

**Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de  
Ensenada, Baja California**



**Programa de Posgrado en Ciencias  
en Óptica**

---

**Diseño de una metasuperficie para el control de reflexión de  
microondas**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Fabiola Armenta Monzon**

Ensenada, Baja California, México

2015

Tesis defendida por

**Fabiola Armenta Monzon**

y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. Rodolfo Cortés Martínez

Codirector del Comité

---

Dr. Pedro Negrete Regagnon

Codirector del Comité

**Dr. Eugenio Rafael Méndez Méndez**

**Dr. Anatoly Khomenko**

**Dr. Ricardo Arturo Chávez Pérez**



---

**Dr. Pedro Negrete Regagnon**

Coordinador del Programa de Posgrado en Óptica

---

**Dra. Rufina Hernández Martínez**

Directora de Estudios de Posgrado

*Fabiola Armenta Monzon © 2015*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor*

Resumen de la tesis que presenta **Fabiola Armenta Monzon** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Óptica.

## **Diseño de una metasuperficie para el control de reflexión de microondas**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Rodolfo Cortés Martínez

Codirector de Tesis

---

Dr. Pedro Negrete Regagnon

Codirector de Tesis

Una metasuperficie es una superficie estructurada artificialmente utilizada para el control y la manipulación de ondas electromagnéticas. En la actualidad, el estudio de las metasuperficies ha sido de gran interés en el área de la nanoóptica, debido a las capacidades de control de la propagación de luz utilizando arreglos periódicos de sublongitud de onda que puedan funcionar como elementos ópticos planos y compactos.

En esta tesis se presenta el diseño de una metasuperficie para el control de la reflexión en el régimen de microondas. Este diseño está basado en investigaciones recientes del ámbito óptico, donde ha sido posible realizar la manipulación de luz reflejada de una manera eficiente utilizando metasuperficies. La estructura de la metasuperficie consiste de un conductor continuo y un arreglo periódico de tiras conductoras, los cuales se encuentran separados por un espacio de aire ajustable. Se ha encontrado que una modulación de la amplitud de la señal de microondas puede ser conseguida ajustando el tamaño del espacio de aire mencionado anteriormente. La modulación obtenida presenta una respuesta similar a la encontrada en los resonadores de tipo Fabry-Perot. Los niveles de atenuación de la señal reflejada también fueron obtenidos utilizando diferentes geometrías de la metasuperficie.

El análisis numérico, previo a la experimentación, fue realizado utilizando el método de la ecuación integral. Cálculos de los coeficientes de reflexión diferencial y de la potencia esparcida son mostrados, discutidos y comparados con los resultados experimentales.

Palabras Clave: **Metasuperficie, control de reflexión, microondas, modulación de amplitud.**

Abstract of the thesis presented by **Fabiola Armenta Monzon** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Master in Sciences in Optics.

### **Metasurface design for microwave reflection control**

Abstract approved by:

---

Dr. Rodolfo Cortés Martínez

Codirector de Tesis

---

Dr. Pedro Negrete Regagnon

Codirector de Tesis

A metasurface is an artificially structured surface used to control and manipulate electromagnetic waves. Recently, the research on metasurfaces has been of great interest in nano-optics because of the capabilities for light propagation control using subwavelength periodic arrays that can function as compact flat optical elements.

In this thesis, the design of a metasurface for the control of microwave reflections is presented. The motive of this thesis is that to manipulate the reflected radiation of a single metasurface and the ability to explore optical related phenomena in the microwave regime. This design is based on recent research in the area of optics, where it has been possible to manipulate light by reflection in an efficient way by using metasurfaces. The metasurface structure consists of a continuous conductor and a periodic array of conducting strips separated by an adjustable air gap. It has been found that a modulation in the reflected microwave signal amplitude can be achieved by adjusting the size of the mentioned air gap. The obtained modulation has a response similar to those of Fabry-Perot resonators. Levels of attenuation of the reflected signal were also obtained for different metasurface geometries.

Numerical analysis was made before experimentation, using the integral equation method. Calculations of the differential reflection coefficient and scattered power are shown, discussed and compared with experimental results.

**Keywords: Metasurface, reflection control, microwaves, amplitude modulation.**

## Dedicatoria

*A mi madre, por el amor incondicional que me ha brindado siempre. A mis hermanos por sus compañía. A Eduardo, por su amor, compañía y consejos a lo largo de esta etapa de mi vida.*

## Agradecimientos

A mi madre, Patricia, quien siempre me ha dado todo su amor, apoyo y comprensión incondicionalmente.

A mis hermanos, Mirna y Ángel, por su apoyo y compañía.

A Eduardo, por ayudarme a crecer como estudiante y a ser una mejor persona.

A mis amigos, quienes siempre han creído en mí.

A las personas que han pasado por mi vida y han dejado huella en mí, de ellos aprendí que uno debe crecer en todos los sentidos, ver más allá, no estar calmo.

A mis compañeros de generación, por volver divertidísimos los momentos más difíciles durante estos dos años. Por su ayuda y por soportar mi carácter tan peculiar.

A mis maestros, por inspirar y enseñar, y por toda su dedicación.

Al grupo de nanoóptica de CICESE Monterrey, por su buen recibimiento y hacer llevadera mi estancia en Nuevo León.

A los miembros de mi comité de tesis, por sus valiosas observaciones y contribuciones para enriquecer este trabajo.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

# Tabla de contenido

	Página
<b>Resumen en español</b>	<b>ii</b>
<b>Resumen en inglés</b>	<b>iii</b>
<b>Dedicatoria</b>	<b>iv</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Lista de figuras</b>	<b>viii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>5</b>
2.1. La región de microondas . . . . .	5
2.2. La ecuación de onda electromagnética . . . . .	6
2.2.1. Propiedades de escalamiento de las ecuaciones de Maxwell . . . . .	8
2.2.2. Condiciones de frontera del campo electromagnético . . . . .	9
2.2.2.1. Frontera entre dos medios dieléctricos . . . . .	10
2.3. Metasuperficies . . . . .	14
2.3.1. Antenas en “V” para el control de fase en transmisión . . . . .	15
2.3.2. Metasuperficie plasmónica para el control de amplitud y fase en reflexión . . . . .	18
2.4. Metamateriales . . . . .	19
2.4.1. Metamaterial con índice de refracción negativo . . . . .	20
2.4.2. Resonador Fabry-Perot de sublongitud de onda . . . . .	21
<b>3. Método de la ecuación integral</b>	<b>23</b>
3.1. Fundamentos . . . . .	24
3.1.1. Formulación del problema de esparcimiento . . . . .	24
3.1.2. Descripción de la superficie . . . . .	25
3.1.3. Ecuaciones integrales para el campo . . . . .	25
3.1.3.1. Funciones fuente . . . . .	28
3.1.4. El campo esparcido . . . . .	29
3.1.5. Condición de frontera de impedancia . . . . .	31
3.2. Cálculo de la reflexión de microondas por una metasuperficie . . . . .	34
3.2.1. Amplitud en campo lejano . . . . .	35
3.2.1.1. Distribución angular de la amplitud en campo lejano . . . . .	40
3.2.2. Potencia esparcida en campo lejano . . . . .	42
<b>4. Arreglo experimental y desarrollo de las mediciones experimentales</b>	<b>46</b>
4.1. Sistema de transmisión y recepción de microondas . . . . .	46
4.1.1. Caracterización del haz de microondas . . . . .	48
4.2. Microscopio de barrido de microondas de campo cercano (MBMCC) . . . . .	50
4.2.1. Sonda piramidal . . . . .	51
4.2.2. Índice de refracción del prisma de cera de parafina . . . . .	53
4.2.3. Resolución del microscopio . . . . .	54
4.3. Arreglo experimental para las mediciones con la metasuperficie . . . . .	57

<b>5.</b>	<b>Resultados experimentales</b>	<b>59</b>
5.1.	Haz de microondas reflejado por el plano de aluminio . . . . .	60
5.2.	Efecto en la señal reflejada por una celda unitaria de 1 tira . . . . .	61
5.2.1.	Efecto en la señal reflejada por una celda unitaria para ambas polarizaciones . . . . .	61
5.3.	Efecto en la señal reflejada en función de la separación entre 3 tiras . . . . .	63
5.4.	Comparación de la señal reflejada para 1 y 3 tiras en ambas polarizaciones . . . . .	63
5.5.	Dependencia de la señal reflejada como función del ancho . . . . .	65
5.6.	Medición angular de la señal reflejada . . . . .	66
<b>6.</b>	<b>Discusión</b>	<b>69</b>
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>79</b>
7.1.	Trabajo a futuro . . . . .	80
	<b>Lista de referencias bibliográficas</b>	<b>82</b>
<b>A.</b>	<b>Apéndice</b>	<b>86</b>
A.1.	Soluciones de la ecuación de onda . . . . .	86
A.1.1.	Ondas planas . . . . .	87
A.1.2.	El haz gaussiano . . . . .	89
A.2.	Interferencia de haces múltiples . . . . .	91
A.3.	Campo evanescente . . . . .	96
A.3.1.	Intensidad del campo evanescente . . . . .	97
A.3.2.	Campo evanescente estacionario . . . . .	99
A.3.3.	Reflexión total interna frustrada (RTIF) . . . . .	102
A.4.	Plasmones polaritones de superficie . . . . .	103
A.5.	Microscopio de campo cercano . . . . .	104

## Lista de figuras

1. Condiciones de frontera en: (a) la interfaz entre dos medios dieléctricos y (b) la interfaz entre un conductor perfecto y un medio dieléctrico. Se indica en cada caso las direcciones de las componentes y normales de los campos eléctrico (E), magnético (H), el desplazamiento eléctrico (D) y el flujo magnético (B). . . . . 9
2. (IZQ.) Componentes del campo eléctrico que incide en la superficie de frontera (SF) entre dos medios. (DER.) Circulación del campo eléctrico a lo largo de una caja gaussiana que encierra a la superficie de frontera y a los dos medios. Se divide el campo en las contribuciones correspondientes a la circulación en cada lado de la caja gaussiana. Se indican los parámetros que definen al primer medio (subíndice 1) y al segundo medio (subíndice 2). 10
3. Superficie gaussiana que origina un volumen cilíndrico donde se encierra a los dos medios y a la superficie de frontera que los separa. Esta superficie facilita el análisis de las contribuciones de las componentes de la densidad de campo eléctrico normales a la superficie de frontera en las tapas y en la superficie lateral. . . . . 11
4. Circulación del campo magnético a lo largo de una caja gaussiana que encierra a la superficie de frontera y a los dos medios. Se divide el campo en las contribuciones correspondientes a la circulación en cada lado de la caja gaussiana. Se indican los parámetros que definen tanto primer medio (subíndice 1) y al segundo medio (subíndice 2). . . . . 12
5. Superficie gaussiana que origina un volumen cilíndrico donde se encierra a los dos medios y a la superficie que los separa. Esta superficie facilita el análisis de las contribuciones de las componentes de la densidad de campo magnético normales a la superficie de frontera en las tapas y en la superficie lateral. . . . . 13
6. Imagen del microscopio electrónico de barrido de la metasuperficie fabricada. La celda unitaria de la interfaz plasmónica (dentro del rectángulo de línea discontinua) comprende ocho antenas en "V" de oro. Imagen tomada de Yu *et al.* (2011). . . . . 15
7. (a) Cálculo de la fase y la amplitud esparcida por una nanobarra hecha de conductor perfecto. La línea vertical punteada indica el primer orden de resonancia dipolar de la antena. (b) Componentes del campo incidente a lo largo de los ejes de la antena. (c) Las antenas en "V" corresponden a las imágenes espejo de aquellas en (b). (d-e) Cálculo analítico de la amplitud y del cambio de fase para el campo esparcido con una polarización ortogonal al campo incidente. (f) Celda unitaria de la interfaz plasmónica para la demostración de las leyes generalizadas de reflexión y refracción. (g) Simulación del campo eléctrico esparcido por antenas individuales que componen el arreglo de la Figura 6. La línea roja es la envolvente de las proyecciones de ondas esféricas. Imagen tomada de Yu *et al.* (2011). . . . 17

8.	(a) Esquema de la metasuperficie basada en los resonadores GSP. El campo incidente tiene polarización TM e incide normal a la superficie. (b) Amplitud y fase de la luz reflejada por la metasuperficie en (a) como función del ancho $w$ de la tira. (c) Los mapas de color muestran la intensidad del campo eléctrico dentro de una celda unitaria de la metasuperficie para tres tiras con diferente ancho $w$ . Las flechas representan la intensidad y la dirección del vector de Poynting de la luz reflejada en la región del aire y del espaciador dieléctrico. Imagen tomada de Pors y Bozhevolnyi (2013). . . .	18
9.	(a) Fotografía del metamaterial con índice de refracción negativo. (b) Arreglo experimental para la medición del índice de refracción. (c) Potencia transmitida por el prisma de metamaterial y por el prisma de teflón en función del ángulo de detección. Imagen tomada de Shelby <i>et al.</i> (2001). . . .	21
10.	(a) Fotografía de las muestras fabricadas. Las mediciones (círculos) y los cálculos (línea) de la señal reflejada son para (b) $h = 5$ mm, $t = 0.15$ mm y (d) $h = 10$ mm, $t = 0.3$ mm, respectivamente. Las mediciones (círculos) y los cálculos (línea) para la longitud de onda de resonancia de las dos muestras como función del espesor $t$ se muestran en (c), $h = 5$ mm, y (e), $h = 10$ mm, respectivamente. Imagen tomadas de Huang y Chan (2014). . . . .	22
11.	Geometría del problema de esparcimiento. Figura tomada de Negrete-Regagnon y Méndez (2002) . . . . .	24
12.	Perfil de la metasuperficie vista desde el plano de incidencia, plano $xz$ , para las simulaciones con el método integral considerando radiación de microondas. En el recuadro de marco azul punteado se amplifica el arreglo para 1 (a) y 3 (b) tiras. $Lx$ es el ancho de las tiras, $Lz \cong 0.05$ mm el espesor del metal, $h$ el espacio ajustable de aire y $w$ la separación entre tiras. El metal empleado es aluminio, el cual a frecuencias de microondas puede ser considerado un conductor perfecto. . . . .	34
13.	Sistema de coordenadas usado dentro del cálculo del haz incidente. El plano $x_1x_3$ es el sistema de coordenadas original y el plano rotado $x'_1x'_3$ es en el cual incide el haz. . . . .	36
14.	Haz reflejado por el plano conductor en ambas polarizaciones. El haz incidente es un haz gaussiano que tiene una longitud de onda de 2.8 cm y una cintura con un diámetro de 5 cm. . . . .	36
15.	Fracción de potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho $Lx = 0.5$ cm. . . .	37
16.	Fracción de potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho $Lx = 1$ cm. . . .	37
17.	Fracción de potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho $Lx = 2$ cm. . . .	38
18.	Fracción de potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho $Lx = 3$ cm. . . .	38
19.	Fracción de potencia esparcida para 1 y 3 tiras en función de $Lx = 0.5$ cm para una separación $h = w = 0.5$ cm fija. . . . .	39

20.	Fracción de potencia esparcida para 3 tiras en función de $h$ con un ancho de $Lx = 0.5$ cm para dos valores de la separación entre tiras $w$ . . . . .	39
21.	Distribución angular de la fracción de potencia esparcida por una metasuperficie con tres tiras para $h = 0.3$ cm. . . . .	41
22.	Distribución angular de la fracción de potencia esparcida por una metasuperficie con tres tiras para $h = 0.4$ cm. . . . .	41
23.	Distribución angular de la fracción de potencia esparcida por una metasuperficie con tres tiras para $h = 0.5$ cm. . . . .	42
24.	Potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho $Lx = 0.5$ cm. . . . .	42
25.	Potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho $Lx = 1$ cm. . . . .	43
26.	Potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho $Lx = 2$ cm. . . . .	43
27.	Potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho $Lx = 3$ cm. . . . .	44
28.	Potencia esparcida para 1 y 3 tiras en función del ancho $Lx$ , donde $w = h = 0.5$ cm. . . . .	44
29.	Potencia esparcida 3 tiras de ancho $Lx = 0.5$ cm para dos valores de la separación entre tiras $w$ , con $h = 0.5$ cm. . . . .	45
30.	Antena del receptor y transmisor del equipo de microondas empleado en las mediciones. La distancia $d$ indica la separación entre las antenas, la cual se adecuo a cada medición que se realizó. . . . .	46
31.	Patrón de antena del campo eléctrico difractado por una antena piramidal con abertura cuadrada. Los parámetros de la cavidad resonante y de la antena están en centímetros, listados en la tabla incluida en la Figura. Las unidades del eje $x$ y del eje $y$ son también en centímetros. Imagen tomada de Ohki <i>et al.</i> (2011). . . . .	47
32.	Esquema que ilustra la medición de la sección transversal en plano $xz$ del haz de microondas en propagación libre. Para una distancia fija en $z$ , se desplaza el receptor a lo largo del eje $x$ . . . . .	48
33.	Vista transversal en dirección $x$ del haz de microondas en propagación libre para diferentes distancias a lo largo del eje $z$ . La cintura del haz medida en $z = 20$ cm es de $W_0 = 3$ cm. . . . .	49
34.	(a) Proyección y (b) mapeo bidimensional del haz de microondas en propagación libre, distancia transmisor-receptor de 20 cm. . . . .	49
35.	Configuración del microscopio de barrido de microondas de campo cercano. . . . .	50
36.	(IZQ) Vista frontal y posterior de la sonda, la cual, tiene recubrimiento metálico en sus paredes interiores y está rellena de "pellets". (CENTRO) Vista lateral de la sonda. (DER.) "Pellets" de estireno con dimensiones de 5 mm de largo y 4 mm de ancho, con un índice de refracción de $n_3 = 1.35$ a 10.525 GHz. . . . .	52

37. Con la sonda acoplada al receptor se obtienen vistas transversales en la horizontal ( $x$ ) y en la vertical ( $y$ ) del haz de microondas que se difracta en los bordes de las cornetas. (a). Cuando la sonda está muy cerca del transmisor permite conocer con mejor definición el patrón de la antena. Sección transversal de la señal de microondas a lo largo de la dirección  $x$  (b) y a lo largo de la dirección  $y$  (c) cuando el transmisor esta a 1 cm de la sonda. . . . . 52
38. Esquema del arreglo experimental para la medición del índice de refracción del prisma de cera. Para un ángulo fijo de incidencia, se hace un barrido angular del rayo transmitido desde  $0^\circ$  a  $90^\circ$  para encontrar el ángulo en el cual se tiene una mayor transmisión. La línea roja es sólo para ilustrar la trayectoria del haz. . . . . 53
39. Ajuste de los datos experimentales con la ecuación para el ángulo transmitido en función del ángulo de incidencia y del índice de refracción, donde la curva que mejor ajusta los datos es para  $n_1 = 1.46$ . . . . . 54
40. Medición del campo evanescente estacionario que se genera en la superficie del prisma. El haz de microondas incide a un ángulo igual o mayor que el crítico. . . . . 54
41. Sección transversal del haz internamente reflejado cuando sale por una de las caras laterales del prisma recto. Se observa que el haz reflejado mantiene una forma tipo haz gaussiano al ser reflejado de la hipotenusa del prisma. . . . . 55
42. (a) Mapeo bidimensional y sección transversal de la distribución de intensidad del campo evanescente estacionario para  $z = 0$  cm. La línea amarilla indica la posición en el mapeo bidimensional de dónde se tomó la sección transversal. La medición indica que el periodo espacial de las franjas de interferencia es de  $\Lambda = 1.4$  cm. (b) Mapeos bidimensionales de la distribución de intensidad del campo evanescente estacionario en diferentes posiciones a lo largo del eje  $z$ . Se calcula el promedio de la intensidad de los patrones de interferencia y se muestra el decaimiento exponencial en la señal del campo evanescente estacionario que cualitativamente es apreciado. Los mapeos bidimensionales están normalizados respecto al máximo de señal en  $z = 0$ . La escala de las imágenes mostradas es de  $5 \times 0.5$  cm<sup>2</sup>. . . . . 56
43. (a) Esquema del arreglo experimental visto desde el plano de incidencia: el haz de microondas incide a 45 grados y la señal reflejada se detecta a -45 grados. Entre el arreglo periódico de tiras y el plano de aluminio se encuentra un espacio de aire ajustable  $h$ . Las posiciones  $d_1 = 15$  cm y  $d_2 = 10$  cm donde se colocan el transmisor y el receptor, respectivamente. (b) Vista frontal del arreglo de tiras de aluminio y con el plano de aluminio de fondo. Se indica el largo  $Ly$ , el ancho  $Lx$  y la separación  $w$  entre las tiras de aluminio. El aluminio tiene un espesor  $Lz \cong 0.05$  mm. El medio circundante es aire. El campo eléctrico está polarizado en dirección perpendicular al plano de incidencia. . . . . 57

44. Medición angular del haz de microondas reflejado cuando incide a 45 grados en el plano de aluminio. . . . .	60
45. Señal de microondas reflejada medida en $-45$ grados para una tira en función de $h$ , (IZQ.) con $L_x = 1$ cm y (DER.) $L_x = 0.5$ cm, para diferentes largos $L_y$ . El haz incidente oscila en dirección perpendicular al plano de incidencia y es paralelo a la tira de aluminio. . . . .	61
46. Señal de microondas reflejada medida en $-45$ grados en función de $h$ , con una tira de ancho $L_x = 1$ cm y largo $L_y = 5$ cm, para ambas polarizaciones. El haz incidente oscila en dirección perpendicular al plano de incidencia y es paralelo a la tira de aluminio. . . . .	62
47. Medición variando $h$ , con $L_x = 0.5$ cm, $L_y = 5$ cm, para ambas polarizaciones. . . . .	62
48. Señal de microondas reflejada medida en $-45$ grados para 3 tiras en función de $h$ y de $w$ , con $L_x = 1$ cm, $L_y = 5$ cm. El haz incidente oscila en dirección perpendicular al plano de incidencia y es paralelo a la tira de aluminio. . . . .	63
49. Señal de microondas reflejada medida en $-45$ grados para 1 y 3 tiras en función de $h$ , con $L_x = 0.5$ cm, $L_y = 5$ cm y $w = 0.5$ cm, para Pol-s y Pol-p. . . . .	64
50. Señal de microondas reflejada medida en $-45$ grados para 1 y 3 tiras en función de $h$ , con $L_x = 1$ cm, $L_y = 5$ cm y $w = 0.5$ cm, para Pol-s y Pol-p. . . . .	64
51. Señal de microondas reflejada medida en $-45$ grados para 1 y 3 tiras en función de $h$ , con $L_x = 2$ cm, $L_y = 5$ cm y $w = 0.5$ cm, para Pol-s y Pol-p. . . . .	65
52. Señal de microondas reflejada medida en $-45$ grados para 1 y 3 tiras en función de $h$ , con $L_x = 3$ cm, $L_y = 5$ cm y $w = 0.5$ cm, para Pol-s y Pol-p. . . . .	65
53. Resultado que muestra la dependencia de la radiación reflejada para 1 y 3 tiras como función del ancho $L_x$ , para Pol-s y Pol-p. La distancia $h = 0.5$ cm y para 3 tiras $w = 0.5$ cm. . . . .	66
54. Medición angular de la radiación reflejada por un conjunto de 3 tiras en Pol-s y Pol-p, con $L_x = 1$ cm y $w = h = 0.5$ cm. . . . .	67
55. Medición angular de la radiación reflejada por un conjunto de 3 tiras en Pol-s y Pol-p, con $L_x = 1$ cm, $w = 0.4$ cm y $h = 0.4$ cm. . . . .	67
56. Medición angular de la radiación reflejada por un conjunto de 3 tiras en Pol-s y Pol-p, con $L_x = 1$ cm, $w = 0.5$ cm y $h = 0.3$ cm . . . . .	68
57. Señal reflejada medida en $-45$ grados en función del espacio ajustable de aire $h$ para tiras de ancho $L_x = 1$ cm con diferentes largos $L_y$ . El haz está linealmente polarizado en dirección perpendicular al plano de incidencia. . . . .	70
58. Simulación y medición del haz de microondas reflejado por el plano de aluminio a $-45$ grados. . . . .	70

59.	Dependencia de la señal reflejada en función de la separación entre tiras $w$ . (a) Cálculo de la fracción de la potencia incidente que es esparcida a $-45$ grados (a) y resultados experimentales (b), para un ancho $Lx = 0.5$ cm y un largo $Ly = 5$ cm. . . . .	71
60.	Simulaciones y resultados obtenidos de la reflexión de microondas para una tira con $Lx = 1$ cm, $Ly = 5$ cm, en Pol-s y Pol-p, para 1 y 3 tiras. . . . .	73
61.	Simulación y medición de la señal reflejada en función del ancho $Lx$ para 1 y 3 tiras con $Ly = 5$ cm, $h = w = 0.5$ cm, respectivamente. . . . .	74
62.	Simulación y medición de la variación angular en Pol-s del la señal de microondas reflejada para 3 tiras de ancho $Lx = 0.5$ cm, $Ly = 5$ cm y $h = w = 0.5$ cm. . . . .	75
63.	(DER.) Cálculo de las posiciones de los mínimos y máximos en reflexión. (IZQ.) Comparación de los resultados con las mediciones. . . . .	76
64.	Nivel de atenuación obtenido de la razón entre el primer mínimo y el primer máximo de las gráficas. El análisis se hizo en función: del ancho $Lx$ con $Ly = 5$ cm (IZQ.), del largo $Ly$ para $Lx = 1$ cm (CENTRO) y, de la separación $w$ con $Lx = 0.5$ cm y $Ly = 5$ cm (DER.). . . . .	77
A.1.	Vista transversal del haz de microondas en propagación libre a lo largo del eje $z$ . Al aumentar la posición en el eje $z$ el haz Gaussiano tiende a convertirse en un frente de onda plano. . . . .	86
A.2.	(IZQ.) Reflexión de haces múltiples: los rayos indican la trayectoria seguida por las fracciones de amplitudes transmitidas y reflejadas de la amplitud del rayo primario $\mathbf{E}_0$ . Se considera que no hay absorción en el medio entre las dos superficies reflejantes. (DER.) Diagrama que muestra la diferencia de camino geométrico entre dos rayos sucesivos entre las superficies reflejantes ( $d$ es la separación entre las superficies reflejantes). . . . .	91
A.3.	Dependencia de la intensidad en transmisión (a) y en reflexión (b) con la diferencia de fase para tres valores de la fineza. Los picos se vuelven más angostos conforme aumenta el factor de fineza. . . . .	95
A.4.	Onda plana que incide en una superficie plana entre dos medios, con $n_2 > n_1$ . . . . .	96
A.5.	(IZQ.) Simulación de la parte real del campo eléctrico en el medio 2. El valor de $k_z$ fue calculado de acuerdo a la ecuación (143), incidiendo a $46$ grados, iluminando con una longitud de onda de $2.8$ cm y considerando $n_1 = 1.46$ como el índice de refracción del prisma. (DER.) Intensidad del campo evanescente. La intensidad del campo en el medio 2 decae exponencialmente conforme nos alejamos de la superficie. Los parámetros son los mismos que los usados en la Figura A.5. . . . .	98
A.6.	Esquema del campo evanescente estacionario en la hipotenusa de un prisma rectangular. Con $n_2 > n_1$ . . . . .	99

- A.7. (ARRIBA) Imágenes de la distribución de intensidad del campo evanescente estacionario con la distancia sonda-prisma en diferentes posiciones a lo largo del eje  $z$ . (ABAJO) Imagen tridimensional donde se aprecia el decaimiento exponencial del campo evanescente estacionario a lo largo del eje  $z$  y la interferencia del campo evanescente en el eje  $x$ . Para distancias mayores, en campo lejano, no hay señal de campo evanescente por que estamos en la reflexión total interna. El periodo espacial de las franjas es de 1.4 cm. La escala de las imágenes calculadas son de  $4 \times 1 \text{ cm}^2$ . Los datos de la simulación son los mismos que los usados en la Figura A.5(DER). 101
- A.8. Ejemplo de la RTI en un prisma de parafina usando microondas, imagen tomada de Novotny y Hecht (2006). Primero el Receptor 2 no detecta señal transmitida debido a la RTI, pero cuando se acerca otro prisma de parafina a una distancia  $d$ , la RTI es frustrada y en el Receptor 2 se detecta señal. Se considera que los prismas y la lente L1 son de parafina, y que el medio circundante es aire. . . . . 102
- A.9. Reflexión Total Interna frustrada por un dieléctrico en forma de punta afilada colocada a una distancia mucho menor que la longitud de onda con que se ilumina. El esquema muestra la superposición del campo evanescente entre la superficie plana y la punta. . . . . 103
- A.10. Esquema de la interfaz metal-dieléctrico dónde tiene lugar el plasmón polaritón de superficie. Los electrones en el metal oscilan en conjunto con la onda superficial a la misma frecuencia. De hecho, un plasmón polaritón de superficie es ambas una onda electromagnética y una oscilación colectiva de electrones. . . . . 103
- A.11. Esquema del microscopio óptico de campo cercano. Se muestra la inserción de la punta de la fibra extrusionada (fibra sometida a un proceso para darle una sección transversal definida y fija). . . . . 104

# 1. Introducción

---

El campo de la óptica se ha visto favorecido con el desarrollo de dispositivos que operan en rangos diferentes al visible del espectro electromagnético. Tal es el caso de las antenas, que pueden definirse como regiones de tránsito de una onda electromagnética entre el espacio libre y una línea de transmisión o guía de onda (Bava y Sanz, 1999), cuyo desarrollo fue impulsado para dar solución al problema de la comunicación a distancia.

Las antenas encuentran su análogo en el rango óptico con las llamadas nanoantenas o antenas ópticas. Definidas por Novotny (2007) como dispositivos de dimensiones menores a la longitud de onda de interés ( $< \lambda$ ) diseñados para convertir radiación electromagnética en energía localizada, y viceversa. Su invención estuvo motivada por el campo de la microscopía.

Ash y Nicholls (1972) llevaron a cabo la primera construcción de un sistema de formación de imágenes ópticas de alta resolución que hizo uso de las técnicas de la microscopía de campo cercano (Scanning Near Field Optical Microscopy, SNOM por sus siglas en inglés) en el rango de microondas. El empleo de microondas en el SNOM resultó ser una alternativa para la investigación de fenómenos a escala de sublongitud de onda, ya que esta técnica hace un escalamiento del problema óptico bajo cuestión. La técnica del SNOM rompe el límite de resolución impuesto en campo lejano basando su principio de operación en la detección de ondas evanescentes.

Fue la conjunción de la microscopía de campo cercano y de la fabricación de estructuras nanométricas lo que permitió el desarrollo de la nanofotónica o nanoóptica. La nanofotónica se encarga del estudio del comportamiento de la luz en la escala nanométrica. Una parte importante de la nanofotónica es la plasmónica, la cual explora cómo los campos electromagnéticos pueden ser confinados en dimensiones más pequeñas que la longitud de onda de interés. La plasmónica se basa en los procesos de interacción entre radiación electromagnética y los electrones de conducción en interfaces y/o en nanoestructuras metálicas, lo que lleva a una mejora del campo cercano óptico de sublongitud de onda (Maier, 2007). La plasmónica se ocupa del estudio de los plasmones polaritones de superficie (*Surface Plasmon Polaritons*, SPP's por sus siglas en inglés) que son excitaciones electromagnéticas acopladas a las oscilaciones del plasma de los electrones, los cuales tienen la propiedad de propagarse a lo largo de la interfaz metal-dieléctrico como una

onda cuasibidimensional (Raether, 1988). Actualmente, la relevancia de la plasmónica se encuentra ligada con la miniaturización de componentes electrónicos, lo que ha impulsado el desarrollo de la óptica a escalas nanométricas.

Suckling *et al.* (2004) presentaron un modelo basado en la teoría de plasmones superficiales que concuerda los resultados obtenidos de resonancias tipo Fabry-Perot para radiación de microondas a través de una rendija (de sublongitud de onda) en una placa gruesa de aluminio. La frecuencia de resonancia exhibe un máximo como función de la anchura de la rendija, disminuyendo a medida que el ancho de la rendija se reduce a menos del 2 % de la longitud de onda incidente.

Kalhor *et al.* (1988) realizaron un análisis teórico acerca del esparcimiento debido a tiras conductoras sobre un bloque de dieléctrico que está colocado encima de un plano conductor. Usando el método de expansión de modos encontraron dependencia de la energía de los modos esparcidos con la geometría de la estructura (con dimensiones  $< \lambda$ ).

Cuando se forma un arreglo periódico usando nanoantenas (o resonadores ópticos) con periodicidad del orden de sublongitudes de onda, la luz es forzada a cambios abruptos de amplitud y fase debido a las discontinuidades de la superficie. Este tipo de estructuras basadas en arreglos de nanoantenas son llamadas metasuperficies (Pors y Bozhevolnyi, 2013).

Una de las propiedades más atractivas en una metasuperficie es que mediante geometrías sencillas podemos manipular el campo electromagnético en reflexión. De ahí que el interés principal de este trabajo es diseñar una metasuperficie con un diseño sencillo de celda unitaria, que exhiba una modulación en la amplitud reflejada de la radiación de microondas incidente.

Entre los trabajos más sobresalientes en los últimos años se encuentra la metasuperficie propuesta por Yu *et al.* (2011), la cual está formada por antenas ópticas en forma de "V" capaces de enfocar/redireccionar y cambiar el estado de polarización de la luz. Este arreglo de nanoantenas permite dar el patrón de fase deseado al frente de onda incidente.

Otra metasuperficie mostrada por Pors *et al.* (2013) es formada por combinaciones de nanobarras y nanocruces metálicas que permiten controlar por completo la fase de la luz reflejada para dos polarizaciones ortogonales de manera simultánea. Además introducen el concepto de metaesparcidos, los cuales tienen dimensiones de longitud de onda y

son sensibles a la polarización.

La motivación de esta tesis es diseñar una metasuperficie que module en reflexión la radiación incidente de microondas linealmente polarizada en función de la geometría de dicha estructura. La metasuperficie se basa en un arreglo periódico (de tamaño de sublongitud de onda) de tiras de conductor perfecto, equidistantes de un plano también conductor. El medio circundante y el espacio entre el plano y las tiras, es aire. La frecuencia de la señal de microondas utilizada, 10.525 GHz ( $\lambda = 2.8 \text{ cm}$ ), cambia la escala del experimento, lo que facilita la elaboración y manipulación de la metasuperficie.

El principio de operación de este tipo de estructuras se basa en propiedades ópticas como el esparcimiento debido a nanoantenas y las resonancias en un interferómetro Fabry-Perot. El análisis de las propiedades de la metasuperficie propuesta será realizado mediante un programa computacional basado en un método riguroso, conocido como el método de la ecuación integral (o simplemente método integral). En el se describe el esparcimiento del campo electromagnético (Maradudin *et al.*, 1990) aplicado para el perfil de una superficie arbitraria (Negrete-Regagnon y Méndez, 2002). Este método puede ser usado para investigar efectos ópticos asociados con resonancias que dependen de la morfología y el múltiple esparcimiento por partículas de formas arbitrarias.

Posteriormente, se establecerá el arreglo experimental para llevar a cabo las mediciones propuestas como resultado de las simulaciones. Por último, se contrapondrán los resultados experimentales con lo predicho por el método integral.

La tesis está organizada de la siguiente manera: en el capítulo 2 se introducen los conceptos de nanoantenas y metasuperficies. Se presentan trabajos recientes donde se demuestra la funcionalidad de las nanoantenas y de las metasuperficies en la manipulación de las propiedades de campos electromagnéticos. En el capítulo 3 se presentan los fundamentos del método integral, y las simulaciones realizadas con la metasuperficie en campo lejano. En el capítulo 4 se describe el arreglo experimental, los componentes de la metasuperficie y las mediciones realizadas. También, mediante el uso del microscopio de barrido de microondas de campo cercano (MBMCC) se realizó la caracterización de algunos elementos del arreglo experimental. En el capítulo 5 se presentan los resultados experimentales. En el capítulo 6 se discuten los resultados más representativos del efecto de la modulación de amplitud lograda con la metasuperficie y se comparan con lo predi-

cho por el método integral.

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones del trabajo desarrollado y se propone el trabajo a futuro derivado de esta tesis. Se incluye también un apéndice A con desarrollos para la propagación de una onda plana y un haz Gaussiano, así como para el campo evanescente y la reflexión total interna frustrada. Se describe de manera breve la funcionalidad del microscopio óptico de campo cercano.

## 2. Marco teórico

---

En este capítulo se presenta la teoría básica que describe la propagación de los campos que componen todo el espectro electromagnético, así como las condiciones de frontera derivadas de su propagación entre dos medios con características diferentes. También se incluye la propiedad de escalamiento de las ecuaciones de Maxwell, donde se observa el efecto en frecuencia al escalar las dimensiones.

Se presenta una breve revisión de trabajos recientes, donde se demuestra la funcionalidad de las nanoantenas, metasuperficies y metamateriales en la manipulación de campos electromagnéticos. Entre los fenómenos involucrados en la respuesta de estos materiales y estructuras se encuentra el efecto de resonancias de cavidad, como en el interferómetro Fabry-Perot. Por otro lado, las nanoantenas funcionan como acopladores para transformar a la luz incidente en plasmones de superficie. La geometría de las antenas ópticas es crucial cuando se requiere manipular de manera específica la amplitud y/o fase de la luz.

En el caso del régimen de microondas, donde no existen los plasmones de superficie, se utilizan materiales conductores sobre los cuales se hacen rendijas, agujeros y cruces, periódicos y de tamaño de sublongitud de onda. Con estos materiales estructurados se ha logrado imitar la respuesta que tienen los plasmones de superficie, además de hacer posible la manipulación de la radiación, como se hace en el rango óptico .

### 2.1. La región de microondas

Las microondas forman parte del espectro electromagnético que comprende la región que va de los  $10^9$  Hz hasta alrededor de  $3 \times 10^{11}$  Hz, frecuencias a las cuales corresponden longitudes de onda que van desde los 30 cm hasta 1.0 mm.

Fue Hertz en 1887, quien probó con sus experimentos que existen otras ondas diferentes a las luminosas pero con las mismas propiedades.

Es posible comprobar convenientemente muchas predicciones teóricas de la óptica física usando técnicas de microondas. Además, en muchos casos, éste puede ser el único método práctico.

El fotón es la partícula elemental responsable de las manifestaciones cuánticas del

fenómeno electromagnético. Los fotones en el extremo más bajo del espectro de las microondas tienen poca emisión de energía y se puede esperar que sus fuentes sean exclusivamente circuitos eléctricos. Emisiones de este tipo, sin embargo, pueden aparecer debido a transiciones atómicas, si los niveles de energía involucrados están muy cerca uno de otro. El estado base aparente del átomo de cesio es un buen ejemplo, ya que la frecuencia de la emisión de microondas resultante es la base del reloj atómico.

Las microondas se utilizan en dispositivos diseñados para la transmisión de datos, en radares, en los hornos de microondas, para estudiar el origen del universo, etc.

## 2.2. La ecuación de onda electromagnética

La ecuación de onda electromagnética es una ecuación diferencial parcial de segundo orden que describe la propagación de las ondas electromagnéticas a través de un medio o del vacío. Fue Maxwell quien demostró que, con la modificación que él propuso para la Ley de Ampere, las cuatro ecuaciones basadas en observaciones experimentales muestran que las ondas electromagnéticas deben existir como una consecuencia de las mismas. También Maxwell concluyó que las ondas electromagnéticas pueden tener cualquier longitud de onda, amplitud o fase siempre que se propaguen a la velocidad de la luz en el vacío ( $c = 3 \times 10^8$  m/seg.).

Los cuatro campos,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$ , están relacionados por las *ecuaciones de Maxwell* en forma diferencial de la siguiente manera:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (4)$$

considerando un medio dentro del cual no hay corrientes ( $j = 0$ ) o cargas eléctricas ( $\rho = 0$ ). Dos campos vectoriales adicionales son requeridos, la **densidad de flujo eléctrico** (también llamada desplazamiento eléctrico)  $\mathbf{D}(r, t)$  y la **densidad de flujo magnético**

$\mathbf{B}(r, t)$  los cuales están dados por las siguientes relaciones constitutivas:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5)$$

Lo anterior se cumple para medios dieléctricos, isotrópicos y homogéneos. Las variables involucradas son  $\mathbf{E}$ : campo eléctrico;  $\mathbf{H}$ : campo magnético;  $\mathbf{D}$ : desplazamiento eléctrico;  $\mathbf{B}$ : inducción magnética;  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ : permitividad en el medio dada por la permitividad del vacío  $\epsilon_0$  y la permitividad relativa  $\epsilon_r$ ;  $\mu = \mu_0 \mu_r$ : permeabilidad en el medio dada por la permeabilidad en el vacío  $\mu_0$  y la permeabilidad relativa  $\mu_r$ ;  $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ : la velocidad de propagación en el medio.

