector de Stokes del haz incidente para $z = 0$ es $S_i^T = (S_{i0} , S_{i1} , S_{i2} , S_{i3})$, entonces de las ecuaciones (73 a 75) tenemos las siguientes condiciones de frontera

$$S_{i1} = -\left(\frac{R_C}{R_E}\right) C_1 + C_3 , \quad (76)$$

$$S_{i2} = C_2 , \quad (77)$$

$$S_{i3} = \left(\frac{R_L}{R_E}\right) C_1 + C_4 . \quad (78)$$

Partiendo de la ecuación (69) tenemos que

$$-R_C C_3 + R_L C_4 = 0 . \quad (79)$$

Resolviendo el sistema de cuatro ecuaciones simultáneas (76 a 79) obtenemos el valor para cada una de las cuatro constantes desconocidas (C_1, C_2, C_3, C_4), las cuales están dadas por

$$C_1 = \frac{(R_L S_{i3} - R_C S_{i1})}{R_L^2 + R_C^2} = \frac{R_E (R_L S_{i3} - R_C S_{i1})}{R_E^2} = \frac{(R_L S_{i3} - R_C S_{i1})}{R_E} , \quad (80)$$

$$C_2 = S_{i2} , \quad (81)$$

$$C_3 = -\frac{-R_L^2 S_{i1} - R_L R_C S_{i3}}{R_L^2 + R_C^2} = \frac{R_L (R_L S_{i1} + R_C S_{i3})}{R_E^2} , \quad (82)$$

$$C_4 = \frac{(R_L R_C S_{i1} + R_C^2 S_{i3})}{R_L^2 + R_C^2} = \frac{R_C (R_L S_{i1} + R_C S_{i3})}{R_E^2} . \quad (83)$$

Sustituyendo el valor de las constantes mostradas en las ecuaciones (80 a 83) en las ecuaciones (73 a 75) obtenemos como resultado el valor para cada una de las componentes del vector de Stokes $S_F = (S_0 , S_1 , S_2 , S_3)$, que están dados por

$$S_0 = 1 , \quad (84)$$

$$S_1 = \left[1 - 2 \left(\frac{R_C}{R_E}\right)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{R_E}{2} z\right) \right] S_{i1} + \frac{R_C}{R_E} \operatorname{sen}(R_E z) S_{i2} + \frac{2 R_C R_L}{R_E^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{R_E}{2} z\right) S_{i3} , \quad (85)$$

$$S_2 = -\frac{R_C}{R_E} \text{sen}(R_E z) S_{i1} + \cos(R_E z) S_{i2} + \frac{R_L}{R_E} \text{sen}(R_E z) S_{i3} \quad , \quad (86)$$

$$S_3 = \frac{2 R_C R_L}{R_E^2} \text{sen}^2\left(\frac{R_E}{2} z\right) S_{i1} - \frac{R_L}{R_E} \text{sen}(R_E z) S_{i2} + \left[1 - 2 \left(\frac{R_L}{R_E}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{R_E}{2} z\right)\right] S_{i3} \quad . \quad (87)$$

Podemos expresar estas ecuaciones en forma matricial de la siguiente manera,

$$S_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2 \left(\frac{R_C}{R_E}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{R_E}{2} z\right) & \frac{R_C}{R_E} \text{sen}(R_E z) & \frac{2 R_C R_L}{R_E^2} \text{sen}^2\left(\frac{R_E}{2} z\right) \\ 0 & -\frac{R_C}{R_E} \text{sen}(R_E z) & \cos(R_E z) & \frac{R_L}{R_E} \text{sen}(R_E z) S_{i3} \\ 0 & \frac{2 R_C R_L}{R_E^2} \text{sen}^2\left(\frac{R_E}{2} z\right) & -\frac{R_L}{R_E} \text{sen}(R_E z) & 1 - 2 \left(\frac{R_L}{R_E}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{R_E}{2} z\right) \end{bmatrix} S_i \quad , \quad (88)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2 \left(\frac{\delta_C}{\delta_E}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) & \left(\frac{\delta_C}{\delta_E}\right) \text{sen}(\delta_E) & 2 \frac{(\delta_L \delta_C)}{\delta_E^2} \text{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \\ 0 & -\left(\frac{\delta_C}{\delta_E}\right) \text{sen}(\delta_E) & \cos(\delta_E) & \frac{\delta_L}{\delta_E} \text{sen}(\delta_E) \\ 0 & 2 \frac{(\delta_L \delta_C)}{\delta_E^2} \text{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) & -\frac{\delta_L}{\delta_E} \text{sen}(\delta_E) & 1 - 2 \left(\frac{\delta_L}{\delta_E}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \end{bmatrix} \cdot S_i \quad , \quad (89)$$

y utilizando las ecuaciones (34) y (35) del capítulo 2.2 obtenemos

$$S_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2 \text{sen}^2(2\mu) \text{sen}^2(\delta_E/2) & \text{sen}(\delta_E) \text{sen}(2\mu) & \text{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \text{sen}(4\mu) \\ 0 & -\text{sen}(\delta_E) \text{sen}(2\mu) & \cos(\delta_E) & \text{sen}(\delta_E) \cos(2\mu) \\ 0 & \text{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \text{sen}(4\mu) & -\text{sen}(\delta_E) \cos(2\mu) & 1 - 2 \cos^2(2\mu) \text{sen}^2(\delta_E/2) \end{bmatrix} S_i \\ = [M_F] S_i \quad . \quad (90)$$

S_F nos dice cual es el vector de Stokes de salida debido al efecto fotoelástico en una fibra, como se muestra en la Figura 29. Sin embargo, tal como se ilustra en la Figura 30 el sistema coordenado (X_F, Y_F) está rotado un ángulo θ_τ debido a la torsión (D. Tentori *et al*, 2009) por lo que podemos escribir

$$S_{out} = M_C(\theta_\tau) S_F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta_\tau) & \sin(2\theta_\tau) & 0 \\ 0 & -\sin(2\theta_\tau) & \cos(2\theta_\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S_F, \quad (91)$$

$$S_{out} = M_C(\theta_\tau) [M_F] S_i. \quad (92)$$

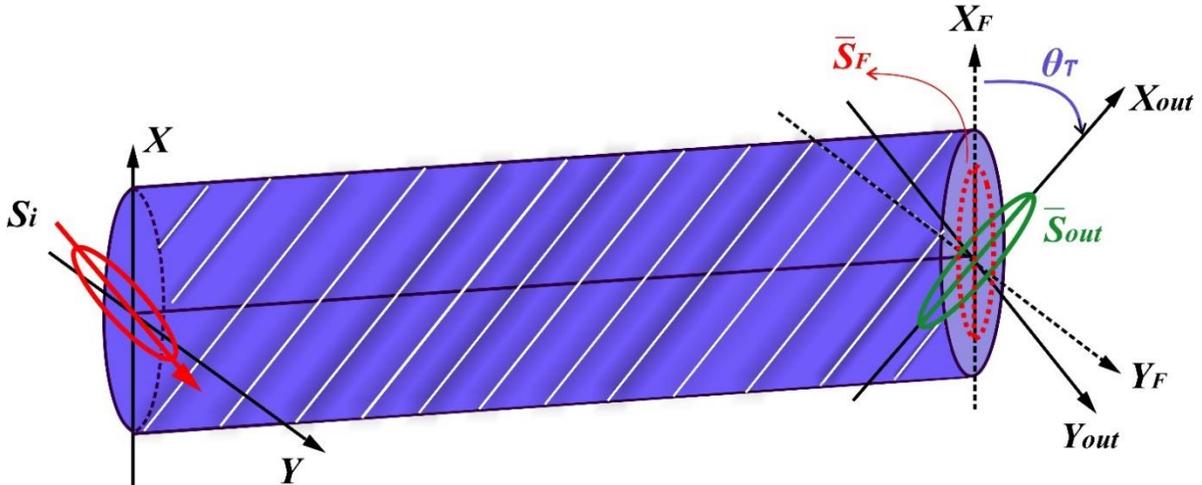


Figura 30. Fibra torcida un ángulo θ_τ .

3.3.2 Descripción del modelo matemático

3.3.2.1 Fase topológica

En 1984 M. V. Berry (M.V. Berry 1984) estableció que un sistema cuántico cuyos parámetros son alterados cíclicamente no regresa a su estado original sino que adquiere, en adición a la usual fase dinámica, una fase adicional llamada fase geométrica o topológica. Esta fase topológica fue medida en experimentos de física de partículas y posteriormente en experimentos con haces de luz. Por razones históricas o por la forma de calcular esta fase recibe diferentes nombres: fase de Pancharatnam, fase de Courtail, etc., pero todas pertenecen al concepto general de la fase de Berry. Cuando a un retardador óptico se le aplica una torsión mecánica, sus ejes principales rotan lo que ocasiona que se presente una fase topológica de Pancharatnam. Se sabe que la fase topológica ζ introduce una rotación en el sistema de coordenadas (rotación alrededor del eje S_3 en la esfera de Poincaré), por lo que está dada por una matriz de rotación $R(\zeta)$. Se han reportado ecuaciones que describen la fase topológica en algunos sistemas ópticos, pero no existe en la actualidad un modelo matemático que describa la fase topológica ζ en medios birrefringentes torcidos, como lo es una fibra óptica torcida. Es importante notar que la fase topológica es un fenómeno geométrico y no depende de las propiedades del material como lo es $n(\lambda)$, por lo tanto es acromática. El giro en el sistema de coordenadas debe incluirse entonces en la matriz de rotación M_C de la ecuación (93)

$$S_{out} = [M_C (\theta_\tau + \zeta)] [M_F] S_i , \quad (93)$$

$$S_{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2(\theta_\tau + \zeta) & \text{sen } 2(\theta_\tau + \zeta) & 0 \\ 0 & -\text{sen } 2(\theta_\tau + \zeta) & \cos 2(\theta_\tau + \zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} S_F . \quad (94)$$

3.3.2.2 Efecto fotoelástico

De la teoría electromagnética se sabe que la densidad de energía eléctrica \mathbb{U}_E en un medio está dada por,

$$\mathbb{U}_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} . \quad (95)$$

Para un medio con birrefringencia lineal podemos escribir su ecuación constitutiva (ecuación 40) en forma tensorial como $D_i = \epsilon_{ij} E_j$. Sustituyendo esta relación en la ecuación (95) y considerando que estamos trabajando en el sistema de coordenadas principales ($i = j$) se obtiene

$$\mathbb{U}_E = \frac{1}{2} E_i \epsilon_{ij} E_j = \frac{1}{2} (\epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{D_x^2}{\epsilon_x} + \frac{D_y^2}{\epsilon_y} + \frac{D_z^2}{\epsilon_z} \right) . \quad (96)$$

Podemos parametrizar esta última ecuación utilizando la relación de Maxwell y haciendo la sustitución $D/2\mathbb{U}_E \rightarrow \mathbf{r}_p$, donde $\mathbf{r}_p = (x, y, z)$ es un vector de posición,

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = \eta_{ij} x_i x_j = 1 , \quad (97)$$

donde se ha utilizado al tensor de permeabilidad eléctrica $\eta_{ij} = [\epsilon_{ij}]^{-1}$. En general, el tensor dieléctrico es hermítico $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$ y para un medio sin absorción las componentes de ϵ_{ij} son reales y se tiene un tensor simétrico $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Debido a que la ecuación (96) representa a la energía en un medio la cual no puede ser negativa, se puede demostrar que la ecuación (97) es una forma cuadrática positiva definida, esto es, gráficamente representa a un elipsoide conocido como elipsoide de índices. Considerando a un medio que posee birrefringencia natural caracterizada por el tensor η_{ij}^o donde el superíndice "o" significa que son los valores iniciales o naturales del medio. Suponemos que el medio es ahora perturbado por un estado de esfuerzos caracterizado por el tensor σ_{kl} , entonces el elipsoide de índices cambiará de forma y sus nuevos coeficientes serán η_{ij} , esto es,

$$\eta_{ij} x_i x_j = \eta_{ij}^o x_i x_j + \Delta \eta_{ij} x_i x_j = 1 , \quad (98)$$

$$\eta_{ij} = \eta_{ij}^o + \Delta \eta_{ij} . \quad (99)$$

El modelo fenomenológico de F. Pockels establece que los cambios $\Delta\eta_{ij} = \Delta\left(\frac{1}{n_{ij}^2}\right)$ en los valores del índice de refracción son proporcionales al tensor de esfuerzos aplicado σ_{kl} (efecto fotoelástico). En términos matemáticos esto se escribe como (A. Kumar, 2011)

$$\Delta\eta_{ij} = q_{ijkl}\sigma_{kl} = \eta_{ij} - \eta_{ij}^0, \quad (100)$$

donde η_{ij}^0 son los coeficientes de este tensor antes de aplicar el esfuerzo, q_{ijkl} es el tensor piezo-óptico y los subíndices i, j, k, l corren de 1 a 3 ($1,2,3 = x, y, z$). Debido a las propiedades de simetría del medio, normalmente se utiliza la siguiente contracción de índices (notación de Voigt) para reducir el orden de un tensor (Yariv, A. and Yeh, P., 1984): $11 = 1, 22 = 2, 33 = 3, 23 = 32 = 4, 13 = 31 = 5, 12 = 21 = 6$. El tensor q_{ijkl} de cuarto orden se puede reducir a uno de segundo orden y la ecuación (100) se puede escribir utilizando la notación de Voigt como

$$\Delta\eta_m = q_{ij}\sigma_m, \quad (101)$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ y $m = 1, 2, \dots, 6$ dado que $\sigma_{kl} = \sigma_{kl}$; el tensor de esfuerzos con sus nueve componentes se ilustra en la Figura 31. Sustituyendo el tensor q_{ijkl} para un medio con simetría cubica o isotrópica (vidrio) y la ecuación (101) en la ecuación (99) se obtiene,

$$\eta_m = \eta_{ij} = \begin{bmatrix} n_{xx}^{-2} \\ n_{yy}^{-2} \\ n_{zz}^{-2} \\ n_{yz}^{-2} \\ n_{xz}^{-2} \\ n_{xy}^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & q_{11} & q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ q_{12} & q_{12} & q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} + \frac{1}{n_0^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

$$q_{44} = (q_{11} - q_{12})/2. \quad (103)$$

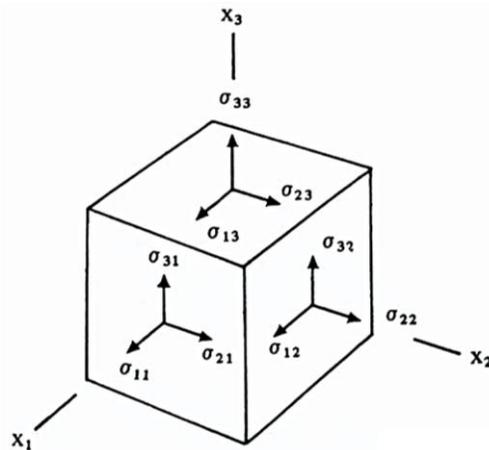


Figura 31. Tensor de esfuerzos σ_{kl} .

Para una barra o fibra óptica con una sección transversal (x, y) circular tenemos que (S. Timoshenko, 1951).

$$\sigma_{1,2,3,6} = 0 , \quad (104)$$

$$\sigma_4 = \sigma_{xy} = G \theta_\tau x , \quad (105)$$

$$\sigma_5 = \sigma_{xz} = -G \theta_\tau y , \quad (106)$$

donde G es el módulo de rigidez. Entonces de la ecuación (102) tenemos que $\Delta\eta_m = 0$ excepto para $m = 4, 5$,

$$\eta_4 = q_{44} G \theta_\tau x + \frac{1}{n_0^2} = \frac{1}{n_4^2} = \frac{1}{\epsilon_4} \quad (107)$$

$$\eta_5 = -q_{44} G \theta_\tau y + \frac{1}{n_0^2} = \frac{1}{n_5^2} = \frac{1}{\epsilon_5} \quad (108)$$

Debido a que la birrefringencia inducida es del orden de $\Delta n \approx 10^{-4}$ y $n \approx 1.5$ se cumple con $\Delta n \ll n$ y normalmente estas expresiones se simplifican utilizando la siguiente serie de Taylor (H. Tai, 2002)

$$(1 + \zeta)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{\zeta}{2} + \frac{3\zeta^2}{8} - \frac{15\zeta^3}{48} + \dots \approx 1 - \frac{\zeta}{2} , \quad (109)$$

con lo cual podemos reescribir la ecuación (107) como sigue,

$$\begin{aligned} n_4 &= \left(\frac{1}{n_0^2} + q_{44} G \theta_\tau x \right)^{-\frac{1}{2}} = n_0 [1 + n_0^2 q_{44} G \theta_\tau x]^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx n_0 \left[1 - \frac{n_0^2}{2} q_{44} G \theta_\tau x \right] = n_0 - \frac{n_0^3}{2} q_{44} G \theta_\tau x , \end{aligned} \quad (110)$$

$$\Delta n_4 = \frac{1}{\Delta \epsilon_4} = - \frac{n_0^3}{4} (q_{11} - q_{12}) G \theta_\tau x , \quad (111)$$

y en forma similar se obtiene para la ecuación (108)

$$n_5 = n_0 + \frac{n_0^3}{4} (q_{11} - q_{12}) G \theta_\tau y , \quad (112)$$

$$\Delta n_5 = \frac{1}{\Delta \epsilon_5} = - \frac{n_0^3}{4} (q_{11} - q_{12}) G \theta_\tau y . \quad (113)$$

Por otra parte, de la teoría de modos acoplados se tiene que la propagación óptica en un medio con birrefringencia se puede representar por

$$\frac{d}{dz} \vec{E} = -i \mathbf{M}_\kappa \vec{E} = -i \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} \end{bmatrix} \vec{E} , \quad (114)$$

donde κ_{mn} son los coeficientes de acoplamiento dados por

$$\kappa_{mn} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{k_1 \iint \mathbf{E}_m^* \cdot ([\Delta \epsilon] \mathbf{E}_n) dx dy - i \iint E_m^* \nabla \cdot ([\Delta \epsilon] \mathbf{E}_n) dx dy}{4\pi n_0 k_1 \int J^2 r dr} , \quad (115)$$

donde $E_{1,2}$ son los dos campos transversales que existen en una fibra monomodal, y $J(r)$ es una función de Bessel que representa la distribución del campo radial dentro de la fibra (R.Ulrich *et al*,1979). El numerador en la ecuación (115) representa la suma del efecto fotoelástico en toda la sección transversal (x, y) de la fibra y el denominador es una normalización. Ulrich (1979) sustituyó los valores de las ecuaciones (111) y (113) junto con $\Delta\epsilon_{1,2,3,6} = 0$ en la ecuación (115) y obtuvo los valores

$$\kappa_{11} = \kappa_{22} = 0 \quad (116)$$

$$\kappa_{12} = -\kappa_{21} = -i(q_{11} - q_{12}) \frac{\mathbb{E} n_0^2}{2(1+\nu)} \theta_\tau \quad (117)$$

donde \mathbb{E} es el módulo de Young y ν es el coeficiente de Poisson. Sustituyendo (116) y (117) en la ecuación (115) se encuentra la matriz diferencial \mathbf{M}_κ y posteriormente integrando para resolver la ecuación diferencial, encontró la matriz \mathbf{M}_U de Jones expresada de la siguiente manera

$$\vec{\mathbf{E}}(z) = \mathbf{M}_U \vec{\mathbf{E}}(0) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta_U}{2}\right) & \text{sen}\left(\frac{\delta_U}{2}\right) \\ -\text{sen}\left(\frac{\delta_U}{2}\right) & \cos\left(\frac{\delta_U}{2}\right) \end{bmatrix} \vec{\mathbf{E}}(0), \quad (118)$$

$$\delta_U = (q_{11} - q_{12}) \frac{\mathbb{E} n_0^2}{(1+\nu)} \theta_\tau \approx 0.16 \theta_\tau. \quad (119)$$

Este resultado es el único estudio formal (fuera de las investigaciones hechas en CICESE) sobre una fibra monomodal torcida reportada en la literatura y nos dice que al torcer una fibra, esta se comporta como un retardador circular. Aunque es un resultado ampliamente utilizado en la literatura, nuestros experimentos muestran que la ecuación (119) solo proporciona una vaga descripción del fenómeno. Esto se debe a que en los cálculos no se consideraron dos aspectos: 1) el perfil transversal de la fibra no es un círculo perfecto a lo largo de z , 2) en realidad se tienen dos cilindros concéntricos (núcleo y revestimiento) con diferentes módulos de rigidez.

Para el caso de una sección transversal circular, podemos definir $\sigma_t^2 = \sigma_4^2 + \sigma_5^2$ y utilizando las ecuaciones (105) y (106) podemos escribir

$$\sigma_t = G \theta_\tau \sqrt{x^2 + y^2} = G \theta_\tau r_t, \quad (120)$$

por lo que la distribución de esfuerzos en este caso es muy sencilla ya que posee una simetría radial como se muestra en la Figura 32. Sin embargo para cualquier otro perfil transversal las ecuaciones (105) y (106) son más complicadas.

Con el fin de realizar una comparación a manera de ilustración en la Figura 33 se muestran las distribuciones de esfuerzos, pero ahora para una fibra con sección transversal elíptica. Como se puede

apreciar, la distribución de esfuerzos σ ya no está dada por una relación lineal como la ecuación (120). Por otra parte, si se considera a la fibra como dos cilindros concéntricos (núcleo y revestimiento) con diferentes módulos de rigidez G_1 y G_2 la distribución de esfuerzos no es continua, como se muestra en la Figura 34.

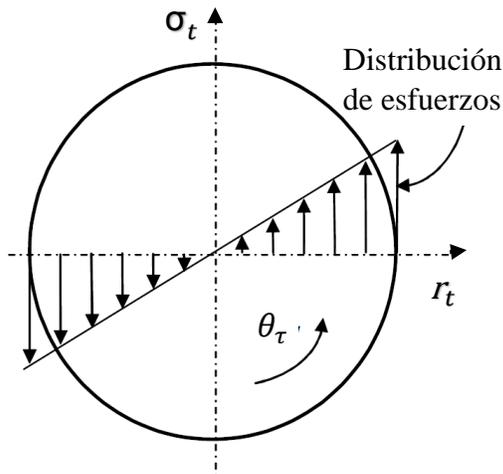


Figura 32. Distribución de esfuerzos en el núcleo de la fibra.

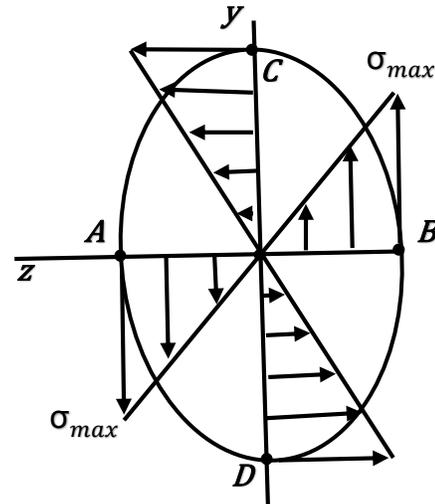


Figura 33. Distribución de esfuerzos para una sección elíptica.

Nuestra hipótesis es que el perfil transversal de la fibra (el núcleo) es de tipo "ovalado", los cuales incluyen una forma cuasi circular y cuasi elíptica. Existen una infinidad de óvalos, cuyas ecuaciones no solo son no lineales sino que involucran funciones trigonométricas. Difícilmente se pueden encontrar en la literatura las ecuaciones para σ (ecuaciones 104, 105, 106) y es muy complicado calcularlas.

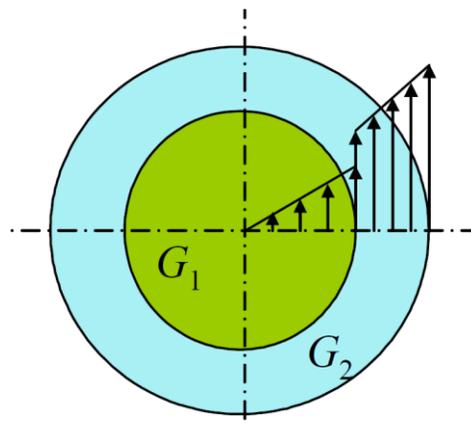


Figura 34. Distribución de esfuerzos para dos cilindros concéntricos.

Afortunadamente de la teoría de fotoelasticidad integrada (H. Aben, 1979) se sabe que los índices de refracción inducidos (como las ecuaciones 110 y 112) son funciones de los coeficientes q_{ij} , $n_{ij} =$

$n_{ij}(q_{ij})$; lo mismo ocurre para la birrefringencia inducida $\Delta n_{ij} = \Delta n_{ij}(q_{ij})$ y el retardamiento inducido $\delta = \delta(q_{ij})$ como se observa en la ecuación (119). Por lo tanto podemos decir que la birrefringencia inducida δ_E en la ecuación (90) está dada por

$$\delta_E = \delta_0 + c_\tau \theta_\tau , \quad (121)$$

donde c_τ es una constante que caracteriza al efecto fotoelástico y δ_0 es el valor de la birrefringencia elíptica residual de la fibra generada durante el proceso de fabricación.

Otro aspecto no considerado en el modelo de Ulrich se describe a continuación: de acuerdo a la teoría de elasticidad cuando una barra es sometida a un esfuerzo mecánico se induce un sistema de coordenadas principales paralelo a las direcciones de los esfuerzos principales; y de acuerdo a la teoría de fotoelasticidad integrada (fotoelasticidad tridimensional) el esfuerzo mecánico induce una birrefringencia cuyos ejes principales son paralelos a los ejes principales de esfuerzos. La importancia de este hecho radica en que del principio de Saint-Venant (A. E. H. Love, 2011) se deduce que para una barra torcida, los ejes principales de esfuerzos no rotan exactamente el mismo ángulo que la torsión θ_τ aplicada. Esto se ilustra esquemáticamente en la Figura 35, donde para mayor claridad se ha exagerado la distorsión de la línea recta. Tomando en cuenta que cuando la sección transversal es aproximadamente circular, la línea que define al ángulo θ_τ pasa por el origen y podemos escribir

$$\theta_\tau = b\tau + b_2 \tau^2 + b_3 \tau^3 + \dots \approx b\tau . \quad (122)$$

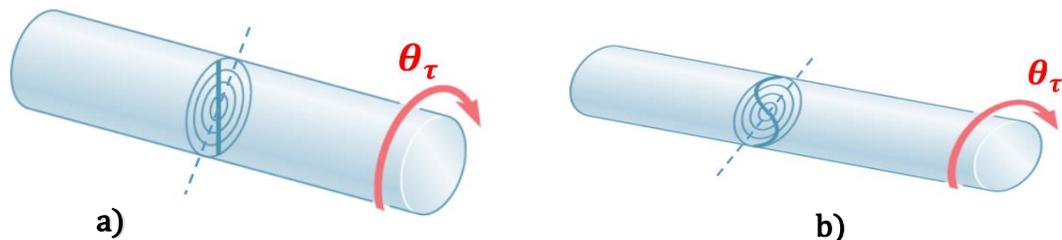


Figura 35. Ángulo θ_τ para una barra a) con perfil circular b) con perfil no-circular.

La única excepción es para cuando se tiene una barra con una sección transversal circular, en cuyo caso $b = 1$ y $\theta_\tau = \tau$.

3.3.2.3 Ecuaciones completas

En nuestros experimentos, un haz luminoso polarizado caracterizado por su vector de Stokes S_i es introducido a una fibra óptica bajo torsión. La luz polarizada de salida (caracterizada por el vector de Stokes S_{out}) es capturada por un fotodetector y canalizada a un analizador de polarización del cual se

obtienen los valores de los parámetros de Stokes $\mathbf{S}_{out_e} = (S_{0_e}, S_{1_e}, S_{2_e}, S_{3_e})^T$, donde se utilizó el subíndice “e” para indicar que son valores experimentales.

El vector de Stokes de entrada corresponde al de un haz linealmente polarizado con una inclinación de ϕ .

$$\mathbf{S}_i(\phi) = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\phi) \\ \sen(2\phi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (123)$$

entonces utilizando las ecuaciones (92) y (122) el vector de Stokes de salida es

$$\mathbf{S}_{out} = [\mathbf{M}_C(b\tau + \zeta)] [M_F(\delta_\tau)] \mathbf{S}_i, \quad (124)$$

donde $[M_F(\delta_\tau)]$ es la matriz elíptica que caracteriza a la fibra cuando su eje rápido tiene una inclinación de $\Psi_{fib} = 0^\circ$. Utilizando las ecuaciones (121) y (122) el retardamiento elíptico δ_τ es

$$\delta_\tau = \delta_E = \delta_0 + (c_\tau b) \tau = \delta_0 + c \tau. \quad (125)$$

Debido a que el eje rápido de la fibra está inclinado a un ángulo $\Psi_{fib} = \theta$ que es desconocido en el montaje experimental, utilizando la ecuación (43) podemos escribir

$$\mathbf{M}_\tau(\theta) = \mathbf{R}(-\theta) [\mathbf{M}_C(b\tau + \zeta)] [M_F(\delta_\tau)] \mathbf{R}(\theta), \quad (126)$$

y los valores de los parámetros $b, \zeta, \theta, \delta_0, c$ y μ deberán determinarse experimentalmente. Siendo μ la elipticidad del eigenmodo principal del retardador elíptico, entonces tenemos que los parámetros de Stokes a la salida de la fibra son

$$\begin{bmatrix} S_{0_{out}} \\ S_{1_{out}} \\ S_{2_{out}} \\ S_{3_{out}} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_\tau(\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\phi) \\ \sen(2\phi) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}(-\theta) [\mathbf{M}_C(b\tau + \zeta)] [M_F(\delta_\tau)] \mathbf{R}(\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\phi) \\ \sen(2\phi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (127)$$

y después de realizar las multiplicaciones encontramos,

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{1_{out}} = & -\sen[2(b\tau + \zeta - \theta)] \{ \cos[2(\theta - \phi)] \sen[\delta_0 + c\tau] \sen[2\mu] \\ & + \cos[\delta_0 + c\tau] \sen[2(\theta - \phi)] \} + \cos[2(b\tau + \zeta - \theta)] \\ & \{ \cos[2(\theta - \phi)] \left(\cos \left[\frac{\delta_0 + c\tau}{2} \right]^2 + \cos[4\mu] \sen \left[\frac{\delta_0 + c\tau}{2} \right]^2 \right) \\ & - \sen[\delta_0 + c\tau] \sen[2\mu] \sen[2(\theta - \phi)] \}, \end{aligned} \quad (128)$$

$$\begin{aligned}
S_{2_{out}} = & -\cos[2(b\tau + \zeta - \theta)]\{\cos[2(\theta - \phi)]\text{sen}[\delta o + c\tau]\text{sen}[2\mu] \\
& + \cos[\delta o + c\tau]\text{sen}[2(\theta - \phi)]\} + \text{sen}[2(b\tau + \zeta \\
& - \theta)](-\cos[2(\theta - \phi)]\left(\cos\left[\frac{\delta o + c\tau}{2}\right]^2 + \cos[4\mu]\text{sen}\left[\frac{\delta o + c\tau}{2}\right]^2\right) \\
& + \text{sen}[\delta o + c\tau]\text{sen}[2\mu]\text{sen}[2(\theta - \phi)]), \quad (129)
\end{aligned}$$

$$S_{3_{out}} = \cos[2(\theta - \phi)]\text{sen}\left[\frac{\delta o + c\tau}{2}\right]^2 \text{sen}[4\mu] + \cos[2\mu]\text{sen}[\delta o + c\tau]\text{sen}[2(\theta - \phi)]. \quad (130)$$

3.3.3 Interpretación geométrica

Nuestro modelo matemático está dado (ecuaciones 92, 93, 124) por el producto de dos matrices

$$M_T = [M_C (b\tau + \zeta)] [M_F (\delta_\tau)], \quad (131)$$

y a continuación daremos una interpretación geométrica de este producto matricial.

Empezamos con la matriz $[M_F (\delta_\tau)]$. De las ecuaciones de la dinámica de un cuerpo rígido se tiene que para un vector de velocidad angular $\bar{w}_a = (w_{ax}, w_{ay}, w_{az})$ y cualquier vector $\bar{r} = (x, y, z)$ se cumple la siguiente identidad vectorial

$$\bar{w}_a \times \bar{r} = \begin{bmatrix} 0 & -w_{az} & w_{ay} \\ w_{az} & 0 & -w_{ax} \\ -w_{ay} & w_{ax} & 0 \end{bmatrix} \bar{r} = [w_a] \bar{r}, \quad (132)$$

la cual se puede comprobar fácilmente. El tensor $[w_a]$ es conocido como tensor de velocidad angular. Gráficamente \bar{w}_a es asociado a un vector que posee un sentido de giro (similar a un rotor o a un espinor) y se le denomina pseudovector. Básicamente un pseudovector es un objeto (vector) aquiral, que por definición cambia de signo bajo la operación de reflexión; así una rueda que gira frente a un espejo tiene la misma velocidad angular (incluyendo el sentido de giro) que su imagen dentro del espejo. Dicho de una manera informal, un espacio vectorial está formado por un conjunto de elementos que cumplen con ocho axiomas sobre las operaciones de suma y multiplicación (asociativo, conmutativo, distributivo, etc), pero las operaciones de rotación no son conmutativas excepto en el caso degenerado en que ambos ejes de rotación sean paralelos. Sin embargo se considera que las rotaciones diferenciales alrededor de un eje instantáneo si son conmutativas por lo que $d\bar{w}_a$ si es considerado un vector.

Utilizando las ecuaciones (131) y (37), el conjunto de ecuaciones (68 a 70) las podemos escribir de la siguiente forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \frac{dS_1}{dz} \\ \frac{dS_2}{dz} \\ \frac{dS_3}{dz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_C & 0 \\ -\delta_C & 0 & \delta_L \\ 0 & -\delta_L & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} = -\delta_E \hat{\mathbb{F}}_{E0} \times \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}, \quad (133)$$

$$\frac{d\vec{S}}{dz} = -\delta_E \hat{\mathbb{F}}_{E0} \times \vec{S}, \quad (134)$$

donde a la matriz de (3x3) se le denomina matriz de Mueller reducida. El vector $\hat{\mathbb{F}}_{E0}$ nos indica la elipticidad del eje rápido de un retardador elíptico en la esfera de Poincaré cuando tiene una inclinación azimutal de cero grados en el espacio. Utilizando las ecuaciones que describen a los parámetros de Stokes (Tabla 1) tenemos que para una inclinación Ψ_F del eje rápido

$$\bar{\mathbb{F}} = -\bar{\mathbb{S}} = \delta_E [\cos(2\mu) \cos(2\Psi_F), \cos(2\mu) \sin(2\Psi_F), \sin(2\mu)] = \delta_E \hat{\mathbb{F}}, \quad (135)$$

por lo que sin perder generalidad, podemos reescribir la ecuación (132) de la siguiente manera

$$\frac{d\vec{S}}{dz} = \bar{\mathbb{S}} \times \vec{S}, \quad (136)$$

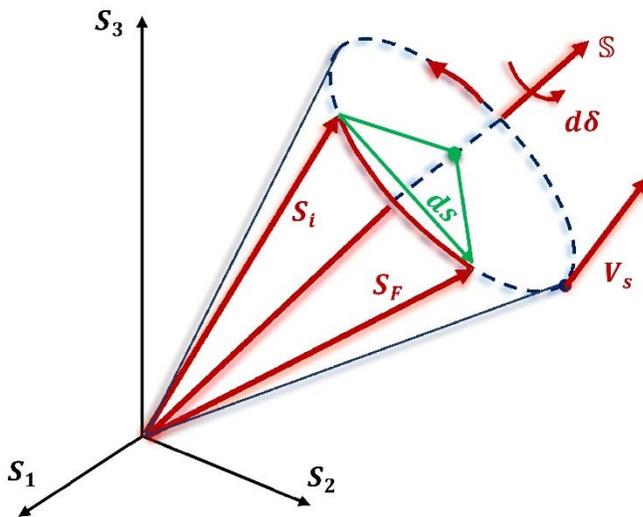


Figura 36. Precesión de \vec{S} alrededor de $\bar{\mathbb{S}}$.

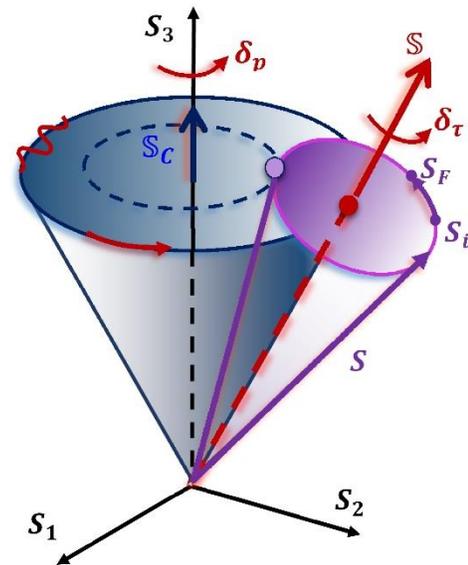


Figura 37. Conos de precesión para $\bar{\mathbb{S}}_c$ y $\bar{\mathbb{S}}$.

la cual es la conocida ecuación de precesión que se estudia en dinámica. En la Figura 36 se ilustra este movimiento de precesión para un giro diferencial $d\delta$. Un estado de polarización incidente \vec{S}_i es girado alrededor del vector $\bar{\mathbb{S}}$ sobre el círculo de precesión (círculo punteado perpendicular a $\bar{\mathbb{S}}$) hasta alcanzar el estado de polarización final \vec{S}_F debido al efecto fotoelástico. Los estados de polarización \vec{S} se mueven con una velocidad instantánea \vec{v}_s siempre perpendicular a \vec{S} .

Por otra parte la matriz M_C de la ecuación (131) corresponde a un retardador circular. Su interpretación geométrica es similar a la de un retardador elíptico (Figura 36), pero en este caso el eje de precesión es \bar{S}_C el cual es paralelo al eje \bar{S}_3 de la esfera de Poincaré y el círculo de precesión es paralelo al ecuador. Su respectiva ecuación de precesión es

$$\frac{d\vec{S}}{dz} = \bar{S}_C \times \vec{S} \quad , \quad (137)$$

y los valores de \vec{S} que satisfacen a las ecuaciones simultaneas (136) y (137) describen la trayectoria de los estados de polarización. En la Figura 37 se ilustra el movimiento combinado debido a $[M_C (b\tau + \zeta)]$ y $[M_F (\delta_\tau)]$. Tenemos que el vector \bar{S} gira sobre el círculo de precesión (círculo azul continuo) a una velocidad angular $w_p = \delta_p = 2 (b\tau + \zeta)$. Simultáneamente los estados de polarización \vec{S} giran alrededor de \bar{S} a una velocidad angular $w_\tau = \delta_\tau = \delta_0 + c \tau$; esto es, un estado de polarización incidente \vec{S}_i que es girado un ángulo δ_τ (pequeño o diferencial) alrededor de \bar{S} produce un estado de polarización final \vec{S}_F el cual es girado alrededor del eje \bar{S}_C para producir el estado de polarización de salida \vec{S}_{out} y un nuevo eje de giro \bar{S}' . El estado \vec{S}_{out} se convierte en el nuevo estado de polarización de entrada \vec{S}'_i .

