

TESIS DEFENDIDA POR
Verónica Pérez Chávez
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez
Director del Comité

Dr. Anatoly Khomenko
Miembro del Comité

Dr. Raúl Rangel Rojo
Miembro del Comité

Dr. Jesús Manuel Figueroa Rodríguez
Miembro del Comité

Dr. Pedro Negrete Regagnon
*Coordinador del programa de
posgrado en Óptica Física*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
Director de Estudios de Posgrado

4 de *noviembre* de 2010.

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
EN ÓPTICA FÍSICA**

MAPEOS CONFORMES EN ÓPTICA DE SUPERFICIES Y GUÍAS DE ONDA

TESIS

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS

Presenta:

VERÓNICA PÉREZ CHÁVEZ

Ensenada, Baja California, México, **Noviembre de 2010.**

RESUMEN de la tesis de **Verónica Pérez Chávez**, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de **MAESTRO EN CIENCIAS** en **Óptica con orientación en Óptica Física**. Ensenada, Baja California. Noviembre 2010.

MAPEOS CONFORMES EN ÓPTICA DE SUPERFICIES Y GUÍAS DE ONDA

Resumen aprobado por:

Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez
Director de Tesis

Se presenta un trabajo de revisión sobre el uso de mapeos conformes en óptica de superficies y guías de onda, así como su posible aplicación para el diseño de estructuras con propiedades ópticas efectivas distintas a las de los materiales encontrados en la naturaleza. Se establece un marco teórico general que permite abordar problemas electromagnéticos de manera sistemática, poniendo énfasis en la relación entre la geometría de las fronteras y las constantes ópticas de los medios equivalentes. Se describen las propiedades generales de los mapeos conformes y los cambios que sufren los operadores diferenciales en el espacio transformado. También se describen las modificaciones que sufren las ecuaciones de Maxwell tras aplicárseles un mapeo conforme y las consecuencias de utilizar una transformación no conforme (el llamado método c). Se presentan métodos teóricos para abordar el problema de esparcimiento en los dos espacios, el real y el transformado. Los cálculos para describir la interacción de la luz con una superficie periódica rugosa se realizan con un método riguroso, conocido como el método integral. Los resultados obtenidos presentan una buena coincidencia con los obtenidos por el método de la pantalla delgada de fase aplicada a la variación de índice de refracción que se tiene en el espacio transformado.

Palabras clave: Mapeos conformes, transformaciones, óptica de superficies.

ABSTRACT of the thesis presented by **Verónica Pérez Chávez** as a partial requirement to obtain the **MASTER OF SCIENCE** degree in **Óptica con orientación en Óptica Física**. Ensenada, Baja California, México November 2010.

CONFORMAL MAPPINGS IN THE OPTICS OF ROUGH SURFACES AND WAVEGUIDES

We present a review of the use of conformal mappings in the optics of rough surfaces and waveguides, and their use in the design of structures with effective optical properties that differ from those available in nature. A theoretical framework that permits the systematic study of this kind of problems in electromagnetics is established, giving emphasis to the relation between the geometry of the boundaries and the optical constants in transformed space. A brief outline of the general properties of conformal mappings and the changes required by the differential operators in the transformed space is given. The changes introduced in the Maxwell's equations by a coordinate transformation are also described, as well as the consequences of applying a non conformal transformation (the *c* method). Methods to address the scattering problem in the two spaces, the real and the transformed one, are presented. Calculations of the interaction of light with the periodic rough surfaces are carried out with a rigorous method called the integral equation method. The results obtained are in good agreement with the ones obtained using the thin screen phase method applied to the refractive index variation that one has in the transformed space.

Keywords: Conformal mappings, transformations, surface optics.

A mi esposo Isaac
y a mi preciosa hija Betsabé

Agradecimientos

Al Dr. Eugenio Méndez, por su gran trabajo como director de tesis, por darme la libertad de trabajar a mi ritmo y muchas veces desde casa, con mi beba en su camita. También por darme su confianza y sobre todo, por su gran ejemplo como investigador. No tengo palabras para agradecerle.

A mis sinodales, los Doctores Anatoly Khomenko, Raúl Rangel y Manuel Figueroa, por hacer siempre observaciones orientadas a contribuir en mi formación y mejorar el trabajo, su gran disposición y apoyo. De verdad, todo mi agradecimiento y cariño a los tres.

A mi muy adorado amigo el Dr. Héctor Aceves, por apoyarme y aconsejarme a lo largo de mis estudios.

A las Doctoras Elena Tchaikina y Georgina Navarrete, por su ejemplo como investigadoras, madres y esposas.

A los Doctores Héctor Escamilla y Kevin O'Donnell, porque fue un privilegio poder estar en sus clases.

A Pablo, por animarme a estudiar de vuelta y estar al pendiente a pesar de la distancia.

A Marcia, Carmen, Deyanira y Ana, por su apoyo y amistad.

A mis muy queridas amigas Ma. Elena Jiménez, Patricia Puente y Aubé Cárdenas, por ser confidentes y por los momentos tan gratos compartidos.

A mis amigos Fabián, José y Jacob, porque sin ustedes mi estancia en CICESE no sería tan agradable.

A mi familia y amigos por su cariño y apoyo.

De todo corazón, a todos, muchas gracias.

Verónica

CONTENIDO

	Página
Resumen español	i
Resumen inglés	ii
Dedicatorias	iii
Agradecimientos	iv
Contenido	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tablas	xi
Capítulo I. Introducción	1
I.1 Estructura de la tesis.....	14
Capítulo II. Mapeos conformes	15
II.1 Antecedentes históricos.....	16
II.2 Propiedades.....	18
II.2.1 Operadores diferenciales en el espacio transformado.....	22
II.3 Transformaciones elementales.....	27
II.4 Transformaciones compuestas.....	34
II.5 Mapeos no conformes.....	38
Capítulo III. Mapeos conformes y electromagnetismo	40
III.1 Ecuaciones de Maxwell.....	40
III.1.1 Interpretación.....	42
III.2 Campos electromagnéticos invariantes en la dirección ζ	46
III.3 Coeficientes de reflexión y transmisión.....	48
Capítulo IV. Problemas equivalentes en superficies y guías de onda	53
IV.1 Antecedentes.....	53
IV.2 Una familia de mapeos conformes para superficies.....	54
IV.2.1 El caso de la cicloide.....	57
IV.3 El problema de esparcimiento en el espacio x,y	60
IV.3.1 El método integral.....	63
IV.3.2 Implementación numérica.....	65
IV.4 El problema de esparcimiento en el espacio transformado.....	67
IV.4.1 El método integral.....	68
IV.4.2 El método de la pantalla delgada de fase.....	71
IV.4.3 Comparaciones.....	74
IV.5 Guías de onda.....	76
IV.5.2 Guías de onda rectangulares.....	76
IV.5.3 Guías de onda en forma de abanico.....	76
IV.5.4 Guías de onda asimétricas.....	78

CONTENIDO (continuación)

	Página
Capítulo V. Comentarios finales y conclusiones	82
V.1 Potencial de los mapeos conformes en óptica.....	83
V.2 Índice de refracción negativo.....	88
V.3 Conclusiones.....	89
Referencias	91

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura</i>		Página
1	La combinación de anillos cortados con los alambres cortos puede resultar en un material con índice de refracción negativo.	4
2	Arreglo experimental en forma de un resonador de anillo dividido para obtener refracción negativa en microondas (a la izquierda) y en el visible (derecha). En ambas figuras se muestra la distribución de campo magnético. Los parámetros del arreglo de microondas son: periodos $a_x=a_y=1.2$ mm, tamaño del anillo $W=0.8$ mm, grosor de la separación metálica $T=80$ μm , altura de la división $H=0.44$ mm, grosor de la división $G=80\mu\text{m}$. El dieléctrico del interior tiene una permitividad $\epsilon = 4$.	6
3	Índice de refracción e índice de refracción al cuadrado en el plano complejo. (a) Dieléctricos transparentes y (b) plasmas-metales (absorción).	8
4	Índice de refracción e índice de refracción al cuadrado en el plano complejo. (a) Plasma magnético (absorción) y (b) índice de refracción negativo.	8
5	Dominio y rango de la función n_c^2 para el caso $\text{Im}(n_c) > 0$ y $\text{Re}(n_c) > 0$.	9
6	Dominio y rango de la función n_c^2 para el caso $\text{Im}(n_c) > 0$ y $\text{Re}(n_c) < 0$.	10
7	Mapa de ϵ - μ con los diferentes tipos de materiales para cada cuadrante.	11
8	Sección transversal y tridimensional de la geometría propuesta por Pendry et al. para conseguir invisibilidad.	13
9	Ilustración de la transformación lineal $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}$.	28

LISTA DE FIGURAS (continuación)

<i>Figura</i>		Página
10	Ilustración de la transformación logarítmica $w = \log(z)$ basada en coordenadas polares para z .	29
11	Ilustración de la transformación del coseno hiperbólico $w = \cosh(z)$.	30
12	Ilustración de la transformación exponencial $w = e^z$.	31
13	Ilustración de la transformación de potencia $w = z^2$.	32
14	Ilustración de la transformación de potencia $w = z^{1/2}$.	33
15	Mitad superior del plano complejo obtenida como resultado del mapeo conforme de un polígono con la transformación Schwarz-Christoffel.	34
16	Triángulo degenerado en el plano complejo Z . Los valores de los ángulos son $\varphi_0 = \pi$ y $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$.	36
17	Reflectancia en función del ángulo de incidencia para dos medios con impedancia empatada.	52
18	Ilustración del mapeo de área simplemente conexa a un círculo de radio unitario.	54
19	Superficie cicloidal en el espacio xy (gráfica superior). Variación en el índice de refracción de la superficie transformada para un periodo de 7λ (gráfica inferior).	58
20	Superficie cicloidal en el espacio Z (gráfica superior) y variación en el índice de refracción de la superficie transformada para un periodo de 2λ (gráfica inferior).	59

LISTA DE FIGURAS (continuación)

<i>Figura</i>		Página
21	Geometría del problema de esparcimiento. Por simplicidad, se ilustra sólo el caso de polarización s (TE). El perfil de la superficie R define la frontera entre el vacío y un conductor perfecto.	60
22	Camino óptico recorrido por la luz en la región no homogénea del espacio sobre la superficie plana.	72
23	El coeficiente de reflexión diferencial en función del ángulo de esparcimiento calculado con el método integral (en verde y con línea continua) y con el método de la pantalla de fase (en rojo y con símbolos) para las estructuras mostradas en la figura 19. Los cálculos corresponden a polarización s.	75
24	Guía en el espacio real y guía en el espacio transformado.	78
25	Guía de onda con una superficie cicloidal en el plano Z (gráfica superior) y variación en el índice de refracción de la guía transformada (gráfica inferior). En este caso $A = 1$, $b_1 = 0.4\lambda$ y $d = 7\lambda$.	80
26	Guía de onda con una superficie cicloidal en el plano Z (gráfica superior) y variación en el índice de refracción de la guía transformada (gráfica inferior). En este caso $A = 2$, $b_1 = 0.4\lambda$ y $d = 2\lambda$.	81
27	Geometría del retro reflector en el plano Z (gráfica izquierda) y en plano W (gráfica derecha).	84
28	Comportamiento de x en función de u para la transformación $z = (A/4)[qw + 1/qw]$.	86
29	Geometría de una rendija en el plano complejo Z Semicírculo en el plano complejo W.	86

LISTA DE FIGURAS (continuación)

<i>Figura</i>		Página
30	Variación del índice de refracción en el espacio transformado.	88

LISTA DE TABLAS

Tabla		Página
I	Operadores diferenciales en el espacio transformado. \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 y \mathbf{a}_3 son vectores unitarios a lo largo de las direcciones ortogonales.	26
II	Ecuaciones de Maxwell en tres dimensiones en el espacio físico (plano Z) y en el espacio transformado (plano W).	43

Capítulo I

Introducción

Desde hace algunos años se ha venido desarrollando un campo de investigación sobre materiales compuestos que presentan propiedades ópticas distintas a las de los materiales que ocurren naturalmente y que se han denominado metamateriales. Mucho se ha hablado sobre la posibilidad de conseguir con ellos efectos de invisibilidad y lograr un índice de refracción negativo. Las propiedades de estos materiales artificiales se deben principalmente a la inclusión de pequeñas estructuras fabricadas *ex professo*.

En esencia, los principios utilizados para su diseño se basan en la observación de que, cuando en un medio no homogéneo las heterogeneidades son mucho más pequeñas que la longitud de onda, el medio se comporta como un medio homogéneo con propiedades ópticas distintas a las de los medios constituyentes. Es así como por ejemplo, un material como el teflón (politetrafluoroetileno), que es muy usado en aplicaciones radiométricas por sus capacidades difusoras, se comporta como un dieléctrico homogéneo en la región de microondas.

Este fenómeno se conoce desde hace siglos y se usaba para darle color a los vitrales de las catedrales por medio de la inclusión de nanopartículas metálicas. Las teorías para tratar este tipo de problemas se conocen como teorías del medio efectivo y son aplicables cuando las inclusiones en el material son lo suficientemente grandes como para que cada punto de éste pueda ser descrito por una función dieléctrica única, pero pequeñas en comparación con la longitud de onda. Las teorías que podríamos considerar como clásicas son la de Maxwell Garnett y la de Bruggeman [Niklasson et al., 1981].

La geometría considerada por Garnett consiste en una colección de pequeñas partículas o inclusiones de forma esférica o elipsoidal distribuidas en un medio homogéneo. La distancia entre las partículas debe ser mucho mayor que su tamaño característico pero mucho menor que la longitud de onda. Bajo estas condiciones, es posible tratar el compuesto como un medio efectivo caracterizado por una constante dieléctrica efectiva.

Si la constante dieléctrica del medio es ϵ_m y la de las inclusiones es ϵ_i , la constante dieléctrica efectiva ϵ_{eff} obedece una relación de la forma

$$\epsilon_{eff} = \epsilon_m + 3f\epsilon_m \frac{\epsilon_i - \epsilon_m}{\epsilon_i + 2\epsilon_m - f(\epsilon_i - \epsilon_m)}, \quad (1)$$

donde f es la fracción de llenado de volumen.

Por otro lado, en la teoría de Bruggeman se supone que ninguno de los medios es dominante, y por tanto, el valor de la permitividad efectiva no varía si el material de las inclusiones y el del medio son intercambiados [Koschny et al., 2004].

Mientras que la teoría de Maxwell Garnett ha demostrado ser el modelo más apropiado para medios con pequeñas inclusiones, la teoría de Bruggeman ha demostrado serlo para agregados.

En los dos modelos mencionados, lo más importante para las propiedades promedio del medio es la composición del material. En el caso en el que un material artificial presente propiedades tanto eléctricas como magnéticas, debidas a su estructura más que a su composición, podemos decir que estamos hablando de un metamaterial.

Pasando de la nanoescala a la macroescala, los procesos físicos involucrados serían los siguientes: los metamateriales involucrados están hechos de átomos, que se polarizan en presencia de campos electromagnéticos. Los dipolos inducidos reradían y esta radiación interfiere con la onda incidente. El resultado

neto es que la velocidad de propagación se modifica por un factor que conocemos como el índice de refracción.

Un alambre conductor permite la excitación de corrientes a lo largo de su eje por un campo eléctrico. El alambre cortado funciona como una antena, permitiendo la excitación de un momento eléctrico dipolar [Rotman, 1962] que exhibe resonancias cuando la longitud de la antena es un múltiplo de media longitud de onda. Un arreglo periódico de alambres de longitud fija puede entonces cambiar las propiedades eléctricas del material.

En las resonancias la permitividad es negativa y este signo tiene que ver con la diferencia de fase entre los campos de excitación y los inducidos.

Para darle al material propiedades magnéticas se pueden utilizar anillos o circuitos conductores cortados (ver figura 1). Un campo magnético variable paralelo al eje del anillo puede excitar corrientes en el anillo y el hecho de que el anillo este cortado hace que esta antena magnética tenga resonancias a frecuencias específicas. El alambre funciona como una pequeña antena dipolar que cuando entra en resonancia, logra la respuesta eléctrica deseada, lo cual ocurre cuando su longitud es de media longitud de onda. El anillo funciona como un inductor "L" y la sección abierta como un condensador "C". Estos alambres pueden ser vistos como circuitos RC. Por otro lado, un anillo cortado puede verse entonces como un circuito "LC". A la frecuencia de resonancia del arreglo de anillos, se obtiene una permeabilidad negativa. Combinando este tipo de estructuras se le pueden otorgar al material propiedades eléctricas y magnéticas específicas [Agranovich y Gartstein, 2009].

La posibilidad de utilizar arreglos de alambres y anillos cortados para lograr una permitividad y permeabilidad efectivas menores que cero fue considerada por Pendry (1999). Como variaciones de este trabajo podemos mencionar las propuestas experimentales de Smith et al. (2000) y de Shelby et al. (2001) [Shamovina y Solymar, 2007].

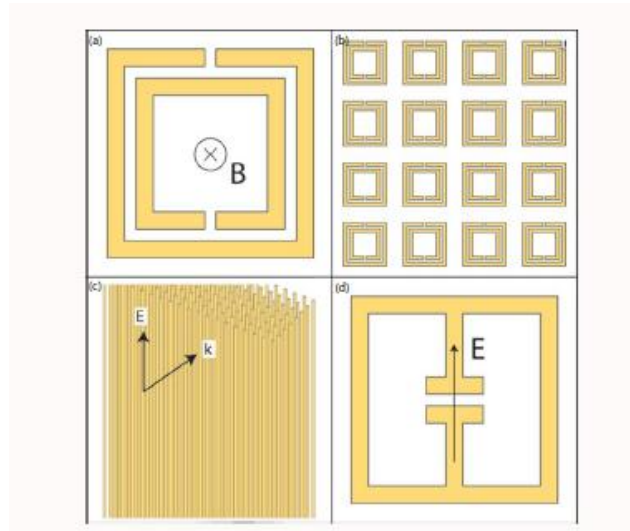


Figura 1. La combinación de anillos cortados con los alambres cortos puede resultar en un material con índice de refracción negativo. La figura fue tomada de [D. Schurig et al., 2006].

Sin embargo esta acepción se basa en la medición en forma independiente de la permitividad en un arreglo de cables y la permeabilidad en un arreglo de anillos. Se ha demostrado que en un sistema que incluya a ambos, los anillos contribuyen también a la respuesta eléctrica de forma igual a la de los cables, lo que afecta a la frecuencia de corte del sistema.

Diversos autores han logrado fabricar metamateriales mediante el uso de estructuras periódicas y por tanto, tienen ciertas similitudes con los cristales fotónicos. Sin embargo, los cristales fotónicos constan de estructuras de tamaño superior a la longitud de onda a la que funcionan, por lo que su comportamiento no puede aproximarse al de un material homogéneo efectivo.

Para fabricar metamateriales a longitudes de onda ópticas es necesario fabricar estructuras de volumen a escalas nanométricas, lo cual ahora es posible. Varios autores han reportado la fabricación de metamateriales con índices negativos en la región de microondas [Smith et al., 2006; Wegener et al., 2007; Soukoulis et al., 2009] y en el infrarrojo [Smith et al., 2006; Shalaev et al., 2007].

Sin embargo, el desarrollo de metamateriales con índice de refracción negativo para la región visible ha resultado ser mucho más difícil de lo que se esperaba

Las estructuras para el visible son conceptualmente muy diferentes a sus contrapartes en microondas. Los diseños complicados que se manejan en microondas son simplemente inapropiados para las frecuencias ópticas porque perderían su respuesta para una longitud de onda menor a la de resonancia. Esto es, para una geometría dada, no existe una respuesta magnética para las longitudes de onda menores a la de la resonancia electrostática. Es por esto que los diseños simples se vuelven una necesidad en el visible. El precio que se paga por una estructura de este tipo es que éstas necesariamente operan cerca de la longitud de onda de resonancia, lo que significa que operan en el régimen plasmónico. Una estructura opera en el régimen plasmónico cuando la energía cinética de los electrones libres se vuelve comparable a la energía del campo eléctrico. Uno de los problemas más serios de este régimen es que, aún con pocas pérdidas, su respuesta magnética se reduce drásticamente, lo que impide alcanzar un valor negativo para la permeabilidad [Urzhumov y Shvets, 2008].

Para ilustrar esto, en la figura 2 mostramos la estructura considerada por Urzhumov y Shvets (2008). Estos autores encontraron que en la región de microondas, esta estructura presenta valores negativos para la permitividad y la permeabilidad, y discuten los diversos problemas que implica escalar el problema para obtener valores negativos para las constantes ϵ y μ en el visible.

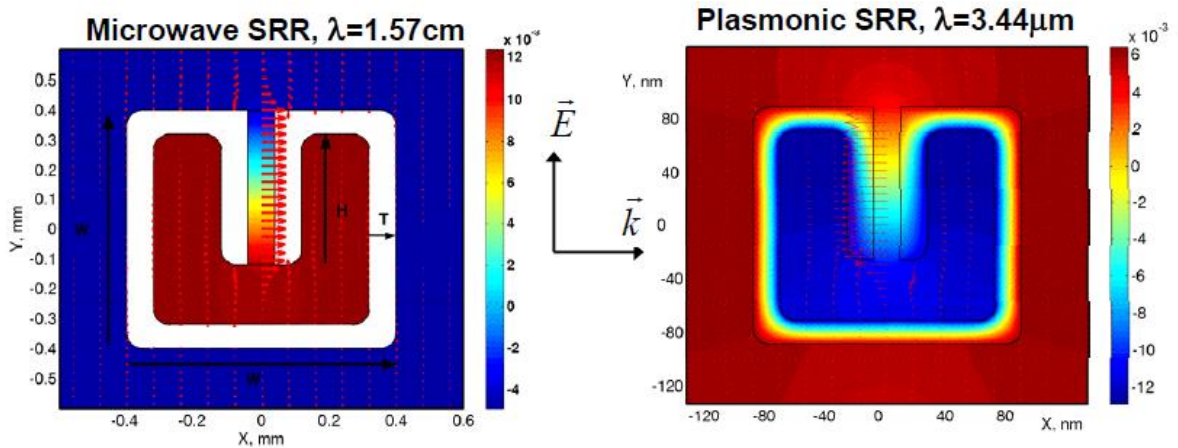


Figura 2. Arreglo experimental en forma de una resonador de anillo dividido para obtener refracción negativa en microondas (a la izquierda) y en el visible (derecha). En ambas figuras se muestra la distribución de campo magnético. Los parámetros del arreglo de microondas son: periodos $a_x=a_y=1.2$ mm, tamaño del anillo $W=0.8$ mm, grosor de la separación metálica $T=80$ μm , altura de la división $H=0.44$ mm, grosor de la división $G=80\mu\text{m}$. El dieléctrico del interior tiene una permitividad $\epsilon = 4$. La figura es tomada de [Y A. Urzhumov, G. Shvets, 2008].

Ellos encontraron que escalar en forma directa esta estructura de microondas al visible no funciona por dos razones. Primero, para desarrollar una celda unitaria de $\lambda/10$ se requieren arreglos con líneas metálicas de dimensiones sub-celulares. Para una longitud de onda de 1 μm eso significaría tener líneas del orden de 1 nm, lo que actualmente resulta muy difícil de fabricar. Segundo, en la región de microondas la constante dieléctrica es muy grande para cualquier metal, lo que en la práctica lo convierte en conductor perfecto a medida que el ancho de la línea de metal se aproxima a la penetración de piel típica de $l_{sk} \approx 25$ nm, la situación cambia. Pero para el caso visible, los campos ópticos penetran en el metal y la estructura se vuelve plasmónica. Estos dos problemas han limitado el desarrollo de metamateriales para el visible.

Revisamos ahora, de manera más general, las consecuencias de tener materiales con propiedades magnéticas en la propagación de luz. Para un medio homogéneo con permitividad eléctrica ϵ , permeabilidad μ y conductividad $\sigma (>0)$, tenemos que

$$n_c^2 = \mu \left[\varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right], \quad (2)$$

donde $n_c = n + i\kappa$ es el índice de refracción complejo, κ el coeficiente de extinción; y ω es la frecuencia. Para facilitar la discusión supondremos que ε y μ son constantes reales y escalares. Definiendo $\gamma = 4\pi\sigma/\omega$ podemos escribir

$$n_c^2 = \mu\varepsilon[1 + i\gamma]. \quad (3)$$

Suponiendo que γ (que tiene el mismo signo que μ) es real y pequeño, escribimos

$$n_c^2 = n^2 - \kappa^2 + 2in\kappa. \quad (4)$$

El primer caso a considerar ocurre cuando ε y μ son ambas positivas. En este caso n_c^2 está en el primer cuadrante del plano complejo. Al tomar la raíz cuadrada vemos que el índice de refracción resulta positivo y el coeficiente de extinción κ es positivo y pequeño, como se ilustra en la figura 3 (a). El material correspondería en este caso a un dieléctrico transparente. En el segundo caso $\varepsilon < 0$ y $\mu > 0$, y n_c^2 cae en el segundo cuadrante. En este caso el índice de refracción también resulta positivo, lo mismo que κ , que ahora tiene un valor grande, como podemos observar en la figura 3 (b). Esto corresponde a los plasmas eléctricos, tanto los gaseosos como los de estado sólido. En este caso, la onda se atenúa rápidamente en el material, que es el típico comportamiento de un metal.