La ecuación de onda se deduce a partir de las ecuaciones de Maxwell porque son las que rigen el comportamiento de los campos electromagnéticos cuando se propagan en un medio material o en el vacío, mientras que, las relaciones constitutivas (5) permiten caracterizar la respuesta del medio sometido a un campo electromagnético.

Tomando  $\nabla \times$  de la ecuación (3):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (6)$$

Por otro lado

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (7)$$

Entonces

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (8)$$

Con la ecuación (1), la ecuación (8) queda como

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}), \quad (9)$$

usando (4)

$$\nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (11)$$

Sustituyendo lo anterior en (9)

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2}, \quad (12)$$

se llega a la **Ecuación de onda**:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Reescribiendo la ecuación (13) se tiene que

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \left( \frac{1}{v^2} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (14)$$

Además, tenemos que la velocidad del campo eléctrico en el medio es  $v = c/n$ , siendo  $n$  el índice de refracción del medio y  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  la velocidad de la luz en el vacío. Por lo tanto, la **ecuación de onda** para medios dieléctricos, isotrópicos y homogéneos, es

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \left( \frac{n^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (15)$$

Un expresión similar se obtiene para la ecuación de onda del campo magnético  $\mathbf{H}$ . En el apéndice, se desarrollan las expresiones para dos soluciones sencillas de la ecuación de onda, un haz plano A.1.1 y un haz gaussiano A.1.2.

### 2.2.1. Propiedades de escalamiento de las ecuaciones de Maxwell

Como no hay una escala de longitud fundamental en las ecuaciones de Maxwell, es posible escalar las dimensiones mecánicas o en proporción al cambio en la frecuencia.

Escribiendo la ecuación de onda explícitamente como función de la posición (13), considerando una variación temporal de la forma  $e^{i2\pi\nu t}$  y a  $\epsilon$  y  $\mu$  de forma general como tensores, se obtiene la siguiente expresión

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) \frac{1}{\mu_r(\mathbf{r})} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}), \quad (16)$$

donde  $k = 2\pi\nu/c = \omega/c$ . Escalando las dimensiones por un factor  $a_1$  en la ecuación anterior se obtiene que

$$(a\nabla)^2 U\left(\frac{\mathbf{r}}{a}\right) \frac{1}{\mu_r\left(\frac{\mathbf{r}}{a}\right)} = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r\left(\frac{\mathbf{r}}{a}\right) U\left(\frac{\mathbf{r}}{a}\right). \quad (17)$$

Si  $a > 1$  las dimensiones sufren un ensanchamiento. El caso contrario, cuando  $a < 1$ , las dimensiones se comprimen.

Pasando al lado derecho de la ecuación el factor de escala que multiplica al laplaciano y siendo  $\mathbf{r}' = \frac{\mathbf{r}}{a}$ , se obtiene

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}') \frac{1}{\mu_r(\mathbf{r}')} = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r(\mathbf{r}') U(\mathbf{r}'), \quad (18)$$

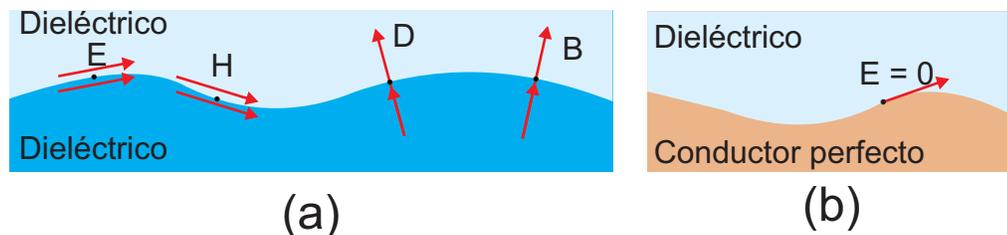
y se observa que el efecto del escalamiento de las dimensiones implica un cambio en la frecuencia.

Entonces, aplicando el procedimiento anterior a  $\epsilon$  y a  $\mu$  se encuentra que

$$\nabla^2 U(\mathbf{r}) \frac{1}{\mu_r(\mathbf{r})} = (\omega \sqrt{a_\epsilon a_\mu})^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}), \quad (19)$$

y donde el efecto del escalamiento en las propiedades del material también implica un cambio en la frecuencia.

## 2.2.2. Condiciones de frontera del campo electromagnético



**Figura 1: Condiciones de frontera en: (a) la interfaz entre dos medios dieléctricos y (b) la interfaz entre un conductor perfecto y un medio dieléctrico. Se indica en cada caso las direcciones de las componentes y normales de los campos eléctrico ( $\mathbf{E}$ ), magnético ( $\mathbf{H}$ ), el desplazamiento eléctrico ( $\mathbf{D}$ ) y el flujo magnético ( $\mathbf{B}$ ).**

En un medio homogéneo, todas las componentes de los campos  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  son funciones continuas de la posición. En la frontera entre dos medios dieléctricos, en ausencia de cargas eléctricas y corrientes libres, las componentes tangenciales de los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{H}$ , y las componentes normales de las densidades de flujo eléctrico  $\mathbf{D}$

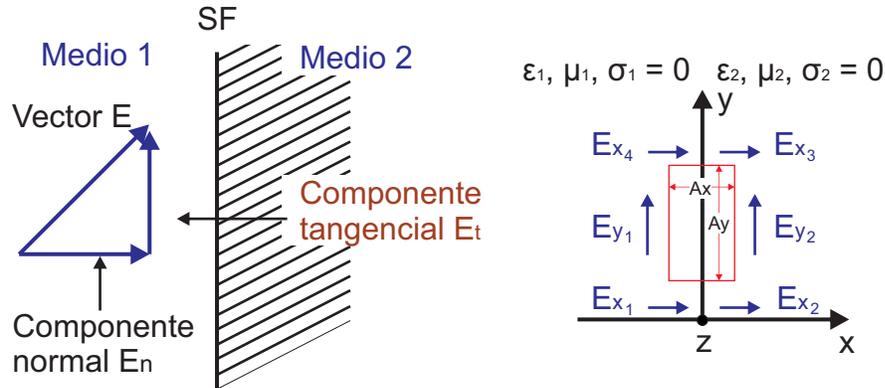


Figura 2: (IZQ.) Componentes del campo eléctrico que incide en la superficie de frontera (SF) entre dos medios. (DER.) Circulación del campo eléctrico a lo largo de una caja gaussiana que encierra a la superficie de frontera y a los dos medios. Se divide el campo en las contribuciones correspondientes a la circulación en cada lado de la caja gaussiana. Se indican los parámetros que definen al primer medio (subíndice 1) y al segundo medio (subíndice 2).

y magnético  $B$ , deben ser continuos (ver Figura 1).

En la frontera entre un medio dieléctrico y un material perfectamente conductor, las componentes tangenciales del vector de campo eléctrico deben anularse. Debido a que un espejo perfecto está hecho de un material perfectamente conductor (un metal), la componente del campo eléctrico paralela a la superficie del espejo debe ser cero. Ésto requiere que a incidencia normal el campo eléctrico reflejado e incidente tengan la misma magnitud y un cambio de fase de  $\pi$ , de modo que la suma de ambos sea cero (ver Figura 1).

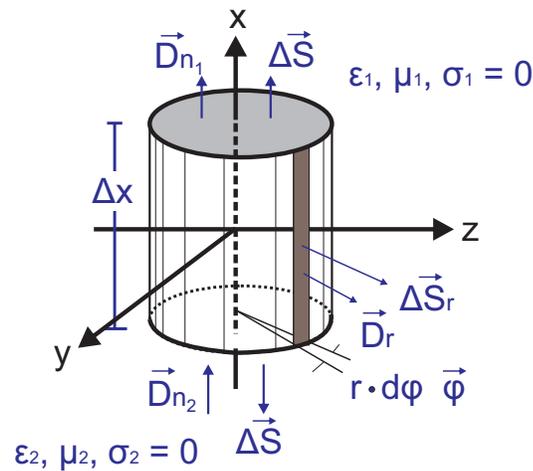
Estas condiciones de frontera son una parte integral de las ecuaciones de Maxwell. Son usadas para determinar la reflectancia y transmitancia de ondas en varias fronteras, y la propagación de ondas en estructuras periódicas y guías de onda.

### 2.2.2.1. Frontera entre dos medios dieléctricos

#### Campo Eléctrico

##### *Componente Tangencial*

En un punto dado a lo largo de la superficie, escogemos una superficie gaussiana rectangular, de área  $\Delta x \times \Delta y$  (ver Figura 2). Analizaremos primero la componente tangencial del campo eléctrico, empezando por escribir la *Ley de Faraday* en forma integral (debido



**Figura 3:** Superficie gaussiana que origina un volumen cilíndrico donde se encierra a los dos medios y a la superficie de frontera que los separa. Esta superficie facilita el análisis de las contribuciones de las componentes de la densidad de campo eléctrico normales a la superficie de frontera en las tapas y en la superficie lateral.

a la discontinuidad entre los dos medios):

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}, \quad (20)$$

resolviendo el lado izquierdo de la ecuación, tomando en cuenta todas las contribuciones del campo a lo largo de la trayectoria cerrada en ambos medios (ver Figura 2), se tiene que

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E_{x_1} \frac{\Delta x}{2} + E_{x_2} \frac{\Delta x}{2} + E_{y_1} \Delta y - E_{x_3} \frac{\Delta x}{2} - E_{x_4} \frac{\Delta x}{2} - E_{y_2} \Delta y, \quad (21)$$

y, para el lado derecho,

$$- \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta x \Delta y. \quad (22)$$

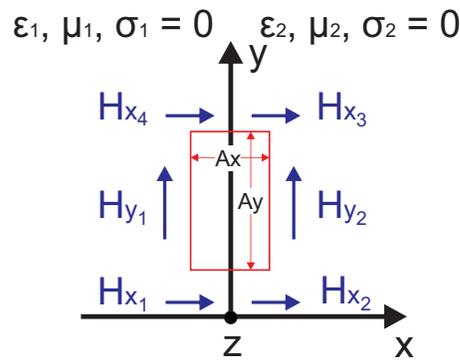
Igualando las ecuaciones anteriores y haciendo  $\Delta x \rightarrow 0$  (se considera infinitamente pequeño), se obtiene que

$$E_{y_1} = E_{y_2}, \quad (23)$$

la cual es la primera condición de frontera (23), que nos dice que **la componente tangencial del campo eléctrico en dos medios dieléctricos es continua.**

### *Componente Normal*

Para analizar lo que le pasa a la componente normal a través de una discontinuidad,



**Figura 4: Circulación del campo magnético a lo largo de una caja gaussiana que encierra a la superficie de frontera y a los dos medios. Se divide el campo en las contribuciones correspondientes a la circulación en cada lado de la caja gaussiana. Se indican los parámetros que definen tanto primer medio (subíndice 1) y al segundo medio (subíndice 2).**

usamos como superficie gaussiana un cilindro como se ve en la Figura 3 y usamos la *ley de Gauss* en su forma integral en términos de la densidad de flujo eléctrico

$$\int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \int_v \rho dv. \quad (24)$$

Desarrollando el lado izquierdo de la ecuación (24), dividiendo la superficie en las contribuciones de cada tapa y la contribución de la superficie lateral, se llega a que

$$\int_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = -D_{n1} \Delta S_t + D_r r d\phi \Delta X + D_{n2} \Delta S_t, \int_v \rho dv = \rho \Delta S \Delta X. \quad (25)$$

Haciendo  $\Delta X \rightarrow 0$  e igualando las expresiones anteriores se obtiene la condición de frontera para la componente normal del campo eléctrico (26)

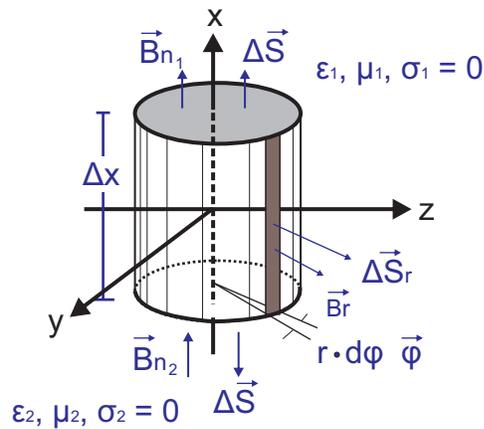
$$D_{n1} = D_{n2}. \quad (26)$$

Esto significa que, **la componente normal de la densidad de campo eléctrico para dos medios dieléctricos es continua.**

## Campo Magnético

### Componente Tangencial

Considerando que ambos medios son dieléctricos, escribimos la *Ley de Ampere* en forma



**Figura 5: Superficie gaussiana que origina un volumen cilíndrico donde se encierra a los dos medios y a la superficie que los separa. Esta superficie facilita el análisis de las contribuciones de las componentes de la densidad de campo magnético normales a la superficie de frontera en las tapas y en la superficie lateral.**

integral porque trabajaremos ahora con la intensidad del campo magnético (ver Figura 4):

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint_s \left[ \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] ds. \quad (27)$$

Sumando las contribuciones del campo a lo largo de la trayectoria cerrada y haciendo  $\Delta x \rightarrow 0$ , desarrollamos la ecuación anterior

$$H_{x_1} \frac{\Delta x}{2} + H_{x_2} \frac{\Delta x}{2} + H_{y_1} \Delta y - H_{x_3} \frac{\Delta x}{2} - H_{x_4} \frac{\Delta x}{2} - H_{y_2} \Delta y = \left[ \mathbf{J}_c + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right] \Delta x \Delta y. \quad (28)$$

Con esto se obtiene la segunda condición de frontera (29) para dos medios dieléctricos, que dice que **la componente tangencial del campo magnético entre dos medios es continua**.

$$H_{y_1} = H_{y_2}. \quad (29)$$

### *Componente Normal*

Para analizar la densidad de campo magnético normal a la superficie de frontera, encerramos de nuevo en una superficie gaussiana los dos medios como se ve en la Figura 5. Escribimos la ley de Gauss para el campo magnético en su forma integral, esto es

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad (30)$$

y consideramos las contribuciones del flujo magnético a través de la superficie lateral y de las tapas. Con esto la ecuación (30) se desarrolla como

$$- B_{n_2} \Delta S + B_r r d\phi \Delta X + B_{n_1} \Delta S = 0, \quad (31)$$

y, haciendo  $\Delta X \rightarrow 0$ , llegamos a que

$$B_{n_1} = B_{n_2}. \quad (32)$$

Por lo tanto **la componente normal de la densidad de campo magnético es continua** cuando ambos medios son dieléctricos.

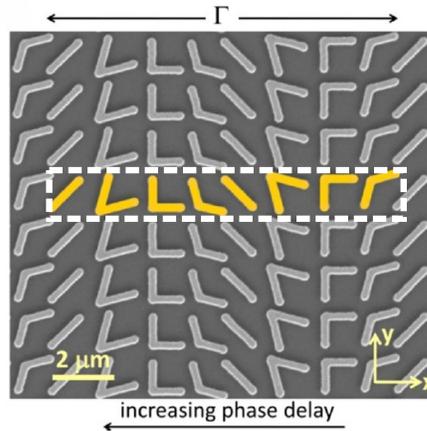
### 2.3. Metasuperficies

La *IEEE Standard Definitions of Term for Antennas* (IEEE Std 145-1983) define una antena como la parte de un sistema de transmisión o recepción, el cual está diseñado para radiar o recibir ondas electromagnéticas. En analogía a su contraparte de ondas de radio y microondas, una **antena óptica** se define como un dispositivo diseñado para convertir eficientemente la radiación óptica que se propaga libremente en energía localizada y viceversa. En el contexto de la microscopía, una antena óptica reemplaza efectivamente a una lente convergente convencional o a un objetivo concentrando radiación externa de un láser a dimensiones más pequeñas que el límite de difracción (Bharadwaj *et al.*, 2009).

La diferencia más importante entre antenas de radiofrecuencia y nanoantenas consiste en que conforme nos movemos a frecuencias mucho mayores los metales ya no se comportan como conductores perfectos.

Cuando se forma un arreglo periódico usando nanoantenas, con periodicidad del orden de sublongitudes de onda, la luz es forzada a cambios abruptos de amplitud y fase debido a las discontinuidades de la superficie. Este tipo de estructuras basadas en arreglos de nanoantenas son llamadas **metasuperficies** (Pors y Bozhevolnyi, 2013).

A veces una metasuperficie es referida también como la contraparte en dos dimensiones de los metamateriales. En la práctica resulta más cómodo y eficiente trabajar con una metasuperficie. La ventaja de una metasuperficie es que su estructura consiste en una capa delgada más fácil de fabricar e integrar a los sistemas fotónicos avanzados. En



**Figura 6:** Imagen del microscopio electrónico de barrido de la metasuperficie fabricada. La celda unitaria de la interfaz plasmónica (dentro del rectángulo de línea discontinua) comprende ocho antenas en “V” de oro. Imagen tomada de Yu *et al.* (2011).

la sección 2.4 se definirá a los metamateriales.

Las antenas ópticas prometen incrementar la eficiencia de energía fotovoltaica, de dispositivos emisores de luz y de sensores ópticos.

### 2.3.1. Antenas en “V” para el control de fase en transmisión

Yu *et al.* (2011) derivaron y confirmaron experimentalmente las leyes generalizadas de reflexión y refracción. En la derivación de las leyes generalizadas de reflexión y refracción los autores emplean el principio de Fermat para obtener un nuevo grado de libertad en el control del frente de onda de la luz mediante cambios abruptos de fase a escala de sublongitud de onda a lo largo del camino óptico.

Respecto a la parte experimental, reportaron una metasuperficie que permitió un control punto por punto de los desplazamientos de fase que un haz incidente acumula en la transmisión a través de una superficie formada por nanoantenas (Figura 6). La celda unitaria de la interfaz plasmónica comprende ocho antenas en “V” de oro con 220 nm de ancho y 50 nm de grosor, y se repite con una periodicidad  $\Gamma = 11 \mu\text{m}$  en  $\hat{x}$  y  $1.5 \mu\text{m}$  en  $\hat{y}$  (ver Figura 6 y Figura 7(f)).

La elección de los resonadores se basa en el potencial que han demostrado en las antenas plasmónicas al tener propiedades ópticas configurables y de fácil fabricación sobre superficies planas a escala nanométrica. El cambio de fase entre la radiación incidente

y emitida por un resonador óptico cambia apreciablemente a través de una resonancia. En la Figura 7 se muestra la naturaleza resonante de una antena en forma de nanobarra hecha de conductor perfecto.

En la Figura 7(b-c) se muestra un esquema de las antenas en “V”. Los brazos de las antenas son de igual longitud  $h$  y el ángulo entre ellos es  $\Delta$ . Se definen vectores unitarios para describir la orientación de la antena en “V”,  $\hat{s}$  a lo largo del eje de simetría y  $\hat{a}$  en la dirección perpendicular a  $\hat{s}$ . Estas antenas en “V” soportan modos simétricos y antisimétricos (ver Figura 7), los cuales son excitados por las componentes del campo eléctrico a lo largo de los ejes  $\hat{s}$  y  $\hat{a}$  respectivamente. En el modo simétrico, la distribución de corriente en cada brazo se aproxima al de una antena individual de longitud  $h$ . En el modo antisimétrico, la distribución de corriente en cada brazo se aproxima al de una antena recta de longitud  $2h$ .

Cuando la luz incidente está polarizada a lo largo de  $\hat{s}$  o de  $\hat{a}$  la radiación esparcida tiene la misma polarización. Para una polarización incidente arbitraria, ambos modos de la antena se excitan pero con una diferencia substancial en amplitud y fase debido a sus distintas condiciones de resonancia. Estas propiedades modales de las antenas en “V” permiten diseñar la amplitud, fase y estado de polarización de la luz dispersada. Es por lo anterior que se elige radiación con polarización incidente a  $45^\circ$  con respecto a  $\hat{s}$  y  $\hat{a}$  a fin de que tanto los modos simétricos como antisimétricos puedan ser excitados y la luz dispersada tenga una componente substancial de luz polarizada ortogonal a la incidente. Experimentalmente, con un polarizador la luz esparcida por la excitación es desacoplada.

En la Figura 7(d-e) se presentan los cálculos analíticos de la respuesta en fase y amplitud de las antenas en “V” de la Figura 7(f), para una longitud de onda de  $8 \mu\text{m}$ . En la Figura 7(D), las líneas punteadas azul y roja corresponden a los picos de resonancia de los modos simétrico y antisimétrico, respectivamente.

Los círculos de la Figura 7(d-e) representan a cuatro antenas fuera de los máximos de resonancia; estas antenas proporcionan un incremento de fase de  $\pi/4$  de izquierda a derecha para la luz esparcida con polarización cruzada. Simplemente tomando la estructura de la Figura 7(c) se puede crear una nueva antena cuya radiación con polarización cruzada tenga un cambio adicional de fase de  $\pi$ .

Las simulaciones de la Figura 7(g) confirman que las amplitudes de la radiación espar-

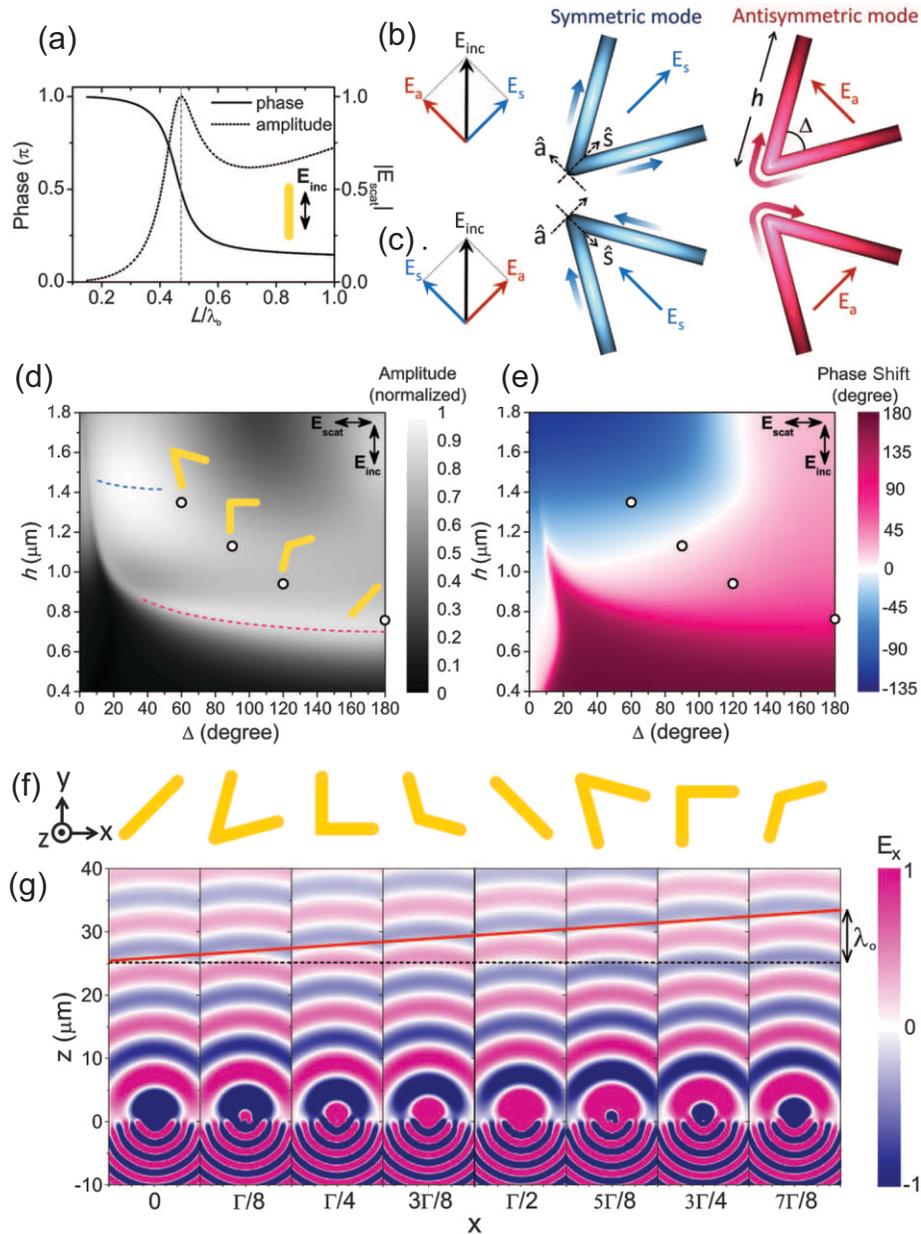


Figura 7: (a) Cálculo de la fase y la amplitud esparcida por una nanobarra hecha de conductor perfecto. La línea vertical punteada indica el primer orden de resonancia dipolar de la antena. (b) Componentes del campo incidente a lo largo de los ejes de la antena. (c) Las antenas en “V” corresponden a las imágenes espejo de aquellas en (b). (d-e) Cálculo analítico de la amplitud y del cambio de fase para el campo esparcido con una polarización ortogonal al campo incidente. (f) Celda unitaria de la interfaz plasmónica para la demostración de las leyes generalizadas de reflexión y refracción. (g) Simulación del campo eléctrico esparcido por antenas individuales que componen el arreglo de la Figura 6. La línea roja es la envolvente de las proyecciones de ondas esféricas. Imagen tomada de Yu *et al.* (2011).

cida con polarización cruzada por las ocho antenas son casi iguales; se tienen incremento de fase de  $\pi/4$ , dónde  $\lambda_0 = 8\mu\text{m}$ .

Como consecuencia de la doble resonancia de estas antenas, se puede diseñar un

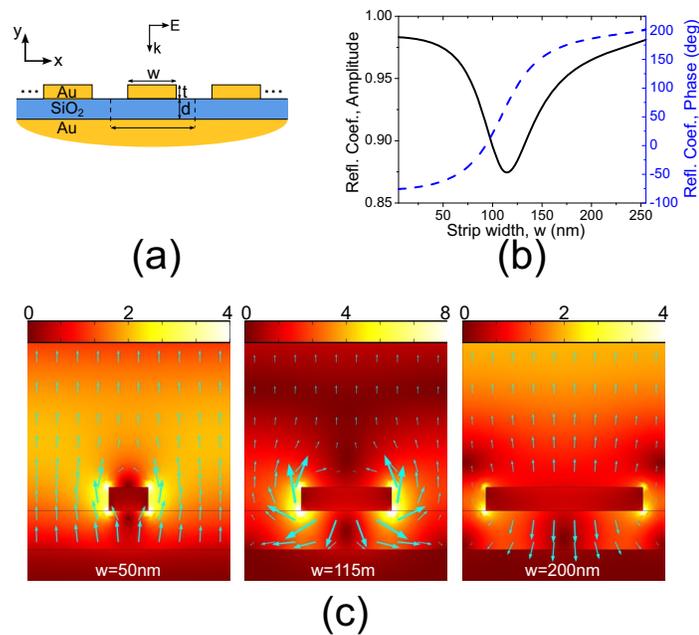


Figura 8: (a) Esquema de la metasuperficie basada en los resonadores GSP. El campo incidente tiene polarización TM e incide normal a la superficie. (b) Amplitud y fase de la luz reflejada por la metasuperficie en (a) como función del ancho  $w$  de la tira. (c) Los mapas de color muestran la intensidad del campo eléctrico dentro de una celda unitaria de la metasuperficie para tres tiras con diferente ancho  $w$ . Las flechas representan la intensidad y la dirección del vector de Poynting de la luz reflejada en la región del aire y del espaciador dieléctrico. Imagen tomada de Pors y Bozhevolnyi (2013).

arreglo que cubra el rango de fase de  $0$  a  $2\pi$  para un control total del frente de onda. El efecto de cada antena en el haz transmitido es guiarlo a lo largo de la dirección que tiene un retraso lineal creciente (ver Figura 6).

La ventaja de usar antenas ópticas radica en la posibilidad de crear dispositivos de escala nanométrica que pueden integrarse con chips electrónicos y microprocesadores.

### 2.3.2. Metasuperficie plasmónica para el control de amplitud y fase en reflexión

En la búsqueda de ampliar la funcionalidad de los resonadores plasmónicos con espaciador dieléctrico (gap-surface plasmon resonators, GSP por sus siglas en inglés) Pors y Bozhevolnyi (2013) proponen una metasuperficie empleando nanobarras para controlar la amplitud y la fase de la luz reflejada.

Ellos parten de una configuración básica de un resonador metal-dieléctrico-metal, pero sustituyen la tira de metal inferior por un sustrato grueso y un espaciador dieléctrico continuo (ver Figura 8(a)). En la capa metálica superior forman un arreglo periódico de nanobarras de oro separadas por la distancia entre partículas  $\Lambda$  indicada en la Figura

8(a).

Por definición, una metasuperficie consiste en celdas unitarias de sublongitud de onda ( $\Lambda \ll \lambda$ ) cuyas propiedades ópticas pueden ser descritas convenientemente por el coeficiente de reflexión complejo  $r$ . En la Figura 8(b) se presenta la gráfica del cálculo del coeficiente de reflexión en función del ancho  $w$  de la barra cuando los otros parámetros se dejan fijos ( $\lambda = 800$  nm,  $\Lambda = 260$  nm,  $d = 50$  nm, y  $t = 30$  nm). Se observa una fuerte variación en la fase de la reflexión y un mínimo en la amplitud reflejada para  $w = 115$  nm.

El mínimo presente en la amplitud del coeficiente de reflexión (ver Figura 8(b)) es resultado del fuerte esparcimiento de los resonadores GSP. Al disminuir el espesor del espaciador  $d$  es posible acceder por completo a la fase en el rango de  $0$  a  $2\pi$ , pero a costa de una fuerte absorción de la resonancia GSP.

En la Figura 8(c) se muestra la intensidad del campo óptico (mapa de colores) y el vector de Poynting (flechas) de la luz reflejada para tres barras de diferente ancho que ilustran los momentos antes, durante y después de la resonancia. Para tiras de anchos pequeños ( $w = 50$  nm) la luz es reflejada principalmente del sustrato de oro, debido a la pequeña fracción de la celda unitaria que está siendo ocupada por la tira. La situación cambia para tiras con anchos más grandes ( $w = 200$  nm), en este caso la luz es reflejada sobre todo por la parte superior de la tira.

Como el espaciador dieléctrico tiene un espesor de sublongitud de onda, la fuerte variación en la fase de la reflexión está relacionada con la excitación del resonador GSP que es eficientemente reflejada en la frontera de la barra cerca de la resonancia. Este medio va acumulando la fase conforme se propaga hacia atrás y hacia delante del resonador antes de que el modo sea amortiguado por la radiación en el espacio libre. La interpretación anterior está es ilustrada en la Figura 8(c) donde es evidente que la luz reflejada que está dejando la metasuperficie, está viniendo desde abajo de la nanobarra de oro.

## 2.4. Metamateriales

Un metamaterial (*meta* del griego  $\mu\epsilon\tau\alpha$ , que va más allá) es un material artificial estructurado el cual logra sus propiedades de una estructura unitaria (conocida como metaátomo o metamolécula) que conforma al material.

Los metamateriales tiene inhomogeneidades de dimensiones mucho menores que la

longitud de onda de interés y su respuesta electromagnética se expresa en términos de parámetros de un material homogéneo. La escala de las inhomogeneidades en el metamaterial hacen que el material completo sea macroscópicamente uniforme, este hecho hace a un metamaterial esencialmente un material en lugar de un dispositivo (Cai y Shalaev, 2010).

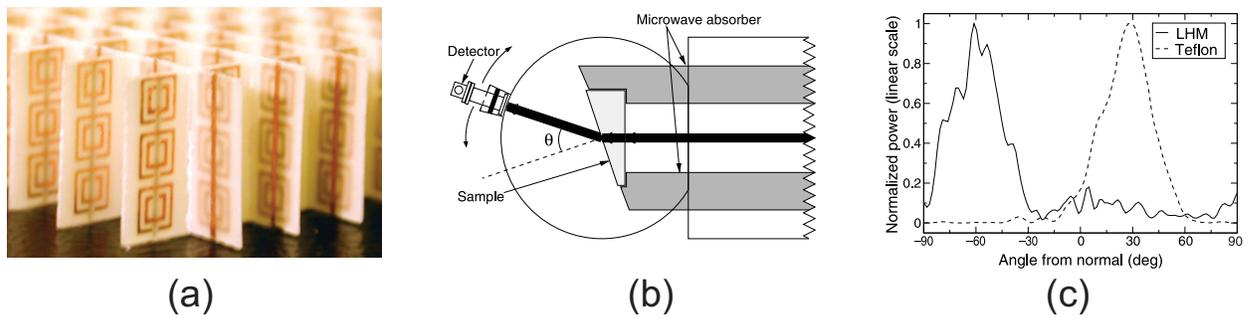
Cuando la escala de las inhomogeneidades en el orden de la longitud de onda la respuesta de la estructura es dominada por efectos de difracción e interferencia. Con homogeneidades de escala aún más grandes, la respuesta de las estructuras es usualmente descrita usando óptica geométrica y trazo de rayos (Cai y Shalaev, 2010).

Se han demostrado que las resonancias eléctricas y/o magnéticas en metamateriales (ver Figura 9) formados por componentes de sublongitud de onda permiten manipular la luz mediante propiedades exóticas tales como la refracción negativa.

#### **2.4.1. Metamaterial con índice de refracción negativo**

Shelby *et al.* (2001) proponen la estructura que se muestra en la Figura 9 consiste en una combinación de hilos metálicos y resonadores de anillo cortado (split-ring resonators, SRR por sus siglas en inglés) ambos realizados con cobre.

En la Figura 9(b) se muestra el arreglo experimental para la medición del índice de refracción. Emplearon radiación de 10.5 GHz y un prisma formado por el meta-material que se muestra en la Figura 9(a). Las microondas inciden por la parte inferior del prisma y la transmisión es medida en función del ángulo  $\theta$  de detección. El ángulo  $\theta$  es medido respecto a la dirección normal de la cara del prisma por donde se transmite. Además del prisma de metamaterial también emplearon un prisma de teflón para comparar a qué ángulo se obtiene un máximo en transmisión, respectivamente.



**Figura 9: (a) Fotografía del metamaterial con índice de refracción negativo. (b) Arreglo experimental para la medición del índice de refracción. (c) Potencia transmitida por el prisma de metamaterial y por el prisma de teflón en función del ángulo de detección. Imagen tomada de Shelby *et al.* (2001).**

En la Figura 9(c) se muestran los resultados de las mediciones. Encontraron que la máxima transmisión para el prisma de teflón es en  $27^\circ$  y para el prisma de metamaterial es en  $-61^\circ$ . Con este resultado demostraron que el prisma de metamaterial exhibe claramente un índice de refracción negativo debido a que la radiación transmitida sale en dirección contraria a como lo haría en un material con índice de refracción positivo.

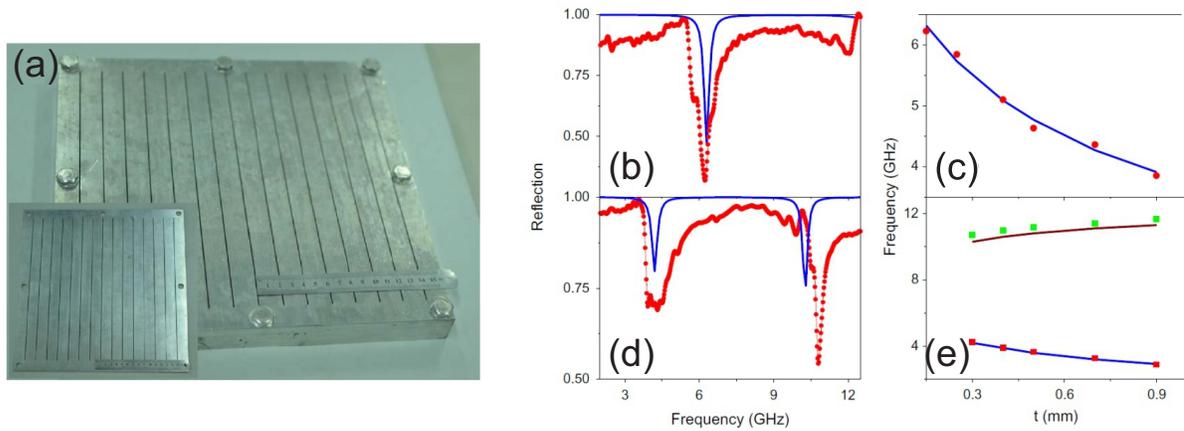
Cualquier material con la propiedad de índice de refracción negativa, no observado en materiales de origen natural, tendrá una variedad de aplicaciones prácticas, moduladores, filtros pasa banda, y lentes que permiten enfocar fuentes puntuales de sublongitud de onda (Shelby *et al.*, 2001).

#### 2.4.2. Resonador Fabry-Perot de sublongitud de onda

Un resonador tipo Fabry-Perot es una cavidad óptica que se basa en el efecto de interferencia del campo electromagnético (Fabry y Perot, 1899).

Trabajos como los de Hou *et al.* (2007) y Porto *et al.* (1999), encontraron un aumento en la luz transmitida dentro de aberturas de sublongitud en una película metálica debido a resonancias tipo Fabry-Perot.

En la Figura 10(a) se muestran dos resonadores tipo Fabry-Perot de dimensiones de sublongitud de onda que operan en la banda de las microondas propuestas por Huang y Chan (2014).



**Figura 10: (a) Fotografía de las muestras fabricadas. Las mediciones (círculos) y los cálculos (línea) de la señal reflejada son para (b)  $h = 5$  mm,  $t = 0.15$  mm y (d)  $h = 10$  mm,  $t = 0.3$  mm, respectivamente. Las mediciones (círculos) y los cálculos (línea) para la longitud de onda de resonancia de las dos muestras como función del espesor  $t$  se muestran en (c),  $h = 5$  mm, y (e),  $h = 10$  mm, respectivamente. Imagen tomadas de Huang y Chan (2014).**

La muestra se compone de una hoja de aluminio con rendijas separadas de otra hoja de aluminio por un espacio de aire ajustable. El periodo de las rendijas es de  $d = 20$  mm, el ancho de  $a = 1$  mm y el espacio de aire ajustable de  $h = 5$  mm y  $h = 10$  mm, respectivamente. El campo incidente es paralelo a las rendijas, con un ángulo de  $5^\circ$ .

En la Figura 10.(b) se observa un mínimo en reflexión correspondiente a una resonancia Fabry-Perot a sublongitud de onda para 6.3 GHz. Ajustando el espacio de aire de 0.15 mm a 0.9 mm, se observa un corrimiento al rojo de la resonancia de 6.3 GHz a 3.8 GHz como se ve en la Figura 10.(c). Se encontró que los resultados experimentales concuerdan bien con la teoría, sin embargo la eficiencia de la reflexión medida en la resonancia es más baja que la predicción teórica. Los autores atribuyen ésto al área finita de las muestras elaboradas, donde los modos difractados en el espacio de aire ajustable pueden escapar reduciendo con esto la señal reflejada de microondas. También se presentan mediciones de la reflexión de microondas en función del espacio ajustable de aire.

Los autores sugieren que una estructura cuasiperiódica en lugar de una periódica puede generar múltiples resonancias tipo Fabry-Perot de sublongitud de onda. Huang y Chan (2014) también presentan cálculos dónde demuestran que el mismo efecto puede operar para la banda de los THz y el régimen del infrarrojo, mediante el escalamiento de las dimensiones de la estructura (ver Figura 10(a)) con la longitud de onda.

### 3. Método de la ecuación integral

---

En este capítulo se presenta el llamado método de la ecuación integral, el cual fue desarrollado con el fin de entender la difracción y dispersión de ondas electromagnéticas por superficies rugosas. El método de la ecuación integral se encuentra dentro de los métodos que se basan en el teorema integral de Green (Maradudin *et al.*, 1990), siendo apropiado para las superficies con pendientes suaves o moderadas. Este método ha sido extendido para trabajar con funciones multivaluadas que describen el perfil de una superficie (Mendoza-Suárez y Méndez, 1997) y a su vez, esta formulación fue aplicada para la evaluación del esparcimiento electromagnético por superficies reentrantes y cavidades (Negrete-Regagnon y Méndez, 2002).