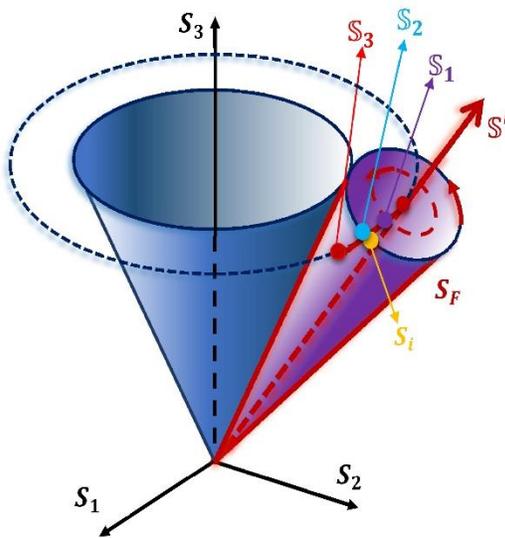


Figura 38. Conos para ilustrar la nutación de \vec{S} .

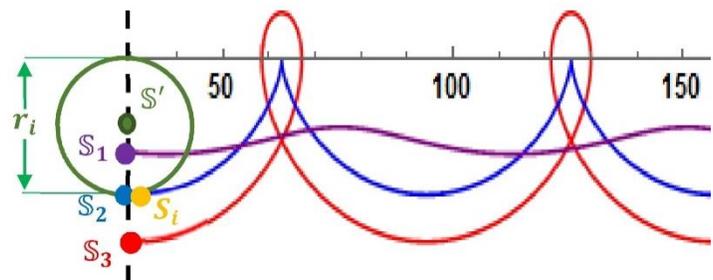


Figura 39. Tres tipos de cicloides que describen a \vec{S} .

En base a esto podemos construir un diagrama con otros dos conos que se tocan tangencialmente como se muestra en la Figura 38. El cono central (generado alrededor de \bar{S}_3) es un cono fijo y el cono exterior (cono de birrefringencia) rueda alrededor del primero, lo cual ocasiona un movimiento de nutación sobre los estados de polarización. Para ilustrarlo dibujamos al círculo (base del cono de birrefringencia) deslizándose en una línea recta lo cual nos genera una cicloide como se ilustra en la

Figura 39. Existen tres posibilidades dependiendo del valor de la distancia angular (arco sobre la esfera) $r_S = r_F - r_i$, donde $r_F = \overline{S' S}$, $r_i = \overline{S' S_i}$: a) si $r_S > 0$ tenemos una cicloide alargada, b) si $r_S = 0$ tenemos una cicloide (simple) o de cúspides, c) si $r_S < 0$ tenemos una cicloide acortada. Si el círculo lo rodamos sobre otro círculo (por ejemplo un paralelo en la esfera de Poincaré) obtenemos su curva equivalente en 3D denominada trocoide. Si rueda por dentro se llama hipotrocoide y si rueda por fuera como en nuestra caso (Figura 38) tenemos los tres tipos de epitrocoides que se muestran en la Figura 40; estos epitrocoides están contenidos entre dos paralelos que pasan por $2\epsilon_{min}$ y $2\epsilon_{max}$ los cuales son conocidos como límites de libramiento y quedan determinados por la distancia $\overline{S' S}$. Para que el trocoide forme una curva cerrada (periódica) es necesario que $\frac{w_P}{w_T} = \frac{\delta_P}{\delta_T}$ sea un número racional. Es interesante notar que las formas de estos trocoides pueden parecer muy complejas sobre la esfera de Poincaré, pero si realizamos una proyección mapamundi (2D) obtenemos alguna de las curvas simples de la Figura 39; esto se ilustra en las Figuras 41 y 42 para dos epitrocoides.

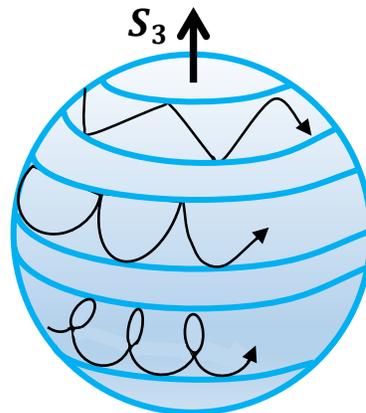


Figura 40. Epitrocoides en la esfera de Poincaré.

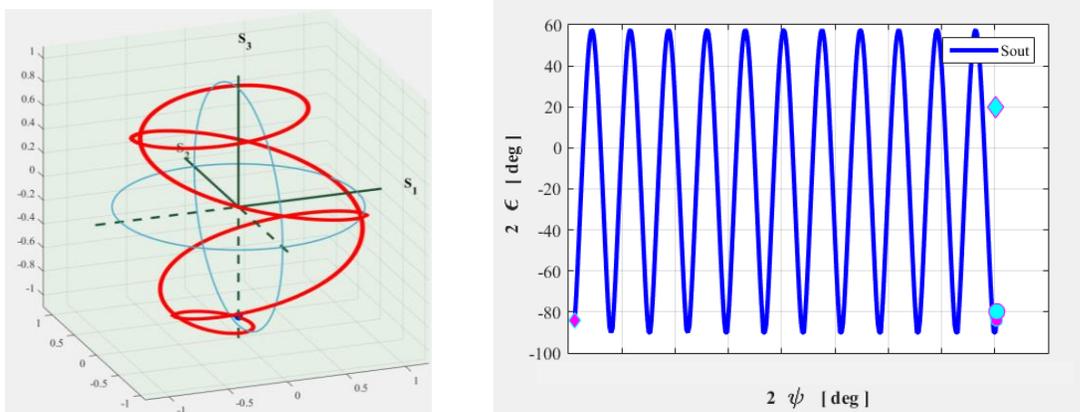


Figura 41. Epitrocoide en la esfera de Poincaré y su correspondiente epicicloide.

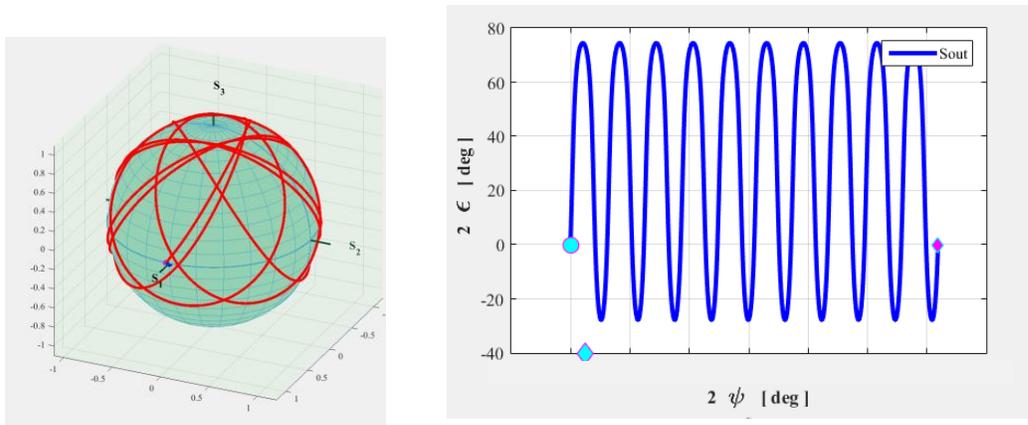


Figura 42. Segundo epitrocoide y su proyección mapamundi.

3.4 Comprobación del modelo matemático

Partiendo del modelo matemático obtenido fenomenológicamente (Tentori, D. *et al*, 2012), surgió la necesidad de respaldar dicho modelo y los cálculos realizados. Estableciéndose como base de los cálculos un sistema de coordenadas positivo (convención de Nebraska) se realizaron tres métodos diferentes de comprobaciones, donde la principal será la comprobación gráfica. Para realizar dichas gráficas se asignarán valores a los seis parámetros del modelo en cada uno de los métodos, y por último se compararán las gráficas con el fin de validar el modelo.

3.4.1 Método I: Las matrices de Mueller

Esta comprobación se realizó utilizando las matrices de Mueller para cada elemento óptico del modelo y para un sistema de coordenadas positivo. El modelo establecido es el descrito por la ecuación (127). Se tienen las cuatro matrices correspondientes, las cuales se pueden observar en el apéndice II, y están constituidas por: las matrices de rotación $R_m(\theta)$ y $R_m(-\theta)$ que están dadas por

$$R_m(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & \text{sen}(2\theta) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (138)$$

$$R_m(-\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & -\text{sen}(2\theta) & 0 \\ 0 & \text{sen}(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (139)$$

la matriz de rotación $R_m(b\tau)$ que caracteriza el efecto geométrico por la torsión en la fibra, y que está dada por

$$\mathbf{R}_m(b\tau) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2b\tau) & \text{sen}(2b\tau) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(2b\tau) & \cos(2b\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (140)$$

la matriz de rotación $\mathbf{R}_m(\zeta)$ que caracteriza el efecto inducido por la fase de Pancharatnam, que está dada por

$$\mathbf{R}_m(\zeta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\zeta) & \text{sen}(2\zeta) & 0 \\ 0 & -\text{sen}(2\zeta) & \cos(2\zeta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} y \quad (141)$$

la matriz elíptica \mathbf{M}_{Em} que caracteriza la birrefringencia inducida por el efecto fotoelástico, que está dada por

$$\mathbf{M}_{Em} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2 \text{sen}^2(2\mu) \text{sen}^2(\delta_\tau/2) & \text{sen}(\delta_\tau) \text{sen}(2\mu) & \text{sen}^2\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) \text{sen}(4\mu) \\ 0 & -2 \cos(\mu) \text{sen}(\delta_\tau) \text{sen}(\mu) & \cos(\delta_\tau) & \text{sen}(\delta_\tau) \cos(2\mu) \\ 0 & \text{sen}^2\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) \text{sen}(4\mu) & -\text{sen}(\delta_\tau) \cos(2\mu) & 1 - 2 \cos^2(2\mu) \text{sen}^2(\delta_\tau/2) \end{bmatrix}. \quad (142)$$

Realizando el producto de las matrices como se ve en la ecuación (127), es posible graficar el vector de Stokes resultante de esta operación. Para esto es necesario asignar valores numéricos a los parámetros que intervienen en el sistema: ϕ , b , ζ , θ , δ_0 , c y μ . La Tabla 6 describe el valor numérico para cada uno de los parámetros mencionados anteriormente.

Tabla 6. Valores numéricos utilizados para graficar resultados.

Parámetros del sistema	Valor numérico de los parámetros del sistema
ϕ	0°
b	-0.99
ζ	-82.7014°
θ	-131°
δ_0	125.52°
c	1.833
μ	37.2423°

La sustitución de los parámetros de la Tabla 6 en cada una de las matrices de Mueller que describen el modelo descrito por la ecuación (127) se puede ver en la gráfica mostrada en la Figura 43, donde se utilizó la letra "l" para indicar que se obtuvieron por medio del método l.

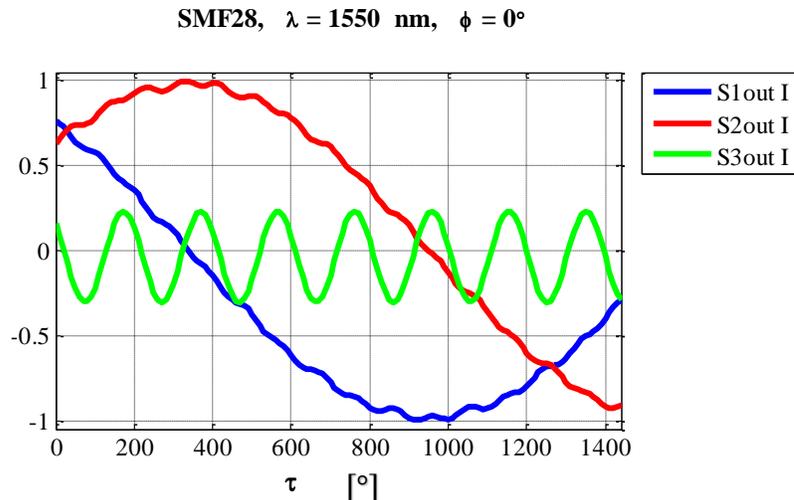


Figura 43. Gráfica del método "I" obtenida a partir del modelo matemático (ecuación 127).

3.4.2 Método II: Las ecuaciones de S_{1out} , S_{2out} y S_{3out}

Esta comprobación se realizó de manera similar a la comprobación del método I, en cuanto a que se utilizaron las mismas matrices, la diferencia radicó en que para este caso se obtuvieron directamente las ecuaciones que describen a S_{1out} , S_{2out} y S_{3out} respectivamente.

Sustituyendo la ecuación (125) y (126) en la ecuación (127) se obtienen las ecuaciones para cada uno de los parámetros de Stokes de salida, los cuales sabemos que están dados por

$$\begin{aligned}
 S_{1out} = & -\text{sen}[2(b\tau + \zeta - \theta)]\{\cos[2(\theta - \phi)]\text{sen}[\delta o + c\tau]\text{sen}[2\mu] \\
 & + \cos[\delta o + c\tau]\text{sen}[2(\theta - \phi)]\} + \cos[2(b\tau + \zeta - \theta)] \\
 & \{ \cos[2(\theta - \phi)] \left(\cos\left[\frac{\delta o + c\tau}{2}\right]^2 + \cos[4\mu]\text{sen}\left[\frac{\delta o + c\tau}{2}\right]^2 \right) \\
 & - \text{sen}[\delta + c\tau]\text{sen}[2\mu]\text{sen}[2(\theta - \phi)] \} , \quad (143)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{2out} = & -\cos[2(b\tau + \zeta - \theta)]\{\cos[2(\theta - \phi)]\text{sen}[\delta o + c\tau]\text{sen}[2\mu] \\
 & + \cos[\delta o + c\tau]\text{sen}[2(\theta - \phi)]\} + \text{sen}[2(b\tau + \zeta \\
 & - \theta)](-\cos[2(\theta - \phi)] \left(\cos\left[\frac{\delta o + c\tau}{2}\right]^2 + \cos[4\mu]\text{sen}\left[\frac{\delta o + c\tau}{2}\right]^2 \right) \\
 & + \text{sen}[\delta o + c\tau]\text{sen}[2\mu]\text{sen}[2(\theta - \phi)] \} , \quad (144)
 \end{aligned}$$

$$S_{3out} = \cos[2(\theta - \phi)]\text{sen}\left[\frac{\delta o + c\tau}{2}\right]^2 \text{sen}[4\mu] + \cos[2\mu]\text{sen}[\delta o + c\tau]\text{sen}[2(\theta - \phi)] . \quad (145)$$

Una vez identificadas las ecuaciones (143-145) se realizó su respectiva gráfica, con la finalidad de comprobar la similitud de este procedimiento con el efectuado en el método I. Para esto se utilizaron los

mismos valores numéricos (Tabla 6). El resultado obtenido es la gráfica mostrada en la Figura 44, donde se utilizó "II" para indicar que se obtuvo por medio del método II. Esta gráfica aunque no pueda apreciarse es la superposición de la gráfica del método II sobre la gráfica de la Figura 43 (método I).

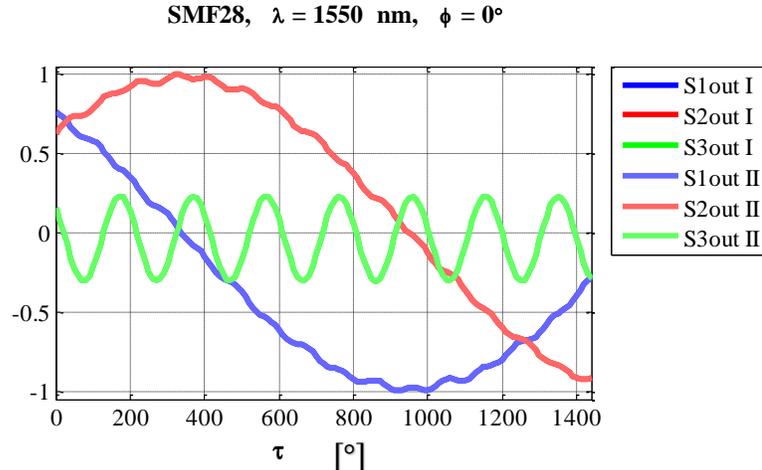


Figura 44. Gráfica del método "II", superposición de las ecuaciones (143-145) sobre la gráfica de la Figura 43.

3.4.3 Método III: Producto Kroenecker

Los vectores de Stokes son fáciles de medir en el laboratorio ya que solo implica medir cuatro intensidades luminosas, a diferencia de los vectores de Jones los cuales contienen directamente la información de las fases en x y y . Por esta razón los vectores de Jones son muy utilizados para describir teóricamente el comportamiento de un sistema óptico, mientras que los vectores de Stokes son muy utilizados en las mediciones experimentales.

El estado de polarización (EP) se define como la figura geométrica que describe la punta del vector de campo eléctrico en la medida que se propaga en el espacio. Entonces, para comparar los resultados experimentales con los modelos teóricos resulta muy útil establecer una conversión entre los vectores Jones - Stokes y las matrices Jones - Mueller y para ello utilizaremos el concepto de matriz de coherencia. La matriz de coherencia está definida por, (H. Fujiwara, 2007)

$$Jc = \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix}, \quad (146)$$

donde $\langle E_i E_j^* \rangle$ representa el promedio temporal del producto $E_i E_j^*$ en un periodo T ,

$$\langle E_i E_j^* \rangle = \frac{1}{T} \int E_i E_j^* dt. \quad (147)$$

A partir de esta matriz, se define el vector de coherencia \vec{C} de la siguiente manera

$$\vec{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} C_{xx} \\ C_{xy} \\ C_{yx} \\ C_{yy} \end{bmatrix} = \vec{\mathbf{V}} \otimes \vec{\mathbf{V}}^* = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} E_x^* \\ E_y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x \vec{\mathbf{E}}^* \\ E_y \vec{\mathbf{E}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x E_x^* \\ E_x E_y^* \\ E_y E_x^* \\ E_y E_y^* \end{bmatrix}, \quad (148)$$

donde el símbolo \otimes denota el producto Kroenecker (o directo) entre dos matrices y $\vec{\mathbf{V}}$ es el vector de Jones.

El producto Kroenecker (o directo) que será utilizado, está definido de la siguiente manera: sean dos matrices A y B

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, \quad (149a)$$

su producto Kroenecker es

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix}, \quad (149b)$$

por ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*0 & 1*5 & 2*0 & 2*5 \\ 1*6 & 1*7 & 2*6 & 2*7 \\ 3*0 & 3*5 & 4*0 & 4*5 \\ 3*6 & 3*7 & 4*6 & 4*7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}. \quad (149c)$$

Con el vector de coherencia y las relaciones de las componentes del vector de Stokes (Tabla 7), se puede escribir

$$\begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x E_x^* + E_y E_y^* \\ E_x E_x^* - E_y E_y^* \\ E_x E_y^* + E_y E_x^* \\ i(E_x E_y^* - E_y E_x^*) \end{bmatrix} = \mathbf{U} \mathbf{C} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} E_x E_x^* \\ E_x E_y^* \\ E_y E_x^* \\ E_y E_y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x E_x^* \\ E_x E_y^* \\ E_y E_x^* \\ E_y E_y^* \end{bmatrix}, \quad (150a)$$

de donde podemos extraer la matriz U de conversión y también su inversa,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (150b)$$

Basándose en la ecuación (150a), podemos deducir las siguientes relaciones,

$$\vec{\mathbf{S}} = \mathbf{U} \vec{\mathbf{C}}, \quad (151)$$

$$y \quad \vec{\mathbf{C}} = \mathbf{U}^{-1} \vec{\mathbf{S}}, \quad (152)$$

es decir, el vector de Stokes $\vec{\mathbf{S}}$ se puede obtener a partir del vector de Jones $\vec{\mathbf{V}}$ de la siguiente manera

$$\vec{S} = U (\vec{V} \otimes \vec{V}^*) . \quad (153)$$

Por otra parte los vectores de Jones de entrada y salida para sistema óptico están relacionados por la matriz de Jones \mathbf{J} de la siguiente manera,

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}_{sal} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}_{in} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}_{in} , \quad (154)$$

y si realizamos el producto Kroenecker del vector de salida con su complejo conjugado obtenemos,

$$\vec{S}_{sal} \otimes \vec{S}_{sal}^* = \mathbf{J} \vec{E}_{in} \otimes \mathbf{J}^* \vec{E}_{in}^* = (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) (\vec{E}_{in} \otimes \vec{E}_{in}^*) , \quad (155)$$

de acuerdo a la ecuación (148) ésta última ecuación se puede reescribir como

$$\vec{C}_{sal} = (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) \vec{C}_{in} . \quad (156)$$

Finalmente, si multiplicamos ambos lados de esta ecuación por U y utilizando la relación mostrada en la ecuación (152) se multiplica ambos lados por la izquierda por U para así obtener,

$$\vec{S}_{sal} = U (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) U^{-1} \vec{S}_{in} = \mathbf{M} \vec{S}_{in} , \quad (157)$$

donde M es la matriz de Mueller correspondiente a la matriz de Jones J , esto es,

$$\mathbf{M} = U (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) U^{-1} . \quad (158)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones necesarias para realizar la conversión entre Jones y Mueller o Stokes, se desarrolló el modelo matemático de manera similar al método I. Con la diferencia de que en el método III se utilizaron las matrices de Jones (positivas, convención de Nebraska). El modelo establecido es el siguiente:

$$\mathbf{V}_{OUT} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{ET} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} = \mathbf{R}(-\theta) \mathbf{R}(b\tau) \mathbf{R}(\zeta) \mathbf{M}_E \mathbf{R}(\theta) \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix} . \quad (159)$$

Se introdujeron las matrices de Jones correspondientes, las cuales se pueden observar en el apéndice II, están constituidas por: las matrices de rotación $\mathbf{R}(\theta)$ y $\mathbf{R}(-\theta)$ que están dadas por

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} , \quad (160)$$

$$\mathbf{R}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} , \quad (161)$$

la matriz de rotación $\mathbf{R}(b\tau)$ que caracteriza el efecto geométrico por la torsión en la fibra, y está dada por

$$\mathbf{R}(b\tau) = \begin{bmatrix} \cos(b\tau) & \sin(b\tau) \\ -\sin(b\tau) & \cos(b\tau) \end{bmatrix} , \quad (162)$$

la matriz de rotación $R(\zeta)$ que caracteriza el efecto inducido por la fase de Pancharatnam, y está dada por

$$R(\zeta) = \begin{bmatrix} \cos(\zeta) & \text{sen}(\zeta) \\ -\text{sen}(\zeta) & \cos(\zeta) \end{bmatrix} \text{ y} \quad (163)$$

la matriz elíptica M_E que caracteriza la birrefringencia inducida por el efecto fotoelástico, y está dada por

$$M_E = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) \cos 2\mu & \text{sen}\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) \text{sen} 2\mu \\ -\text{sen}\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) \text{sen} 2\mu & \cos\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) - i \text{sen}\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) \cos 2\mu \end{bmatrix}. \quad (164)$$

Una vez definidas las ecuaciones (160-164) se sustituyeron en la ecuación (159) para obtener el vector de Jones de salida del sistema. Hecho esto surge la necesidad de convertir este vector de Jones a uno de Stokes, con el fin de realizar su respectiva gráfica la cual se comparará con las gráficas realizadas en el método I y II. Este proceso de conversión se realizó utilizando el producto Kroenecker. Para efectuar la conversión en el caso de un vector, se tiene que utilizar la ecuación (153), por lo tanto se tiene que sustituir el vector de Jones de salida obtenido a partir de la ecuación (159), en la ecuación (153), tal que

$$S_{OUT} = U(V_{OUT} \otimes V_{OUT}^*). \quad (165)$$

El resultado de la ecuación (165) es graficado para comprobar que el procedimiento se realizó correctamente. Para graficar es necesario asignar valores a los parámetros que intervienen en el sistema. De igual manera se sustituyeron los valores numéricos de los parámetros mostrados en la Tabla 6.

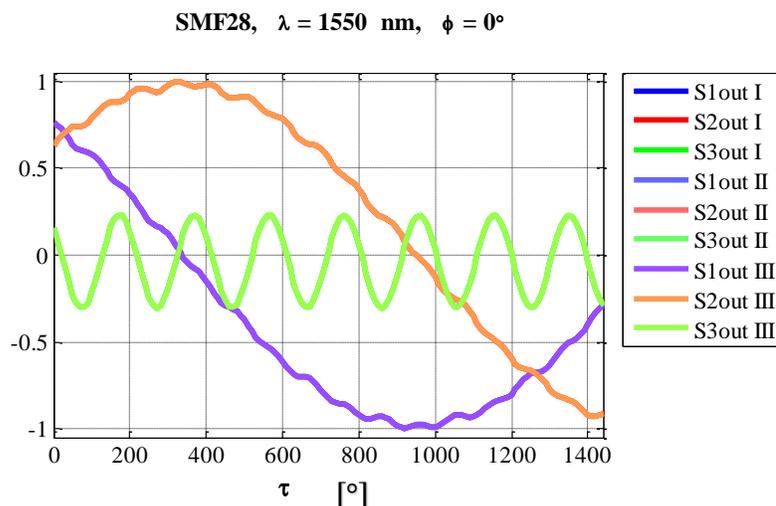


Figura 45. Gráfica del método "III", la superposición de la ecuación (165) sobre la gráfica de la Figura 43 y la gráfica de las ecuaciones (143-145).

El resultado obtenido de esta comprobación es la gráfica mostrada en la Figura 45, donde se utilizó “III” para indicar que se obtuvo por medio del método III. Esta gráfica aunque no se aprecie es la superposición de la gráfica del método III sobre la gráfica de las Figuras 43 y 44 (método I y II respectivamente).

En resumen, se utilizaron tres métodos diferentes para validar nuestro modelo matemático, estos métodos fueron:

Método I: Comprobación del modelo por medio de matrices de Mueller.

Método II: Comprobación del modelo por medio de las ecuaciones de $S_{1_{out}}$, $S_{2_{out}}$ y $S_{3_{out}}$.

Método III: Comprobación del modelo matemático utilizando las matrices de Jones y realizando la conversión de Jones a Stokes por medio del producto Kroenecker.

Una manera de comprobar la igualdad entre sistemas de ecuaciones o de matrices, es la comparación gráfica. Cabe destacar que además se realizaron los tres procedimientos (método I, II y III) simultáneamente, y el resultado como era de esperarse fue solo una gráfica, debido a que las tres estaban sobrepuestas una sobre otra y por lo cual visualmente solo se observaba una gráfica.

3.5 Relación entre el modelo de ajuste para sistemas de coordenadas positivas y negativas

Cuando se especificó el modelo matemático que se pretendía utilizar, se aclaró que este modelo estaba desarrollado para un sistema de coordenadas positivas (convención de Nebraska). Específicamente el decir que el modelo es positivo indica que las matrices del sistema son positivas (los retardadores y rotadores), el orden de las rotaciones y también el sentido del eje S_3 en la esfera de Poincaré.

Tabla 7. Vector de Stokes expresado para coordenadas negativas.

	(ϵ, ψ)
S_0	-
S_1	$S_0 \cos 2\epsilon \cos 2\psi$
S_2	$S_0 \cos 2\epsilon \sin 2\psi$
S_3	$-S_0 \sin 2\epsilon$

Por lo tanto una vez desarrollado y comprobado el modelo positivo, surgió la pregunta, ¿Qué pasaría si únicamente se pudiera utilizar un modelo negativo, y solo se contara con el modelo positivo? Contestar esta pregunta fue lo que motivó los siguientes procedimientos.

El paso inicial fue desarrollar el modelo matemático equivalente al de la ecuación (159), pero en un sistema de coordenadas negativo, que está dado por

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{M}}_{ET} \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \text{sen}(\phi) \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{R}}(\theta)\bar{\mathbf{R}}(b\tau)\bar{\mathbf{R}}(\zeta)\bar{\mathbf{M}}_E\bar{\mathbf{R}}(-\theta) \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \text{sen}(\phi) \end{bmatrix}, \quad (166)$$

donde la barra superpuesta sobre cada una de las matrices indica que están definidas para un sistema de coordenadas negativo.

Con relación al modelo positivo se invierten los signos del ángulo de rotación θ . Las matrices (167 a 171) que se utilizan para un modelo negativo (C. Tsao, 1992) pueden verse en el apéndice III, y están constituidas por las matrices de rotación $\bar{\mathbf{R}}(\theta)$ y $\bar{\mathbf{R}}(-\theta)$ que están dadas por

$$\bar{\mathbf{R}}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (167)$$

$$\bar{\mathbf{R}}(-\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (168)$$

la matriz de rotación $\bar{\mathbf{R}}(b\tau)$ que caracteriza el efecto geométrico por la torsión en la fibra, y está dada por

$$\bar{\mathbf{R}}(b\tau) = \begin{bmatrix} \cos(b\tau) & -\text{sen}(b\tau) \\ \text{sen}(b\tau) & \cos(b\tau) \end{bmatrix}, \quad (169)$$

la matriz de rotación $\bar{\mathbf{R}}(\zeta)$ que caracteriza el efecto inducido por la fase de Pancharatnam, y está dada por

$$\bar{\mathbf{R}}(\zeta) = \begin{bmatrix} \cos(\zeta) & -\text{sen}(\zeta) \\ \text{sen}(\zeta) & \cos(\zeta) \end{bmatrix} y \quad (170)$$

la matriz elíptica $\bar{\mathbf{M}}_E$ que caracteriza la birrefringencia inducida por el efecto fotoelástico, es

$$\bar{\mathbf{M}}_E = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) - i \text{sen}\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) \cos 2\mu & -\text{sen}\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) \text{sen} 2\mu \\ \text{sen}\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) \text{sen} 2\mu & \cos\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) + i \text{sen}\left(\frac{\delta_\tau}{2}\right) \cos 2\mu \end{bmatrix}. \quad (171)$$

Realizando el producto matricial descrito en la ecuación (166) se obtiene el vector de Jones de salida del sistema. Este vector es convertido a un vector de Stokes por medio del producto Kroenecker (ecuación 153), con el fin de comparar estos resultados con los descritos para un sistema de coordenadas positivo. El vector de Stokes resultante, está dado por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
S1out_N = \cos[2(\theta - \phi)] & \left\{ \cos[2(b\tau + \zeta + \theta)] \left(\cos \left[\frac{\delta o + c\tau}{2} \right]^2 + \cos[4\mu] \operatorname{sen} \left[\frac{\delta o + c\tau}{2} \right]^2 \right) \right. \\
& \left. - \operatorname{sen}[\delta o + c\tau] \operatorname{sen}[2\mu] \operatorname{sen}[2(b\tau + \zeta + \theta)] \right\} \\
& + \operatorname{sen}[2(\theta - \phi)] \{ \cos[2(b\tau + \zeta + \theta)] \operatorname{sen}[\delta o + c\tau] \operatorname{sen}[2\mu] \\
& + \cos[\delta o + c\tau] \operatorname{sen}[2(b\tau + \zeta + \theta)] \} \quad (172)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S2out_N = \cos[2(\theta - \phi)] & \left\{ \operatorname{sen}[2(b\tau + \zeta + \theta)] \left(\cos \left[\frac{\delta o + c\tau}{2} \right]^2 + \cos[4\mu] \operatorname{sen} \left[\frac{\delta o + c\tau}{2} \right]^2 \right) \right. \\
& \left. + \cos[2(b\tau + \zeta + \theta)] \operatorname{sen}[\delta o + c\tau] \operatorname{sen}[2\mu] \right\} \\
& + \operatorname{sen}[2(\theta - \phi)] \{ -\cos[\delta o + c\tau] \cos[2(b\tau + \zeta + \theta)] \\
& + \operatorname{sen}[\delta o + c\tau] \operatorname{sen}[2\mu] \operatorname{sen}[2(b\tau + \zeta + \theta)] \} \quad (173)
\end{aligned}$$

$$S3out_N = -\cos[2(\theta - \phi)] \operatorname{sen} \left[\frac{\delta o + c\tau}{2} \right]^2 \operatorname{sen}[4\mu] + \cos[2\mu] \operatorname{sen}[\delta o + c\tau] \operatorname{sen}[2(\theta - \phi)]. \quad (174)$$

Tabla 8. Valores numéricos utilizados para graficar ambos modelos (positivo y negativo).

Parámetros del sistema	Sistema de coordenadas Negativo	Sistema de coordenadas Positivo
ϕ	150°	150°
b	-0.99	-0.99
ζ	180°	180°
θ	52°	52°
δ_0	-10°	-10°
c	1.844	1.844
μ	52°	52°

Se graficaron ambos modelos utilizando los mismo valores numéricos para los parámetros del sistema, tal como se puede ver en la Tabla 8. El resultado gráfico obtenido se puede ver en la Figura 46, en la cual se muestra un notable desajuste entre ambos modelos.

Para encontrar la relación que existe en ambos sistemas de coordenadas primero se analizaron sus propiedades de polarización. Principalmente se tiene que el eje de S_3 en la esfera de Poincaré cambia de sentido en los dos sistemas de coordenadas (ver Figura 47), esto implica un cambio en el sentido de giro del retardamiento circular δ_c , ocasionando que cuando en el sistema de coordenadas positivo el retardamiento circular sea positivo, en el sistema de coordenadas negativo este retardamiento circular será negativo (δ_c sistema positivo $\rightarrow -\delta_c$ sistema negativo); sabemos que las variables de nuestro modelo que intervienen en el retardamiento circular son b y ζ , si queremos pasar de un sistema a otro (negativo a positivo o viceversa) se debe aplicar el cambio de signo a estas variables.

Por otra parte, del apéndice II y III se sabe que $\delta_c = \delta_E \text{sen}(2\mu)$, lo que implica que el parámetro μ también debe cambiar su signo ($\mu_{\text{sistema positivo}} \rightarrow -\mu_{\text{sistema negativo}}$) para pasar de un sistema de coordenadas a otro.

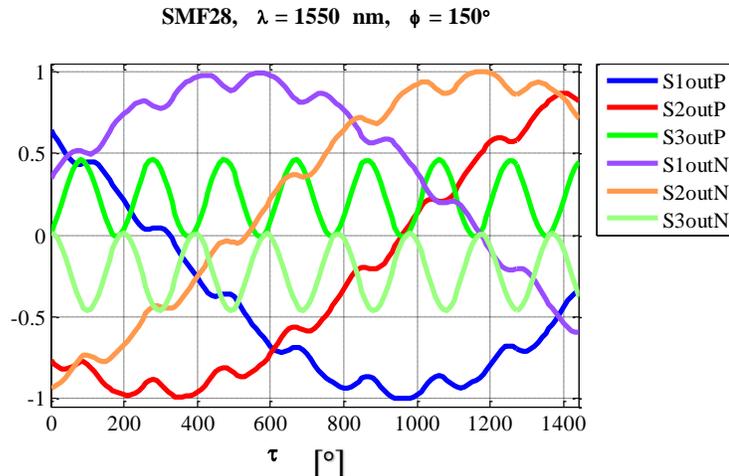


Figura. 46. Gráfica del modelo negativo contra el modelo positivo utilizando los mismos parámetros (Tabla 8).

Por último se llevó a la práctica el análisis realizado para ambos sistemas de coordenadas y mediante pruebas gráficas se comprobó que utilizando ambos sistemas de matrices es posible llegar a un mismo resultado. Se encontró que las gráficas de un sistema de coordenadas positivo se superponen (ver Figura 48) con las de un sistema negativo al invertir el signo de los parámetros: μ , b y ζ .

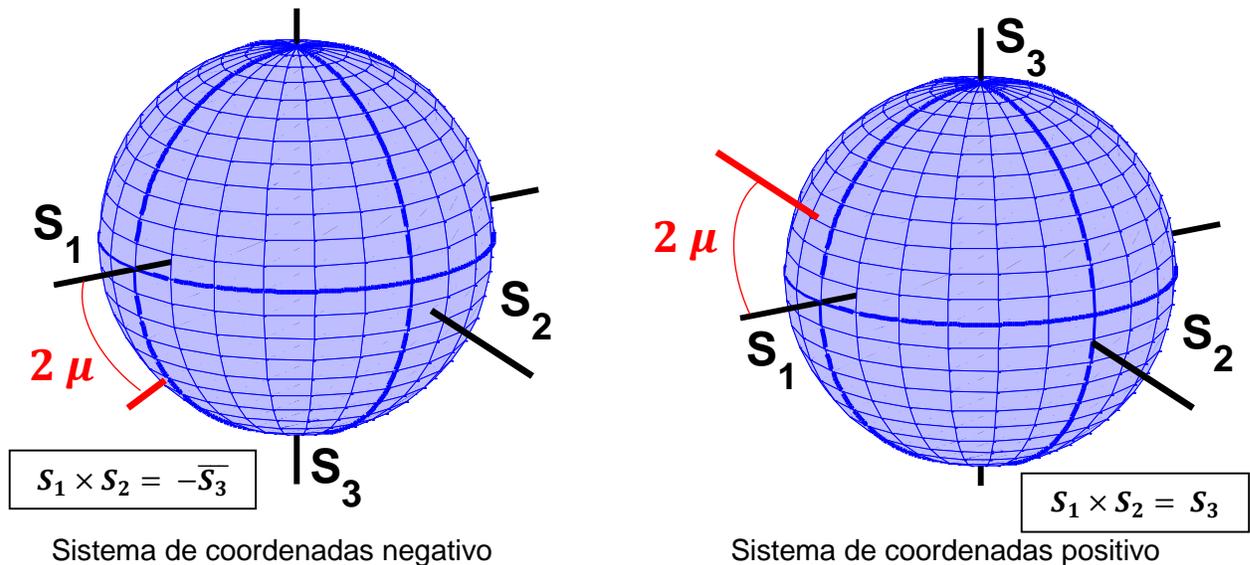


Figura 47. Descripción gráfica de los ejes en la esfera de Poincaré para sistemas de coordenadas positivo y negativo.

La gráfica mostrada en la Figura 48 se realizó utilizando los parámetros descritos en la Tabla 9, en la cual se muestran los cambios marcados en negritas (valores numéricos).