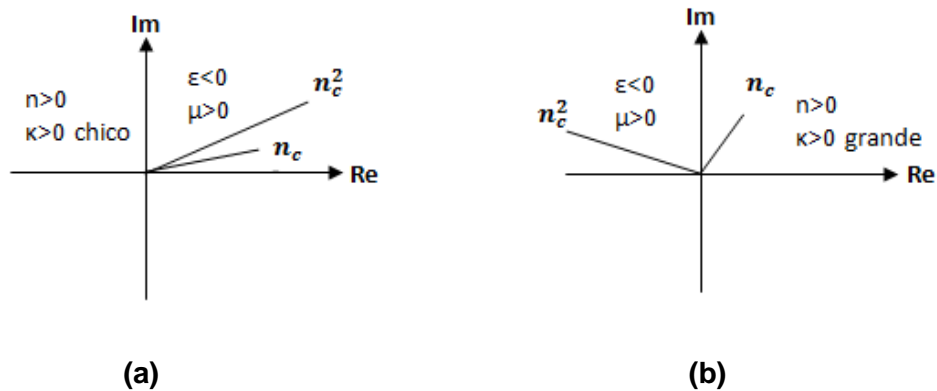


Figura 3. Índice de refracción e índice de refracción al cuadrado en el plano complejo. (a) Dieléctricos transparentes y (b) plasmas-metales (absorción).

En el tercer y cuarto caso estarían ubicados los materiales con índice de refracción negativo. Cuando $\epsilon > 0$ y $\mu < 0$, n_c^2 está en el tercer cuadrante, como se ilustra en la figura 4 (a). Entonces el valor de κ es grande y la onda se atenúa rápidamente. Este caso corresponde a los plasmas magnéticos. El caso más interesante ocurre cuando $\epsilon < 0$ y $\mu < 0$. En este caso n_c^2 está en el cuarto cuadrante, como podemos observar de la figura 4 (b), lo cual resulta en un índice de refracción negativo con un coeficiente de absorción pequeño. Estas fueron las situaciones consideradas por Veselago (1968).

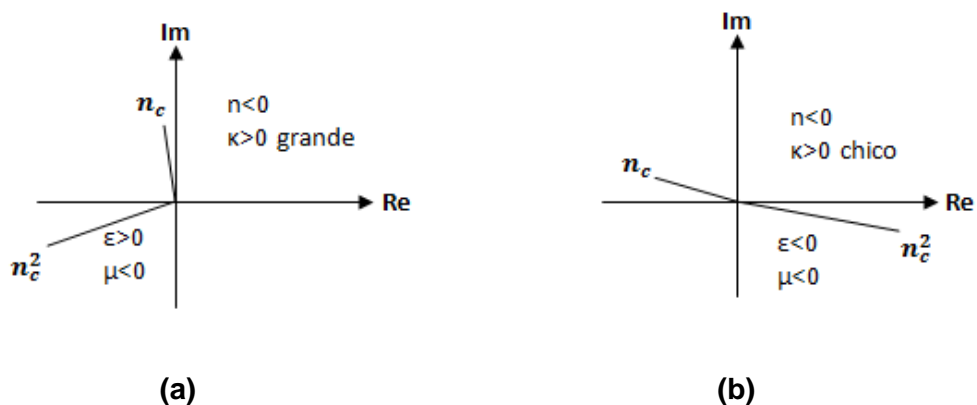


Figura 4. Índice de refracción e índice de refracción al cuadrado en el plano complejo. (a) Plasma magnético (absorción) y (b) índice de refracción negativo.

Presentamos ahora una manera alternativa de ver las cosas. Consideramos una situación en la que un punto w_0 en el plano complejo W puede ser la imagen

de dos o más puntos del plano complejo Z . Podemos distinguir estos dos puntos si están asociados a diferentes superficies de Riemann. Para el caso del índice de refracción, vemos que al tomar la raíz cuadrada de n_c^2 , es necesario decidir el signo que le vamos a asignar a n_c , y, con base en la argumentación anterior, hemos hecho esto basados en el cuadrante en el que se encuentra n_c^2 .

La situación que estamos considerando ahora involucra la relación entre los planos complejos que describen a n_c y a n_c^2 . El primer cuadrante del mapa de n_c está definido por $\text{Im}(n_c) > 0$ y $\text{Re}(n_c) > 0$ como se ilustra en la figura 5 (a). A partir de la ecuación (4) es posible notar que estos valores de n_c corresponden a todo el plano superior para el mapa de n_c^2 , en donde $\text{Im}(n_c^2) > 0$ como se ilustra en la figura 5 (b).

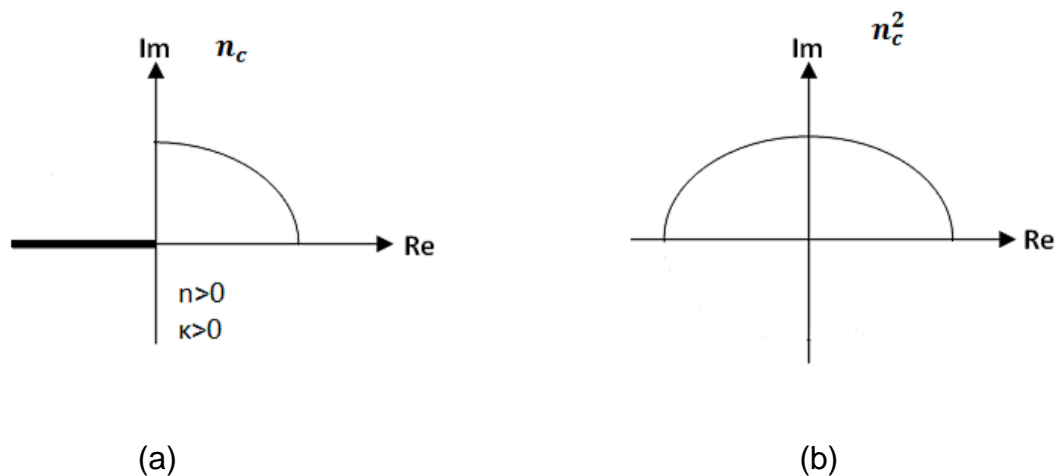


Figura 5. Planos complejos para el (a) índice de refracción n_c y (b) índice de refracción al cuadrado n_c^2 .

Similarmente, el segundo cuadrante del mapa de n_c está definido por $\text{Im}(n_c) > 0$ y $\text{Re}(n_c) < 0$ como se ilustra en la figura 6 (a). Estos valores de n_c corresponderían a todo el plano inferior en el mapa de n_c^2 , donde $\text{Im}(n_c^2) < 0$ (figura 6 b).

Vemos que, de acuerdo a esta convención, la rama positiva de la raíz cuadrada de n_c^2 estaría determinada por la condición $0 \leq \text{arg}(n_c^2) < 2\pi$. Para la rama negativa, tendríamos la condición $2\pi \leq \text{arg}(n_c^2) < 4\pi$.

Encontramos entonces que en el dominio de n_c , hay parejas de puntos a lo largo del eje real, uno positivo y otro negativo, que se mapean al mismo punto de n_c^2 , del lado positivo del eje real. Dado que por consideraciones físicas estamos imponiendo la condición $\kappa > 0$, a todos los otros casos (fuera del eje real de n_c), el mapeo es uno a uno.

En concordancia con lo establecido arriba, esto indica que en el espacio de n_c^2 estaríamos pasando a otra hoja de Riemann al cruzar el eje real que corresponde a $\arg(n_c^2) = 2\pi$. Después de este punto, estaríamos pasando a la región con $\kappa < 0$. Similarmente, en el espacio de n_c , el corte de rama estaría en $\arg(n_c) = \pi$.

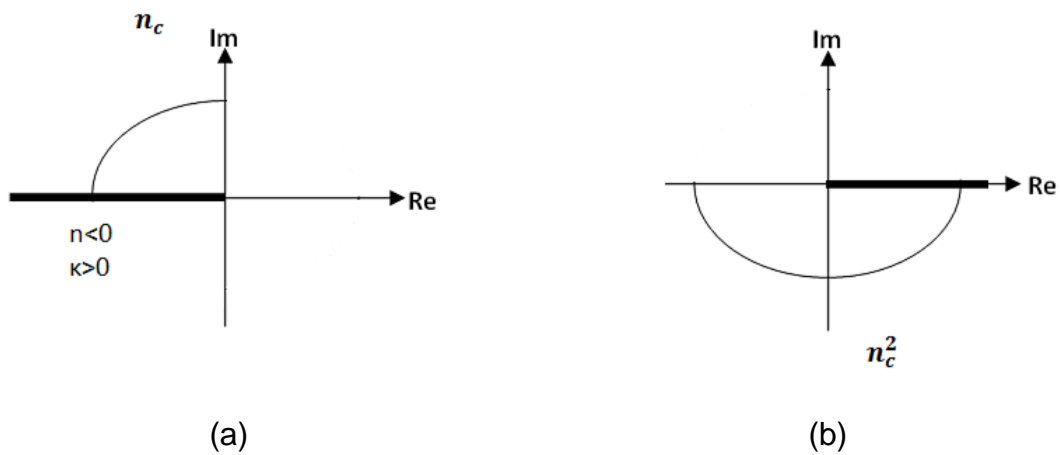


Figura 6. Planos complejos para el (a) índice de refracción n_c y (b) índice de refracción al cuadrado n_c^2 .

Es ilustrativo considerar, a manera de conclusión a lo presentado en las figuras 3 y 4, el diagrama de un sistema coordinado con los valores de ϵ y μ en los ejes como el de la figura 7. En ella se muestra una clasificación de los diferentes tipos de materiales, según el cuadrante en el que se encuentren.

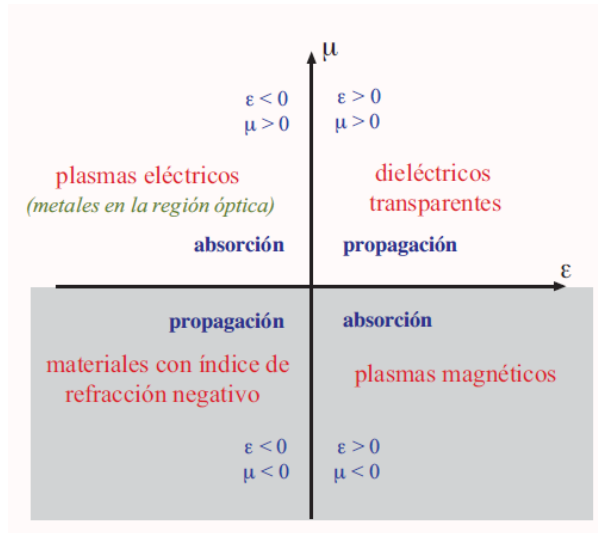


Figura 7. Mapa de ϵ - μ con los diferentes tipos de de materiales para cada cuadrante.

Para un material con un índice de refracción negativo, la fase de la onda viajaría en dirección contraria a la del flujo de energía, pues la dirección del vector de onda \mathbf{k} seguiría la regla de la mano izquierda (el vector de Poynting el de la mano derecha). Es por esto que estos materiales se conocen como materiales zurdos o izquierdos. En ellos, la velocidad de fase y la velocidad de grupo tendrían direcciones opuestas entre sí [Kinsler et al. 2009]. Además, como lo menciona Veselago (1968), el corrimiento Doppler, la presión de radiación y la ley de Snell, se invertirían en estos materiales [Smith et al., 2000]. Veselago también se dio cuenta de que una rebanada de caras paralelas de un material con índice de refracción $n=-1$ podría funcionar como una lente. Más recientemente, Pendry argumentó que se trataría de una lente perfecta [Pendry, 2000]. Esto motivó un crecimiento explosivo en los trabajos de investigación en metamateriales y en la búsqueda de materiales con índice de refracción negativo.

Sin embargo, basado en el principio de causalidad, Stockman ha mostrado que la razón de disipación de energía electromagnética en calor en un material con índice de refracción negativo no puede ser inferior a un cierto umbral y que, cualquier intento de compensar por esta disipación (introduciendo, por ejemplo, ganancia óptica) destruirá necesariamente las propiedades de refracción negativa

del material [Stockman, 2007]. Hacemos notar que para la realización de la lente perfecta de Pendry, es necesario que el material no presente pérdidas disipativas [Pendry, 2000].

La poca familiaridad que tiene la comunidad óptica y electrónica para tratar con la propagación de ondas electromagnéticas en materiales con propiedades magnéticas ($\mu \neq 1$) ha llevado a cuestionar conceptos tan básicos como la definición del vector de Poynting (transporte de energía). En un artículo reciente, Markel (2008) analiza la cuestión de si el vector de Poynting debe definirse como proporcional a $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ o a $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$; algo que no tendría consecuencias en materiales que no tienen propiedades magnéticas. Con una serie de argumentos, basados principalmente en un análisis del calentamiento del material y aspectos de conservación de energía, Markel concluye que el vector de Poynting debería definirse como proporcional a $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. Una consecuencia importante de esto, sería que no puede haber materiales con índice de refracción negativo (que no necesariamente implica que un haz no pueda refractarse hacia un ángulo negativo) [Markel y Schotland, 2010]. Aunque el consenso en la comunidad científica no parece estar del lado de Markel [Favaro et al. 2009], la discusión sobre el tema continúa.

Un nuevo impulso a las investigaciones en este campo vino con la propuesta de crear recubrimientos de metamaterial para ocultar objetos. La posibilidad de lograr efectos de invisibilidad es un tema de gran actividad científica en la actualidad. Los dos requerimientos que deben cumplirse para lograr invisibilidad son que la luz rodee al objeto conservando el camino óptico de una trayectoria rectilínea y que no existan reflexiones. En la propuesta Pendry et al. (2006) para ocultar un objeto esférico dentro de otra esfera como se ilustra en la figura 8, se necesita introducir un cambio gradual de cero a uno en el índice de refracción de una esfera a la otra y considerar que los radios de ambas son mucho mayores que la longitud de onda con la que se ilumina. Lo anterior nos permite aproximar el

vector de Poynting como un rayo y analizar su trayectoria a lo largo de la geometría dada. Sin embargo, los experimentos para lograr invisibilidad en general han estado limitados a objetos del tamaño de unas cuantas longitudes de onda y solo se han logrado para casos bidimensionales en la región de microondas.

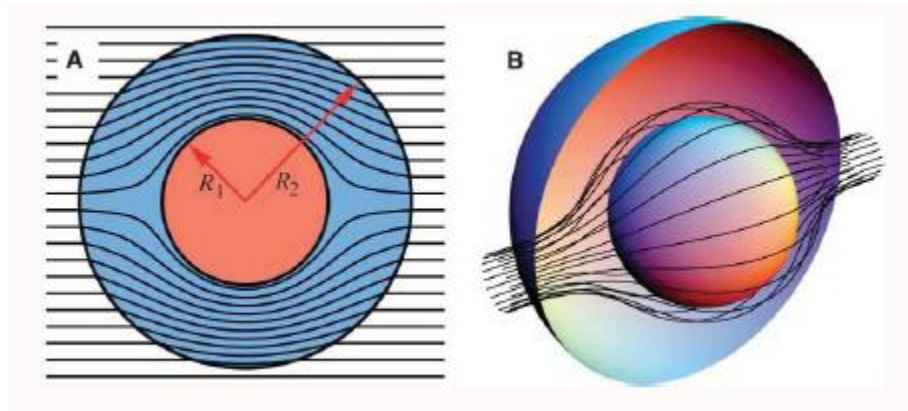


Figura 8. Sección transversal y tridimensional de la geometría propuesta por Pendry et al. para conseguir invisibilidad. La figura es tomada de [J.B. Pendry, D. Schurig y D.R. Smith, 2006].

Debido a las dificultades de fabricar metamateriales para el visible, se ha buscado realizar situaciones experimentales que involucran a estructuras equivalentes. De esto, existen al menos un par de ejemplos en la literatura reciente. En ellos se usan guías de onda no uniformes para encontrar estructuras equivalentes a materiales con $\epsilon=0$ [Silveirinha y Engheta, 2007; Alú et al., 2008] y a materiales diseñados para obtener invisibilidad [Smolyaninov et al. 2009]. El trabajo que se presenta en esta tesis está motivado por esta idea de equivalencia entre estructuras y propiedades ópticas de materiales mediante el uso de mapeos conformes. Buscamos entender las posibilidades y limitaciones del método. A pesar de que es posible explorar transformaciones más generales, se escogió el caso de los mapeos conformes debido a que la ecuación de Helmholtz sigue siendo válida en el espacio transformado, aunque la constante involucrada resulta multiplicada por un factor que depende de las coordenadas. Buscamos también la

posible aplicación de estos métodos para el diseño de estructuras interesantes en el contexto de la invisibilidad y la refracción negativa.

I.1 Estructura de la tesis

La presente tesis está organizada como sigue:

En el capítulo II es presentada una revisión de las propiedades generales de los mapeos conformes y se discuten las consecuencias del mapeo en los operadores diferenciales de los campos. Se presentan también las transformaciones elementales y las compuestas. Al final del capítulo se discuten brevemente los métodos para encontrar transformaciones más generales y un caso importante de mapeos no conformes.

En el capítulo III se analizan las consecuencias de la aplicación de mapeos conformes a las ecuaciones de Maxwell y se presentan las ecuaciones generales para el caso de sistemas invariantes en una dirección ortogonal al plano x,y .

En el capítulo IV se establece un marco teórico general para el uso de mapeos conformes en superficies. Se describe el modelo físico y se obtiene una familia de mapeos conformes que nos permite transformar un perfil periódico en uno plano. Posteriormente se establecen las condiciones de frontera necesarias para lograr la equivalencia entre el problema que involucra superficies rugosas y el que involucra metamateriales.

En el capítulo V se describen problemas equivalentes ahora en el caso de guías de onda. Se presentan mapeos conformes en guías para los casos de una guía circular-rectangular y para el caso periódico de una guía de Bragg. También se discuten las condiciones para lograr invisibilidad. Se analiza también el comportamiento anisotrópico de una guía a cuya geometría se le ha aplicado un mapeo conforme, iniciando con una revisión de las ecuaciones electromagnéticas pertinentes. Se incluye el cálculo numérico riguroso del campo en cualquier punto

de una superficie rugosa en el plano complejo z , y el de la superficie equivalente en el espacio transformado.

Finalmente, en el capítulo VI se presentan los resultados y conclusiones de este trabajo.

Capítulo II

Mapeos conformes

El uso de mapeos conformes en problemas de esparcimiento ha sido sujeto de estudio desde hace varios años. En matemáticas, un mapeo conforme es una transformación de coordenadas que preserva los ángulos localmente [Schinzinger y Laura, 2003]. Por lo general, el mapeo conforme actúa en el dominio del plano complejo y es una poderosa herramienta de análisis que utiliza funciones de variable compleja para transformar fronteras complicadas en otras más sencillas, de tal forma que la ecuación básica del problema pueda ser resuelta en el nuevo espacio. Una propiedad interesante de los mapeos conformes es que la ecuación de Laplace es invariante ante este tipo de transformaciones. La ecuación de Helmholtz, por otro lado, sólo se modifica ligeramente y, en algunos casos, la ventaja que se obtiene de simplificar la frontera es mayor que los problemas que nos pueda traer tal modificación [Neviere y Popov, 2003]. Dado que los mapeos conformes conservan los ángulos, resultan particularmente útiles en problemas electromagnéticos especificados en términos de condiciones de frontera que involucran derivadas normales.

En este capítulo se presentan las propiedades generales de los mapeos conformes y los operadores diferenciales en espacios transformados. Como veremos, la modificación a la ecuación de Helmholtz se puede interpretar como una modificación al índice de refracción del medio. Lo anterior nos permite relacionar propiedades estructurales de superficies y guías de onda con problemas equivalentes en los que la estructura es más sencilla, aunque las propiedades ópticas cambian. Se presentan ejemplos de transformaciones elementales de mapeos conformes y se discuten las limitaciones del método.

También se discute brevemente un caso importante de mapeos no conformes; el llamado método c.

II.1 Antecedentes históricos

Mapear una esfera (la superficie de la Tierra) a un plano es un problema práctico que ha atraído la atención de los matemáticos desde tiempos ancestrales. Antes del siglo dieciocho, las contribuciones matemáticas más notables al tema de mapeos fueron las proyecciones estereográficas debidas a Ptolomeo alrededor del año 150 D.C. y la proyección Mercator introducida por G. Mercator en 1569 [Porter, 2005]. Ambas proyecciones son conformes. Esto es, preservan los ángulos, o como los matemáticos del siglo dieciocho preferían decir, “son similares en lo pequeño”. Esto significa que la imagen de cualquier región R tiende a ser un mapa de R a escala exacta a medida que el tamaño de la región tiende a cero. Debido a que la “similaridad en lo grande” es claramente imposible, la conformalidad es lo mejor que uno puede hacer para mantener la apariencia de las regiones en una esfera. La preservación de los ángulos fue algo intencional en la proyección Mercator, pues su propósito fue ayudar a la navegación.

Ya en el siglo XVIII se hicieron avances a la teoría de mapeos conformes por Lambert (1772), Euler (1777) (esfera a plano) y Lagrange (1779) (superficie general de revolución a plano). Todos estos autores usaron números complejos, pero la presentación de Lagrange es quizá la más clara y general. Usando el método de d’Alembert (1752), Lagrange combinó un par de ecuaciones diferenciales de dos variables reales en una ecuación de una sola variable compleja. Llegó al resultado de que dos mapas conformes cualesquiera de una superficie de revolución en el plano x, y están relacionados entre sí a través de una función compleja $f(z)$ que mapea el plano en sí mismo. Estos resultados fueron completados por el resultado de Gauss (1822), quien generalizó el teorema de Lagrange a mapeos conformes de una superficie arbitraria sobre el plano.

Una función compleja $f(z)$ define un mapeo conforme del plano z sobre sí mismo como consecuencia de la diferenciabilidad de f . Lo anterior es cierto porque, decir que el límite

$$\lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}, \quad (1)$$

existe, equivale a decir que el mapeo de la región del disco de radio $|\Delta z|$ alrededor de z_0 a una región alrededor de $f(z_0)$, es un mapeo cuyo factor de amplificación disminuye a medida que $|\Delta z|$ tiende a cero. Si expresamos la derivada en forma polar como

$$f'(z_0) = m e^{i\alpha}, \quad (2)$$

vemos que m es el factor de escala de este mapeo y α es el ángulo de rotación. Riemann (1851) parece ser el primero en tomar esta propiedad de los mapeos conformes como base para la teoría de las funciones complejas. Su resultado más importante en esta dirección fue el teorema de mapeos de Riemann, el cual establece que cualquier región del plano complejo delimitada por una curva cerrada simple, puede mapearse en un disco unitario de manera conforme usando una función compleja. Para probar este teorema, Riemann (1851) se basó en las propiedades de las funciones de potencial, lo cual justificó en parte por mera intuición física -el llamado principio de Dirichlet-. Tal razonamiento iba en contra de la entonces creciente tendencia hacia el rigor en el análisis matemático del siglo diecinueve, y fue por ello que Schwarz (1870) y Neumann (1870) llevaron a cabo pruebas más estrictas. De cualquier forma, la confianza de Riemann en las bases físicas de la teoría de funciones complejas fue eventualmente justificada cuando Hilbert (1900) logró darle un formalismo adecuado al principio de Dirichlet.

II.2 Propiedades

Consideramos una función compleja $w = f(z)$ de una variable compleja z la cual toma una región del plano complejo Z y la mapea a una región del plano complejo W . Normalmente, la idea es transformar una región que puede tener fronteras complicadas en otra con fronteras más sencillas, facilitando así el estudio del problema. La forma particular de la función $f(z)$ dependerá de las fronteras específicas y de la aplicación con la cual estemos trabajando.

Si el mapeo es conforme, entonces las proporciones relativas de los segmentos de recta vecinos y los ángulos de los segmentos de línea que se intersecten se conservarán durante la transformación. Por tanto, cualquier conjunto ortogonal de líneas de campo en el plano Z original aparecerá como otro conjunto de líneas ortogonales en el plano W . Las configuraciones en los planos Z y W son imágenes una de la otra. El mapeo será uno a uno si $f(z)$ es lineal o bilineal.

Las propiedades que necesitamos para poder mapear una función son las propiedades de las funciones analíticas. Es decir, que la función sea univaluada (en una superficie de Riemann) para poder tener un mapeo uno a uno y diferenciable para que los ángulos no cambien bajo la transformación (isogonalidad). Esta característica también sirve para asegurar continuidad.