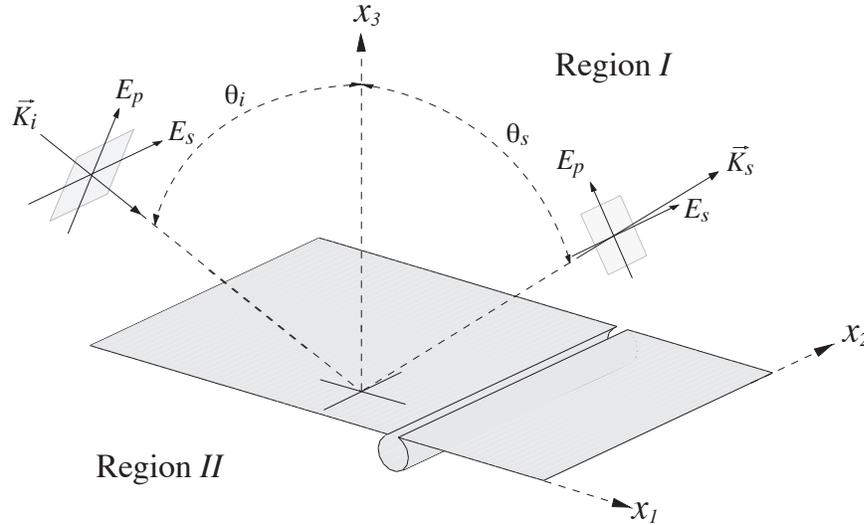
También se presenta la condición de frontera de impedancia, que permite eliminar dos de las cuatro funciones fuente desconocidas, los campos eléctricos, y magnéticos y sus derivadas.

En este trabajo se emplea un código basado en el método integral que permite parametrizar el perfil arbitrario de una superficie. Para obtener una descripción detallada del desarrollo matemático se pueden consultar las siguientes referencias (Negrete-Regagnon y Méndez, 2002) y (Negrete-Regagnon *et al.*, 2000).

En lo que respecta al método integral, información detallada se puede consultar en las referencias (Maradudin *et al.*, 1990) y (Mendoza-Suárez y Méndez, 1997).

### 3.1. Fundamentos

#### 3.1.1. Formulación del problema de esparcimiento



**Figura 11: Geometría del problema de esparcimiento. Figura tomada de Negrete-Regagnon y Méndez (2002)**

En la Figura 11 se muestra la geometría del problema de esparcimiento. El plano de incidencia es el plano  $x_1x_3$  y la superficie es iluminada por una onda electromagnética de frecuencia  $\omega$  y vector de onda  $\vec{k}_{inc}$ . El ángulo de incidencia es denotado por  $\theta_0$  y el ángulo de esparcimiento por  $\theta_s$ . La superficie tiene variaciones en altura a lo largo de la dirección  $x_1$  y es constante a lo largo de la dirección  $x_2$ . El perfil de la superficie está representado por la función vectorial continua (33), donde  $(\xi, \eta)$  representan las coordenadas de un punto en el perfil. La región *I* es vacío, y la región *II* es cualquier medio isotrópico, caracterizado por su constante dieléctrica que depende de la frecuencia  $\epsilon_{II}(\omega)$ , o su índice de refracción negativo  $n_c = \sqrt{\epsilon_{II}(\omega)}$ , con  $\Re[n_c(\omega)]$  y  $\Im[n_c(\omega)] \geq 0$ . Para superficies unidimensionales, cuando las ondas incidentes están puramente polarizadas en *s* o *p*, el estado de polarización no se ve afectado por la interacción con la superficie. Entonces, el problema se convierte esencialmente en escalar y estas dos polarizaciones pueden ser tratadas por separado.

El objetivo principal en la solución del problema general de esparcimiento consiste en encontrar los campos eléctricos y magnéticos en el campo cercano y en campo lejano.

### 3.1.2. Descripción de la superficie

El tipo de geometría considerada se ilustra en la Figura 11. La frontera con la región  $II$  está definida por una curva  $\Gamma$  y caracterizada por el índice de refracción  $n_1$  o por su constante dieléctrica  $\epsilon_{II}(\omega)$ . La curva que describe el perfil de la superficie puede ser escrita en términos del parámetro único  $t$

$$\mathbf{r}(t) = [\xi(t), \eta(t)]. \quad (33)$$

La función vectorial  $\mathbf{r}(t)$  describe la frontera de la superficie con las funciones paramétricas  $\xi(t)$  y  $\eta(t)$  en función del parámetro  $t$ . La trayectoria que describe el perfil es de izquierda a derecha (en sentido horario para partículas), de manera que

$$\mathbf{N} = [-\eta'(t), \xi'(t)], \quad (34)$$

es el vector normal a la superficie. Aquí, las primas indican la derivada con respecto a  $t$  y la cantidad  $\phi(t) = \sqrt{(\eta'(t))^2 + (\xi'(t))^2}$  representa la magnitud del vector  $\mathbf{N}$ . Por lo tanto el operador derivada normal (no normalizado) se encuentra definido como

$$\frac{\partial}{\partial N} = \left[ -\eta'(t) \frac{\partial}{\partial x_1} + \xi'(t) \frac{\partial}{\partial x_3} \right]. \quad (35)$$

### 3.1.3. Ecuaciones integrales para el campo

En cualquiera de los dos estados de polarización, escribimos de la siguiente manera la onda electromagnética que ilumina a la geometría mostrada en la Figura 11.

$$\psi(\mathbf{r}, t) = (0, \psi(\mathbf{r}), 0) \exp(-i\omega t), \quad (36)$$

donde  $\mathbf{r} = (x_1, x_3)$ . La función escalar  $\psi(\mathbf{r})$  representa al campo eléctrico para el caso de polarización  $s$  y al campo magnético para el caso de polarización  $p$ .

La componente  $x_2$  del campo en las regiones  $I$  y  $II$ , denotadas por  $\psi^I(\mathbf{r})$  y  $\psi^{II}(\mathbf{r})$ ,

satisfacen las ecuaciones de Helmholtz:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \epsilon_j \frac{\omega^2}{c^2} \right) \psi^{(R)}(\mathbf{r}) = 0, \quad R = I, II. \quad (37)$$

Ahora introducimos las dos funciones de Green  $G^I(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$  y  $G^{II}(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$  para las regiones  $I$  y  $II$ , las cuales son soluciones para la ecuación

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \epsilon_j \frac{\omega^2}{c^2} \right) G^R(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad R = I, II; \quad (38)$$

donde  $\mathbf{r}$  representa el punto de observación (donde se calcula el campo) y  $\mathbf{r}'$  el punto fuente (lugar donde suponemos que hay un dipolo eléctrico). La función  $G^R(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$  son funciones de Green adecuadas para cada región  $R$  (Maradudin *et al.*, 1990). Una función que satisface la condición de radiación y es solución de la ecuación (38) está dada por

$$G^R(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)} \left( n_j \frac{\omega}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \right), \quad R = I, II; \quad (39)$$

donde  $H_0^{(1)}$  es la función de Hankel de primera clase y orden cero (Abramowitz y Stegun, 1970).

Aplicamos el segundo teorema integral de Green (Jackson, 1962) en la región  $I$ , y con las ecuaciones (37) y (38), obtenemos una expresión para la representación del campo  $\psi^I(\mathbf{r})$ , representado por la expresión

$$\Theta^I(\mathbf{r}) = \psi_{inc}^R(\mathbf{r}) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial G^I(\mathbf{r} | t')}{\partial N'} \Psi^I(t') - G^I(\mathbf{r} | t') \Upsilon^I(t') \right] dt', \quad (40)$$

donde

$$\Theta^I(\mathbf{r}) = \begin{cases} \psi^I(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in I, \\ 0 & \mathbf{r} \notin I. \end{cases} \quad (41)$$

Se ha usado el hecho de que el elemento de arco de  $\Gamma$  es  $ds = \phi(t)dt$ . Donde  $\psi_{inc}^R(\mathbf{r})$  representa el campo incidente en la región  $I$ . La integral de la ecuación (40) representa el campo esparcido que puede ser calculado si conocemos las funciones fuente  $\Psi^I(t)$  y  $\Upsilon^I(t)$  que representan los valores del campo y su derivada normal evaluadas sobre la superficie cuando uno se aproxima desde el medio  $I$ .

Las funciones fuente se encuentran definidas a través de las siguientes expresiones

$$\Psi^I(t) = \psi^I(\mathbf{r}(t)), \quad (42)$$

$$\Upsilon^I(t) = \frac{\partial \psi^I(\mathbf{r})}{\partial N} \Big|_{r=r(t)}. \quad (43)$$

Análogamente para la función de Green en la región I,

$$G^I(\mathbf{r} | t') = G^I(\mathbf{r} | \mathbf{r}(t')), \quad (44)$$

$$\frac{\partial G^I(\mathbf{r} | t')}{\partial N} = \frac{\partial G^I(\mathbf{r} | \mathbf{r}')}{\partial N} \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}'(t')}. \quad (45)$$

El procedimiento anterior se sigue para encontrar una expresión del campo  $\psi^{II}(\mathbf{r})$  en la región II

$$\Theta^{II}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial G^{II}(\mathbf{r}|t')}{\partial N'} \psi^{II}(t') - G^{II}(\mathbf{r} | t') L^{II}(t') \right] dt' \quad (46)$$

Donde

$$\Theta^{II}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \psi^{II}(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in II, \\ 0 & \mathbf{r} \notin II. \end{cases} \quad (47)$$

Evaluando las ecuaciones (40) y (46) en  $\mathbf{r}_\nu(t) = \mathbf{r}(t) + \nu N(t)$ , donde  $\nu$  es una cantidad infinitesimal que eventualmente tiende a 0, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\psi^I(t) = \psi_{inc}^R(t) + \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial G^I(\mathbf{r}_\nu(t)|t')}{\partial N'} \Psi^I(t') - G^I(\mathbf{r}_\nu(t) | t') \Upsilon^I(t') \right] dt', \quad (48)$$

$$0 = -\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \left[ \frac{\partial G^{II}(\mathbf{r}_\nu(t)|t')}{\partial N'} \Psi^I(t') - \frac{\nu_1}{\nu_0} G^{II}(\mathbf{r}_\nu(t) | t') \Upsilon^{(I)}(t') \right] dt'. \quad (49)$$

Para encontrar estas expresiones se usaron las condiciones de frontera,

$$\Psi^I(t) - \Psi^{II}(t) = 0, \quad (50)$$

$$\frac{1}{\nu^I} \Upsilon^I(t) - \frac{1}{\nu^{II}} \Upsilon^{II}(t) = 0, \quad (51)$$

donde  $\nu_{II} = \epsilon_{II}(\omega)$  para polarización  $p$  y  $\nu_I = 1$  para polarización  $s$ .

La ecuación (48) representa al campo y la ecuación (49) su derivada normal en un punto sobre la superficie.

### 3.1.3.1. Funciones fuente

Ahora describimos el procedimiento numérico empleado para la determinación de las funciones fuente  $\Psi^I(t)$  y  $\Upsilon^I(t)$  usadas para calcular los campos esparcido y transmitido. Las ecuaciones (48) y (49) se convierten en ecuaciones matriciales usando una aproximación por rectángulos para evaluar las integrales en intervalos pequeños. El sistema acoplado de estas ecuaciones matriciales puede entonces ser resuelto numéricamente. Representamos  $L$  la longitud de la curva  $\Gamma$ , es decir,  $L = \int_{\Gamma} dt$  de tal manera que el intervalo paramétrico  $I = [L_0, L_0 + L]$ . Para este intervalo  $I$ , introducimos el conjunto  $\{r_i\}$  de puntos distribuidos a lo largo del intervalo  $I$ , donde  $r_i = \{\xi(t_i), \eta(t_i)\}$ , con  $i = 1, 2, \dots, N$ . Los puntos de muestreo  $t_i$  están dados por  $t_i = (i - 1/2)\Delta t_i + L_0$ , donde  $L_0$  es la longitud inicial y  $\Delta t_i$  es la separación entre el punto  $t_i - t_{i-1}$ .  $N$  representa el número total de puntos de muestreo sobre la superficie. Este procedimiento resulta en el conjunto  $\{t_n\}$  de los  $N$  valores de  $t$  en el cual la función  $r(t)$  es evaluada.

La matriz de ecuaciones para las funciones fuente,  $\Psi^I(t)$  y  $\Upsilon^I(t)$ , están dadas por

$$\psi_m = \psi_{inc,m}^I + \sum_{n=1}^N [H_{mn}^I \Psi_n - L_{mn}^I \Upsilon_n], \quad (52)$$

$$0 = \sum_{n=1}^N [H_{mn}^{II} \Psi_n - \frac{\nu_{II}}{\nu_I} L_{mn}^{(II)} \Upsilon_n], \quad (53)$$

Expresiones explícitas para los elementos de matriz se pueden obtener con los siguientes resultados

$$H_{mn}^{II} = \begin{cases} i \frac{\Delta t_n}{4} n_I \frac{w}{c} [-\eta'_n (\xi_m - \xi_n) + \xi'_n (\eta_m - \eta_n)] \\ \times \frac{H_{(1)}^1(n_I(w/c)[(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2}}{(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2}} & m \neq n \\ \frac{1}{2} + \frac{\Delta t_m}{4\pi\phi^2(t_m)} (\xi'_m \eta''_m - \xi''_m \eta'_m) & m = n \end{cases} \quad (54)$$

$$L_{mn}^{II} = \begin{cases} i \frac{\Delta t_n}{4} H_0^{II} (n_{II} \frac{w}{c} [(\xi_m - \xi_n)^2 + (\eta_m - \eta_n)^2]^{1/2}) & m \neq n \\ i \frac{\Delta t_n}{4} H_0^{II} (\frac{\Delta t_m n_{II} (w/c) \phi(t_m)}{2e}) & m = n \end{cases} \quad (55)$$

Aquí,  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$  es la longitud de los intervalos de muestreo y hemos usado la notación  $\xi_n = \xi(t_n)$ ,  $\xi'_n = \xi'(t_n)$ ,  $\xi''_n = \xi''(t_n)$ ,  $\eta_n = \eta(t_n)$ ,  $\eta'_n = \eta'(t_n)$ ,  $\eta''_n = \eta''(t_n)$ . Para obtener

los elementos de matriz  $H_{mn}^I$  y  $L_{mn}^I$  reemplazamos  $n_{II}$  con  $n_I = 1$  en las ecuaciones (54) y (55).

El par de ecuaciones (48) y (49) pueden ser generalizadas a varios cuerpos. Consideramos entonces un sistema de  $M$  cuerpos invariantes a lo largo de  $x_2$ , que son iluminados desde la región I por un haz de luz monocromático que se propaga en el plano  $x_1x_3$ . La región I se encuentra caracterizada por un índice de refracción  $n_I$  y la  $j$ -ésima región se encuentra definida por la curva  $\Gamma_j$  y caracterizada por el índice de refracción  $n_j(\omega)$  o su constante dieléctrica  $\epsilon_j(\omega)$ , con  $j = 1, \dots, M$ . La función vectorial que describe el perfil del  $j$ -ésimo objeto puede ser escrita en términos de un sólo parámetro  $t_j$ , esto es

$$\mathbf{r}_j t_j = [\xi_j(t_j), \eta_j(t_j)] \quad j = 1, \dots, M. \quad (56)$$

donde  $r_j(t_j)$  describe el perfil de la superficie  $\Gamma_j$ . Dado que se trata de superficies y cuerpos bien definidos suponemos que estas curvas no se cruzan. Traemos el punto de observación desde la región I a la superficie de la región  $j$ -ésima, tenemos que (Pérez Aguilar, 2009)

$$\psi^I(t_i) = \psi_{inc}^I(t_i) + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^M \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{\partial G^I(t_i | t'_j)}{\partial N'_j} \Psi^I(t'_j) - G_0(t_i | t'_j) \Upsilon^I(t'_j) \right] dt'_j, \quad (57)$$

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_j} \left[ \frac{\partial G_j(t_i | t'_j)}{\partial N'_j} \Psi^I(t'_j) - \frac{\nu_{II}}{\nu_I} G_j(t_i | t'_j) \Upsilon^I(t'_j) \right] \delta_{ij} dt'_j, \quad j = 1, \dots, M. \quad (58)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. Con  $\nu_{II} = \epsilon_{II}(\omega)$  para polarización  $p$  y  $\nu_I = 1$  para polarización  $s$ , para  $j = 1, \dots, M$ . Para más detalles de la discretización de esas ecuaciones y su conversión en ecuaciones matriciales pueden encontrarse en Pérez Aguilar (2009).

### 3.1.4. El campo esparcido

El campo esparcido está representado por el segundo término del lado derecho de la ecuación (48) o de la ecuación (57), según sea el caso. Por simplicidad solamente se presenta el caso de una superficie.

Es deseable obtener una expresión para los campos reflejado y transmitido en términos de sus espectros angulares, por lo cual expresamos la función de Green como una

superposición de ondas planas (Maradudin *et al.*, 1990)

$$G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi i}{\alpha_0(q)} \exp[iq(x_1 - x'_1) + i\alpha_0(q) |x_3 - x'_3|], \quad (59)$$

donde  $\alpha_0(q)$  es una constante sobre el rango en el cual el integrando es insignificante. Considerando que estamos muy lejos de la superficie que contienen a las funciones implica que  $x_3 > x'_3$ , aplicando esto en la ecuación (59) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial N} G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}') |_{\mathbf{r}'=(\xi(t), \eta(t))} &= [-\eta(t) \frac{\partial}{\partial x'_1} + \xi'(t) \frac{\partial}{\partial x'_3}] G_0(\mathbf{r} | \mathbf{r}') |_{\mathbf{r}'=(\xi(t), \eta(t))} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2\pi}{\alpha_0(q)} [-\eta'(t)q + \xi'(t)\alpha_0(q)] \exp[iq(x_1 - \epsilon(t)) + i\alpha_0(q) |x_3 - \eta(t)|]. \end{aligned} \quad (60)$$

Sustituyendo (60) en la ecuación (48), podemos escribir el campo reflejado de la forma

$$\psi_{sc}^I(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} S_I(q | k) \exp[iqx_1 + i\alpha_0(q)x_3], \quad (61)$$

donde  $S_I(q | k)$  es la amplitud de campo lejano, dada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} S_I(q | k) &= \frac{i}{2\alpha_0(q)} \int_{\Gamma} dt [(q\eta'_j)(t) - \alpha_0(q)\xi'(t)] \Psi^I(t) - \Upsilon^I(t) \\ &\quad \times \exp[-iq\xi(t) - i\alpha_0(q)\eta(t)]. \end{aligned} \quad (62)$$

En el trabajo de De la Cruz (2013) se encuentra el desarrollo mediante el cual se puede obtener una expresión para calcular la fracción de la potencia que es esparcida por la superficie.

$$\begin{aligned} P_{sc}^I(k) &= L_2 \int_{-L/2}^{L/2} dx_1 \int_{-n_0\omega/c}^{n_0\omega/c} \frac{dq}{2\pi} \text{Re} \int_{-n_0\omega/c}^{n_0\omega/c} \frac{dq'}{2\pi} \alpha_0(q) S_I(q | k) (S_I^I)^*(q' | k) \\ &\quad \times \exp[i(q - q')x_1 + i(\alpha_0(q) - \alpha_0(q'))x_3], \end{aligned} \quad (63)$$

$$P_{sc}^I(k) = L_2 \frac{c^2}{8\pi\omega} \int_{-n_0\omega/c}^{n_0\omega/c} \frac{dq}{2\pi} \alpha_0(q) |S_I(q | k)|^2.$$

### 3.1.5. Condición de frontera de impedancia

El uso de una condición de frontera de impedancia elimina la necesidad de considerar el campo dentro del esparcidor y permite aún así se conservan algunas de las propiedades físicas importantes del problema. En el contexto de los cálculos de difracción y esparcimiento, la condición de frontera de impedancia representa una buena aproximación para el caso de metales altamente reflejantes. El uso de esta condición de frontera de impedancia permite que sólo los elementos de matriz asociados con el campo electromagnético en el vacío sean requeridos para resolver el problema de esparcimiento (Knotts *et al.* (1993), Méndez *et al.* (1995)).

Esta condición relaciona las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético (o las componentes normales y sus derivadas normales) en una superficie plana, a través de una constante que depende únicamente de las propiedades electromagnéticas del material. La geometría se muestra en la Figura 11 y la notación se ha descrito en la subsección 3.1.2. La condición de impedancia que se busca se define mediante la siguiente relación

$$\mathbf{E}_t = Z\mathbf{H}_t \times \hat{\mathbf{n}}, \quad (64)$$

donde  $\mathbf{E}_t$  y  $\mathbf{H}_t$  son las componentes de los campos eléctrico y magnético que son tangentes a la superficie, respectivamente,  $\hat{\mathbf{n}}$  es el vector normal a la superficie y  $Z$  es la impedancia superficial.

#### Polarización $p$

Consideramos primero el caso de polarización  $p$ . De la ecuación (64) se obtiene que

$$E_t^I(t) = Z_p H_t^I(\mathbf{r}) |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)} \quad (65)$$

De las ecuaciones de Maxwell sabemos que

$$E_t^I(\mathbf{r}) = -i \frac{c}{\omega} \frac{\partial}{\partial n} H_2^I(\mathbf{r}). \quad (66)$$

$$H_t^I(\mathbf{r}) = H_2^I(\mathbf{r}), \quad (67)$$

Sustituyendo las ecuaciones (66) y (67) en la ecuación (65), obtenemos que

$$-i\frac{c}{\omega}\frac{\partial}{\partial n}H_2^I(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)} = Z_p H_t^I(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)}. \quad (68)$$

Definiendo

$$K(t) = i\frac{\omega}{c}\epsilon_0\epsilon_1 Z_p(t), \quad (69)$$

$$H^I(t) = H_2^I(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)} \quad (70)$$

$$L^I(t) = \frac{\partial H_2^I(\mathbf{r})}{\partial n}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)} \quad (71)$$

Podemos escribir

$$L^I(t) = \frac{K(t)}{\epsilon_0} H^I(t). \quad (72)$$

De manera análoga, se encuentra que

$$L^{II}(t) = \frac{K(t)}{\epsilon_1} H^{II}(t). \quad (73)$$

## Polarización s

Para el caso de polarización s, podemos escribir la ecuación (64) de la forma

$$H_t^I(\mathbf{r}) = \frac{E_t^I(\mathbf{r})}{Z_s(\mathbf{r})}. \quad (74)$$

De las ecuaciones de Maxwell sabemos que

$$E_t^I(\mathbf{r}) = E_2^I(\mathbf{r}), \quad (75)$$

$$H_t^I(\mathbf{r}) = \frac{ic}{\omega} \frac{\partial E_2^I(\mathbf{r})}{\partial n}, \quad (76)$$

y se sigue entonces que

$$\frac{ic}{\omega} \frac{\partial E_2^I(\mathbf{r})}{\partial n}|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)} = \frac{1}{Z_s|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)}} E_2^I(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)}. \quad (77)$$

Definiendo

$$K(t) = -i \frac{\omega}{c} \frac{1}{Z_s |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)}}, \quad (78)$$

$$M^I(t) = \frac{\partial E_2^I(\mathbf{r})}{\partial n} |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)}, \quad (79)$$

$$E^I(t) = E_2^I(\mathbf{r}) |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)}, \quad (80)$$

tenemos que

$$M^I(t) = K(t)E^I(t). \quad (81)$$

De manera análoga, se encuentra que

$$M^{(1)}(t) = K(t)E^I(t). \quad (82)$$

Para el caso de superficies planas se tiene que  $K(t) = 1/d(\omega)$ , donde

$$d(\omega) = (c/\omega)[- \epsilon(\omega)]^{-1/2} (\Re \{d\} > 0, \Im \{d\} < 0), \quad (83)$$

es la profundidad de piel (compleja) del metal.

Del trabajo de Mendoza Suárez (1996) se sigue que para superficies parametrizadas en términos de la longitud de arco, hay un par de expresiones equivalentes. Para el caso en que  $\xi'(t) \neq 0$ ,

$$K(t) = \frac{\phi(t)}{d} \left\{ 1 + \frac{d}{2} \frac{\eta''(t)}{2\xi'(t)\phi^3(t)} - \frac{d^2}{8} \frac{(\eta'')^2}{(\xi')^2\phi^6(t)} + \dots \right\}, \quad (84)$$

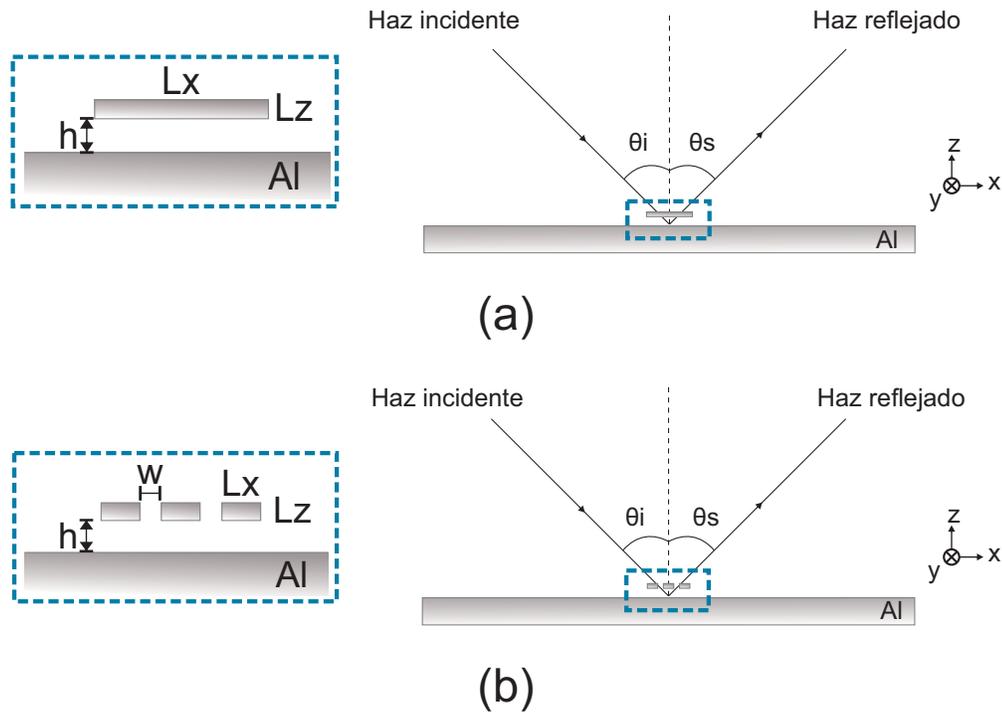
mientras que para el caso  $\eta'(t) \neq 0$ ,

$$K(t) = \frac{\phi(t)}{d} \left\{ 1 + \frac{d}{2} \frac{\xi''(t)}{2\eta'(t)\phi^3(t)} - \frac{d^2}{8} \frac{(\xi'')^2}{(\eta')^2\phi^6(t)} + \dots \right\}. \quad (85)$$

Una vez que las funciones fuente son conocidas se introducen en las ecuaciones (62) y (63) para obtener la amplitud en campo lejano y en consecuencia la potencia esparcida.

Cuando el perfil está parametrizado en términos de la longitud de arco se puede demostrar que las expresiones anteriores se reducen a las encontradas por Mendoza-Suárez y Méndez (1997). Cuando la función que describe el perfil de la superficie es univaluada las expresiones anteriores se reducen a la expresión encontrada por Garcia-Molina *et al.* (1990).

### 3.2. Cálculo de la reflexión de microondas por una metasuperficie



**Figura 12:** Perfil de la metasuperficie vista desde el plano de incidencia, plano  $xz$ , para las simulaciones con el método integral considerando radiación de microondas. En el recuadro de marco azul punteado se amplifica el arreglo para 1 (a) y 3 (b) tiras.  $L_x$  es el ancho de las tiras,  $L_z \cong 0.05$  mm el espesor del metal,  $h$  el espacio ajustable de aire y  $w$  la separación entre tiras. El metal empleado es aluminio, el cual a frecuencias de microondas puede ser considerado un conductor perfecto.

En la Figura 12(b) se muestra el esquema del perfil de la metasuperficie compuesta por tres tiras metálicas y un plano también metálico. El metal considerado en las simulaciones es un conductor perfecto, lo que implica que  $\epsilon_{II}(\omega) \rightarrow -\infty$ . El perfil de la superficie corresponde a la vista que se tendría en el arreglo experimental desde el plano de incidencia, plano  $xz$  (ver Figura 43). Se considera al medio circundante vacío.

El haz incidente tiene una longitud de onda  $\lambda = 2.8$  cm y un perfil tipo Gaussiano, con una cintura de diámetro de 5 cm. Incide a un ángulo  $\theta_i = 45^\circ$  sobre la estructura mientras que el análisis en campo lejano (detección) se hace a un ángulo  $\theta_s = 45^\circ$ . En este caso ambos ángulos son positivos porque sus componentes en  $x$  del vector de onda están en la misma dirección. Por convención, sólo para ilustrar los resultados y ubicar al lector, se considera que cuando el ángulo medido en sentido horario es negativo y cuando es medido en sentido antihorario es positivo, esto respecto a la normal al plano  $xz$ .

Las tiras conductoras están separadas por una distancia  $h$  de un plano continuo también conductor. Se define el ancho de las tiras como  $Lx$ , con un espesor  $Lz$ , separadas entre sí por una distancia  $w$ . En las simulaciones no se puede considerar que las tiras tienen un largo finito debido a que en el planteamiento del método integral la estructura no varía a lo largo de  $\hat{y}$  (ver Figura 11).

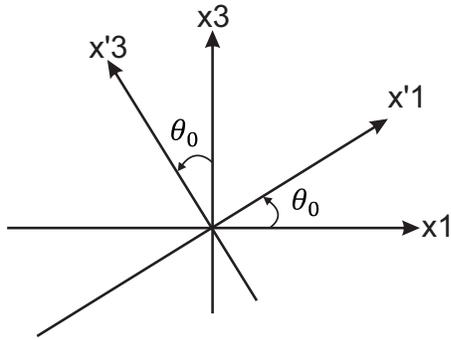
A continuación se muestran los resultados de las simulaciones realizadas con el esquema presentado en la Figura 12. Se calculó la amplitud en campo lejano y la potencia esparcida de la radiación reflejada (ver subsección 3.1.4) en función de la geometría de la metasuperficie.

### 3.2.1. Amplitud en campo lejano

En las gráficas que se presentan a continuación, el eje de la ordenada indica la fracción de la potencia incidente que esparce la superficie. Este cociente es también conocido como el coeficiente diferencial de reflexión (*differential reflection coefficient*, *DRC* por sus siglas en inglés) (Maradudin *et al.*, 1990). Donde el numerador  $|r(\theta_s)|^2$  es el modulo cuadrado de la amplitud de campo lejano, es decir, la potencia esparcida, mientras que el denominador  $F(\theta_0)$  es un factor de normalización asociado al haz incidente (plano o Gaussiano). Este factor de normalización representa la potencia incidente, la cual depende de la forma del frente de onda y del ángulo de incidencia. Para un haz gaussiano, el factor de normalización está dado por la siguiente expresión:

$$F(\theta_0) = 2(2\pi)^{3/2}\omega k_0 \left[ 1 - \frac{1 + 2 \tan^2(\theta_0)}{2\omega^2 k_0^2} \right], \quad (86)$$

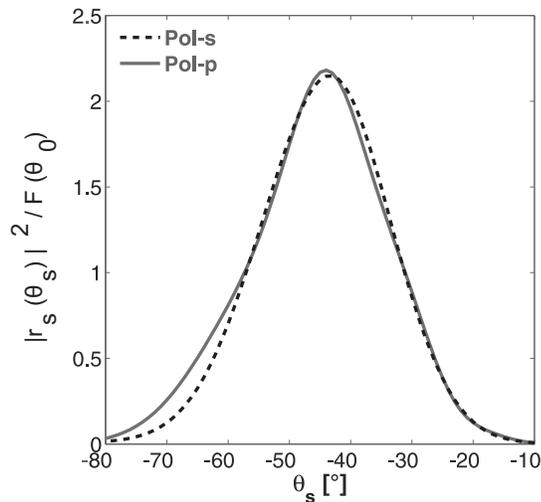
el cual está expresado en términos de las coordenadas de la superficie pero mediante el ángulo de incidencia  $\theta_0$  como se observa en la Figura 13. En el trabajo de (Maradudin *et al.*, 1990) se muestra el desarrollo para representar la potencia del haz incidente del cual se deduce el factor de normalización presentado en la ecuación (86).



**Figura 13: Sistema de coordenadas usado dentro del cálculo del haz incidente. El plano  $x_1x_3$  es el sistema de coordenadas original y el plano rotado  $x'_1x'_3$  es en el cual incide el haz.**

La amplitud en campo lejano para Pol-s (polarización s) se denota como  $r_s(\theta_s)$  y para Pol-p (polarización p) como  $r_p(\theta_s)$ . La amplitud  $r$  depende del punto de observación  $r$ , en este caso está dado por el ángulo de esparcimiento  $\theta_s$ .

En la Figura 14 se presenta la fracción de potencia esparcida por el plano conductor para  $\theta_s \in [-80^\circ, -10^\circ]$  incidiendo a  $\theta_0 = 45^\circ$ .



**Figura 14: Haz reflejado por el plano conductor en ambas polarizaciones. El haz incidente es un haz gaussiano que tiene una longitud de onda de 2.8 cm y una cintura con un diámetro de 5 cm.**

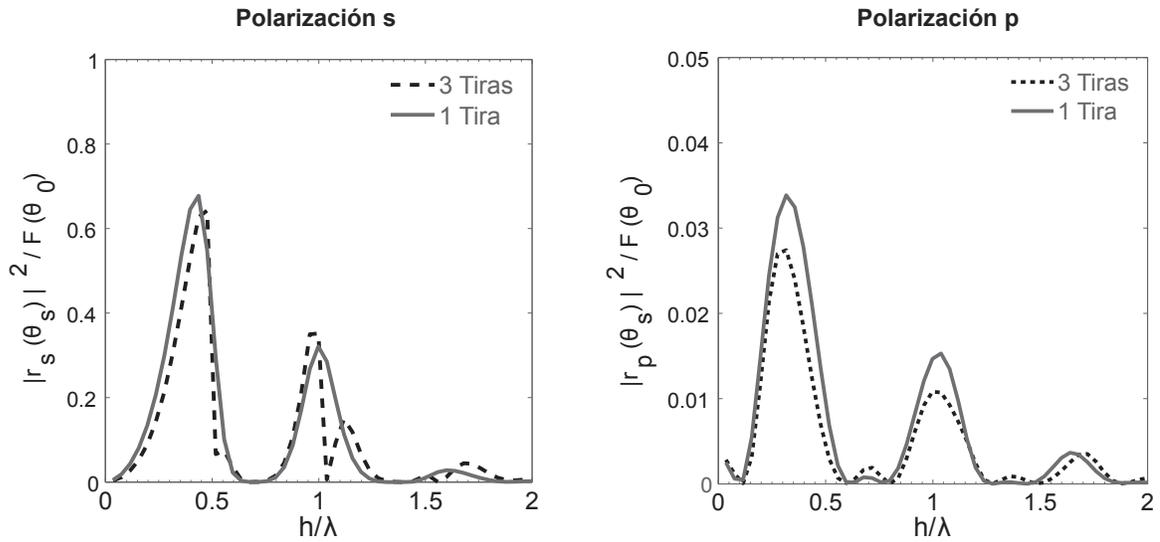


Figura 15: Fracción de potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho  $Lx = 0.5$  cm.

A continuación se presentan gráficas de la fracción de potencia esparcida en función del espacio de aire ajustable  $h$  para 1 (línea sólida) y 3 tiras (línea discontinua) frente al plano conductor, para Pol-s y Pol-p. Las tiras tienen anchos de  $Lx = 0.5$  cm (Figura 15) y  $Lx = 1$  cm (Figura 16). El haz incide en  $\theta_0 = 45^\circ$  y el esparcimiento es visto en  $\theta_s = -45^\circ$ .

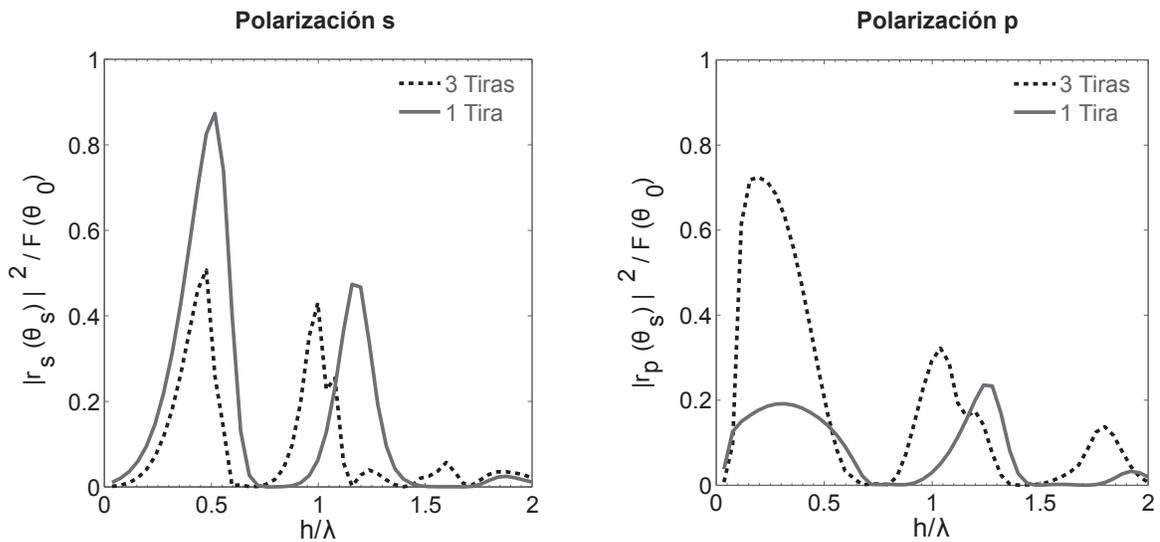


Figura 16: Fracción de potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho  $Lx = 1$  cm.

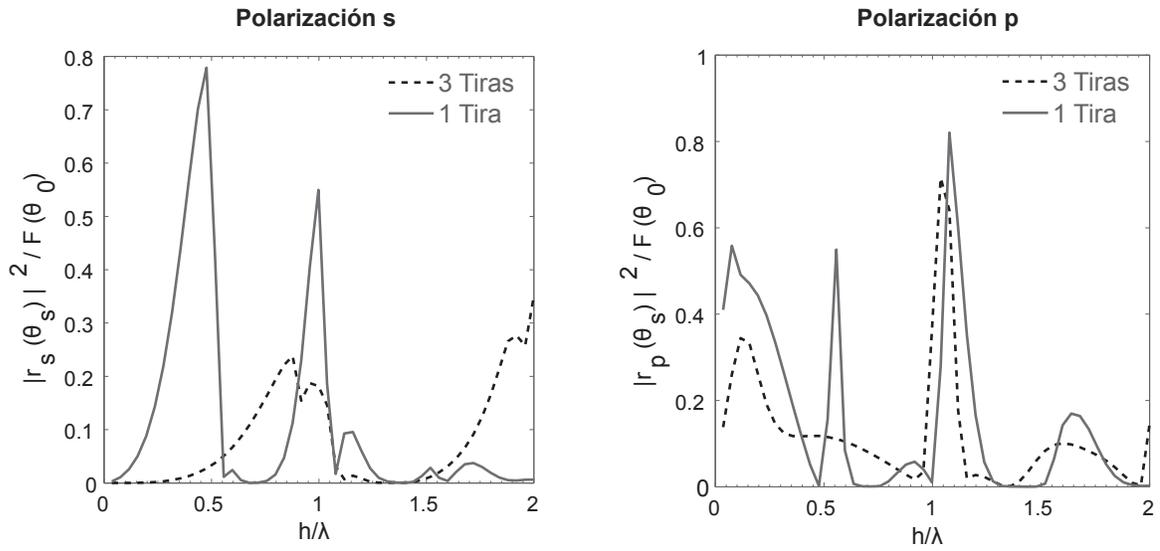


Figura 17: Fracción de potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho  $Lx = 2$  cm.

En las Las Figuras 17 y 17, se muestran las simulaciones realizadas con 1 y 3 tiras que tienen anchos de  $Lx = 2$  y 3 cm, respectivamente. La incidencia del haz es  $h\alpha \theta_0 = 45^\circ$  y el esparcimiento es visto en  $\theta_s = -45^\circ$ .