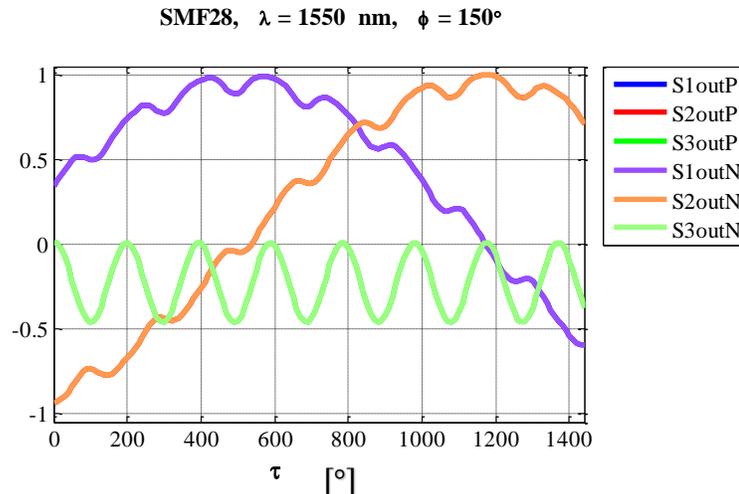


Figura 48. Gráfica del modelo negativo contra el modelo positivo utilizando los parámetros de la Tabla 9: se intercambian los signos de μ , b y ζ .

Tabla 9. Valores numéricos utilizados para graficar ambos modelos con los cambios realizados a μ , b y ζ .

Parámetros del sistema	Sistema Negativo	de coordenadas	Sistema de coordenadas Positivo
ϕ		150°	150°
b		-0.99	0.99
ζ		180°	-180°
θ		52°	52°
δ_0		-10°	-10°
c		1.844	1.844
μ		52°	-52°

Un resultado a destacar es que ningún valor numérico cambió, lo cual era de esperarse debido a la reciprocidad existente entre ambos modelos: negativo y positivo. Dos características que se encontraron al cambiar de signo a los parámetros en el modelo positivo son:

- Cambiando el signo de los parámetros b y ζ , pero sin cambiar el signo de μ : aumenta la frecuencia de los parámetros de Stokes S_1 y S_2 , el parámetro S_3 permanece sin cambios, ver Figura 49 (a). Las tres curvas se encuentran desajustadas.
- El cambio de signo en el parámetro μ , pero sin cambiar de signo a los parámetros b y ζ : incrementa la frecuencia de los parámetros de Stokes S_1 y S_2 , pero en este caso el parámetro de Stokes S_3 se ajusta perfectamente, ver Figura 49 (b).

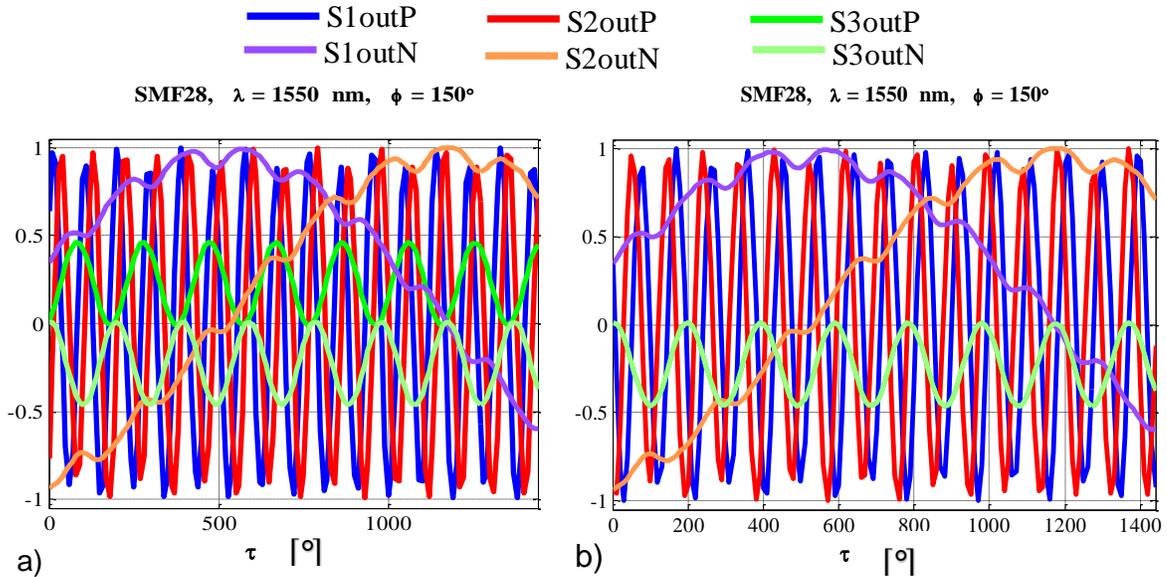


Figura 49. a) Gráfica comparación del cambio de signo en b y ζ . b) Gráfica comparación del cambio de signo en μ .

3.6 Metodología para ajustes de gráficas

Siguiendo las condiciones descritas en el modelo matemático, se elaboró una interfaz visual en Mathematica para realizar los ajustes de las curvas obtenidas en las mediciones de una manera más fácil. Este programa es una gran herramienta que permite reducir en gran medida el trabajo y el tiempo de ajuste de gráficas.

El conocimiento de los parámetros del modelo matemático que intervienen en el proceso de torsión de una fibra óptica monomodo ($b, \mu, \theta, c, \delta_0, y \zeta$), y como afecta su variación en las curvas son los cimientos para crear una metodología de ajuste, por lo tanto se describirán cada uno de estos seis parámetros. Para conocer a fondo como intervienen los parámetros del modelo se realizaron algunas gráficas en las cuáles se mostró como van cambiando gráficamente los parámetros de Stokes (S_1, S_2 y S_3). Estas gráficas se obtuvieron partiendo de una gráfica teórica ajustada contra su gráfica experimental.

Las características principales de las gráficas son:

- El eje de las abscisas está determinado por la torsión (τ) en la fibra óptica.
- Los parámetros de Stokes teóricos están marcados con los colores:

S_{1out} — S_{2out} — S_{3out} —.

- c) Los parámetros de Stokes experimentales presentan los mismos colores solo que a su vez están graficados con líneas más gruesas, que incluyen puntos negros como marcadores.
- d) Las gráficas corresponden a las mediciones experimentales obtenidas a una longitud de onda de 1550 nm y un ángulo azimutal $\phi = 150^\circ$.
- e) Los seis parámetros tienen un valor numérico para el cual se ajustan las gráficas (descrito por un subíndice cero), pero en los parámetros b, μ y c este valor es crítico, debido a que una mínima variación del mismo impide obtener un ajuste deseable.

3.6.1 Descripción de los parámetros del modelo matemático

3.6.1.1 El parámetro b

De acuerdo al modelo matemático el parámetro b representa una constante mecánica que caracteriza a los objetos que se les ejerce una torsión. De la teoría de elasticidad se sabe que para objetos cilíndricos circulares esta b posee un valor igual a 1, mientras que para objetos como las fibras ópticas que presentan pequeñas imperfecciones ovoides en su sección transversal su valor es aproximadamente 1, en este caso se asignará el valor $|b| \approx 0.99$.

Las gráficas de la Figura 51 muestran el comportamiento de los parámetros de Stokes S_1 , S_2 y S_3 al variar el parámetro b , desde $b = -0.99$ hasta $b = 0.99$ en intervalos de 0.495.

De las gráficas de la Figura 51 se obtuvieron las siguientes características:

- a) La variación del parámetro b provoca un incremento en la frecuencia de los parámetros de Stokes S_1 y S_2 . Se encontró que entre más grande sea la variación de b comparada con su valor crítico el incremento será mayor.
- b) El parámetro de Stokes S_3 se mantiene constante ante cualquier variación de b .
- c) El parámetro b tiene un valor crítico (b_0).

3.6.1.2 El parámetro μ

La elipticidad del eigenmodo principal del retardador elíptico (μ), está relacionada directamente con la matriz característica de la fibra torcida (ecuación 142) la cual representa a un retardador elíptico. El valor numérico de μ para ajustar las curvas es desconocido, por tanto se necesita visualizar en que afecta al modelo la variación de este parámetro.

Las gráficas de la Figura 52 muestran el comportamiento de los parámetros de Stokes S_1 , S_2 y S_3 al variar el parámetro μ , desde $\mu = -37.24^\circ$ hasta 120.25° en intervalos de 22.5° . De las gráficas de la Figura 52 se obtuvieron las siguientes características:

- La variación del parámetro μ provoca que aumente o disminuya periódicamente la amplitud del parámetro de Stokes S_3 .
- S_1 y S_2 se pueden interpretar como la suma de una función sinusoidal de alta amplitud y baja frecuencia, con otra función sinusoidal de baja amplitud y alta frecuencia (ver Figura 50), por tanto el valor de μ determina la amplitud de los rizados de la función de alta frecuencia.
- El parámetro μ tiene un valor crítico (μ_0).

Al graficar el modelo matemático para variaciones del parámetro μ , se encontraron algunas propiedades importantes de los parámetros de Stokes, las cuales son:

- Partiendo de un valor μ_0 , se encontró que para un incremento de 45° se tiene un valor máximo en la amplitud de S_3 , pero se desajustan las tres curvas.
- Se encontró que para un incremento de 90° existe un valor máximo de S_1 y S_2 , pero S_3 se mantiene con la misma amplitud que S_3 e solo que con un desfase de π .
- Se encontró que para un incremento de 135° se tiene de nuevo un valor máximo en la amplitud de S_3 , pero se desfasa con el resultado en inciso (i), las curvas están desajustadas.
- Se encontró que para un incremento de π las curvas se ajustan de nuevo, y siempre presentan esa periodicidad.

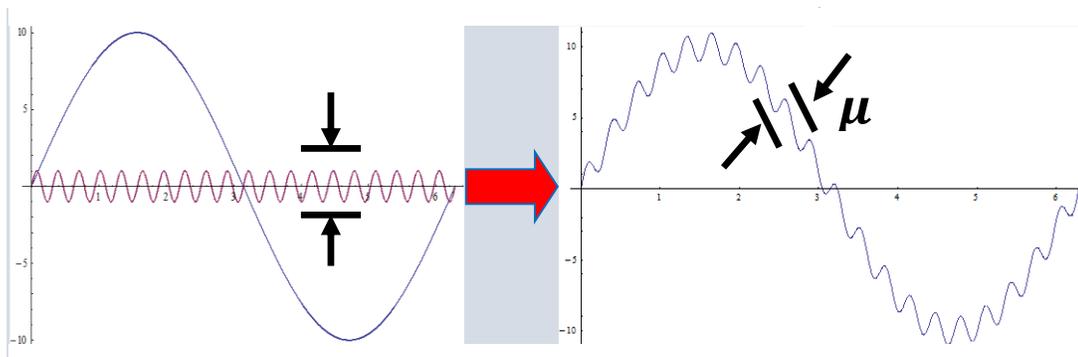


Figura 50. Gráfica que muestra la suma de una función sinusoidal de alta amplitud y baja frecuencia, con otra función sinusoidal de baja amplitud y alta frecuencia.

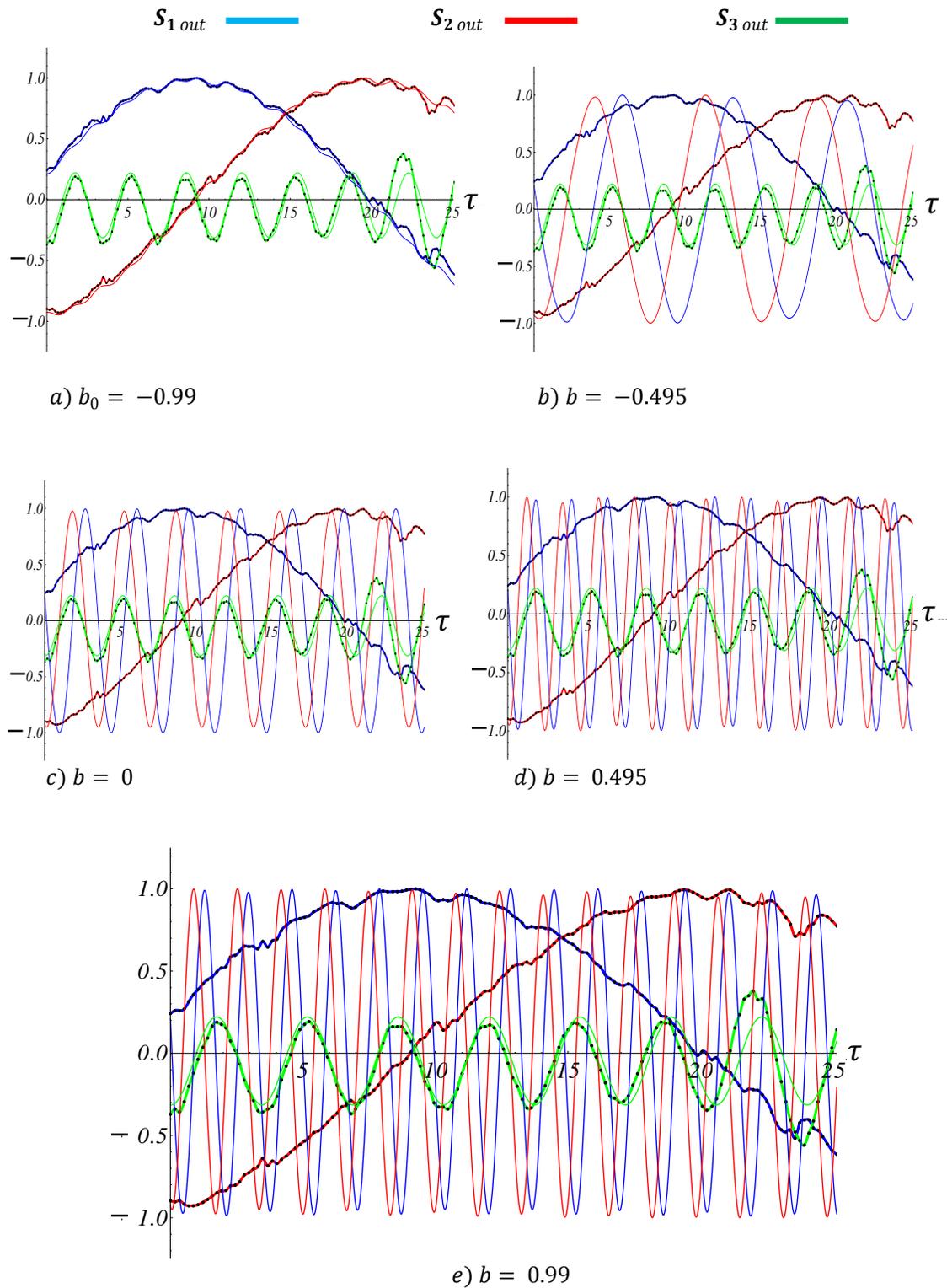


Figura 51. Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\ out}$, $S_{2\ out}$ y $S_{3\ out}$ teórico al variar el parámetro b .

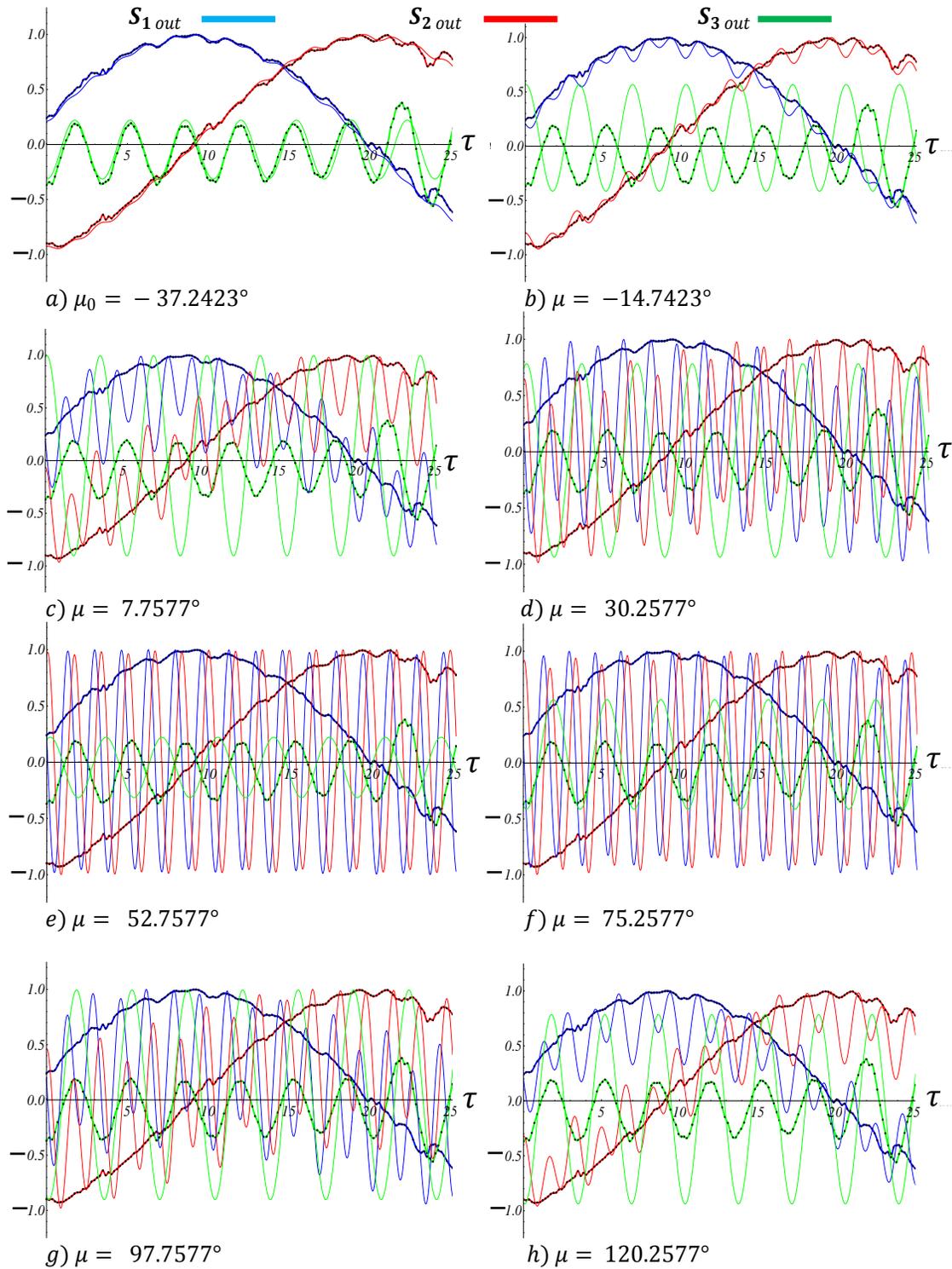


Figura 52. Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\ out}$, $S_{2\ out}$ y $S_{3\ out}$ teórico al variar el parámetro μ .

3.6.1.3 El parámetro θ

La inclinación θ del eje rápido de la fibra es desconocida en el montaje experimental. Las gráficas de la Figura 53 muestran el comportamiento de los parámetros de Stokes S_1 , S_2 y S_3 al variar el parámetro

θ , desde $\theta = 20.16^\circ$ hasta 177.66° en intervalos de 22.5° .

De las gráficas de la Figura 53 se obtuvieron las siguientes características:

- a) La variación del parámetro θ provoca un corrimiento oscilatorio en el parámetro de Stokes S_3 como lo ilustran las flechas de la Figura 53, si el parámetro θ aumenta, el corrimiento es en sentido negativo y viceversa cuando θ disminuye.
- b) La amplitud de los rizados que presentan los parámetros S_1 y S_2 aumenta periódicamente y a su vez se transportan en la dirección que lo hace de S_3 .

Al graficar el modelo matemático para variaciones del parámetro θ , se encontraron algunas propiedades importantes de los parámetros de Stokes, las cuales son:

- i. Partiendo de un valor θ_0 , se encontró que para un incremento de 90° se ajustan S_1 y S_2 , pero se desajustan las tres curvas. El parámetro S_3 presenta un desfase de π , su amplitud es igual a $S_3 e$, pero sus valores picos no están alineados.
- ii. Se encontró que para un incremento de π las curvas se ajustan de nuevo, y siempre presentan esa periodicidad.

3.6.1.4 El parámetro c

La constante que caracteriza al efecto fotoelástico está implícita en el retardamiento elíptico. Para conocer el comportamiento de las curvas al variar el parámetro c se utilizará un método gráfico. Las gráficas de la Figura 54 muestran el comportamiento de los parámetros de Stokes S_1 , S_2 y S_3 al variar el parámetro c , desde $c = -1.83$ hasta 4.58 intervalos de 0.9165 .

De las gráficas de la Figura 54 se obtuvieron las siguientes características:

- a) El parámetro c tiene un valor crítico (c_0).
- b) Entre más grande sea la variación (positiva o negativa) del parámetro c partiendo de su valor crítico, la frecuencia de S_1 , S_2 y S_3 se incrementará proporcionalmente.

Al graficar el modelo matemático para variaciones del parámetro c , se encontraron algunas propiedades importantes de los parámetros de Stokes, las cuales son:

- i. Partiendo de un valor c_0 , se encontró que cuando se invierte el signo a c_0 se mantiene ajustado el parámetro S_3 , pero S_1 y S_2 se desajustan debido a un incremento en su frecuencia.
- ii. Se encontró que para un valor numérico de $c = 0$, el parámetro de Stokes S_3 se convierte en una constante diferente de cero.

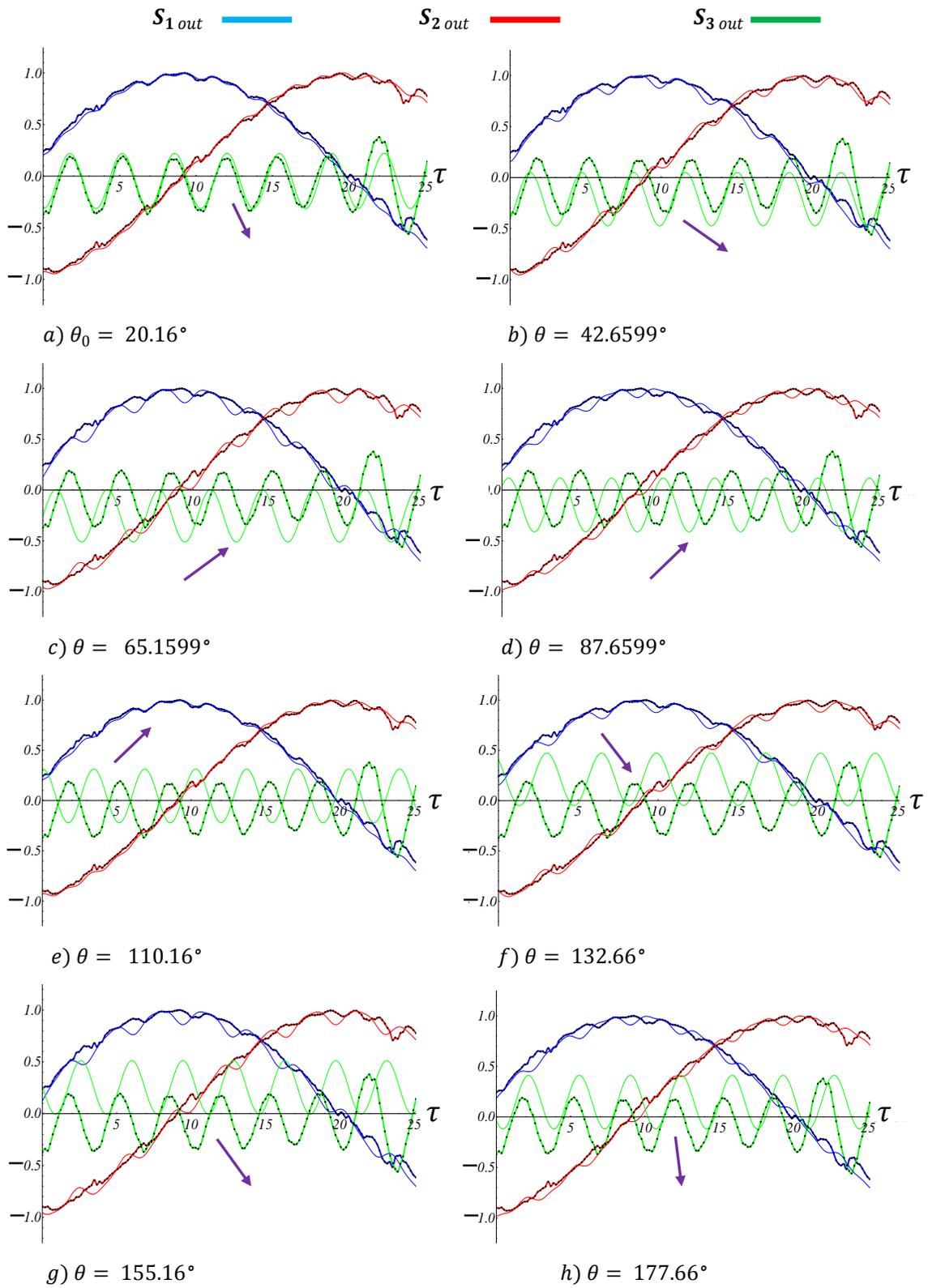


Figura 53. Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\ out}$, $S_{2\ out}$ y $S_{3\ out}$ teórico al variar el parámetro θ .

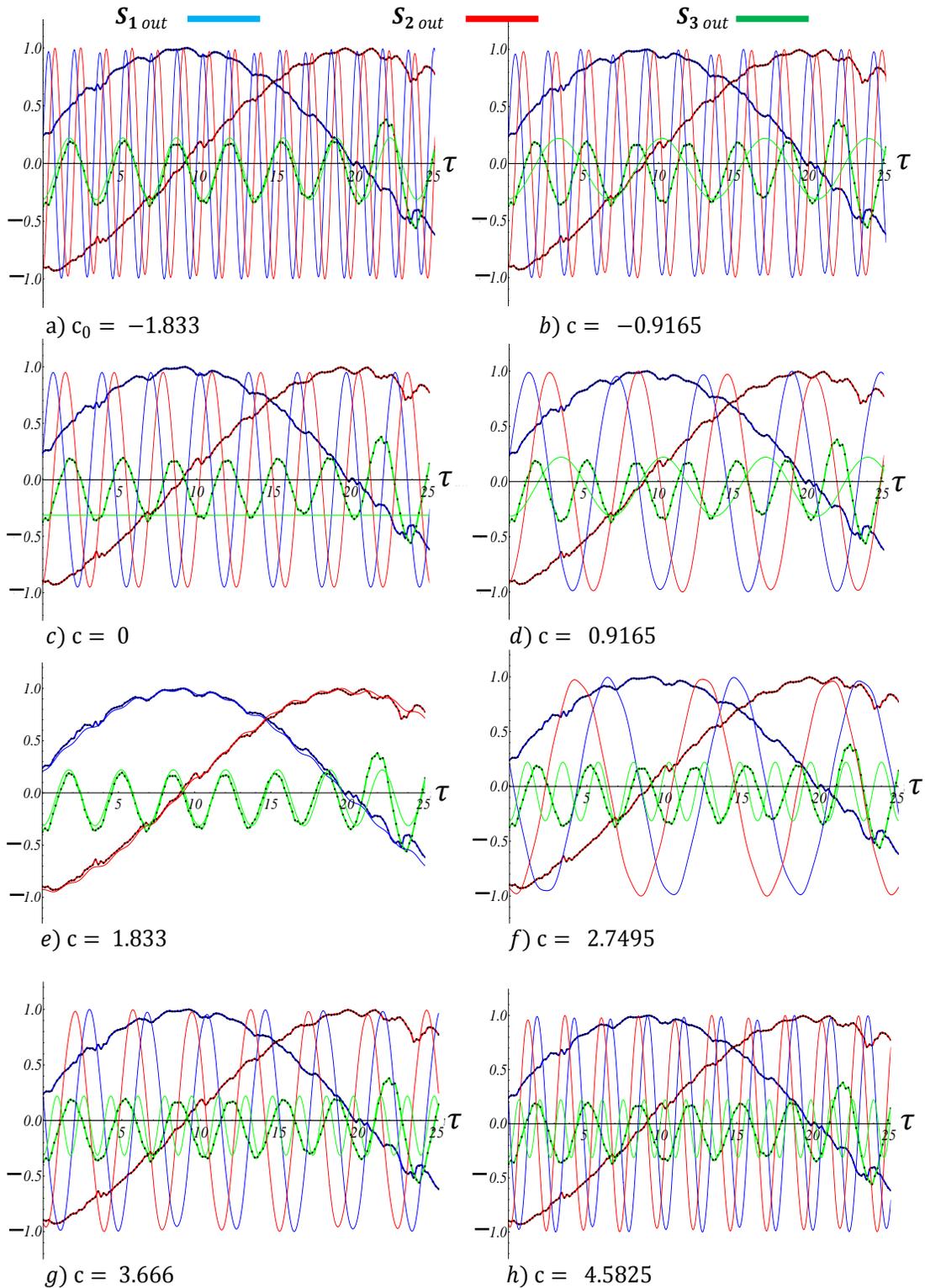


Figura 54. Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\text{ out}}$, $S_{2\text{ out}}$ y $S_{3\text{ out}}$ teórico al variar el parámetro c .

3.6.1.5 El parámetro δ_0

La birrefringencia elíptica residual de la fibra tiene su origen en las imperfecciones de la fibra óptica, sobre todo que su núcleo no sea perfectamente un cilindro circular. El valor numérico necesario de δ_0

para ajustar las curvas es desconocido, por tanto se tiene que conocer cómo afecta al modelo la variación de este parámetro. Las gráficas de la Figura 55 muestran el comportamiento de los parámetros de Stokes S_1 , S_2 y S_3 al variar el parámetro δ_0 , desde $\delta_0 = -102.95^\circ$ hasta 212.04° intervalos de 45° .

De las gráficas de la Figura 55 se obtuvieron las siguientes características:

- a) La variación del parámetro δ_0 provoca un corrimiento lateral en el eje τ (torsión de la fibra) de los parámetros de Stokes S_1 , S_2 y S_3 .
- b) La forma de las curvas S_1 , S_2 y S_3 nunca es alterada por la variación de δ_0 .

Al graficar el modelo matemático para variaciones del parámetro δ_0 , se encontraron algunas propiedades importantes de los parámetros de Stokes, las cuales son:

- i. Partiendo de un valor de δ_{00} , se encontró que para un incremento de 180° las curvas de S_1 , S_2 y S_3 teóricas son las semejantes opuestas de las curvas S_{1e} , S_{2e} y S_{3e} , es decir se convierten en su imagen espejo, ver Figuras 55(a) y 55(b).
- ii. Periodicidad: se encontró que para un incremento de 2π las curvas se ajustan de nuevo y los cambios siguen siempre esa periodicidad.

3.6.1.6 El parámetro ζ

La fase de Pancharatnam es una fase topológica. Para conocer el comportamiento de las curvas al variar el parámetro ζ y con el fin de obtener un mejor ajuste se utilizará un método gráfico. Las gráficas de la Figura 56 muestran el comportamiento de los parámetros de Stokes S_1 , S_2 y S_3 al variar el parámetro ζ , desde $\zeta = 240.35^\circ$ hasta 397.85° en intervalos de 22.5° .

De las gráficas de la Figura 56 se obtuvieron las siguientes características:

- a) La variación del parámetro ζ provoca un desplazamiento oscilatorio (sinusoidal) de los parámetros de Stokes S_1 y S_2 , si la variación de ζ es positiva el desplazamiento es en sentido positivo (derecho) y viceversa.
- b) El parámetro de Stokes S_3 permanece constante ante cualquier variación de ζ .

Al graficar el modelo matemático para variaciones del parámetro ζ , se encontraron algunas propiedades importantes de los parámetros de Stokes, las cuales son:

- i. Partiendo de un valor de ζ_0 , se encontró que para un incremento de 45° se ajusta la curva de S_1 con la S_{2e} , ver Figura 56 (c).

- ii. Se encontró que para un incremento de 135° de incremento se ajusta la curva de S_2 con la S_{1e} , ver Figura 56 (g).
- iii. Se encontró que para un incremento de π las curvas se ajustan de nuevo, y los cambios siguen siempre esa periodicidad.

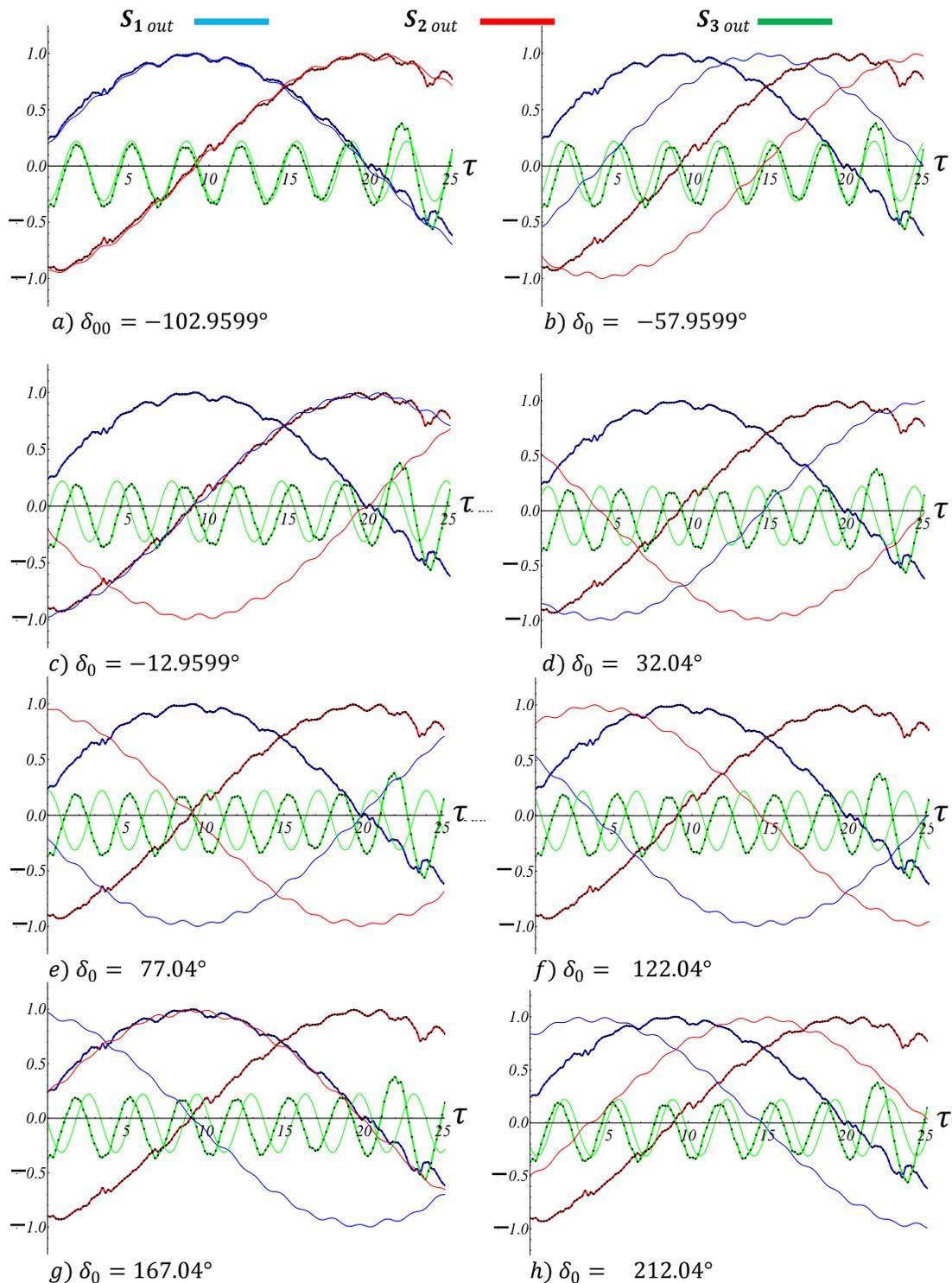


Figura 55. Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\text{ out}}$, $S_{2\text{ out}}$ y $S_{3\text{ out}}$ teórico al variar el parámetro δ_0 .

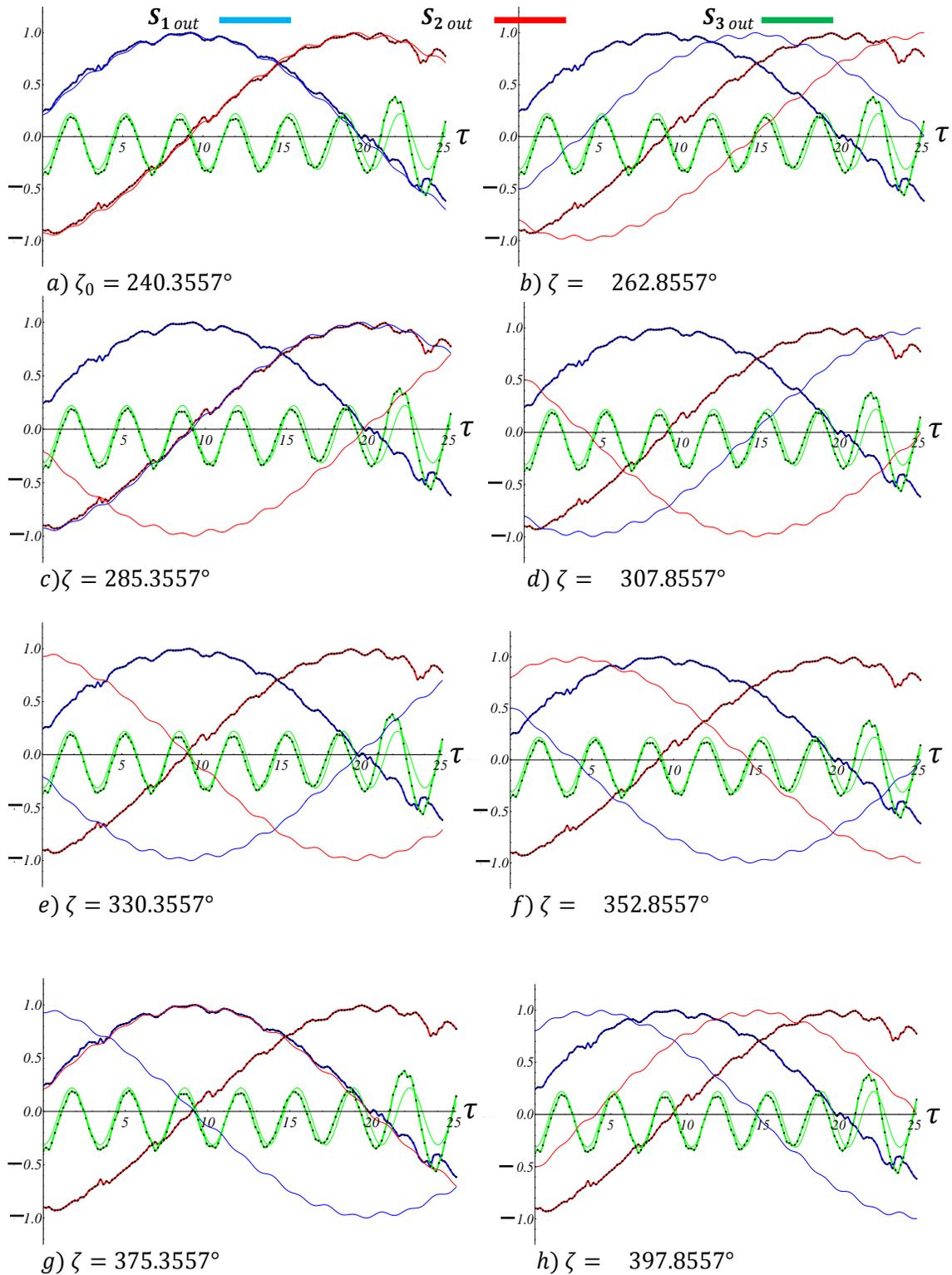


Figura 56. Gráficas que describen el comportamiento de $S_{1\ out}$, $S_{2\ out}$ y $S_{3\ out}$ teórico al variar el parámetro ζ .