Otra forma de definir el que una función $f(z)$ sea analítica en un punto es el que pueda ser desarrollada en series de Taylor en la vecindad de ese punto.

Recordemos el proceso de diferenciación de una función compleja. Primero escribimos

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}. \quad (3)$$

Si se trata de una función analítica, esta derivada no depende de la trayectoria que tomemos al hacer $\Delta z \rightarrow 0$. Ahora, si expresamos Δz y Δw como

$$\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad \Delta f = \Delta w = \Delta u + i\Delta v, \quad (4)$$

y si hacemos que Δz tienda a cero haciendo $\Delta y \rightarrow 0$ primero, tenemos que

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + i \frac{\Delta v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5)$$

Si invertimos el orden (esto es, hacemos primero $\Delta x \rightarrow 0$) llegamos a que

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{i\Delta y} + \frac{\Delta v}{\Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (6)$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores, encontramos las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (7)$$

que también pueden expresarse como

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}. \quad (8)$$

De forma similar, en coordenadas polares tenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (9)$$

Resumiendo, si las cuatro derivadas parciales $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$, de $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ existen y son continuas en una región, entonces las condiciones de Cauchy-Riemann son condiciones necesarias para que la derivada de $f'(z)$ exista en toda la región.

Una función analítica es una función diferenciable, los puntos en los cuales $f(z)$ no es analítica son llamados singularidades. Usualmente estas ocurren en un lugar aislado en el que pueden ser evitadas. La transformación $f(z)$ no puede

ser conforme en los puntos en los cuales su derivada sea cero o infinito, estos puntos son llamados puntos críticos.

Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas, se cumple que también lo son

$$(a) \quad f(z) \pm g(z), \quad (10)$$

$$(b) \quad f(z)g(z),$$

$$(c) \quad f(z)/g(z),$$

$$(d) \quad f\{g(z)\}.$$

Son también funciones analíticas los polinomios y las series de potencia dentro de sus círculos de convergencia.

La inversa de una función analítica, $w = f(z)$, la cual ha sido denotada anteriormente como $z = f^{-1}(w)$, es también analítica si $f(z)$ es analítica, y su derivada es el recíproco de la derivada de $f(z)$. Esto es

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{dw/dz}. \quad (11)$$

La propiedad de conformalidad aplica a regiones cercanas al punto z_0 , el cual es mapeado del plano z al plano w por medio de $w = f(z)$. Si suponemos que $f(z)$ es analítica en z_0 y que $f'(z_0) \neq 0$, tendremos que en la vecindad de z_0 ,

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0), \quad (12)$$

o bien

$$w - w_0 = f'(z_0)(z - z_0). \quad (13)$$

Usando notación polar podemos escribir

$$f'(z_0) = me^{i\alpha}, \quad (14)$$

y

$$z - z_0 = \Delta r_z e^{i\Delta\theta_z}. \quad (15)$$

Similarmente, en el plano W tendremos

$$w - w_0 = \Delta r_w e^{i\Delta\theta_w}. \quad (16)$$

Un pequeño movimiento de z a z_0 producirá un movimiento de w a w_0 gobernado por la ecuación (13) que, con las ecuaciones (14) – (16), podemos escribir de la forma

$$\Delta r_w e^{i\Delta\theta_w} = m \Delta r_z e^{i(\alpha + \Delta\theta_z)}. \quad (17)$$

Vemos que la relación entre los incrementos en los dos espacios está dada por

$$\Delta r_w = m \Delta r_z, \quad (18)$$

y que la relación entre los incrementos para los ángulos involucra a un ángulo de rotación α . Es decir que

$$\Delta\theta_w = \alpha + \Delta\theta_z. \quad (19)$$

Es importante enfatizar que el factor de escala de la transformación viene dado por

$$m = |f'(z_0)|, \quad (20)$$

mientras que el ángulo de rotación es

$$\alpha = \text{arg}\{f'(z_0)\}. \quad (21)$$

Esto ilustra el hecho de que α depende de z_0 y no de z . Por tanto el ángulo α que aparece en $\Delta\theta_w$ como rotación adicional es el mismo en cada z de la vecindad de z_0 . Si tenemos un segmento de curva C_z en términos de los puntos z_i y mapeamos esta configuración del plano Z al plano W, el segmento C_z sufrirá una rotación α y una compresión o amplificación dada por un factor m .

De las ecuaciones (5) y (6) y las condiciones de Cauchy-Riemann vemos que

$$\left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = |f'|^2 = m^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = J, \quad (22)$$

en donde J es el Jacobiano de la transformación $w = f(z)$. Similarmente

$$\left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Hablamos de una transformación uno a uno, o mapeo, cuando el valor del Jacobiano es diferente de cero.

II.2.1 Operadores diferenciales en el espacio transformado.

Consideremos ahora las consecuencias del mapeo en la aplicación de operadores diferenciales a campos escalares y vectoriales o funciones del espacio (x, y) . Recordemos que para el espacio físico, tenemos

$$z = x + iy, \quad (24)$$

y para el espacio transformado

$$w = u + iv, \quad (25)$$

donde

$$w = f(z). \quad (26)$$

Debido a que eventualmente trabajaremos en un espacio tridimensional, es importante considerar que tenemos una tercera coordenada ζ , que supondremos perpendicular a los planos (x, y) y (u, v) y que es la misma en ambos sistemas. Las relaciones (24)-(26) implican que $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ y, similarmente, que $x = x(u, v)$ y $y = y(u, v)$.

Las diferenciales de x , y y ζ están dadas por

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad (27)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad (28)$$

$$d\zeta = d\zeta. \quad (29)$$

Utilizando el teorema de Pitágoras para obtener el cuadrado de la distancia entre dos puntos vecinos, tenemos

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + d\zeta^2. \quad (30)$$

Sustituyendo (27) y (28) en (30) obtenemos la expresión para el cuadrado de la distancia en el espacio transformado

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)^2 + d\zeta^2. \quad (31)$$

Desarrollando la expresión anterior y utilizando las condiciones de Cauchy-Riemman, obtenemos

$$\begin{aligned} ds^2 = & \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 du^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 dv^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 du^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 dv^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right) dudv \\ & - 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right) dudv + d\zeta^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Encontramos entonces que

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] du^2 + \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] dv^2 + d\zeta^2. \quad (33)$$

De manera compacta, podemos entonces escribir una expresión que nos sirve para definir los factores de escala h_u , h_v y h_ζ de la transformación:

$$ds^2 = (h_u du)^2 + (h_v dv)^2 + (h_\zeta d\zeta)^2. \quad (34)$$

Utilizando las relaciones de Cauchy-Riemann, vemos que

$$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right]^{1/2} = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (35)$$

de manera que podemos definir $h = h_u = h_v$. Además, de la ecuación (22), vemos que $m^2 = \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 = \frac{1}{h^2}$. Frecuentemente utilizaremos el hecho de que $h^2 = \left| \frac{dz}{dw} \right|^2$.

Entonces, los elementos de longitud en el espacio transformado son

$$ds_u = h_u du, \quad (36)$$

$$ds_v = h_v dv, \quad (37)$$

$$ds_\zeta = h_\zeta d\zeta, \quad (38)$$

donde

$$h_u = h_v = h, \quad h_\zeta = 1. \quad (39)$$

Vemos entonces que localmente el mapeo conforme se puede ver como una transformación a un espacio de coordenadas curvilíneas. Es importante enfatizar que el factor de amplificación es función de las coordenadas (u, v) .

Consideramos ahora algunas de las consecuencias de esta transformación en funciones o campos escalares y vectoriales en el espacio transformado. Como es de suponer, los operadores de la divergencia, el gradiente y el rotacional sufren cambios bajo transformaciones conformes. Las fórmulas correspondientes se pueden obtener de las fórmulas más generales para transformaciones a coordenadas curvilíneas presentadas, por ejemplo, en el libro de Arfken [Arfken y Weber, 2001]. Para facilitar la discusión, reproducimos estos resultados en la Tabla I.

De la tabla, vemos que el gradiente está dado por

$$\nabla\varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \hat{\mathbf{u}} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\varphi}{\partial t_2} \hat{\mathbf{v}} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\varphi}{\partial t_3} \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \quad (40)$$

donde t_1, t_2 y t_3 son las coordenadas en el espacio transformado y h_1, h_2 y h_3 son los factores de escala correspondientes y \hat{u}, \hat{v} y $\hat{\zeta}$ son los vectores unitarios asociados a cada dirección. Para el caso de mapeos conformes encontramos entonces que

$$\nabla\varphi = m \left[\frac{\partial\varphi}{\partial u} \hat{u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \hat{v} \right] + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} \hat{\zeta}. \quad (41)$$

Por otro lado la divergencia es

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = m^2 \left[\frac{\partial\{hA_u\}}{\partial u} + \frac{\partial\{hA_v\}}{\partial v} \right] + \frac{\partial A_\zeta}{\partial\zeta}, \quad (42)$$

donde hemos usado el hecho de que $h(u, v)$ no depende de ζ . Similarmente, para el laplaciano tenemos que

$$\nabla^2\varphi = m^2 \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} \right] + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2}, \quad (43)$$

mientras que el rotacional está dado por

$$\nabla \times \mathbf{A} = m^2 \begin{vmatrix} \hat{u}h & \hat{v}h & \hat{\zeta}h \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial\zeta} \\ hA_u & hA_v & hA_\zeta \end{vmatrix}. \quad (44)$$

Desarrollando esta expresión tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = m^2 & \left[\hat{u}h \left(\frac{\partial A_\zeta}{\partial v} - \frac{\partial(hA_v)}{\partial\zeta} \right) - \hat{v}h \left(\frac{\partial A_\zeta}{\partial u} - \frac{\partial(hA_u)}{\partial\zeta} \right) \right. \\ & \left. + \hat{\zeta} \left(\frac{\partial hA_v}{\partial u} - \frac{\partial hA_u}{\partial v} \right) \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

Tabla I Operadores diferenciales en el espacio transformado. a_1, a_2 y a_3 son vectores unitarios a lo largo de las direcciones ortogonales.

<p>Gradiente</p> $\nabla\varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \mathbf{a}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\varphi}{\partial t_2} \mathbf{a}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\varphi}{\partial t_3} \mathbf{a}_3$
<p>Divergencia</p> $\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial\{h_2 h_3 A_1\}}{\partial t_1} + \frac{\partial\{h_1 h_3 A_2\}}{\partial t_2} + \frac{\partial\{h_1 h_2 A_3\}}{\partial t_3} \right]$
<p>Laplaciano</p> $\nabla^2 \varphi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \right) + \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial\varphi}{\partial t_2} \right) + \frac{\partial}{\partial t_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial\varphi}{\partial t_3} \right) \right]$
<p>Rotacional</p> $\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{a}_1 & h_2 \mathbf{a}_2 & h_3 \mathbf{a}_3 \\ \frac{\partial}{\partial t_1} & \frac{\partial}{\partial t_2} & \frac{\partial}{\partial t_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$

En el contexto de mapeos conformes, son de particular interés los casos en los que el campo $\varphi(x, y)$ no depende de la coordenada ζ . Vemos entonces que estos mapeos resultan especialmente útiles para resolver problemas que se rigen por ecuaciones de la forma

$$\nabla^2 \varphi(x, y) \pm k^2 \varphi(x, y) = 0. \quad (46)$$

Dependiendo del signo que escojamos, y del valor de k^2 , esta ecuación puede representar la ecuación de Laplace, la ecuación de Helmholtz o la ecuación de difusión [Leonhardt, 2008].

Para los problemas que se abordarán en esta tesis es más interesante el caso en que escogemos el signo positivo y una k distinta de cero (ecuación de Helmholtz). En tal caso, $\varphi(x, y)$ podría representar una componente del campo eléctrico o magnético asociada a una onda electromagnética y $k = \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{\omega}{c}$ sería el número de onda, donde ε y μ representarían la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética, respectivamente.

Si realizamos la transformación del plano Z al plano W utilizando un mapeo conforme, podemos escribir la ecuación de Helmholtz como

$$\nabla^2 \varphi(u, v) + K^2 \varphi(u, v) = 0, \quad (47)$$

donde

$$K^2 = h^2 k^2 = h^2 \varepsilon \mu \left(\frac{\omega}{c} \right)^2. \quad (48)$$

Vemos que esto es equivalente a modificar el producto $\varepsilon\mu$ del medio en el que se estaría propagando la onda electromagnética. Es decir, que la transformación es equivalente a cambiar la geometría y el índice de refracción.

II.3 Transformaciones elementales

A continuación se presenta una selección de mapeos elementales que pueden resultar de interés particular en óptica de superficies y guías de onda.

1. La transformación lineal.

Consideramos una transformación de la forma

$$w = Az + B, \quad (49)$$

donde A y B son constantes que pueden ser complejas.

Esta transformación permite amplificar (o contraer) y rotar una figura geométrica que se encuentre en el plano Z . La constante B , de ser diferente de

cero, causará también una traslación. La situación se ilustra en la figura 1. Es importante notar que bajo esta transformación, un círculo en el plano Z resulta en otro círculo en el plano W.

Para esta transformación el factor de amplificación está dado por

$$m = \left| \frac{dw}{dz} \right| = |A|. \quad (50)$$

Por otro lado, la rotación está dada por

$$\alpha = \arg \left(\frac{dw}{dz} \right) = \arg(A). \quad (51)$$

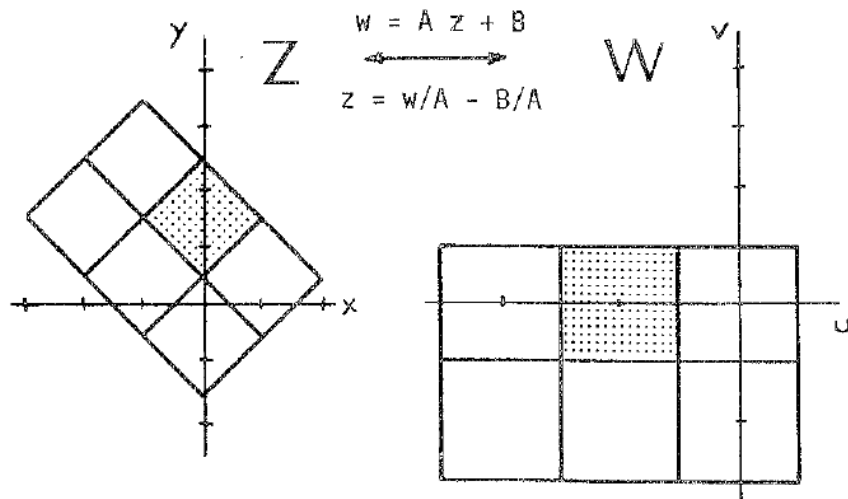


Figura 1. Ilustración de la transformación lineal $w = Az + B$. La gráfica es tomada de [R. Schinzinger, P. A. Laura, 2003].

2. La transformación logarítmica

Expresamos esta transformación como

$$w = \log(z). \quad (52)$$

En este caso, aunque queremos calcular un logaritmo natural usamos el símbolo \log para indicar que estamos calculando el logaritmo de un número complejo, la amplificación y la rotación estarán dadas respectivamente por

$$m = \left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| \frac{1}{z} \right|, \quad (53)$$

y

$$\alpha = \arg \left(\frac{dw}{dz} \right) = \arg \left(\frac{1}{z} \right). \quad (54)$$

La transformación logarítmica mapea contornos cerrados del plano Z definido por dos arcos circulares y dos líneas rectas a rectángulos orientados con los ejes del plano W , como se ilustra en la figura 2.

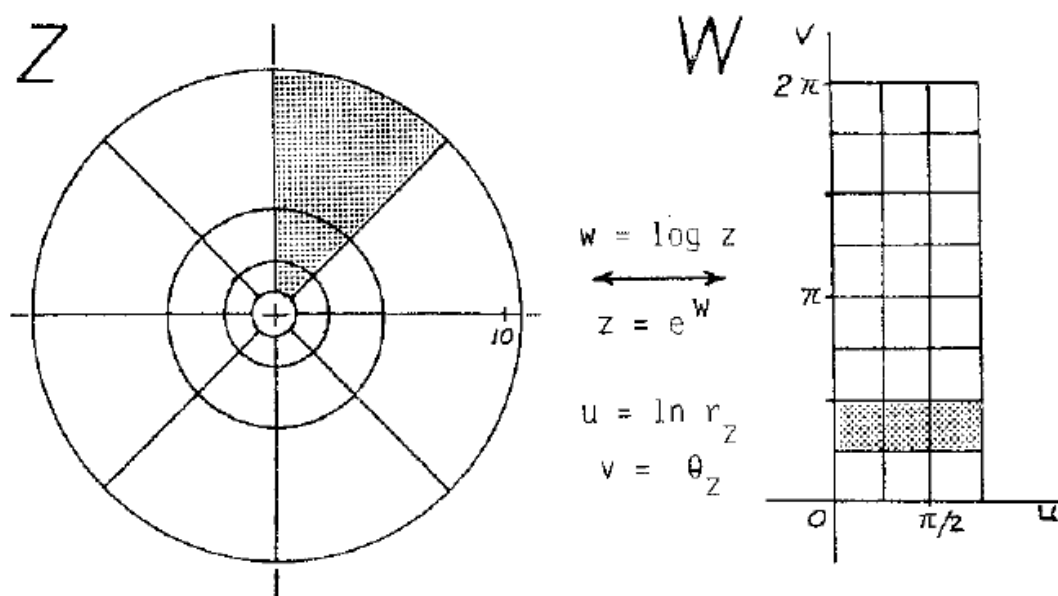


Figura 2. Ilustración de la transformación logarítmica $w = \log(z)$ basada en coordenadas polares para z . La gráfica es tomada de [R. Schinzinger, P. A. Laura, 2003].

3. La transformación coseno hiperbólico.

En esta transformación

$$w = \cosh z$$

$$\begin{aligned}
 &= \cosh(x + iy) \\
 &= \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y \\
 &= u + iv.
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

La amplificación y la rotación estarán dadas respectivamente por

$$m = \left| \frac{dw}{dz} \right| = |\sinh z|,$$
(56)

y

$$\alpha = \arg \left(\frac{dw}{dz} \right) = \arg(\sinh z).$$
(57)

Como se ilustra en la figura 3, esta transformación nos permite pasar de tener una cuadrícula en el plano complejo Z, a tener elipses e hipérbolas en el plano W.

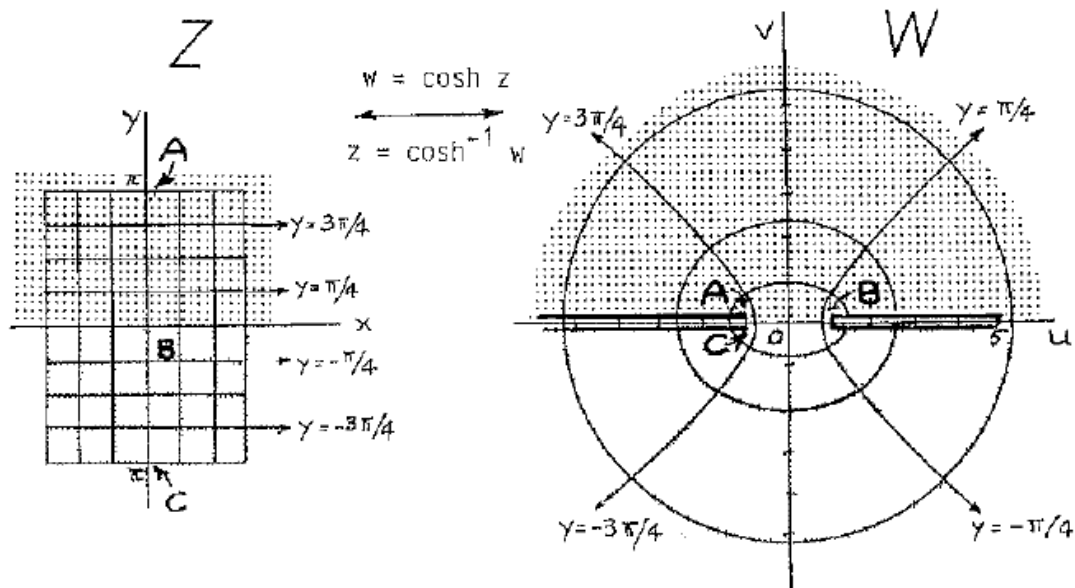


Figura 3. Ilustración de la transformación del coseno hiperbólico $w = \cosh(z)$. La gráfica es tomada de [R. Schinzinger, P. A. Laura, 2003].

4. La transformación exponencial.

Esta transformación está representada por

$$w = e^z. \quad (58)$$

La amplificación m y la rotación α estarán dadas respectivamente por las expresiones

$$m = \left| \frac{dw}{dz} \right| = |e^z|, \quad (59)$$

y

$$\alpha = \arg \left(\frac{dw}{dz} \right) = \arg(e^z). \quad (60)$$

Como podemos observar en la figura 4, la transformación exponencial permite transformar una geometría con simetría alrededor de $y = \frac{\pi}{2}$ en el plano complejo Z , a una cuadrícula en el plano W .

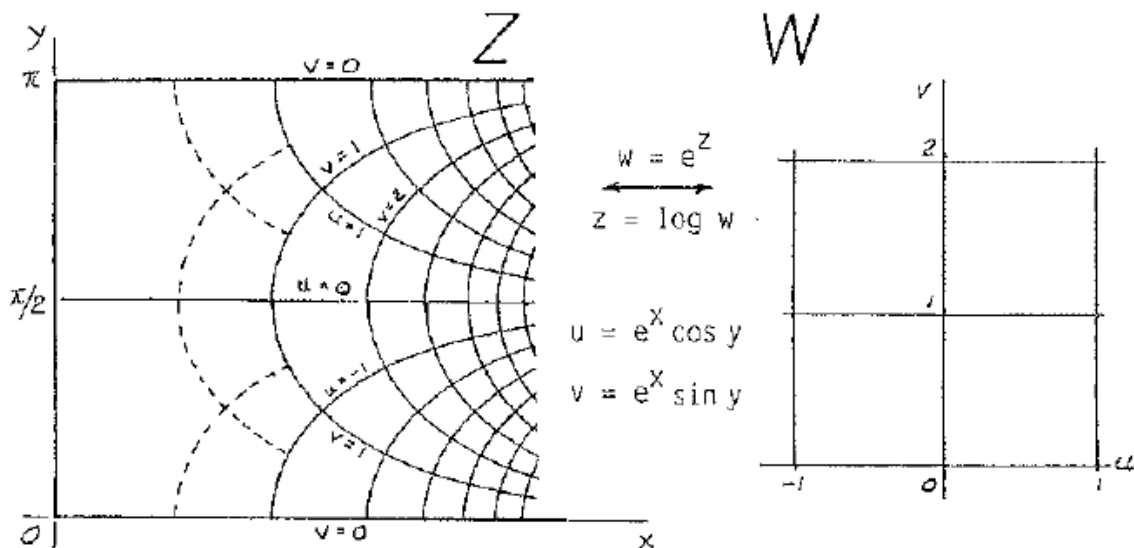


Figura 4. Ilustración de la transformación exponencial $w = e^z$. La gráfica es tomada de [R. Schinzinger, P. A. Laura, 2003].

5. La transformación tipo ley de potencias.

Esta transformación es de la forma

$$w = z^n. \quad (61)$$

En coordenadas polares podemos escribir

$$z = r_z e^{i\theta_z}, \quad w = r_w e^{i\theta_w}, \quad (62)$$

de donde se sigue que

$$r_w = r_z^n, \quad \theta_w = n\theta_z. \quad (63)$$

La amplificación y la rotación estarán dadas respectivamente por

$$m = \left| \frac{dw}{dz} \right| = nr_z^{n-1}, \quad (64)$$

y

$$\alpha = \arg\left(\frac{dw}{dz}\right) = \arg(nr_z^{n-1}). \quad (65)$$

En la figura 5 se ilustra un ejemplo de esta transformación para el caso $n=2$. En este caso, la transformación permite transformar hipérbolas en un cuadrante del plano complejo Z , a una cuadrícula en la mitad superior del plano W .