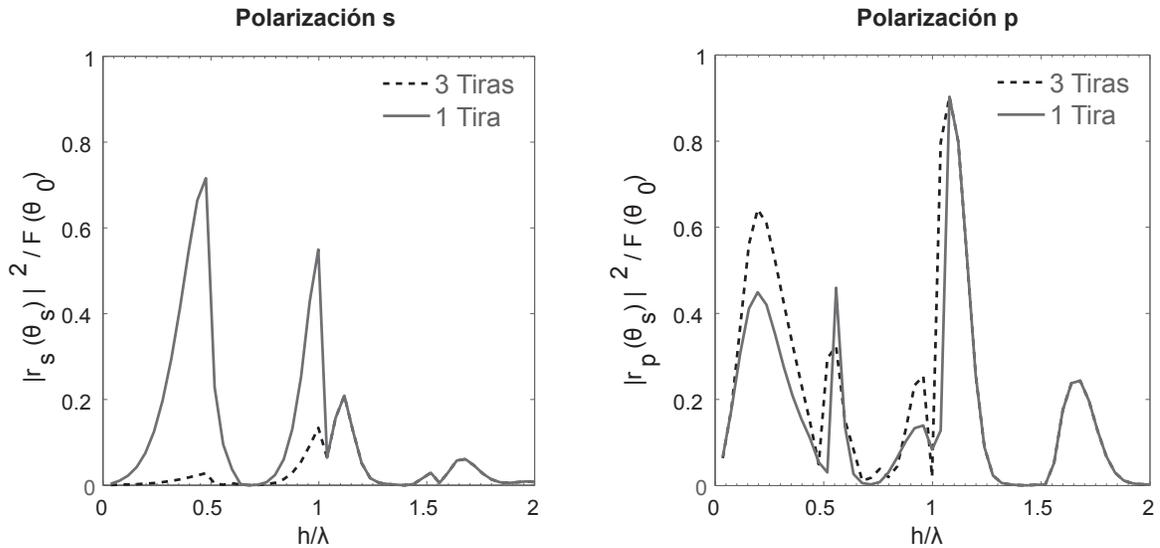
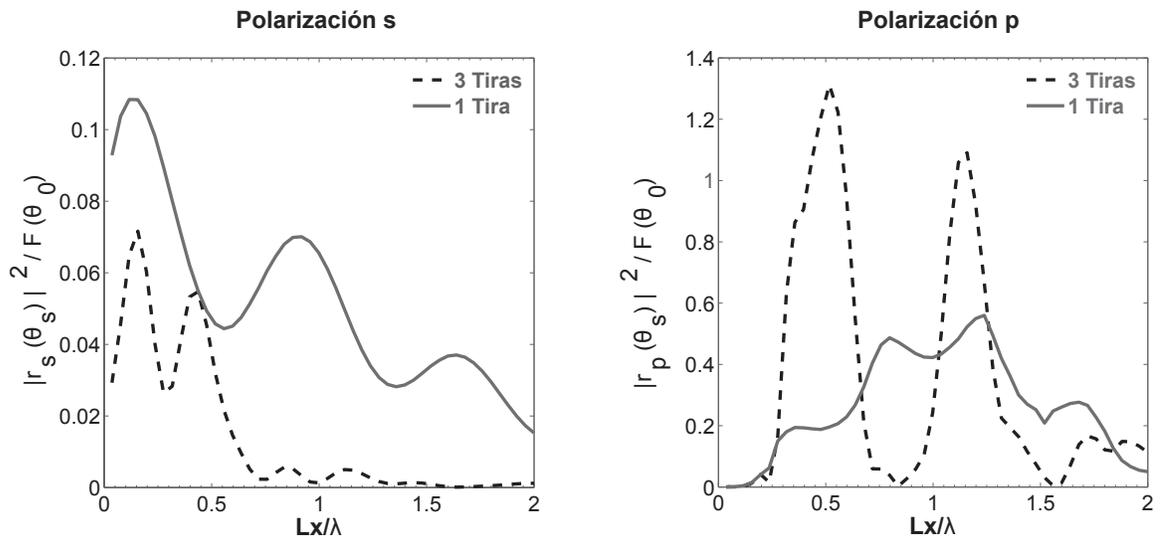
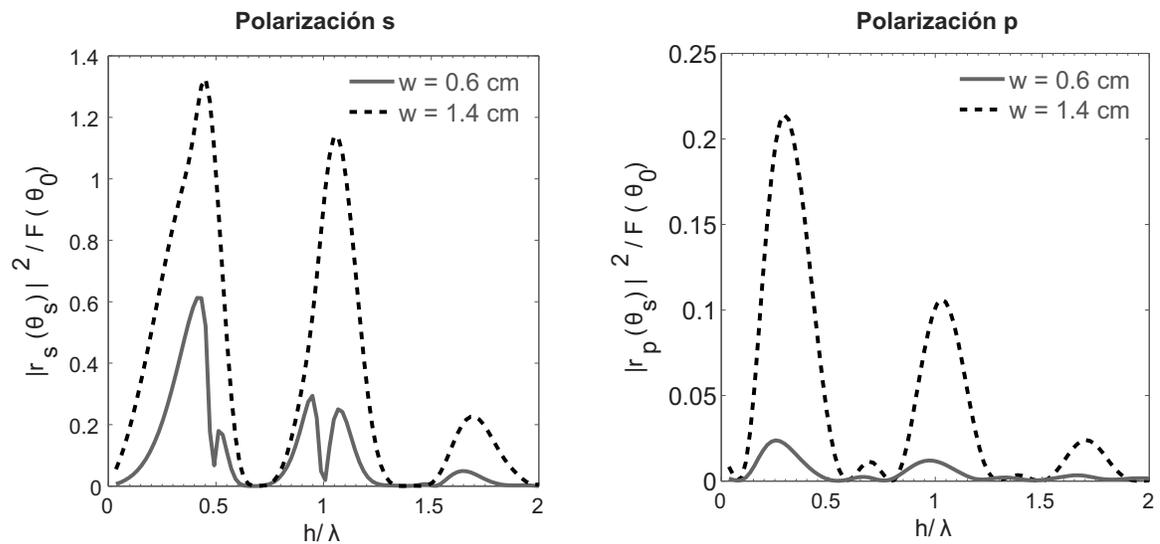


Figura 18: Fracción de potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho  $Lx = 3$  cm.



**Figura 19:** Fracción de potencia esparcida para 1 y 3 tiras en función de  $Lx = 0.5$  cm para una separación  $h = w = 0.5$  cm fija.

En la Figura 19 se muestra la dependencia de la potencia esparcida con el ancho de la tira  $Lx$ , para una separación fija  $h = w = 0.5$  cm. En la Figura 20 se observa una disminución de amplitud para 3 tiras cuando  $w$  es menor a  $\lambda/4$ , con  $Lx = 0.5$  cm. La incidencia del haz es  $\theta_0 = 45^\circ$  y el esparcimiento es visto en  $\theta_s = -45^\circ$ .



**Figura 20:** Fracción de potencia esparcida para 3 tiras en función de  $h$  con un ancho de  $Lx = 0.5$  cm para dos valores de la separación entre tiras  $w$ .

En las gráficas anteriores se observa un mínimo de intensidad entre dos máximos muy prominentes para el coeficiente diferencial de reflexión ( $|r(\theta_s)|^2 / F(\theta_0)$ ) cuando la fracción de  $h/\lambda$  y de  $Lx/\lambda$  están entre  $0.5\lambda$  y  $\lambda$ . Es decir, este efecto tipo resonancia se anula para valores mayores a una longitud de onda. También este fenómeno de resonancia se anula en mayor medida cuando el ancho  $Lx$  de la(s) tira(s) es mayor a 2 cm. Lo anterior indica que estos efectos serán más sobresalientes para dimensiones de sublongitud de onda. Respecto a la variación del parámetro  $w$ , que es la separación entre tiras, notamos que hay un incremento en el nivel de la señal cuando éste aumenta y que los mínimos que anteriormente se apreciaban ahora contribuyen con los máximos. Cuando el parámetro  $h$  es mayor a  $2\lambda$  la señal tiende a cero, esto indica que está siendo dirigida en otro ángulo de esparcimiento.

### 3.2.1.1. Distribución angular de la amplitud en campo lejano

La fracción de potencia esparcida se calculó para el intervalo de ángulos de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , lo que permite obtener la distribución angular de la potencia que refleja la metasuperficie en todo el plano.

En las Figuras 21, 22 y 23 se muestran los resultados de la fracción de potencia esparcida en un intervalo angular. Se elige una metasuperficie de 3 tiras conductoras con ancho  $Lx = 1$  cm, separación  $w = 0.5$  cm y una posición fija  $h = 0.3, 0.4, 0.5$  cm. El análisis en estos valores de  $h$  permite apreciar la transición gradual de la potencia esparcida para un espacio de aire entre las tiras y el plano de dimensiones de sublongitud de onda. Se reporta un intervalo angular pequeño para comparar más adelante lo obtenido con los resultados experimentales.

Se muestra solamente el esparcimiento para ángulos en el rango de  $-65^\circ$  a  $10^\circ$ . Lo anterior tiene la finalidad de compara posteriormente con los resultados que se presentarán en el capítulo 5, debido a las limitaciones de la medición angular completa en el semiplano superior.

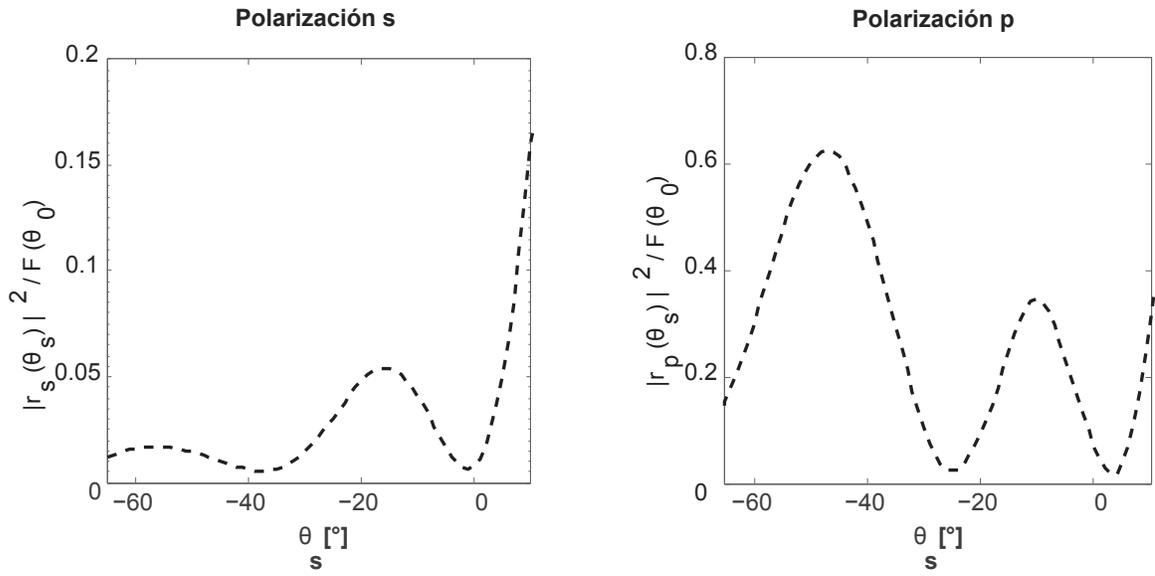


Figura 21: Distribución angular de la fracción de potencia esparcida por una metasuperficie con tres tiras para  $h = 0.3$  cm.

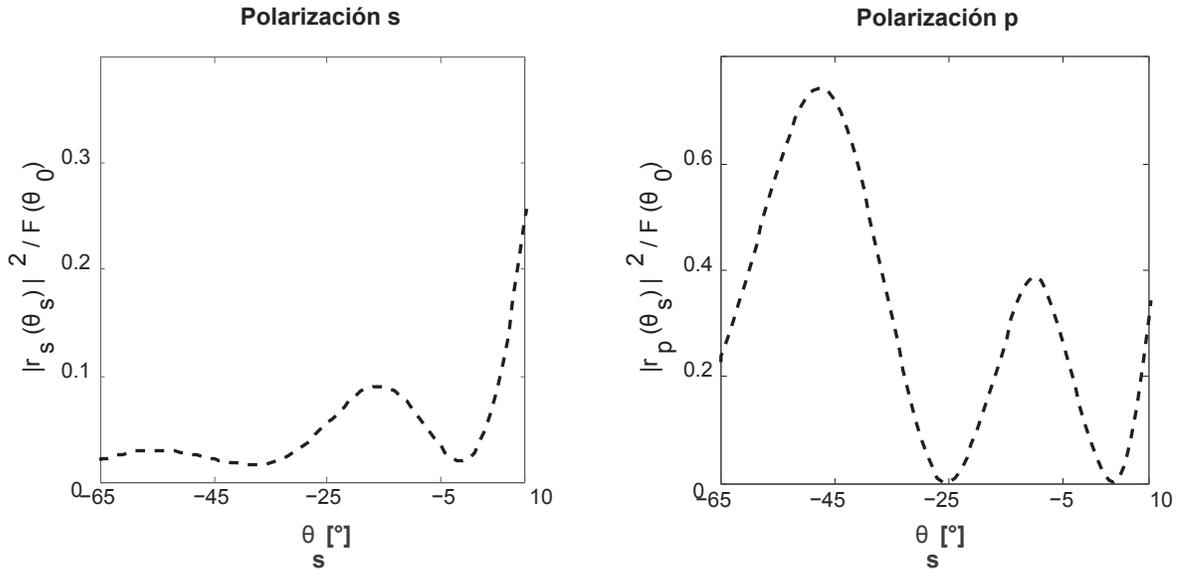
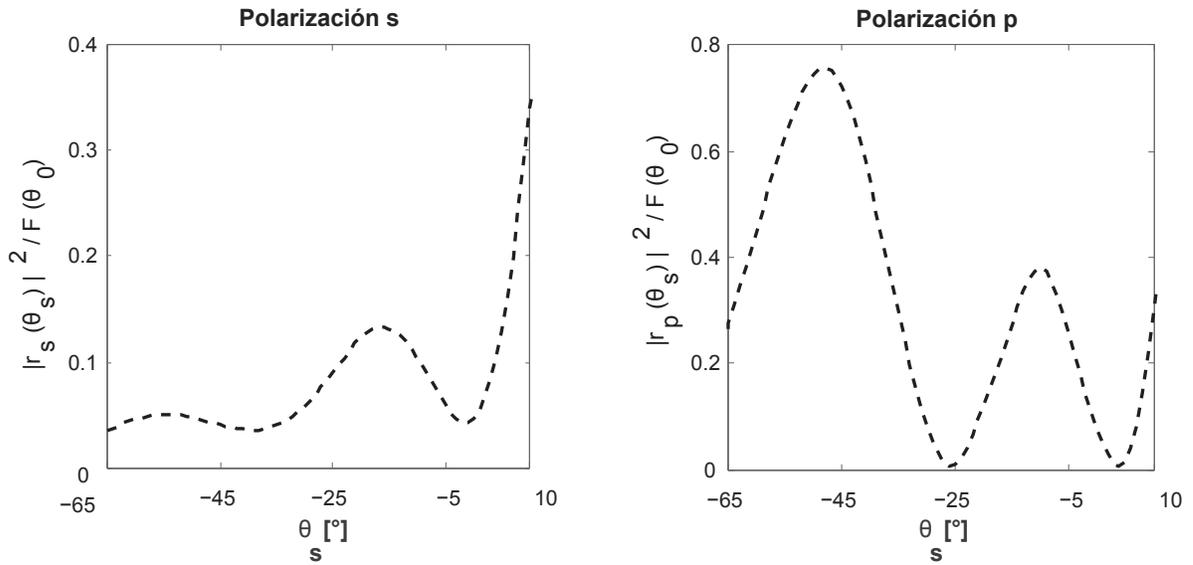


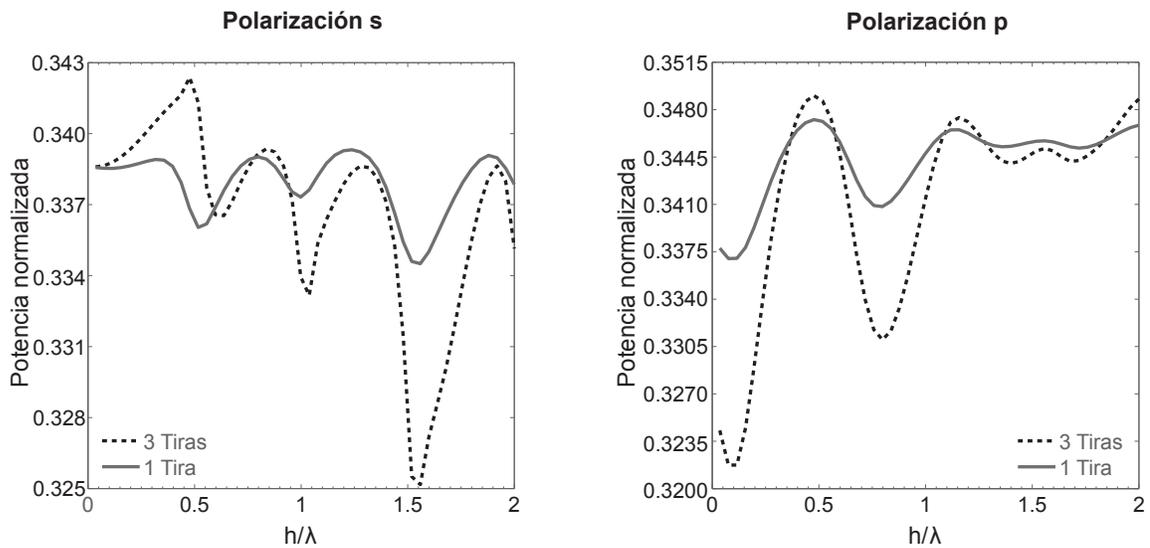
Figura 22: Distribución angular de la fracción de potencia esparcida por una metasuperficie con tres tiras para  $h = 0.4$  cm.



**Figura 23:** Distribución angular de la fracción de potencia esparcida por una metasuperficie con tres tiras para  $h = 0.5$  cm.

### 3.2.2. Potencia esparcida en campo lejano

Calcular la potencia esparcida permite encontrar la dependencia de la amplitud en campo lejano con la geometría de la metasuperficie. Ésta se obtiene mediante la integración del coeficiente diferencial de reflexión sobre todos los ángulos de esparcimiento en el semiplano  $\theta_s \in [-90^\circ, 90^\circ]$  y normalizando con el factor mostrado en la ecuación (86).



**Figura 24:** Potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho  $Lx = 0.5$  cm.

En las siguientes gráficas se presentan los cálculos realizados de la potencia esparcida para 1 y 3 tiras con ancho de  $Lx = 0.5$  cm (Figura 24) y  $Lx = 1$  cm (Figura 25), respectivamente, cuando ajustamos la separación  $h$  entre el plano y las tiras conductoras. La separación para 3 tiras es  $w = 0.5$  cm. El haz incide a  $\theta_0 = 45^\circ$ . El haz incide a  $\theta_0 = 45^\circ$ .

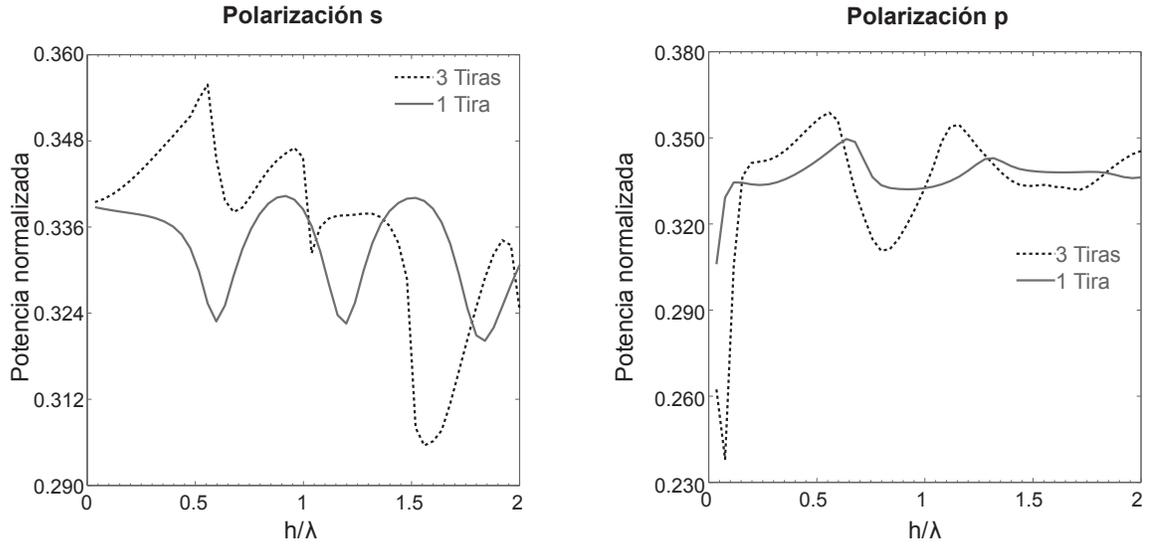


Figura 25: Potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho  $Lx = 1$  cm.

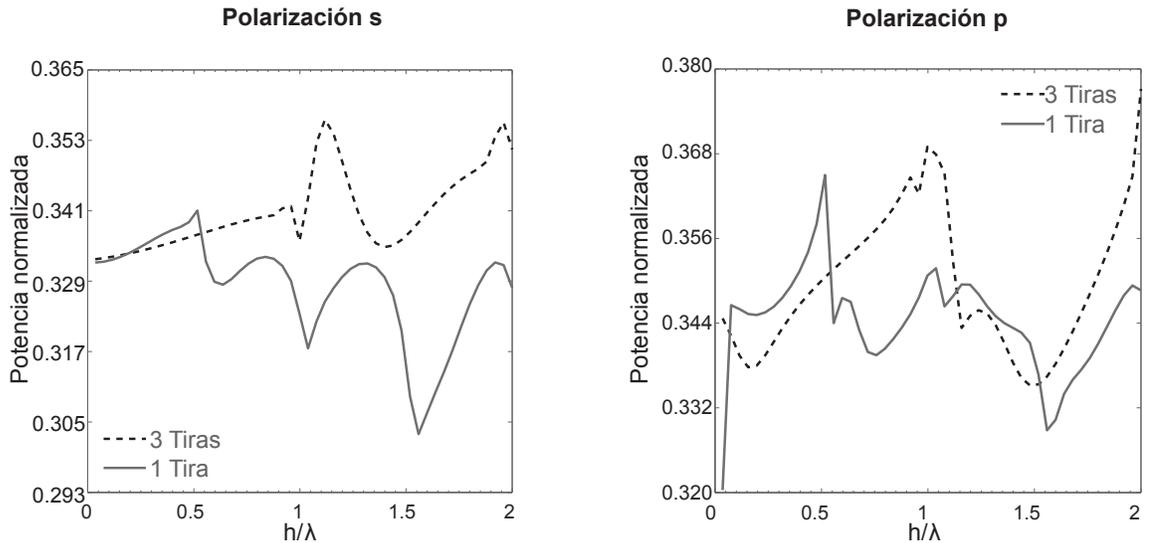


Figura 26: Potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho  $Lx = 2$  cm.

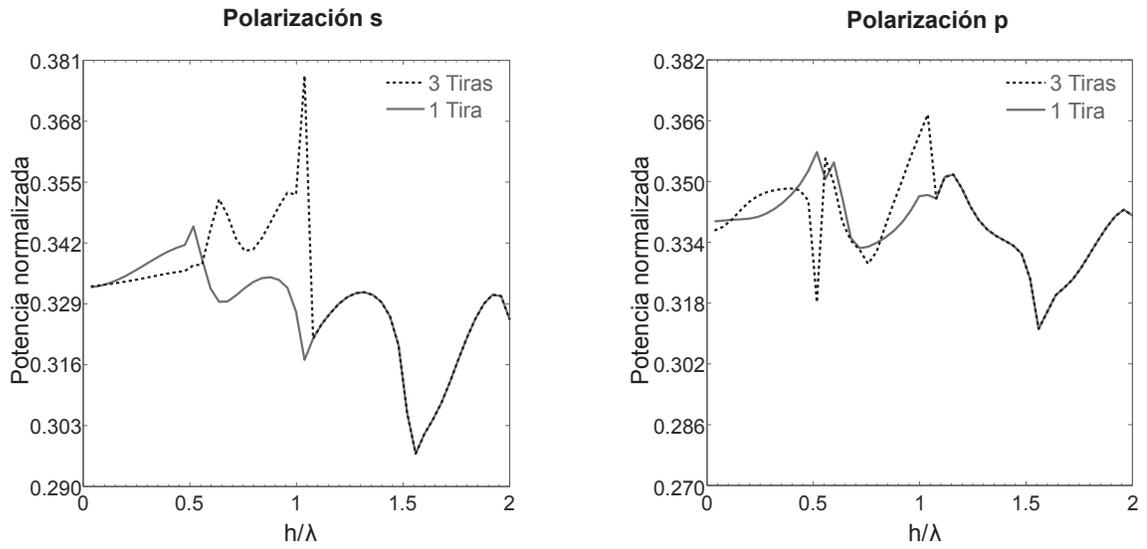


Figura 27: Potencia esparcida para 1 y 3 tiras de ancho  $Lx = 3$  cm.

Por último, también se calculó la relación de la potencia esparcida como función del ancho  $Lx$  y de la separación  $w$ , para 1 y 3 tiras, mostrado en las Figuras 28 y 29, respectivamente. Se fijó la separación  $h = 0.5$  cm para una incidencia de  $\theta_0 = 45^\circ$ .

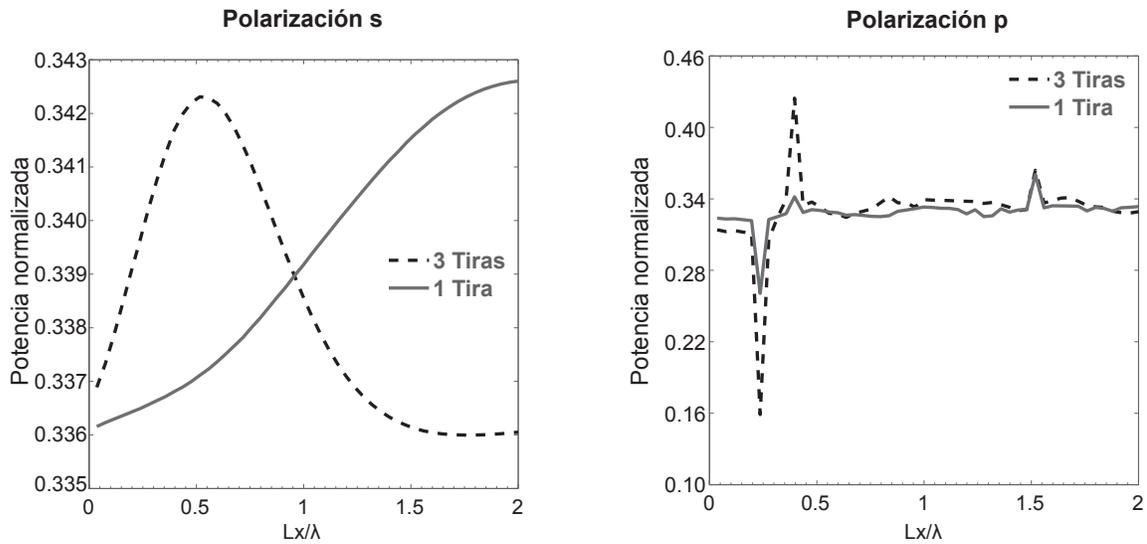
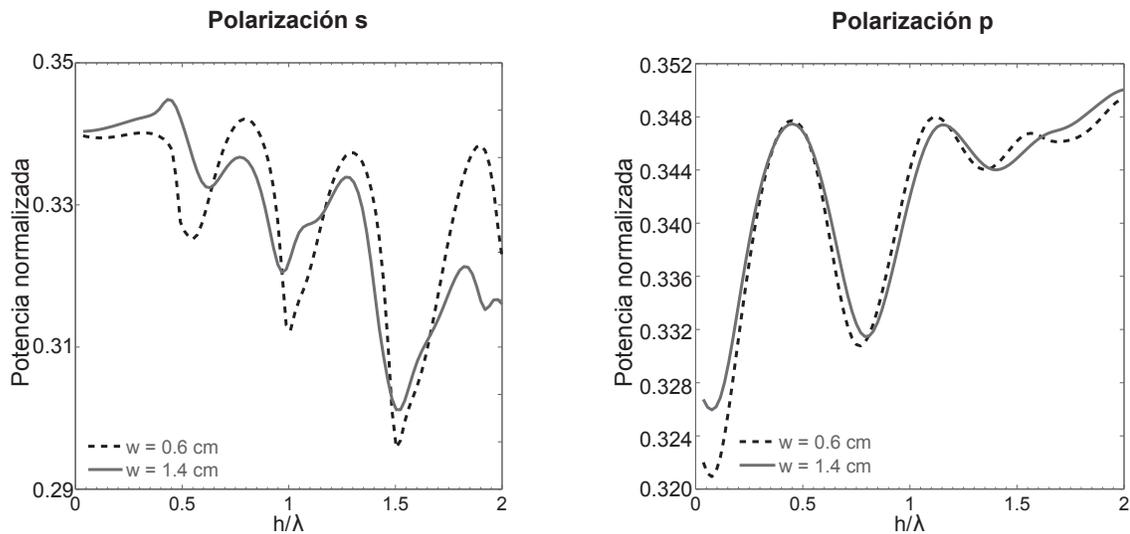


Figura 28: Potencia esparcida para 1 y 3 tiras en función del ancho  $Lx$ , donde  $w = h = 0.5$  cm.



**Figura 29: Potencia esparcida 3 tiras de ancho  $Lx = 0.5$  cm para dos valores de la separación entre tiras  $w$ , con  $h = 0.5$  cm.**

En las gráficas mostradas en esta subsección, con excepción de la Figura 28 para polarización s, las variaciones de la potencia esparcida en el semiplano superior presentan variaciones muy pequeñas que pueden ser consideradas constantes. Mientras que en la Figura 28 para polarización s se presenta un mínimo muy angosto cuando el ancho  $Lx$  es menor a  $\lambda/2$ , el cual es más pronunciado cuando se tienen 3 tiras. Es decir, que para dimensiones de sublongitud de onda se tendrá un efecto de resonancia. Recordando que no tenemos transmisión detrás del plano de aluminio y que la incidencia es a  $45^\circ$  y el ángulo de esparcimiento es a  $-45^\circ$ . Lo anterior nos indica que la radiación posiblemente esté confinada entre el plano conductor y el arreglo de tiras. Notando también que, en caso de que no se tuvieran resonancias en reflexión, se esperaría tener un nivel de señal constante comparable con la potencia del haz incidente.

En el capítulo 5 se presentan resultados experimentales obtenidos en las mismas condiciones que las simulaciones. El arreglo experimental empleado se adaptó de tal manera que el plano de incidencia de la simulación concuerda con el plano de incidencia en el arreglo experimental. La metasuperficie propuesta fue elaborado con aluminio, el cual cumple las condiciones de conductor perfecto impuestas en las simulaciones.

Antes de mostrar los resultados experimentales, en el capítulo 5 se describen el arreglo experimental y las características más importantes de los componentes que lo integran.

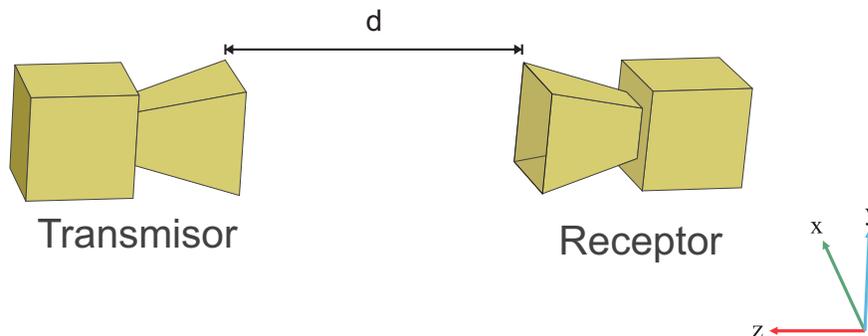
## 4. Arreglo experimental y desarrollo de las mediciones experimentales

En este capítulo se describe el funcionamiento del equipo de microondas. Se muestra la caracterización del sistema de transmisión y recepción de microondas, y del microscopio de barrido de campo cercano (MBCC). La determinación de la resolución del microscopio permitió medir de manera indirecta la longitud de onda de la radiación de microondas empleada. Se describe la metasuperficie, sus parámetros y su funcionamiento.

### 4.1. Sistema de transmisión y recepción de microondas

En la Figura 30 se ilustra el equipo de transmisión-recepción de microondas marca PASCO (Modelo WA-9314B). Tanto el transmisor como el receptor cuentan con una antena en forma piramidal que puede definirse como la región de tránsito de una onda electromagnética entre el espacio libre y una línea de transmisión o guía de onda (Bava y Sanz, 1999).

La proyección de la respuesta de una antena está dada por el diagrama de irradiación (ver Figura 31). Este patrón tiene como finalidad describir como irradia/recibe energía una antena y como generalmente ésta irradia en todas direcciones.



**Figura 30: Antena del receptor y transmisor del equipo de microondas empleado en las mediciones. La distancia  $d$  indica la separación entre las antenas, la cual se adecuó a cada medición que se realizó.**

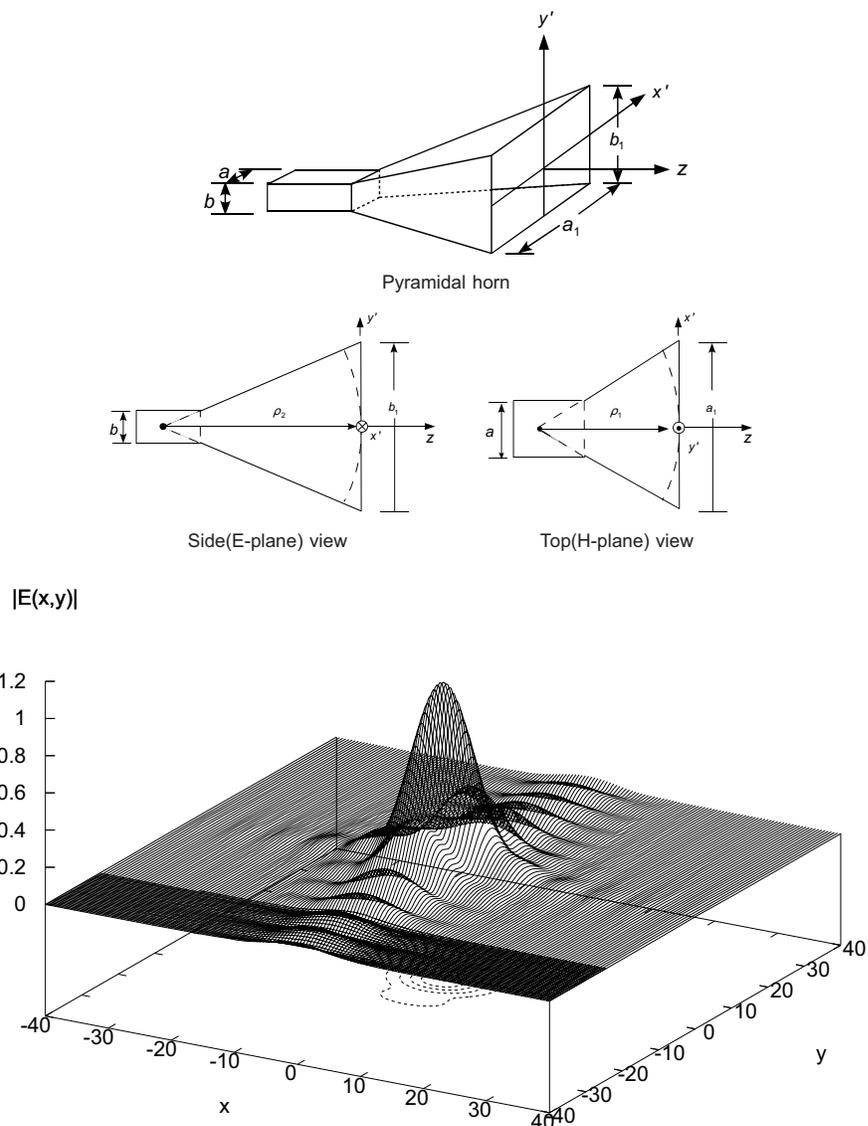


Table 1. The parameter of pyramid horn antenna

$\rho_1$	$\rho_2$	$a_1$	$b_1$	$Z_1$
5.070	4.009	2.528	2.528	16.0

**Figura 31: Patrón de antena del campo eléctrico difractado por una antena piramidal con abertura cuadrada. Los parámetros de la cavidad resonante y de la antena están en centímetros, listados en la tabla incluida en la Figura. Las unidades del eje x y del eje y son también en centímetros. Imagen tomada de Ohki *et al.* (2011).**

Las antenas del sistema de transmisión y recepción tienen las siguientes funciones:

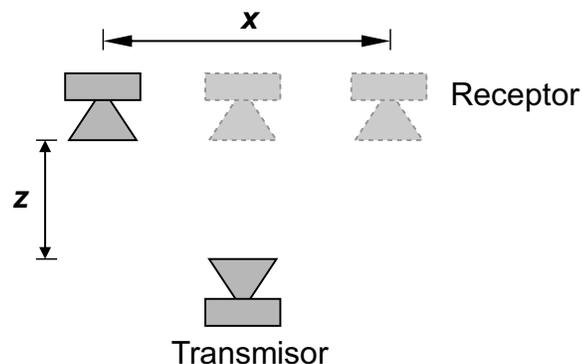
- Transmisor de microondas: el diodo Gunn del transmisor de microondas se encuentra dentro de una cavidad resonante a 10.525 GHz. Provee a la salida de la antena 15 mW de microondas coherentes y linealmente polarizadas a una longitud de onda de 2.8 cm. El diodo Gunn actúa como una resistencia no lineal que oscila en la

banda de las microondas, con una frecuencia correspondiente a la banda X de las microondas que abarca desde 8 GHz hasta los 12 GHz. La salida es linealmente polarizada a lo largo del eje del diodo y la corneta anexa irradia un haz de radiación de microondas que está centrado a lo largo del eje de la antena.

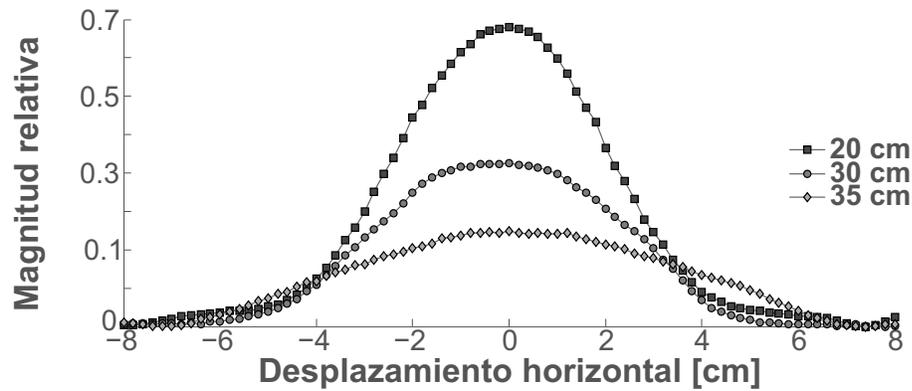
- Receptor de microondas: el receptor de microondas provee una lectura del medidor que, para señales de baja amplitud, es aproximadamente proporcional a la intensidad de la señal de microonda incidente. Una antena idéntica a la del transmisor colecta la señal de microondas y lo canaliza al diodo Schottky dentro de una cavidad resonante a 10.525 GHz. El diodo responde sólo a la magnitud de la componente de la señal que está polarizada a lo largo de su eje de oscilación. La magnitud de la señal detectada se convierte a voltaje DC (voltaje bajo) que posteriormente se amplifica.

#### 4.1.1. Caracterización del haz de microondas

Para caracterizar la señal de microondas, se fija la separación  $z$  entre las cornetas y se desplaza el receptor en dirección  $x$  como se observa en la Figura 32. Esta medición se realizó también para otras posiciones en  $z$ , mostrando en la Figura 33 los resultados obtenidos.