3.6.2 Secuencia de ajuste de parámetros para obtener una metodología de ajuste de gráficas

Con base en las características descritas en la sección 3.6.1, resulta conveniente realizar el ajuste de los parámetros en el siguiente orden:

- a) Parámetro b : Uno de los parámetros principales que se tiene que considerar al iniciar cualquier ajuste es el parámetro b , el cual de acuerdo a la teoría sabemos que tiene un valor numérico aproximado a $|0.99|$, por lo tanto se asigna inicialmente ese valor, pudiendo variarlo solo en milésimas de su valor crítico. Una vez ajustado este parámetro se realizó una gráfica (ver Figura 57) con la finalidad de llevar un seguimiento de la respuesta del ajuste ante el cambio de cada parámetro.

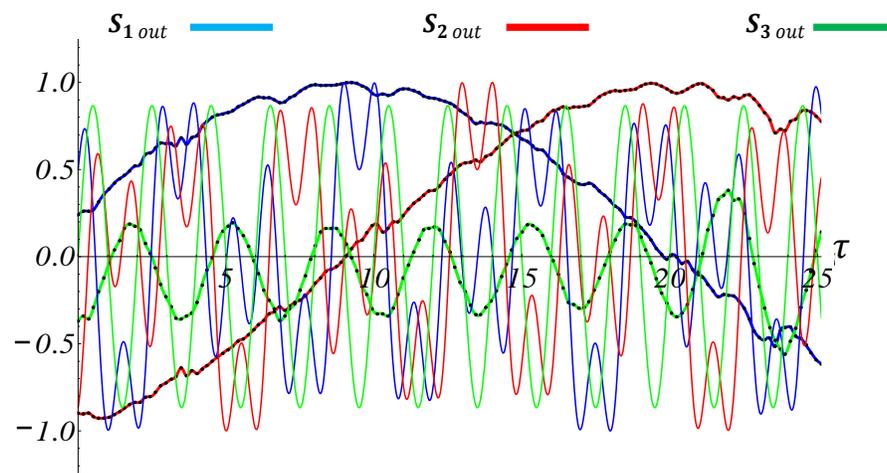


Figura 57. Gráfica que muestra el ajuste del parámetro b en las curvas teóricas.

Una vez ajustado el parámetro b , el sistema seguirá completamente desajustado, el punto importante de la metodología de ajuste es que siempre se utilizará como referencia la curva del parámetro de Stokes S_3 (experimental y teórico). Esto es debido a que S_3 siempre presenta la forma de una sinusoidal perfecta, en la cual solo se puede alterar su amplitud, fase y su frecuencia. En ningún caso S_3 dejará de ser una función sinusoidal.

- b) Parámetro μ : El paso inicial para ajustar el parámetro S_3 con S_{3e} es igualar sus amplitudes, de la sección 3.6.1 se sabe que para conseguir este ajuste se debe utilizar el parámetro μ , es muy posible que al ajustar las amplitudes se incremente la frecuencia de los parámetros S_1 y S_2 . Una vez ajustado S_3 se realizó su respectiva gráfica (ver Figura 58).
- c) Parámetro θ : De acuerdo a la Figura 58 se puede ver claramente que los valores pico de ambas curvas de S_3 son diferentes, por lo cual el próximo ajuste que se

debe realizar es poner en sintonía los picos de S_3 teórico con los de S_{3e} (experimental). Para realizar este ajuste se sabe que el parámetro indicado es θ . Como resultado de este ajuste, el cambio en el parámetro de Stokes S_3 teórico se puede observar en la gráfica mostrada en la Figura 59.

- d) Parámetro c : De acuerdo a la Figura 59, se puede apreciar que aunque los valores pico de ambos parámetros de Stokes S_3 son casi iguales, su frecuencia es diferente, por lo tanto se utilizó el parámetro c para ajustar su frecuencia; consecuentemente la frecuencia en los parámetros de Stokes S_1 y S_2 también sufrió cambios y se empezaron a parecer a sus correspondientes curvas experimentales. La Figura 60 muestra la gráfica resultado de este procedimiento.

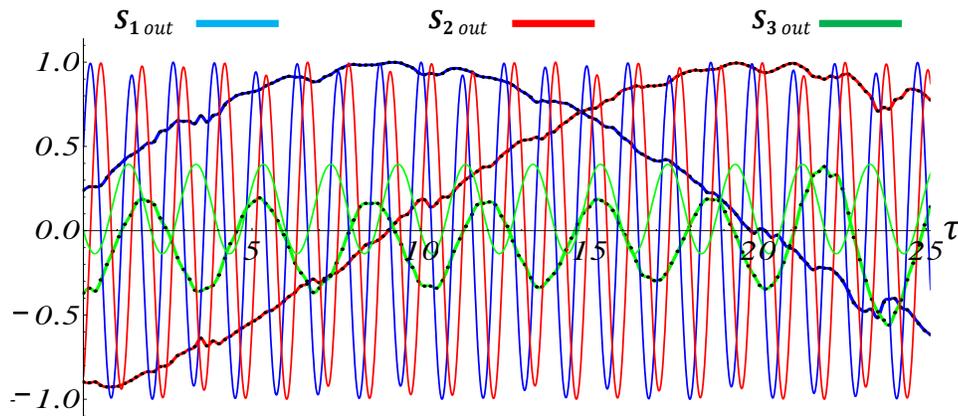


Figura 58. Gráfica que muestra el ajuste de los parámetros b y μ en las curvas teóricas.

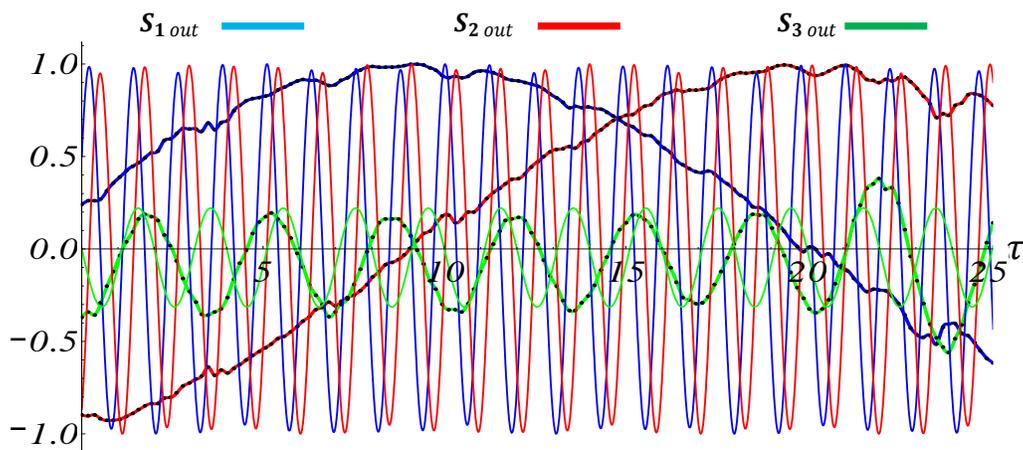


Figura 59. Gráfica que muestra el ajuste de los parámetros b , μ y θ en las curvas teóricas.

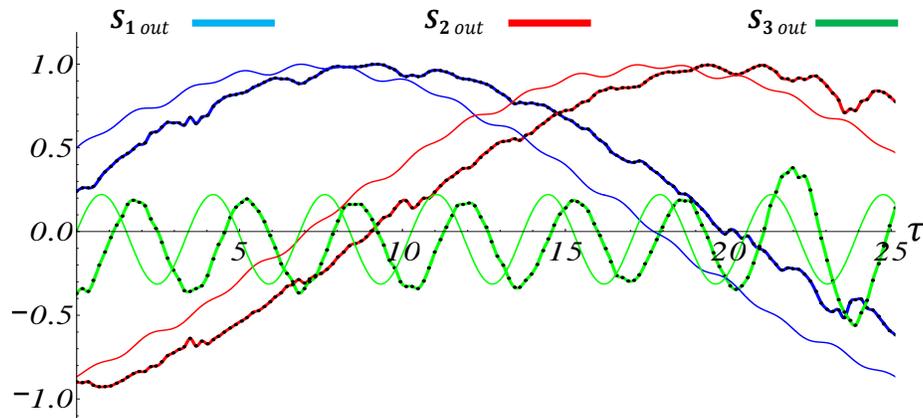


Figura 60. Gráfica que muestra el ajuste de los parámetros b , μ , θ y c en las curvas teóricas.

- e) Parámetro δ_0 : Al observar detenidamente la gráfica mostrada en la Figura 60 se puede apreciar que la frecuencia de ambos parámetros de Stokes S_3 son muy similares, pero están desfasadas una con respecto de la otra. También existe un desfase en los parámetros de Stokes S_1 y S_2 . Utilizando los conocimientos adquiridos en la sección 3.6.1 de los seis parámetros se utilizó δ_0 , ya que este parámetro permite el ajuste en la frecuencia de la curva S_3 . La Figura 61 muestra la gráfica obtenida para este procedimiento.

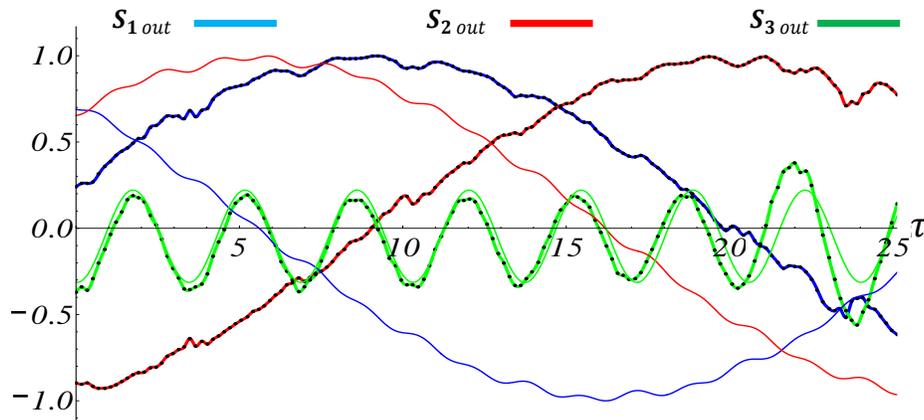


Figura 61. Gráfica que muestra el ajuste de los parámetros b , μ , θ , c y δ_0 en las curvas teóricas.

- f) Parámetro ζ : De acuerdo a la gráfica de la Figura 61 se puede observar que la curva teórica de S_3 ya está ajustada a los valores experimentales. Por último solo es necesario ajustar las curvas correspondientes a S_1 y S_2 . Sabiendo que el parámetro ζ es capaz de crear un desplazamiento en los parámetros de Stokes S_1 y S_2 se finalizó esta metodología de ajuste con este parámetro y se obtuvo finalmente una gráfica ajustada (ver Figura 62).

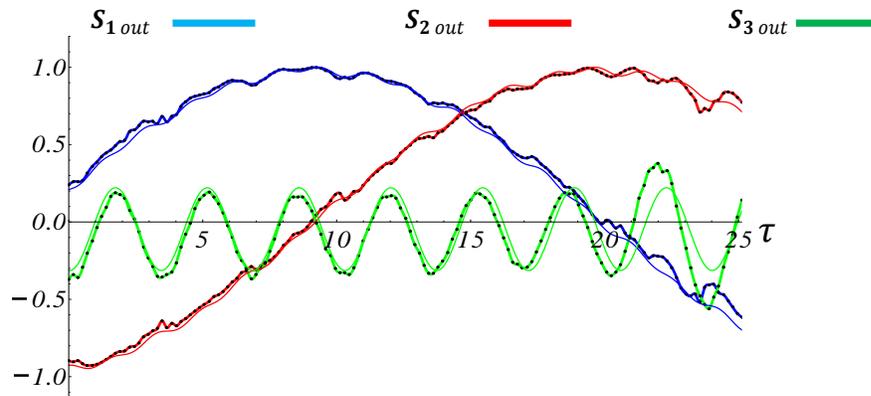


Figura 62. Gráfica que muestra el ajuste final de los parámetros $b, \mu, \theta, c, \delta_0$ y ζ en las curvas teóricas.

En resumen, la metodología utilizada para el ajuste de las curvas teóricas contra las experimentales, se base en la siguiente secuencia de ajuste de las variables: $b, \mu, \theta, c, \delta_0$ y ζ . La Figura 63 muestra la interfaz del programa de cálculos matemáticos “Mathematica”, utilizado para realizar los ajustes numéricos. El valor numérico de cada parámetro se puede variar al desplazar el cursor correspondiente.

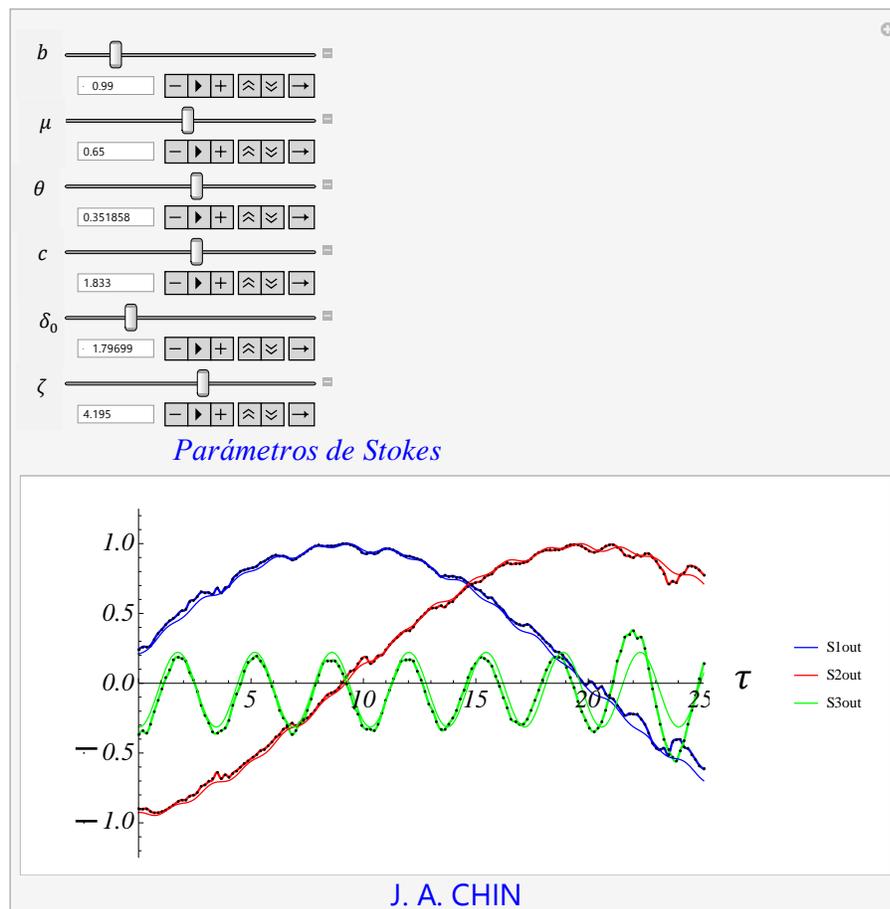


Figura 63. Interfaz gráfica desarrollada para los ajustes teóricos.

3.7 Mediciones experimentales y análisis de resultados

Las gráficas obtenidas a partir de las mediciones experimentales fueron ajustadas utilizando el modelo matemático descrito en este capítulo 3. Cabe destacar que se realizaron un gran número de mediciones experimentales, pero para no hacer muy extenso el trabajo solo se seleccionaron algunas de ellas.

Una vez realizados los ajustes de los parámetros, se graficaron los valores experimentales y los valores teóricos simultáneamente. Como resultado se obtuvieron las gráficas de los parámetros de Stokes de salida (teóricas y experimentales) a partir de las cuales se realizará el análisis pertinente de los resultados.

Las fibras a las que se les aplicó el ajuste fueron las mismas fibras descritas en el apartado 3.1, las cuales son:

- Bow-tie (32 mediciones realizadas)
- Panda (32 mediciones realizadas)
- Elíptica (32 mediciones realizadas)
- Monomodo (48 mediciones realizadas)

3.7.1 Mediciones en la fibra Bow-tie

Las mediciones realizadas en la fibra Bow-tie (HB1500T) se tomaron para cuatro longitudes de onda (λ), y para cada una de ellas se utilizaron cuatro ángulos azimutales (ϕ). En todos los casos mencionados anteriormente se tomaron mediciones para torsión positiva ($+\tau$) y negativa ($-\tau$).

A la mayoría de las mediciones de esta fibra se les aplicó el ajuste teórico, pero en este trabajo se seleccionaron las mediciones para $\lambda = 1530 \text{ nm}$, y cuatro ángulos azimutales (ϕ) de la polarización de entrada del arreglo óptico, como puede verse en la Tabla 11. Los valores numéricos de cada parámetro del modelo que fueron encontrados por medio de los ajustes se pueden ver en la Tabla 10, los cuales fueron exactamente los mismos para cada ángulo azimutal.

Tabla 10. Valores numéricos para los ajustes de la fibra HB1500T a una longitud de onda de 1530 nm.

Parámetros del modelo	Torsión positiva			
	20°	50°	80°	110°
ϕ	20°	50°	80°	110°
b	0.345	0.345	0.345	0.345
θ	-74.1602°	-74.1602°	-74.1602°	-74.1602°
ζ	0°	0°	0°	0°
μ	42.1124°	42.1124°	42.1124°	42.1124°
c	-2.69	-2.69	-2.69	-2.69
$\delta 0$	-15.59437°	-15.59437°	-15.59437°	-15.59437°

Las cuatro gráficas mostradas en la Figura 64 corresponden a la sustitución de los parámetros de la Tabla 10 en el modelo matemático. Estas gráficas describen el comportamiento de la fibra Bow-tie al aplicar en ella una torsión de 720° .

Para ver el comportamiento de estas fibras ante la torsión desde una vista tridimensional (espacio) se utilizó la esfera de Poincaré, en este caso solo se graficó el ajuste para un ángulo azimutal ya que el comportamiento fue similar para todos los ángulos azimutales. Esta gráfica es la mostrada en la Figura 65.

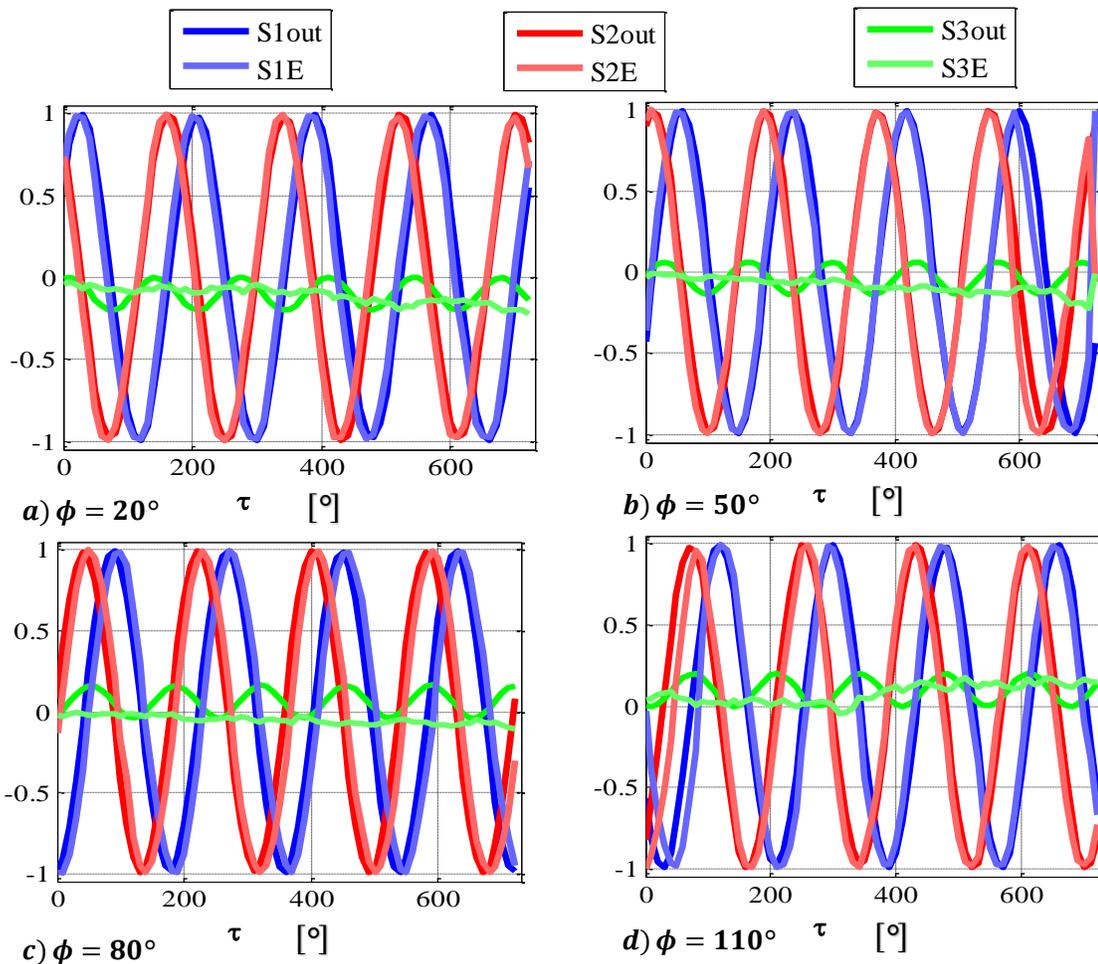


Figura 64. Ajustes para la fibra HB1500T, torsión positiva y a una longitud de onda de 1530 nm . a) $\phi = 20^\circ$, b) $\phi = 50^\circ$, c) $\phi = 80^\circ$, d) $\phi = 110^\circ$.

Analizando los ajustes tanto en las gráficas de los parámetros de Stokes de salida (ver Figura 64) como en la gráfica de la esfera de Poincaré (Figura 65), se puede ver que los resultados presentan un notable parecido en los parámetros de Stokes S_1 y S_2 , exceptuando las gráficas representadas por los incisos “b y d” de la Figura 64, las cuales no presentan un ajuste tan bueno como las demás. Esto se presenta para una alta torsión

en la gráfica del inciso “b” ($\phi = 50^\circ$) y para una baja torsión en la gráfica del inciso “d” ($\phi = 110^\circ$).

Analizando el parámetro S_3 podemos ver que presenta algunas variaciones pero siempre oscilando cerca de cero. Cabe señalar que idealmente este debería ser su valor, ya que estas fibras están diseñadas para mantener la polarización lineal ante las perturbaciones, que en nuestro caso fueron torsiones. Al estar trabajando con luz linealmente polarizada estas fibras tratarán de que la luz no salga del ecuador. Esta es la causa por la cual S_3 que indica que tan circular es la polarización se aproxime a cero.

De acuerdo al diagrama del sentido (signo) de los esfuerzos en una fibra Bow-tie (ver Figura 66) podemos darnos una idea de que probablemente el torcer esta estructura tan complicada puede ser la causa de las variaciones tan señaladas en el parámetro de Stokes S_3 .

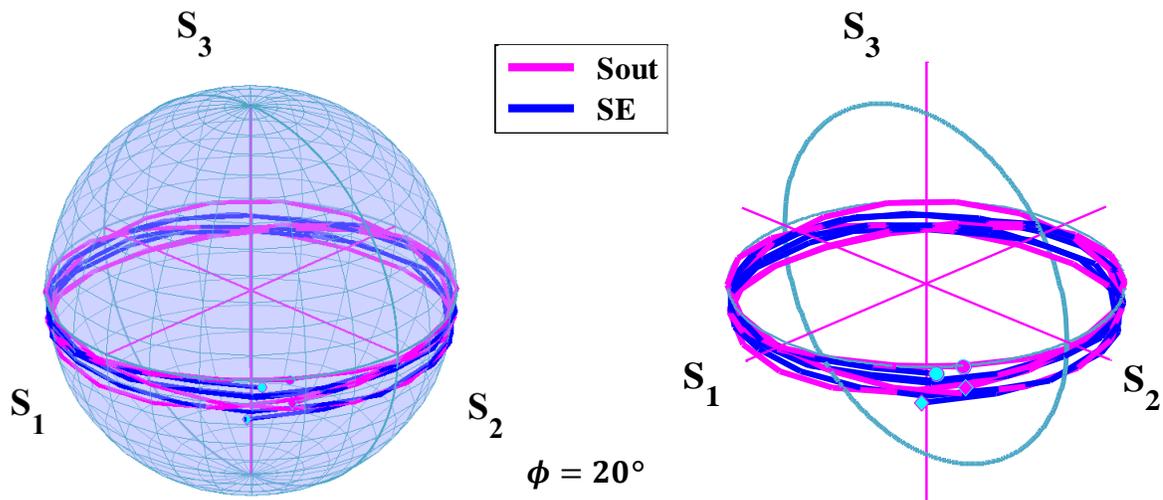


Figura 65. Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 20^\circ$ en la fibra HB1500T, torsión positiva y longitud de onda de 1530 nm.

En el caso de la gráfica de la Figura 65 (esfera de Poincaré) podemos ver más claramente como la polarización gira muy cerca del ecuador al aplicar la torsión en la fibra. Esta trayectoria de la polarización describe una trocoide acortada moviéndose alrededor de la esfera de Poincaré. Esta trocoide acortada describe su movimiento entre límites de libramiento aproximadamente de 0° a 12° en la esfera de Poincaré.

Además se muestra una gráfica de la evolución de la polarización en la cual se removió la esfera (ver Figura 65). Con esto se corroboró más claramente que los ajustes teóricos realizados fueron de buena calidad.

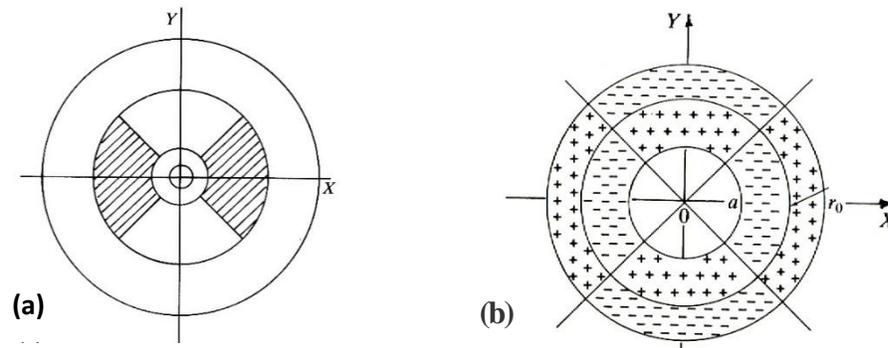


Figura 66. Diagrama de los esfuerzos en una fibra birrefringente Bow-tie.

3.7.2 Mediciones en la fibra Panda

Las mediciones realizadas en la fibra Panda (PM1550 HP) se tomaron para cuatro longitudes de onda (λ), y para cada una de ellas se utilizaron cuatro ángulos azimutales (ϕ). En todos los casos mencionados anteriormente se tomaron mediciones para torsión positiva ($+\tau$) y negativa ($-\tau$) tal como en la fibra Bow-tie.

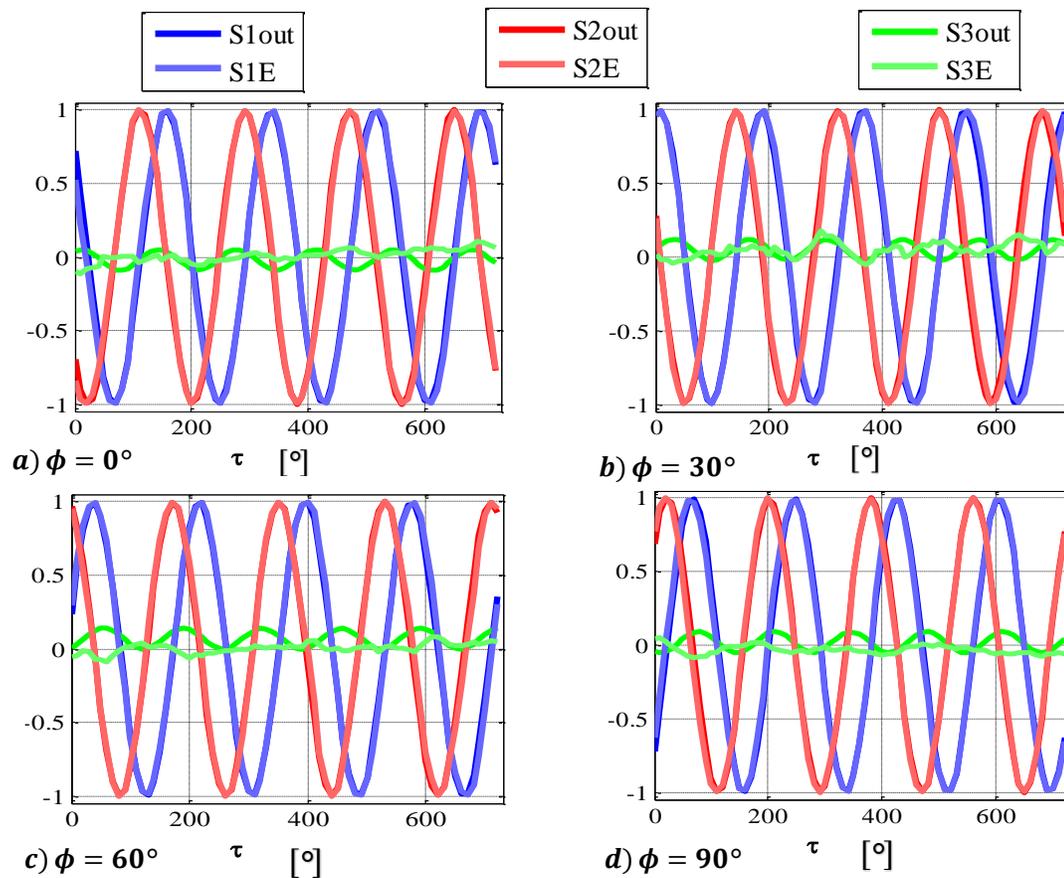


Figura 67. Ajustes para la fibra PM1550HP, torsión positiva y a una longitud de onda de 1550 nm. a) $\phi = 0^\circ$, b) $\phi = 30^\circ$, c) $\phi = 60^\circ$, d) $\phi = 90^\circ$.

Para este tipo de fibra se llevó a cabo un procedimiento similar al realizado en la fibra Bow-tie, debido a que se utilizó una sola longitud de onda, sin embargo esta fue diferente a la utilizada en la fibra Bow-tie y se graficaron cuatro ángulos azimutales pero de diferente valor (ver Tabla 11). Estas gráficas son las mostradas en la Figura 67, las cuales se obtuvieron a partir de los valores numéricos descritos en la Tabla 11, que fueron exactamente los mismos para cada ángulo azimutal (ϕ).

Tabla 11. Valores numéricos para los ajustes de la fibra PM1550HP a una longitud de onda de 1550 nm.

Parámetros del modelo	Torsión positiva			
	0°	30°	60°	90°
ϕ	0°	30°	60°	90°
b	0.34	0.34	0.34	0.34
θ	53.28°	53.28°	53.28°	53.28°
ζ	-0.359989°	-0.359989°	-0.359989°	-0.359989°
μ	42.9718°	42.9718°	42.9718°	42.9718°
c	-2.69	-2.69	-2.69	-2.69
$\delta 0$	44.6391°	44.6391°	44.6391°	44.6391°

Para este caso también se utilizó la gráfica de los parámetros de Stokes en la esfera de Poincaré. Las gráficas fueron muy similares por lo tanto solo se graficó el ajuste para un ángulo azimutal. Esta gráfica se puede ver en la Figura 68.

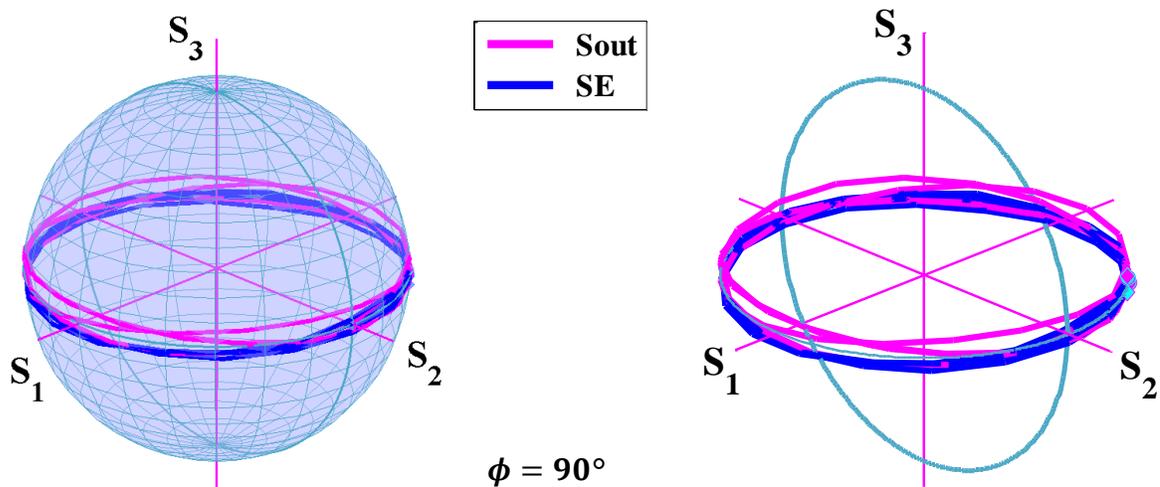


Figura 68. Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 90^\circ$ en la fibra PM1550HP, torsión positiva y longitud de onda de 1550 nm.

Los ajustes realizados a esta fibra fueron muy buenos, y en gran medida parecidos a los de la fibra Bow-tie. Estas fibras presentan comportamientos similares ya que en principio se han desarrollado para conseguir un mismo fin el cual es mantener el estado de polarización.

Es importante destacar el hecho de que los ajustes realizados para esta fibra (Figura 67) fueron mejores en comparación con los de la fibra Bow-tie (Figura 64), ya que la semejanza en los parámetros de Stokes S_1 y S_2 fue casi perfecta mientras que en la Bow-tie presentaba algunas imperfecciones.

Analizando el parámetro de Stokes S_3 podemos ver que presenta variaciones similares a las descritas en la fibra Bow-tie. Sin embargo a pesar de que mecánicamente por la estructura de la fibra Panda, S_3 debería ser más inestable que la Bow-tie. Esto no se aprecia en las gráficas obtenidas, en las cuales se obtuvo que en la fibra Panda S_3 presentó variaciones más pequeñas.

Para el ajuste de esta fibra se obtuvo una pequeña fase topológica (ζ), pero por su valor tan pequeño se debe a las variaciones de S_3 .

Para esta fibra se observó en la esfera de Poincaré (Figura 68) como la polarización gira muy cerca del ecuador al aplicar la torsión en la fibra. Esta trayectoria de la polarización describe una trocoide acortada moviéndose alrededor de la esfera de Poincaré. Esta trocoide presentó límites de libramiento aproximadamente de 0° a 6° , menor al mostrado en la fibra Bow-tie.

3.7.3 Mediciones en la fibra elíptica

Para el caso de la fibra elíptica (FSPM6621) se realizaron ajustes para cuatro longitudes de onda, pero en este caso la presentación de los ajustes fue diferente, ya que para cada longitud de onda se seleccionaron algunos ángulos azimutales y sentidos de la torsión en las mediciones. El diseño de las gráficas fue similar a las realizadas en las fibras descritas anteriormente, solo que en este caso describen el comportamiento de la fibra elíptica al aplicar en ella una torsión de 1080° .

Tabla 12. Valores numéricos para los ajustes de la fibra FSPM6621, a $\phi = 30^\circ$ y $\lambda = 1525 \text{ nm}$.

Parámetros del modelo	$\phi = 30^\circ$ Torsión positiva
ϕ	30°
b	0.34
θ	87.8402°
ζ	0°
μ	45.8366°
c	-2.69
$\delta 0$	45.8366°

Para la longitud de onda de 1525 nm se realizó el ajuste solo para un ángulo azimutal, el cual puede verse en la gráfica de la Figura 69. De la misma manera se graficó el ajuste en la esfera de Poincaré

(ver Figura 70). Para llevar a cabo las gráficas de los ajustes se utilizaron los valores mostrados en la Tabla 12.

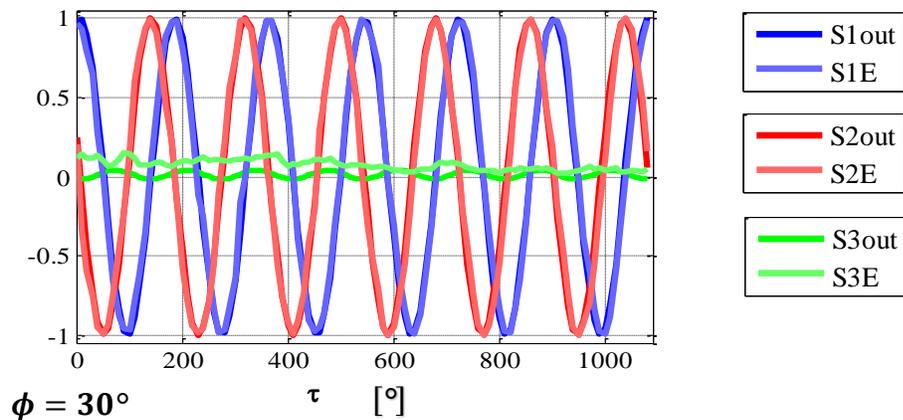


Figura 69. Ajustes para la fibra FSPM6621, torsión positiva a una longitud de onda de 1525 nm.

La fibra elíptica pertenece a la familia de las fibras birrefringentes por lo cual no es de extrañarse el gran parecido con las gráficas obtenidas en las fibras Panda y Bow-tie. En la Figura 69 podemos observar el ajuste para una medición el cual es de muy buena calidad en los parámetros de Stokes S_1 y S_2 , mientras que para S_3 se presentan las variaciones ya encontradas en las fibras anteriores.