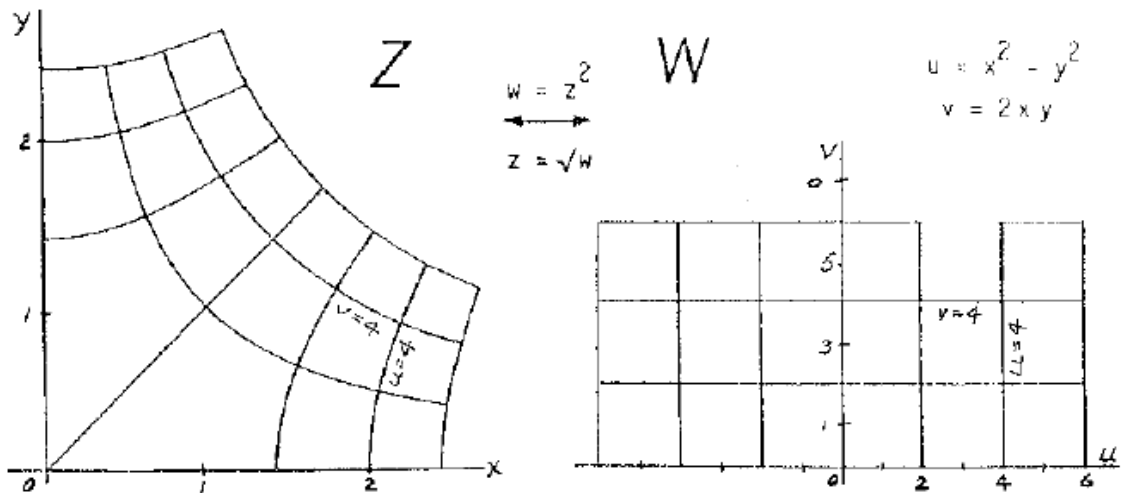


Figura 5. Ilustración de la transformación de potencia $w = z^2$. La gráfica es tomada de [R. Schinzinger, P. A. Laura, 2003].

Asimismo, como se ilustra en la figura 6, la transformación por ley de potencias para $n= 1/2$ permite transformar parábolas simétricas alrededor del eje x del plano complejo Z, a una cuadrícula en la mitad superior del plano W.

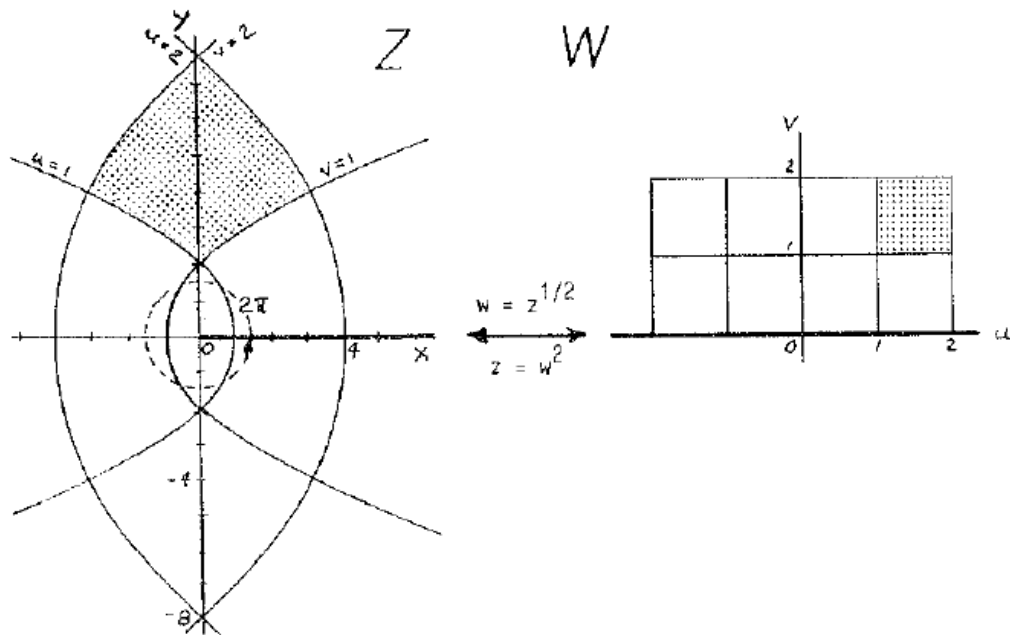


Figura 6. Ilustración de la transformación de potencia $w = z^{1/2}$. La gráfica es tomada de [R. Schinzinger, P. A. Laura, 2003].

II.4 Transformaciones compuestas

En lo referente a la transformación de coordenadas utilizando mapeos conformes, podemos proponer problemas de un amplio rango de complejidad. Así, es posible llevar a cabo un mapeo mediante el uso de transformaciones elementales o bien utilizar otras más elaboradas. Los métodos que podemos considerar como de mayor importancia para llevar a cabo una transformación compuesta son el de Schwarz-Christoffel y el de familias de mapeos. La idea detrás de ambos es encontrar la función de variable compleja que mejor se ajuste al dominio. Sin embargo, en la literatura se reportan diversas fallas para encontrar un ajuste adecuado, además del alto costo numérico que significan.

El método de Schwarz-Christoffel se aplica al caso particular de una región simplemente conexa, cuya frontera sea un polígono P o un conjunto de líneas rectas con vértices a_0, a_1, a_2, \dots , con ángulos exteriores $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ y con la transformada de los vértices al plano W dada por b_0, b_1, b_2, \dots como se ilustra en la figura 7 [Morse y Feshbach, 1953]. Por convención la figura debe recorrerse en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Nótese que debe cumplirse que

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \dots = 2\pi, \quad (66)$$

En el ejemplo de la figura 7, φ_4 es negativo y todos los demás ángulos son positivos.

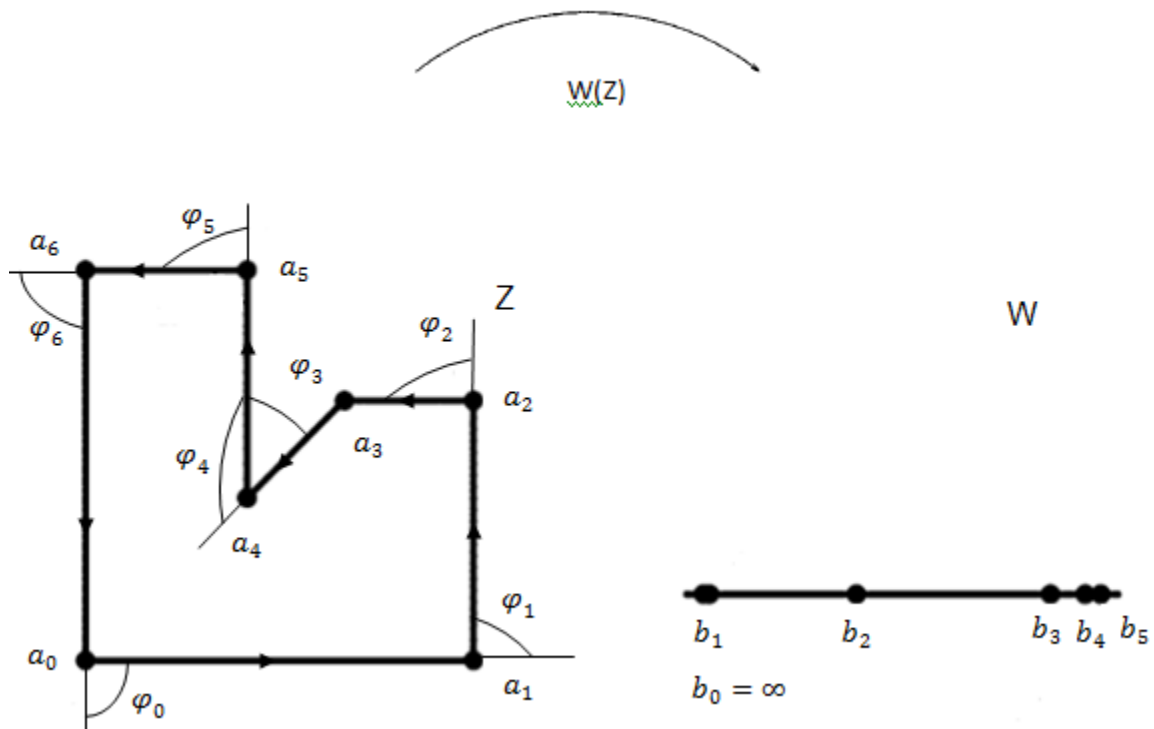


Figura 7. Mitad superior del plano complejo obtenida como resultado del mapeo conforme de un polígono con la transformación Schwarz-Christoffel.

La ecuación para la transformación del interior de un polígono a la mitad superior del plano en términos del cambio de fase que ocurre en cada vértice está dada por

$$\frac{dz}{dw} = A(w - b_0)^{-\varphi_0/\pi}(w - b_1)^{-\varphi_1/\pi}(w - b_2)^{-\varphi_2/\pi} \dots \quad (67)$$

Integrando la ecuación (65) se llega a la siguiente ecuación para la transformación de Schwarz-Christoffel

$$z = z_0 + A \int (w - b_0)^{-\varphi_0/\pi}(w - b_1)^{-\varphi_1/\pi}(w - b_2)^{-\varphi_2/\pi} \dots dw, \quad (68)$$

donde $z = z(w)$ es una función en la cual los ceros y singularidades están en los puntos b_0, b_1, b_2, \dots

La ecuación (67) permite transformar el interior de un polígono con ángulos exteriores $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$, en la mitad superior del plano W .

Las constantes z_0 y A en (68) deben ser elegidas de tal forma que el origen, la escala y la orientación del polígono en el plano Z sean las deseadas. Las otras constantes b_0, b_1, b_2, \dots deben corresponder a a_0, a_1, a_2, \dots dado que $w = b_i$ y $z = a_i$. Tres de estas constantes pueden ser elegidas de forma arbitraria en el plano W aunque usualmente uno de los puntos transformados, b_0 , se coloca en infinito.

Ahora consideremos la región que se ilustra en la figura 8 y que corresponde a un triángulo degenerado. Los ángulos $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ son los que se observan en la misma figura. El ángulo φ_0 en infinito puede ser evaluado considerando que el triángulo de la figura tiene un vértice a_0 también en infinito.

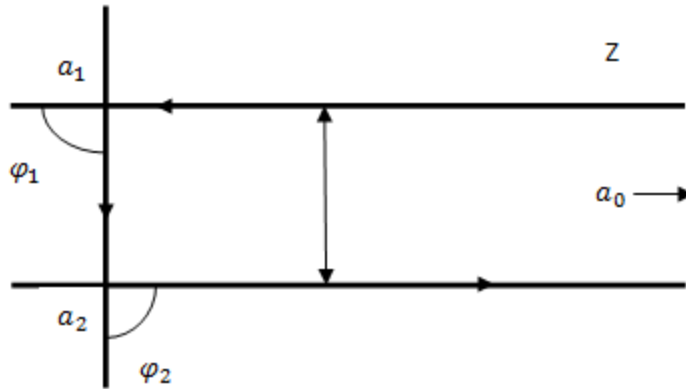


Figura 8. Triángulo degenerado en el plano complejo Z . Los valores de los ángulos son $\varphi_0 = \pi$ y $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$.

La ecuación para la transformación en este caso es

$$z = z_0 + A \int (w - b_1)^{-\varphi_1/\pi} (w - b_2)^{-\varphi_2/\pi} dw. \quad (69)$$

Debido a la simetría entre a_1 y a_2 elegimos $b_1 = -1$ y $b_2 = 1$, de donde tenemos que

$$z = z_0 + A \int \frac{dw}{\sqrt{w^2 - 1}} = z_0 + A \cosh^{-1} w \quad (70)$$

Para evaluar z_0 y A , hacemos $z = 0$, de donde $w = 1$

$$0 = z_0 + A \cosh^{-1} 1 = z_0 \quad (71)$$

de donde $z_0 = 0$. Hacemos $z = ih$, donde h es la altura del triángulo, por lo que ahora $w = -1$

$$ih = A \cosh^{-1}(-1) = iA\pi \quad (72)$$

con $A = h/\pi$. La expresión para la transformación es entonces

$$z = \left(\frac{h}{\pi}\right) \cosh^{-1} w \quad (73)$$

Esta transformación permite mapear el interior de la región en la mitad superior del plano complejo.

Al utilizar la transformación de Schwarz-Christoffel, pueden presentarse diversas dificultades numéricas y algunos de los algoritmos más eficientes para este tipo de mapeos son los de Trefethen [Driscoll y Trefethen, 2002]. Es en parte debido a esto, que estos algoritmos han sido motivo de gran estudio. Sin embargo, hemos encontrado que las suposiciones que en ellos se hacen en ocasiones requieren cambios en la geometría del problema que no resultan fácilmente realizables en forma experimental. No es posible entonces lograr una situación físicamente equivalente, y no podemos separar tales consideraciones físicas del problema con el fin de lograr una mayor estabilidad numérica.

La ecuación (66) se escribe usualmente de la forma

$$\frac{dz}{dw} = \prod_j (w - b_j)^{\mu_j}, \quad (74)$$

donde b_j y μ_j son constantes. Para el caso de superficies periódicas, Nevier y Popov (2003) han propuesto una extensión de esta transformación, dada por la expresión

$$\frac{dz}{dw} = \prod_j \{1 - \exp[i(w - b_j)]\}^{\mu_j}, \quad (75)$$

Como un ejemplo de familias de mapeos, en el capítulo IV discutiremos la familia de mapeos dada por la expresión

$$z = w + i \sum_n b_n \exp(inw), \quad (76)$$

donde b_n son coeficientes determinados por la geometría del problema.

II.6 Mapeos no conformes

El método de mapeos conformes sufre de diversas limitaciones, entre ellas se encuentra el hecho de que en perfiles que presenten picos obtendremos singularidades, lo que hace que el Jacobiano desaparezca, con lo que ya no tendríamos una transformación uno a uno. Por otro lado si el mapeo se realiza a través de una familia de funciones de mapeos conformes usando series, encontrar los coeficientes de las expansiones puede resultar difícil.

Es por todo lo anterior que con frecuencia se recurre a métodos de solución que utilizan mapeos no conformes. Uno de los métodos más utilizados es el método C, en el cual se propone la transformación de coordenadas no conforme

$$u = x, \quad (77)$$

$$v = y - g(x), \quad (78)$$

$$\zeta = \zeta, \quad (79)$$

donde $g(x)$ representa el perfil superficial. Procediendo de manera similar a como lo hicimos para encontrar los operadores diferenciales para el caso de mapeos conformes, podemos encontrar una expresión para el laplaciano en este nuevo sistema de coordenadas. Esto nos lleva a una expresión para la ecuación de Helmholtz dada por [Neviere y Popov, 2003]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2g' \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - g'' \frac{\partial}{\partial v} + (1 + g'^2) \frac{\partial^2}{\partial v^2} + k^2 \right] \varphi(u, v) = 0, \quad (80)$$

$\varphi(u, v)$ es el campo en el espacio transformado, k es el vector de onda y las primas en g representan derivadas. Vemos que, en este caso, no es posible interpretar la modificación a la ecuación de Helmholtz como una modificación al índice de refracción del medio como en los casos en los que se utilizan mapeos conformes. Esto complica la interpretación del resultado en los términos usuales, como una modificación simple del índice de refracción.

La transformación dada por las ecuaciones (77)-(79) es la idea central en el método C, el cual es un método riguroso muy utilizado en problemas de difracción por rejillas. En el nuevo sistema coordenado, la interfase corrugada entre los dos medios se ha convertido en un plano. Sin embargo, debido a que la estructura resultante es complicada y la ecuación de Helmholtz ha cambiado, el método no resulta apropiado para los propósitos de esta tesis.

Los métodos que hemos descrito en este capítulo para realizar una transformación de coordenadas, toman un sentido práctico al tener un problema físico dado. Al contar con la geometría explícita, puede encontrarse un mapeo conforme con expresiones analíticas en casos sencillos, o bien, de manera numérica o no conforme en los casos que así lo ameriten.

Capítulo III

Mapeos conformes y electromagnetismo

En este capítulo analizaremos las consecuencias de la aplicación de mapeos conformes a las ecuaciones de Maxwell, lo que nos permite abordar el problema central de este trabajo de tesis que es el de encontrar estructuras ópticas equivalentes. Se inicia presentando las ecuaciones de Maxwell en el vacío a las que se les aplican los operadores diferenciales en el espacio transformado que se desarrollaron en el capítulo anterior. Posteriormente se utilizan las ecuaciones transformadas para estudiar problemas en los que tanto la estructura como los campos sean invariantes en una dirección ζ , que es ortogonal al plano x,y .

III.1 Ecuaciones de Maxwell

Para analizar la propagación de ondas electromagnéticas iniciaremos por suponer ondas armónicas con una dependencia temporal del tipo $e^{-i\omega t}$, donde ω es la frecuencia angular de la onda armónica que se propaga a través de un medio lineal.

Suponemos también que la configuración del plano $z = x + iy$, del espacio físico x,y,ζ , es mapeada en forma conforme a un plano $w = u + iv$ del espacio transformado u,v,ζ .

Tenemos entonces que en el espacio x,y,ζ las ecuaciones de Maxwell en el vacío se pueden escribir como

$$\nabla \times \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{E}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

donde estamos utilizando el sistema gaussiano de unidades, \mathbf{E} y \mathbf{H} son el campo eléctrico y magnético respectivamente, ω es la frecuencia angular y c es la velocidad de la luz. Para encontrar la forma que estas ecuaciones tienen en el espacio transformado hacemos uso de las ecuaciones de transformación de campos derivadas en el capítulo anterior.

Consideremos primero la ley de Gauss dada por la ecuación (3). Utilizando la expresión de la divergencia (capítulo II, ecuación (44)) obtenemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial \{hE_u\}}{\partial u} + \frac{\partial \{hE_v\}}{\partial v} + \frac{\partial \{h^2 E_\zeta\}}{\partial \zeta} \right]. \quad (5)$$

Similarmente, de (4)

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial \{hH_u\}}{\partial u} + \frac{\partial \{hH_v\}}{\partial v} + \frac{\partial \{h^2 H_\zeta\}}{\partial \zeta} \right]. \quad (6)$$

Por otro lado, desarrollamos ahora la ley de Faraday dada por (1) utilizando la expresión para el rotacional encontrada en el capítulo anterior (ecuación (48)). Con esto, se produce el conjunto de ecuaciones

$$\frac{\partial E_\zeta}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial \zeta} (hE_v) = i \frac{\omega}{c} hH_u, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial E_\zeta}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (hE_u) = i \frac{\omega}{c} hH_v, \quad (8)$$

$$\frac{\partial hE_v}{\partial u} - \frac{\partial hE_u}{\partial v} = i \frac{\omega}{c} h^2 H_\zeta. \quad (9)$$

De forma similar, al desarrollar la ley de Ampere dada por (2), obtenemos un segundo conjunto de ecuaciones

$$\frac{\partial H_\zeta}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial \zeta}(hH_v) = -i\frac{\omega}{c}hE_u, \quad (10)$$

$$-\frac{\partial H_\zeta}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial \zeta}(hH_u) = -i\frac{\omega}{c}hE_v, \quad (11)$$

$$\frac{\partial hH_v}{\partial u} - \frac{\partial hH_u}{\partial v} = -i\frac{\omega}{c}h^2E_\zeta. \quad (12)$$

Estas ecuaciones representan las ecuaciones de Maxwell en el espacio transformado. Para facilitar su visualización, se presenta un resumen en la Tabla I.

III.1.1 Interpretación

Para interpretar estas ecuaciones de Maxwell transformadas hacemos lo siguiente.

Redefinimos las componentes u y v de los campos, multiplicándolas por el factor $\frac{1}{h}$

$$hE_u = E_u, \quad (13)$$

$$hE_v = E_v,$$

$$hH_u = H_u,$$

$$hH_v = H_v.$$

Con esto, reescribimos las ecuaciones de Maxwell como sigue. Para la ley de Faraday

$$\frac{\partial E_\zeta}{\partial v} - \frac{\partial E_v}{\partial \zeta} = i\frac{\omega}{c}H_u, \quad (14)$$

$$-\frac{\partial E_\zeta}{\partial u} + \frac{\partial E_u}{\partial \zeta} = i\frac{\omega}{c}H_v, \quad (15)$$

$$\frac{\partial hE_v}{\partial u} - \frac{\partial hE_u}{\partial v} = i\frac{\omega}{c}h^2H_\zeta. \quad (16)$$

Tabla I: Ecuaciones de Maxwell en tres dimensiones en el espacio físico (plano Z) y en el espacio transformado (plano W).

Transformación

$$z \rightarrow w; \zeta_z = \zeta_w = \zeta; \quad \left| \frac{dz}{dw} \right| = h_u = h_v = h; \quad h_\zeta = 1$$

Espacio físico $z = x + iy$	Espacio transformado $w = u + iv$
Componentes vectoriales E_x, E_y, E_ζ H_x, H_y, H_ζ	E_u, E_v, E_ζ H_u, H_v, H_ζ
$\nabla \times \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{H}$ $\frac{\partial E_\zeta}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial \zeta} = i \frac{\omega}{c} H_x$ $\frac{\partial E_x}{\partial \zeta} - \frac{\partial E_\zeta}{\partial x} = i \frac{\omega}{c} H_y$ $\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = i \frac{\omega}{c} H_\zeta$	$\frac{\partial E_\zeta}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial \zeta} (hE_v) = i \frac{\omega}{c} hH_u$ $-\frac{\partial E_\zeta}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (hE_u) = i \frac{\omega}{c} hH_v$ $\frac{\partial hE_v}{\partial u} - \frac{\partial hE_u}{\partial v} = i \frac{\omega}{c} h^2 H_\zeta$
$\nabla \times \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{E}$ $\frac{\partial H_\zeta}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial \zeta} = -i \frac{\omega}{c} E_x$ $\frac{\partial H_x}{\partial \zeta} - \frac{\partial H_\zeta}{\partial x} = -i \frac{\omega}{c} E_y$ $\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = -i \frac{\omega}{c} E_\zeta$	$\frac{\partial H_\zeta}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial \zeta} (hH_v) = -i \frac{\omega}{c} hE_u$ $-\frac{\partial H_\zeta}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial \zeta} (hH_u) = -i \frac{\omega}{c} hE_v$ $\frac{\partial hH_v}{\partial u} - \frac{\partial hH_u}{\partial v} = -i \frac{\omega}{c} h^2 E_\zeta$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ $\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_\zeta}{\partial \zeta} = 0$	$\frac{\partial E_u}{\partial u} + \frac{\partial E_v}{\partial v} + h^2 \frac{\partial E_\zeta}{\partial \zeta} = 0$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ $\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_\zeta}{\partial \zeta} = 0$	$\frac{\partial H_u}{\partial u} + \frac{\partial H_v}{\partial v} + h^2 \frac{\partial H_\zeta}{\partial \zeta} = 0$

Para la ley de Ampere

$$\frac{\partial H_\zeta}{\partial v} - \frac{\partial H_v}{\partial \zeta} = -i \frac{\omega}{c} E_u, \quad (17)$$

$$-\frac{\partial H_\zeta}{\partial u} + \frac{\partial H_u}{\partial \zeta} = -i \frac{\omega}{c} E_v, \quad (18)$$

$$\frac{\partial H_v}{\partial u} - \frac{\partial H_u}{\partial v} = -i \frac{\omega}{c} h^2 E_\zeta. \quad (19)$$

Similarmente, para las ecuaciones de las divergencias

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial E_u}{\partial u} + \frac{\partial E_v}{\partial v} + \frac{\partial \{h^2 E_\zeta\}}{\partial \zeta} \right], \quad (20)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{h^2} \left[\frac{\partial H_u}{\partial u} + \frac{\partial H_v}{\partial v} + \frac{\partial \{h^2 H_\zeta\}}{\partial \zeta} \right]. \quad (21)$$

Definimos ahora los vectores \mathbf{D} y \mathbf{B} de la forma

$$\mathbf{D} = (\varepsilon_u E_u, \varepsilon_v E_v, \varepsilon_\zeta E_\zeta), \quad (22)$$

$$\mathbf{B} = (\mu_u H_u, \mu_v H_v, \mu_\zeta H_\zeta), \quad (23)$$

con

$$\varepsilon_u = \varepsilon_v = 1; \quad \varepsilon_\zeta = h^2. \quad (24)$$

$$\mu_u = \mu_v = 1; \quad \mu_\zeta = h^2. \quad (25)$$

Con esto, es posible reescribir las ecuaciones de la forma

$$\nabla \times \mathbf{E} = i \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (26)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = -i \frac{\omega}{c} \mathbf{D}, \quad (27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (29)$$

En estas expresiones, los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} se deben interpretar como

$$\mathbf{E} = (hE_u, hE_v, E_\zeta), \quad (30)$$

$$\mathbf{H} = (hH_u, hH_v, H_\zeta). \quad (31)$$

Por otro lado, las constantes que intervienen en las relaciones constitutivas son

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\tilde{\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Vemos que nuestro resultado tiene una forma interesante. Las ecuaciones (26)-(29) representan las ecuaciones de Maxwell en un medio material, con permitividad $\tilde{\varepsilon}$ y permeabilidad $\tilde{\mu}$.

Dada la forma matricial de $\tilde{\varepsilon}$ y $\tilde{\mu}$, en la cual uno de los elementos de la diagonal es diferente del resto, decimos que el medio es anisotrópico. Se trata de un cristal uniaxial. Por otro lado, dado que h es función de u y de v , las constantes que definen este medio ($\tilde{\varepsilon}, \tilde{\mu}$) también lo son. Es decir que el medio no es ni isotrópico ni homogéneo.