**Figura 32:** Esquema que ilustra la medición de la sección transversal en plano  $xz$  del haz de microondas en propagación libre. Para una distancia fija en  $z$ , se desplaza el receptor a lo largo del eje  $x$ .

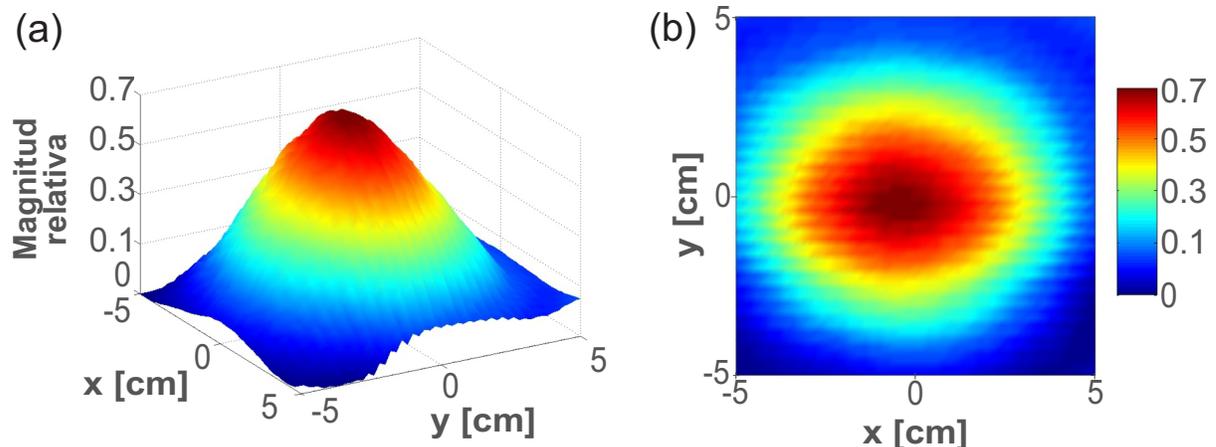


**Figura 33:** Vista transversal en dirección  $x$  del haz de microondas en propagación libre para diferentes distancias a lo largo del eje  $z$ . La cintura del haz medida en  $z = 20$  cm es de  $W_0 = 3$  cm.

Se observa que el frente de onda del haz de microondas se vuelve plano conforme aumenta la separación entre las cornetas.

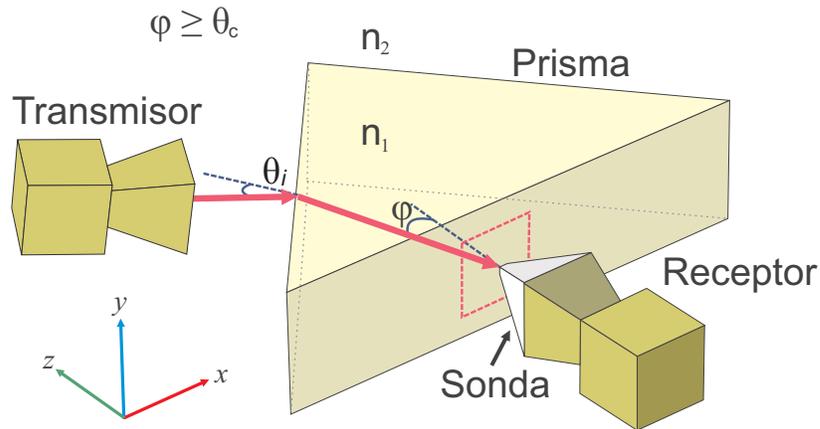
Escogiendo una posición  $z$  donde el perfil del haz de microondas es muy parecido al de un haz gaussiano en el plano  $z = 0$  cm (ver apéndice A.1.2), se realizó un mapeo bidimensional (explicado en la sección 4.2) del mismo (ver Figura 34).

Con esta información se elige la distancia transmisor-receptor más adecuada para las mediciones en campo lejano, además de que se conoce la evolución del frente de onda según la distancia a la que se requiera trabajar.



**Figura 34:** (a) Proyección y (b) mapeo bidimensional del haz de microondas en propagación libre, distancia transmisor-receptor de 20 cm.

#### 4.2. Microscopio de barrido de microondas de campo cercano (MBMCC)



**Figura 35: Configuración del microscopio de barrido de microondas de campo cercano.**

Trabajar con el MBMCC permitió realizar mediciones que demuestran la funcionalidad del equipo de microondas. Una parte indispensable del microscopio es la sonda para la detección en campo cercano. La sonda desempeña el papel de la fibra óptica empleada en el SNOM (ver apéndice A.5).

Una de las mediciones que se realizan con un microscopio de campo cercano es la del patrón estacionario generado por dos ondas evanescentes. La medición del patrón estacionario determina la resolución del microscopio mediante la verificación experimental del periodo espacial de las franjas de interferencia. Además también puede observarse el decaimiento exponencial de la intensidad del campo evanescente estacionario en función de la distancia sonda-superficie.

A continuación se mostrarán las mediciones realizadas con el MBMCC que ilustran el correcto funcionamiento del equipo de microondas.

El arreglo experimental mostrado en la Figura 35 es el MBMCC operando en modo de colección, utilizado para realizar las mediciones en el régimen de campo cercano. El microscopio se compone del sistema de transmisión-recepción de microondas, una sonda no comercial (guía de onda o antena piramidal, que perturba y colecta los modos electromagnéticos en campo cercano) y un prisma de cera de parafina.

El receptor se coloca en un sistema de barrido que se basa en un sistema de dos motores a paso para el control del movimiento en el plano  $xy$ . El escaneo de la muestra

en el plano  $xy$  se lleva a cabo manteniendo una posición fija en dirección  $z$ .

Para realizar un mapeo bidimensional, basta con indicar la longitud ( $lx$ ,  $ly$ ) y la resolución ( $dx$ ,  $dy$ ) del desplazamiento en cada dirección. El escáner se desplaza  $dx$  en  $\hat{x}$ , para una posición fija en  $\hat{y}$ . La señal es enviada directamente a un osciloscopio digital y procesado por una computadora con el software desarrollado que incluye información tal como el posicionamiento de la sonda en el plano  $xy$  y la velocidad de regulación del escaneo. El escáner se desplaza nuevamente un  $dx$  en  $\hat{x}$  hasta que el desplazamiento total es  $lx$ . Ahora el escáner se desplaza  $dy$  en  $\hat{y}$  y se repite el desplazamiento en  $\hat{x}$ . La medición finaliza cuando en la dirección  $y$  el desplazamiento total ha sido  $ly$ .

La antena piramidal tiene como propósito mejorar la colección y el confinamiento bajo los mecanismos del SNOM. La parte ancha de la antena piramidal está adjunta al receptor, mientras que la parte angosta se mantiene cerca de la superficie del prisma.

#### 4.2.1. Sonda piramidal

La sonda está hecha de papel cascarón, cuyas paredes interiores están forradas de papel aluminio. El aluminio en las paredes internas permite la transición gradual de los modos de campo cercano colectados. En la Figura 36 se muestran los *pellets* de estireno ( $n_{sp} = 1.35$  a  $10.525$  GHz) con los cuales esta rellena la sonda piramidal. La geometría que tiene la sonda es para acoplarla fácilmente a la corneta del

La resolución de todo el sistema queda mayormente determinada por el tamaño de la apertura de la sonda piramidal. La sonda debe perturbar a los modos electromagnéticos dentro del régimen de campo cercano (para una distancia de separación sonda-muestra  $< \frac{\lambda}{2}$ ), ésto se logra haciendo que las dimensiones de la abertura sean del orden de sub-longitud de onda para así vencer el límite de resolución que impone la difracción en campo lejano.

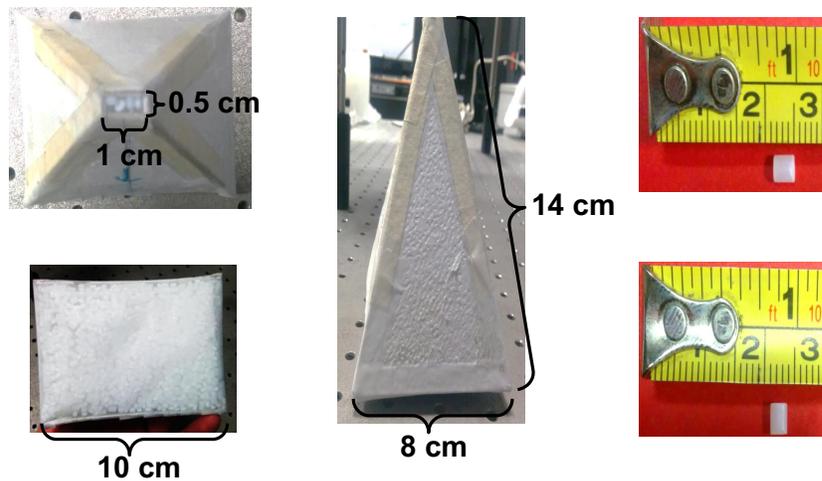


Figura 36: (IZQ) Vista frontal y posterior de la sonda, la cual, tiene recubrimiento metálico en sus paredes interiores y está rellena de “pellets”. (CENTRO) Vista lateral de la sonda. (DER.) “Pellets” de estireno con dimensiones de 5 mm de largo y 4 mm de ancho, con un índice de refracción de  $n_3 = 1.35$  a 10.525 GHz.

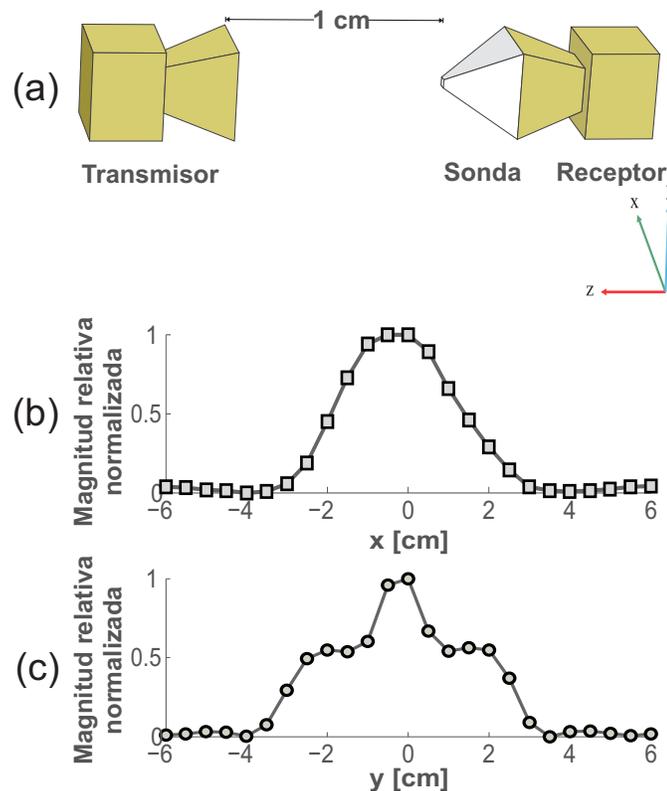
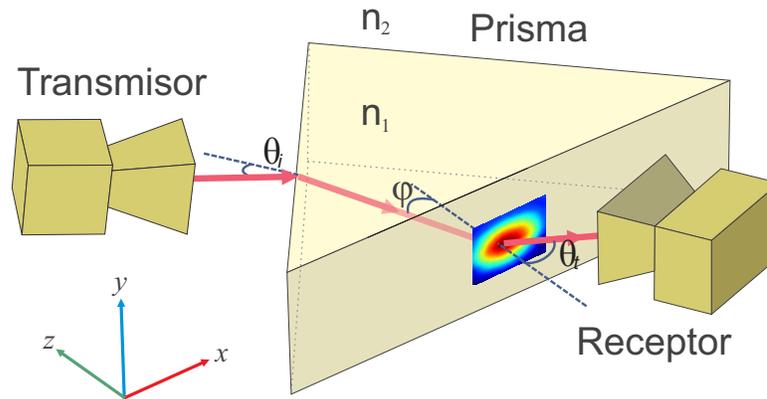


Figura 37: Con la sonda acoplada al receptor se obtienen vistas transversales en la horizontal ( $x$ ) y en la vertical ( $y$ ) del haz de microondas que se difracta en los bordes de las cornetas. (a). Cuando la sonda está muy cerca del transmisor permite conocer con mejor definición el patrón de la antena. Sección transversal de la señal de microondas a lo largo de la dirección  $x$  (b) y a lo largo de la dirección  $y$  (c) cuando el transmisor está a 1 cm de la sonda.

#### 4.2.2. Índice de refracción del prisma de cera de parafina



**Figura 38:** Esquema del arreglo experimental para la medición del índice de refracción del prisma de cera. Para un ángulo fijo de incidencia, se hace un barrido angular del rayo transmitido desde  $0^\circ$  a  $90^\circ$  para encontrar el ángulo en el cual se tiene una mayor transmisión. La línea roja es solamente para ilustrar la trayectoria del haz.

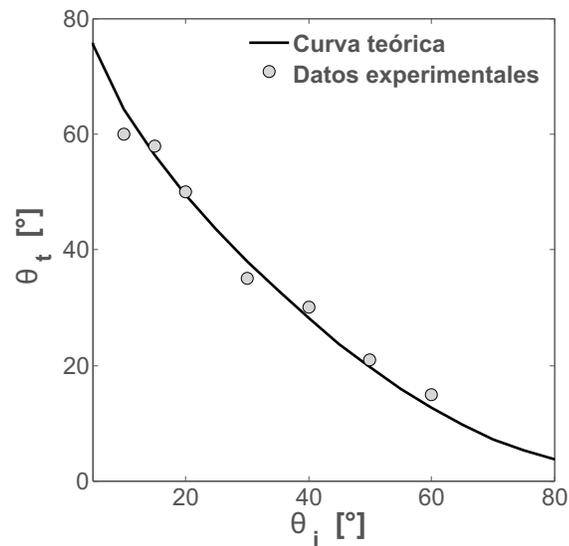
Para caracterizar el prisma de cera de parafina utilizado para el MBMCC, se calculó el índice de refracción del material para 10.525 GHz.

Como se observa en la Figura 38, el haz de microondas incide a un ángulo  $\theta_i$  y es medido a un ángulo  $\theta_t$ . El cálculo utiliza la ley de Snell y el ángulo al cual la señal medida en transmisión es máxima.

Se calcula la expresión (87), usando la ley de Snell y haciendo trazo de rayos, para el ángulo al cual sale el rayo transmitido por una de las caras del prisma (ver Figura 38). Con esta ecuación se obtiene el ángulo transmitido, dado el ángulo de incidencia, para diferentes valores del índice de refracción  $n_1$ . El valor para el índice de refracción que genera el error absoluto más pequeño entre el valor teórico y el valor experimental para el ángulo de transmisión es el designado como el índice de refracción del prisma.

$$\theta_t = \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \arcsin \left( 45^\circ - \arcsin \left( \frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_i) \right) \right) \right). \quad (87)$$

En la Figura 39 se muestra la gráfica con los datos experimentales y la curva teórica obtenida con la ecuación (87). El índice de refracción resultante es de  $n_1 = 1.46 \pm 0.02$  y el ángulo crítico  $\theta_c = 43^\circ$ .

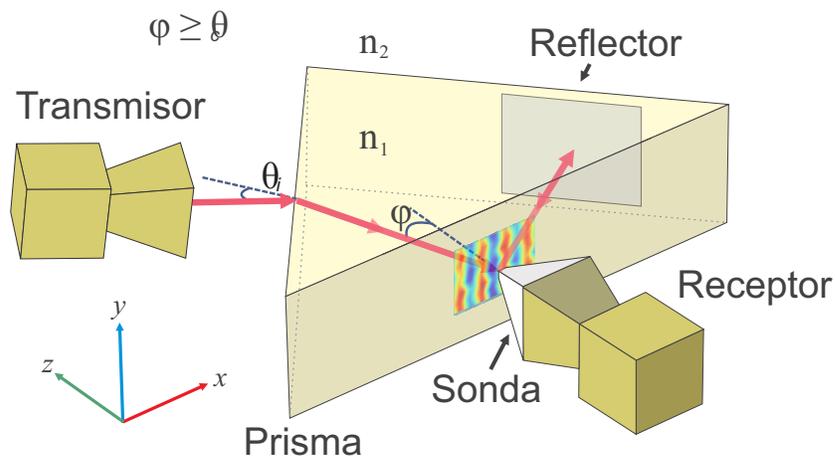


**Figura 39: Ajuste de los datos experimentales con la ecuación para el ángulo transmitido en función del ángulo de incidencia y del índice de refracción, donde la curva que mejor ajusta los datos es para  $n_1 = 1.46$ .**

### 4.2.3. Resolución del microscopio

Se trabajó con la configuración que se muestra en la Figura 40, con la cual generamos un campo evanescente estacionario en una de la caras del prisma.

El prisma de parafina cumple con la geometría de un triángulo rectángulo, un ángulo interno de  $90^\circ$  y dos de  $45^\circ$ , por sencillez se elige la hipotenusa del prisma como la cara lateral en dónde se produce el campo evanescente.



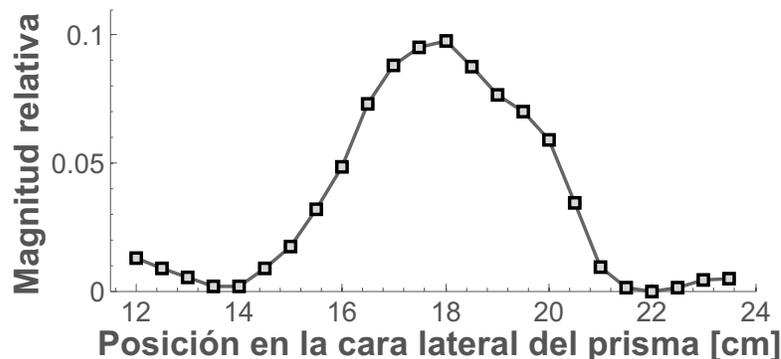
**Figura 40: Medición del campo evanescente estacionario que se genera en la superficie del prisma. El haz de microondas incide a un ángulo igual o mayor que el crítico.**

La corneta del transmisor se coloca de frente a una de las caras del prisma, de manera que el haz incide normal ( $\theta_i = 0^\circ$ ) a la superficie y el haz transmitido dentro del prisma ocurre a  $\phi = 45^\circ$  en la hipotenusa del prisma, donde se cumple que  $\phi \geq \theta_c$  y por lo tanto ocurre reflexión total interna y obtenemos un campo evanescente en la interfaz prisma-aire. El haz internamente reflejado (ver Figura 41) se transmite por la otra cara lateral del prisma y vuelve a ser reflejado, en dirección contraria a la que incidió, debido al reflector de microondas. El reflector ayuda a que el haz con el que se va a generar el otro campo evanescente tenga una amplitud tal que cuando interfiere con el primero, el patrón de interferencia tenga buen contraste.

Se realizaron mediciones para cuatro diferentes posiciones sonda-prisma del campo evanescente estacionario. Los resultados se muestran en la Figura 42.

Se tomó una sección transversal del patrón de interferencia obtenido para  $z = 0$  cm (muy cerca de la superficie, evitando el contacto sonda-prisma) para medir el periodo espacial del patrón estacionario (ver Figura 42), el cual fue de  $\Lambda = 1.4$  cm (ver apéndice A.3.2). La resolución espacial del microscopio está más allá de 0.7 cm, la cual puede ser estimada de los resultados de la Figura 42 (Tao *et al.*, 2004). De manera indirecta se puede corroborar la longitud de onda de la radiación de microondas empleada, sustituimos el periodo espacial de las franjas  $\Lambda$  en la ecuación (155).

Se observa en la Figura 42 que cuando la distancia de separación sonda-prisma es  $\geq \frac{\lambda}{2}$  las franjas dejan de ser visibles debido a que la sonda se encuentra fuera del régimen de campo cercano.



**Figura 41: Sección transversal del haz internamente reflejado cuando sale por una de las caras laterales del prisma recto. Se observa que el haz reflejado mantiene una forma tipo haz gaussiano al ser reflejado de la hipotenusa del prisma.**

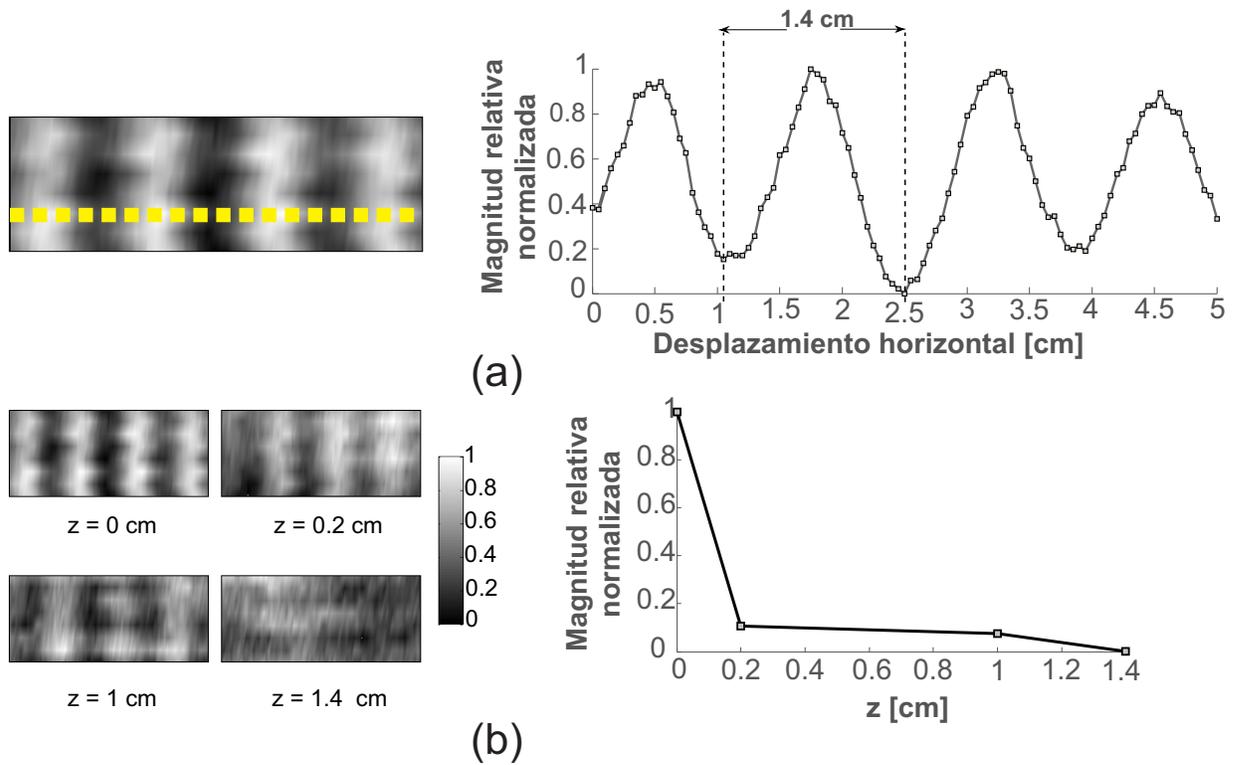
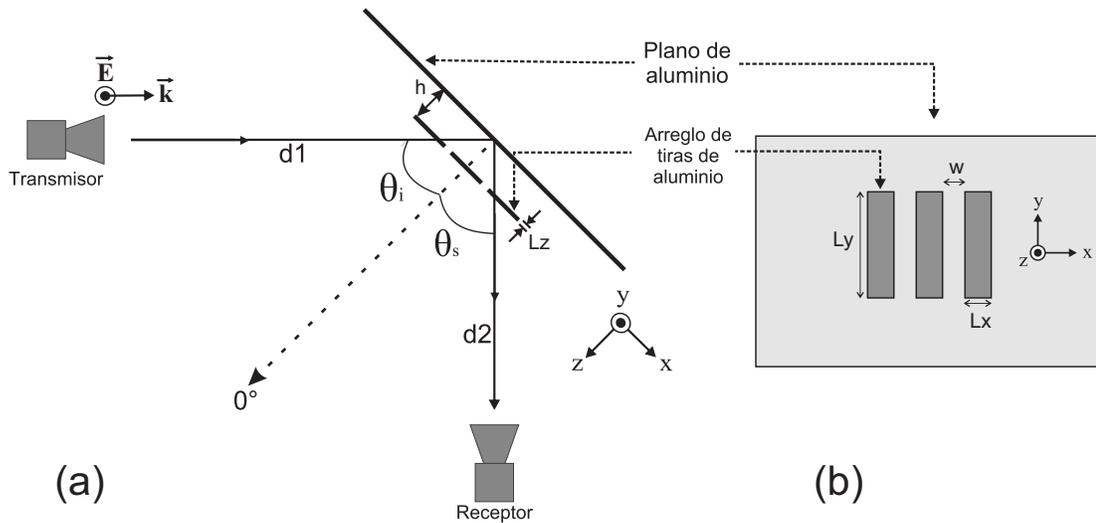


Figura 42: (a) Mapeo bidimensional y sección transversal de la distribución de intensidad del campo evanescente estacionario para  $z = 0$  cm. La línea amarilla indica la posición en el mapeo bidimensional de dónde se tomó la sección transversal. La medición indica que el periodo espacial de las franjas de interferencia es de  $\Lambda = 1.4$  cm. (b) Mapeos bidimensionales de la distribución de intensidad del campo evanescente estacionario en diferentes posiciones a lo largo del eje  $z$ . Se calcula el promedio de la intensidad de los patrones de interferencia y se muestra el decaimiento exponencial en la señal del campo evanescente estacionario que cualitativamente es apreciado. Los mapeos bidimensionales están normalizados respecto al máximo de señal en  $z = 0$ . La escala de las imágenes mostradas es de  $5 \times 0.5$  cm<sup>2</sup>.

### 4.3. Arreglo experimental para las mediciones con la metasuperficie



**Figura 43:** (a) Esquema del arreglo experimental visto desde el plano de incidencia: el haz de microondas incide a 45 grados y la señal reflejada se detecta a -45 grados. Entre el arreglo periódico de tiras y el plano de aluminio se encuentra un espacio de aire ajustable  $h$ . Las posiciones  $d_1 = 15$  cm y  $d_2 = 10$  cm donde se colocan el transmisor y el receptor, respectivamente. (b) Vista frontal del arreglo de tiras de aluminio y con el plano de aluminio de fondo. Se indica el largo  $L_y$ , el ancho  $L_x$  y la separación  $w$  entre las tiras de aluminio. El aluminio tiene un espesor  $L_z \cong 0.05$  mm. El medio circundante es aire. El campo eléctrico está polarizado en dirección perpendicular al plano de incidencia.

En el capítulo 3 se demostró el efecto que tiene una estructura como la de la Figura 12 en el campo esparcido. Ahora, en la Figura 43 se muestra un esquema del arreglo experimental, basado en la Figura 12, para las mediciones en campo lejano.

La metasuperficie está compuesta por tiras de aluminio y un plano de aluminio con un espesor de  $L_z \cong 0.05$  mm. En la Figura 43(b) se indican las dimensiones de la estructura: ancho  $L_x$ , largo  $L_y$ , separación entre tiras  $w$  y tamaño del plano de aluminio 28 cm x 25 cm. En la Figura 43(a) lado izquierdo señalamos los demás parámetros que componen el arreglo experimental: separación plano-tiras  $h$ , espesor  $L_z$ , ángulo de incidencia  $\theta_i$ , ángulo de detección  $\theta_s$ , distancia del transmisor al plano  $d_1$  y distancia del receptor al plano  $d_2$ . El plano de aluminio se encuentra en el plano  $xy$  con el eje  $z$  en dirección normal al plano de aluminio. Aquí sí aparece el parámetro  $L_y$  que en las simulaciones se consideró invariante.

Las distancias  $d_1 = 15$  cm y  $d_2 = 10$  cm señaladas en la Figura 43(a) son las posiciones del transmisor y del receptor, respectivamente. Estas distancias resultaron ser las

óptimas porque el promedio de la señal se mantiene en un nivel constante, además de que el perfil del haz es de tipo gaussiano. Los ángulos elegidos  $\theta_i = 45^\circ$  y  $\theta_s = -45^\circ$ , fueron los más apropiados considerando las dimensiones de las cornetas y las mediciones posteriores.

El haz de microondas que sale del transmisor está polarizado a lo largo del eje del diodo, es decir, la dirección vertical en un plano inmediatamente a la salida de la corneta. En este caso, el haz incide perpendicular al plano de incidencia. Para mediciones dónde se requirió polarización paralela al plano de incidencia se rotaron las cornetas del transmisor y del receptor en  $90^\circ$ .

Se consideró como celda unitaria al arreglo de una tira sobre el plano de aluminio, se midió su efecto sobre el campo incidente, y posteriormente se agregaron dos tiras más.

La tira de aluminio se coloca muy cerca del plano de aluminio en una posición  $h$  y se registra la señal reflejada en campo lejano. Vamos alejando la tira del plano a lo largo del eje  $\hat{z}$  de 0.1 cm hasta  $2\lambda$ . Cuando el ancho o la separación entre tiras es el parámetro a variar, los demás quedan fijos durante toda la medición. La lectura de la señal se realiza con un osciloscopio conectado al receptor.

En el siguiente capítulo, 5, se presentan los resultados obtenidos.

## 5. Resultados experimentales

---

En este capítulo se presentan los resultados de todas las mediciones realizadas con la configuración mostrada en la sección 4.3. Las mediciones parten de los cálculos obtenidos en el capítulo 3 en función de los parámetros geométricos señalados en la Figura 12.

Se presentan mediciones de la señal reflejada en función del espacio de aire variable  $h$  para la celda unitaria de 1 tira y una metasuperficie de 3 tiras para diferentes anchos  $Lx$  de las tiras, en polarización perpendicular (Pol-s) y paralela (Pol-p) al plano de incidencia. El espesor de las tiras siempre se mantuvo constante  $Lz \cong 0.05$  mm.

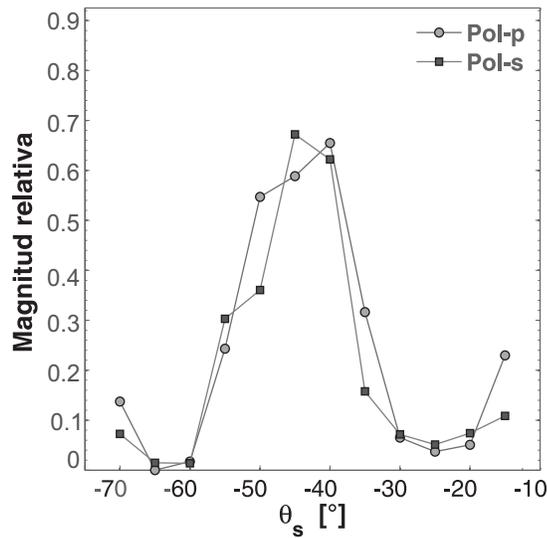
Primero se mide la variación angular del haz de microondas reflejado que incide en el plano de aluminio con ambas polarizaciones. Al final se midió la dependencia angular de la señal reflejada por la metasuperficie (3 tiras) a una distancia fija del plano de aluminio.

Después se introduce 1 tira de aluminio, considerada como la celda unitaria de la metasuperficie, para analizar el efecto del parámetro  $Ly$  que se consideró invariante en las simulaciones con el método integral. Se midió la dependencia de la señal reflejada para diferentes largos  $Ly$  de una tira.

Con la metasuperficie conformada por 3 tiras se realizaron mediciones con pol-s variando la separación  $w$  entre éstas y dejando los demás parámetros fijos, ajustando también el espacio de aire entre el plano y las tiras. Posteriormente se cambia el ancho  $Lx$  de las tiras y se mide la señal reflejada en función de  $h$  en Pol-s y Pol-p.

En el capítulo 6 se discuten los resultados experimentales más representativos, los cuales se contraponen con lo calculado por el método integral (3).

### 5.1. Haz de microondas reflejado por el plano de aluminio



**Figura 44:** Medición angular del haz de microondas reflejado cuando incide a 45 grados en el plano de aluminio.

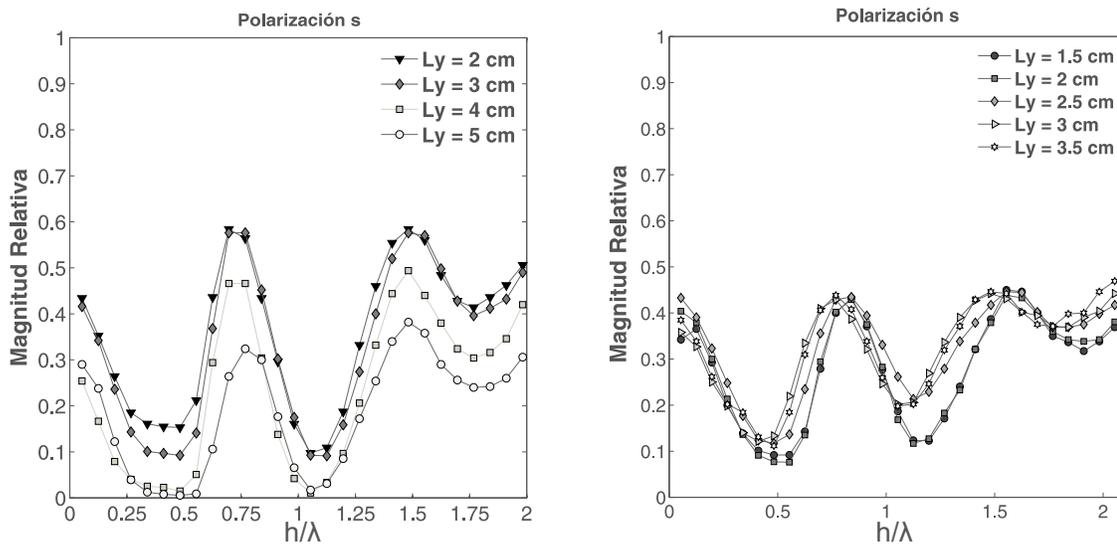
Para la medición angular del haz de microondas reflejado se utilizó el arreglo experimental esquematizado en la Figura 43 pero sin las tiras de aluminio.

El haz incide a un ángulo  $\theta_i = 45^\circ$  medido respecto a la normal al plano de aluminio. La detección del haz reflejado se hizo en el intervalo angular de  $-65^\circ$  a  $10^\circ$ .

Para cambiar de Pol-s a Pol-p se rotan el transmisor y el receptor de microondas  $90^\circ$ .

En la Figura 44 se presentan las mediciones del haz reflejado para ambas polarizaciones.

## 5.2. Efecto en la señal reflejada por una celda unitaria de 1 tira



**Figura 45:** Señal de microondas reflejada medida en  $-45$  grados para una tira en función de  $h$ , (IZQ.) con  $Lx = 1$  cm y (DER.)  $Lx = 0.5$  cm, para diferentes largos  $Ly$ . El haz incidente oscila en dirección perpendicular al plano de incidencia y es paralelo a la tira de aluminio.

Para conocer el efecto del largo de la tira  $Ly$  de la señal reflejada, se realizaron mediciones para una tira de ancho  $Lx = 0.5, 1$  cm variando la separación  $h/\lambda$  en fracciones de la longitud de onda, cuyo resultado se muestra en la Figura 45.

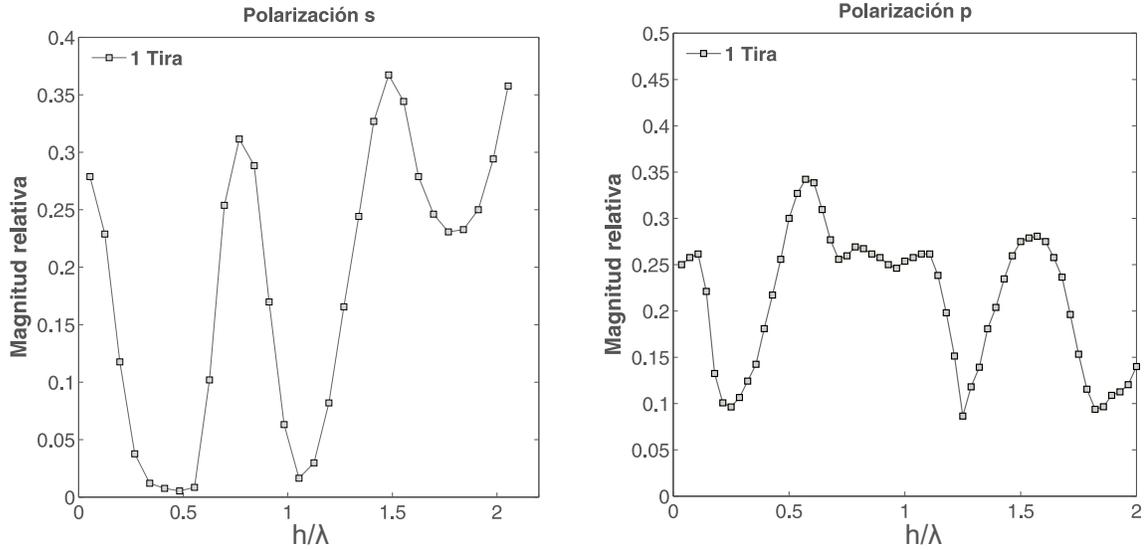
El haz de microondas con Pol-s incide a un ángulo de  $\theta_i = 45^\circ$  y es medido con el receptor a  $\theta_s = -45^\circ$ .

De la información arrojada por estos resultados se eligió fijar el largo  $Ly = 5$  cm para las mediciones posteriores.

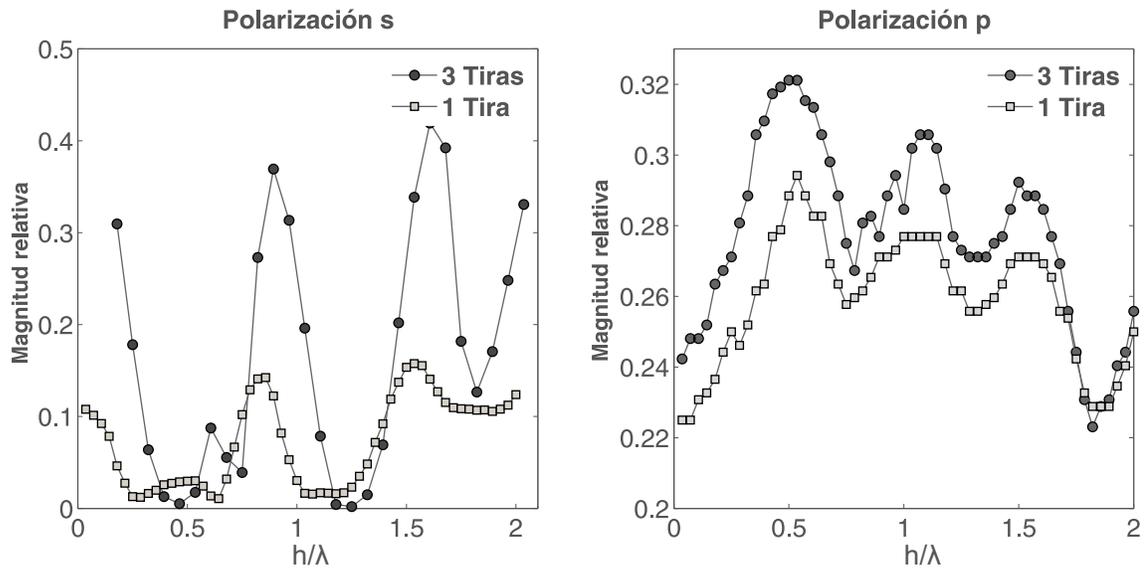
### 5.2.1. Efecto en la señal reflejada por una celda unitaria para ambas polarizaciones

Para una tira de ancho  $Lx = 0.5, 1$  cm, se midió el efecto que tiene el cambio de polarización, de Pol-s a Pol-p, en el haz de microondas reflejado. El haz con Pol-p incide a un ángulo  $\theta_i = 45^\circ$  y es medido con el receptor a  $\theta_s = -45^\circ$ , mientras se va ajustando la separación  $h$  en fracciones de  $\lambda$ . Las mediciones con Pol-p se tomaron de la Figura 44.

En la Figura 46 se muestra el resultado para una tira con ancho  $Lx = 1$  cm y en la Figura 47 para una tira de ancho  $Lx = 0.5$  cm, ambas con  $Ly = 5$  cm.