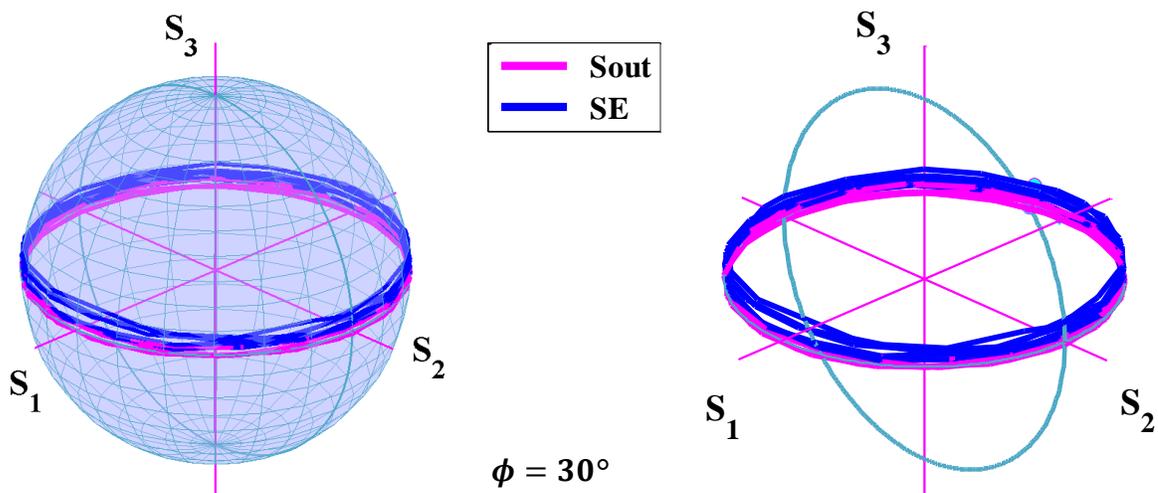


Figura 70. Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 30^\circ$ en la fibra FSPM6621, torsión positiva y longitud de onda de 1525 nm.

Para la longitud de onda de 1540 nm se realizaron los ajustes solo para un ángulo azimutal, pero en torsión positiva y negativa. Estos ajustes se pueden ver en las gráficas de la Figura 71, para los cuales

se utilizaron los valores mostrados en la Tabla 13, los cuales fueron exactamente los mismos para ambos tipos de torsión.

Tabla 13. Valores numéricos para los ajustes de la fibra FSPM6621 a una longitud de onda de 1540 nm.

$\phi = 60^\circ$ torsión (+) y (-)		
Parámetros del modelo	Torsión negativa	torsión positiva
ϕ	60°	60°
b	0.34	0.34
θ	-84.9599°	-84.9599°
ζ	0°	0°
μ	45.8366°	45.8366°
c	-2.69	-2.69
δ_0	45.8366°	180.482°

En las gráficas mostradas en la Figura 71 se puede observar la simetría que existe entre la medición para un mismo ángulo azimutal, pero para ambos sentidos de la torsión aplicada en las fibras. Se puede ver la continuidad que existe entre ambas es decir que casi se puede conseguir una sola grafica con solo juntar ambas.

El comportamiento de esta fibra fue muy repetitivo manteniendo constancia en los parámetros, sin importar el sentido de la torsión o el valor del ángulo azimutal.

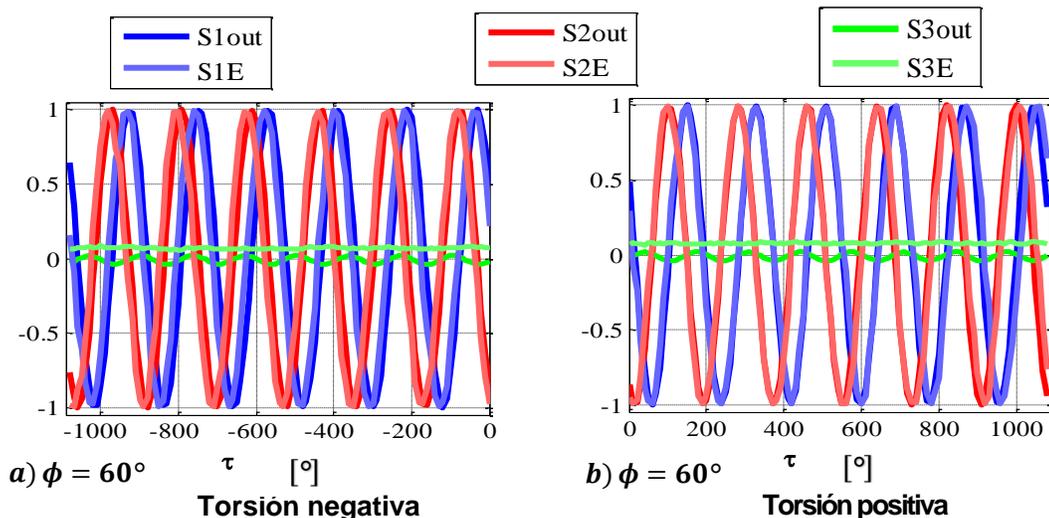


Figura 71. Ajustes para la fibra FSPM6621 a una longitud de onda de 1540 nm. a) $\phi = 60^\circ (-\tau)$, b) $\phi = 60^\circ (+\tau)$.

Para la longitud de onda de 1550 nm se realizaron los ajustes para dos ángulos azimutales. Estos ajustes se pueden ver en las gráficas de la Figura 72, para los cuales se utilizaron los valores mostrados en la Tabla 14.

Tabla 14. Valores numéricos para los ajustes de la fibra FSPM6621 a una longitud de onda de 1550 nm.

Parámetros del modelo	Torsión positiva	
	0°	90°
ϕ	0°	90°
b	0.34	0.34
θ	-12.24°	-12.24°
ζ	0°	0°
μ	45.8366°	45.8366°
c	-2.69	-2.69
$\delta 0$	244.08°	244.08°

De las gráficas de la Figura 72, las cuales se realizaron para dos ángulos azimutales diferentes, se obtuvo un ajuste notable de las gráficas, destacando el hecho de que los parámetros utilizados fueron exactamente los mismos para ambos ángulos azimutales (ϕ). El comportamiento de los parámetros de Stokes de estas gráficas es similar al comportamiento antes visto en las fibras Panda y Bow-tie.

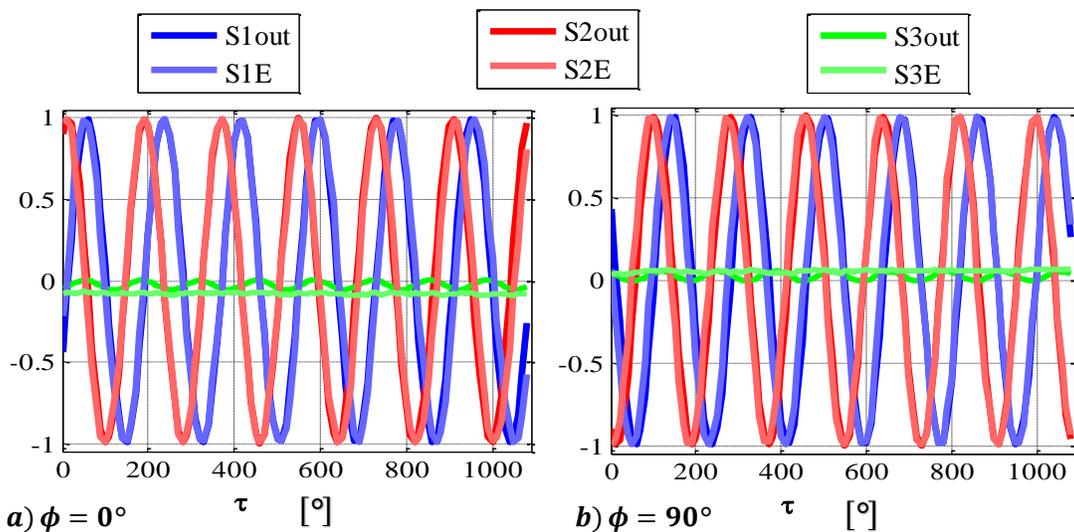


Figura 72. Ajustes para la fibra FSPM6621, torsión positiva y a una longitud de onda de 1550 nm. a) $\phi = 0^\circ$, b) $\phi = 90^\circ$.

Para los ajustes de las mediciones a una longitud de onda de 1565 nm se llevó a cabo un procedimiento similar al realizado en los ajustes de la longitud de onda de 1540 nm. La diferencia fue que este caso se utilizaron dos ángulos azimutales en torsión positiva y esos mismos ángulos se utilizaron en torsión negativa.

Estos ajustes se pueden ver en las gráficas de la Figura 73, para los cuales se utilizaron los valores numéricos mostrados en la Tabla 15, los cuales fueron exactamente los mismos para ambos ángulos azimutales (ϕ) y ambos sentidos de la torsión.

Tabla 15. Valores numéricos para los ajustes de la fibra FSPM6621 a una longitud de onda de 1565 nm.

Parámetros del modelo	$\phi = 0^\circ$ y 90° torsión (+) y (-)			
	torsión negativa	torsión positiva	torsión negativa	torsión positiva
ϕ	0°	0°	90°	90°
b	0.34	0.34	0.34	0.34
θ	-84.9599°	-84.9599°	-84.9599°	-84.9599°
ζ	0°	0°	0°	0°
μ	45.8366°	45.8366°	45.8366°	45.8366°
c	-2.69	-2.69	-2.69	-2.69
$\delta 0$	234.913°	234.913°	234.913°	234.913°

En este caso se retomó el uso de la gráfica en la esfera de Poincaré para visualizar si el comportamiento que se había estado presentando en este tipo de fibras (birrefringentes) fuera similar. Como resultado se observó el mismo comportamiento, es decir la polarización de salida gira muy cerca del ecuador el cual representa polarización lineal, estas gráficas se pueden ver en la Figura 74.

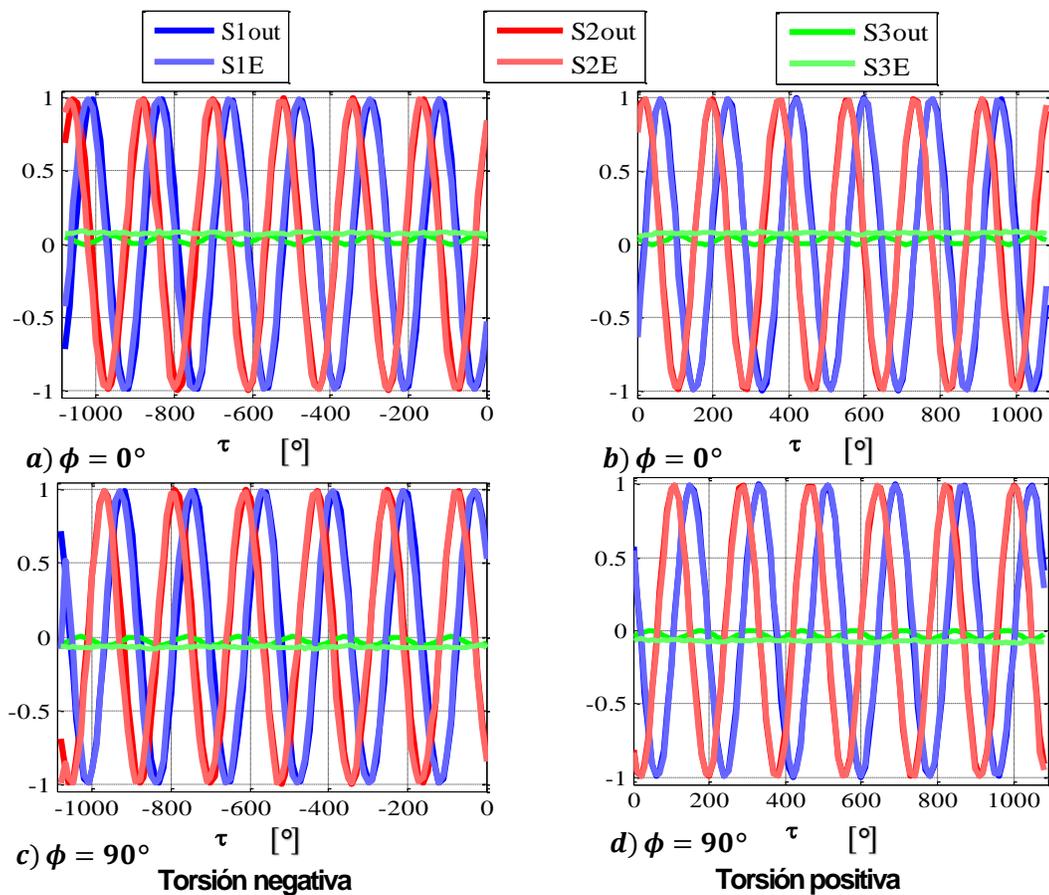


Figura 73. Ajustes para la fibra FSPM6621 a una longitud de onda de 1565 nm. a) $\phi = 0^\circ$ ($-\tau$), b) $\phi = 0^\circ$ (τ), c) $\phi = 90^\circ$ ($-\tau$), d) $\phi = 90^\circ$ (τ).

Los ajustes realizados a esta fibra fueron notablemente buenos (al igual que en las fibras analizadas anteriormente), estas fibras presentan comportamientos similares, en cierta forma sería muy difícil poder distinguir entre las gráficas de cada una de las fibras birrefringentes por su enorme parecido entre ellas.

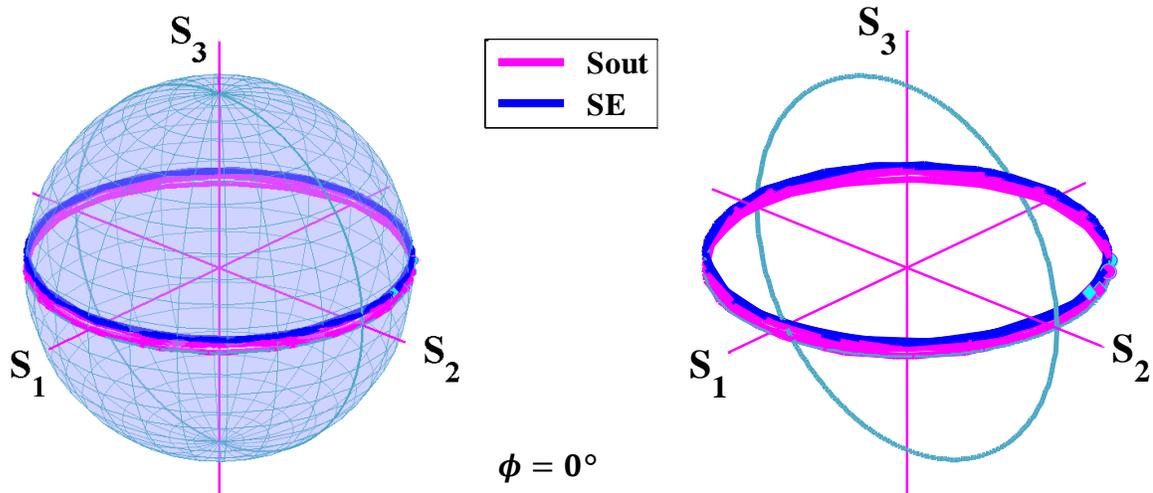


Figura 74. Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 0^\circ$ en la fibra FSPM6621, torsión positiva y longitud de onda de 1565 nm .

Las gráficas obtenidas en esta fibra presentan la forma de una trocoide acortada, que casi degenera en un círculo que gira alrededor del ecuador en la esfera de Poincaré, por lo cual se sabe que su límite de libramiento es muy pequeño (aproximadamente 3°).

Para esta fibra se observó en la gráfica de la esfera de Poincaré como la polarización obtenida teóricamente gira sobre el ecuador de manera muy semejante al comportamiento de la polarización obtenida por medio de las mediciones experimentales, con lo cual se observó que estos ajustes son los mejores entre las tres fibras birrefringentes analizadas.

3.7.4 Mediciones en fibra SMF28

En el caso de la fibra monomodo se realizó un trabajo más exhaustivo en cuanto a la cantidad de mediciones experimentales realizadas. Para esta fibra se tomaron mediciones para cuatro longitudes de onda (λ), y para cada una de ellas se utilizaron seis ángulos azimutales (ϕ). En todos los casos mencionados anteriormente se tomaron mediciones para torsión positiva ($+\tau$) y negativa ($-\tau$).

Debido a que la cantidad de mediciones, fue mayor el número de ajustes numéricos seleccionados también fue mayor. Para esta fibra se seleccionaron dos longitudes de onda (1525 nm y 1545 nm), en una de ellas se ajustaron seis ángulos azimutales para un sentido positivo de la torsión, y para la otra

longitud de onda se realizaron los mismos ajustes pero para ambos sentidos de la torsión (positivo y negativo). Se mantuvo el diseño de las gráficas con respecto a las realizadas en los procedimientos anteriores, solo que en este caso describen el comportamiento de la fibra SMF-28 al aplicar en ella una torsión de 1440° .

Tabla 16. Valores numéricos para los ajustes de la fibra SMF-28 a una longitud de onda de 1525 nm .

Parámetros del modelo	Torsión positiva					
	0°	30°	60°	90°	120°	150°
ϕ	0°	30°	60°	90°	120°	150°
b	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992
θ	45.8366°	45.8366°	45.8366°	45.8366°	45.8366°	45.8366°
ζ	170.168°	170.168°	170.168°	170.168°	170.168°	170.168°
μ	33.2316°	33.2316°	33.2316°	33.2316°	33.2316°	33.2316°
c	-1.84	-1.84	-1.84	-1.84	-1.84	-1.84
$\delta 0$	37.2423°	37.2423°	37.2423°	37.2423°	37.2423°	37.2423°

En primera instancia se ajustó la longitud de onda de 1525 nm , y los resultados pueden verse en las gráficas de la Figura 75, las cuales se obtuvieron a partir de los parámetros mostrados en la Tabla 16. Es importante señalar que el valor de los parámetros se mantuvo para todos los ángulos azimutales (ϕ) ajustados.

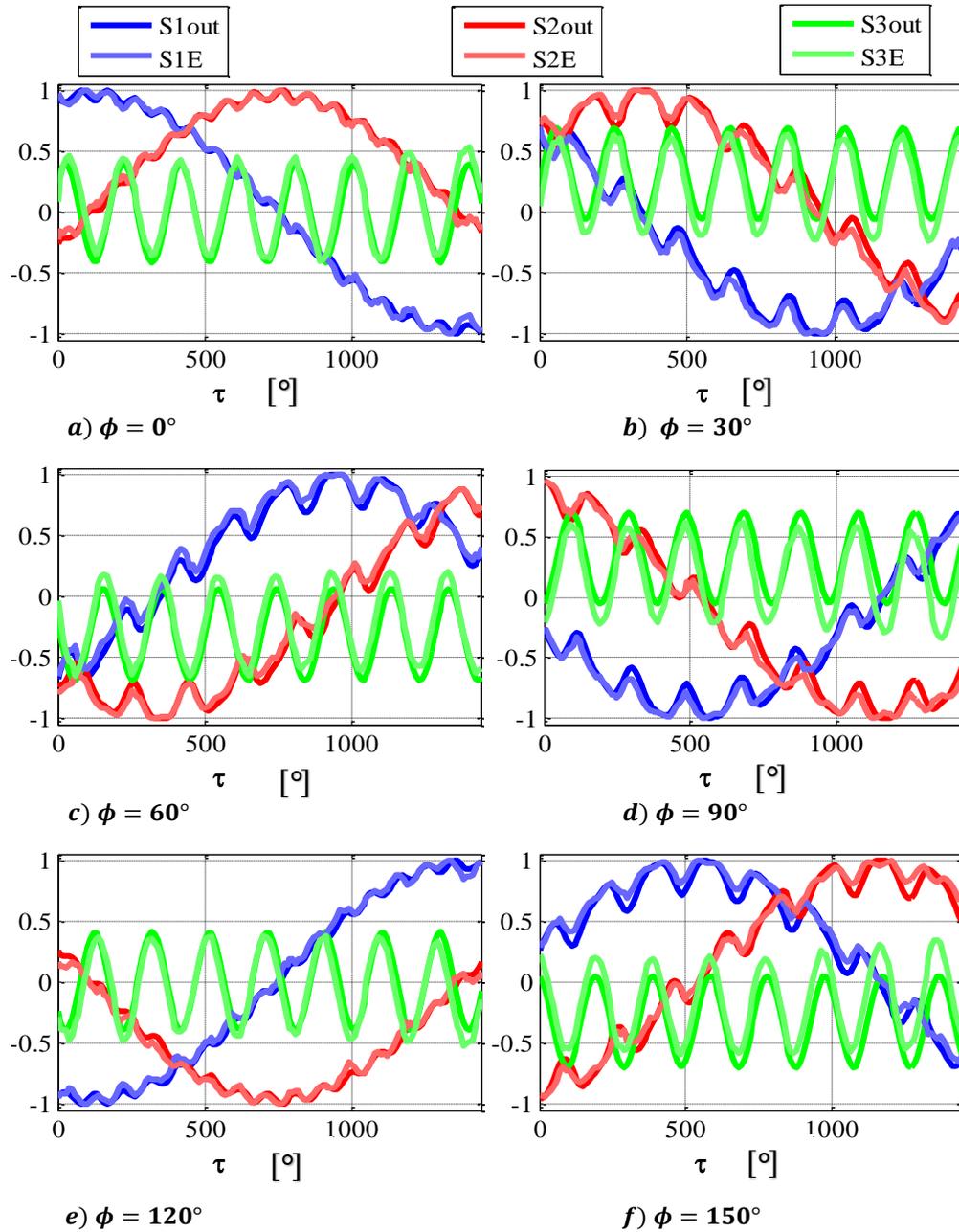
Tabla 17. Valores numéricos para los ajustes de la fibra SMF-28, torsión positiva y $\lambda = 1545 \text{ nm}$.

Parámetros del modelo	Torsión positiva					
	0°	30°	60°	90°	120°	150°
ϕ	0°	30°	60°	90°	120°	150°
b	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992
θ	36.0963°	36.0963°	36.0963°	36.0963°	36.0963°	36.0963°
ζ	173.033°	173.033°	173.033°	173.033°	173.033°	173.033°
μ	34.3775°	34.3775°	34.3775°	34.3775°	34.3775°	34.3775°
c	-1.84	-1.84	-1.84	-1.84	-1.84	-1.84
$\delta 0$	33.8389°	33.8389°	33.8389°	33.8389°	33.8389°	33.8389°

Para el caso de la longitud de onda de 1545 nm los ajustes realizados fueron el doble de los llevados a cabo en la longitud de onda anterior, los resultados de estos ajustes pueden verse en las gráficas de las Figuras 76 y 77, las cuales se obtuvieron utilizando los valores numéricos de los parámetros que se pueden ver en las Tablas 17 y 18, los cuales fueron exactamente los mismos para ambos ángulos azimutales (ϕ) y ambos sentidos de la torsión.

Tabla 18. Valores numéricos para los ajustes de la fibra SMF-28, torsión negativa y $\lambda = 1545 \text{ nm}$.

Parámetros del modelo	Torsión negativa					
ϕ	0°	30°	60°	90°	120°	150°
b	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992
θ	36.0963°	36.0963°	36.0963°	36.0963°	36.0963°	36.0963°
ζ	173.033°	173.033°	173.033°	173.033°	173.033°	173.033°
μ	34.3775°	34.3775°	34.3775°	34.3775°	34.3775°	34.3775°
c	-1.84	-1.84	-1.84	-1.84	-1.84	-1.84
$\delta 0$	33.8389°	33.8389°	33.8389°	33.8389°	33.8389°	33.8389°

Figura 75. Ajustes para la fibra SMF28 a una longitud de onda de 1525 nm. a) $\phi = 0^\circ$, b) $\phi = 30^\circ$, c) $\phi = 60^\circ$, d) $\phi = 90^\circ$, e) $\phi = 120^\circ$, f) $\phi = 150^\circ$.

Es importante señalar que aparentemente las gráficas de las Figuras 76 y 77 son muy pocas, esto es debido a que ambas graficas (torsión positiva y negativa) para cada ángulo azimutal están intencionalmente juntas, este procedimiento surgió con el propósito de verificar la relación que existe entre la misma medición solo con sentidos contrarios de la torsión.

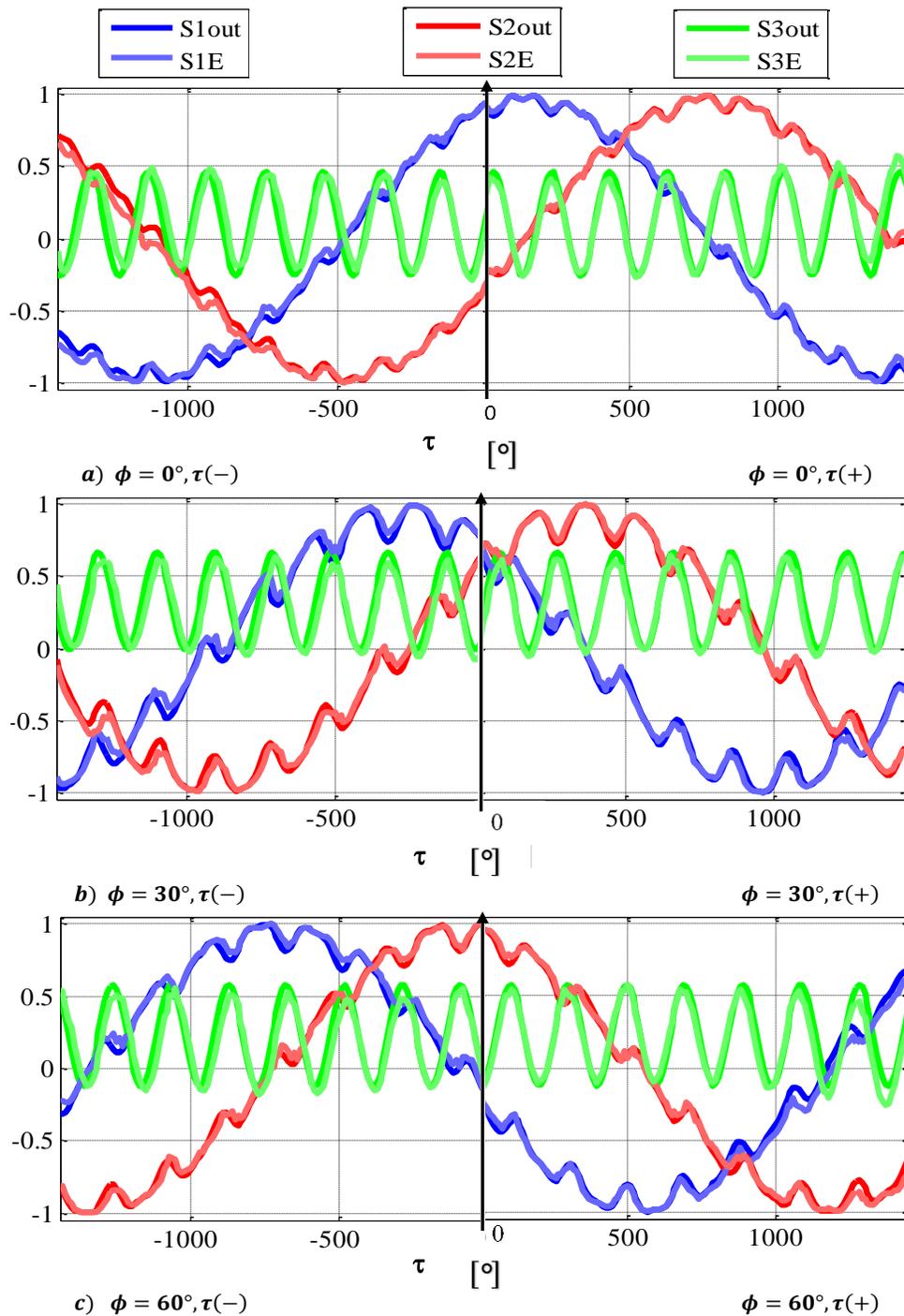


Figura 76. Ajustes para la fibra SMF28 a una longitud de onda de 1545 nm. a) $\phi = 0^\circ (\pm\tau)$, b) $\phi = 30^\circ (\pm\tau)$, c) $\phi = 60^\circ (\pm\tau)$.

Para visualizar en el espacio el comportamiento del vector de Stokes de salida de la fibra, se graficaron en la esfera de Poincaré. Estas gráficas se llevaron a cabo para dos ángulos azimutales diferentes, además de poder utilizarlas como guía para saber qué tan bueno fue el ajuste numérico realizado en la fibra.

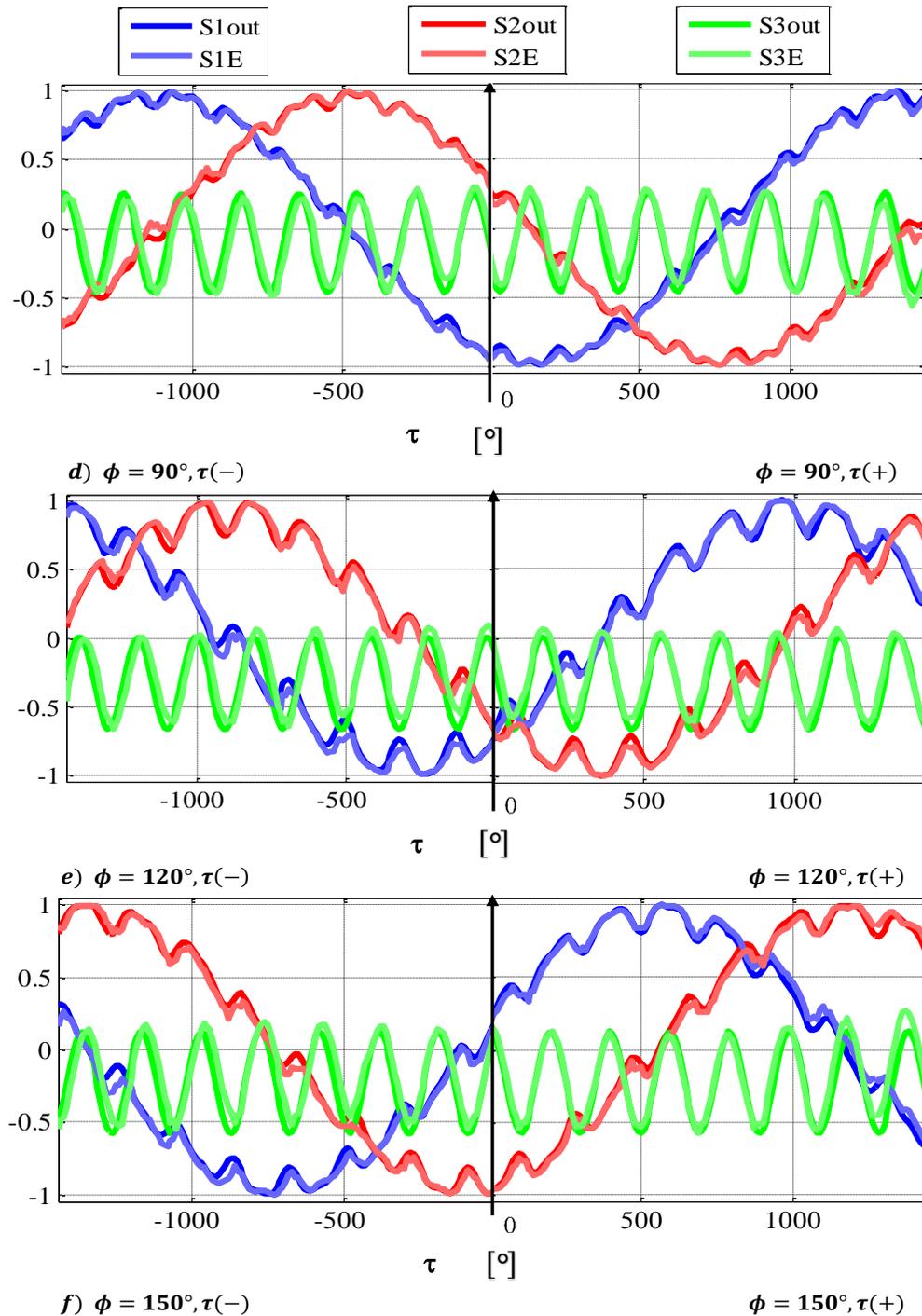


Figura 77. Ajustes para la fibra SMF28 a una longitud de onda de 1545 nm. d) $\phi = 90^\circ (\pm\tau)$, e) $\phi = 120^\circ (\pm\tau)$, f) $\phi = 150^\circ (\pm\tau)$.

Analizando en conjunto las gráficas de los ajustes se puede observar una excelente calidad en el ángulo de cada uno de los parámetros de Stokes, de tal manera que en gran parte de las gráficas es difícil distinguir entre los valores experimentales y los valores teóricos. Ésta deja ver una vez más que el modelo matemático utilizado para este tipo de gráficas presenta resultados destacables.

Otro dato importante que se puede ver en las gráficas de las Figuras 76 y 77, es el hecho de que hay una importante relación entre las mediciones para una torsión negativa y una positiva. Como se puede ver en las gráficas hay continuidad entre ellas, lo que nos deja ver que las fibras SMF28 presentan un comportamiento periódico de los parámetros de Stokes al aplicar en ellas una torsión.

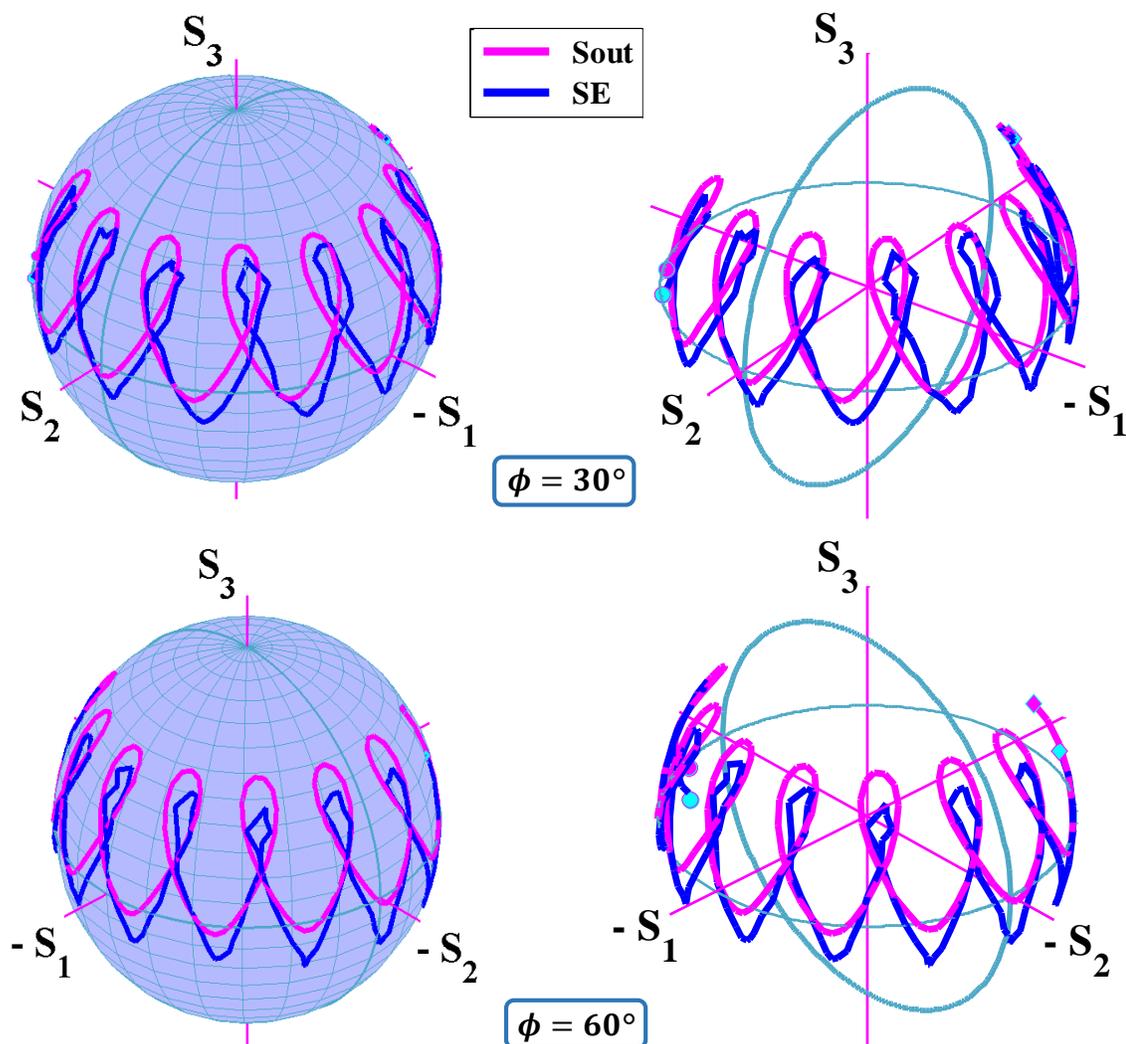


Figura 78. Representación en la esfera de Poincaré para los ajustes $\phi = 30^\circ$ y $\phi = 60^\circ$ en la fibra SMF28, torsión positiva y longitud de onda de 1525 nm .

Basándonos en las gráficas de la Figura 78 podemos ver que para el caso de la fibra monomodo la trayectoria descrita por el comportamiento de la polarización en la esfera de Poincaré tiene la forma de una trocoide alargada, un caso diferente a los vistos anteriormente en las fibras birrefringentes.

Estas trocoides presentan un límite de libramiento de aproximadamente 75° , el cual es aproximadamente el mismo entre la gráfica teórica y la gráfica experimental, pero están desplazadas aproximadamente 7° una de otra.

Finalmente se puede ver en los resultados encontrados que existe una gran diferencia entre las gráficas para las fibras monomodo y las fibras birrefringentes. En primera instancia las fibras monomodo al no tener ninguna estructura o mecanismo para mantener la polarización presentan una mayor libertad de las variaciones de los parámetros de Stokes de la polarización de salida del sistema. Mientras que las fibras birrefringentes son más discretas en cuanto a variaciones. Como ejemplo podemos hablar del parámetro S_3 que en estas fibras no presenta muchas variaciones, pero hay que tomar en cuenta que estas fibras son más sensibles a vibraciones o cambios bruscos de temperatura.

Es importante aclarar que en todas las mediciones realizadas (incluyendo a la fibra dicróica) el grado de polarización DP se mantuvo muy alto (97 % aproximadamente).

Capítulo 4. Fibras ópticas con absorción

4.1 Conceptos básicos

La absorción de algún estado de polarización en un material es conocida como dicroísmo, dicromatismo o diatenuación.

El dicroísmo es la propiedad de algunos materiales de mostrar absorción selectiva de algún estado de polarización durante la propagación de la luz en el medio. Los medios dicroicos tienen dos modos de propagación con diferentes coeficientes de absorción. El dicroísmo fue observado por primera vez en el siglo XIX en cristales de turmalina, los cuales debido a la absorción de la radiación óptica cambian de color. Por esta razón el fenómeno fue denominado dicroísmo (dos colores). En el siglo XX, con el desarrollo de la teoría de los centros de color, el término fue utilizado también para describir las propiedades de color. El término dicromatismo tiene el mismo significado que dicroísmo, pero además de designar los dos conceptos mencionados, se utiliza en medicina para designar la patología de una persona que solo percibe dos colores primarios y en zoología para diferenciar el sexo en algunos animales. El término diatenuación no es ambiguo y se define como la propiedad de un material que cambia el valor de su transmitancia dependiendo del estado de polarización que le incide, esto es, tiene el mismo significado que dicroísmo (cuando este se refiere a la polarización) pero está definido en términos de la transmitancia y no de la absorción.