Otra particularidad interesante de este medio es que $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mu}$. Esto indica que la impedancia del medio (definida por los cocientes $\sqrt{\varepsilon_j/\mu_j}$ con $j = u, v, \zeta$) es uniforme. Es decir, el medio está empatado en impedancia, de manera que a incidencia normal no habrá reflexiones al pasar de un medio a otro, a pesar de que el índice de refracción de cada región sea diferente.

Resumimos entonces este resultado teórico que resulta interesante. Partimos de una estructura en el plano Z en la que los campos se rigen por las ecuaciones de Maxwell para el vacío, dadas por (1)-(4). Tras aplicar la transformación conforme, lo que encontramos es una estructura en el plano W en la que los campos se rigen ahora por las ecuaciones de Maxwell para un medio material, lineal, de permeabilidad μ y permitividad ε dadas por (26)-(29). Es decir, que hay una especie de equivalencia entre geometría y propiedades electromagnéticas de un material.

III.2 Campos electromagnéticos invariantes en la dirección ζ .

Consideramos ahora el caso más interesante para los mapeos conformes, que es aquel en el que los campos sólo se propagan en el plano (u,v) y son invariantes a lo largo de ζ . Por supuesto que la estructura involucrada, tanto en el espacio (x,y,ζ) como en el espacio (u,v,ζ) también debe ser invariante en ζ . Es conveniente considerar por separado los casos TM o de polarización p, y TE o de polarización s.

Existen algunas simplificaciones en los sistemas que son invariantes en una dirección y que son iluminados en forma perpendicular a esa misma dirección. Igualando a cero las derivadas respecto a ζ en las ecuaciones de Maxwell es entonces posible producir seis ecuaciones que forman dos grupos desacoplados: las ecuaciones (34)-(36) (ver abajo) y las ecuaciones (39)-(41). El primer grupo involucra E_u, E_v y H_ζ , mientras que el segundo grupo involucra E_ζ, H_u y H_v . De aquí se obtienen de forma natural los casos TM y TE.

Caso TM

En el caso TM se tiene que $\mathbf{H} = (0,0,H_\zeta)$ y $\mathbf{E} = (E_u, E_v, 0)$ por lo que de la expresión para $\nabla \times \mathbf{H}$ en la Tabla I, tenemos que

$$\frac{\partial H_\zeta}{\partial v} = -i \frac{\omega}{c} h E_u, \quad (34)$$

$$\frac{\partial H_\zeta}{\partial u} = i \frac{\omega}{c} h E_v, \quad (35)$$

$$\frac{\partial hE_v}{\partial u} - \frac{\partial hE_u}{\partial v} = i \frac{\omega}{c} h^2 H_\zeta. \quad (36)$$

Derivando nuevamente (34) y (35) y luego sumando ambas ecuaciones se tiene que

$$\frac{\partial^2 H_\zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H_\zeta}{\partial v^2} = i \frac{\omega}{c} \left(\frac{\partial hE_v}{\partial u} - \frac{\partial hE_u}{\partial v} \right). \quad (37)$$

Utilizando (36) se llega a la siguiente ecuación de Helmholtz para H_ζ

$$\frac{\partial^2 H_\zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 H_\zeta}{\partial v^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 h^2 H_\zeta = 0. \quad (38)$$

Vemos que el cambio en la geometría se ve reflejado en el tercer término de esta ecuación, en donde $(\omega/c)^2$ se ha reemplazado por $h^2(\omega/c)^2$. Es decir que el factor de escala h , juega el papel de un índice de refracción.

Para un conductor perfecto, en el caso TM, la condición de frontera en el espacio original sería $\partial H_\zeta(x, y)/\partial n = 0$. En el espacio transformado, tendríamos

$$\hat{n} \cdot \nabla H_\zeta(u, v) = \frac{1}{h} \hat{n} \cdot \left[\frac{\partial H_\zeta}{\partial u} \hat{u} + \frac{\partial H_\zeta}{\partial v} \hat{v} \right] = 0, \quad (39)$$

que nos lleva a

$$\frac{\partial H_\zeta(u, v)}{\partial n} = 0. \quad (40)$$

Es decir, que la condición de frontera se conserva.

Caso TE

Para este caso se tiene que $\mathbf{E} = (0, 0, E_\zeta)$ y $\mathbf{H} = (H_u, H_v, 0)$ por lo que de la expresión para $\nabla \times \mathbf{E}$ de la Tabla I, tenemos que

$$\frac{\partial E_\zeta}{\partial v} = -i \frac{\omega}{c} h H_u, \quad (41)$$

$$\frac{\partial E_\zeta}{\partial u} = i \frac{\omega}{c} h H_v, \quad (42)$$

$$\frac{\partial B_v}{\partial u} - \frac{\partial B_u}{\partial v} = i \frac{\omega}{c} h^2 E_\zeta. \quad (43)$$

Derivando nuevamente (41) y (42) y luego sumando ambas ecuaciones se tiene que

$$\frac{\partial^2 E_\zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E_\zeta}{\partial v^2} = i \frac{\omega}{c} \left(\frac{\partial h H_v}{\partial u} - \frac{\partial h H_u}{\partial v} \right). \quad (44)$$

Utilizando (43) se llega a la siguiente ecuación de Helmholtz para E_ζ

$$\frac{\partial^2 E_\zeta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 E_\zeta}{\partial v^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 h^2 E_\zeta = 0. \quad (45)$$

Vemos que la forma de esta ecuación es similar a la ecuación (38) y que, otra vez, h juega el papel de un índice de refracción para medios con propiedades magnéticas.

Para el caso TE, la condición de frontera es $E_\zeta = 0$ en la superficie de un conductor perfecto. Esta condición se mantiene en el espacio transformado.

III.3 Coeficientes de reflexión y transmisión

Dados los resultados obtenidos en las secciones anteriores, es importante considerar los coeficientes de reflexión y transmisión para medios en los que $\mu \neq 1$. En particular, es interesante considerar las amplitudes de las ondas reflejadas y transmitidas en la frontera entre dos medios empatados en impedancia. Los resultados servirán además, para ilustrar la poca familiaridad que tiene la comunidad óptica para tratar con este tipo de medios.

Siguiendo el tratamiento descrito en el libro de Born y Wolf (1999), denotamos por A la amplitud del vector eléctrico del campo incidente. Consideramos que A es compleja con su fase igual a la parte constante del argumento de la función de onda. Escribimos la parte variable de esta función como

$$\tau_i = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(i)}}{v_1} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_i + z \cos \theta_i}{v_1} \right). \quad (46)$$

Separamos cada vector en sus componentes paralela (denotada por el subíndice \parallel) y perpendicular (denotada por el subíndice \perp) al plano de incidencia.

Las componentes del vector eléctrico para el campo incidente se escriben como

$$E_x^{(i)} = -A_{\parallel} \cos \theta_i e^{-i\tau_i}, \quad E_y^{(i)} = A_{\perp} e^{-i\tau_i}, \quad E_z^{(i)} = A_{\parallel} \sin \theta_i e^{-i\tau_i}. \quad (47)$$

Las componentes del vector magnético pueden ser obtenidas de forma inmediata utilizando la expresión

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{s} \times \mathbf{E}, \quad (48)$$

a partir de la cual obtenemos

$$H_x^{(i)} = -A_{\perp} \cos \theta_i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} e^{-i\tau_i}, \quad H_y^{(i)} = -A_{\parallel} \cos \theta_i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} e^{-i\tau_i}, \quad H_z^{(i)} = -A_{\perp} \sin \theta_i \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} e^{-i\tau_i}. \quad (49)$$

Desde este momento, en el libro de Born y Wolf se supone que $\mu = 1$, lo cual evitaremos aquí. Sean T y R las amplitudes complejas de las ondas transmitida y reflejada. Las componentes correspondientes de los vectores eléctrico y magnético son,

$$E_x^{(t)} = -T_{\parallel} \cos \theta_t e^{-i\tau_t}, \quad E_y^{(t)} = T_{\perp} e^{-i\tau_t}, \quad E_z^{(t)} = T_{\parallel} \sin \theta_t e^{-i\tau_t}, \quad (50)$$

$$H_x^{(t)} = -T_{\perp} \cos \theta_t \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} e^{-i\tau_t}, \quad H_y^{(t)} = -T_{\parallel} \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} e^{-i\tau_t}, \quad H_z^{(t)} = T_{\perp} \sin \theta_t \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} e^{-i\tau_t}, \quad (51)$$

para el campo transmitido, donde tenemos que τ_t está dada por

$$\tau_t = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(t)}}{v_2} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_t + z \cos \theta_t}{v_2} \right). \quad (52)$$

Para el campo reflejado

$$E_x^{(r)} = -R_{\parallel} \cos \theta_r e^{-i\tau_r}, \quad E_y^{(r)} = R_{\perp} e^{-i\tau_r}, \quad E_z^{(r)} = R_{\parallel} \sin \theta_r e^{-i\tau_r}, \quad (53)$$

$$H_x^{(r)} = -R_{\perp} \cos \theta_r \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} e^{-i\tau_r}, \quad H_y^{(r)} = -R_{\parallel} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} e^{-i\tau_r}, \quad H_z^{(r)} = R_{\perp} \sin \theta_r \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} e^{-i\tau_r}, \quad (54)$$

donde τ_r está dada por

$$\tau_r = \omega \left(t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}^{(r)}}{v_1} \right) = \omega \left(t - \frac{x \sin \theta_r + z \cos \theta_r}{v_1} \right). \quad (55)$$

Es necesario imponer como condición de frontera que las componentes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} que son tangenciales a la frontera deban ser continuas al pasar de un medio a otro. Por tanto debe cumplirse que

$$E_x^{(i)} + E_x^{(r)} = E_x^{(t)}, \quad E_y^{(i)} + E_y^{(r)} = E_y^{(t)}, \quad (56)$$

$$H_x^{(i)} + H_x^{(r)} = H_x^{(t)}, \quad H_y^{(i)} + H_y^{(r)} = H_y^{(t)},$$

sustituyendo todas las componentes en la expresión anterior y utilizando $\cos \theta_r = \cos(\pi - \theta_i) = -\cos \theta_i$ se produce el conjunto de ecuaciones

$$\cos \theta_i (A_{\parallel} - R_{\parallel}) = \cos \theta_t T_{\parallel}, \quad (57)$$

$$A_{\perp} + R_{\perp} = T_{\perp},$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta_i (A_{\perp} - R_{\perp}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} \cos \theta_t T_{\perp},$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} (A_{\parallel} + R_{\parallel}) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} T_{\parallel},$$

el cual a su vez se divide en otros dos conjuntos independientes, uno para las ondas perpendiculares al plano de incidencia y otro para las paralelas. Para resolver el sistema anterior, es conveniente definir la impedancia de los medios como

$$z_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}, \quad (58)$$

$$z_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}}. \quad (59)$$

Resolviendo ahora para las componentes de las ondas reflejadas y transmitidas en términos de la incidente, tenemos que

$$T_{\parallel} = \frac{2z_1 \cos \theta_i}{z_2 \cos \theta_i + z_1 \cos \theta_t} A_{\parallel}, \quad (60)$$

$$T_{\perp} = \frac{2z_1 \cos \theta_i}{z_1 \cos \theta_i + z_2 \cos \theta_t} A_{\perp},$$

$$R_{\parallel} = \frac{z_2 \cos \theta_i - z_1 \cos \theta_t}{z_2 \cos \theta_i + z_1 \cos \theta_t} A_{\parallel}, \quad (61)$$

$$R_{\perp} = \frac{z_1 \cos \theta_i - z_2 \cos \theta_t}{z_1 \cos \theta_i + z_2 \cos \theta_t} A_{\perp}.$$

Las ecuaciones (60) y (61) representan los coeficientes de reflexión y transmisión. Debido a que θ_i y θ_t son reales, y suponiendo que z_1 y z_2 también lo son, los factores trigonométricos en el lado derecho de las expresiones (60) y (61) son reales. Debido a esto, la fase de las componentes de las ondas reflejada o transmitida tendrán la misma fase de la componente correspondiente de la onda incidente, o bien presentarán una diferencia de π . Si pasamos de un medio a otro de mayor densidad, R y A tendrán una diferencia de fase de π . Para un medio empataado en impedancia, es decir un medio en el cual (58) y (59) son iguales, los numeradores de las ecuaciones (61) se harán cero a incidencia normal, de manera que no habrá reflexiones al pasar de un medio a otro. Esto a pesar de que el índice de refracción puede ser diferente. La situación se ilustra en la figura 1, en donde podemos observar la variación de la reflectancia en función del ángulo de incidencia. La reflectancia es la razón del flujo o potencia reflejada al incidente [Hecht y Zajac, 1977]. En este caso, estaría dada por $\mathbf{R} = \pi R^2$, donde el factor de π representa la diferencia de fase entre R y A . Vemos que para ángulos menores a 40° , la fracción de potencia reflejada es muy pequeña.

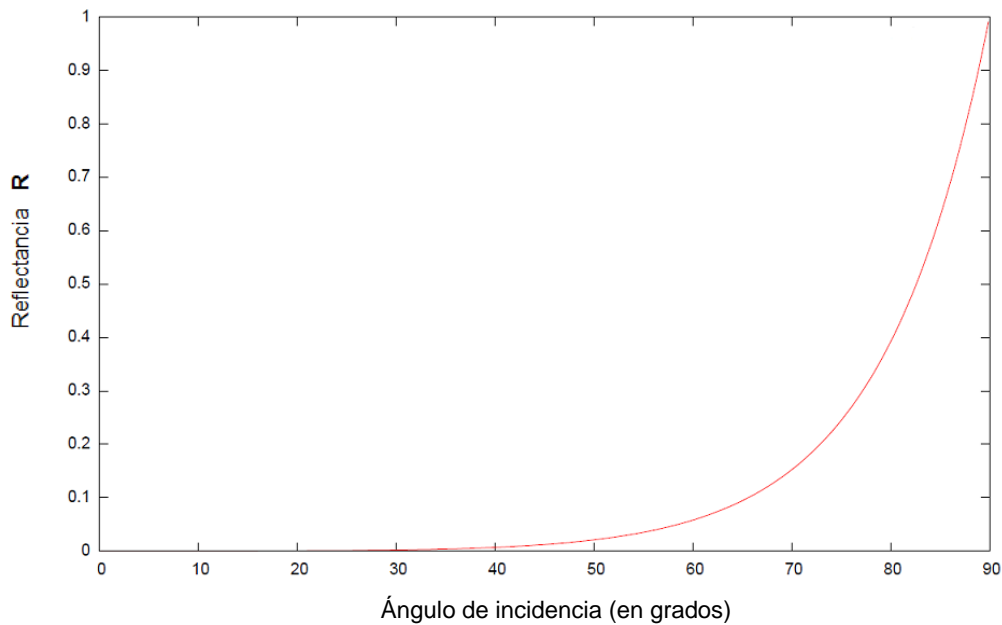


Figura 1. Reflectancia en función del ángulo en un medio con impedancia empatada.

En este capítulo, se han revisado las modificaciones a las ecuaciones de Maxwell y a la ecuación de Helmholtz tras aplicárseles un mapeo conforme. Localmente, el mapeo conforme se puede ver como una transformación a un espacio de coordenadas curvilíneas que equivale a modificar el índice de refracción del medio en el que se estaría propagando la onda electromagnética. El cambio en la geometría aparece entonces como un medio anisotrópico de impedancia empatada en la que el índice de refracción varía y en el que no habrá reflexiones, como se encontró para ángulos de incidencia pequeños en esta sección.

Capítulo IV

Problemas equivalentes en superficies y guías de onda

En este capítulo se hace una revisión sobre el uso de mapeos conformes en superficies rugosas, y su posible aplicación para el estudio y el diseño de estructuras cuyas propiedades ópticas efectivas sean distintas a las de los materiales encontrados en la naturaleza. Ponemos especial interés en el caso de una superficie cicloidal. Posteriormente se hace una descripción del método integral que nos permitirá resolver problemas de esparcimiento por una superficie rugosa en el espacio x, y . Los resultados serán comparados con los obtenidos por el método de la pantalla delgada de fase para las estructuras encontradas en el espacio transformado u, v . En la última parte se considera el uso de mapeos conformes en guías de onda. Para ello se describen tres ejemplos particulares y se presentan las transformaciones correspondientes.

IV.1 Antecedentes

Desde hace algunas décadas, diversos autores han utilizado mapeos conformes para tratar problemas de la interacción de luz con superficies. Entre los trabajos pioneros, destacan los estudios realizados sobre la validez de la hipótesis de Rayleigh de Millar (1976), y Neviere y Cadilhac (1970).

Posteriormente, Neviere, Cadilhac y otros colaboradores [Neviere, Cerutti-Maori y Cadilhac, 1971; Neviere y Cadilhac, 1971; Neviere, Cadilhac y Petit, 1973] realizaron una serie de estudios sobre el problema de difracción por rejillas empleando mapeos conformes. Depine y Simon (1982) combinaron el caso de mapeos conformes con una impedancia superficial para realizar cálculos y

Takakura (1995) abordó los problemas estudiados por Neviere y Cadilhac utilizando mapeos conformes y un método integral.

IV.2 Una familia de mapeos conformes para superficies

El problema de la difracción por una superficie con perfil cicloidal ha sido abordado por varios autores [Neviere et al, 1971; Depine y Simon, 1982; Takakura et al, 1995]. Para encontrar las ecuaciones paramétricas que describen este tipo de perfil es necesario encontrar una familia de mapeos conformes que nos permita transformarlo en uno plano.

Consideremos un área simplemente conexa en el plano complejo Z . Esta área está definida por una curva regular que contiene al origen (ver figura 18). En el plano W , consideramos un área delimitada por un círculo de radio unitario centrado en el origen. De acuerdo a los teoremas generales de mapeos conformes [Neviere y Popov, 2003], es posible encontrar un mapeo entre estas dos áreas en Z y W , que relacione los orígenes y las fronteras. Esto implica la existencia de una función $Z(W)$ analítica para $|W| < 1$ y continua para $|W| \leq 1$ que es igual a cero si y solo si $W = 0$.

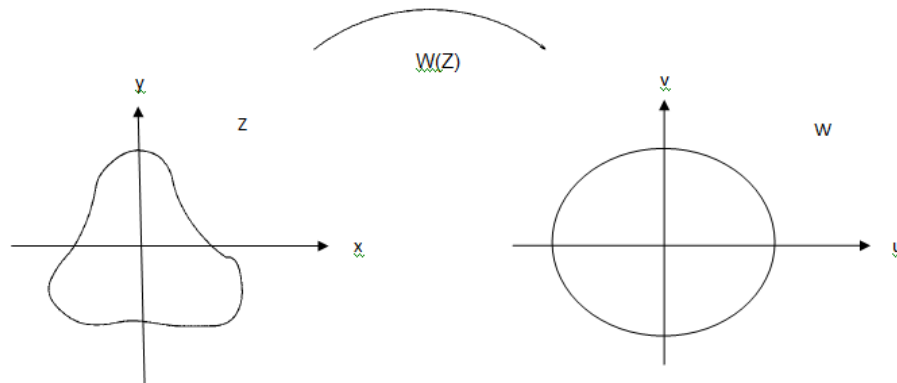


Figura 18. Ilustración del mapeo de área simplemente conexa a un círculo de radio unitario.

Si se cumplen las condiciones anteriores, y siguiendo con el tratamiento dado por Nevier y Popov (2003) para establecer el mapeo, definimos las funciones auxiliares

$$Q = e^{iqw}, \quad (147)$$

y

$$P = e^{isz}, \quad (148)$$

donde $w = u + iv$ y $z = x + iy$. Las constantes q y s representan una frecuencia espacial con unidades de 1/longitud. En términos del periodo d de la superficie tenemos que $q = 2\pi/d$.

Definimos ahora la función

$$F(Q) = \ln \frac{P(Q)}{Q}. \quad (149)$$

Dado que la función $F(Q)$ es analítica, es posible representarla en términos de un desarrollo de Taylor alrededor del origen:

$$F(Q) = \ln \frac{P(Q)}{Q} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n Q^n, \quad (150)$$

Utilizando (147) y (148), tenemos que la familia de mapeos conformes puede quedar expresada como

$$z = Aw + i \sum_n b_n e^{inqw}, \quad (151)$$

donde hemos definido el coeficiente $A = q/s$ y los coeficientes $b_n = -c_n/s$. Desarrollando la expresión (151), tenemos que

$$x + iy = Au + iAv + i \sum_n b_n e^{inqw}, \quad (152)$$

$$= Au + iAv + i \sum_n b_n e^{-nqv} (\cos nqu + i \sin nqu), \quad (153)$$

de donde obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x = Au - \sum_n b_n e^{-nqv} \sin nqu, \quad (154)$$

y

$$y = Av + \sum_n b_n e^{-nqv} \cos nqu, \quad (155)$$

Estas ecuaciones representan una familia de curvas que pueden ser mapeadas a planos. Para visualizar esto, ponemos $v = 0$ en estas expresiones, encontrando que

$$x = Au - \sum_n b_n \sin nqu, \quad (156)$$

$$y = \sum_n b_n e^{-nqv} \cos nqu. \quad (157)$$

Estas expresiones describen un perfil superficial que es recorrido al mover el parámetro u . En el espacio transformado este perfil se mapea en la curva $(u, 0)$.

Para encontrar la transformación adecuada para un perfil particular es necesario encontrar los coeficientes b_n correspondientes. Esto no es tarea sencilla, pero Neviere y Popov (2003) han encontrado una relación entre el perfil superficial y los coeficientes b_n . Esta relación se puede escribir de la forma

$$b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp(iu)}{\exp[ix(u)] \exp\{-g[x(u)]\}} \exp(-inu) du, \quad (158)$$

donde $-\infty < n < \infty$ y $g[x(u)]$ es el perfil de la superficie.

IV.2.1 El caso de la cicloide

Para ilustrar esta familia de mapeos, consideramos el caso de la cicloide, que constituye el ejemplo más sencillo de esta familia de transformaciones. A partir de la ecuación (151), poniendo $b_n = 0 \forall n \neq 1$, se obtiene que

$$z = Aw + ib_1 e^{iqw}, \quad (159)$$

o bien

$$x + iy = Au + iAv + ib_1 e^{iqu} e^{-qv}. \quad (160)$$

A partir de la expresión (160), es posible obtener las ecuaciones

$$x = Au - b_1 e^{-qv} \sin qu, \quad (161)$$

y

$$y = Av + b_1 e^{-qv} \cos qu. \quad (162)$$

Estas ecuaciones representan la relación entre los planos (x, y) y (u, v) .

Si ahora, por simplicidad, consideramos que $v = 0$ en la transformación (161)-(162) tendremos que

$$x = Au - b_1 \sin qu, \quad (163)$$

$$y = b_1 \cos qu. \quad (164)$$

Estas ecuaciones paramétricas describen una superficie. Las constantes A y b_1 de la transformación, permiten cambiar las características del perfil, mientras que q determina el periodo. La cicloide se obtiene cuando $2b_1/Ad = 0.31831$. Para valores mayores de este parámetro la curva cruza sobre sí misma, por lo que debe evitarse esta situación. En la parte superior de la figura 19 mostramos la forma de la superficie para el caso $A = 1$, $b_1 = 0.4\lambda$ y un periodo $d = 7\lambda$.

Por otro lado, si ahora derivamos la ecuación (159), tenemos que

$$\frac{dz}{dw} = A - b_1 q e^{iqw}, \quad (165)$$

de donde se sigue que

$$\left| \frac{dz}{dw} \right|^2 = A^2 + b_1^2 q^2 e^{-2qv} - 2Ab_1 q e^{-qv} \cos qu. \quad (166)$$

Utilizando esta ecuación en la ecuación (52) del capítulo II (ver también las ecuaciones (42) y (49) del capítulo II), encontramos que el índice de refracción equivalente que se observa en el espacio transformado de una superficie cicloidal estará dada por

$$n = (A^2 + b_1^2 q^2 e^{-2qv} - 2Ab_1 q e^{-qv} \cos qu)^{1/2}. \quad (167)$$

En la parte inferior de la figura 19, se muestra el índice de refracción equivalente a la estructura superficial periódica que se muestra en la parte superior.