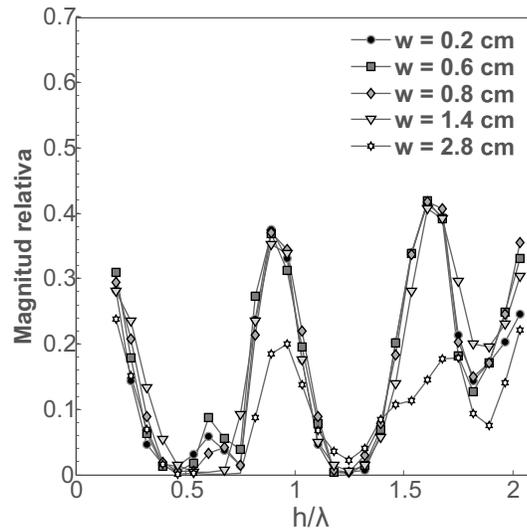


**Figura 46:** Señal de microondas reflejada medida en  $-45$  grados en función de  $h$ , con una tira de ancho  $L_x = 1$  cm y largo  $L_y = 5$  cm, para ambas polarizaciones. El haz incidente oscila en dirección perpendicular al plano de incidencia y es paralelo a la tira de aluminio.



**Figura 47:** Medición variando  $h$ , con  $L_x = 0.5$  cm,  $L_y = 5$  cm, para ambas polarizaciones.

### 5.3. Efecto en la señal reflejada en función de la separación entre 3 tiras



**Figura 48: Señal de microondas reflejada medida en  $-45$  grados para 3 tiras en función de  $h$  y de  $w$ , con  $Lx = 1$  cm,  $Ly = 5$  cm. El haz incidente oscila en dirección perpendicular al plano de incidencia y es paralelo a la tira de aluminio.**

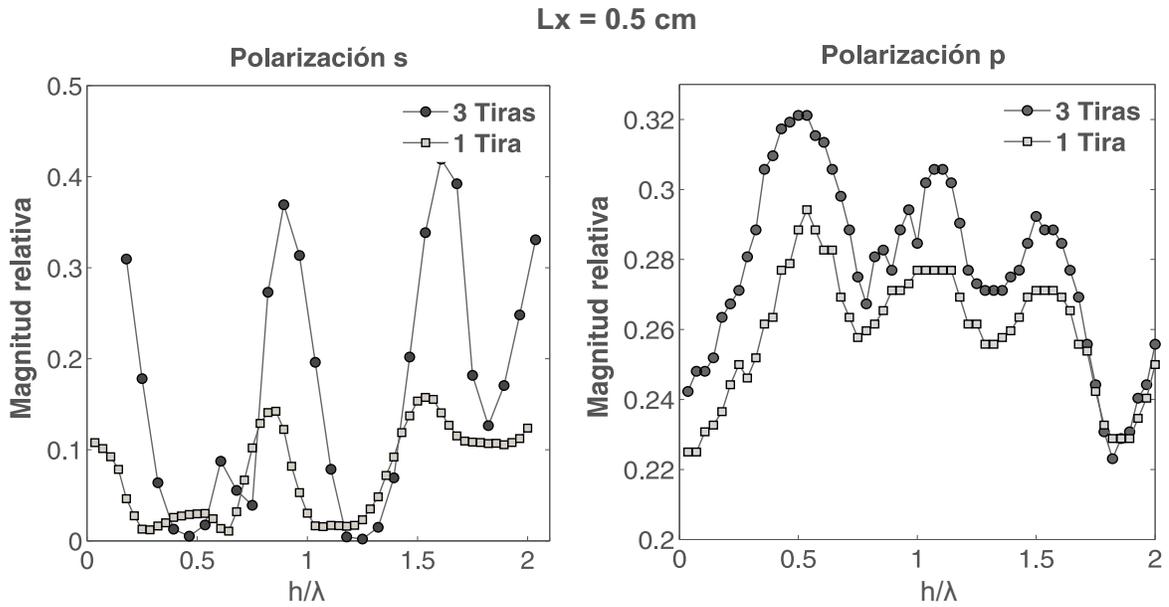
Otro parámetro que se consideró para el estudio de la metasuperficie fue la separación  $w$  entre tiras. En la Figura 48 se muestra la medición de la señal reflejada para conjuntos de tres tiras, con  $Lx = 1$  cm y  $Ly = 5$  cm, donde cada uno tiene un valor diferente  $w$ . Como en las mediciones anteriores, se ajustó la separación  $h$  en fracciones de  $\lambda$ , el haz incidió a  $45^\circ$  y la reflexión se detectó en  $-45^\circ$ .

### 5.4. Comparación de la señal reflejada para 1 y 3 tiras en ambas polarizaciones

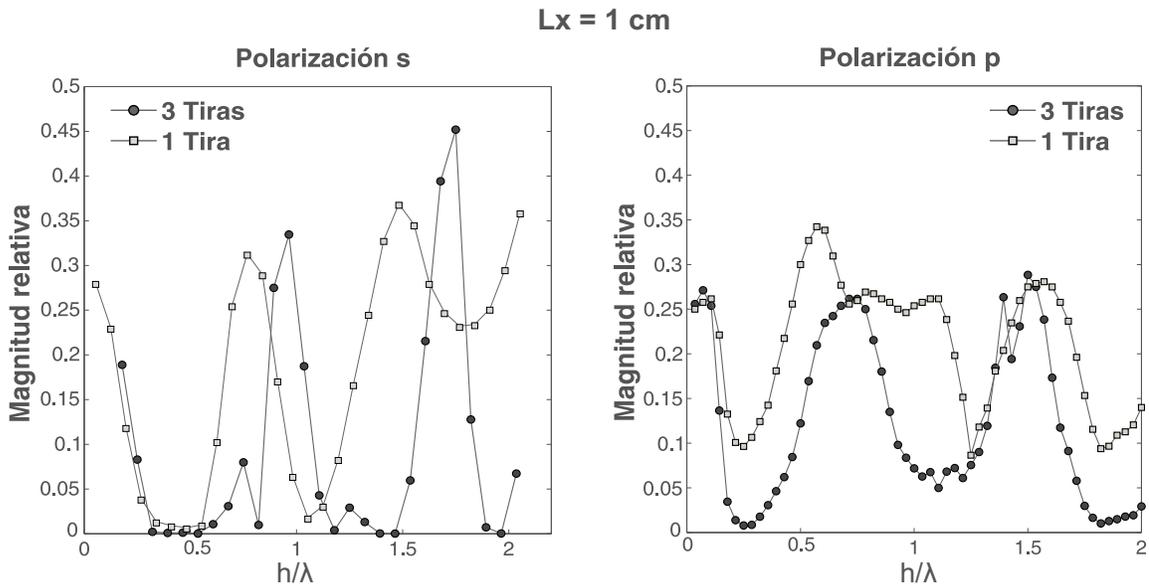
A continuación se presenta la comparación de los resultados obtenidos para una celda unitaria (1 tira) y para la metasuperficie en función de la separación  $h/\lambda$ .

Las mediciones en ambas polarizaciones se hicieron para  $Lx = 0.5$  cm (Figura 49), 1 cm (ver 50), 2 cm (ver Figura 51) y 3 cm (ver Figura 52). El largo para todas las tiras empleadas fue de  $Ly = 5$  cm. El haz de microondas incidió a  $\theta_i = 45^\circ$  y la reflexión se detectó en  $\theta_s = -45^\circ$ . Para cambiar de polarización se rotaron las cornetas del transmisor y el receptor  $90^\circ$ .

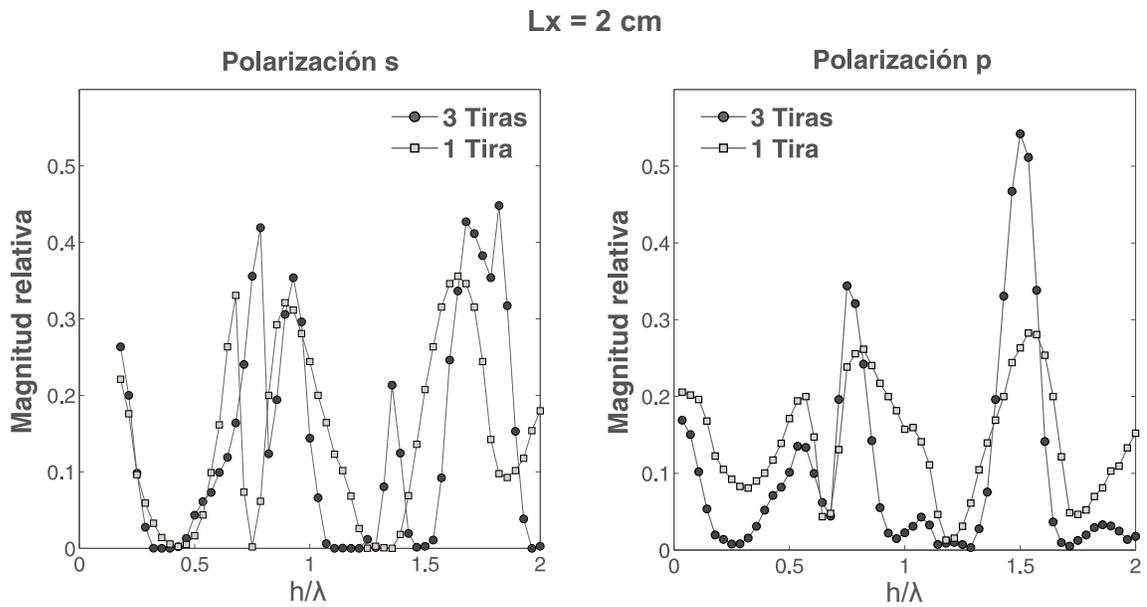
Los resultados para 1 tira se representan en las gráficas con cuadros y para 3 tiras con círculos.



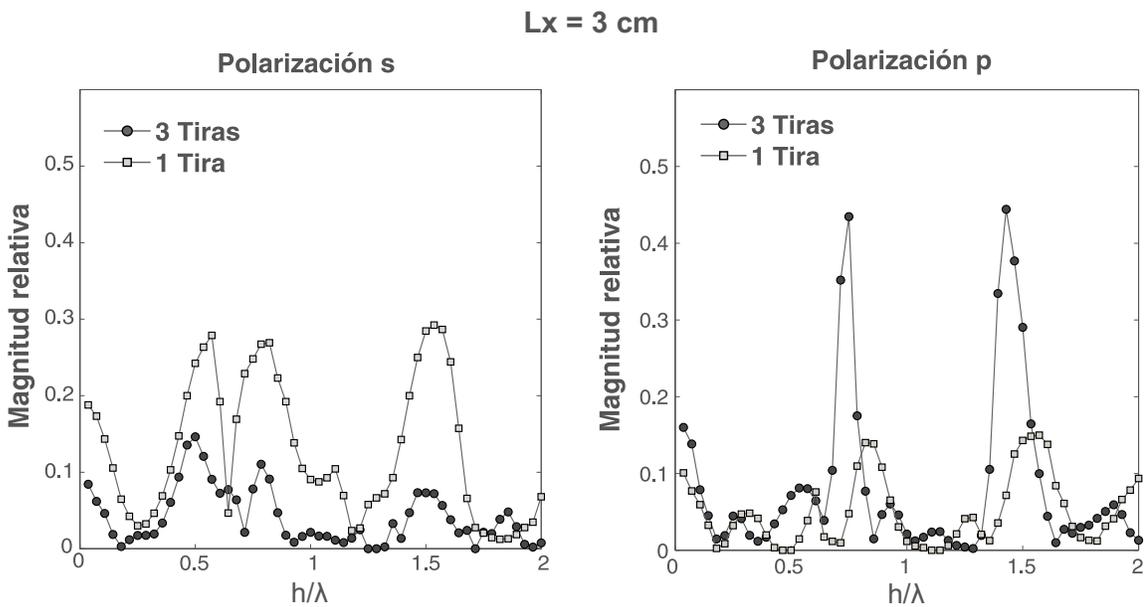
**Figura 49:** Señal de microondas reflejada medida en  $-45$  grados para 1 y 3 tiras en función de  $h$ , con  $L_x = 0.5$  cm,  $L_y = 5$  cm y  $w = 0.5$  cm, para Pol-s y Pol-p.



**Figura 50:** Señal de microondas reflejada medida en  $-45$  grados para 1 y 3 tiras en función de  $h$ , con  $L_x = 1$  cm,  $L_y = 5$  cm y  $w = 0.5$  cm, para Pol-s y Pol-p.



**Figura 51:** Señal de microondas reflejada medida en  $-45$  grados para 1 y 3 tiras en función de  $h$ , con  $Lx = 2$  cm,  $Ly = 5$  cm y  $w = 0.5$  cm, para Pol-s y Pol-p.



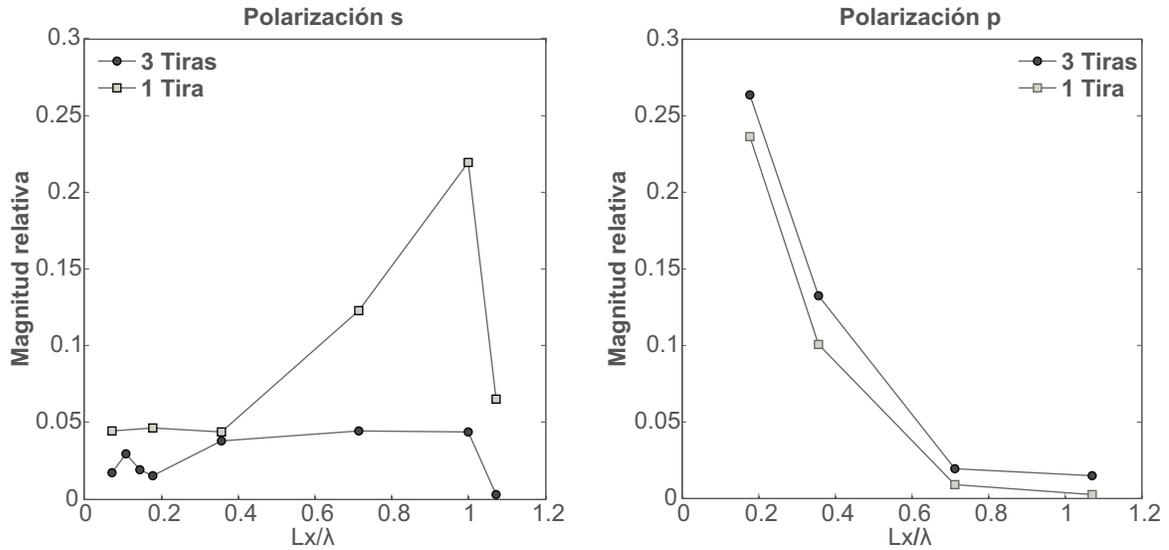
**Figura 52:** Señal de microondas reflejada medida en  $-45$  grados para 1 y 3 tiras en función de  $h$ , con  $Lx = 3$  cm,  $Ly = 5$  cm y  $w = 0.5$  cm, para Pol-s y Pol-p.

### 5.5. Dependencia de la señal reflejada como función del ancho

De los resultados de la sección anterior se recopilaron los datos de la señal reflejada por 1 y 3 tiras, con  $h = 0.5$  cm, en función del ancho  $Lx$ . Para tres tiras la separación fue

$w = 0.5$  cm.

En la Figura 53 se compara la dependencia de la señal reflejada, para Pol-s y Pol-p, en fracciones de  $Lx/\lambda$  que van de  $Lx = 0.5$  cm hasta  $Lx = 3$  cm.

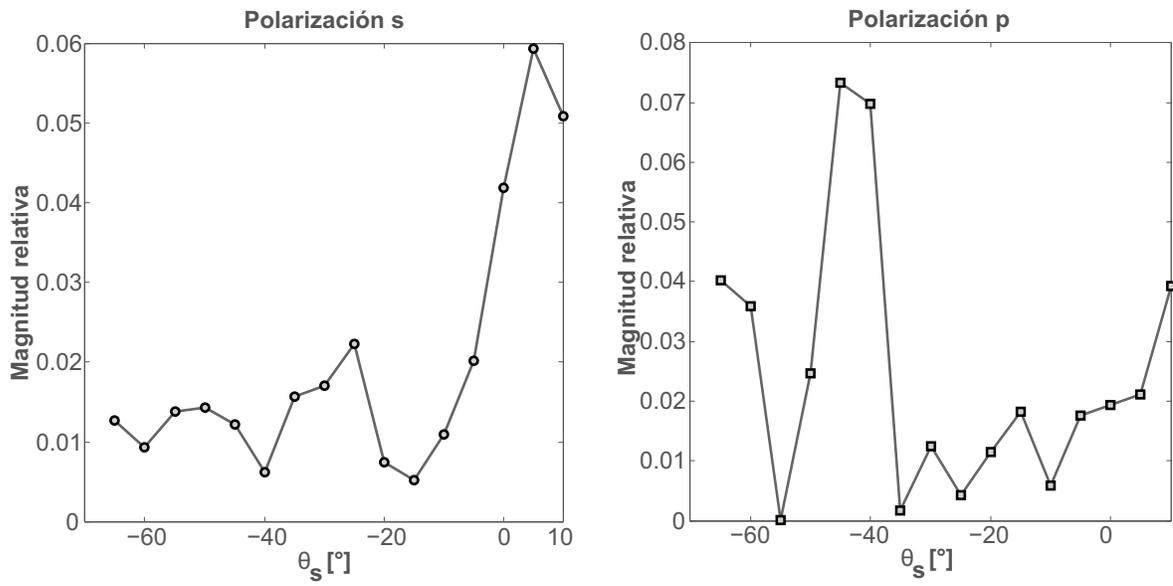


**Figura 53: Resultado que muestra la dependencia de la radiación reflejada para 1 y 3 tiras como función del ancho  $Lx$ , para Pol-s y Pol-p. La distancia  $h = 0.5$  cm y para 3 tiras  $w = 0.5$  cm.**

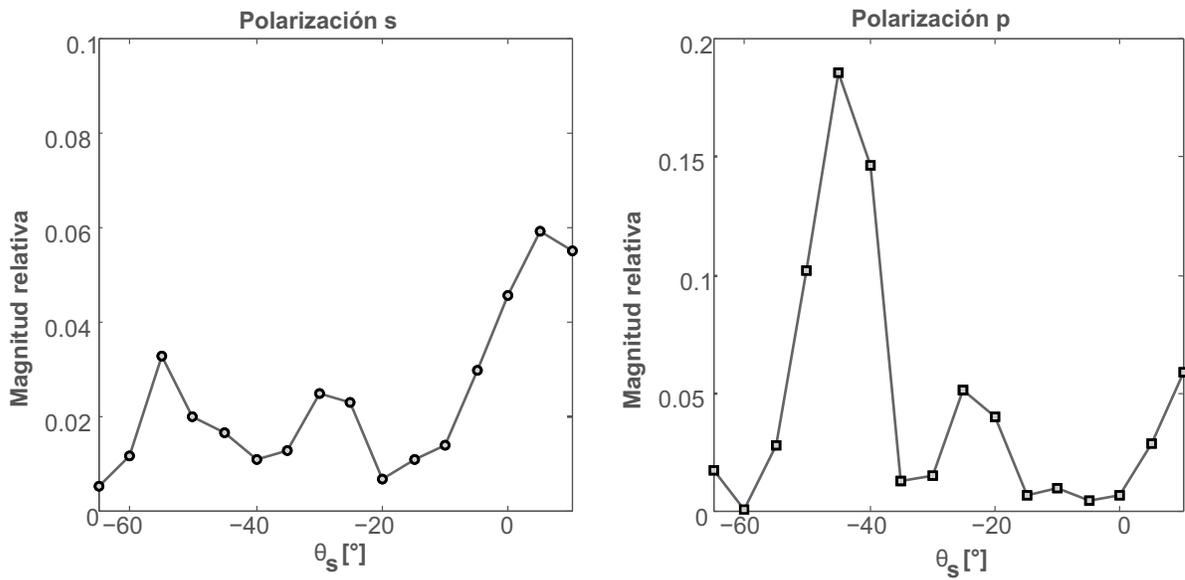
## 5.6. Medición angular de la señal reflejada

En la Figura 54 se presenta la medición angular del haz de microondas reflejado por la metasuperficie compuesta por tres tiras de ancho  $Lx = 1$  cm. El haz incidió a  $45^\circ$ , para ambas polarizaciones, y se detectó en el intervalo angular de  $-65^\circ$  a  $10^\circ$ .

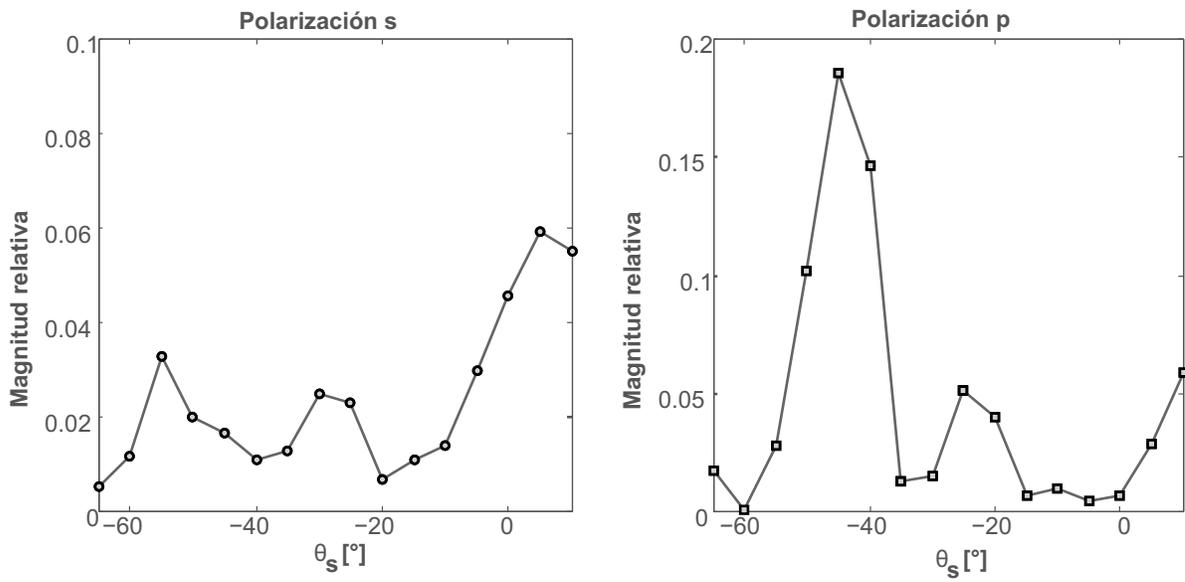
Se fijó la separación  $h = 0.5$  (Figura 54) cm,  $0.4$  cm (Figura 55) y  $0.3$  cm (Figura 56), y  $w = 0.5$  cm dejando fijos los demás parámetros ( $d1$ ,  $d2$ ,  $Ly$ ).



**Figura 54:** Medición angular de la radiación reflejada por un conjunto de 3 tiras en Pol-s y Pol-p, con  $Lx = 1$  cm y  $w = h = 0.5$  cm.



**Figura 55:** Medición angular de la radiación reflejada por un conjunto de 3 tiras en Pol-s y Pol-p, con  $Lx = 1$  cm,  $w = 0.4$  cm y  $h = 0.4$  cm.



**Figura 56: Medición angular de la radiación reflejada por un conjunto de 3 tiras en Pol-s y Pol-p, con  $Lx = 1$  cm,  $w = 0.5$  cm y  $h = 0.3$  cm**

## 6. Discusión

---

En este capítulo se muestran los resultados experimentales más representativos junto con las simulaciones realizadas con el método integral.

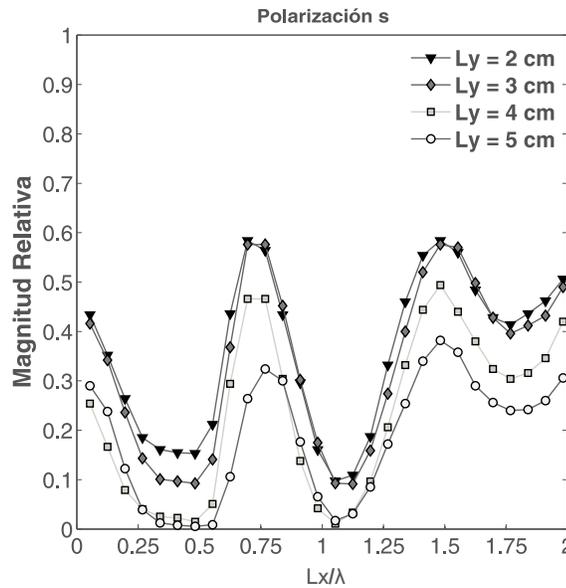
El trabajar en este régimen implica la manipulación de estructuras del orden de centímetros a milímetros y de equipo robusto, lo que facilita en cierta medida el trabajo experimental.

El empleo de radiación de microondas en investigaciones recientes sobre materiales con propiedades exóticas permite la implementación de estas ideas en otros regímenes del espectro electromagnético. Como el trabajo presentado por Huang y Chan (2014) en el rango de microondas, que consiste en cálculos teóricos donde comprueban que los efectos de resonancia tipo Fabry-Perot son factibles para los rangos de THz e infrarrojo.

Cabe recordar que trabajos en el rango óptico emplean nanoestructuras inspiradas en la funcionalidad y geometría de antenas usadas en radiofrecuencia (Pors *et al.* (2013), Yu *et al.* (2011)). Estas investigaciones se basan en la explotación de propiedades de las nanoestructuras, propiedades como los plasmones acoplados fuertemente a frecuencias ópticas y la capacidad de diseñar estructuras que impriman el cambio de fase que se desea que tenga la luz reflejada/transmitida.

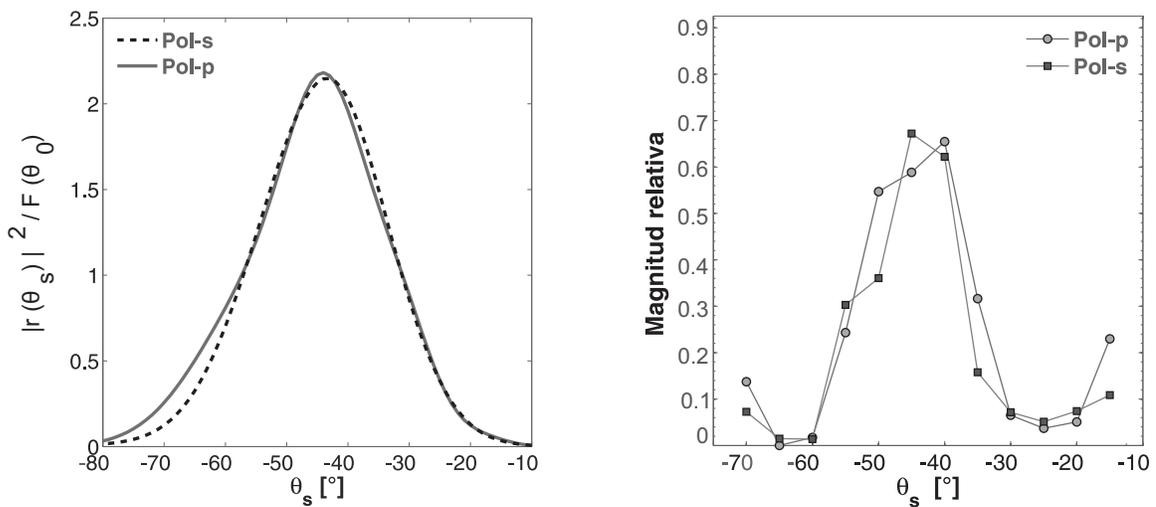
Lo anterior es parte de la motivación de esta tesis, al proponer una meta-superficie para controlar la reflexión de microondas en función de la geometría de la estructura diseñada.

En la Figura 57 se muestra el resultado más representativo de este trabajo debido a que exhibe que la celda unitaria de una tira modula la señal de microondas en reflexión. Además, se demuestra el efecto del largo finito de la tira de aluminio, factor que no pudo ser previsto con el método integral por considerar que ese parámetro es invariante a lo largo del eje  $\hat{y}$ . Cuando el largo  $Ly$  aumenta los mínimos en la señal detectada corresponden a un nivel de señal más pequeño. Para longitudes pequeñas de  $Ly$ , las rendijas que se forman entre las tiras de aluminio interaccionan en menor medida con el haz incidente, contrario a cuando las tiras son largas y su tamaño es comparable con el diámetro del haz, lo que propicia que la iluminación sea uniforme para todas las tiras del arreglo.

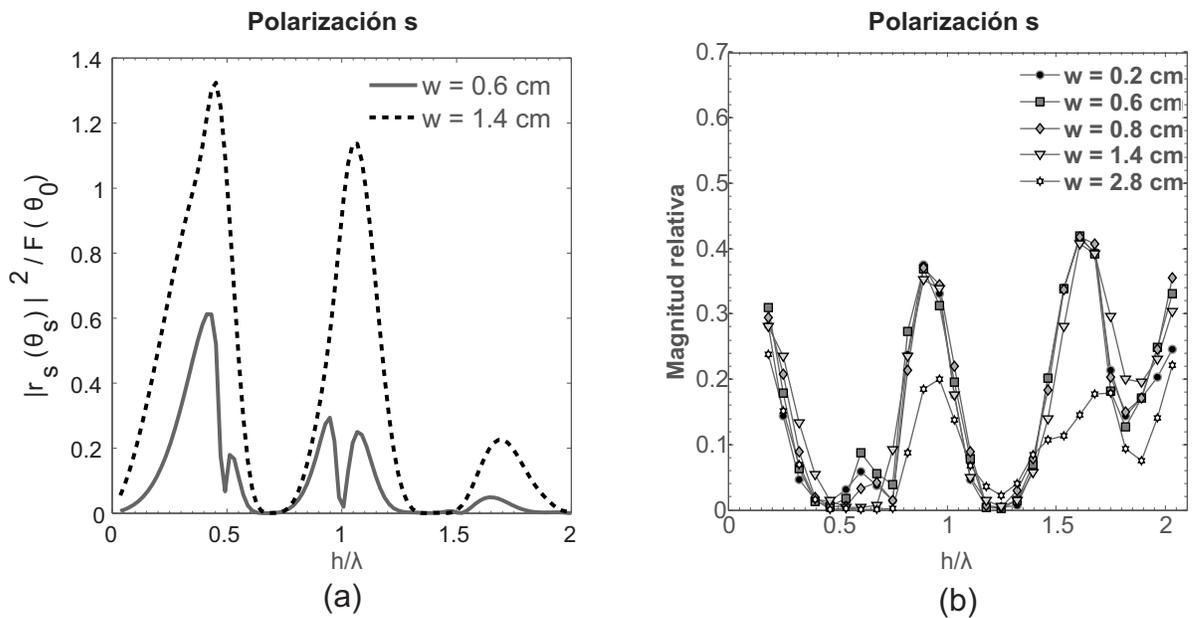


**Figura 57:** Señal reflejada medida en  $-45$  grados en función del espacio ajustable de aire  $h$  para tiras de ancho  $Lx = 1$  cm con diferentes largos  $Ly$ . El haz está linealmente polarizado en dirección perpendicular al plano de incidencia.

En la Figura 58 se presenta la simulación y la medición del espectro angular del haz reflejado. La medición angular del haz reflejado por el plano de aluminio concuerda con lo establecido por la ley de la reflexión, que era lo esperado debido a que dentro del rango de microondas el aluminio puede considerarse como un conductor perfecto que actúa como un espejo para las microondas.



**Figura 58:** Simulación y medición del haz de microondas reflejado por el plano de aluminio a  $-45$  grados.



**Figura 59: Dependencia de la señal reflejada en función de la separación entre tiras  $w$ . (a) Cálculo de la fracción de la potencia incidente que es esparcida a  $-45^\circ$  (a) y resultados experimentales (b), para un ancho  $Lx = 0.5$  cm y un largo  $Ly = 5$  cm.**

Este resultado es el punto de referencia para evidenciar que, en efecto, hay un cambio en la distribución de la señal reflejada a  $-45^\circ$  cuando se modifica la superficie plana de aluminio mediante la introducción de una tira también de aluminio.

Para trabajar con un arreglo de tres tiras se analizó primero la dependencia de la señal reflejada con la separación  $w$  entre ellas. En la Figura 59 se presentan la simulación y la medición de la señal reflejada por una metasuperficie conformada por 3 tiras cuando la separación entre tiras toma los valores de  $w = 0.6$  y  $1.4$  cm. No se encuentran variaciones abruptas en la modulación de la señal reflejada, solamente una disminución de la amplitud en la señal para una separación igual a  $\lambda = 2.8$  cm.

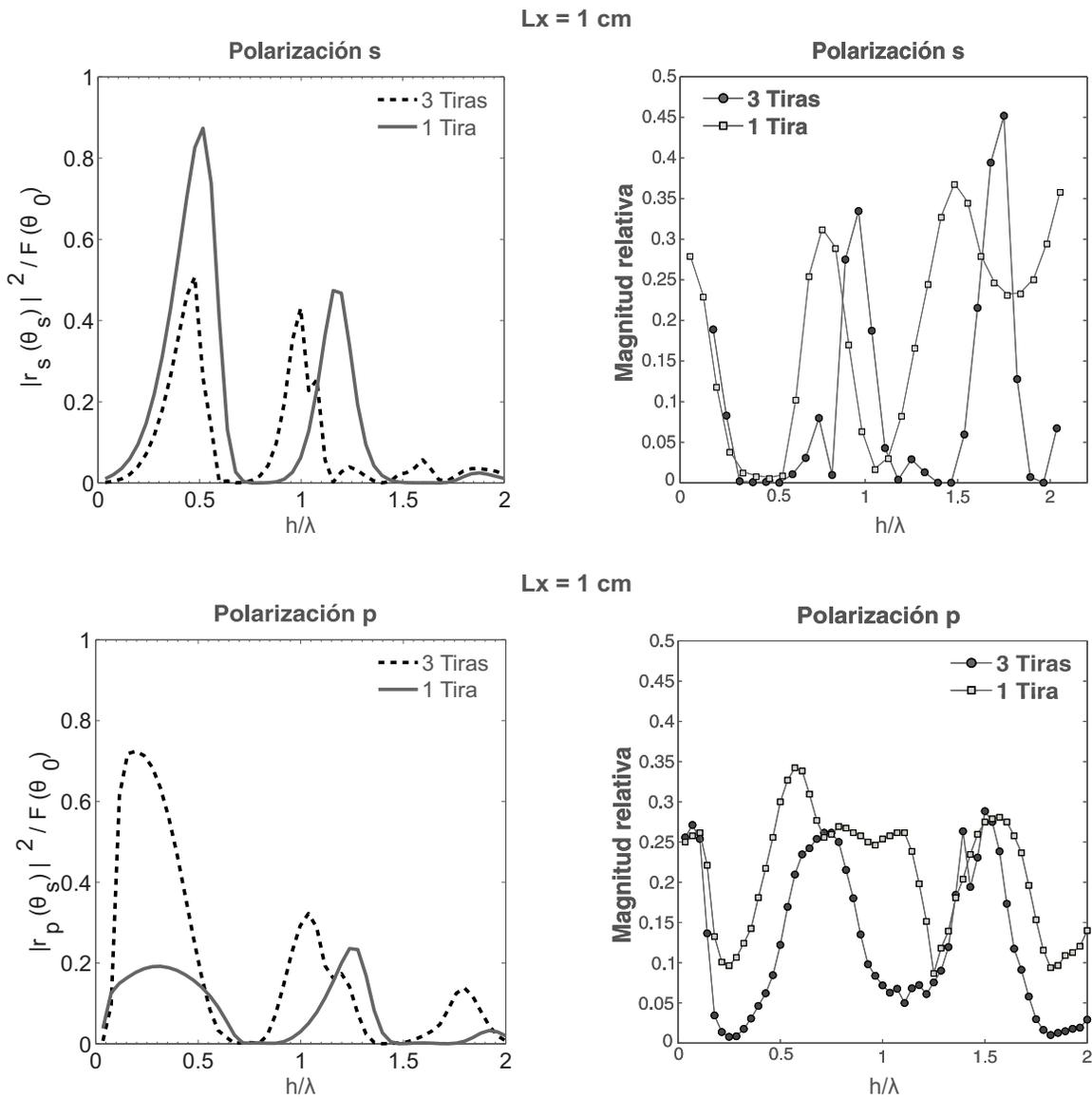
El caso contrario sucedió en las simulaciones, donde la fracción del campo esparcido disminuyó drásticamente. La simulación nos dice que las variaciones en la fracción de potencia esparcida es muy significativa cuando aumentamos la separación  $w$  entre las tiras. En los resultados obtenidos también observamos diferencias en amplitud solo que en este caso no son muy notables cuando aumentamos la separación. Cuando  $w$  es del tamaño de la longitud de onda el haz incidente interactúa en mayor medida con 1 tira debido a la dimensión del diámetro de la cintura del haz, por esta razón la amplitud en la señal medida disminuye.

Para la metasuperficie con 3 tiras, nos interesaba conocer la dependencia de la señal de microondas reflejada conforme incrementaba el ancho de las tiras  $Lx$  para ambas polarizaciones. Se encontró que para Pol-p la modulación vista con Pol-s se pierde. También, conforme aumenta el ancho de la o las tiras la amplitud en Pol-s disminuye y la modulación ya no es evidente. Para Pol-p encontramos que al aumentar  $Lx$  la amplitud de la señal crece y se aprecian dos máximos muy angostos (ver Figura 52).

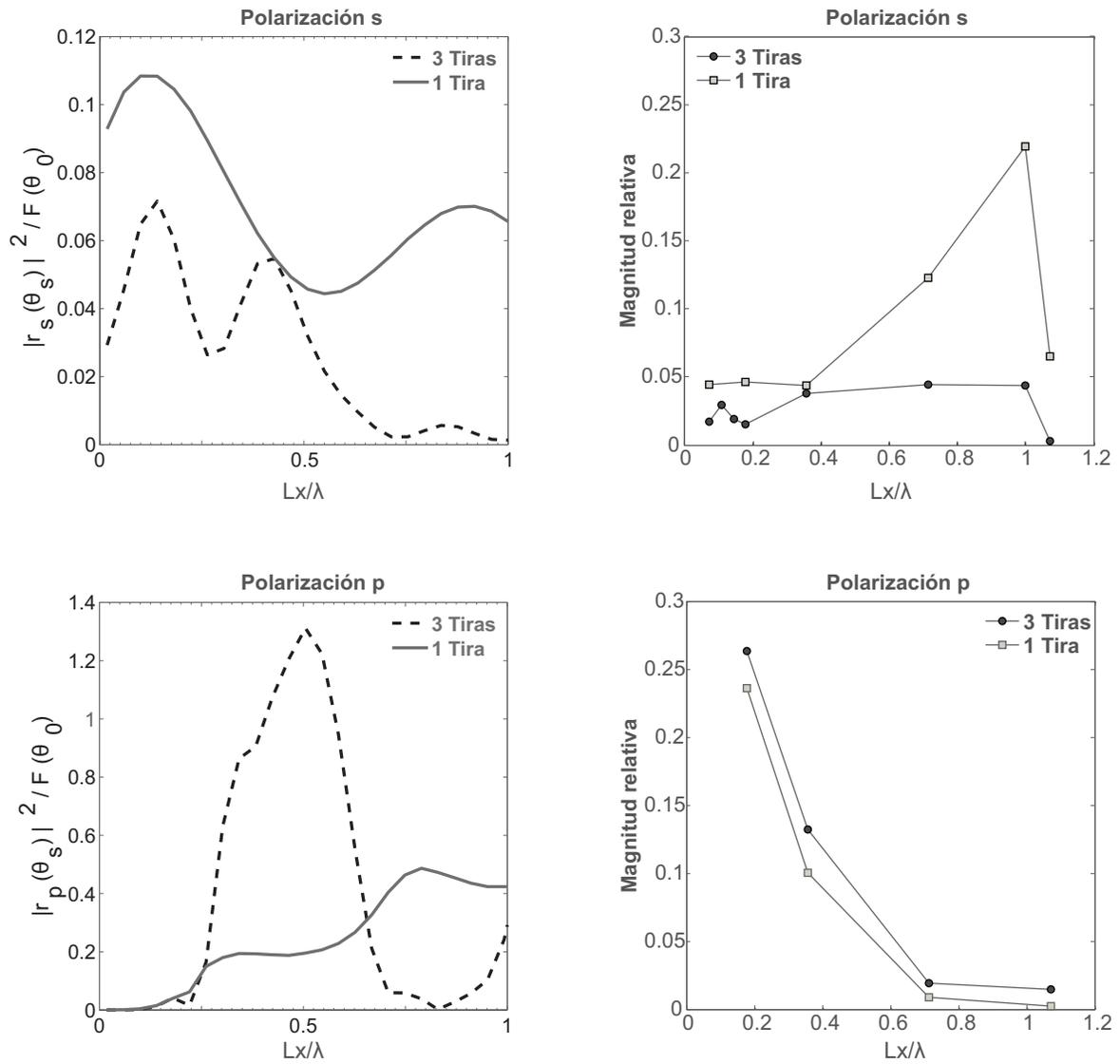
Por otra parte, en las simulaciones se observan diferencias en la amplitud para 1 y 3 tiras que se hacen más notorias conforme aumenta el ancho  $Lx$ . Lo anterior se muestra en la Figura 60.