En óptica, el dicroísmo puede ser lineal (Figura 79), circular (Figura 80) o elíptico.

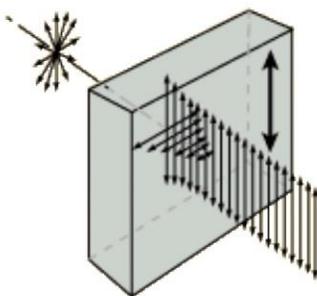


Figura 79. Dicroísmo lineal.

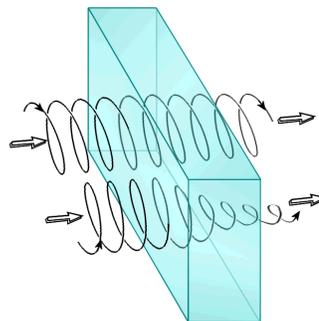


Figura 80. Dicroísmo circular.

La absorción (isotrópica) en un material esta descrita por la ley de Beer (o Beer-Lambert) la cual propone que la absorbancia de una muestra a determinada longitud de onda depende de la cantidad de especie absorbente con la que se encuentra la luz al pasar una distancia z por la muestra (E. Hecht, and A. Zajac, 2003), y se expresa matemáticamente por

$$I_2 = I_1 e^{-z \alpha_{ln}} , \quad (175)$$

$$\therefore \alpha_{ln} = -\frac{1}{z} \ln \left(\frac{I_2}{I_1} \right) , \quad (176)$$

donde α_{ln} [m^{-1}] es el coeficiente de absorción isotrópica en intensidad (en base e), $I_1 > I_2$ son las intensidades luminosas de entrada y salida del medio. El coeficiente de absorción también es llamado coeficiente de atenuación o coeficiente de extinción aunque no siempre los expresan exactamente igual. En particular el coeficiente de extinción es muy utilizado como una medida (figura de mérito) que relaciona a los coeficientes de absorción lineal $\left(\frac{\alpha_y}{\alpha_x} \right)$. Algunos autores expresan esta ley con logaritmos en base 10 (log),

$$I_2 = I_1 10^{-z \alpha_{lo}} , \quad (177)$$

donde α_{lo} [m^{-1}] es el coeficiente de absorción tomado en base decimal. Está claro que deben cumplir con $\alpha_{lo} = \ln(10) \alpha_{ln} = 2.3 \alpha_{ln}$. Muchos fabricantes expresan la absorción α_{db} utilizando la definición de decibeles, en cuyo caso se tiene

$$I_2 = I_1 10^{-\left(z \frac{\alpha_{db}}{10}\right)} \approx I_1 e^{-(0.23)z \alpha_{db}} , \quad (178)$$

$$\therefore \alpha_{db} = \frac{10}{z} \log \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \quad \left[\frac{dB}{m} \right] , \quad (179)$$

$$\alpha_{ln} = (0.23) \alpha_{db} . \quad (180)$$

Dado que la intensidad luminosa es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico, los coeficientes de absorción en intensidad luminosa α_I se relacionan con los coeficientes de amplitud α_A por $\alpha_I = 2\alpha_A$. Hasta el momento en este trabajo solo hemos considerado índices de refracción reales (lineales, circulares o elípticos), por lo que definimos el índice de refracción complejo n_* como

$$n_* = n + i n_i , \quad (181)$$

donde por conveniencia hemos tomado el signo + en la ecuación (181) (algunos autores usan el signo negativo). El índice de refracción imaginario n_i está relacionado con α_{ln} por (E. Hecht et al, 2003)

$$\alpha_z = \left(\frac{\alpha_{ln}}{2} \right) = \frac{2\pi}{\lambda} n_i = k n_i , \quad (182)$$

$$\alpha_A = z \alpha_z , \quad (183)$$

y este coeficiente α (en amplitud) será utilizado en el resto del trabajo y nos referiremos a él simplemente como el coeficiente de absorción.

4.2 Fibras dopadas con erbio

Las fibras dopadas con erbio fueron inventadas a finales de los 1980's y han tenido amplias aplicaciones en fuentes de luz superluminiscentes, láseres en forma de fibra óptica y amplificadores (EDFA) de señales ópticas. Estas consisten típicamente en una fibra monomodo cuyo núcleo ha sido contaminado con iones de erbio Er^{3+} . En la Figura 81 se muestra un diagrama simplificado de niveles de energía.

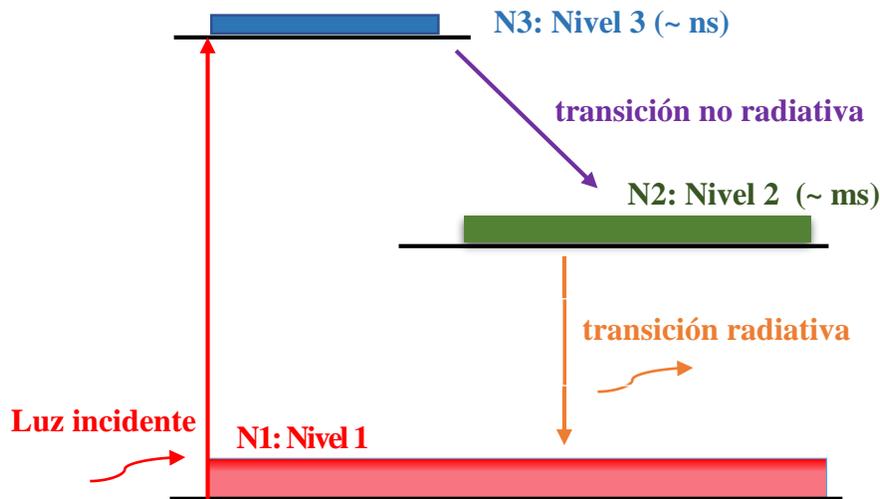


Figura 81. Diagrama simplificado de niveles de energía para Er^{3+} .

El proceso de absorción en una fibra dopada con erbio se puede describir como un sistema de tres niveles de energía, en el cual el nivel uno es un estado base, el nivel dos es un nivel metaestable el cual se caracteriza por un tiempo de decaimiento lento ($\tau_1 \sim 10^{-2} s$), y el nivel tres es el nivel máximo de energía del sistema y el cual presenta un tiempo de decaimiento más rápido ($\tau_2 \sim 10^{-9} s$) comparada con el nivel dos. Si consideramos que en este sistema introducimos un haz óptico, la energía de este es absorbida hasta un nivel de energía N3, los fotones decaerán del nivel N3 al nivel N2 siendo este cambio no radiante, y del nivel N2 los fotones decaerían solo como emisión espontánea (fluorescencia); a esto también se le denomina ASE (Amplified Spontaneous Emission). Una curva ASE típica para una fibra dopada con erbio se muestra en la Figura 82 (línea punteada). La radiación ASE es luz no polarizada (S_{0N}), por lo que su mayor efecto es el de disminuir el grado de polarización DP de la luz (ver ecuación 12 del capítulo 2).

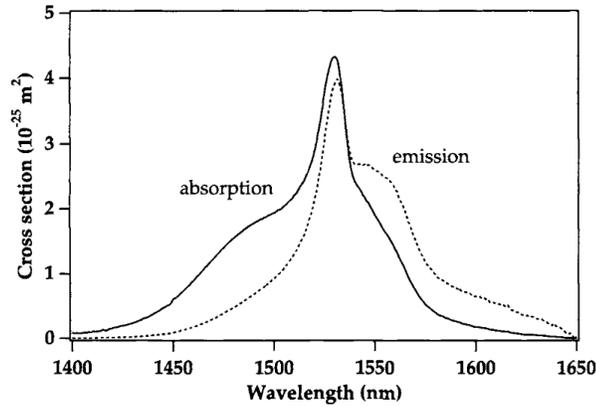


Figura 82. Diagrama ASE para una fibra dopada con erbio.

En nuestros experimentos usamos la fibra dopada con erbio Photonetics EDOS-103 y en la Tabla 19 se muestran algunas de sus características.

Tabla 19. Parámetros más importantes de la fibra dopada con erbio EDOS-103.

Modelo: EDOS-103	
Diámetro del núcleo	3.1 μm
Diámetro del revestimiento	125 \pm 1 μm
Diámetro del área de dopaje	1.1 μm Er^{3+}
Atenuación (α_0) @ 805 nm	0.21 dB/m
Atenuación (α_0) @ 1480 nm	0.45 dB/m

4.3 Modelo matemático para una fibra torcida

Definimos el retardamiento complejo $\gamma = \delta_*$ como,

$$\gamma = \delta + i\alpha, \quad (184)$$

$$\gamma_l = \delta_l + i\alpha_l, \quad (185)$$

$$\gamma_c = \delta_c + i\alpha_c, \quad (186)$$

$$|\gamma|^2 = \gamma^2 = |\gamma_l|^2 + |\gamma_c|^2 = \delta^2 + \alpha^2, \quad (187)$$

donde $\delta = \delta_E$ es el retardamiento elíptico $\alpha_l = \alpha_y - \alpha_x$ es la absorción lineal, $\alpha_c = \alpha_R - \alpha_L$ es la absorción circular y α es la absorción elíptica dada por

$$\alpha^2 = (\alpha_l)^2 + (\alpha_c)^2, \quad (188)$$

y la relación entre ellas se ilustra en la Figura 83, de donde se puede observar que

$$\text{sen } 2\epsilon_\alpha = \frac{\alpha_c}{\alpha_E}, \quad (189)$$

$$\text{cos } 2\epsilon_\alpha = \frac{\alpha_L}{\alpha_E}. \quad (190)$$

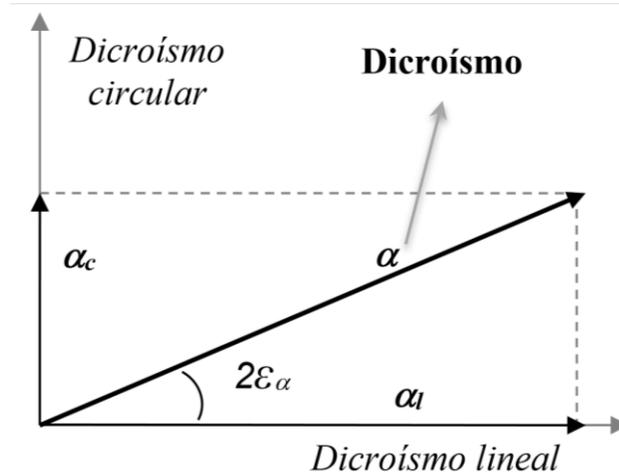


Figura 83. Absorción elíptica α .

De la teoría de matrices diferenciales N (R. C Jones, 1941, 1948) Jones encontró una expresión para una matriz \mathbf{J}_t que incluye birrefringencia y absorción elípticas. Esta matriz expresada de acuerdo a la convención de Nebraska sería (D. E. Mora, 2014)

$$\mathbf{J}_t = e^{-(i\kappa + \alpha_A)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + i\left(\frac{\gamma_l}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \left(\frac{\gamma_c - i\gamma_j}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ -\left(\frac{\gamma_c + i\gamma_j}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - i\left(\frac{\gamma_l}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (191)$$

donde γ_j es el retardamiento debido a la birrefringencia de Jones , α_A es el coeficiente de absorción isotrópica (en amplitud) , y $e^{-(i\kappa)}$ es un factor de fase constante que representa un corrimiento del sistema coordinado lo largo del eje z . La birrefringencia de Jones es el valor de birrefringencia que observa un retardador cuyo eje rápido tiene una inclinación azimutal distinta de cero grados (D. E. Mora, 2014). Consideraremos un retardador dicroico sin torsión cuyo eje rápido está a cero grados y por lo tanto su birrefringencia de Jones es nula; además, al igual que en la definición del vector de Jones (ecuación 22) cancelamos el factor de fase $e^{-(i\kappa)}$ por resultar irrelevante en nuestros cálculos. Entonces nuestra matriz de Jones \mathbf{J}_{BD} de un retardador elíptico dicroico en base a la ecuación (191) es

$$\mathbf{J}_{BD} = e^{-(\alpha_A)} \begin{pmatrix} J_{XX} & -J_{YX} \\ J_{YX} & J_{XX}^* \end{pmatrix} = e^{-(\alpha_A)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + i\left(\frac{\gamma_l}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ -\left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - i\left(\frac{\gamma_l}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (192)$$

La estructura de la matriz \mathbf{J}_{BD} no cumple con la estructura de una matriz de Jones para un retardador sin dicroísmo (ecuación 28) ya que no hay ningún término J_{YX}^* . Hay que tomar en cuenta que el argumento de las funciones trigonométricas es un número complejo $\mathbf{J}_{BD}(\gamma) = \mathbf{J}_{BD}(\delta + i\alpha)$.

También es interesante notar que omitiendo el factor $e^{-(\alpha_A)}$, la ecuación (192) se puede obtener directamente de la matriz M_{Em} para un retardador elíptico sin absorción (ecuación All.13 o All.14 del apéndice II) sustituyendo $\delta_E \rightarrow \delta + i\alpha$. Podemos obtener la matriz de Mueller M_{BD} utilizando la matriz de Jones J_{BD} en la ecuación (158)

$$M_{BD} = U(J_{BD} \otimes J_{BD}^*)U^{-1} \quad . \quad (193)$$

De la ecuación (183) definimos la absorción isotrópica en intensidad α_o como

$$\alpha_o = 2 z \alpha_z = 2 z \alpha_A , \quad (194)$$

entonces sustituyendo las ecuaciones (184, 187, 189,190 ,192 y 194) en la ecuación (193), después de muchas simplificaciones se obtiene

$$M_{BD} = \left(\frac{e^{-\alpha_o}}{\gamma^2} \right) [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4] = \left(\frac{e^{-\alpha_o}}{\gamma^2} \right) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} , \quad (195)$$

donde los elementos m_{ij} son,

$$C_1 = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2 \cosh \alpha \\ -\alpha R \cos 2\varepsilon_a + \delta \zeta_2 \cos 2\mu \\ \alpha \delta \zeta_3 \sin 2(\varepsilon_a - \mu) \\ -\alpha \zeta_1 \sin 2\varepsilon_a + \delta \zeta_2 \sin 2\mu \end{bmatrix} , \quad (196)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \\ m_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{21} \\ \zeta_4 \\ -\delta \zeta_1 \sin 2\mu - \alpha \zeta_2 \sin 2\varepsilon_a \\ -\frac{1}{2} \zeta_3 (\alpha^2 \sin 4\varepsilon_a + \delta^2 \sin 4\mu) \end{bmatrix} , \quad (197)$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \\ m_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_{31} \\ -m_{32} \\ \gamma^2 \cos \delta \\ -\delta \zeta_1 \cos 2\mu - \alpha \zeta_2 \cos 2\varepsilon_a \end{bmatrix} , \quad (198)$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} m_{14} \\ m_{24} \\ m_{34} \\ m_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{41} \\ m_{42} \\ -m_{34} \\ m_{22} \end{bmatrix} , \quad (199)$$

donde

$$\zeta_1 = \{ \delta \sin[\delta] + \alpha \sinh[\alpha] \} , \quad (200)$$

$$\zeta_2 = \{ \alpha \sin[\delta] - \delta \sinh[\alpha] \} , \quad (201)$$

$$\zeta_3 = \{ \cos[\delta] - \cosh[\alpha] \} , \quad (202)$$

$$\zeta_4 = \frac{1}{2} \{ \cos(\delta)(\gamma^2 - \alpha^2 \cos(4\varepsilon_a) - \delta^2 \cos(4\mu)) + \cosh[\alpha] (\gamma^2 + \delta^2 \cos(4\mu) + \alpha^2 \cos(4\varepsilon_a)) \}. \quad (203)$$

Sustituyendo la matriz de Mueller \mathbf{M}_{BD} en lugar de la matriz elíptica sin absorción M_F en la ecuación (124) obtenemos la ecuación para una fibra birrefringente torcida

$$S_{out} = [\mathbf{M}_C (b\tau + \zeta)] [\mathbf{M}_{BD} (\delta_\tau, \alpha)] S_i . \quad (204)$$

Debido a que el eje rápido de la fibra está inclinado a un ángulo $\Psi_{fib} = \theta$ utilizando la ecuación (43) podemos escribir

$$\mathbf{M}_{\tau D}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta) [\mathbf{M}_C (b\tau + \zeta)] [\mathbf{M}_{BD} (\delta_\tau, \alpha)] \mathbf{R}(\theta) , \quad (205)$$

entonces tenemos que los parámetros de Stokes a la salida de la fibra son

$$\begin{bmatrix} S_{0out} \\ S_{1out} \\ S_{2out} \\ S_{3out} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_\tau(\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\phi) \\ \sin(2\phi) \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}(-\theta) [\mathbf{M}_C (b\tau + \zeta)] [\mathbf{M}_{BD} (\delta_\tau, \alpha)] \mathbf{R}(\theta) \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\phi) \\ \sin(2\phi) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (206)$$

$$\begin{bmatrix} S_{0out} \\ S_{1out} \\ S_{2out} \\ S_{3out} \end{bmatrix} = \left(\frac{e^{-\alpha_0}}{\gamma^2} \right) \begin{bmatrix} S'_{0out} \\ S'_{1out} \\ S'_{2out} \\ S'_{3out} \end{bmatrix}. \quad (207)$$

Para calcular S'_{iout} procedemos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{int} = \begin{pmatrix} S_{0int} \\ S_{1int} \\ S_{2int} \\ S_{3int} \end{pmatrix} &= \mathbf{M}_{BD} \mathbf{R}(\theta) \mathbf{S}_i(\phi) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2(\phi - \theta) \\ \sin 2(\phi - \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} + m_{12} \cos 2(\phi - \theta) + m_{13} \sin 2(\phi - \theta) \\ m_{21} + m_{22} \cos 2(\phi - \theta) + m_{23} \sin 2(\phi - \theta) \\ m_{31} + m_{32} \cos 2(\phi - \theta) + m_{33} \sin 2(\phi - \theta) \\ m_{41} + m_{42} \cos 2(\phi - \theta) + m_{43} \sin 2(\phi - \theta) \end{pmatrix}, \quad (208) \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}'_{out} = \mathbf{M}_C (b\tau + \zeta - \theta) \mathbf{S}_{int} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2(b\tau + \zeta - \theta) & \sin 2(b\tau + \zeta - \theta) & 0 \\ 0 & -\sin 2(b\tau + \zeta - \theta) & \cos 2(b\tau + \zeta - \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S}_{int}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{0int} \\ S_{1int} \cos[2(b\tau + \zeta - \theta)] + S_{2int} \operatorname{sen}[2(b\tau + \zeta - \theta)] \\ S_{2int} \cos[2(b\tau + \zeta - \theta)] - S_{1int} \operatorname{sen}[2(b\tau + \zeta - \theta)] \\ S_{3int} \end{bmatrix}, \quad (209)$$

con lo que finalmente podemos escribir,

$$S'_{0out} = m_{11} + m_{12} \cos 2(\phi - \theta) + m_{13} \operatorname{sen} 2(\phi - \theta) \quad (210)$$

$$S'_{1out} = \cos 2(b\tau + \zeta - \theta)[m_{21} + m_{22} \cos 2(\phi - \theta) + m_{23} \operatorname{sen} 2(\phi - \theta)] + \operatorname{sen} 2(b\tau + \zeta - \theta)[m_{31} + m_{32} \cos 2(\phi - \theta) + m_{33} \operatorname{sen} 2(\phi - \theta)] \quad (211)$$

$$S'_{2out} = -\operatorname{sen} 2(b\tau + \zeta - \theta)[m_{21} + m_{22} \cos 2(\phi - \theta) + m_{23} \operatorname{sen} 2(\phi - \theta)] + \cos 2(b\tau + \zeta - \theta)[m_{31} + m_{32} \cos 2(\phi - \theta) + m_{33} \operatorname{sen} 2(\phi - \theta)] \quad (212)$$

$$S'_{3out} = m_{41} + m_{42} \cos 2(\phi - \theta) + m_{43} \operatorname{sen} 2(\phi - \theta). \quad (213)$$

Las ecuaciones (210-211) para una convención negativa se pueden ver en el apéndice IV.

Utilizando la ecuación (207) se desarrolló un programa de ajuste de curvas en Mathematica similar al desarrollado en el capítulo 3.6.2, en la Figura 84 se muestra su interfaz.

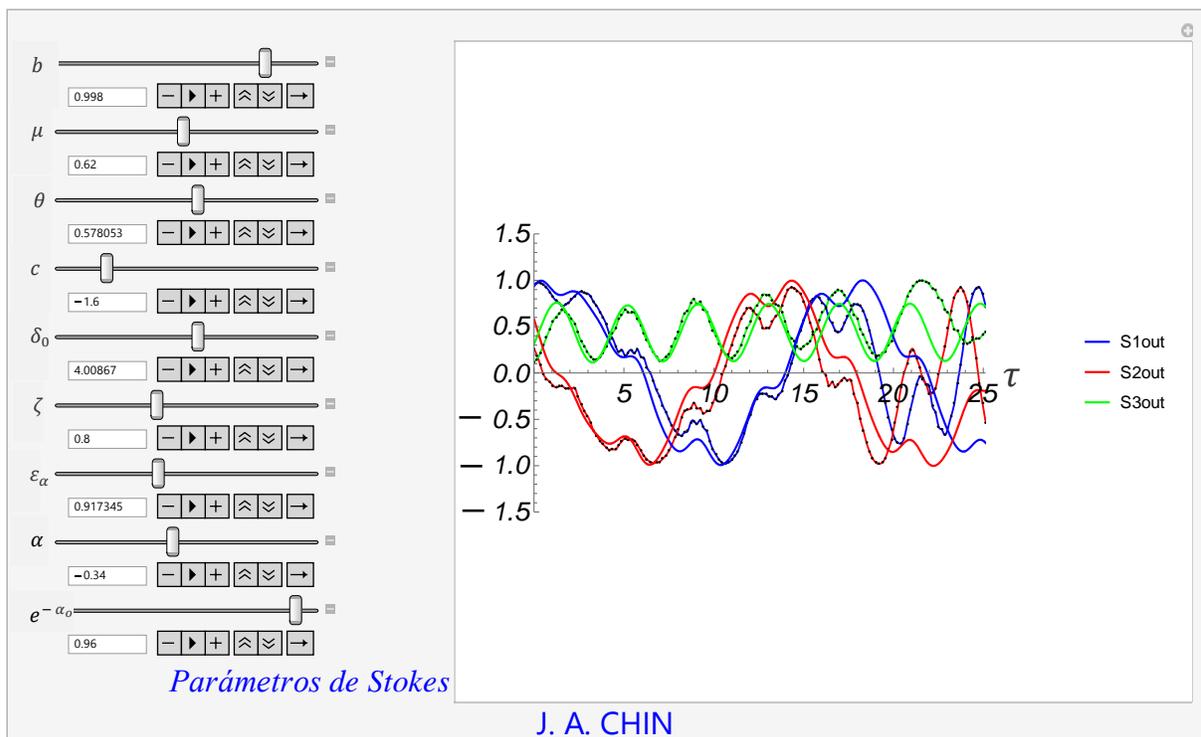


Figura 84. Interfaz gráfica desarrollada para los ajustes teóricos (dicróicos).

4.4 Interpretación geométrica

De acuerdo a la ecuación (204) nuestro modelo está dado por el producto de dos matrices $[M_C (b\tau + \zeta)] [M_{BD} (\delta_\tau, \alpha)]$. La matriz de retardamiento circular $[M_C (b\tau + \zeta)]$ tiene el mismo significado que el explicado en el capítulo 3.3.3 (ver ecuación 137), correspondiente a un movimiento de precesión alrededor del eje \bar{S}_C el cual es paralelo al eje \bar{S}_3 de la esfera de Poincaré y el círculo de precesión es paralelo al ecuador. Entonces procedemos a analizar la matriz $[M_{BD} (\delta_\tau, \alpha)]$.

El vector del modo principal (eigenmodo rápido) (D. E. Mora, 2014)

$$\bar{F} = |\bar{F}| \hat{F} = \delta_E [\cos(2\mu), 0, \sin(2\mu)] , \quad (214)$$

nos indica precisamente la dirección del eje rápido \hat{F} en la esfera de Poincaré y además es utilizado para calcular el retardamiento δ de un retardador (por ejemplo ecuaciones 31,38,41). El vector de birrefringencia dado por

$$\bar{S} = -\bar{F} = |\bar{S}| \hat{S} = -\delta_E [-\cos(2\mu), 0, -\sin(2\mu)] , \quad (215)$$

nos indica el eje de giro en la esfera de Poincaré. De acuerdo a la convención de Nebraska, la acción de un retardador en la esfera de Poincaré es la de un giro positivo (hélice positiva) alrededor de un eje $\bar{F}\hat{S}$ que une al eje rápido y el eje lento. En términos vectoriales esto está dado por un radio vector que va desde el origen hasta el punto $[-\cos(2\mu), 0, -\sin(2\mu)]$, esto es, está dado por \bar{S} ; de esta manera el vector de birrefringencia \bar{S} nos permite estudiar el comportamiento geométrico de un retardador en la esfera de Poincaré (ver ecuación 136).

En forma análoga, definimos al vector de absorción

$$\bar{A} = |\bar{A}| \hat{A} = \alpha [\cos 2\epsilon_\alpha, 0, \sin 2\epsilon_\alpha] , \quad (216)$$

el cual nos indica el eigenmodo principal de absorción. Para un retardador dicróico homogéneo (S. Lu, 1994; R. Azzam et al, 1977) como lo es nuestro caso, los vectores \bar{F} y \bar{A} comparten el mismo eje de giro, esto es $\bar{F} \parallel \bar{A}$. Definimos al vector \bar{E} como

$$\bar{E} = |\bar{E}| \hat{E} = \alpha [-\cos 2\epsilon_\alpha, 0, -\sin 2\epsilon_\alpha] , \quad (217)$$

como un vector que representa un eje de giro auxiliar para estudiar el comportamiento geométrico de la absorción de un retardador en la esfera de Poincaré.

Con estos vectores definimos el vector de retardamiento complejo $\bar{\gamma}$ como

$$\bar{\gamma} = |\bar{\gamma}| \hat{\gamma} = \bar{\mathbb{F}} + i \bar{\mathbb{A}} = \delta_E [\cos(2\mu), 0, \sin(2\mu)] + i \alpha [\cos 2\epsilon_\alpha, 0, \sin 2\epsilon_\alpha] , \quad (218)$$

$$\hat{\gamma} = (1/\gamma) \{ [\delta_L, 0, \delta_C] + i \alpha [\alpha_l, 0, \alpha_c] \} = \left[\frac{\delta_L}{\gamma}, 0, \frac{\delta_C}{\gamma} \right] . \quad (219)$$

Hay que notar que los vectores $\bar{\mathbb{F}}, \bar{\mathbb{S}}, \bar{\mathbb{A}}, \bar{\mathbb{E}}$ y $\bar{\gamma}$ representan ejes de giro (no son vectores normales o polares) y se denominan vectores-spin (spin-vector) en algebra geométrica. Entonces utilizando el operador de proyección del álgebra geométrica (ecuación 36) para un material dicroico tenemos

$$\begin{aligned} J_{BD} &= e^{-(\alpha_A)} e^{i\left(\frac{|\bar{\gamma}|}{2}\right) \hat{\gamma} \cdot \vec{\sigma}} = e^{-(\alpha_A)} \left\{ \cos \frac{|\bar{\gamma}|}{2} \sigma_0 + i \sin \frac{|\bar{\gamma}|}{2} \hat{\gamma} \cdot \vec{\sigma} \right\} \\ &= e^{-(\alpha_A)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + i\left(\frac{\gamma_l}{\gamma}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ -\left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - i\left(\frac{\gamma_l}{\gamma}\right) \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (220)$$

la cual es igual a la ecuación (192). Para incluir efectos de absorción en la ecuación (4), un haz óptico que se propaga en un medio dicroico se puede expresar como (omitiendo los factores de fase)

$$\vec{E}_{x,y} = \vec{E} e^{i k(n+i n_i)z} = \vec{E} e^{i \beta z} , \quad (221)$$

donde

$$\beta = k(n + i n_i) = \beta_{re} + i \beta_{im} , \quad (222)$$

es la constante de propagación compleja. Definimos al vector complejo de propagación

$$\vec{\beta} = \beta \hat{\beta} , \quad (223)$$

por lo que

$$\overline{\Delta\beta} = \frac{\bar{\gamma}}{z} = \frac{\delta + i \alpha}{z} \hat{\gamma} = k(\Delta n + i \Delta n_i) \widehat{\Delta\beta} . \quad (224)$$

Es importante recordar que δ y α representan incrementos ($\Delta\delta$ y $\Delta\alpha$) y que $\vec{\beta} \parallel \bar{\gamma}$. Cuando $\overline{\Delta\beta} \rightarrow 0$, se tiene que $\overline{\Delta\beta} = d\vec{\beta}$; éste último es el vector complejo diferencial de propagación. Si describimos al campo eléctrico E mediante una función armónica (ecuación 221) e ignorando los efectos de la divergencia del haz óptico de tal manera que la luz permanece colimada en el medio, la ecuación de onda (ecuación 1) se reduce a la ecuación de Helmholtz (J.P. Gordon et al, 2000)

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + [\epsilon] k^2 \vec{E} = 0 . \quad (225)$$

El tensor dieléctrico $[\epsilon]$ está dado por una matriz compleja de 2×2 por lo que podemos expresarlo con la típica expansión en base a las matrices de Pauli,

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial^2 z} + (\beta^2 \sigma_0 + \beta \overline{\Delta\beta} \cdot \vec{\sigma}) \vec{E} = 0 . \quad (226)$$

Haciendo uso de la aproximación adiabática $d^2 E/dz^2 \approx 0$ (D. E. Mora, 2014) también conocida como la condición de variación lenta SVEA (Slowly Varying Envelope Approximation) encontramos que la ecuación diferencial para la evolución del vector de Jones $E(z)$ es

$$\frac{dE}{dz} + \left(\frac{1}{2z}\right) i \vec{\gamma}(z) \cdot \vec{\sigma} E(z) = 0 , \quad (227)$$

y para el campo E^\dagger

$$\frac{dE^\dagger}{dz} - \left(\frac{1}{2z}\right) i \vec{\gamma}(z) \cdot \vec{\sigma} E^\dagger(z) = 0 . \quad (228)$$

Haciendo uso de la ecuación (13), podemos escribir

$$\vec{S}(z) = [S_0, S_1, S_2, S_3] = [E^\dagger \sigma_0 E, E^\dagger \sigma_1 E, E^\dagger \sigma_2 E, E^\dagger \sigma_3 E] = [S_0, \vec{S}] , \quad (229)$$

$$\vec{S} = [S_1, S_2, S_3] . \quad (230)$$

En un medio dicroico las componentes S_1, S_2, S_3 son atenuadas en la medida que la luz se propaga y el valor de S_0 deja de ser unitario. Entonces conviene expresar a \vec{S} en función de los vectores unitarios $\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3$ paralelos a los ejes de la esfera de Poincaré. Entonces definimos al vector de Stokes normalizado como

$$\hat{s} = (\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3) , \quad (231)$$

$$\vec{S} = S_0(z) \hat{s}(z) , \quad (232)$$

es decir, las componentes de \hat{s} son a su vez vectores y no escalares. Con esta definición, tenemos que el operador vectorial de Pauli (capítulo 2.1) en el espacio de Stokes es

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma} \cdot \hat{s} = \sigma_1 \hat{s}_1 + \sigma_2 \hat{s}_2 + \sigma_3 \hat{s}_3 . \quad (233)$$

Utilizando la ecuación (229) podemos encontrar la ecuación diferencial para la evolución del vector de Stokes

$$\frac{dS_i}{dz} = \frac{dE^\dagger}{dz} \sigma_i E + E^\dagger \sigma_i \frac{dE}{dz} . \quad i = 0,1,2,3. \quad (234)$$

Sustituyendo las ecuaciones (227) y (228) en esta última expresión obtenemos

$$\frac{dS_0}{dz} = \bar{\mathbb{A}} \cdot \vec{S} = S_0(z) \bar{\mathbb{A}}(z) \cdot \hat{s}(z), \quad (235)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{S}}{dz} &= \left[\frac{dS_1}{dz}, \frac{dS_2}{dz}, \frac{dS_3}{dz} \right] \\ &= \frac{1}{2z} \{ i E^\dagger (\bar{\mathbb{F}} \cdot \bar{\sigma}) (\bar{\sigma} \cdot E) + E^\dagger (\bar{\mathbb{E}} \cdot \bar{\sigma}) \times (\bar{\sigma} \cdot E) + i E^\dagger \bar{\sigma} (\bar{S} \cdot \bar{\sigma}) \cdot E - E^\dagger \bar{\sigma} (\bar{\mathbb{A}} \cdot \bar{\sigma}) E \}. \end{aligned} \quad (236)$$

Utilizando la ecuación (233) y las siguientes identidades del algebra geométrica,

$$\bar{\sigma}(\bar{\mathbb{F}} \cdot \bar{\sigma}) = \bar{\mathbb{F}} \cdot \sigma_0 + i \bar{\mathbb{F}} \times \bar{\sigma}, \quad (237)$$

$$\bar{\sigma}(\bar{\mathbb{A}} \cdot \bar{\sigma}) = \bar{\mathbb{A}} \cdot \sigma_0 + i \bar{\mathbb{A}} \times \bar{\sigma}, \quad (238)$$

$$(\bar{\mathbb{F}} \cdot \bar{\sigma}) \bar{\sigma} = \bar{\mathbb{F}} \cdot \sigma_0 + i \bar{\mathbb{S}} \times \bar{\sigma}, \quad (239)$$

$$(\bar{\mathbb{A}} \cdot \bar{\sigma}) \bar{\sigma} = \bar{\mathbb{A}} \cdot \sigma_0 + i \bar{\mathbb{E}} \times \bar{\sigma}, \quad (240)$$

encontramos

$$\frac{d\hat{s}}{dz} + (\bar{\mathbb{F}} \times \hat{s}) + \bar{\mathbb{A}} \times \hat{s} \times \hat{s} = 0, \quad (241)$$

$$\frac{d\hat{s}}{dz} = (\bar{\mathbb{S}} \times \hat{s}) + (\bar{\mathbb{E}} \times \hat{s}) \times \hat{s}. \quad (242)$$

Definimos al vector de dicroísmo $\bar{\mathbb{D}}$ como

$$\bar{\mathbb{D}} = \bar{\mathbb{E}} \times \hat{s}, \quad (243)$$

el cual varía su magnitud dependiendo de la distancia angular que hay entre el estado de polarización \hat{s} (ó \vec{S}) y el vector $\bar{\mathbb{E}}$. Entonces la ecuación (242) la podemos escribir como

$$\frac{d\hat{s}}{dz} = (\bar{\mathbb{S}} \times \hat{s}) + (\bar{\mathbb{D}} \times \hat{s}). \quad (244)$$

Definimos al vector de retardamiento dicroico $\bar{\mathbb{R}}$ como

$$\bar{\mathbb{R}} = \bar{\mathbb{S}} + \bar{\mathbb{D}}. \quad (245)$$

Utilizando la propiedad distributiva del producto vectorial y sustituyendo este vector de rotación $\bar{\mathbb{R}}$ en la ecuación (244) se obtiene

$$\frac{d\hat{s}}{dz} = \bar{\mathbb{R}} \times \hat{s}. \quad (246)$$

En forma similar a la ecuación (133), esta relación la podemos expresar como

$$\frac{d\hat{s}}{dz} = m_{dz} \hat{s} \quad , \quad (247)$$

donde m_{dz} es una matriz diferencial (ver ecuación 65). Esta matriz se puede expresar como la suma de una matriz simétrica m_S y una antisimétrica m_A

$$m_{dz} = m_S + m_A \quad , \quad (248)$$

$$m_S = \begin{pmatrix} A_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & A_0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & A_0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (249)$$

$$m_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_3 & \delta_2 \\ 0 & \delta_3 & 0 & -\delta_1 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (250)$$

Esto tiene su origen debido a que el tensor dieléctrico $[\epsilon]$ se puede expresar como la suma de una matriz simétrica y una antisimétrica. El coeficiente A_0 describe la atenuación común que sufren todas las componentes del vector de Stokes. Los coeficientes $\alpha_{1,2,3}$ corresponden a la atenuación sufrida debido al dicroísmo, esto es, la atenuación selectiva de los modos de polarización. Los coeficientes $\delta_{1,2,3}$ corresponden a los efectos producidos por la birrefringencia.

La ecuación (246) es similar a la ecuación (136) de precesión. Sin embargo debido a que $\bar{\mathbb{D}}$ (y por lo tanto $\bar{\mathbb{R}}$) no es constante sino que su tamaño está decreciendo, la interpretación geométrica de la matriz $\mathbf{M}_{BD}(\delta_\tau, \alpha)$ no es la de un círculo de precesión de los estados de polarización \vec{S} , ya que la magnitud de \vec{S} está disminuyendo en todo momento; siempre se cumple que $S_{out} < S_i$.

Entonces la matriz $\mathbf{M}_{BD}(\delta_\tau, \alpha)$ nos genera una espiral circular cónica alrededor de $\bar{\mathbb{R}}$ que inicia en la superficie de la esfera y se dirige al centro $\vec{S} = (0,0,0)$ de la misma, como se ilustra en la Figura 85. Es decir debido a la absorción, inevitablemente todas las trayectorias generadas por $\mathbf{M}_{BD}(\delta_\tau, \alpha)$ para una distancia z lo suficientemente grande terminarán en el centro de la esfera y únicamente el punto inicial de la trayectoria está sobre la superficie de la esfera. Para mayor claridad en la exposición tridimensional de nuestros resultados experimentales, los estados de polarización de salida S_{out} dentro de la esfera de Poincaré fueron proyectados hacia su superficie como se ilustra en la Figura 86. Los estados de polarización S_{out} quedan totalmente definidos por sus coordenadas angulares $(2\psi, 2\epsilon)$.

Entonces para proyectar los estados de polarización sobre la superficie de la esfera basta con normalizar estos estados S_{out} .