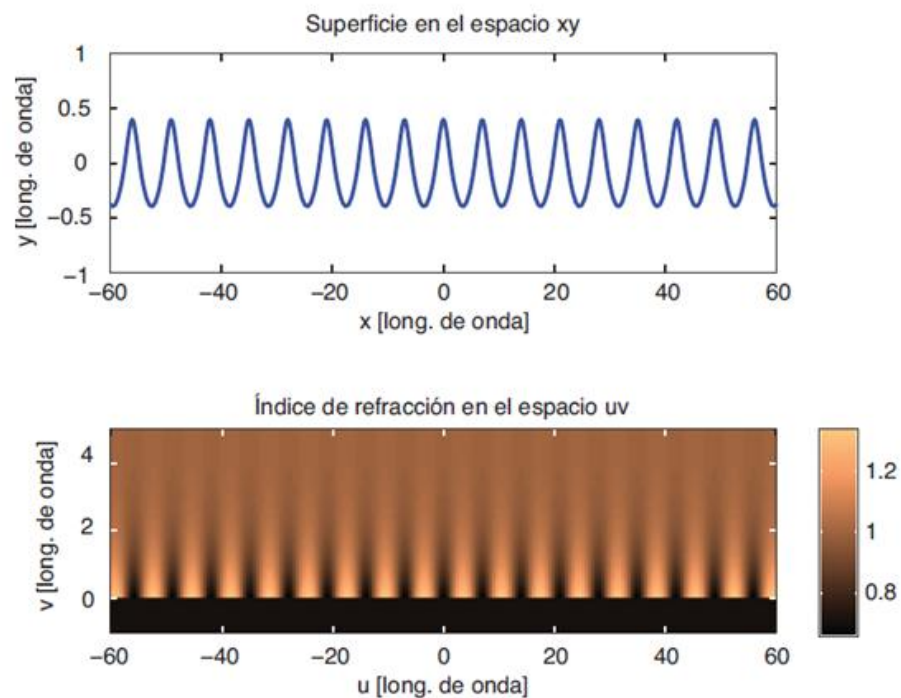


Figura 19. Superficie cicloidal en el espacio xy (gráfica superior). Variación en el índice de refracción de la superficie transformada para un periodo de 7λ (gráfica inferior).

Vemos que el índice de refracción en el espacio transformado también tiene una periodicidad de 7λ para ν fija y que su valor y decrece exponencialmente al valor del índice de refracción en el espacio libre cuando ν aumenta.

Si ahora proponemos un valor de 2λ para el periodo de la superficie cicloidal en el plano complejo Z , la variación del índice de refracción en el espacio transformado tendrá una periodicidad también de 2λ (figura 20) y su valor, al aumentar ν , decrece más rápidamente que en el ejemplo anterior al valor del índice de refracción en el espacio libre.

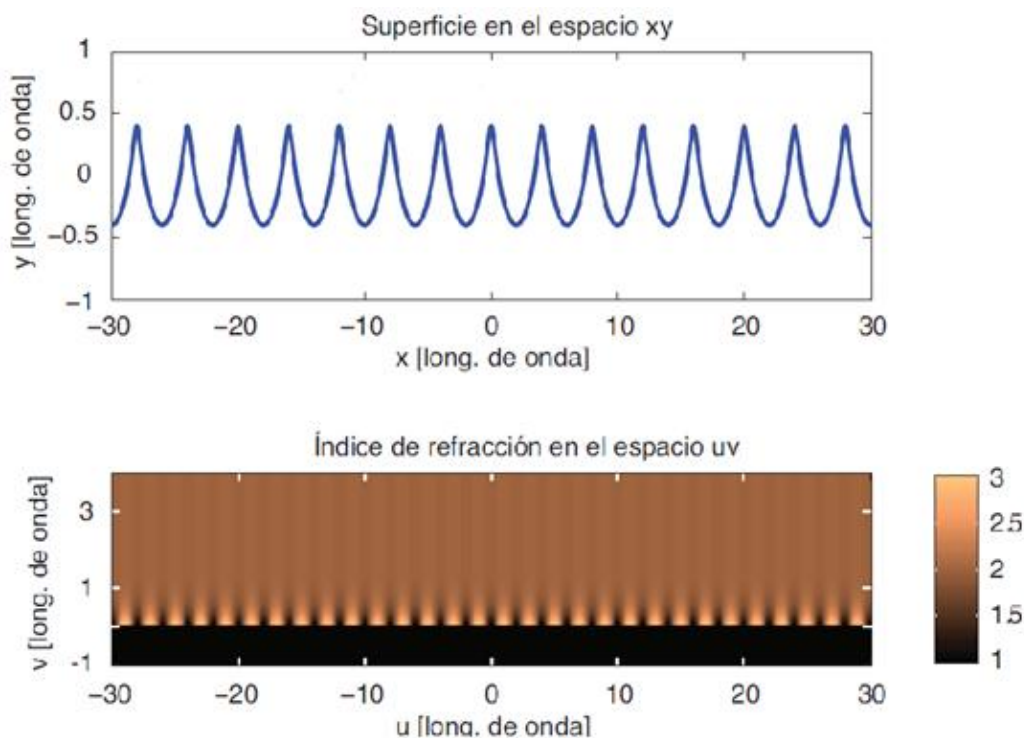


Figura 20. Superficie cicloidal en el espacio Z (gráfica superior) y variación en el índice de refracción de la superficie transformada para un periodo de 2λ (gráfica inferior).

En las siguientes secciones presentaremos métodos para abordar el problema de esparcimiento en los dos espacios. Posteriormente, compararemos los resultados correspondientes.

IV.3 El problema de esparcimiento en el espacio x, y .

En esta sección se hace la descripción de una técnica rigurosa para modelar la interacción de la luz con una superficie rugosa unidimensional. El método se basa en la solución de una o más ecuaciones integrales acopladas. En nuestro caso, dado que el perfil se describe a través de un par de ecuaciones paramétricas, es conveniente plantear el problema utilizando esta descripción. Las ecuaciones integrales a resolver se establecen entonces en el marco de este formalismo.

El sistema bajo estudio es el que se ilustra en la figura 21 y está formado por una “superficie unidimensional” que es iluminada por una onda electromagnética de frecuencia ω cuyo vector de onda está en el plano xy . Es decir, que el plano de incidencia es el plano xy . Se dice que la superficie es unidimensional porque presenta variaciones solamente en el plano xy , obedeciendo una condición de invariancia a lo largo de ζ .

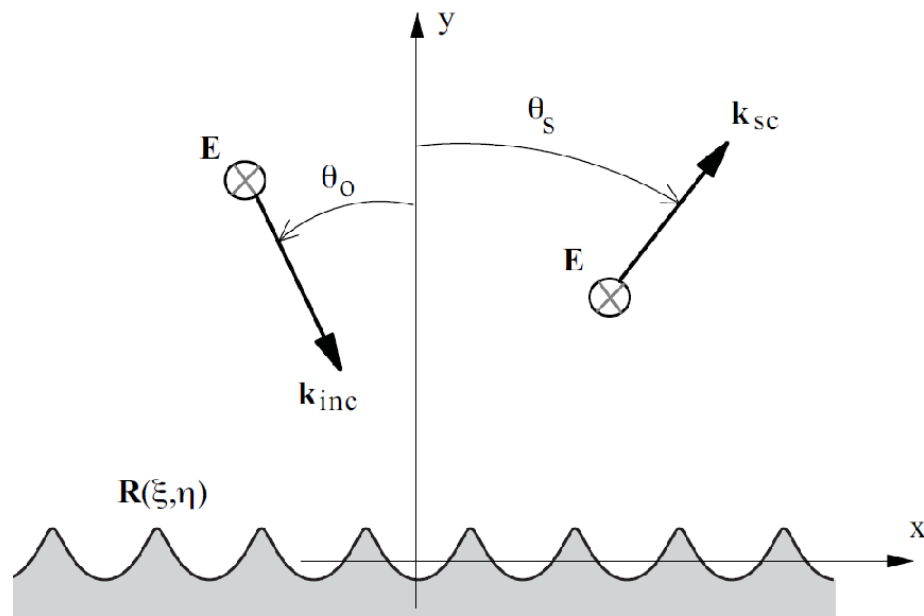


Figura 21. Geometría del problema de esparcimiento. Por simplicidad, se ilustra sólo el caso de polarización s (TE). El perfil de la superficie R define la frontera entre el vacío y un conductor perfecto. La superficie es iluminada por una onda plana (o una superposición de ellas) con un vector de onda k_{inc} . Los ángulos de incidencia y esparcimiento, están dados por θ_0 y θ_s , respectivamente.

Iniciamos la discusión presentando una descripción matemática del perfil superficial aplicable a las superficies de interés. Como ya hemos mencionado, resulta conveniente expresar las dos componentes (ξ, η) de la función vectorial $\mathbf{R}(t)$, como función de un parámetro t (que no debe confundirse con el tiempo). Escribimos entonces que

$$\mathbf{R}(t) = (\xi(t), \eta(t)). \quad (168)$$

Partiendo de la relación

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2, \quad (169)$$

donde ds es el elemento de arco, encontramos que

$$ds^2 = \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 \right] dt^2 = \phi^2(t) dt^2. \quad (170)$$

Es decir que $ds = \phi(t) dt$.

Es importante mencionar que estamos suponiendo que la trayectoria se recorre de izquierda a derecha (o en el sentido de las manecillas del reloj si se trata de una curva cerrada) como función del parámetro t . Entonces el vector

$$\mathbf{N} = \left[- \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right), \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \right], \quad (171)$$

es normal a la superficie y apunta hacia el vacío (ver figura 21). Vemos también que la cantidad $\phi(t)$ representa la magnitud de \mathbf{N} , de manera que el vector unitario normal a la superficie está dado por $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{N}/\phi$.

Con esto, definimos el operador de derivada normal no normalizado como

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{N}} = \mathbf{N} \cdot \nabla_T = \left[- \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right], \quad (172)$$

donde el operador nabla transversal en coordenadas cartesianas está dado por

$$\nabla_T = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (173)$$

Como ya se argumentó, trataremos por separado los casos transversal eléctrico (TE), conocido también como polarización s, en el que el campo eléctrico es perpendicular al plano de incidencia y el transversal magnético (TM), conocido también como polarización p, en el que el campo magnético es perpendicular al plano de incidencia.

En las circunstancias mencionadas arriba, y suponiendo iluminación monocromática, los campos son de la forma:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = [0, 0, \psi(\mathbf{r})], \quad (174)$$

donde $\mathbf{r} = (x, y)$ y $\psi(\mathbf{r})$ una función escalar que representa a $E_\zeta(x, y)$ (la componente ζ del campo eléctrico) para el caso de polarización s y a $H_\zeta(x, y)$ (la componente ζ del campo magnético) para el caso de polarización p. En el tratamiento del problema, estamos suponiendo que los campos son armónicos y que oscilan temporalmente de la forma $\exp(-i\omega t)$ pero, para simplificar la notación, esta dependencia será omitida en el tratamiento. Como vimos en el capítulo III, el campo $\psi(x, y)$ satisface la ecuación de Helmholtz en el vacío

$$\left[\nabla_T^2 + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (175)$$

Introduciendo también la función de Green en el vacío $G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ como solución de la ecuación

$$\left[\nabla_T^2 + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right] G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (176)$$

en donde $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ es la función delta de Dirac. Para el caso 2D considerado, esta función está dada por

$$G_0(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right), \quad (177)$$

en donde $H_0^{(1)}$ es una función de Hankel de primera clase y de orden cero.

IV.3.1 El método integral

En esta sección se presenta una descripción breve del método integral para resolver problemas de esparcimiento con superficies rugosas. La descripción es breve, pues se pueden encontrar descripciones detalladas del método en los artículos de Maradudin et al. (1990) y Mendoza y Méndez (1997). En este último artículo se utilizan funciones paramétricas.

Polarización TE

En esta polarización, para puntos de observación lejanos de la superficie, la amplitud de esparcimiento en el campo lejano, la cual es una cantidad que solamente es función del ángulo de esparcimiento, puede escribirse como [Mendoza, 1997]

$$r_s(\mathbf{r}) = - \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{R}) \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R} \right\} dt, \quad (178)$$

donde debe recordarse que $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ y t es un parámetro cuya variación hace que \mathbf{R} describa a la superficie. La función fuente

$$F(\mathbf{R}) = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{N}} \psi(\mathbf{r}) \right) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}(t)}. \quad (179)$$

En la expresión (178), el vector unitario $\hat{\mathbf{r}}$ puede escribirse en función explícita de sus componentes en la forma

$$\hat{\mathbf{r}} = (\sin \theta_s, \cos \theta_s), \quad (180)$$

donde θ_s es el ángulo de esparcimiento.

El coeficiente diferencial de reflexión, el cual representa la fracción de potencia incidente esparcida por unidad de ángulo, está dado por

$$\left(\frac{\partial R_s}{\partial \theta_s}\right) = \frac{|r_s(\hat{\mathbf{r}})|^2}{\mathcal{F}(\theta_0)}, \quad (181)$$

donde $\mathcal{F}(\theta_0)$ representa un factor de normalización. Para el caso de iluminación por un haz gaussiano y un ángulo de incidencia θ_0 , el factor de normalización se puede escribir como

$$\mathcal{F}(\theta_0) = 2(2\pi)^{3/2} \omega \left(\frac{\omega}{c}\right) \left[1 - \frac{1 + 2\tan^2\theta_0}{2\omega^2(\omega/c)^2}\right]. \quad (182)$$

Similarmente, para iluminación con una onda plana, tenemos que

$$\mathcal{F}(\theta_0) = 8\pi \left(\frac{\omega}{c}\right) L_x \cos \theta_0, \quad (183)$$

donde L_x representa la longitud de la superficie a lo largo de la dirección x .

La función fuente puede ser encontrada a partir de la ecuación integral [Mendoza, 1997]

$$0 = \psi_{inc}(\mathbf{R}') - \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_0(\mathbf{R}' + v\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}')|\mathbf{R})F(\mathbf{R})dt, \quad (184)$$

donde estamos usando la notación $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{R}' = \mathbf{R}(t')$.

Polarización TM

En este caso, la amplitud de esparcimiento en el campo lejano está dada por [Mendoza, 1997]

$$r_p(\hat{\mathbf{r}}) = -i \frac{\omega}{c} \int_{-\infty}^{\infty} [(\mathbf{N}(\mathbf{R}) \cdot \hat{\mathbf{r}})] H(\mathbf{R}) \exp\left\{-i \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{R}\right\} dt, \quad (185)$$

donde la función fuente está definida como

$$H(\mathbf{R}) = \psi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}(t)}. \quad (186)$$

Utilizando las definiciones anteriores, el coeficiente diferencial de reflexión, está dado por

$$\left(\frac{\partial R_p}{\partial \theta_s}\right) = \frac{|r_p(\hat{\mathbf{r}})|^2}{\mathcal{F}(\theta_0)}. \quad (187)$$

Con estas consideraciones, puede establecerse la siguiente ecuación integral a partir de la cual pueden determinarse las funciones fuente

$$H(\mathbf{R}') = \psi_{inc}(\mathbf{R}') - \lim_{v \rightarrow 0^+} \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{N}} G_0(\mathbf{R}' + v\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}')|\mathbf{r})|_{r=R} \right) H(\mathbf{R}) \right] dt. \quad (188)$$

IV.3.2 Implementación numérica

Las ecuaciones que nos permiten determinar las funciones fuente $F(t), H(t)$ con las cuales podemos calcular el campo esparcido, deben de ser resueltas numéricamente. El metodo consiste en convertir las ecuaciones integrales en ecuaciones algebraicas, evaluando las integrales sobre pequeños intervalos utilizando una aproximación rectangular.

Para esto, introducimos el conjunto $\{R_i\}$ de N puntos igualmente espaciados en el parámetro t , dentro del intervalo finito $\{-L/2, L/2\}$

$$R_i = (\xi(t_i), \eta(t_i)), \quad (189)$$

con $i = 1, 2, \dots, N$. Los puntos de muestreo están dados por

$$t_i = \left(i - \frac{1}{2}\right) \Delta t. \quad (190)$$

donde $\Delta t = L/N$.

Para polarización TE, la ecuación matricial para las funciones fuente se puede escribir como

$$E_{inc}(t_m) = \sum_{n=1}^N L_{mn} F(t_n), \quad (191)$$

donde $m = 1, 2, \dots, N$, y los elementos de la matriz L_{mn} están dados por:

$$L_{mn} = \frac{i\Delta t}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} \left[(\xi(t_m) - \xi(t_n))^2 + (\eta(t_m) - \eta(t_n))^2 \right]^{1/2} \right) \quad (192)$$

para $m \neq n$, donde $H_0^{(1)}$ es una función de Hankel de primera clase y orden cero.

Similarmente

$$L_{mm} = \frac{i\Delta t}{4} H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} \phi(t_m) \frac{\Delta t}{2e} \right), \quad (193)$$

para $m = n$.

Una vez que la función fuente $F(t)$ ha sido determinada, la amplitud de campo lejano se puede calcular por medio de la expresión

$$r_s(\theta_s) = -\Delta t \sum_{n=1}^N F(t_n) \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c} [\xi(t_n) \sin(\theta_s) + \eta(t_n) \cos(\theta_s)] \right\}. \quad (194)$$

Similarmente, para polarización TM, la ecuación matricial está dada por

$$H(t_m) = H(t_m)_{inc} + \sum_{n=1}^N H_{mn} H(t_n), \quad (195)$$

la cual puede reescribirse en la forma

$$H(t_m)_{inc} = \sum_{n=1}^N [\delta_{mn} - H_{mn}] H(t_n). \quad (196)$$

Los elementos de la matriz están dados por

$$H_{mn} = -\frac{i\Delta t}{4} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\eta'(t_n)(\xi(t_m) - \xi(t_n)) - \xi'(t_n)(\eta(t_m) - \eta(t_n))] \times \\ \times \frac{H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} [(\xi(t_m) - \xi(t_n))^2 + (\eta(t_m) - \eta(t_n))^2]^{1/2}\right)}{\frac{\omega}{c} [(\xi(t_m) - \xi(t_n))^2 + (\eta(t_m) - \eta(t_n))^2]^{1/2}}, \quad (197)$$

para $m \neq n$, y

$$H_{mm} = \frac{1}{2} + \frac{\Delta t}{4\pi\phi^2(t_m)} [\xi'(t_m)\eta''(t_m) - \xi''(t_m)\eta'(t_m)], \quad (198)$$

para $m = n$.

Una vez que la función fuente $H(t)$ ha sido determinada, la amplitud de campo lejano se puede calcular por medio de la expresión

$$r_p(\theta_s) = i \left(\frac{\omega}{c}\right) \Delta t \sum_{n=1}^N [\eta'(t_n) \sin(\theta_s) + \xi'(t_n) \cos(\theta_s)] H(t_n) \\ \times \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c} [\xi(t_n) \sin(\theta_s) + \eta(t_n) \cos(\theta_s)] \right\}. \quad (199)$$

Las expresiones dadas en esta sección constituyen un procedimiento formal para resolver problemas de esparcimiento que involucren superficies rugosas cuyos perfiles puedan ser expresados en términos de una parametrización. Presentamos algunos resultados basados en esta técnica en la sección IV.5.

IV.4 El problema de esparcimiento en el espacio transformado

En esta sección se discute el problema de esparcimiento en el espacio transformado utilizando el método integral y el método de la pantalla delgada de fase. En la sección IV. 5, presentamos resultados obtenidos con el método de la pantalla delgada de fase y los compararemos con los obtenidos en el espacio real.

IV.4.1 Método integral

Como se discutió en el capítulo III, la componente ζ del campo eléctrico satisface la ecuación de Helmholtz

$$\left[\nabla_T^2 + h^2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right] \psi(\mathbf{w}) = 0, \quad (200)$$

donde $\mathbf{w} = (u, v)$ y h representa el factor de escala.

Ahora introducimos la función de Green para el espacio libre $G_0(\mathbf{w}|\mathbf{w}')$, como una solución de la ecuación

$$\left[\nabla_T^2 + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \right] G_0(\mathbf{w}|\mathbf{w}') = -4\pi\delta(\mathbf{w} - \mathbf{w}'). \quad (201)$$

Al igual que en la sección anterior, esta función puede ser representada en términos de las funciones de Hankel de primera clase y orden cero como

$$G_0(\mathbf{w}|\mathbf{w}') = i\pi H_0^{(1)} \left(\frac{\omega}{c} |\mathbf{w} - \mathbf{w}'| \right). \quad (202)$$

En el espacio transformado, la situación física a considerar consiste de un plano perfectamente conductor que está en contacto con un medio que tiene variaciones de índice de refracción $n(u, v) = h(u, v)$. La superficie se ilumina desde este medio. Aplicando el segundo teorema integral de Green al semi espacio en contacto con el plano conductor, obtenemos la siguiente expresión

$$\int (f \nabla_T^2 g - g \nabla_T^2 f) dV = \int \left(f \frac{\partial g}{\partial n_-} - g \frac{\partial f}{\partial n_-} \right) d\Sigma, \quad (203)$$

donde $\partial/\partial n_-$ es la derivada a lo largo de la normal a la superficie Σ , dirigida hacia afuera del volumen V . Es decir que es la normal que va del medio hacia el conductor perfecto. Sin embargo, es más conveniente utilizar la derivada $\partial/\partial n$ a lo largo de la normal a la superficie, pero dirigida desde el conductor perfecto hacia el medio. Esto es

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial n_-}, \quad (204)$$

donde hemos utilizado el hecho de que la superficie es plana y que el vector normal está en la dirección de v .

De tal forma, podemos escribir

$$\int (f \nabla_T^2 g - g \nabla_T^2 f) dV = \int \left(f \frac{\partial g}{\partial v} - g \frac{\partial f}{\partial v} \right) d\Sigma. \quad (205)$$

Ahora asociamos la función f con G_0 y g con ψ y, a partir de las ecuaciones (200) y (201), escribimos el lado izquierdo de la expresión anterior como

$$\begin{aligned} \int (G_0 \nabla_T^2 \psi - \psi \nabla_T^2 G_0) dV &= \int \left[G_0 \left(-\frac{h^2 \omega^2}{c^2} \psi \right) - \psi \left(-4\pi\delta - \frac{\omega^2}{c^2} G_0 \right) \right] dV \\ &= \int \left[-\frac{h^2 \omega^2}{c^2} G_0 \psi + 4\pi\delta\psi + \frac{\omega^2}{c^2} G_0 \psi \right] dV \\ &= 4\pi\psi + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int [(1 - h^2) G_0 \psi] dV. \end{aligned} \quad (206)$$

De esta manera, podemos escribir la componente ζ del campo en el espacio transformado como

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{w}) &= \frac{1}{4\pi} \int \left[\psi(u, 0) \left(\frac{\partial}{\partial v} G_0(\mathbf{w}|u, 0) \right) - G_0(\mathbf{w}|u, 0) \left(\frac{\partial}{\partial v} \psi(u, 0) \right) \right] d\Sigma \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int [1 - h^2(\mathbf{w}')] G_0(\mathbf{w}|\mathbf{w}') \psi(\mathbf{w}') dV'. \end{aligned} \quad (207)$$

La integral de superficie puede ser dividida en dos contribuciones. Una debida a la superficie plana y otra debida a la región del medio cilindro, la cual produce el campo incidente $\psi_{inc}(u, v)$.

Para el caso de polarización s, utilizamos la condición de frontera

$$\psi(u, 0) = 0, \quad (208)$$

a partir de la cual obtenemos

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{w}) = & \psi_{inc}(\mathbf{w}) - \frac{1}{4\pi} \int G_0(\mathbf{w}|u, 0) \left(\frac{\partial}{\partial v} \psi(u, 0) \right) ds \\ & - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int [1 - h^2(\mathbf{w}')] G_0(\mathbf{w}|\mathbf{w}') \psi(\mathbf{w}') dV', \end{aligned} \quad (209)$$

la cual puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \psi(u, v) = & \psi_{inc}(u, v) - \frac{1}{4\pi} \int G_0(u, v|u', 0) F(u') du' \\ & - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int [1 - h^2(u', v')] G_0(u, v|u', v') \psi(u', v') dv', \end{aligned} \quad (210)$$

donde hemos definido la función fuente

$$F(u') = \left. \frac{\partial \psi(u', v')}{\partial v'} \right|_{v'=0}. \quad (211)$$

Para el caso de polarización p, la condición de frontera es

$$\left. \frac{\partial \psi(u, v)}{\partial v} \right|_{v=0} = 0, \quad (212)$$

la cual nos lleva a que

$$\begin{aligned} \psi(u, v) = & \psi_{inc}(u, v) - \frac{1}{4\pi} \int H(u') \left(\frac{\partial}{\partial v} G_0(u, v|u', 0) \right) du' \\ & - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \int [1 - h^2(u', v')] G_0(u, v|u', v') \psi(u', v') dv', \end{aligned} \quad (213)$$

donde la función fuente está dada por

$$H(u') = \psi(u', v')|_{v'=0}. \quad (214)$$

Observamos que la contribución de volumen se vuelve cero cuando $h^2 = 1$. Para los ejemplos presentados en la sección IV.2 esto es a unas cuantas longitudes de onda de la superficie plana. Los valores de $\psi(u, v)$ dentro del volumen en el que $h(u, v) \neq 1$ así como los valores de $H(u)$ y $F(u)$, pueden ser calculados evaluando las ecuaciones (210) y (213) en una malla que resulta de realizar un muestreo discreto por arriba de la superficie a lo largo de u y v . Si se utilizan M puntos a lo largo de v y N a lo largo de u , el resultado es un sistema de $M \times N$ ecuaciones.

El procedimiento descrito parece factible, pero llevaría tiempo programarlo y probarlo. Debido a limitaciones de tiempo, se decidió no abordar este cálculo dentro de la tesis y presentar solamente cálculos basados en el método de la pantalla delgada de fase.