En la Figura 61 se presenta el cálculo y la simulación de la dependencia en fracciones de  $Lx/\lambda$  del haz de microondas reflejado por la metasuperficie con 1 y 3 tiras en ambas polarizaciones, con un valor fijo para  $h = w = 0.5$  cm. En las mediciones se encuentra que para Pol-p la señal medida tiene un comportamiento tipo exponencial, dejando de tener efectos interesantes para anchos mayores a una longitud de onda. Para Pol-s se encuentra que la señal reflejada es mayor para 3 tiras en comparación con 1 tira. En las simulaciones es más claro el efecto de modulación de la señal, siendo este mayor para Pol-s que para Pol-p con 1 tira. Por el contrario, para 3 tiras en Pol-p se observa la modulación de la amplitud reflejada. En Pol-s para anchos menores a media longitud de onda, es donde los efectos de modulación se encuentran.

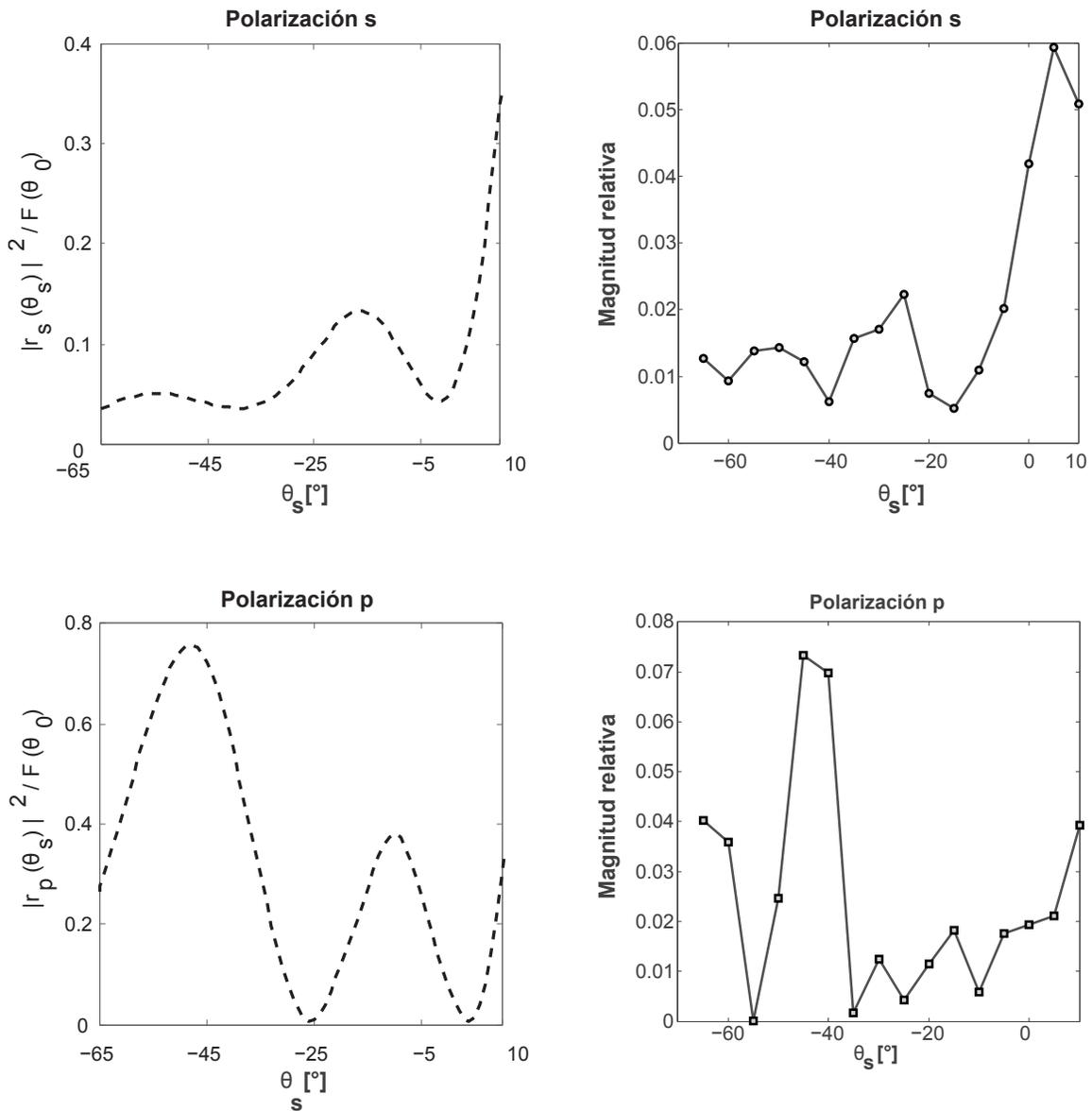
La modulación para valores grandes de  $Lx$  se pierde porque la radiación es mayormente reflejada cuando empezamos ha aumentar el área de la tira que es capaz de reflejar la radiación.



**Figura 60:** Simulaciones y resultados obtenidos de la reflexión de microondas para una tira con  $Lx = 1$  cm,  $Ly = 5$  cm, en Pol-s y Pol-p, para 1 y 3 tiras.



**Figura 61: Simulación y medición de la señal reflejada en función del ancho  $Lx$  para 1 y 3 tiras con  $L_y = 5$  cm,  $h = w = 0.5$  cm, respectivamente.**



**Figura 62: Simulación y medición de la variación angular en Pol-s del la señal de microondas reflejada para 3 tiras de ancho  $L_x = 0.5$  cm,  $L_y = 5$  cm y  $h = w = 0.5$  cm.**

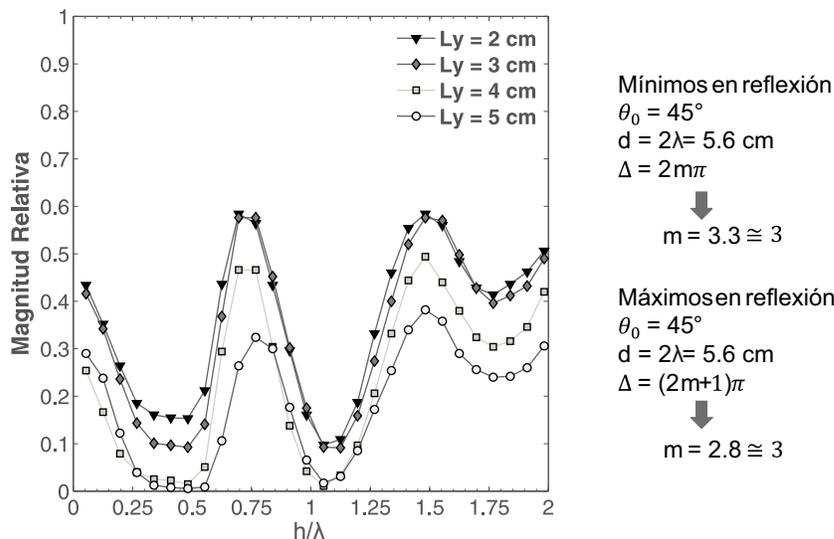
Otro resultado interesante es la concordancia cualitativa en la medición angular del haz reflejado con lo obtenido en las simulaciones. A pesar de que solamente fue posible abarcar un intervalo angular pequeño (de  $-65^\circ$  a  $10^\circ$ ) debido a las dimensiones de las cornetas en el arreglo. Para valores fijos de  $h$  menores o iguales 0.5 cm, la evolución en la señal reflejada concuerda con lo mostrado en las curvas teóricas dentro del mismo intervalo de ángulos. En la Figura 62 se presenta la medición y el cálculo para la distribución angular del haz reflejado por una metasuperficie, con 3 tiras de ancho  $L_x = 1$  cm,  $L_y = 5$

cm y  $w = h = 0.5$  cm.

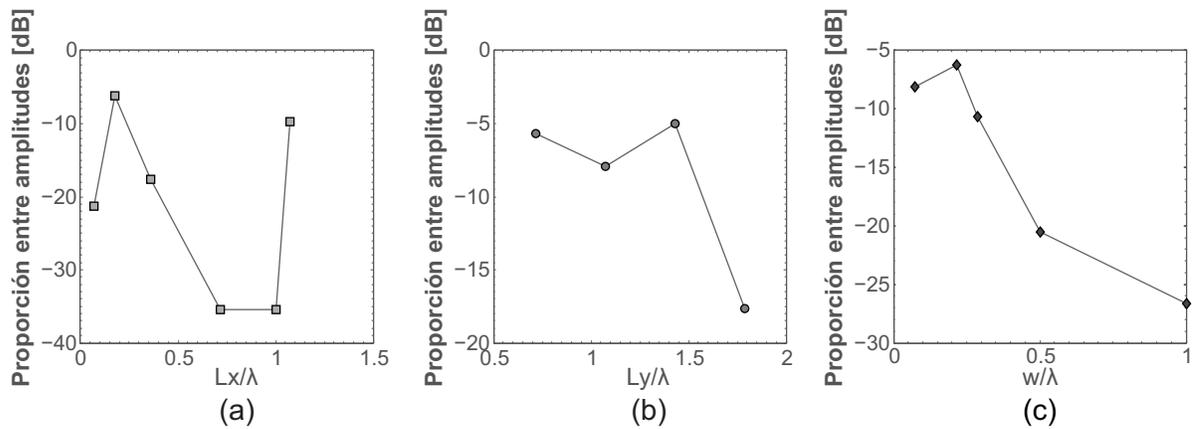
Volviendo al resultado que exhibe la modulación del haz de microondas reflejado 57, esta modulación tiene la forma de la respuesta en reflexión dada por la múltiple interferencia entre dos superficies reflejantes y paralelas, como se explica en el apéndice A.2. En la Figura 63 se muestra el cálculo de los mínimos y máximos en reflexión, realizados con la ecuación [129].

En la Figura 63 obtuvimos una respuesta tipo resonador Fabry-Perot en reflexión. El haz incidente se difracta en los bordes de la tira y es reflejado por el plano de aluminio de nuevo hacia los bordes y la parte posterior de la tira. En el espacio de aire ajustable se forma una onda estacionaria y tendremos interferencia destructiva o constructiva dependiendo del modo de la cavidad que logremos excitar. Estas resonancias dependen tanto de la separación  $h$  y de los cambios de fase en reflexión entre dos rayos sucesivos. Cuando la estructura resuena obtenemos un mínimo en la señal de microondas reflejada y un máximo cuando no hay resonancia y el haz es reflejado fuera de la metasuperficie.

En la Figura 64 se presenta el análisis de la modulación en función de los parámetros  $L_x$ ,  $L_y$  y  $w$ . De los resultados obtenidos de la señal reflejada para 1 y 3 tiras en Pol-s (Sección 5.4) se obtiene la razón entre el 1er. mínimo y el 1er. máximo para tener una medida cuantitativa de la modulación en amplitud.



**Figura 63: (DER.) Cálculo de las posiciones de los mínimos y máximos en reflexión. (IZQ.) Comparación de los resultados con las mediciones.**



**Figura 64: Nivel de atenuación obtenido de la razón entre el primer mínimo y el primer máximo de las gráficas. El análisis se hizo en función: del ancho  $Lx$  con  $Ly = 5 \text{ cm}$  (IZQ.), del largo  $Ly$  para  $Lx = 1 \text{ cm}$  (CENTRO) y, de la separación  $w$  con  $Lx = 0.5 \text{ cm}$  y  $Ly = 5 \text{ cm}$  (DER.).**

La proporción entre amplitudes en función del parámetro  $Lx$  muestra una tendencia ondulatoria que pareciera repetirse cuando  $Lx$  empieza a ser mayor a  $\lambda$ . En función del parámetro  $Ly$  para valores mayores a  $\lambda$  la tendencia es lineal, mientras que en función del parámetro  $w$  se observa un decaimiento en la señal desde el principio en la señal. Estos cálculos resaltan lo mencionado anteriormente, que los parámetros  $Ly$  y  $w$  no influyen en la modulación de la señal.

Es posible ver que existen diferencias notables entre los cálculos numéricos realizados y los resultados experimentales obtenidos. Existe un corrimiento de los mínimos en los cálculos respecto a lo medido. Una posible causa de esto puede atribuirse a las limitaciones para reproducir fielmente las mediciones con el método integral, debido al incremento en puntos de cálculo conforme se requieren resoluciones más altas para superficies cada vez más delgadas, resulta difícil (casi imposible) para equipos computacionales convencionales resolver dichas operaciones. Tal es el caso de la reducción del espesor  $Lz$  debido a que, al intentar acercarse a los valores experimentales, los recursos del sistema computacional terminaban por agotarse (deficiencia de memoria). Se optó por utilizar el valor más cercano posible al valor experimental del espesor, con una diferencia de  $0.0016\lambda$  del valor original ( $Lz = 0.005 \text{ cm}$ ). Se realizó el análisis de la variación de resonancia ante cambios en el espesor  $Lz$  y se encontró que ante cambios pequeños la reproducción de los efectos de resonancia se mantiene, sin embargo, conforme la diferencia se incrementa, es cada vez más difícil discernir dichos efectos. Parte de las razones que nos llevan

a concluir que la discrepancia entre los cálculos y los resultados está dada por esta diferencia en los parámetros utilizados en la simulación, es que esta diferencia aparenta un comportamiento sistemático, es decir, en la mayor parte de los casos podemos observar gran similitud entre los efectos de resonancia calculados y medidos, esto en términos de la periodicidad y relación entre amplitudes de máximos y mínimos, pero inherente a esto existe un corrimiento en términos de la distancia  $h/\lambda$ .

Otro efecto notable se hace presente cuando la separación  $h$  es tal que físicamente las tiras dejan de interactuar con la señal incidente, la reflexión medida es en promedio constante. En los cálculos el comportamiento de la señal para  $h > 1.5\lambda$  decae rápidamente. Respecto a los resultados experimentales, la respuesta indica que, aunque en menor medida, la metasuperficie continua afectando al haz reflejado porque el nivel de señal a  $-45^\circ$  es mayor cuando se tienen las tiras que cuando se tiene solo el plano de aluminio. Debido a las dimensiones de la corneta y a la divergencia del haz al propagarse, se tiene la capacidad de detectar parte de la señal que puede estar siendo reflejada a un ángulo diferente a  $-45^\circ$ . Mientras que en las simulaciones, si parte de la radiación reflejada a un ángulo diferente a  $-45^\circ$  es distribuida en diferentes ángulos no sería posible saberlo a menos que se indique la contribución de un intervalo de ángulos, es decir, en nuestros cálculos vemos exclusivamente lo que se refleja a un ángulo en específico.

## 7. Conclusiones

---

En este capítulo se presenta un resumen de las aportaciones más importantes del trabajo desarrollado en esta tesis, y las conclusiones más sobresalientes.

Comprobamos la funcionalidad del equipo de microondas realizando la calibración de un microscopio de barrido de microondas de campo cercano mediante mapeos bidimensionales del campo evanescente estacionario en la superficie de un prisma de cera de parafina. Con el campo evanescente estacionario obtuvimos información acerca de la resolución del microscopio, con lo cual fue posible medir indirectamente la longitud de onda de la radiación de microondas utilizada.

Diseñamos una metasuperficie que consiste en un plano conductor continuo separado por un espacio ajustable de aire de un arreglo periódico de tiras también conductoras. Se trabajó primero con el plano de aluminio y corroboramos que se cumple la ley de reflexión. Después colocamos una tira sobre el plano de aluminio para medir su efecto sobre el haz reflejado y posteriormente empleamos 3 tiras.

Presentamos las mediciones con la metasuperficie, con 1 y 3 tiras, iniciando en dimensiones de sublongitud de onda ( $< \lambda/2 = 1.4 \text{ cm}$ ) y terminando con longitudes de  $2\lambda$ . Resultando ser el espacio ajustable de aire y el ancho de las tiras de la metasuperficie los parámetros más importantes para la manipulación de la señal reflejada.

Se realizaron simulaciones numéricas con el método integral del coeficiente diferencial de reflexión para un ángulo de  $45^\circ$  y de la potencia esparcida en todo el plano superior de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ , en campo lejano, en función de los parámetros geométricos de la metasuperficie. También mostramos la evolución en un intervalo angular de la fracción de potencia incidente que es esparcida cuando  $h$ ,  $w$  y  $Lx$  son del orden de sublongitud de onda, donde pudimos observar el efecto que induce la modificación de la superficie en el campo reflejado.

Para tener una medida cuantitativa de la modulación observada, obtuvimos la razón entre el primer mínimo y el primer máximo de la señal medida en reflexión.

Encontramos que con una tira se obtiene una mejor modulación de la señal reflejada. Cuando las tiras son cortas las rendijas que se forman entre las tiras de aluminio interactúan en menor medida con el haz incidente, contrario a cuando las tiras son largas y su tamaño es comparable con el diámetro del haz. La modulación para valores grandes

de  $Lx$  se pierde porque la radiación es mayormente reflejada cuando empezamos ha aumentar el área de la tira que es capaz de reflejar la radiación.

En los resultados obtenidos también observamos diferencias en amplitud solo que en este caso no son muy notables cuando aumentamos la separación  $w$ . Cuando  $w$  es del tamaño de la longitud de onda el haz incidente interactúa en mayor medida con 1 tira debido a la dimensión del diámetro de la cintura del haz, mientras que para dimensiones de sublongitud de onda la respuesta de la metasuperficie no muestra cambios.

Tanto en la simulación como en las mediciones encontramos una modulación en amplitud de la señal de microondas reflejada en función del espacio de aire ajustable. La modulación obtenida tiene la forma de la respuesta típica que se obtiene con un resonador Fabry-Perot. El haz incidente se difracta en los bordes de la tira y es reflejado por el plano de aluminio de nuevo hacia los bordes y la parte posterior de la tira. En el espacio de aire ajustable se forma una onda estacionaria y tendremos interferencia destructiva o constructiva dependiendo de la o las resonancias de la cavidad. Estas resonancias dependen tanto del la separación  $h$  y de los cambios de fase en reflexión entre dos rayos sucesivos. Cuando la estructura resuena obtenemos un mínimo en la señal de microondas reflejada y un máximo cuando no hay resonancia, debido a que el haz es reflejado fuera de la metasuperficie. Para los parámetros  $w$  y  $Ly$  la variación de la señal decae de forma exponencial, mientras que para el ancho  $Lx$  parece ser periódica.

Al comparar los resultados con las simulaciones se observó que los máximos y los mínimos no coinciden con precisión, es posible observar un ligero desfase en la posición de éstos, sin embargo, podemos notar que la respuesta ante las variaciones implementadas se mantiene.

La diferencia entre la señal medida y calculada para espacios de aire mayores a  $1.5\lambda$  se debe a que con la corneta del receptor se abarca un intervalo de ángulos debido a sus dimensiones, mientras que en la simulación solamente vemos lo que estrictamente se refleja en un ángulo específico.

## 7.1. Trabajo a futuro

De los resultados obtenidos podemos proponer como trabajo a futuro lo siguiente:

1. Medición de la fase: realizar mediciones de fase con el fin de complementar la in-

formación de la modulación de amplitud. Cuando tenemos variaciones de amplitud como la obtenida en este trabajo, entre valores mínimos y máximos se podrían presentar cambios de fase en la radiación reflejada.

2. Medición con polarización cruzada: realizar las mediciones analizando ambas polarizaciones. Para la corneta del transmisor en  $0^\circ$  y  $90^\circ$  dejando fija la corneta del receptor en  $0^\circ$ . Con esta medición es posible observar si existe una relación entre las resonancias encontradas y cambios de polarización en la señal reflejada.
3. Mediciones en campo cercano: en este trabajo iniciamos probando la funcionalidad del sistema de microondas realizando la calibración del MBMCC (microscopio de barrido de microondas de campo cercano). Con este microscopio pueden realizarse mapeos bidimensionales que entregarían información de la interacción del campo incidente con la metasuperficie; ver, por ejemplo, si hay campos evanescentes y/o de imitación de plasmones de superficie. En resumen se podrían aclarar los efectos de campo cercano que colaboran con la modulación vista en amplitud. El programa utilizado en este trabajo donde se implementa el método integral permite también cálculos de las interacciones de campo cercano, lo que hace posible comparar la teoría de este método riguroso con las mediciones del MBMCC.
4. Nuevas estructuras: tanto en óptica como en el rango de microondas se están empleando nanoantenas y patrones geométricos cada vez más complejos. Lo ideal es que la estructura propuesta en esta tesis tenga una evolución gradual hasta volverse rebuscada y eficiente. El primer paso que se propone es adicionar un dieléctrico diferente con un índice de refracción diferente al aire para después volverlo compacto. El colocar otro dieléctrico podría mejorar la modulación e incluso generar resonancias para valores muy específicos de la geometría. Un segundo paso podría ser el colocar las tiras de una manera desordenada, como inclinadas, por ejemplo.

## Lista de referencias bibliográficas

- Abramowitz, M. y Stegun, I. (1970). Tables of mathematical functions. *National Bureau of Standards, Washington*.
- Akhmanov, S. y Nikitin, S. Y. (1997). *Physical Optics*. Oxford University Press, New York.
- Albiol, F., Navas, S., y Andres, M. V. (1993). Microwave experiments on electromagnetic evanescent waves and tunneling effect. *American journal of physics*, **61**: 165–165.
- Ash, E. y Nicholls, G. (1972). Super-resolution aperture scanning microscope. *Nature*, **237**(5357): 510.
- Balanis, C. A. (2012). *Advanced engineering electromagnetics*, Vol. 111. Wiley Online Library.
- Bava, J. A. y Sanz, A. J. (1999). *Microondas y recepción satelital*. Centro de Estudiantes de Ingeniería de La Plata, Argentina.
- Bharadwaj, P., Deutsch, B., y Novotny, L. (2009). Optical antennas. *Advances in Optics and Photonics*, **1**(3): 438–483.
- Born, M. y Wolf, E. (1980). *Principles of Optics, 6a.ed.*. Pergamon Press, London.
- Cai, W. y Shalaev, V. M. (2010). *Optical metamaterials*. Springer.
- Cortés, R., Coello, V., Arriaga, R., y Elizondo, N. (2014). Collection mode near-field scanning microwave microscopy. *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, **125**(10): 2400–2404.
- Cragg, G. E. y So, P. T. (2000). Lateral resolution enhancement with standing evanescent waves. *Optics letters*, **25**(1): 46–48.
- De la Cruz, S. (2013). *Diseño de estructuras plasmónicas*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada. Ensenada, Baja California, México.
- Evluyukhin, A., Bozhevolnyi, S., Stepanov, A., Kiyani, R., Reinhardt, C., Passinger, S., y Chichkov, B. (2007). Focusing and directing of surface plasmon polaritons by curved chains of nanoparticles. *Optics express*, **15**(25): 16667–16680.
- Fabry, C. y Perot, A. (1899). Theorie et applications d'une nouvelle methode de spectroscopie interferentielle. *Ann. Chim. Phys*, **16**(7): 115.
- Fowles, G. R. (1989). *Introduction to modern optics*. Dover Publications, Inc., New York.
- Garcia-Molina, R., Maradudin, A., y Leskova, T. (1990). The impedance boundary condition for a curved surface. *Physics reports*, **194**(5): 351–359.
- Hecht, E. (2000). *Óptica*. Adisson Wesley Iberoamericana, Madrid.
- Hibbins, A. P., Evans, B. R., y Sambles, J. R. (2005). Experimental verification of designer surface plasmons. *Science*, **308**(5722): 670–672.

- Hou, B., Mei, J., Ke, M., Wen, W., Liu, Z., Shi, J., y Sheng, P. (2007). Tuning fabry-perot resonances via diffraction evanescent waves. *Physical Review B*, **76**(5): 054303.
- Huang, C.-P. y Chan, C.-T. (2014). Deep subwavelength fabry-perot resonances. *EPJ Applied Metamaterials*.
- Jackson, J. D. (1962). *Classical electrodynamics*, Vol. 3. Wiley New York etc.
- Kalhor, H. *et al.* (1988). Electromagnetic scattering by a dielectric slab loaded with a periodic array of strips over a ground plane. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, **36**(1): 147–151.
- Knotts, M., Michel, T., y O'Donnell, K. (1993). Comparisons of theory and experiment in light scattering from a randomly rough surface. *JOSA A*, **10**(5): 928–941.
- Kushiyama, Y., Arima, T., y Uno, T. (2012). Experimental verification of spoof surface plasmons in wire metamaterials. *Optics express*, **20**(16): 18238–18247.
- Lipson, A. (2011). *Optical Physics*. Cambridge University Press, New York.
- Maier, S. A. (2007). *Plasmonics: fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media.
- Maradudin, A., Michel, T., McGurn, A., y Méndez, E. (1990). Enhanced backscattering of light from a random grating. *Annals of Physics*, **203**(2): 255–307.
- Martínez, C., Coello, V., Cortes, R., y Villagómez, R. (2005). Evanescent microwave microscopy. *Journal of the Korean Physical Society*, **47**: S152–S156.
- Meixner, A. J., Bopp, M. A., y Tarrach, G. (1994). Direct measurement of standing evanescent waves with a photon-scanning tunneling microscope. *Applied optics*, **33**(34): 7995–8000.
- Meixner, A. J., Zeisel, D., Bopp, A. M., y Tarrach, G. (1995). Super-resolution imaging and detection of fluorescence from single molecules by scanning near-field optical microscopy. *Optical Engineering*, **34**(8): 2324–2332.
- Méndez, E., Navarrete, A., y Luna, R. (1995). Statistics of the polarization properties of one-dimensional randomly rough surfaces. *JOSA A*, **12**(11): 2507–2516.
- Mendoza-Suárez, A. y Méndez, E. R. (1997). Light scattering by a reentrant fractal surface. *Applied optics*, **36**(15): 3521–3531.
- Mendoza Suárez, A. (1996). *Métodos rigurosos para el esparcimiento de la luz por superficies y medios estratificados con perfiles arbitrarios*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada. Ensenada, Baja California, México.
- Negrete-Regagnon, P. y Méndez, E. (2002). Light scattering by arbitrary-shaped one-dimensional particles. *Measurement Science and Technology*, **13**(3): 241.

- Negrete-Regagnon, P., Hernandez-Walls, R., y Ruiz-Cortes, V. (2000). Light scattering resonances in arbitrarily shaped one-dimensional reentrant surfaces. En: *International Symposium on Optical Science and Technology*. International Society for Optics and Photonics, pp. 33–45.
- Novotny, L. (2007). Effective wavelength scaling for optical antennas. *Physical Review Letters*, **98**(26): 266802.
- Novotny, L. y Hecht, B. (2006). *Principles of Nano-Optics*. Cambridge University Press, New York.
- Ohki, M., Sato, K., y Kozaki, S. (2011). The electromagnetic wave diffraction from a pyramidal horn antenna in the microwave band. En: *SPIE OPTO*. International Society for Optics and Photonics, pp. 79570Z–79570Z.
- Orfanidis, S. J. (2002). *Electromagnetic waves and antennas*. Rutgers University New Brunswick, NJ.
- Pendry, J., Martin-Moreno, L., y Garcia-Vidal, F. (2004). Mimicking surface plasmons with structured surfaces. *Science*, **305**(5685): 847–848.
- Pohl, D., Fischer, U. C., y Durig, U. (1988). Scanning near-field optical microscopy (snom\*): basic principles and some recent developments. En: *1988 Los Angeles Symposium—OE/LASE'88*. International Society for Optics and Photonics, pp. 84–90.
- Pohl, D. W., Denk, W., y Lanz, M. (1984). Optical stethoscopy: Image recording with resolution  $\lambda/20$ . *Applied physics letters*, **44**(7): 651–653.
- Pors, A. y Bozhevolnyi, S. I. (2013). Plasmonic metasurfaces for efficient phase control in reflection. *Optics express*, **21**(22): 27438–27451.
- Pors, A., Albrektsen, O., Radko, I. P., y Bozhevolnyi, S. I. (2013). Gap plasmon-based metasurfaces for total control of reflected light. *Scientific reports*, **3**.
- Porto, J., Garcia-Vidal, F., y Pendry, J. (1999). Transmission resonances on metallic gratings with very narrow slits. *Physical review letters*, **83**(14): 2845.
- Pérez Aguilar, H. I. (2009). *Propagación y esparcimiento de luz en sistemas con geometrías confinantes*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada. Ensenada, Baja California, México.
- Raether, H. (1988). *Surface plasmons on smooth surfaces*. Springer.
- Rodríguez, J. y Virgós, J. (1999). *Fundamentos de óptica ondulatoria*. Universidad de Oviedo, España.
- Rusina, A., Durach, M., y Stockman, M. I. (2010). Theory of spoof plasmons in real metals. En: *SPIE NanoScience+ Engineering*. International Society for Optics and Photonics, pp. 77572R–77572R.
- Saleh, B. E. A. y Teich, M. C. (1991). *Fundamentals of photonics*. Waley-Interscience publication, U.S.A.

- Saleh, B. E. A. y Teich, M. C. (2007). *Fundamentals of photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics.
- Sambles, R., Hibbins, A., y Lockyear, M. (2009). Manipulating microwaves with 'spoof'surface plasmons. En: *SPIE Newsroom*. International Society for Optics and Photonics.
- Shelby, R. A., Smith, D. R., y Schultz, S. (2001). Experimental verification of a negative index of refraction. *science*, **292**(5514): 77–79.
- Shen, X., Cui, T. J., Martin-Cano, D., y Garcia-Vidal, F. J. (2013). Conformal surface plasmons propagating on ultrathin and flexible films. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **110**(1): 40–45.
- Suckling, J. R., Hibbins, A. P., Lockyear, M. J., Preist, T., Sambles, J. R., y Lawrence, C. R. (2004). Finite conductance governs the resonance transmission of thin metal slits at microwave frequencies. *Physical review letters*, **92**(14): 147401.
- Symons III, W. C., Whites, K. W., y Lodder, R. A. (2003). Theoretical and experimental characterization of a near-field scanning microwave microscope (nsmm). *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, **51**(1): 91–99.
- Tao, H., Jia, W., Tie-Jun, X., y Li-Qun, S. (2004). Direct measurement of evanescent wave interference with a scanning near-field optical microscope. *Chinese Physics Letters*, **21**(5): 907.
- Van Hulst, N., Segerink, F., y Bölger, B. (1992). High resolution imaging of dielectric surfaces with an evanescent field optical microscope. *Optics communications*, **87**(5): 212–218.
- Vlahacos, C., Black, R., Anlage, S., Amar, A., y Wellstood, F. (1996). Near-field scanning microwave microscope with 100  $\mu\text{m}$  resolution. *Applied physics letters*, **69**(21): 3272–3274.
- Woods, F. A. (1902). Origin and migration of the germ-cells in squalus acanthias. *Science*, pp. 582–583.
- Yu, N., Genevet, P., Kats, M. A., Aieta, F., Tetienne, J.-P., Capasso, F., y Gaburro, Z. (2011). Light propagation with phase discontinuities: generalized laws of reflection and refraction. *Science*, **334**(6054): 333–337.

## A. Apéndice

### A.1. Soluciones de la ecuación de onda

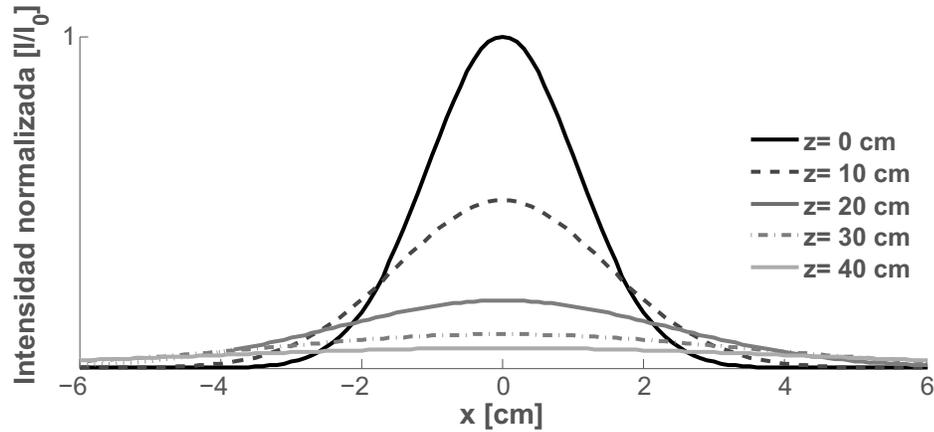


Figura A.1: Vista transversal del haz de microondas en propagación libre a lo largo del eje  $z$ . Al aumentar la posición en el eje  $z$  el haz Gaussiano tiende a convertirse en un frente de onda plano.

Proponemos una solución a la ecuación (15) como una función de onda compleja que describa a una onda monocromática de frecuencia  $\nu$ , de la forma

$$U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r}) e^{i2\pi\nu t}. \quad (88)$$

Ya que, al tomar la parte real de (88) tenemos la función de onda.

$$u(\mathbf{r}, t) = \Re\{U(\mathbf{r}, t)\}, \quad (89)$$

donde  $U(\mathbf{r}) = a(\mathbf{r}) e^{i\phi(\mathbf{r})}$ ;  $a(\mathbf{r})$  la amplitud; y  $\phi(\mathbf{r})$  la fase.  $U(\mathbf{r})$  se conoce como la *amplitud compleja*. Sustituyendo la función de onda compleja (88) en la ecuación de onda (15), se obtiene la siguiente ecuación diferencial

$$(\nabla^2 + k^2) U(\mathbf{r}) = 0, \quad (90)$$

llamada la *ecuación de Helmholtz*. Donde nos referimos a  $k = 2\pi\nu/c = \omega/c$  como el número de onda.

La intensidad óptica, energía por unidad de área ( $watts/cm^2$ ), está determinada por el

promedio sobre un intervalo de tiempo del cuadrado de la función de onda, es decir

$$I(\mathbf{r}, t) = 2 \langle u^2(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (91)$$

Considerando el intervalo temporal mucho mayor que  $1/\nu$ . Entonces, la intensidad de una onda monocromática es

$$I(\mathbf{r}, t) = |U(\mathbf{r})|^2. \quad (92)$$

Ya que la intensidad de una onda monocromática no varía con el tiempo.

Una de las soluciones más simples para la ecuación (90) es una onda plana (103) y un haz gaussiano (111)

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \mp \omega t)}, \quad (93)$$

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)}\right). \quad (94)$$

### A.1.1. Ondas planas

Una onda plana es una onda tridimensional compuesta por planos de fase constante moviéndose perpendicular a una dirección de propagación específica.

Designamos una dirección de propagación, dada por el vector  $\mathbf{k}$ , para un plano que pasa a través de algún punto  $(x_0, y_0, z_0)$ . Para una posición arbitraria sobre el plano en cuestión, escribimos el vector de posición en coordenadas cartesianas

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}. \quad (95)$$

Así como el vector que localiza al punto por el que pasa el plano

$$\mathbf{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{i}} + y_0\hat{\mathbf{j}} + z_0\hat{\mathbf{k}}, \quad (96)$$

y el vector de propagación

$$\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{i}} + k_y\hat{\mathbf{j}} + k_z\hat{\mathbf{k}}. \quad (97)$$

Para deducir la expresión de un plano perpendicular a  $\mathbf{k}$  se debe cumplir que

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (98)$$

con

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = (x - x_0)\hat{\mathbf{i}} + (y - y_0)\hat{\mathbf{j}} + (z - z_0)\hat{\mathbf{k}}. \quad (99)$$

Es decir, que al barrer un plano con el vector  $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$  el producto interno debe ser constante, ya que el plano debe ser perpendicular a  $\mathbf{k}$ . Desarrollando la ecuación (102), tenemos que

$$k_x(x - x_0) + k_y(y - y_0) + k_z(z - z_0) = 0, \quad (100)$$

$$k_x x + k_y y + k_z z = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 = a. \quad (101)$$

Con  $a = \text{constante}$ . Entonces

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = a. \quad (102)$$

Por lo tanto, el plano es el lugar de todos los puntos cuyos vectores de posición tienen la misma proyección en la dirección de  $\mathbf{k}$ .

Para construir un conjunto de planos que varíen de manera armónica, podemos escribir

$$\psi(\mathbf{r}) = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (103)$$

donde  $A$  es la amplitud del plano y vemos que  $\psi(\mathbf{r})$  se mantiene constante para cada plano definido por la ecuación (102). Decimos que son funciones armónicas porque deben repetirse en el espacio después de un desplazamiento  $\lambda$  en la dirección de  $\mathbf{k}$ , las cuales, tienen una expresión de la forma

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi\left(\mathbf{r} + \frac{\lambda\mathbf{k}}{k}\right) = A e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} + \frac{\lambda\mathbf{k}}{k})} = A e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} e^{i\lambda k}, \quad (104)$$

donde  $k$  es la magnitud de  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{k}/k$  el vector unitario paralelo a él. Para que la ecuación (104) sea cierta, se debe cumplir que  $\lambda k = 2\pi$  y  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $k$  es la magnitud del vector de propagación o número de propagación  $k$ .

Acabamos de ver que para los puntos donde  $\mathbf{r}$  es constante la fase también lo sería y por tanto los planos parecen estar inmóviles.

Por último, incluimos la dependencia temporal como  $e^{\mp i\omega t}$  en la ecuación (103), por lo tanto

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\mp\omega t)}, \quad (105)$$

donde  $A$ ,  $\omega$  y  $k$  son constantes. Vemos que, en cualquier instante los planos contienen a todos los puntos que tienen la misma fase, estas superficies se conocen también como *frentes de onda*. Por lo general  $A$  es función de la posición, y aquí se considera que tiene un valor fijo en todos los puntos del frente de onda.

La velocidad de fase de una onda plana dadas por la ecuación (105) es equivalente, en este caso, a la velocidad de propagación del frente de onda. Al cabo de un tiempo  $dt$ , si el frente de onda recorre una distancia  $dr_k$  a lo largo de  $k$ , de las ecuaciones (103) y (105), vemos que

$$\psi(\mathbf{r}, t) = Ae^{i(kr_k + kdr_k \mp \omega t \mp \omega dt)} = Ae^{i(kr_k \mp \omega t)}. \quad (106)$$

Entonces, la magnitud de la velocidad de la onda es

$$\frac{dr_k}{dt} = \pm \frac{\omega}{k} = \pm v. \quad (107)$$

### A.1.2. El haz gaussiano

De la sección (2.2] vimos que la función descrita por (88) satisface la ecuación de Helmholtz (90). Podemos considerar una onda paraxial (onda plana modulada por una envolvente  $A(\mathbf{r})$  que varía lentamente como función de la posición) que sea también solución de (90) de la forma

$$U(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) e^{ikz}. \quad (108)$$

Vemos que la  $A(\mathbf{r})$  satisface la ecuación paraxial de Helmholtz (109).

$$\nabla_T^2 A - i2k \frac{\partial A}{\partial z} = 0, \quad (109)$$

Donde  $\nabla_T^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  es la parte transversal del operador laplaciano. Una solución sencilla para esta ecuación es

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{z} \exp\left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2z}\right). \quad (110)$$

Esta ecuación describe ondas parabólicas que convergen sobre el eje  $z$ , con  $A_1$  constante. Otra solución a la ecuación paraxial de Helmholtz es un haz gaussiano, el cual, puede ser obtenido de la ecuación (110) usando la transformación  $q(z) = z - \xi$ , obteniendo que

$$A(\mathbf{r}) = \frac{A_1}{q(z)} \exp\left(-ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)}\right). \quad (111)$$

Entonces (111) también es solución de (109). Cuando  $\xi$  es puramente imaginario, de la forma  $\xi = -iz_0$  con  $z_0$  un número real, la ecuación (111) da lugar a la expresión para la envolvente compleja del haz gaussiano, donde  $q(z) = z + iz_0$ . El parámetro  $z_0$  es conocido como el rango de Rayleigh.