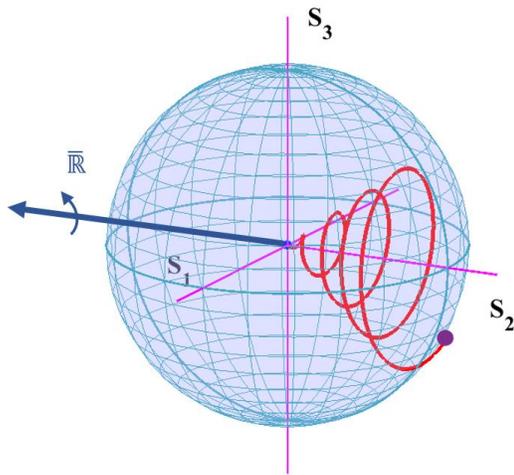


Figura 85. Trayectorias generadas por un retardador dicroico $M_{BD}(\delta_\tau, \alpha)$.

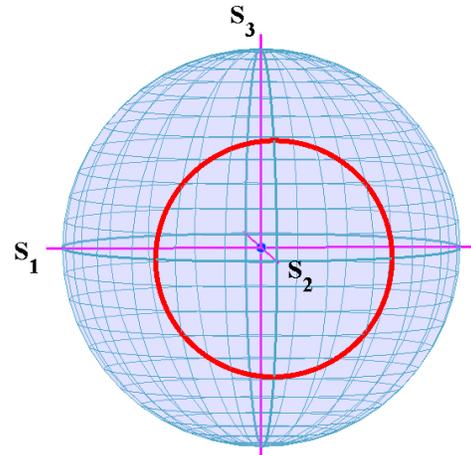


Figura 86. Proyección de los estados \vec{S} sobre la superficie de la esfera.

La interpretación geométrica de los estados de polarización generados por el producto de las dos matrices $[M_C(b\tau + \zeta)][M_{BD}(\delta_\tau, \alpha)]$ tiene cierta similitud con los generados por $[M_C(b\tau + \zeta)][M_F(\delta_\tau)]$ de la ecuación (131). Los estados de polarización tenderán a exhibir trocoides similares a las del movimiento de nutación, solo que (además de estar adentro de la esfera) habría que considerar que los conos de la Figura 38 empiezan a disminuir su diámetro y altura en la medida que evoluciona S_{out} . Además los límites de libramiento ya no estarían contenidos entre dos paralelos de la esfera de Poincaré. Al menos uno de los límites de libramiento correría sobre una línea convergente a un paralelo. Basta con imaginarse que el círculo que gira en la Figura 39 va disminuyendo su diámetro en la medida que rueda bajo el eje de las abscisas.

Es interesante notar que un retardador óptico modifica un estado de polarización de entrada debido a que introduce un desfase en los modos de polarización provocado por la birrefringencia Δn . Los elementos puramente dicroicos no poseen birrefringencia, sin embargo se comportan en forma similar a un retardador en cuanto a que modifican (por la absorción) el estado de polarización que los transita. Por ejemplo, consideraremos un retardador dicroico lineal orientado a 0° . Supongamos que $\alpha_l = \alpha_y$, $\alpha_x = 0$, es decir que solo se absorbe la componente E_y como se ilustra en la Figura 87 donde un estado de polarización a (línea punteada) es transformado en un estado de polarización b (línea

continua) . Para simplificar el análisis hemos considerado que $\delta_L = 0$. En la Figura 88 podemos observar como el estado de polarización a es transportado en el ecuador hasta el estado de polarización b . Para ilustrarlo, primeramente ubicamos a los ejes \bar{S} y \bar{E} . Realizando el producto $\bar{E} \times \bar{S}$ obtenemos el vector \bar{D} . Tomando a \bar{D} como eje de giro, el estado a es trasladado hasta el estado de polarización b en concordancia con la Figura 87. En realidad, debido a la absorción el estado de polarización de salida está determinado por el punto b' dentro de la esfera.

En general tendremos que además del dicroísmo estará también presente un valor de retardamiento $\delta \neq 0$, en cuyo caso el estado de polarización a sería girado alrededor del eje $\bar{R} = \bar{S} + \bar{D}$.

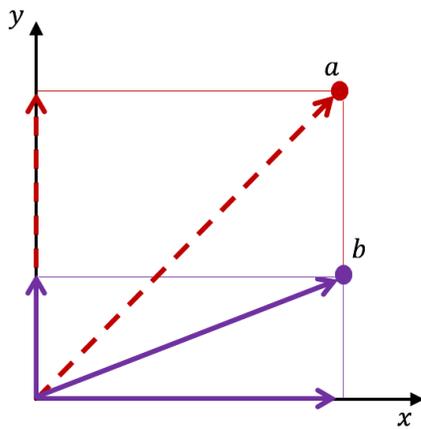


Figura 87. Absorción de E_y .

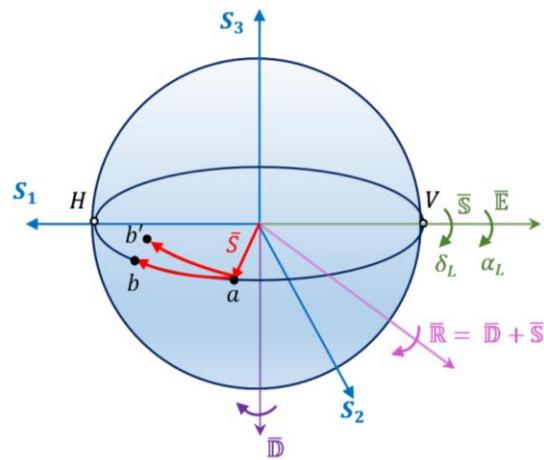


Figura 88. Absorción en la esfera de Poincaré.

4.5 Mediciones experimentales y análisis de resultados

Normalmente el fabricante proporciona el valor de absorción α_o expresado en decibeles. Utilizamos una fibra óptica con una longitud $L = 1.5 \text{ m}$. En nuestros experimentos encontramos que $e^{-\alpha_o} \approx 0.95$, lo cual nos indica que $\alpha_o = -\ln 0.95 = 0.04$. De las ecuaciones (180) y (183) tenemos que $\alpha_o = L \alpha_{ln} = L(0.23) \alpha_{db}$ por lo que

$$\alpha_o = \frac{0.04}{0.23 \times 1.5} = 0.26 \text{ [dB/m]} ,$$

el cual es un valor ligeramente inferior al proporcionado por el fabricante (ver Tabla 20) . Ocasionalmente el valor de α_o proporcionado por el fabricante no es muy exacto ya que existen dificultades para medir este parámetro, entre las que destacan: a) La intensidad de salida de la fibra es relativamente fácil de medir, sin embargo la intensidad luminosa efectiva que ingresa a la fibra es muy complicado medirla

debido a que la luz es inyectada a la fibra mediante un objetivo de microscopio prácticamente pegado a la cara de entrada de la fibra óptica, b) la emisión ASE ocurre a lo largo de toda la fibra, es decir que parte de la intensidad luminosa transita diferentes distancias L antes de abandonar la fibra óptica.

A manera de comparación, de acuerdo a la tabla de información de una fibra monomodo SMF-28 sabemos que la atenuación es de alrededor de $\alpha_{smf28} = 0.2 [dB/Km] = 2 \times 10^{-4} [dB/m]$.

Para el caso de la fibra dicroica utilizada (EDOS-103) se realizaron ajustes para dos de las longitudes de onda, para ambas longitudes de onda se seleccionaron diferentes ángulos azimutales de las mediciones. El diseño de las gráficas fue similar a las realizadas en las fibras sin absorción (monomodo y birrefringentes), para esta fibra se analizó el comportamiento de la polarización al aplicar en ella una torsión de 1080° .

Para la longitud de onda de 1540 nm se realizaron los ajustes solo para un ángulo azimutal, en estas gráficas (dicroicas) la diferencia con respecto a las realizadas en el capítulo 3 (sin absorción) fue que no solo se llevó a cabo la gráfica simultánea de los tres parámetros de Stokes, sino que también se graficó individualmente cada parámetro con la finalidad de analizar más claramente el comportamiento de las curvas de los parámetros de Stokes de salida. Estos ajustes se pueden ver en la Figura 89, para los cuales se utilizaron los valores mostrados en la Tabla 20.

Tabla 20. Valores numéricos para los ajustes de la fibra EDOS-103 a una longitud de onda de 1540 nm .

$\phi = 0^\circ$ torsión positiva	
ϕ	0°
b	0.998
θ	33.12°
ζ	45.8366°
μ	42.1124°
c	-1.6
$\delta 0$	229.68°
α	-0.34
ε_α	52.56°
$e^{-\alpha_0}$	0.96

Este ajuste también se graficó utilizando la esfera de Poincaré para analizar el comportamiento de la polarización de una manera tridimensional, además considerando que en este tipo de gráficas se puede valorar más críticamente el nivel de ajuste de los parámetros teóricos con los experimentales.

Analizando las gráficas de la Figura 89 podemos ver que los ajustes teóricos no son tan buenos como los que habíamos estado realizando anteriormente (fibras sin absorción). Está claro que el comportamiento de ambas gráficas (teóricas y prácticas) es parecido, siendo mejor el ajuste para bajas torsiones, es decir este ajuste se pierde paulatinamente al ir incrementando el valor de la torsión (τ), este dato lo podemos ver más claramente en las gráficas individuales de los parámetros de Stokes.

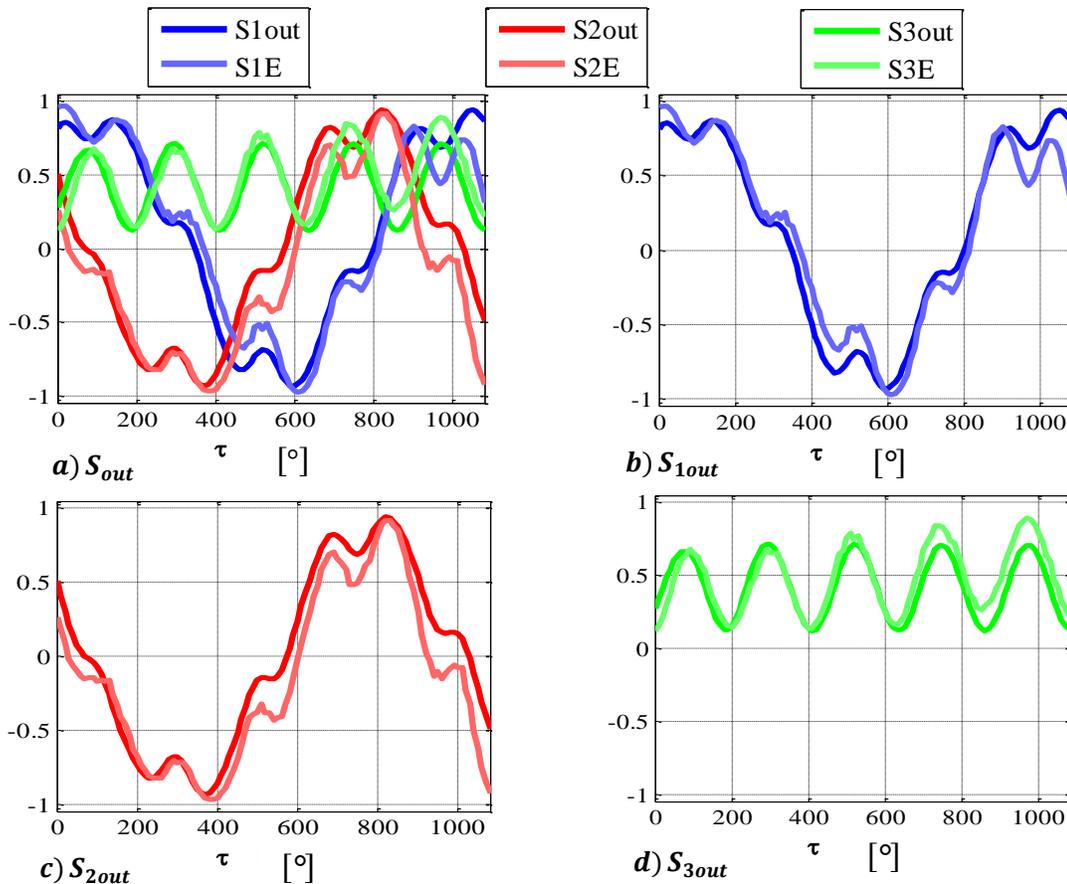


Figura 89. Ajustes para la fibra EDOS-103, torsión positiva, $\phi = 0^\circ$ y a una longitud de onda de 1540 nm . a) S_{out} , b) S_{1out} , c) S_{2out} , d) S_{3out} .

Para el caso de los ajustes en la esfera de Poincaré se puede ver que ambas curvas describen un comportamiento similar al de una trocoide con límites de libramiento aproximado de 65° , pero también es claro que aunque las curvas tienen trayectorias semejantes están un poco desfasadas. Entonces podemos decir que el ajuste no es tan bueno, aunque es de destacar que se emuló teóricamente el comportamiento de la polarización de salida de las mediciones experimentales.

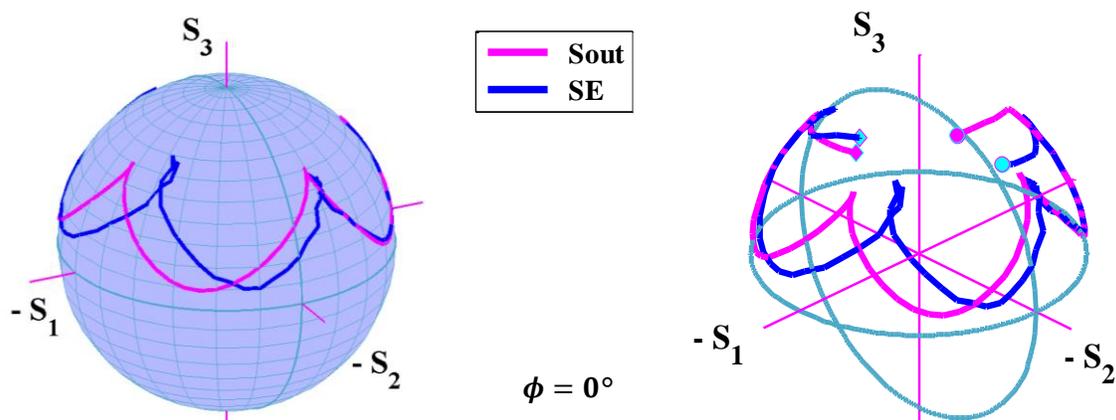


Figura 90. Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 0^\circ$ en la fibra EDOS-103 para $\lambda = 1540 \text{ nm}$.

Para la longitud de onda de 1550 nm se realizaron los ajustes para tres ángulos azimutales, en los cuales también se llevó a cabo la gráfica simultánea de los tres parámetros de Stokes y la gráfica individual de los tres parámetros. Para los tres ajustes realizados a esta longitud de onda se utilizaron los valores numéricos mostrados en la Tabla 21.

Tabla 21. Valores numéricos para los ajustes de la fibra EDOS-103 a una longitud de onda de 1550 nm.

Torsión positiva			
ϕ	0°	30°	60°
b	0.999	0.999	0.999
θ	-4.32°	-4.32°	-4.32°
ζ	120.321°	120.321°	120.321°
μ	35.5234°	35.5234°	35.5234°
c	-1.7	-1.7	-1.7
$\delta 0$	-22.9183°	-22.9183°	-22.9183°
α	0.001	0.001	0.001
ε_α	0.572958	0.572958	0.572958
$e^{-\alpha_0}$	0.97	0.97	0.97

Analizando las gráficas de la Figura 91 podemos ver que los tres parámetros de Stokes presentan un mejor ajuste en comparación con el ajuste realizado a esta misma fibra pero en la longitud de onda de 1540 nm.

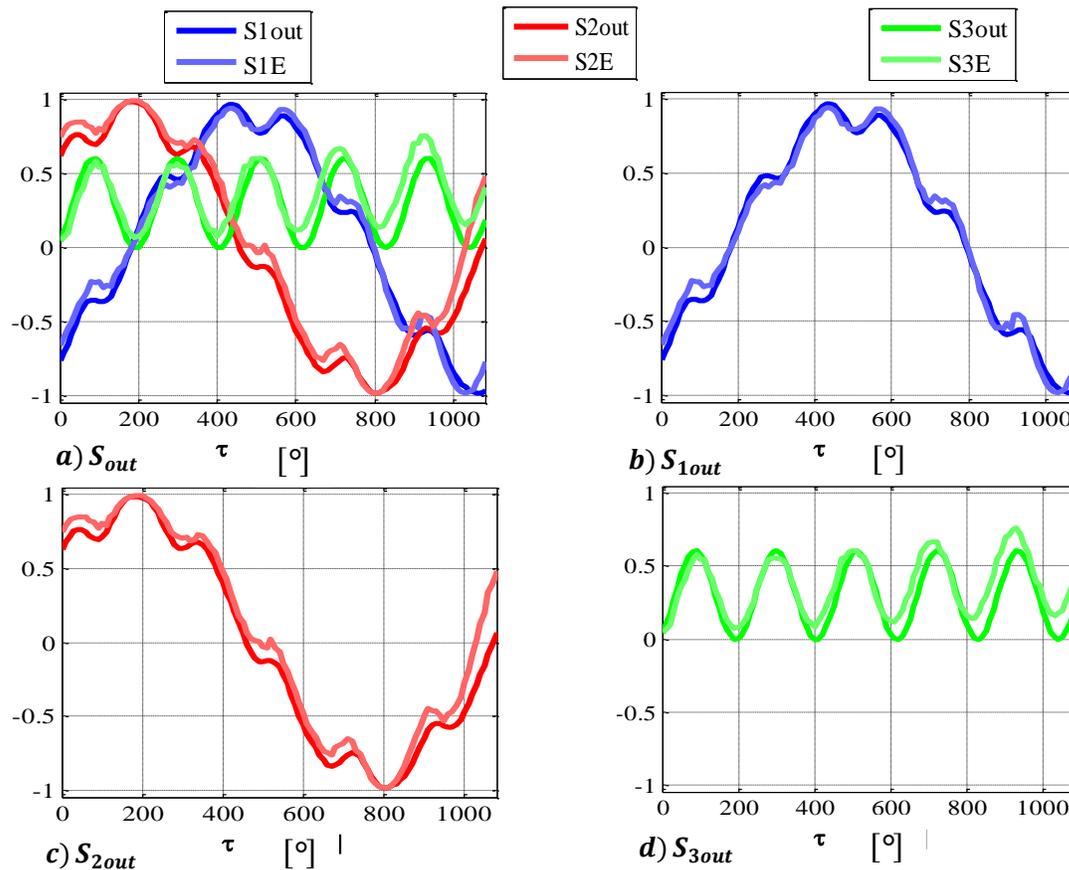


Figura 91. Ajustes para la fibra EDOS-103, torsión positiva, $\phi = 0^\circ$ y a una longitud de onda de 1550 nm. a) S_{out} , b) S_{1out} , c) S_{2out} , d) S_{3out} .

Aunque el ajuste sigue sin ser un ajuste perfecto su calidad es buena, solo descartando los últimos 100° de la torsión en los cuales el ajuste mermó su calidad. Este dato se puede ver claramente en la gráfica denotada por el inciso “d” en la Figura 91.

El resultado de los ajustes descritos en las gráficas bidimensionales de los parámetros de Stokes se reprodujo en las gráficas tridimensionales (esfera de Poincaré), debido a que se puede ver claramente en la esfera de Poincaré de la Figura 92 una mejora de los ajustes de las curvas teóricas con las experimentales. Ambas trayectorias describen trocoides con límites de libramiento aproximado de 65° y el desfase entre ellas es de apenas unos pocos grados.

Con la finalidad de ver los resultados en su forma tridimensional desde otro ángulo, se utilizó la misma gráfica solo que se le removió la esfera (ver Figura 92), con esto podemos ver como las trayectorias de la polarización para ambos casos (teóricas y experimentales) es muy parecida.

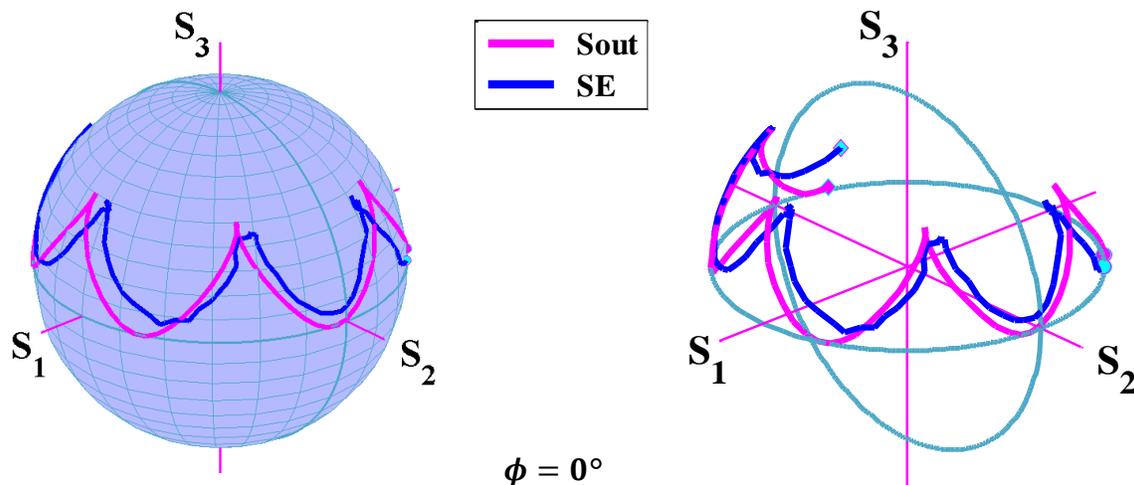


Figura 92. Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 0^\circ$ en la fibra EDOS-103 para $\lambda = 1550 \text{ nm}$.

Analizando las gráficas de la Figura 93 las cuales corresponden al ajuste para el ángulo azimutal de 30° podemos ver que los tres parámetros de Stokes presentan un ajuste aceptable en comparación con el ajuste realizado a esta misma fibra pero en la longitud de onda de 1540 nm. Podemos ver en estas gráficas que el comportamiento de las curvas que describen a S_1 y S_2 ya no presenta tantas variaciones, es decir son un poco más continuas comparadas con los ajustes realizados anteriormente. En este caso también se presenta un mayor desajuste para torsiones altas.

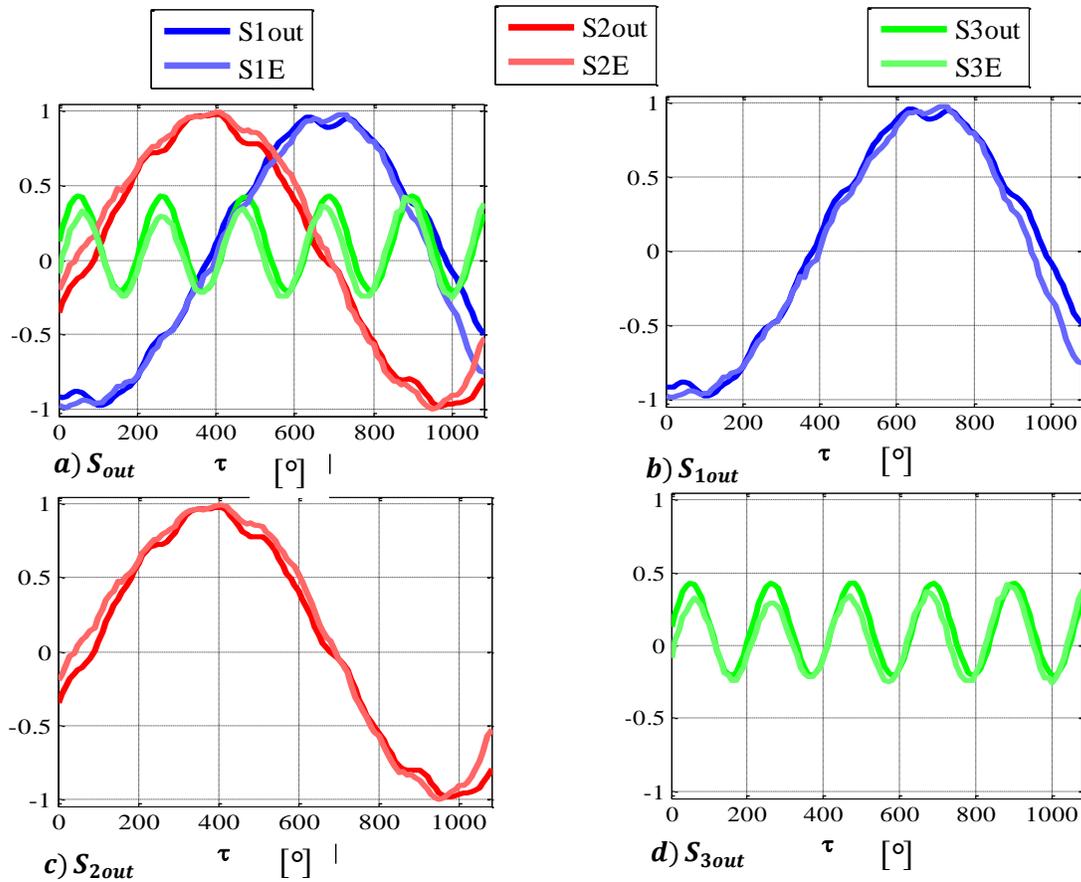


Figura 93. Ajustes para la fibra EDOS-103, torsión positiva, $\phi = 30^\circ$ y a una longitud de onda de 1550 nm . a) S_{out} , b) S_{1out} , c) S_{2out} , d) S_{3out} .

El resultado de los ajustes en la esfera de Poincaré para este ángulo azimutal se esperaba de una mejor calidad con respecto a las gráficas bidimensionales (Figura 93), sin embargo podemos ver en la Figura 94 que aunque las trayectorias son parecidas (ambas con forma de trocoide y límites de libramiento aproximado de 60°) el desfase entre ambas curvas fue mayor que el descrito para el ajuste del ángulo azimutal anterior (0°).

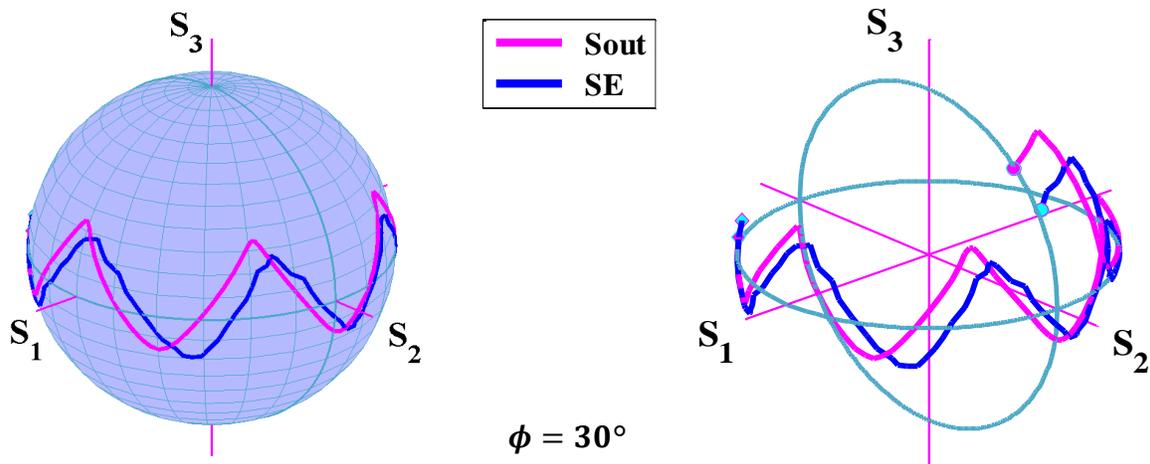


Figura 94. Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 30^\circ$ en la fibra EDOS-103 para $\lambda = 1550 \text{ nm}$.

Dicho de otra manera el ajuste realizado para el ángulo azimutal a 0° fue mejor que el ajuste para 30° , debido a que para comparar la calidad de los ajustes el método más riguroso es por medio de la gráfica en la esfera de Poincaré.

Para las gráficas de la Figura 95 las cuales corresponden al ajuste para el ángulo azimutal de 60° podemos ver un comportamiento similar a los ángulos azimutales antes ajustados. Los tres parámetros de Stokes presentan un ajuste aceptable. Podemos ver en estas gráficas que el comportamiento de los parámetros de Stokes se desajustó de mayor manera entre más alta era la torsión en la fibra. Un resultado significativo en estas gráficas fue que el parámetro S_3 presentó su mayor desajuste gráfico.

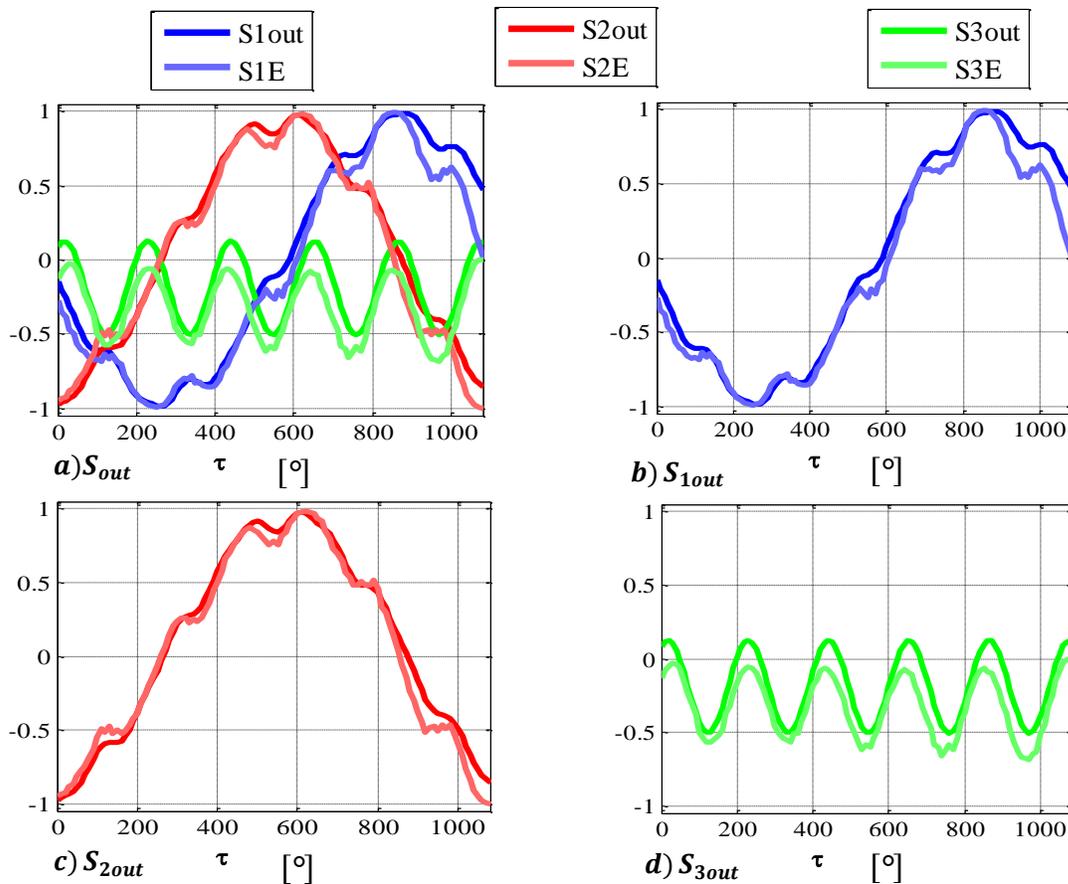


Figura 95. Ajustes para la fibra EDOS-103, torsión positiva, $\phi = 60^\circ$ y a una longitud de onda de 1550 nm . a) S_{out} , b) S_{1out} , c) S_{2out} , d) S_{3out} .

El resultado de los ajustes en la esfera de Poincaré para este ángulo azimutal (Figura 96) fue aceptable, en este ajuste se puede ver que las trayectorias de ambas curvas (experimentales y teóricas) son parecidas, en el cual las dos describen trocoides, pero con la diferencia de que la curva experimental

presenta límites de libramiento aproximado de 48° , mientras que la curva teórica presenta unos límites de libramiento de aproximadamente 60° .

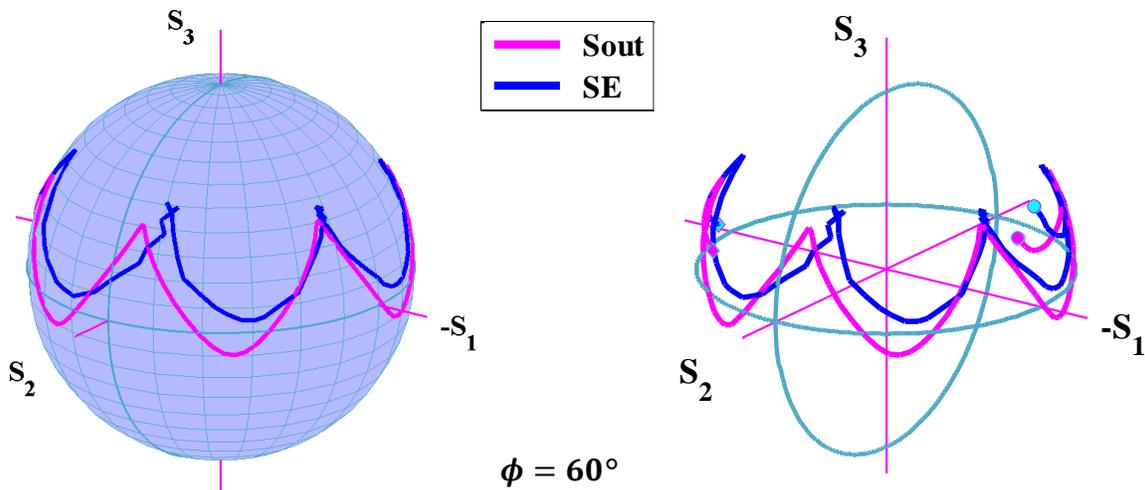


Figura 96. Representación en la esfera de Poincaré para el ajuste $\phi = 60^\circ$ en la fibra EDOS-103 para $\lambda = 1550 \text{ nm}$.

En resumen analizando todas las gráficas y los ajustes realizados a esta fibra dicróica pudimos observar comportamientos similares, con pequeñas variaciones entre diferentes ángulos azimutales y longitudes de onda.

De acuerdo a los datos técnicos de esta fibra se sabe que presenta baja absorción, y observando los resultados gráficos de las mediciones, encontramos un cierto parecido con las gráficas de la fibra SMF-28, pero con muchas más variaciones y desajustes, lo que nos lleva a pensar que probablemente esto le pasaría a una fibra SMF-28 si tuviera más absorción de la que originalmente adquiere en su fabricación.

Es importante resaltar que los ajustes realizados para la longitud de onda de 1550 nm se hicieron a partir de los valores numéricos de la Tabla 22, en los cuales se puede ver claramente que para cada ángulo azimutal se mantuvieron constantes los valores, así también se mantuvo un aceptable grado de ajuste entre ambas curvas.

Capítulo 5. Conclusiones

La presente tesis constituye un trabajo tanto teórico como experimental sobre el efecto que produce la torsión mecánica de una fibra óptica sobre el estado de polarización de la luz que transita por ella. Se consideraron los casos de fibras ópticas con y sin absorción. Dentro de este estudio destacan por su importancia los siguientes puntos:

1. Se describen los fundamentos de la convención de signos de Nebraska así como un procedimiento para establecer la convención de signos de polarización sin ambigüedad o inconsistencia, y se proporciona un cuadro comparativo entre las diferentes convenciones de signos.
2. Se estableció una técnica detallada sobre el procedimiento experimental en el laboratorio incluyendo la preparación de las muestras de fibra óptica así como la calibración del equipo de medición.
3. Se desarrollaron programas de computadora (Matlab y Mathematica) para el procesado de datos experimentales incluyendo una interface visual para facilitar su operación.
4. Se estableció una secuencia y metodología de ajuste numérico, incluyendo tres métodos de prueba numérica utilizando: los vectores de Stokes de salida S_{out} , las matrices de Mueller y el producto Kroenecker de las matrices de Jones.
5. Estableciendo una analogía con las ecuaciones de la cinemática de rotación de un cuerpo rígido (conos de cuerpo y espacio) se describe un modelo geométrico que describe el comportamiento del vector de S_{out} en la esfera de Poincaré. Se ilustran los movimientos de precesión y nutación de S_{out} sobre la esfera de Poincaré. Esto nos posibilita, en un futuro, el desarrollar una técnica de ajuste de datos en 3D (esfera de Poincaré). En la presente tesis aún se utiliza un ajuste numérico en 2D (Vector de Stokes vs Torsión). La desventaja de un ajuste en 2D es que los pequeños errores o desajustes $\Delta S_{1,2,3}$ en los parámetros $S_{1,2,3}$ se suman pitagóricamente, *i. e.* $\Delta S_{out}^2 = \Delta S_1^2 + \Delta S_2^2 + \Delta S_3^2$.
6. Se encontró que, excepto para la fibra dopada con erbio, los resultados experimentales se ajustan bien a la teoría cuando se trata de fibras no dicroicas.
7. Se evaluó la fase geométrica en cada caso y se encontró que para las fibras birrefringentes (Bow-tie, Panda y elíptica) esta fase es prácticamente nula. Esto es consistente con la teoría ya que los

eigenmodos de estas fibras están siempre en el ecuador y serán transportados a lo largo de este, lo cual nos indica que el ángulo sólido descrito corresponde al de un hemisferio (L. H. Ryder, 2000), *i.e.* es igual a 2π .

8. Las fibras birrefringentes están diseñadas para soportar esfuerzos de tensión σ_{ii} como los introducidos por doblado o embobinado de la fibra, siendo de mejor calidad (en secuencia) la Bow-tie, Panda y elíptica; lo anterior se refleja en los precios de mercado. De hecho, en la actualidad prácticamente solo se vende la fibra Bow-tie debido a su eficiencia para preservar la polarización lineal. Todas estas fibras nos generaron trocoides recortadas en la esfera de Poincaré y analizando las amplitudes de los límites de libramiento en el movimiento de nutación de S_{out} para cada fibra, encontramos que cuando estas fibras son sometidas a esfuerzos de corte σ_{ij} (torsión) la calidad con que las fibras preservan la polarización es en el orden inverso (elíptica, panda y Bow-tie). Este último orden coincide con el grado de complejidad que tiene la distribución de esfuerzos en el núcleo de cada tipo de fibra.

9. Los valores del parámetro S_3 presentó un carácter oscilatorio para las tres fibras birrefringentes. Teóricamente esta oscilación debería ser nula al igual que el valor absoluto de S_3 , ya que estas fibras están diseñadas para preservar la polarización lineal. A diferencia de la curvas experimentales de S_3 , las curvas teóricas anticipan un comportamiento periódico para S_3 . El período de S_3 vs τ es aproximadamente igual para las tres fibras, con un valor aproximado de 133° . Esto nos hace pensar que por ejemplo para la fibra Bow-tie su estructura es tal que después de girar determinado ángulo los modos en S_1 y S_2 se acoplan intercambiando su energía, sin embargo estos modos lineales adquieren un pequeño retardamiento de tal manera que su suma ya no genera otro estado lineal sino un estado de polarización ligeramente elíptico (S_3) y el ciclo es repetitivo. Lo anterior está en concordancia con la hipótesis planteada en el punto 8.