IV.4.2 El método de la pantalla delgada de fase

En esta sección se hace la descripción de una técnica para modelar la interacción de la luz con una estructura en la que se tiene una superficie plana pero en la que se presentan variaciones en el índice de refracción, como la que se ilustra en las figuras 19 y 20. Con una argumentación sencilla es posible calcular los cambios de fase que adquiere el campo reflejado.

Con base en la figura 22, consideramos entonces la fase que adquiere la onda al pasar del plano $v = h$ al plano $v = 0$ y de regreso al plano $v = h$, suponiendo que la reflectividad del conductor perfecto es de uno (la fase introducida en reflexión, siendo constante, no es importante). La fase adquirida por la onda está dada por

$$\phi(u) = \frac{\omega}{c} \left| \int_{v=h}^0 n(u, v) dv \right| + \frac{\omega}{c} \left| \int_{v=0}^h n(u, v) dv \right| = 2 \frac{\omega}{c} \left| \int_{v=0}^{v=h} n(u, v) dv \right|. \quad (215)$$

La integración a lo largo de la vertical es una aproximación, pues la onda podría incidir a un ángulo cualquiera y salir en otro ángulo de esparcimiento cualquiera.

Para mejorar la aproximación, sería necesario calcular la fase utilizando dichas trayectorias. Sin embargo, la aproximación que usamos aquí debe ser válida para ángulos pequeños de incidencia y esparcimiento.

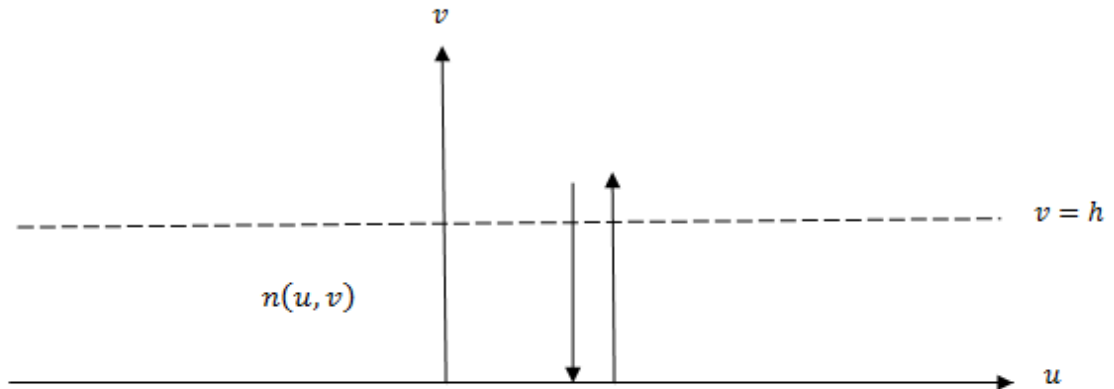


Figura 22. Camino óptico recorrido por la luz en la región no homogénea del espacio sobre la superficie plana.

Suponemos que por arriba del plano $v = h$, el medio es homogéneo y el campo esparcido se puede escribir como una superposición de ondas planas

$$\psi_{sc}(u, v) = \int \frac{dk}{2\pi} R(k) e^{iku + i\alpha_0(k)v}, \quad (216)$$

donde, para ondas propagantes (no evanescentes),

$$k = \frac{\omega}{c} \sin \theta_s, \quad (217)$$

y

$$\alpha_0(k) = \frac{\omega}{c} \cos \theta_s, \quad (218)$$

donde θ_s es el ángulo de esparcimiento. Vemos que k y $\alpha_0(k)$ representan las componentes horizontal y vertical del vector de onda de la luz esparcida.

El espectro angular $R(k)$ se puede calcular a partir del conocimiento del campo en el plano $v = h$. Escribimos entonces que

$$R(k) = \int \psi_{sc}(u, h) e^{-iku} du . \quad (219)$$

Suponiendo, por simplicidad, que iluminamos la superficie con un haz gaussiano a incidencia normal, podemos escribir que

$$\psi_{sc}(u, h) \approx A_0 e^{i\phi(u)} e^{-u^2/g^2}, \quad (220)$$

donde g representa la cintura del haz gaussiano en el plano $v = h$ y $\phi(u, v)$ es la fase calculada con base en la ecuación (215).

Para calcular el coeficiente diferencial de reflexión (la fracción de potencia incidente que es esparcida por ángulo sólido) es necesario calcular primero la potencia incidente. Tenemos que [Maradudin et al., 1990]

$$P_{inc} = \int du \int d\zeta \operatorname{Re} \left\{ -i \frac{c^2}{8\pi\omega} \psi_{inc}(u, h) \psi_{inc}^*(u, h) \right\}, \quad (221)$$

$$= \frac{c}{8\pi} L_\zeta A_0^2 \int e^{-2u^2/g^2} du = L_\zeta \frac{cgA_0^2}{8\sqrt{2\pi}}, \quad (222)$$

donde L_ζ es la longitud de la superficie en la dirección ζ . Por otro lado, para la potencia esparcida tenemos [Maradudin et al., 1990]

$$P_{scatt} = L_\zeta \frac{c^2}{8\pi\omega} \int_{-\omega/c}^{\omega/c} \frac{dk}{2\pi} \alpha_0(k) |R(k)|^2. \quad (223)$$

Normalizando, podemos escribir que

$$\frac{P_{scatt}}{P_{inc}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{c} g A_0^2} \int \frac{dk}{2\pi} \alpha_0(k) |R(k)|^2. \quad (224)$$

Utilizando el hecho de que $k = (\omega/c) \sin \theta_s$, encontramos que

$$\frac{P_{scatt}}{P_{inc}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} P(\theta_s) d\theta_s, \quad (225)$$

donde hemos definido

$$P(\theta_s) = \frac{\frac{\omega}{c} \cos^2(\theta_s)}{2\sqrt{2\pi}gA_0^2} |R(k)|^2. \quad (226)$$

De la forma de la ecuación (225), vemos que la función $P(\theta_s)$ debe representar el coeficiente diferencial de reflexión $\partial R(\theta_s)/\partial \theta_s$.

Sustituyendo la expresión de $R(k)$ (ecuación (219)) en esta expresión, encontramos que

$$P(\theta_s) = \frac{\frac{\omega}{c} \cos^2(\theta_s)}{2\sqrt{2\pi}g} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi(u)} e^{-u^2/g^2} e^{i\frac{\omega}{c} \sin \theta_s u} du \right|^2. \quad (227)$$

En este punto es conveniente definir

$$r(\theta_s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi(u)} e^{-u^2/g^2} e^{i\frac{\omega}{c} \sin \theta_s u} du, \quad (228)$$

con lo que finalmente escribimos el coeficiente diferencial de reflexión de la forma

$$\frac{\partial R(\theta_s)}{\partial \theta_s} = \frac{\frac{\omega}{c} \cos^2(\theta_s)}{2\sqrt{2\pi}g} |r(\theta_s)|^2. \quad (229)$$

Esta cantidad se puede comparar directamente con los resultados que se obtienen con el método integral en el espacio real.

IV.4.3 Comparaciones

En esta sección se presentan cálculos de esparcimiento en los dos espacios, con objeto de comprobar la equivalencia entre los dos problemas. Es decir, entre el problema que involucra superficies rugosas y el que involucra superficies planas con variaciones en el índice de refracción.

Para ilustrar los resultados, consideramos la incidencia de un haz gaussiano de ancho $g = 1\mu\text{m}$ sobre la superficie. Para el caso en el que los cálculos se realizan con el método integral, la superficie considerada es la superficie cicloidial de conductor perfecto que se describió con las ecuaciones (163) y (164) con $A = 1$, $b_1 = 0.4\lambda$ y un periodo $d = 7\lambda$. El medio exterior se considera como aire. En el espacio transformado, utilizamos el método de la pantalla delgada de fase para calcular el patrón de esparcimiento.

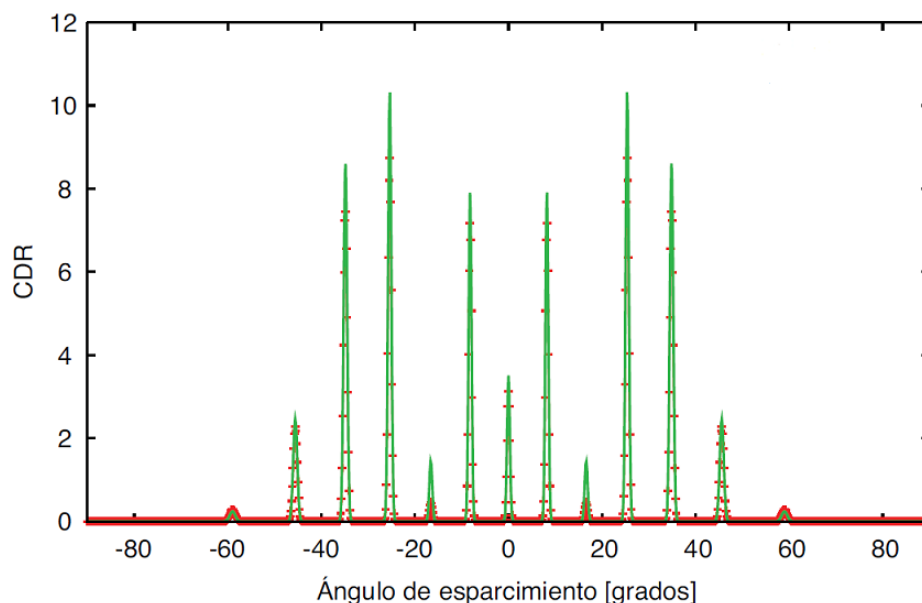


Figura 23. El coeficiente de reflexión diferencial en función del ángulo de esparcimiento calculado con el método integral (en verde y con línea continua) y con el método de la pantalla de fase (en rojo y con símbolos) para las estructuras mostradas en la figura 19. Los cálculos corresponden a polarización s.

Los resultados se muestran en la figura 23. Se puede observar que el patrón de esparcimiento (o difracción) consta de una serie de órdenes, cuyas posiciones están determinadas por la longitud de onda y el periodo de la superficie. Vemos que las amplitudes de los órdenes varían y que existe un acuerdo razonable entre los resultados que hemos calculado en los dos espacios. Vale la pena hacer notar que los cálculos en el espacio xy se realizaron con un método riguroso, mientras que los del espacio uv fueron hechos con un método aproximado. Sin embargo, el buen acuerdo entre los resultados es una indicación de que el modelo de la

pantalla delgada de fase es adecuado para tratar la estructura de la parte inferior de la figura 19, y de la equivalencia entre los problemas electromagnéticos en estos dos espacios.

IV.5 Guías de onda

Si el encontrar transformaciones adecuadas para superficies puede resultar difícil, esto resulta todavía más complicado para guías de onda. En esta sección se presentan algunos ejemplos sencillos que ilustran las dificultades y las consecuencias de este tipo de mapeos.

IV.5.2 Guías rectangulares

Empezamos esta sección consideramos la transformación lineal dada por

$$z = hw, \quad (230)$$

donde h es una constante real.

Como hemos visto anteriormente, esta transformación permite amplificar (o contraer) una figura geométrica que se encuentre en el plano Z . En nuestro ejemplo, la utilizamos para transformar una guía de onda uniforme en una guía uniforme contraída o expandida. Consideramos que en la primera guía se tiene una sección transversal δ y que se requiere transformarla en una guía que tiene una sección transversal D . Es claro entonces que necesitamos que

$$\frac{\delta}{D} = h = \left| \frac{dz}{dw} \right|. \quad (231)$$

Si la guía se ha contraído ($D < \delta$), el índice de refracción es mayor que el del vacío y si se ha expandido es menor.

IV.5.3 Guías en forma de abanico

Los mapeos conformes han sido utilizados para transformar guías de onda con forma de abanico a guías de onda rectangulares. La transformación utilizada por

Kang, (1992) es la transformación logarítmica discutida en el capítulo II, que en este caso es conveniente representar de la forma

$$z = x_0(1 - e^{qw}), \quad (232)$$

y que aplicamos al semiespacio $x > 0$. La interpretación de los parámetros x_0 y q se hará evidente en la discusión que presentamos abajo.

Con esta transformación, las ecuaciones para $x(u, v)$ y $y(u, v)$ están dadas por

$$x - x_0 = -x_0 e^{qu} \cos qv \quad (233)$$

y

$$y = -x_0 e^{qu} \sin qv. \quad (234).$$

Si consideramos que v es constante, es fácil verificar que tomando el cociente de estas dos ecuaciones obtenemos ecuaciones para rectas que pasan por el punto $(x_0, 0)$. Similarmente, sumando los cuadrados de estas dos ecuaciones se obtienen ecuaciones que describen círculos para la condición u constante.

La situación física considerada se muestra en el lado izquierdo de la figura 24. La guía empieza desde el plano $x = 0$, tiene una abertura inicial δ y un ángulo de crecimiento α , considerado como positivo. Vemos que con la transformación propuesta es posible mapear una guía de onda que tiene forma de abanico en una guía de onda cuya sección transversal geométrica es constante. Para un crecimiento angular α pequeño, tenemos que $x_0 \cong -\delta/2\alpha$.

Por otro lado, poniendo $v = \pm \delta/2$ en las ecuaciones (233) y (234), vemos que

$$\frac{y}{x - x_0} = \pm \tan q \frac{\delta}{2}. \quad (235)$$

Con este resultado, e inspeccionando la geometría, concluimos que $\alpha = |q \delta/2|$, de donde

$$q = \pm \frac{2\alpha}{\delta}. \quad (236)$$

Es decir que las constantes de la transformación q y x_0 , están determinadas por los parámetros geométricos δ y α .

El factor de escala h asociado a la transformación está dado por

$$h = \left| \frac{dz}{dw} \right| = |x_0 q| e^{qu} = e^{qu}. \quad (237)$$

Es decir que el índice de refracción efectivo en el espacio transformado inicia con el índice de refracción del vacío en $u = 0$ y varía exponencialmente como función de u , con una constante $q = \pm 2\alpha/\delta$. Por consideraciones físicas, es necesario escoger el signo negativo para que el índice de refracción disminuya como función de u . Es decir, al aumentar la abertura (ver sección anterior).

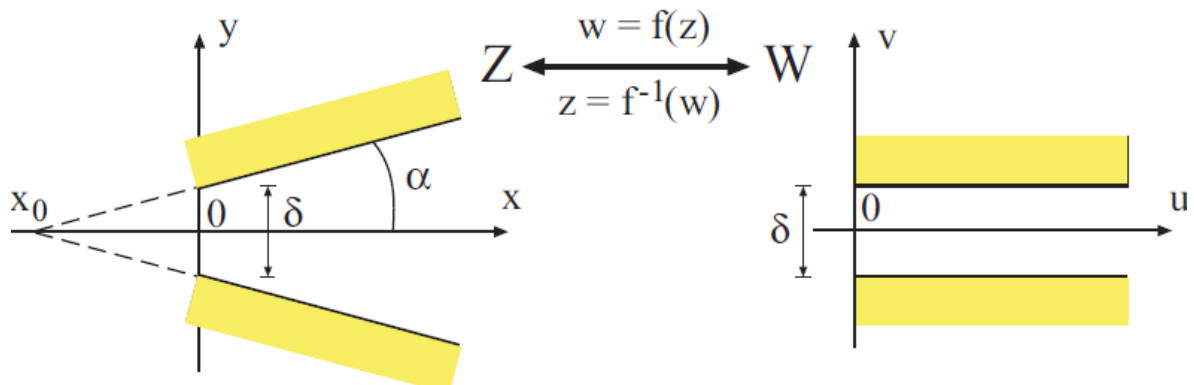


Figura 24. Guía en forma de abanico en el espacio real y guía en el espacio transformado.

Recordamos que para el problema electromagnético estamos considerando que los campos se propagan en el plano (u, v) y son invariantes a lo largo de ζ . La estructura involucrada, tanto en el espacio (x, y, ζ) como en el espacio (u, v, ζ) también debe ser invariante en ζ .

IV.5.4 Guías asimétricas

En la sección IV.1 estudiamos una familia de mapeos conformes para transformar una superficie rugosa en un plano. De manera general, expresamos esta familia por medio de la ecuación (151). También en esa sección, estudiamos con más detalle el caso de la cicloide, cuya transformación está dada por la ecuación (159). Separando parte real e imaginaria de dicha ecuación, encontramos las ecuaciones (161) y (162) que reproducimos aquí:

$$x = Au - b_1 e^{-qv} \sin qu, \quad (238)$$

y

$$y = Av + b_1 e^{-qv} \cos qu. \quad (239)$$

Como ya vimos, al poner $v = 0$ se obtiene que

$$x = Au - b_1 \sin qu, \quad (240)$$

$$y = b_1 \cos qu. \quad (241)$$

Estas ecuaciones describen una superficie en el espacio Z , que se mapea al plano $v = 0$ en el espacio W .

Consideramos ahora un plano $v = \delta$, tal que $q\delta \gg 1$. En esta situación, encontramos que

$$x = Au \quad (242)$$

$$y = Av \quad (243)$$

Es decir, que el plano $y = A\delta$ se mapea al plano $v = \delta$. Para el caso particular en el que $A = 1$, una guía cuya frontera superior está en $y = \delta$, se mapea en una guía de sección transversal constante δ .

De esta manera, vemos que la guía de onda con una superficie corrugada mostrada en la gráfica superior de la figura 25 se ha mapeado al plano W en una

guía de onda de sección transversal constante pero con las variaciones de índice de refracción mostrados en la gráfica inferior de la misma figura. Al igual que en la sección IV.1, para este ejemplo hemos utilizado $A = 1$, $b_1 = 0.4\lambda$ y un periodo $d = 7\lambda$. Vale la pena recordar que $q = 2\pi/d$.

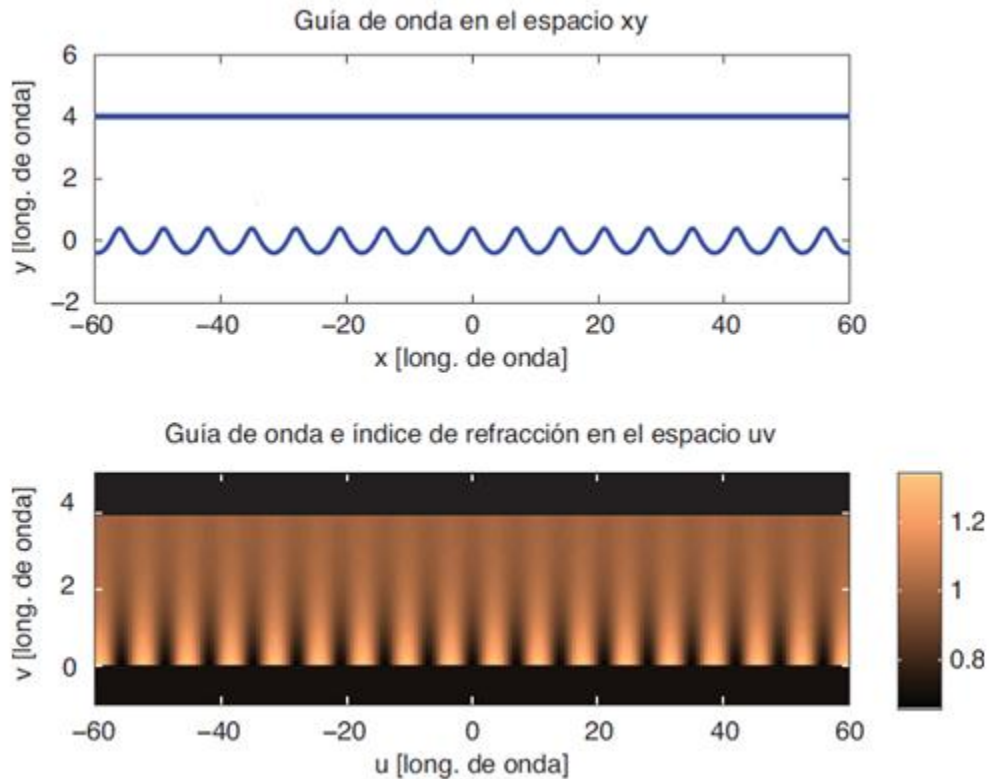


Figura 25. Guía de onda con una superficie cicloidal en el plano Z (gráfica superior) y variación en el índice de refracción de la guía transformada (gráfica inferior). En este caso $A = 1$, $b_1 = 0.4\lambda$ y $d = 7\lambda$.

Como ejemplo adicional, consideramos una guía (figura 26) cuya frontera superior está en $y = 3\lambda$ y cuya frontera inferior está definida por los parámetros $A = 2$, $b_1 = 0.4\lambda$ y un periodo de $d = 2\lambda$. El índice de refracción que se obtiene en el espacio transformado se ilustra en la gráfica inferior de la figura 26. Es importante notar que debido al cambio de escala ($A = 2$ en este caso) la estructura que se obtiene en el plano W está comprimida; es decir que el ancho de la guía es la mitad que en el plano Z y el periodo de las oscilaciones también es la mitad que el periodo que se tiene en el plano Z.

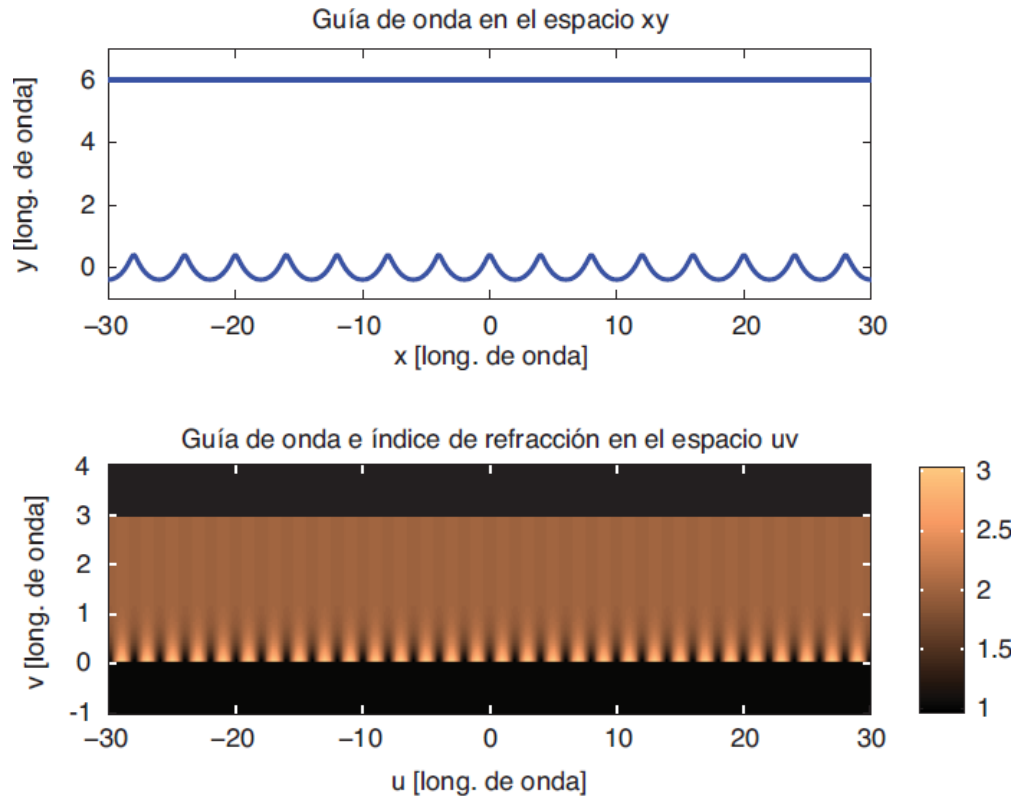


Figura 26. Guía de onda con una superficie cicloidal en el plano Z (gráfica superior) y variación en el índice de refracción de la guía transformada (gráfica inferior). En este caso $A = 2$, $b_1 = 0.4\lambda$ y $d = 2\lambda$.

En las figuras 25 y 26, vemos que el índice de refracción en el espacio transformado presenta variaciones periódicas cuya amplitud aumenta al acercarnos a $v = 0$. Este valor decrece más rápidamente al disminuir el periodo, por lo que para estos casos sería posible estudiar guías de onda más angostas con una frontera superior plana.

Capítulo V

Comentarios finales y conclusiones

En este capítulo se presenta un resumen de la tesis y una visión sobre las posibilidades de los mapeos conformes en el estudio y diseño de estructuras ópticas novedosas. También se presentan las principales conclusiones del trabajo realizado.

En esta tesis han sido descritas las propiedades generales de los mapeos conformes y las consecuencias de esta transformación en los operadores diferenciales en el espacio transformado. Vimos que la modificación que sufre la ecuación de Helmholtz, puede interpretarse como una modificación a la constante de propagación del medio. Lo anterior permite relacionar propiedades estructurales de superficies y guías de onda con problemas equivalentes en los que la geometría es más sencilla, aunque las propiedades del medio cambian. También se describieron brevemente las consecuencias de utilizar una transformación de coordenadas no conforme, que es la del llamado método C.