El separar la amplitud y la fase de la envolvente compleja, basta con escribir el factor  $1/q(z)$  en términos de su parte real e imaginaria, permite obtener los siguientes parámetros del haz gaussiano

$$W(z) = W_0 \left[ 1 + \left( \frac{z}{z_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (112)$$

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_0}{z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (113)$$

$$\zeta(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad (114)$$

$$W_0 = \left( \frac{\lambda z_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (115)$$

Para el plano  $z = 0$  tenemos un haz cuya cintura esta dada por la ecuación (115). En cualquier otro plano  $z \neq 0$  la divergencia del haz produce que la cintura se ensanche (112), mientras que la curvatura (113) genera un factor de fase (114) debido a que el frente de onda no es plano.

Por lo tanto se obtienen que la amplitud compleja, para el haz gaussiano, dada por la

ecuación (108) es

$$U(\mathbf{r}) = A_0 \frac{W_0}{W_z} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)}\right] \exp\left[-ikz - ik\frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + i\zeta(z)\right] \quad (116)$$

y la intensidad óptica, recordando la ecuación (92), para el haz gaussiano como función de las distancias radiales  $z$  y  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$I(\rho, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)}\right]^2 \exp\left[-\frac{2\rho^2}{W^2(z)}\right], \quad (117)$$

donde  $I_0 = |A_0|^2$ . Para cada valor de  $z$  la intensidad es representada con una función gaussiana, de ahí el nombre de haz gaussiano. En el eje del haz ( $\rho = 0$ ) la intensidad esta dada por

$$I(0, z) = I_0 \left[\frac{W_0}{W(z)}\right]^2 = \frac{I_0}{1 + (z/z_0)^2}; \quad (118)$$

la cual tiene su máximo valor en  $z = 0$  y disminuye conforme incrementa  $z$  llegando a su valor pico medio en  $z = \pm z_0$ . La intensidad disminuye, siguiendo una tendencia dada por el inverso cuadrado de la distancia, como ondas esféricas y parabólicas. En la Figura (A.1), se aprecia una vista transversal, en el eje  $x$ , de la distribución de intensidad para diferentes posiciones a lo largo del eje  $z$ .

## A.2. Interferencia de haces múltiples

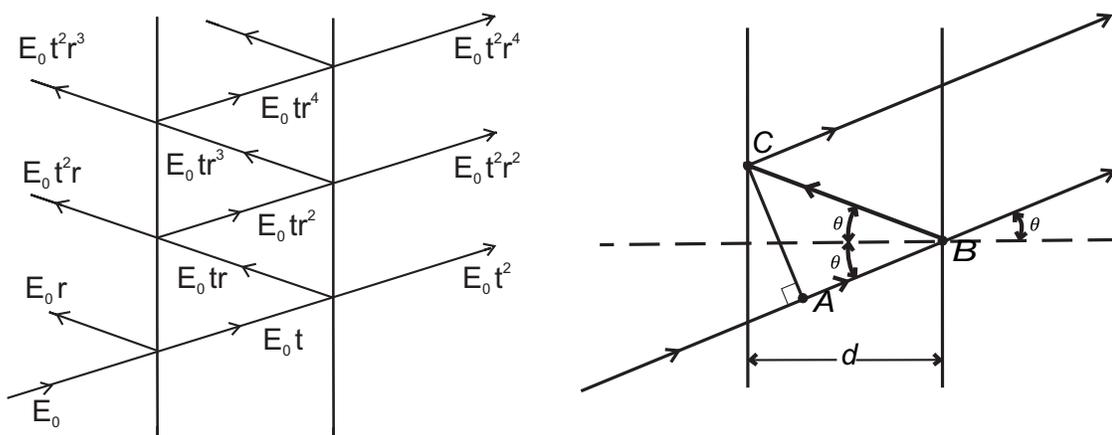


Figura A.2: (IZQ.) Reflexión de haces múltiples: los rayos indican la trayectoria seguida por las fracciones de amplitudes transmitidas y reflejadas de la amplitud del rayo primario  $E_0$ . Se considera que no hay absorción en el medio entre las dos superficies reflejantes. (DER.) Diagrama que muestra la diferencia de camino geométrico entre dos rayos sucesivos entre las superficies reflejantes ( $d$  es la separación entre las superficies reflejantes).

La división de amplitud de haces mutuamente coherentes es el caso más general de interferencia de múltiples haces. La división de amplitud se logra debido a la múltiple reflexión del haz incidente entre dos placas paralelas idénticas, consideradas infinitamente delgadas, cuya superficie es parcialmente reflejante.

En la Figura A.2 se observa como la amplitud del rayo primario  $\mathbf{E}_0$  es parcialmente reflejado en la primera superficie, mientras la parte transmitida es reflejada hacia atrás y hacia adelante entre las dos superficies reflejantes.

Se considera  $r$  y  $t$  como el coeficiente de reflexión y transmisión, respectivamente. En la Figura.A.2 se indican las amplitudes de los rayos reflejados y transmitidos.

La diferencia de camino óptico entre cualesquiera dos rayos sucesivos transmitidos es  $2d \cos \theta$ , derivada de la Figura A.2. Entonces, la diferencia de fase correspondiente está dada por

$$\delta = 2kd \cos(\theta) = \frac{4\pi}{\lambda} d \cos(\theta), \quad (119)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda en el medio. En términos de la longitud de onda en el vacío  $\lambda_0$ , esta diferencia de fase queda como

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} nd \cos(\theta), \quad (120)$$

en el cual  $n$  es el índice de refracción del medio entre las superficies reflejantes. Tomando esta diferencia de fase como  $e^{i\delta}$  y sumando las amplitudes de los rayos transmitidos, se obtiene que

$$E_t = E_0 t^2 + E_0 t^2 r^2 e^{i\delta} + E_0 t^2 r^4 e^{2i\delta}, \quad (121)$$

la cual es una serie geométrica con razón  $r^2 e^{i\delta}$ . Reescribiendo la ecuación anterior se obtiene que

$$E_t = \frac{E_0 t^2}{1 - r^2 e^{i\delta}}. \quad (122)$$

La intensidad  $I_t = |E_t|^2$  de la luz transmitida esta dada por

$$I_t = I_0 \frac{|t|^4}{|1 - r^2 e^{i\delta}|^2}, \quad (123)$$

donde  $I_0 = |E_t|^2$  es la intensidad del haz incidente. En general,  $r$  es un número complejo debido a los cambios de fase que pueden ocurrir en la reflexión y se representa como

$$r = |r| e^{i\delta_r/2}, \quad (124)$$

donde  $\delta_r/2$  el cambio de fase para una reflexión. Denotando  $R$  y  $T$  como la reflectancia y transmitancia, respectivamente, de una superficie en términos de  $r$  y  $t$  tenemos que

$$R = |r|^2 = rr^*, \quad (125)$$

$$T = |t|^2 = tt^*. \quad (126)$$

El asterisco en las ecuaciones anteriores denotan el complejo conjugado. Como no hay absorción de energía entre las superficies reflejantes se cumple que

$$R + T = 1, \quad (127)$$

y entonces

$$I_0 = I_t + I_r. \quad (128)$$

Siendo  $\Delta$  la diferencia total de fase entre dos rayos sucesivos,

$$\Delta = \delta + \delta_r, \quad (129)$$

la ecuación (123) puede reescribirse como

$$I_t = I_0 \frac{T^2}{|1 - Re^{i\Delta}|^2}. \quad (130)$$

Desarrollando el denominador de la ecuación (130) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 |1 - Re^{i\Delta}|^2 &= (1 - Re^{i\Delta})(1 - Re^{-i\Delta}) \\
 &= 1 - Re^{i\Delta} + e^{-i\Delta} + R^2 \\
 &= 1 - 2R \cos(\Delta) + R^2 \\
 &= (1 - R^2) \left[ 1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{131}$$

Podemos expresar la intensidad transmitida como

$$I_t = I_0 \frac{T^2}{(1 - R)^2} \frac{1}{1 + F \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right)}. \tag{132}$$

El último término de esta ecuación  $A = 1 / (1 + F \sin^2(\frac{\Delta}{2}))$ , es conocida como la *función de Airy* (ver Figura A.3). La cantidad

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2}, \tag{133}$$

es llamada el *coeficiente de fineza*. Dicho coeficiente es una medida de qué tan angostos son los picos de intensidad.

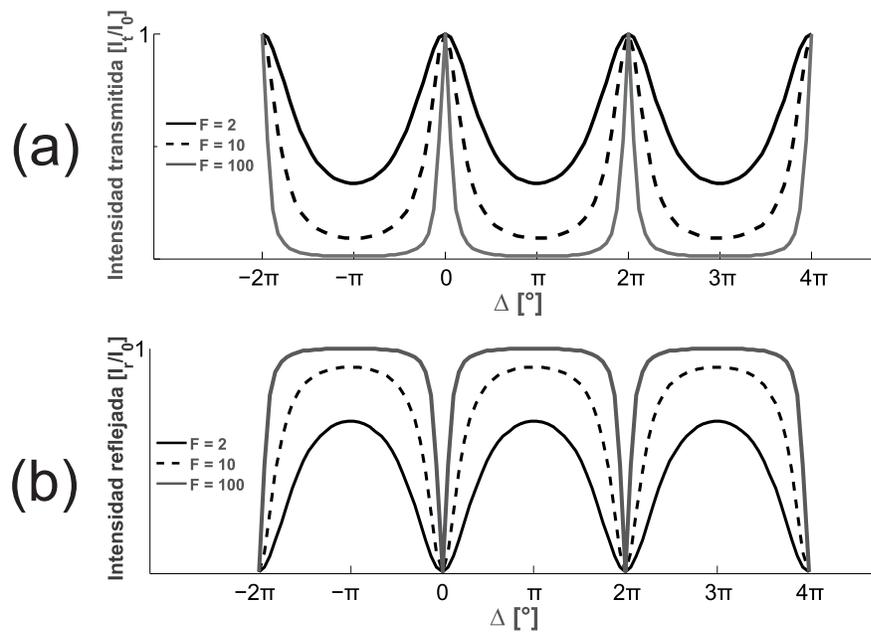
Una expresión para la intensidad reflejada puede ser obtenida a partir de la función de Airy y la ecuación (127), quedando como

$$\begin{aligned}
 I_r &= I_0 [1 - A] \\
 &= I_0 \left[ 1 - \frac{1}{(1 + F \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right))} \right] \\
 &= I_0 \left[ \frac{F \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right)}{(1 + F \sin^2\left(\frac{\Delta}{2}\right))} \right].
 \end{aligned} \tag{134}$$

La intensidad es una función periódica de  $\Delta$  con periodo  $2\pi$ , como se ilustra en la Figura A.3. Ésta alcanza su valor máximo cuando  $\Delta = 2\pi m$ , donde  $m$  es un entero. Cuando la fineza es muy grande, los picos de intensidad adquieren una forma muy angosta en función de  $\Delta$ .

Un dispositivo basado en este principio es el interferómetro Fabry-Perot. Éste consiste en dos espejos paralelos dentro de los cuales la luz pasa por múltiples reflexiones. En el

transcurso de cada viaje, la luz sufre una reducción fija en su amplitud, derivada de las pérdidas en los espejos, y un desplazamiento de fase  $\Delta = k2d = 4\pi\nu d/c = 2\pi\nu/(c/2d)$  asociado con la propagación. La intensidad total de la luz depende del cambio de fase  $\Delta$ , el cual tiene un máximo cuando  $\Delta/2$  es un múltiplo entero de  $\pi$ . La proporcionalidad del cambio de fase  $\Delta$  con la frecuencia  $\nu$  muestra que la intensidad transmitida por el Fabry-Perot exhibe picos extremadamente angostos separados en frecuencia por  $c/2d$ . El interferómetro Fabry-Perot es usado como analizador de espectros y como un resonador para láseres.



**Figura A.3:** Dependencia de la intensidad en transmisión (a) y en reflexión (b) con la diferencia de fase para tres valores de la fineza. Los picos se vuelven más angostos conforme aumenta el factor de fineza.

### A.3. Campo evanescente

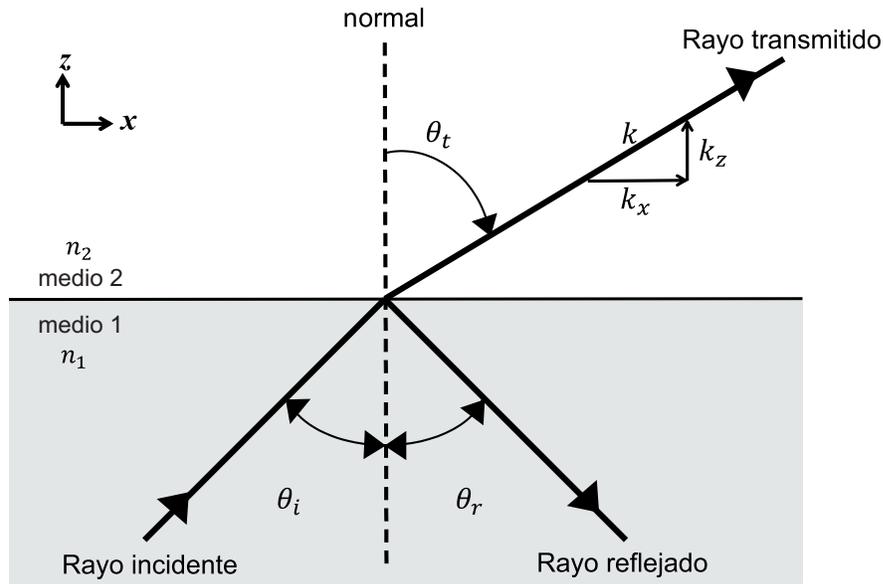


Figura A.4: Onda plana que incide en una superficie plana entre dos medios, con  $n_2 > n_1$ .

El tratamiento de los campos evanescentes toma su base en la situación común de una onda plana que incide en una superficie plana entre dos medios homogéneos.

Donde los índices de refracción y los ángulos son descritos a través de las relaciones comunes de la *Ley de reflexión* (135) y de la *Ley de Snell* (136)

$$\theta_1 = \theta_r, \quad (135)$$

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_t). \quad (136)$$

Si el ángulo de incidencia incrementa considerablemente,  $\theta_t$  se aproxima a  $90^\circ$  y el ángulo de incidencia es igual al ángulo crítico dado por

$$\theta_1 (\theta_t = 90^\circ) = \theta_c = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right). \quad (137)$$

Como se observa en la ecuación (136). Cuando el ángulo de incidencia sobrepasa al ángulo crítico, la interpretación de  $\theta_t$  como ángulo es inválida porque

$$\sin(\theta_t) = \frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_1) > 1. \quad (138)$$

En este caso no hay propagación de luz, o transporte de energía, dentro del *medio 2* y la reflexión total interna ocurre. Sin embargo, los campos ópticos en el *medio 2* están presentes pero disminuyendo evanescentemente a distancias cortas de la superficie a lo largo de la dirección  $z$ . Una ilustración de esta situación es dada en la Figura A.5.

### A.3.1. Intensidad del campo evanescente

El primer paso para deducir una expresión para la intensidad del campo evanescente es encontrar una solución de la *ecuación de onda* para el *medio 2*.

Para fines prácticos, consideramos la ecuación de onda en el plano  $xz$ ; sustituimos la expresión de una onda monocromática (139) en la ecuación (15):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \}, \quad (139)$$

entonces

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E(x, z) + \left( \frac{\omega n}{c} \right)^2 E(x, z) = 0. \quad (140)$$

Una solución a la ecuación (140) es:

$$E(x, z) = E_0 e^{i(k_x x + k_z z)}. \quad (141)$$

Sustituyendo (141) en (140), se llega a la *relación de dispersión*:

$$k_x^2 + k_z^2 = \left( \frac{\omega n_2}{c} \right)^2 k^2. \quad (142)$$

De la Figura A.4 deducimos las expresiones para las componentes del vector de onda,  $k_x$  y  $k_z$ , y se obtienen las siguientes relaciones mediante (142) y la ley de Snell (136).

$$k_x = k \sin \theta_t = \left( \frac{\omega}{c} \right) n_2 \sin \theta_t = \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \right) n_1 \sin \theta_i \quad k_z = k \cos \theta_t. \quad (143)$$

De la Figura A.4 es claro que  $k_y = 0$ . Usando la ecuación (142) reescribimos la ecuación (141)

$$E(x, z) = E_0 e^{i(k_x x + \sqrt{k^2 - k_x^2} z)}. \quad (144)$$

Ésta es la expresión general para el campo en el *medio 2*, de la cual, se consideran dos casos:

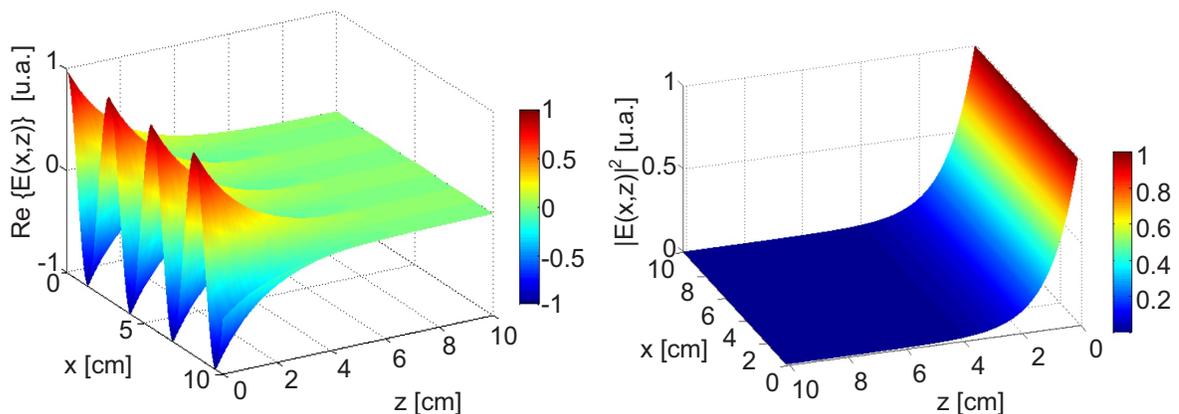
- **Refracción:** la situación presentada en la Figura A.4 muestra como una parte del haz es dividido, en una parte que se transmite al medio 2 y otra parte que es reflejada internamente dentro del medio 1. En este caso,  $\sin \theta_1 < 1$  y por otra parte, de acuerdo a los primeros dos términos de la ecuación (143)  $|k_x| < k$ . El campo se expresa como

$$E(x, z) = E_0 e^{ik_x x} e^{i\sqrt{k^2 - k_x^2} z} = E_0 e^{i \sin \theta_1 x} e^{i \cos \theta_1 z}. \quad (145)$$

El cual representa dos ondas, en dirección  $x$  y  $z$ , cuyos exponentes son puramente imaginarios y ambas ondas se propagan oscilando y amortiguándose. Por tanto, esta expresión representa a una onda monocromática propagándose.

- **Reflexión total interna:** el haz incidente es completamente reflejado dentro del *medio 1* y no se muestra transmisión como en la Figura A.4. Ya no puede considerarse a  $\theta_t$  como un ángulo porque, de acuerdo a la ley de Snell (136),  $\sin \theta_1 > 1$ . De acuerdo a los dos primeros términos de la ecuación (143),  $|k_x| \geq k$ . Esto da dos soluciones para  $k_z$  en la ecuación (144), que son  $k_z = \pm i\sqrt{k_x^2 - k^2}$ . Con esto, el campo en el *medio 2* es ahora

$$E(x, z) = E_0 e^{ik_x x} e^{\mp \sqrt{k_x^2 - k^2} z}. \quad (146)$$



**Figura A.5: (IZQ.) Simulación de la parte real del campo eléctrico en el medio 2. El valor de  $k_z$  fue calculado de acuerdo a la ecuación (143), incidiendo a 46 grados, iluminando con una longitud de onda de 2.8 cm y considerando  $n_1 = 1.46$  como el índice de refracción del prisma. (DER.) Intensidad del campo evanescente. La intensidad del campo en el medio 2 decae exponencialmente conforme nos alejamos de la superficie. Los parámetros son los mismos que los usados en la Figura A.5.**

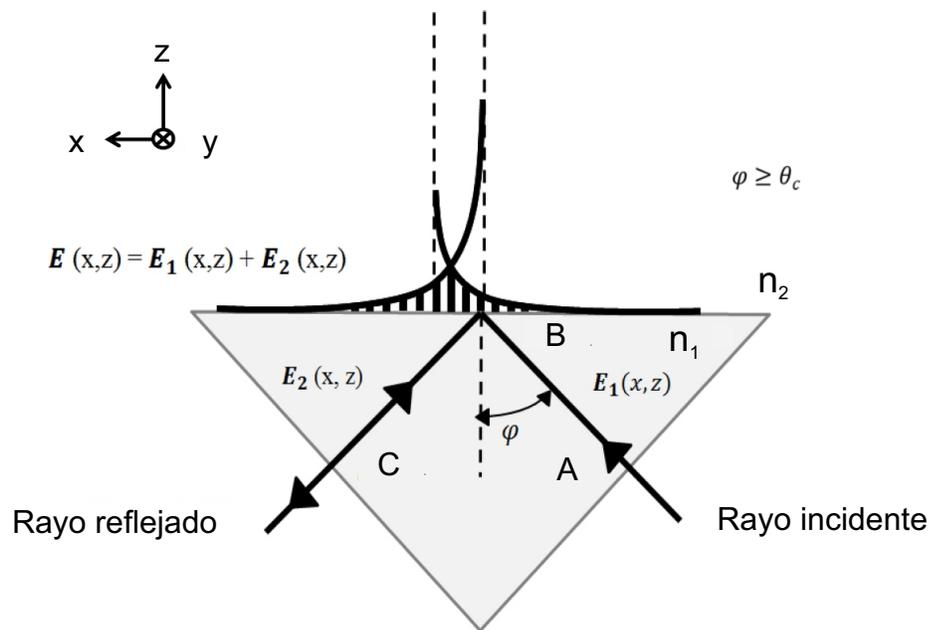
La solución físicamente aceptable para  $k_z$  tiene un signo *negativo* para  $z \geq 0$ , ya que para un signo *positivo* el campo tiende a infinito conforme aumenta la distancia en  $z$ .

Entonces,

$$E(x, z) = E_0 e^{ik_x x} e^{-\sqrt{k_x^2 - k^2} z}. \quad (147)$$

Para ilustrar la distribución de campo evanescente, se presenta una simulación de  $\Re\{E(x, z)\}$  y otra del  $|E(x, z)|^2$ , Figura A.5(DER) y Figura A.5(IZQ.), respectivamente. Como se observa en la Figura A.5(DER) y la Figura A.5(IZQ.), los campos evanescentes son fuertemente confinados y parecen manifestarse principalmente a distancias del orden de sub longitudes de onda respecto a la superficie.

### A.3.2. Campo evanescente estacionario



**Figura A.6:** Esquema del campo evanescente estacionario en la hipotenusa de un prisma rectangular. Con  $n_2 > n_1$ .

Cuando un campo eléctrico incide normal en una de las caras laterales de un prisma (punto A, Figura A.6) y los índices de refracción, del prisma  $n_2$  y del medio  $n_1$ , cumplen que  $n_2 > n_1$  y  $\phi \geq \theta_c$ , en la hipotenusa del prisma (punto B) el campo eléctrico es reflejado internamente y un campo evanescente se genera en la superficie del prisma en el *medio*

2 (como se vio anteriormente en la sección A.3.1).

En el punto C, la otra cara lateral del prisma, una fracción del campo internamente reflejado se transmite al aire mientras que otra es reflejada nuevamente hacia el punto (B), entonces, otro campo evanescente de menor amplitud se propaga en la superficie del prisma en dirección contraria al primero. Estos campos interfieren a medida que se propagan y producen un campo estacionario en la superficie del prisma en el *medio 2*.

Definimos los campos evanescentes en la superficie del prisma  $\mathbf{E}_1(x, z)$  y  $\mathbf{E}_2(x, z)$ , considerando el plano  $xz$  para facilitar el cálculo, de la siguiente manera:

$$\mathbf{E}_1(x, z) = \mathbf{A}_1 e^{ik_x x} e^{-k_z z}, \quad (148)$$

$$\mathbf{E}_2(x, z) = \mathbf{A}_2 e^{-ik_x x} e^{-k_z z}. \quad (149)$$

Donde  $\mathbf{A}_1 = r\mathbf{A}_2$ ,  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2 \in C$ , y  $0 < r \leq 1 \in \Re$ ; es la relación entre las amplitudes de los dos campos. La magnitud del vector de onda  $k = 2\pi/\lambda_0$ . Y las componentes del vector de onda  $k_x = kn_1 \sin \theta_c$  y  $k_z = kn_2 \sqrt{(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_c)^2 - 1}$ .

Entonces, el campo total en el *medio 2* es

$$\mathbf{E}(x, z) = \mathbf{E}_1(x, z) + \mathbf{E}_2(x, z), \quad (150)$$

$$\mathbf{E}(x, z) = \mathbf{A}_1 e^{ik_x x} e^{-k_z z} + \mathbf{A}_2 e^{-ik_x x} e^{-k_z z} = r\mathbf{A}_2 e^{ik_x x} e^{-k_z z} + \mathbf{A}_2 e^{-ik_x x} e^{-k_z z}, \quad (151)$$

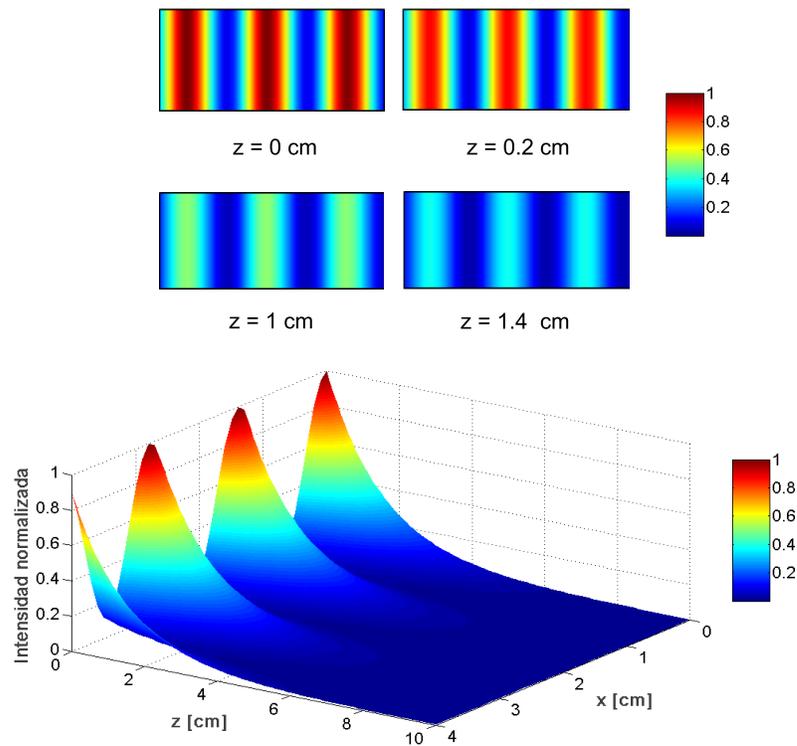
donde la distribución del campo tienen una intensidad proporcional al módulo cuadrado del campo eléctrico

$$I(x, z) = |\mathbf{E}(x, z)|^2 = |\mathbf{A}_2|^2 e^{-2k_z z} (e^{ik_x x} + r e^{-ik_x x}) (r e^{ik_x x} + e^{-ik_x x}), \quad (152)$$

donde  $I_0 = |\mathbf{A}_2|^2$ . Desarrollando el producto obtenemos que

$$I(x, z) = I_0 e^{-2k_z z} (1 + r [e^{2ik_x x} + e^{-2ik_x x}] + r^2), \quad (153)$$

$$I(x, z) = I_0 e^{-2k_z z} [1 + 2r \cos(2k_x x) + r^2]. \quad (154)$$



**Figura A.7: (ARRIBA)** Imágenes de la distribución de intensidad del campo evanescente estacionario con la distancia sonda-prisma en diferentes posiciones a lo largo del eje  $z$ . **(ABAJO)** Imagen tridimensional donde se aprecia el decaimiento exponencial del campo evanescente estacionario a lo largo del eje  $z$  y la interferencia del campo evanescente en el eje  $x$ . Para distancias mayores, en campo lejano, no hay señal de campo evanescente por que estamos en la reflexión total interna. El periodo espacial de las franjas es de 1.4 cm. La escala de las imágenes calculadas son de  $4 \times 1 \text{ cm}^2$ . Los datos de la simulación son los mismos que los usados en la Figura A.5(DER).

Por lo tanto, la ecuación (154) describe la distribución de intensidad del campo evanescente estacionario. El término que denota la interferencia a lo largo de  $\hat{x}$ , en la ecuación (154) es  $\cos(2k_x x)$ , del cual podemos calcular el periodo espacial de las franjas de interferencia.

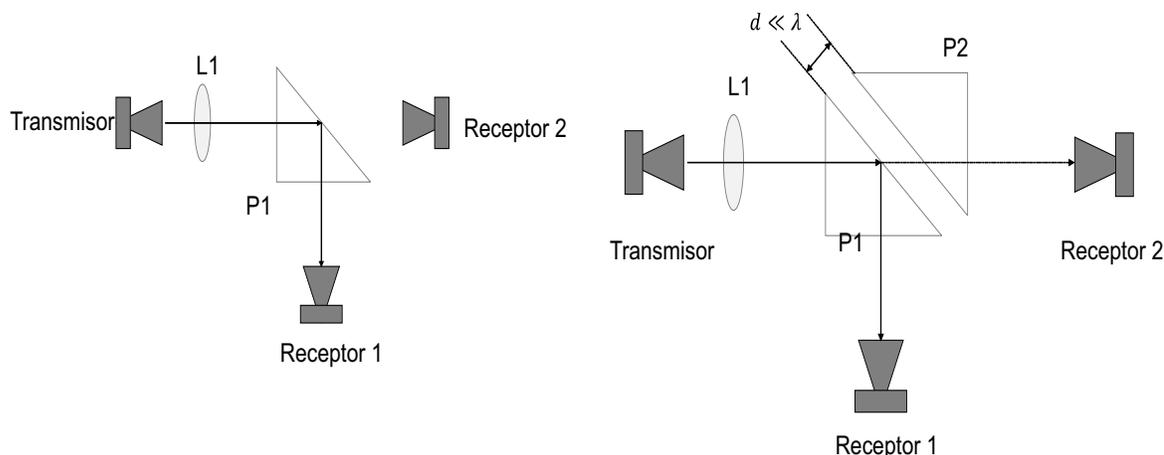
Para un periodo completo  $\Lambda$ , *i.e.*  $2k_x \Lambda = 2\pi$ ; y con la ecuación (143), tenemos que el periodo espacial de las franjas de interferencia del campo evanescente estacionario está dado por la expresión (155)

$$\Lambda = \frac{\lambda_0}{2n_1 \sin \theta_c}. \quad (155)$$

En la Figura A.7 se muestra una simulación del campo evanescente estacionario utilizando la ecuación (154). El análisis de un patrón de interferencia entre dos ondas evanescentes que se propagan en sentidos opuestos, sirve como herramienta para calibrar

el sistema de barrido y determinar la resolución espacial de la sonda del microscopio de campo cercano (Meixner *et al.*, 1994).

### A.3.3. Reflexión total interna frustrada (RTIF)



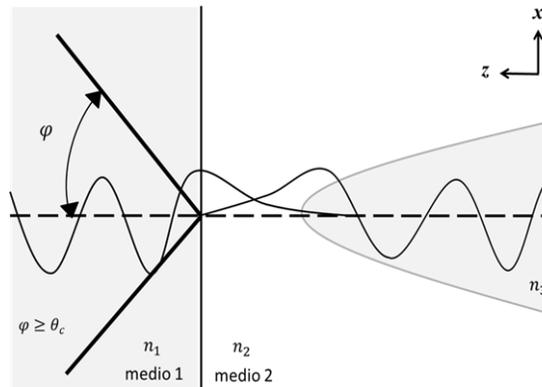
**Figura A.8:** Ejemplo de la RTI en un prisma de parafina usando microondas, imagen tomada de Novotny y Hecht (2006). Primero el Receptor 2 no detecta señal transmitida debido a la RTI, pero cuando se acerca otro prisma de parafina a una distancia  $d$ , la RTI es frustrada y en el Receptor 2 se detecta señal. Se considera que los prismas y la lente L1 son de parafina, y que el medio circundante es aire.

La RTIF se encuentra entre los efectos más importantes en la microscopía de campo cercano debido a que explica cómo la información acerca de estructuras de sublongitudes de onda es transportada hacia el campo lejano.

En la Figura A.8 se ilustra una manera para realizar el experimento de RTIF. Se genera un campo evanescente en la superficie plana de uno de los prismas, mediante reflexión total interna, y acercamos otro prisma a una distancia  $d$  que está dentro del rango típico de la longitud de decaimiento de la onda evanescente (Novotny y Hecht, 2006). El campo evanescente interactúa con la interfaz del segundo prisma y puede ser parcialmente convertida en radiación propagante. Esta situación es análoga al tunelaje de electrones a través de una barrera de potencial, visto con mecánica cuántica.

La Figura (A.9) ilustra también la RTIF, sólo que ahora el tercer medio es una guía de onda (sonda, fibra óptica). En la superficie plana se tiene un campo evanescente, dado que la radiación incide a un ángulo igual o mayor al crítico, el cual interactúa con la sonda a una distancia sonda-superficie mucho menor que la longitud de onda de iluminación. El

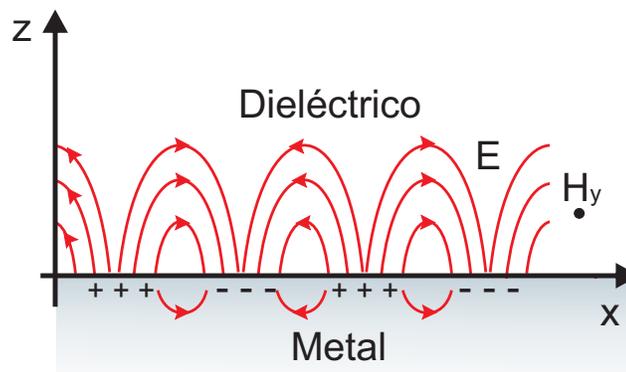
campo evanescente pasa a ser un modo electromagnético que se propaga dentro de la sonda.



**Figura A.9:** Reflexión Total Interna frustrada por un dieléctrico en forma de punta afilada colocada a una distancia mucho menor que la longitud de onda con que se ilumina. El esquema muestra la superposición del campo evanescente entre la superficie plana y la punta.

En el ámbito de la microscopía de campo cercano, este tipo de sonda resulta ser un elemento que determina la resolución de las imágenes que se obtienen de las muestras.

#### A.4. Plasmones polaritones de superficie



**Figura A.10:** Esquema de la interfaz metal-dieléctrico dónde tiene lugar el plasmón polaritón de superficie. Los electrones en el metal oscilan en conjunto con la onda superficial a la misma frecuencia. De hecho, un plasmón polaritón de superficie es ambas una onda electromagnética y una oscilación colectiva de electrones.

Por definición, los plasmones polaritones de superficie (Surface Plasmon Polaritons, SPP's por sus siglas en inglés) son los cuantos de oscilaciones de densidad de carga superfi-

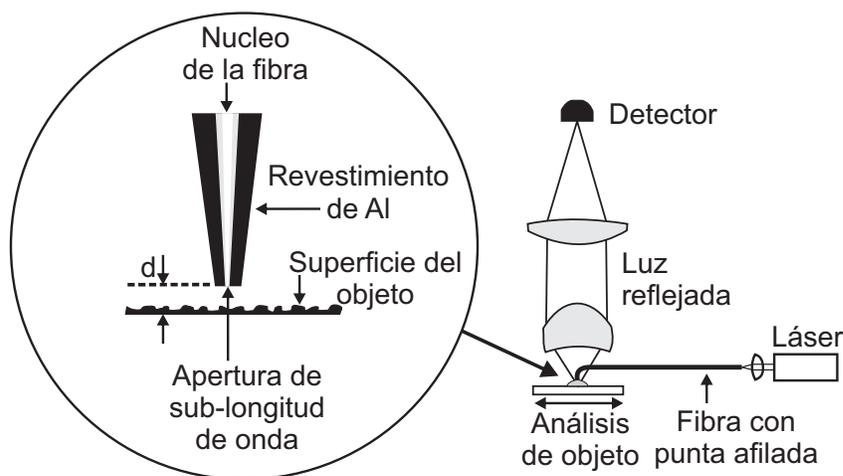
cial, pero la misma terminología es utilizada comúnmente para oscilaciones colectivas en la densidad de electrones en la superficie de un metal. Las oscilaciones se acoplan de forma natural a las ondas electromagnéticas, lo que explica su designación como polaritones (Novotny y Hecht, 2006).

En la Figura A.10 se ilustra la distribución de carga y las componentes de los campos eléctrico y magnético asociados del plasmón polaritón de superficie que se propaga en la frontera entre un dieléctrico y un metal. Las oscilaciones de densidad de carga superficiales asociadas con los SPP's en la interfaz entre un metal y un dieléctrico pueden dar un fuerte aumento al campo cercano óptico, el cual está espacialmente confinado cerca de la superficie del metal.

Las primeras observaciones de excitación de plasmones de superficie fueron registradas por Woods (1902). Sin saberlo, encontró que para la luz que incide sobre una rejilla metálica una fuerte absorción de energía se produce para un ángulo de incidencia en particular.

El estudio de fenómenos ópticos relacionados con la respuesta electromagnética de los metales fue recientemente nombrado *plasmónica* o *nanoplasmónica*. El rápido crecimiento de éste campo de la ciencia se debe a su enfoque en el control de la radiación óptica en escala de sublongitudes de onda (Novotny y Hecht, 2006).

### A.5. Microscopio de campo cercano



**Figura A.11:** Esquema del microscopio óptico de campo cercano. Se muestra la incursión de la punta de la fibra extrusionada (fibra sometida a un proceso para darle una sección transversal definida y fija).

Las técnicas de campo cercano para la obtención de imágenes están basados en las interacciones entre la sonda y el campo evanescente, el cual se localiza alrededor de la apertura de la sonda o de la muestra (o superficie).

El microscopio de campo cercano (SNOM) usa una punta minúscula en las proximidades de la muestra o superficie para formar una imagen mediante una matriz de puntos creada al escanear el área de interés. La sonda puede emitir o coleccionar luz emitida por la muestra.

Consideremos la situación en la cual confinamos luz dentro de una fibra óptica revestida de aluminio y su terminación tiene forma cónica con dimensiones del orden de sub-longitud de onda (ver Figura.A.11). Con lo anterior tenemos una función de punto extendido muy pequeña que puede verse como una fuente de luz con dimensiones muy pequeñas ( $a \ll \lambda$ ).

Las ondas emitidas por esta fuente de luz se ven como una superposición de ondas planas dadas por la ecuación  $\psi = \psi_0 \exp[i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)]$ , con el fin de representar una fuente que tiene una amplitud distinta de cero solamente dentro de la región  $|x|, |y| < a/2$ , debemos usar componentes con  $k_x$  y  $k_y$  al menos tan grandes como  $\pi/a$ . Por lo tanto, para tal onda, tenemos que

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 + k_z^2. \quad (156)$$

El hecho de que  $a \ll \lambda$  implica que  $k_z$  debe ser imaginario

$$k_z = 2\pi i \sqrt{\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{\lambda^2}} \approx 2\pi i \sqrt{\frac{1}{2a^2}}. \quad (157)$$

La implicación de que el vector de onda  $k_z$  sea imaginario es que la onda se propaga evanescentemente en  $\hat{z}$ , y su amplitud decae como  $e^{-|k_z|z}$ . Por esta razón la sonda debe estar extremadamente cerca, no más que  $a$  de la muestra o superficie.

Uno de los métodos de calibración del SNOM es con la obtención de patrones de interferencia de ondas evanescentes (Tao *et al.*, 2004). Estos patrones de interferencia permiten calibrar el sistema de escaneo del microscopio (para posicionar la sonda), determinar la resolución espacial, la eficiencia de acoplamiento de la sonda y el diámetro efectivo de la apertura de la sonda (Meixner *et al.*, 1995).

El microscopio de campo cercano pueda operar en modo de transmisión (Symons III *et al.*, 2003), mediante el uso de una abertura de tamaño de sub-longitud de onda, de colección (Cortés *et al.*, 2014), directamente con la sonda frente al objeto bajo estudio, y en modo de esparcimiento (Martínez *et al.*, 2005), con una esfera metálica con radio de sub-longitud de onda que perturba el campo cercano y hace posible la detección en campo lejano.