10. El modelo matemático para el caso de fibras dopadas requiere de algún ajuste que no se está considerando ya que funciona muy bien con las fibras sin absorción. Como se mencionó en la introducción y en el capítulo 4, el comportamiento de una fibra dopada con erbio es muy complicado y un estudio más detallado es necesario. Nuestra hipótesis es que los fenómenos de absorción en la fibra óptica se ven influenciados por la torsión. Consecuentemente también la emisión ASE será dependiente de la torsión. No hay estudios reportados sobre este fenómeno.

Lista de referencias bibliográficas

- Aben, H. (1979). *Integrated Photoelasticity*. N.Y., McGraw Hill International Book Company.
- Arteaga, O. and Canillas, A. (2009). Pseudopolar decomposition of the Jones and Mueller-Jones exponential polarization matrices. *J. Opt. Soc. Am. A*, 26(4), 783-793, doi: 10.1364/JOSAA.26.000783.
- Azzam, R., and Bashara, N., (1977) *Ellipsometry and Polarized Light*. New York, NY. North-Holland Publishing Co.
- Berry, M. V. (1984). Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 392(1802): 45–57.
- Brosseau, C. (1998). *Fundamentals of Polarized Light: A Statistical Optics Approach*. New York, NY. John Wiley and Sons, Inc.
- Brown, C. S. (1992). Unified formalism for treating polarization effects using Stokes parameters and the Lorentz group. Proceedings of the SPIE 1746, San Diego, CA, (pp. 174-182). International Society for Optics and Photonics.
- Brown, C. S. and Bak, A. E. (1995). Unified formalism for polarization optics with application to polarimetry on a twisted optical fiber. *Opt. Eng.* 34(6), 1625-1635.
- Chartier, T., Greverie, C., Selle, L., Carlus, L., Bouquet, G. and Montmorillon, L. (2003). Measurement of the stress-optic coefficient of single-mode fibers using a magneto-optic method, *Opt. Exp.* 11(20), 2561–2566.
- Clarke, D. (1974). Nomenclature of polarized light: elliptical polarization. *Appl. Opt.*, 13(2), 222-224.
- Collett, E., (2003). *Polarized Light in Fiber Optics*. Lincroft, NJ. (pp. 37-43). The PolaWave Group.
- Damask J. N. (2005). *Polarization optics in telecommunications*. New York, NY. (pp. 10-12). Springer.
- Eickhoff, W., Yen, Y., and Ulrich, R. (1981). Wavelength dependence of birefringence in single-mode fiber, *Appl. Opt.* 20(19), 3428–3435.
- Fibercore a, (2014), Recuperado en octubre de: <http://www.fibercore.com/expertise/fiberpaedia/bow-tie-fiber>
- Fibercore b, (2014), Recuperado en octubre de: <http://www.fibercore.com/expertise/fiberpaedia?letter=B>

Fibercore c, (2014), Recuperado en octubre de:
<http://www.hanamuraoptics.com/opticalfiber/fcl/HB.pdf>

Frigo, N. J. (1986). A generalized geometrical representation of coupled mode theory. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 22(11), 2131-2140.

Fujiwara, H., (2007). *Spectroscopic Ellipsometry Principles and Applications*. New York, NY. John Wiley and Sons, Inc.

Gehrels, T. (1974). *Planets, Stars and Nebulae Studied with Photopolarimetry*. Tucson, University of Arizona Press.

Gordon, J. P., and Kogelnik, H. (2000). PMD fundamentals: Polarization mode dispersion in optical fibers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 97(9), 4541-4550.

Hauge, P., Muller, R. and Smith, C. (1980). Conventions and formulas for using the mueller-stokes calculus In Ellipsometry. *Surface Science*, 96(1), 81-107.

Hecht, E., and Zajac, A., (2003), *Optics*, (4a ed) (pp. 14-447). Reading, MA, Addison-Wesley.

Hestenes, D., (2002). Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics, Recuperado de:
<http://geocalc.clas.asu.edu/pdf/OerstedMedalLecture.pdf>

Holm, R.T., (1997), Convention Confusions in Palik, E.D., *Handbook of Optical Constants of Solids*, 2, pp. 21-55, San Diego, CA, Academic Press.

Jones, R. C. (1941). A new calculus for the treatment of optical systems. *J. Opt. Soc. Am.*, 31(7), 488-493.

Jones, R. C. (1948). A new calculus for the treatment of optical systems. VII. Properties of the N-matrices. *J. Opt. Soc. Am.*, 38(8), 671-683.

Kemp, N., Zaatari, H., Park, J., Rylander, H.G. and Milner, T. (2005). Form-biattenuance in fibrous tissues measured with polarization-sensitive optical coherence tomography (PS-OCT). *Opt. Express*, 13(12), 4611-28.

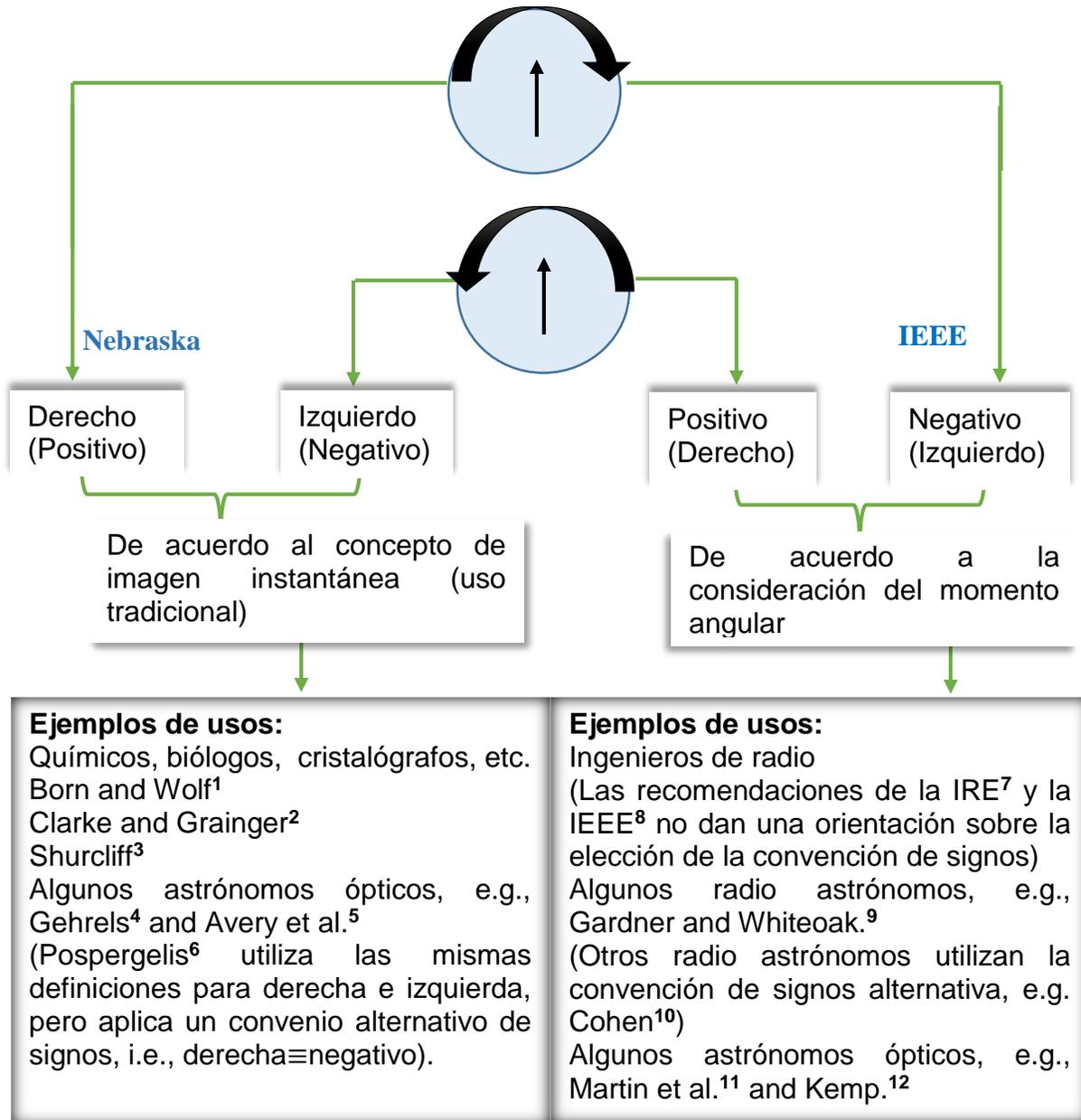
Kliger, D. S. (1990). *Polarized Light in Optics and Spectroscopy*. (pp. 112-121). San Diego, CA, Academic Press.

Kubo, H. and Nagata, R. (1983). Vector representation of behavior of polarized light in a weakly inhomogeneous medium with birefringence and dichroism. *J. Opt. Soc. Am.*, 73(1), 30-34.

- Kubo, H. and Nagata, R. (1985). Vector representation of behavior of polarized light in a weakly inhomogeneous medium with birefringence and dichroism. II. Evolution of polarization states. *J. Opt. Soc. Am. A*, 2(1), 30-34.
- Kumar A., Ghatak A., (2011), *Polarization of light with applications in Optical Fibers*. Bellingham, Washington.
- Love, A. E. H. (2011). *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. N.Y., Dover Books on Engineering.
- Lu, S. Y. y Chipman, R. A. (1994). Homogeneous and inhomogeneous Jones matrices. *J. Opt. Soc. Am. A*, 11(2) 766-773.
- Monerie, M. and Lamouler, P. (1981) Birefringence measurement in twisted single-mode fibers, *Electron. Lett.* 17(7), 252–253.
- Mora, D. E., (2014). *Estudio teórico de la birrefringencia inducida al bobinar helicoidalmente una fibra monomodo y su aplicación a sensores de corriente eléctrica*. Tesis de maestría en ciencias. CICESE. 116 p.
- Muller, R. H. (1969). Definitions and conventions in ellipsometry. *Surf. Sci.*, 16, 14-33.
- Optipedia, (2014), Recuperado de: <http://en.optipedia.info/lsource-index/fiberlaser-index/fiber/pmf/pmf/>
- Park, J., Kemp, N. J., Zaatari, H. N., Rylander III, H. G., and Milner, T. E. (2006). Differential geometry of normalized Stokes vector trajectories in anisotropic media. *J. Opt. Soc. Am. A*, 23(3), 679-690.
- R.P.Photonics,(2014), Recuperado en octubre de: http://www.rpphotonics.com/polarization_maintaining_fibers.html
- Robishaw, T. (2008). *Magnetic Fields Near and Far: Galactic and Extragalactic Single-Dish Radio Observations of the Zeeman Effect*. Ph.D Dissertation. University of California,Berkeley. 172 p.
- Ryder, L. H. (2000). The optical Berry phase and the Gauss-Bonnet theorem. *Eur. J. Phys.* 6(10), 1352-1356
- Schuh, R. E., Sikora, E.S.R., Walker , N. G., Siddiqui , A. S. , Gleeson , L. M. and Bebbington , D. H. O. (1995). Theoretical analysis and measurement of effects of fiber twist on polarization mode dispersion of optical fibers, *Electron. Lett.* 31(20), 1772-1773.
- Schurcliff, W. (1962). *Polarized Light*. Boston, MA. Harvard University Press: Cambridge.

- Simmons, J. W., Guttman, M. J. (1970). *States, waves, and photons: A modern introduction to light*. Reading, MA (USA), Addison-Wesley.
- Tai, H., and Rogowski, R. (2002). Optical anisotropy induced by torsion and bending in an optical fiber. *Opt. Fiber Technol.*, 8(2), 162-169.
- Tentori, D., Ayala-Díaz, C., Ledezma-Sillas, E., Treviño-Martínez, F., and García-Weidner, A. (2009). Birefringence matrix for a twisted single-mode fiber: Geometrical contribution. *Opt. Commun.*, 282(5), 830-834.
- Tentori, D., Garcia-Weidner, A., and Ayala-Díaz, C. (2012). Birefringence matrix for a twisted single-mode fiber: Photoelastic and geometrical contributions. *Opt. Fiber Technol.*, 18(1), 14-20.
- Timoshenko, S., (1951). *Theory of elasticity*. (pp. 154-174) New York, NY. McGraw-Hill.
- Trugut, S., (2003). *Polarization State of a Photon* (pp. 24-33) Ankara, Turkey. Middle East Technical University Department of Physics
- Tsao, C. (1992). *Optical fibre waveguide analysis*. (pp. 49-70) New York, Ny. Oxford University Press.
- Tudor, T. (2008). Interaction of light with the polarization devices: a vectorial Pauli algebraic approach. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41, 415303-1–14.
- Tudor, T. (2010). Vectorial Pauli algebraic approach in polarization optics. I. Device and state operators. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 121(13), 1226-1235.
- Tudor, T. (2010). Vectorial Pauli algebraic approach in polarization optics. II. Interaction of light with the canonical polarization devices. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 121(23), 2149-2158.
- Tudor, T. y Maneaa, V. (2012). Some applications of the vectorial pure operatorial Pauli algebraic approach in polarization optics. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, 123(19), 1732-1741.
- Ulrich, R., & Simon, A. (1979). Polarization optics of twisted single-mode fibers. *Appl. Opt.*, 18(13), 2241-2251.
- Weidner, A. G. (1992). The Poincaré sphere: isolated and real trajectories describing the state of polarization. *J. Opt.*, 23(1), 3.
- Yariv, A., Yeh, P., (1984). *Optical Waves in Crystals*. (pp. 562-583) New York, NY. John Wiley and Sons, Inc.

Apéndice I. Convención de Signos



1. Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics* (Pergamon, Oxford, 1959), p. 27.
2. Clarke, D. and Grainger, J. F., *Polarized Light and Optical Measurement* (Pergamon, Oxford, 1971), (a) p. 18; (b) p. 29.
3. Shurcliff, W. A., *Polarized Light* (Harvard U. Pr., Cambridge, Mass., 1962), p. 5.
4. T. Gehrels, *Astrophys. J.* 173, L23 (1972).
5. Avery, R. W., Michalsky, J. J., Jr., and R. A. Stokes, *Astrophys. J.* 180, L127 (1973).

6. Pospergelis, M. M., *Soviet Astron. A. J.* 12,973 (1969).
7. IRE, *Proc. IRE* 30, No. 7, part III, suppl. IW 47 (1942).
8. *IEEE Standard Dictionary of Electrical and Electronic Terms*, (IEEE, New York, 1972), p. 500.
9. Gardner, F. F. and Whiteoak, J. B., *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, L. Goldberg, Ed. (Annual Reviews, Inc., Stanford, Calif., 1966), Vol. 4, pp. 245-292.
10. Cohen, M. H., *Proc. IRE* 46, 172 (1958).
11. Martin, P. G., Illing, R., and J. R. P. Angel, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 159, 191 (1972).
12. Kemp, J. C., *Astrophys. J.* 162, 169 (1970).

Apéndice II. Matrices convención positiva (Nebraska)

Parámetros de Stokes

$$S_1 = S_0 \cos 2\epsilon_p \cos 2\psi_p \quad (\text{AII. 1})$$

$$S_2 = S_0 \cos 2\epsilon_p \sin 2\psi_p \quad (\text{AII. 2})$$

$$S_3 = S_0 \sin 2\epsilon_p \quad (\text{AII. 3})$$

Rotación de Matrices

$$\mathbf{M}(\Psi_F) = \mathbf{R}(-\Psi_F) \mathbf{M} \mathbf{R}(\Psi_F) \quad (\text{AII. 4})$$

$$\mathbf{R}(\Psi_F) = \begin{bmatrix} \cos(\Psi_F) & \sin(\Psi_F) \\ -\sin(\Psi_F) & \cos(\Psi_F) \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 5})$$

$$\mathbf{R}_m(\Psi_F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\Psi_F) & \sin(2\Psi_F) & 0 \\ 0 & -\sin(2\Psi_F) & \cos(2\Psi_F) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 6})$$

Matriz U de conversión

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 7})$$

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 8})$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*)\mathbf{U}^{-1} \quad (\text{AII. 9})$$

Matriz de Retardador

$$\mathbf{M} = e^{i\left(\frac{|\bar{\mathbb{F}}|}{2}\right)\hat{\mathbb{F}} \cdot \vec{\sigma}} = \cos \frac{|\bar{\mathbb{F}}|}{2} \sigma_0 + i \sin \frac{|\bar{\mathbb{F}}|}{2} \hat{\mathbb{F}} \cdot \vec{\sigma}, \quad (\text{AII. 10})$$

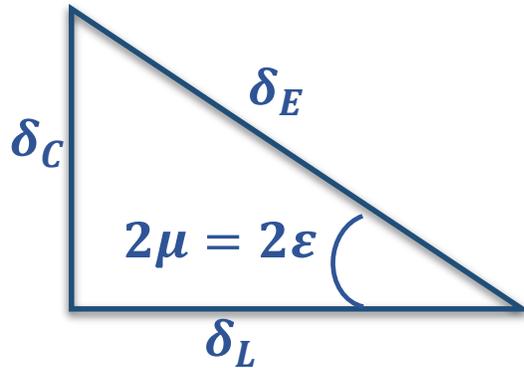
Matriz de Retardador elíptico

$$\mathbf{M} = \cos \frac{|\bar{\mathbb{F}}|}{2} \sigma_0 + i \sin \frac{|\bar{\mathbb{F}}|}{2} \hat{\mathbb{F}} \cdot \vec{\sigma}, \text{ con } \bar{\mathbb{F}}_E = [\cos(2\mu), 0, \sin(2\mu)] \delta_E \quad (\text{AII. 11})$$

$$\mathbf{M}_E(\delta_E) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta_E}{2}\right) + i \cos(2\mu) \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_E}{2}\right) & \operatorname{sen}(2\mu) \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \\ -\operatorname{sen}(2\mu) \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_E}{2}\right) & \cos\left(\frac{\delta_E}{2}\right) - i \cos(2\mu) \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 12})$$

$$\mathbf{M}_{Em} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) + \cos(4\mu) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) & \operatorname{sen}(\delta_E) \operatorname{sen}(2\mu) & \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \operatorname{sen}(4\mu) \\ 0 & -2 \cos(\mu) \operatorname{sen}(\delta_E) \operatorname{sen}(\mu) & \cos(\delta_E) & \operatorname{sen}(\delta_E) \cos(2\mu) \\ 0 & \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \operatorname{sen}(4\mu) & -\operatorname{sen}(\delta_E) \cos(2\mu) & \cos^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) - \cos(4\mu) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 13})$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2 \operatorname{sen}^2(2\mu) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) & \operatorname{sen}(\delta_E) \operatorname{sen}(2\mu) & \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \operatorname{sen}(4\mu) \\ 0 & -2 \cos(\mu) \operatorname{sen}(\delta_E) \operatorname{sen}(\mu) & \cos(\delta_E) & \operatorname{sen}(\delta_E) \cos(2\mu) \\ 0 & \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \operatorname{sen}(4\mu) & -\operatorname{sen}(\delta_E) \cos(2\mu) & 1 - 2 \cos^2(2\mu) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 14})$$



$$\operatorname{sen} 2\mu = \frac{\delta_C}{\delta_E} \quad (\text{AII. 15})$$

$$\cos 2\mu = \frac{\delta_L}{\delta_E} \quad (\text{AII. 16})$$

$$\delta_E^2 = \delta_L^2 + \delta_C^2 \quad (\text{AII. 17})$$

$$\hat{\mathbb{F}}_L$$

Matriz de Retardador Lineal

$$\mathbf{M} = \cos \frac{|\mathbb{F}|}{2} \boldsymbol{\sigma}_0 + i \operatorname{sen} \frac{|\mathbb{F}|}{2} \hat{\mathbb{F}} \cdot \vec{\sigma}, \text{ con } \bar{\mathbb{F}}_L = [1, 0, 0] \delta_L \quad (\text{AII. 18})$$

$$\mathbf{M}_L = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta_L}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_L}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\delta_L}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_L}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{AII.19})$$

$$\mathbf{M}_L(\Psi_F) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta_L}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_L}{2}\right) \cos(2\Psi_F) & i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_L}{2}\right) \operatorname{sen}(2\Psi_F) \\ i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_L}{2}\right) \operatorname{sen}(2\Psi_F) & \cos\left(\frac{\delta_L}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_L}{2}\right) \cos(2\Psi_F) \end{bmatrix} \quad (\text{AII.20})$$

$$\mathbf{M}_{Lm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\delta_L) & \operatorname{sen}(\delta_L) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\delta_L) & \cos(\delta_L) \end{bmatrix} \quad (\text{AII.21})$$

$$\mathbf{M}_{Lm}(\Psi_F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\Psi_F) + \operatorname{sen}^2(2\Psi_F) \cos \delta_L & \operatorname{sen}(4\Psi_F) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_L}{2}\right) & -\operatorname{sen}(2\Psi_F) \operatorname{sen} \delta_L \\ 0 & \operatorname{sen}(4\Psi_F) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_L}{2}\right) & \operatorname{sen}^2(2\Psi_F) + \cos^2(2\Psi_F) \cos \delta_L & \cos(2\Psi_F) \operatorname{sen} \delta_L \\ 0 & \operatorname{sen}(2\Psi_F) \operatorname{sen} \delta_L & -\cos(2\Psi_F) \operatorname{sen} \delta_L & \cos \delta_L \end{bmatrix} \quad (\text{AII.22})$$

$\delta_L =$ retardamiento lineal, $\Psi_F =$ inclinación del eje rápido

Matriz de Retardador Circular (Rotación)

$$\mathbf{M} = \cos \frac{|\bar{\mathbb{F}}|}{2} \boldsymbol{\sigma}_0 + i \operatorname{sen} \frac{|\bar{\mathbb{F}}|}{2} \hat{\mathbb{F}} \cdot \vec{\sigma}, \text{ con } \bar{\mathbb{F}}_c = [0, 0, 1] \delta_c \quad (\text{AII.23})$$

$$\mathbf{M}_C(\delta_c) = \mathbf{R}\left(\frac{\delta_c}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta_c}{2}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_c}{2}\right) \\ -\operatorname{sen}\left(\frac{\delta_c}{2}\right) & \cos\left(\frac{\delta_c}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_c) & \operatorname{sen}(\theta_c) \\ -\operatorname{sen}(\theta_c) & \cos(\theta_c) \end{bmatrix} \quad (\text{AII.24})$$

$$\mathbf{M}_{Cm}(\delta_c) = \mathbf{R}_m\left(\frac{\delta_c}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta_c) & \operatorname{sen}(\delta_c) & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}(\delta_c) & \cos(\delta_c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AII.25})$$

$\delta_c =$ retardamiento circular

$\delta_c = 2\theta_c$, $\theta_c =$ ángulo de giro del estado de polarización en el espacio.

Matriz de Polarizador

$$\mathbf{P}_E = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \bar{p}_e \cdot \vec{\sigma}) \quad (\text{AII. 26})$$

Matriz de Polarizador Lineal

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \bar{p}_L \cdot \vec{\sigma}), \text{ con } \bar{p}_L = [\cos(2\psi), \text{sen}(2\psi), 0] \quad (\text{AII. 27})$$

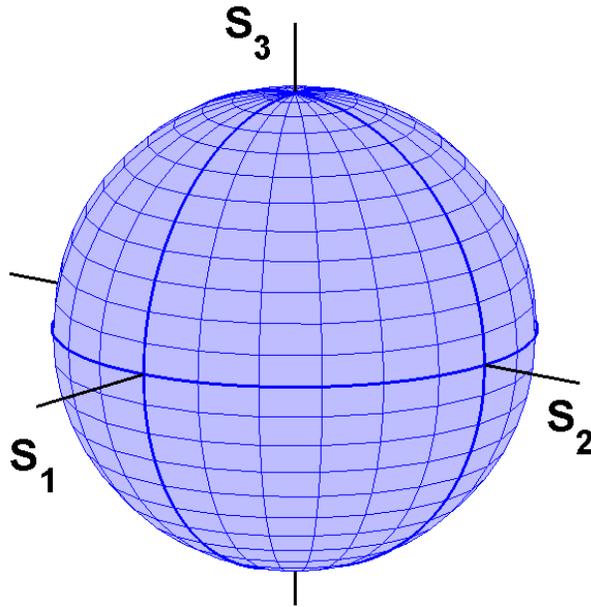
$$P(\Psi_P) = \begin{bmatrix} \cos^2(\Psi_P) & \text{sen}(\Psi_P) \cos(\Psi_P) \\ \text{sen}(\Psi_P) \cos(\Psi_P) & \text{sen}^2(\Psi_P) \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 28})$$

$$\mathbf{P}_m(\Psi_P) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\Psi_P) & \text{sen}(2\Psi_P) & 0 \\ \cos(2\Psi_P) & \cos^2(2\Psi_P) & \left(\frac{1}{2}\right) \text{sen}(4\Psi_P) & 0 \\ \text{sen}(2\Psi_P) & \left(\frac{1}{2}\right) \text{sen}(4\Psi_P) & \text{sen}^2(2\Psi_P) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AII. 29})$$

Ψ_P = inclinación del eje de transmisión del polarizador

Esfera de Poincaré

$$\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}_3 \quad (\text{AII. 30})$$



Apéndice III. Matrices convención negativa (Tsao)

Parámetros de Stokes

$$S_1 = S_0 \cos 2\epsilon \cos 2\psi \quad (\text{AIII. 1})$$

$$S_2 = S_0 \cos 2\epsilon \sen 2\psi \quad (\text{AIII. 2})$$

$$S_3 = -S_0 \sen 2\epsilon \quad (\text{AIII. 3})$$

Rotación de Matrices

$$\mathbf{M}(\Psi_F) = \mathbf{R}(\Psi_F) \mathbf{M} \mathbf{R}(-\Psi_F) \quad (\text{AIII. 4})$$

$$\mathbf{R}(\Psi_F) = \begin{bmatrix} \cos(\Psi_F) & -\sen(\Psi_F) \\ \sen(\Psi_F) & \cos(\Psi_F) \end{bmatrix} \quad (\text{AIII. 5})$$

$$\mathbf{R}_m(\Psi_F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\Psi_F) & -\sen(2\Psi_F) & 0 \\ 0 & \sen(2\Psi_F) & \cos(2\Psi_F) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII. 6})$$

Matriz U de conversión

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII. 7})$$

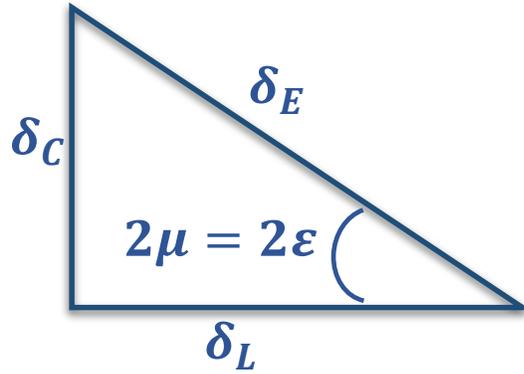
$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII. 8})$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*)\mathbf{U}^{-1} \quad (\text{AIII. 9})$$

Matriz de Retardador elíptico

$$\mathbf{M}_E(\delta_E) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta_E}{2}\right) - i \cos(2\mu) \sen\left(\frac{\delta_E}{2}\right) & -\sen(2\mu) \sen\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \\ \sen(2\mu) \sen\left(\frac{\delta_E}{2}\right) & \cos\left(\frac{\delta_E}{2}\right) + i \cos(2\mu) \sen\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{AIII. 10})$$

$$M_{Em} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2 \operatorname{sen}^2(2\mu) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) & -\operatorname{sen}(\delta_E) \operatorname{sen}(2\mu) & -\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \operatorname{sen}(4\mu) \\ 0 & \operatorname{sen}(\delta_E) \operatorname{sen}(2\mu) & \cos(\delta_E) & \operatorname{sen}(\delta_E) \cos(2\mu) \\ 0 & -\operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \operatorname{sen}(4\mu) & -\operatorname{sen}(\delta_E) \cos(2\mu) & 1 - 2 \cos^2(2\mu) \operatorname{sen}^2\left(\frac{\delta_E}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{AIII. 11})$$



$$\operatorname{sen} 2\mu = \frac{\delta_C}{\delta_E} \quad (\text{AIII. 12})$$

$$\cos 2\mu = \frac{\delta_L}{\delta_E} \quad (\text{AIII. 13})$$

$$\delta_E^2 = \delta_L^2 + \delta_C^2 \quad (\text{AIII. 14})$$

Matriz de Retardador Lineal

$$M_L(\delta_L) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta_L}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_L}{2}\right) & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\delta_L}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_L}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (\text{AIII. 15})$$

$$M_{Lm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\delta_L) & -\operatorname{sen}(\delta_L) \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}(\delta_L) & \cos(\delta_L) \end{bmatrix} \quad (\text{AIII. 16})$$

δ_L = retardamiento lineal

Matriz de Matriz Retardador Circular (Rotación)

$$M_C(\delta_C) = R\left(\frac{\delta_C}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\delta_C}{2}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\delta_C}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\delta_C}{2}\right) & \cos\left(\frac{\delta_C}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_C) & -\operatorname{sen}(\theta_C) \\ \operatorname{sen}(\theta_C) & \cos(\theta_C) \end{bmatrix} \quad (\text{AIII. 17})$$

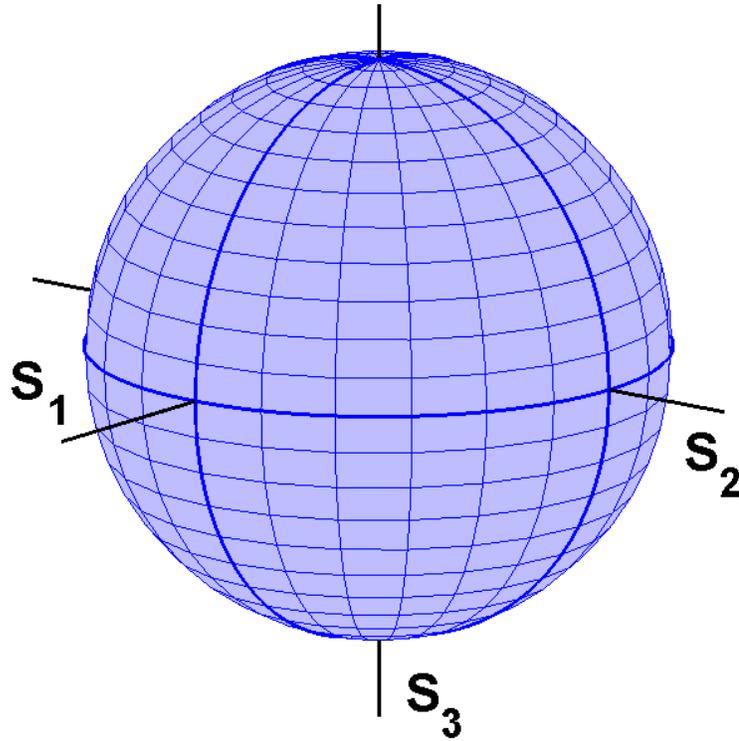
$$\mathbf{M}_{Cm}(\delta_c) = \mathbf{R}_m\left(\frac{\delta_c}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\delta_c) & -\text{sen}(\delta_c) & 0 \\ 0 & \text{sen}(\delta_c) & \cos(\delta_c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{AIII. 18})$$

$\delta_c =$ Retardamiento circular

$\delta_c = 2\theta_c$, $\theta_c =$ ángulo de giro del estado de polarización en el espacio.

Esfera de Poincaré

$$\mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_2 = -\mathbf{S}_3 \quad (\text{AIII. 19})$$



Apéndice IV. Matrices dicróicas convención negativa

Matriz de Jones

$$J_{BD} = e^{-(\alpha_A)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) - j\left(\frac{\gamma_l}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) & -\left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \\ \left(\frac{\gamma_c}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) & \cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) + j\left(\frac{\gamma_l}{\gamma}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{AIV. 1})$$

Matriz de Mueller

$$M_{BD} = \left(\frac{e^{-\alpha_0}}{\gamma^2}\right) [C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4] = \left(\frac{e^{-\alpha_0}}{\gamma^2}\right) \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \quad (\text{AIV. 2})$$

donde los elementos m_{ij} son

$$C_1 = \begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \\ m_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^2 \cosh(\alpha) \\ 2((\alpha_L \delta - \alpha \delta_L) \operatorname{sen}(\delta) + (\alpha \alpha_L + \delta \delta_L) \operatorname{senh}(\alpha)) \\ -2(\alpha_L \delta_C - \alpha_C \delta_L) (\cos(\delta) - \cos(\alpha)) \\ -2((\alpha_C \delta - \alpha \delta_C) \operatorname{sen}(\delta) + (\alpha \alpha_C + \delta \delta_C) \operatorname{senh}(\alpha)) \end{bmatrix} \quad (\text{AIV. 2})$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \\ m_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{21} \\ \zeta \\ 2((\alpha \alpha_C + \delta \delta_C) \operatorname{sen}(\delta) + (-\alpha_C \delta + \alpha \delta_C) \operatorname{senh}(\alpha)) \\ 2(\alpha_C \alpha_L + \delta_C \delta_L) (\cos(\delta) - \cos(\alpha)) \end{bmatrix} \quad (\text{AIV. 3})$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \\ m_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(\alpha_L \delta_C - \alpha_C \delta_L) (\cos(\delta) - \cos(\alpha)) \\ -2((\alpha \alpha_C + \delta \delta_C) \operatorname{sen}(\delta) + (-\alpha_C \delta + \alpha \delta_C) \operatorname{senh}(\alpha)) \\ \gamma^2 \cos(\delta) \\ -2((\alpha \alpha_L + \delta \delta_L) \operatorname{sen}(\delta) + (-\alpha_L \delta + \alpha \delta_L) \operatorname{senh}(\alpha)) \end{bmatrix} \quad (\text{AIV. 4})$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} m_{14} \\ m_{24} \\ m_{34} \\ m_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{41} \\ m_{42} \\ 2((\alpha \alpha_L + \delta \delta_L) \operatorname{sen}(\delta) + (-\alpha_L \delta + \alpha \delta_L) \operatorname{senh}(\alpha)) \\ \zeta_0 \end{bmatrix} \quad (\text{AIV. 5})$$

donde

$$\zeta = (\alpha^2 + \alpha_c^2 - \alpha_L^2 + \delta^2 + \delta_c^2 - \delta_L^2) \cos(\delta) + (\alpha^2 - \alpha_c^2 + \alpha_L^2 + \delta^2 - \delta_c^2 + \delta_L^2) \cosh(\alpha) \quad (\text{AIV. 6})$$

$$\zeta_0 = (\alpha^2 - \alpha_c^2 + \alpha_L^2 + \delta^2 - \delta_c^2 + \delta_L^2) \cos(\delta) + (\alpha^2 + \alpha_c^2 - \alpha_L^2 + \delta^2 + \delta_c^2 - \delta_L^2) \cosh(\alpha) \quad (\text{AIV. 7})$$

Modelo matemático

$$\mathbf{S}_{out} = \mathbf{R}(\theta)\mathbf{R}(\zeta)\mathbf{R}(b\tau) \mathbf{M}_{BD}(\delta_\tau, \alpha) \mathbf{R}(-\theta)\mathbf{S}_{in}(\phi) = \mathbf{R}(b\tau + \zeta + \theta) \mathbf{S}_{int} \quad (\text{AIV. 8})$$

$$\begin{bmatrix} S_{0out} \\ S_{1out} \\ S_{2out} \\ S_{3out} \end{bmatrix} = \left(\frac{e^{-\alpha_0}}{\gamma^2} \right) \begin{bmatrix} S'_{0out} \\ S'_{1out} \\ S'_{2out} \\ S'_{3out} \end{bmatrix} \quad (\text{AIV. 9})$$

Cálculos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ 0 & -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\phi) \\ \sin(2\phi) \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \cos(2\theta)\cos(2\phi) + \sin(2\theta)\sin(2\phi) \\ -\cos(2\theta)\sin(2\phi) + \sin(2\theta)\cos(2\phi) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ \cos[2(\phi - \theta)] \\ \sin[2(\phi - \theta)] \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{AIV. 10})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{int} = \begin{pmatrix} S_{0int} \\ S_{1int} \\ S_{2int} \\ S_{3int} \end{pmatrix} &= \mathbf{M}_{BD} \mathbf{R}(-\theta) \mathbf{S}_{in}(\phi) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cos 2(\phi - \theta) \\ \sin 2(\phi - \theta) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} + m_{12} \cos 2(\phi - \theta) + m_{13} \sin 2(\phi - \theta) \\ m_{21} + m_{22} \cos 2(\phi - \theta) + m_{23} \sin 2(\phi - \theta) \\ m_{31} + m_{32} \cos 2(\phi - \theta) + m_{33} \sin 2(\phi - \theta) \\ m_{41} + m_{42} \cos 2(\phi - \theta) + m_{43} \sin 2(\phi - \theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{AIV. 11})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{out} &= \mathbf{R}(b\tau + \zeta + \theta) \mathbf{S}_{int} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2(b\tau + \zeta + \theta) & -\sin 2(b\tau + \zeta + \theta) & 0 \\ 0 & \sin 2(b\tau + \zeta + \theta) & \cos 2(b\tau + \zeta + \theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S}_{int} \end{aligned} \quad (\text{AIV. 12})$$

$$\mathbf{S}_{out} = \begin{pmatrix} S_{0out} \\ S_{1out} \\ S_{2out} \\ S_{3out} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{0int} \\ S_{1int} \cos 2(b\tau + \zeta + \theta) + S_{2int} \operatorname{sen} 2(b\tau + \zeta + \theta) \\ S_{2int} \cos 2(b\tau + \zeta + \theta) - S_{1int} \operatorname{sen} 2(b\tau + \zeta + \theta) \\ S_{3int} \end{bmatrix} \quad (\text{AIV. 13})$$

$$\mathbf{S}_{out} = \begin{pmatrix} m_{11} + m_{12}q_3 + m_{13}q_2 \\ q_1[m_{21} + m_{22}\cos 2(\varphi - \theta) + q_2] + q_0[m_{31} + m_{32}q_3 + m_{33}]q_2 \\ -q_0[m_{21} + m_{22}q_3 + m_{23}q_2] + q_1[m_{31} + m_{32}q_3 + m_{33}q_2] \\ m_{41} + m_{42}q_3 + m_{43}q_2 \end{pmatrix} \quad (\text{AIV. 14})$$

donde

$$q_0 = \operatorname{sen} 2(b\tau + \zeta - \theta) \quad (\text{AIV. 15})$$

$$q_1 = \cos 2(b\tau + \zeta - \theta) \quad (\text{AIV. 16})$$

$$q_2 = \operatorname{sen} 2(\phi - \theta) \quad (\text{AIV. 17})$$

$$q_3 = \cos 2(\phi - \theta) \quad (\text{AIV. 18})$$