Posteriormente revisamos las modificaciones que sufren las ecuaciones de Maxwell tras aplicárseles un mapeo conforme. Localmente, el mapeo conforme se puede ver como una transformación a un espacio de coordenadas curvilíneas que equivale a modificar el índice de refracción del medio en el que se estaría propagando la onda electromagnética. El cambio en la geometría da como resultado un medio anisotrópico de impedancia empatada (la permitividad eléctrica y la permeabilidad magnética son iguales) en el que el índice de refracción varía. Debido a que las implicaciones de estos resultados son poco familiares para la

gente que trabaja en óptica, procedimos a derivar las ecuaciones para los coeficientes de Fresnel considerando una permeabilidad distinta a la del vacío.

Se hizo también una revisión del uso de mapeos conformes en superficies rugosas empleando una familia de transformaciones. Posteriormente, presentamos métodos para abordar el problema de esparcimiento en los dos espacios, el real y el transformado. Utilizando el método integral (Maradudin et al., 1990) se realizaron cálculos para describir la interacción de la luz con una superficie periódica rugosa. Los resultados obtenidos presentan una buena coincidencia con los obtenidos por el método de la pantalla delgada de fase aplicado a la variación de índice de refracción que se tiene en el espacio transformado. Esto es, los cálculos en el espacio xy se realizaron con un método riguroso, mientras que los del espacio uv fueron hechos con un método aproximado. Sin embargo, el buen acuerdo entre los resultados nos permitió concluir que el modelo de la pantalla delgada de fase es adecuado para tratar el problema estudiado, y que los problemas electromagnéticos en estos dos espacios son equivalentes.

V.1 Potencial de los mapeos conformes en óptica

Para ampliar la visión que hemos dado sobre el potencial de los mapeos conformes en el estudio y el diseño de algunas estructuras ópticas, se presentan ahora otros dos ejemplos.

Consideramos primero el problema de transformar el retro reflector mostrado en la figura 27 en un plano. Utilizando conceptos de óptica geométrica, vemos que el dispositivo de la figura envía los rayos incidentes de regreso hacia la fuente.

Para estudiar este ejemplo se utiliza una transformación elemental, la transformación de potencia (ecuación (65), capítulo II), que con $n = 2$ resulta en lo siguiente

$$w = Az^2, \quad (244)$$

donde estamos considerando que A es real.

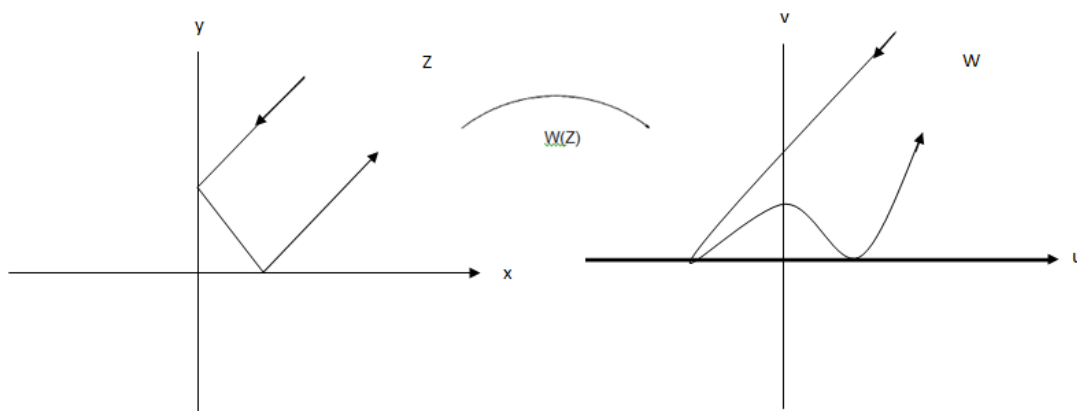


Figura 27. Geometría del retro reflector en el plano Z (gráfica izquierda) y en plano W (gráfica derecha).

Como hemos visto en el capítulo II, esta transformación permite transformar hipérbolas en un cuadrante del plano complejo Z (figura 13, capítulo II), a una cuadrícula en la mitad superior del plano W. Las ecuaciones para $u(x, y)$ y $v(x, y)$ están entonces dadas por

$$u = A(x^2 + y^2), \quad v = 2Axy. \quad (245)$$

Vemos que las líneas rectas correspondientes a la condición v constante, describen hipérbolas en el plano xy . Es decir que si $v = v_0$,

$$y = \frac{v_0}{2Ax}. \quad (246)$$

En el límite, cuando $v_0 \rightarrow 0$, se obtiene la figura del retro reflector mostrada en la parte izquierda de la figura 27. Es entonces interesante visualizar como tendría que ser el mapa de índice de refracción en la parte superior de un plano conductor

para regresar la luz hacia una fuente. Una trayectoria imaginada es la que se encuentra en el lado derecho de la figura 27.

El factor de escala está dado por

$$h = \left| \frac{dz}{dw} \right| = \left| \frac{1}{2A\sqrt{w}} \right| = \left| \frac{1}{2A\sqrt{u^2 + v^2}} \right|, \quad (247)$$

de donde se obtiene la variación del índice de refracción en el plano transformado.

Otra transformación interesante está dada por la expresión

$$z = \frac{A}{4} \left[qw + \frac{1}{qw} \right], \quad (248)$$

que se conoce como la transformación Joukowski [Schinzinger y Laura, 2003].

Entonces

$$x + iy = \frac{A}{4} \left[q(u + iv) + \frac{1}{q(u + iv)} \right]. \quad (249)$$

Separando partes real e imaginaria, tenemos que

$$x = \frac{A}{4} qu \left[1 + \frac{1}{q^2(u^2 + v^2)} \right], \quad (250)$$

$$y = \frac{A}{4} qv \left[1 - \frac{1}{q^2(u^2 + v^2)} \right]. \quad (251)$$

Si ponemos $v = 0$, encontramos que

$$x = \frac{A}{4} qu \left[1 + \frac{1}{q^2 u^2} \right], \quad y = 0. \quad (252)$$

Considerando x como función de u , vemos que si u viene de $-\infty$, la función crece hasta llegar a $u = -1/q$, en donde empieza a decrecer nuevamente. Al considerar u positiva, la función decrece desde $+\infty$ hasta llegar a $u = 1/q$, en

donde la función empieza a crecer como función de u . Este comportamiento se ilustra en la figura 28.

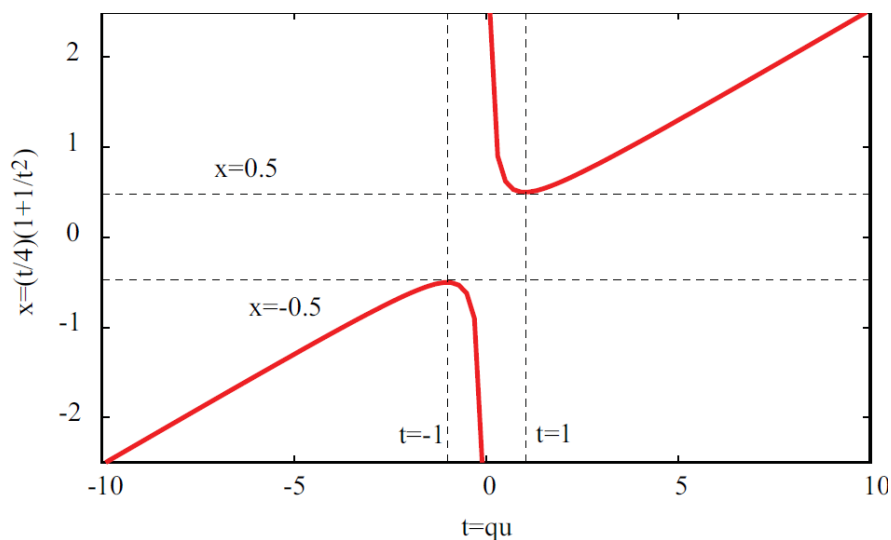


Figura 28. Comportamiento de x en función de u para la transformación $z = (A/4)[qw + 1/qw]$, con $v = 0$.

Con esto, vemos que el resultado de la transformación es el mostrado en la figura 29. En el plano Z , tenemos una rendija de abertura A , sobre un plano perfectamente conductor. Esta rendija se mapea al plano $v = 0$ en el espacio W .

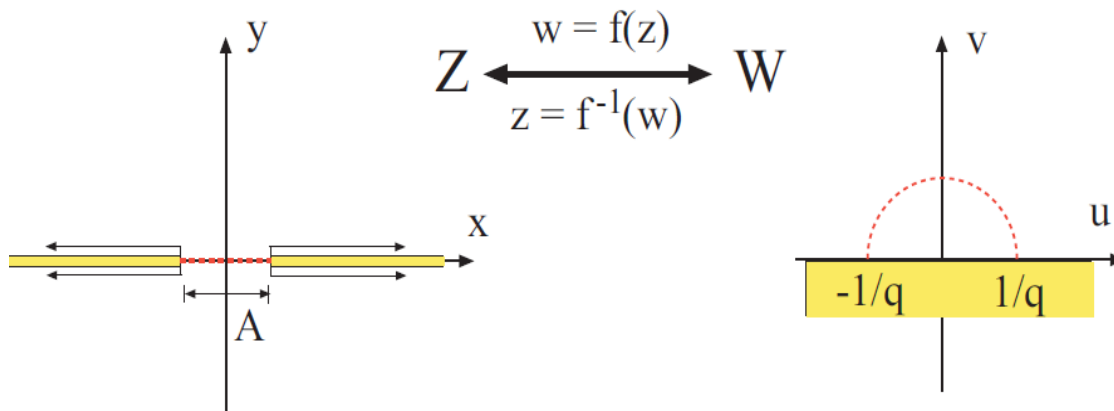


Figura 29. Geometría de una rendija en el plano complejo Z (gráfica izquierda). Superficie plana en el plano complejo W (gráfica derecha). Los puntos en el plano de la abertura se mapean al semicírculo mostrado en el espacio W .

De las ecuaciones paramétricas, también vemos que la condición $y = 0$ implica que

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{q^2}. \quad (253)$$

Es decir que el espacio de la rendija se mapea a un semicírculo en el espacio transformado. La región dentro del semicírculo corresponde a $y < 0$ y la región fuera del semicírculo al espacio $y > 0$.

Por otro lado, si ahora derivamos la ecuación (248), tenemos que

$$\frac{dz}{dw} = \frac{A}{4} [q + q \log qw]. \quad (254)$$

En coordenadas polares, podemos escribir $w = re^{i\theta}$, $r = (u^2 + v^2)^{1/2}$ y $\theta = \text{atan} \frac{v}{u}$ de donde obtenemos

$$\frac{dz}{dw} = \frac{Aq}{4} [1 + \log qre^{i\theta}] \quad (255)$$

$$= \frac{Aq}{4} [1 + \log qr + i\theta]. \quad (256)$$

Utilizando esta expresión podemos calcular el factor de escala, que representa al índice de refracción equivalente. Encontramos que

$$h = \left| \frac{dz}{dw} \right| = \left(\frac{Aq}{4} \right) [(1 + \log qr)^2 + \theta^2]^{1/2}. \quad (257)$$

En la figura 30, se presenta un mapa de índice de refracción (invertido respecto a la figura 29) con $A = 2\lambda$ y $q = 1/2\lambda$. En la figura, u y v están en unidades de λ .

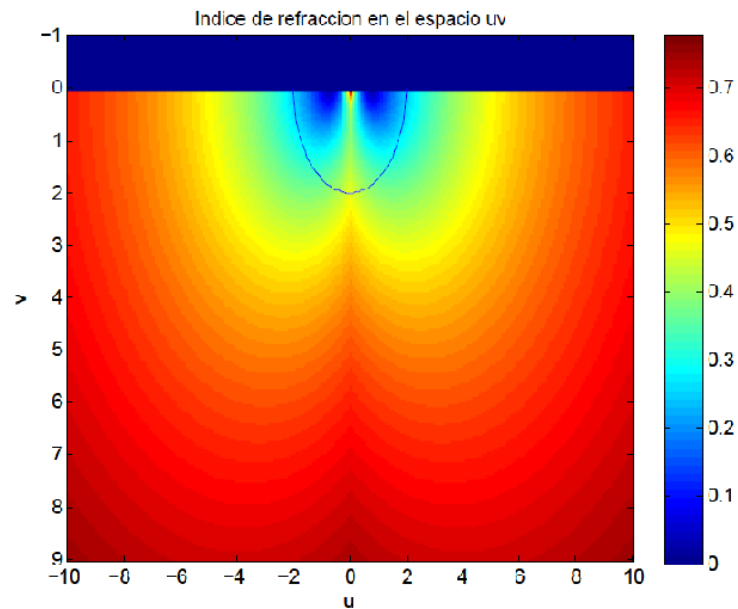


Figura 30. Variación del índice de refracción en el espacio transformado. Los valores de u y v están en unidades de λ .

De la figura podemos observar que la variación del índice de refracción n en el espacio transformado tendrá forma de lóbulos alrededor de $u = 0$ y al aumentar v , su valor aumenta de cero al del índice de refracción en el espacio libre. También vale la pena resaltar que esta transformación aplicada en forma inversa, es decir como

$$w = z + \frac{a^2}{z}, \quad (258)$$

ha sido utilizada por Leonhardt (2006a) en su propuesta para obtener invisibilidad.

Vale la pena señalar que esta transformación también puede usarse para transformar un cilindro en una placa plana y es la misma transformación que se usa en aerodinámica para estudiar alas de aviones.

V.2 Índice de refracción negativo

Como hemos visto, la gran actividad de investigación que existe actualmente en metamateriales ha estado motivada en gran parte por la búsqueda de materiales con un índice de refracción negativo. Con estos materiales, una rebanada de

caras paralelas funcionaría como una lente perfecta y el corrimiento Doppler, la presión de radiación y la ley de Snell, se invertirían. Esto nos lleva a cuestionarnos si es posible lograr un valor negativo en el índice de refracción de las estructuras equivalentes que se encuentran a partir de una transformación conforme.

Al aplicar un mapeo conforme, el cambio en la geometría se ve reflejado en la ecuación de Helmholtz. En ella, el término $(\omega/c)^2$ es reemplazado por $h^2(\omega/c)^2$. Esto es, el factor de escala h juega el papel de un índice de refracción que puede escribirse en términos de un valor absoluto como

$$n = \left| \frac{dz}{dw} \right|. \quad (259)$$

Dado que con números complejos el valor absoluto corresponde a la distancia en el plano complejo de ese número hasta el origen, no se ve posible que este valor pueda ser negativo.

Vemos entonces que debido a la presencia del valor absoluto en la definición del índice de refracción en el espacio transformado, este no puede ser negativo.

V.3 Conclusiones

Del trabajo de tesis realizado se tienen las siguientes conclusiones:

- Al aplicar un mapeo conforme la ecuación de Helmholtz solo sufre una pequeña modificación, consistente modificar el producto $\epsilon\mu$ del medio en el que se estaría propagando la onda electromagnética.
- Al aplicar un mapeo conforme, el cambio en la geometría da como resultado un medio con variaciones de índice de refracción, pero empatado en impedancia, de manera que a incidencia normal no habrá reflexiones al pasar de un medio a otro a pesar de las posibles variaciones de índice de refracción.

- El uso de mapeos conformes en óptica de superficies y guías de onda nos permite encontrar estructuras equivalentes cuyas propiedades ópticas sean distintas a las de los materiales encontrados en la naturaleza. Esto constituye un elemento importante en la búsqueda y el diseño de estructuras novedosas.
- Con los resultados obtenidos, no parece posible utilizar mapeos conformes para convertir estructuras convencionales en espacios con índice de refracción negativo.

REFERENCIAS

Alù A., Silveirinha M. G. y Engheta N., 2008, *Transmission-line analysis of ϵ -near-zero-filled narrow channels*, Phys. Rev. E (78): 016604

Agranovich V. M., Gartstein Y. N., 2009, *Electrodynamics of metamaterials and the Landau-Lifshitz approach to the magnetic permeability*, Metamaterials (3): 1-9.

Agranovich V. M., Gartstein Y. N., 2006, *Spatial dispersion and negative refraction of light*, Physics-Uspekhi 49 (10): 1029-1044.

Arfken G.B., Weber H.J., 2001, *Mathematical Methods for Physicists*, Quinta edición, 85-93 pp.

Carretero L., Pérez-Molina M., Acebal P., Blaya S., Fimia A., 2006, *Matrix method for the study of wave propagation in one-dimensional general media*, Optics Express, (14): 11385-11391.

Depine R. A., Skigin D. C., 1994, *Scattering from metallic surfaces having a finite number of rectangular grooves*, J. Opt. Soc. Am. (11) 112844-12848.

Depine R. A., Simón J. M., 1982, *Diffraction Grating Efficiencies: Conformal Mapping Method for a Good Real Conductor*, Opt. Acta 29, 1459.

Dolling G., Wegener M., Linden S., 2007, *Polarization of a three functional layer negative index photonic metamaterial*, Optics Letters (32): 551-553.

Driscoll T. A., Basov D. N., Starr A. F., Bye P. M., Nemat-Nasser S., Schuring D., Smith D. R., 2006, *Free-space microwave focusing by a negative index gradient lens*, Applied Physics Letters, (88): 081101.

Driscoll T. A., Trefethen L. N., 2002, *Schwarz-Christoffel Mapping*, Cambridge University Press, Primera edición, 132p.

Elson J. M., 2001, *Propagation in planar waveguides and the effects of wall roughness*, Optics Express (9): 461-475.

Favaro A., Kinsler P., McCall M. W., 2009, *Comment on correct definition of the Poynting vector in electrically and magnetically polarizable medium reveals that negative refraction is impossible*, Opt. Expr.(17): 15167-15169.

Hall D.G., 1981, *Scattering of optical guided waves by waveguide surface roughness: a three-dimensional treatment*, Optical Letters (6): 601-603.

- Hecht E., Zajac A. 1977, *Óptica*, Fondo Educativo Interamericano S.A., 1ra edición (en español), 586p.
- Kang S., 1992, *Fields of transverse electric waves in dielectric slab tapers*, J. Opt. Soc. Am. A (9): 261-264.
- Kang S., 1993, *Light waves in inhomogeneous-index slab tapers*, J. Opt. Soc. Am. A (10): 2236-2239.
- Kinsler P., A. Favaro, M. W. McCall, 2009, *Four Poynting theorems*, Eur. J. Phys. 30, 983.
- Kinsler P., M. W. McCall, A. Favaro, 2009, *What is negative refraction?*, Proc. Of SPIE Vol. 7392 73921M-1-73921M-10.
- Koschny T., Kafesaki M., Economou E. N., Soukoulis C. M., 2004, *Effective medium theory of left-handed materials*, Phys. Rev. Lett. (93): 107402-107406.
- Kwon D., Werner D. H., Kildishev A. V., Shlaev V. M., 2007, *Near infrared metamaterials with dual-band negative index characteristics*, Optics Express (15): 1647-1653.
- Leonhardt U., Philbin T. G., 2006, *General relativity in electrical engineering*, New Journal of Physics 8, 247.
- Leonhardt U., 2006, *Notes on conformal invisibility devices*, New Journal of Physics 8, 118.
- Leonhardt U., Philbin T. G., 2009, *Transformation Optics and the Geometry of Light*. En: E. Wolf (ed.). Progress in Optics. Elsevier, Oxford, 70-148 p.
- Maradudin A. A., Michel T., McGurn A. R., Méndez E. R., 1990, *Enhanced backscattering of light from a random grating*, Ann. Phys. (203): 255-307.
- Markel V. A., 2008, *Correct definition of the Poynting vector in electrically and magnetically polarizable medium reveals that negative refraction is impossible*, Opt. Expr.(16): 19152-19168.
- Markel V. A., 2009, *Correct definition of the Poynting vector in electrically and magnetically polarizable medium reveals that negative refraction is impossible: reply*, Opt. Expr. (17): 15170-15172.
- Markel V. A., J. C. Schotland, 2010, *On the sign of refraction in anisotropic non-magnetic media*, J. Opt. (12): 15104-15114.
- Mendoza-Suárez A., Méndez E. R., 1997, *Light scattering by reentrant fractal surfaces*, Applied Optics (36): 3521-3531.

- Mendoza-Suárez A., 1996, *Metodos rigurosos para el esparcimiento de luz por superficies y medios estratificados con perfiles arbitrarios*, Tesis de Doctorado, CICESE, 159p.
- Millar R.F., 1969, *On the Rayleigh assumption in scattering by a periodic surface*, Proc. Camb. Philos. Soc. 65, 773-791.
- Morse P. M., Feshbach H., 1953, *Methods of theoretical physics*, 1978p.
- Neviere M., Cerutti-Maori G., Cadilhac M., 1971, *Sur une nouvelle méthode de résolution du probleme de la diffraction d'une onde plane par un réseau infiniment conducteur*, Opt. Commun. 3, 48.
- Neviere M., Cadilhac M., Petit R., 1973, *Applications of conformal mappings to the diffraction of electromagnetic waves by a grating*, IEEE Trans. Antennas Propag. AP 21, 37-46.
- Neviere M., Popov E., 2003, *Light Propagation in Periodic Media: Differential Theory and Design (Optical Science and Engineering)*, Marcel Dekker Inc., 10ma edición, 410p.
- Niklasson G. A., Granqvist C. G., Hunderi O., 1981, *Effective medium models for the optical properties of inhomogeneous materials*, Applied Optics (20): 27-30.
- Padilla W. J., Smith D. R., Basov D. N., 2006, *Spectroscopy of metamaterials: from infrared to optical frequencies*, Journal of the OSA (23): 404.
- Pendry J. B., 2000, *Negative Refraction Makes a Perfect Lens*, Phys. Rev. Lett., (85): 3966.
- Pendry J. B., Schuriggy D., Smith D. R., 2006, *Controlling Electromagnetic Fields*, Science, (312): 1780–1782.
- Pérez H., 2009, *Propagación y Esparcimiento de Luz en Sistemas Confinados*, Tesis de Doctorado, CICESE, 127p.
- Pérez H., 2003, *Esparcimiento de Luz en un Medio Amplificador*, Tesis de Maestría, CICESE, 96p.
- Plum E., Zhou J., Dong J., Fedotov V. A., Koschny T., Soukoulis C. M., Zheludev N. I., 2009, *Metamaterial with negative index due to chirality*, Phys. Rev. Lett., (79): 035407.
- Porter R. M., 2005, *History and recent developments in techniques for numerical conformal mapping*, Proceedings of IWQCMA, 207-238.

- Rotman W., 1962, *Plasma simulation by artificial dielectrics and parallel plate media*, IRE-Trans. Antennas Propag.(10): 82-95.
- Schinzinger R., Laura P. A. A., 2003, *Conformal Mapping Methods and Applications*, Segunda edición, 581p.
- Schurig D., Mock J. J., Justice B. J., Cummer S. A., Pendry J. B., Starr A. F., Smith D. R., 2006, *Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies*, Science, (314):977–979.
- Shamonina E., Solymar L., 2007, *Metamaterials: How the subject started*, Metamaterials (1): 12-18.
- Silveirinha M. G. Engheta N., 2007, *Theory of supercoupling, squeezing wave energy, and field confinement in narrow channels and tight bends using ϵ near-zero metamaterials*, Physical Review B (76): 245109.
- Smith D. R., Padilla W. J., Vier D. C., Nemat-Nasser S. C., Schultz S., 2000, *Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity*, Phys. Rev. Lett. (84): 4184-4188
- Smolyaninov I. I., Smolyaninova V. N., Kildishev A. V., Shalaev V. M., 2009, *Anisotropic Metamaterials Emulated by Tapered Waveguides: Application to Optical Cloaking*, Phys. Rev. Lett.(102): 213901.
- Stockman M. I., 2007, *Criterion for negative refraction with low optical losses from a fundamental principle of causality*, Physical Review Letters (98): 177404.
- Takakura Y., 1995, *Rigorous integral approach to the problem of scattering from a modulated periodic medium obtained through conformal mapping*, J. Opt. Soc. Am. A (12): 1283-1289.
- Tishchenko A. V., 2009, *Numerical demonstration of the validity of the Rayleigh hypothesis*, Opt. Expr. (19): 17102-17117.
- Tishchenko A.V., 2010, *Electromagnetic Fields and Corrugated Interfaces*, OPN Optics & Photonics News (07-08): 51-54.
- Urzhumov Y. A., Shvets G., 2007, *Optical magnetism and negative refraction in plasmonic metamaterials*, Solid State Communications (146): 208-220.
- Veselago V. G., 1968, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ϵ and μ* , Soviet Phys. Usp. (10): 509-514 [Usp. Fiz. Nauk, 1967, (92): 517-526.

Yariv A., 1988, *Quantum Electronics*, Tercera edición, 600-603 pp.