

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



---

**Programa de Posgrado en Ciencias  
en Óptica**

---

**Láser pulsado semillado**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Elier Ramos Israde**

Ensenada, Baja California, México  
2016

Tesis defendida por

**Elier Ramos Israde**

y aprobada por el siguiente Comité

---

**Dr. Roger Sean Cudney Bueno**  
Codirector de Tesis

---

**M. C. Luis Antonio Ríos Osuna**  
Codirector de Tesis

**Dra. Karina Garay Palmett**

**Dr. Santiago Camacho López**

**Dr. Juan Pablo Lazo Corvera**



---

**Dr. Pedro Negrete Regagnon**  
Coordinador del Posgrado en Óptica

---

**Dra. Rufina Hernández Martínez**  
Directora de Estudios de Posgrado

*Elier Ramos Israde © 2016*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor*

Resumen de la tesis que presenta **Elier Ramos Israde** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Óptica con orientación en Óptica Física

### **Láser Pulsado Semillado**

---

Dr. Roger Sean Cudney Bueno  
Codirector de tesis

---

M.C. Luis Antonio Ríos Osuna  
Codirector de tesis

Este proyecto de tesis se basa en el diseño y elaboración de un láser pulsado semillado. Los láseres pulsados usando la técnica de Q-switch presentan efectos indeseados al momento de generar el pulso, entre ellos fluctuaciones de intensidad y energía de pulso a pulso, fluctuaciones en el tiempo de formación del pulso y ancho de banda grande. Esto se debe a que los pulsos se generan a partir de emisión espontánea, la cual es ruidosa. Para corregir estos efectos indeseados, se implementó la técnica de semillado, la cual consiste en inyectar una señal semilla en la cavidad que genera los pulsos, con el fin de que el pulso se genere a partir de ésta y no de la emisión espontánea ruidosa.-En esta tesis se hizo un análisis teórico y experimental de un láser semillado. Se dedujeron las ecuaciones que describen el acoplamiento de los campos eléctricos de los modos de la cavidad con la inversión de población del medio y la influencia de la inyección de un haz en la formación del pulso; con estas ecuaciones se hicieron simulaciones de la formación de pulsos para compararlas con el experimento. Se diseñó y construyó un sistema láser de Nd:YAG que se compone de un láser semilla de Nd:YAG de onda continua, un láser pulsado en forma de cavidad de anillo bombeado longitudinalmente que usa un modulador electroóptico como Q-switch y un sistema de control de la longitud de la cavidad de anillo para hacer coincidir la frecuencia de oscilación del láser semilla con uno de los modos de la cavidad del láser pulsado. Se probó que es posible implementar la técnica de semillado en un láser pulsado al disminuir el tiempo de formación del pulso un 23 % y aumentando su potencia pico por pulso un 237 %.

**Palabras clave: Láser Nd:YAG pulsado, semillado, Q-switch, cavidad de anillo**

Abstract of the thesis presented by **Elier Ramos Israde** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Optics with orientation in Physical Optics

### **Injection-seeded pulsed laser**

Abstract approved by:

---

Dr. Roger Sean Cudney Bueno  
Thesis codirector

---

M.C. Luis Antonio Ríos Osuna  
Thesis codirector

This thesis project is about the design and fabrication of an injection seeded pulsed laser. Pulsed Q-switched lasers present unwanted effects at pulse formation, among them intensity variations of their temporal profile and increased uncertainty in the pulse time formation. In order to correct these unwanted effects we implemented the injection seeding technique, which consists in injecting a seed signal into the laser cavity, with the purpose that the pulse doesn't start from the noise in the gain medium, but rather from the seed, reducing the intensity variations in the temporal profile and decreasing the pulse formation uncertainty. The equations that describe the coupling of the electric field amplitudes of the cavity modes with the population inversion of the gain medium are deduced. By solving these equations numerically, we simulate the formation of pulses and analyze the influence of a seed beam on the properties of the pulses. A seeded Nd:YAG laser system was designed and built, which consists of a continuous wave Nd:YAG laser as a seed laser, a Q-switched pulsed ring cavity laser that uses an electrooptic modulator as a Q-switch and a length control of the ring cavity in order to match the oscillation frequency between the seed and the pulsed laser. It was proven that it is possible to use the injection seeding technique in a ring cavity pulsed laser, decreasing the pulse formation in a 23% and increasing the peak power to 237%.

**Keywords:** Nd:YAG pulsed laser, injection seeding, Q-switching, ring cavity

## Dedicatoria

*A mis padres*

*“Pues qué chingados, la vida sigue”  
Irma Juárez*

## Agradecimientos

Agradezco a mi asesor Roger Cudney por permitirme pertenecer a su grupo de trabajo, por la infinita paciencia y el apoyo para que este proyecto saliera adelante. Gracias por el reto intelectual que me presentó y que me obligó a dar todo de mí.

Agradezco a mis sinodales por la retroalimentación y la paciencia durante este proyecto de tesis.

Quiero agradecer a mi co-director Luis Rios por ayudarme en cualquier duda que tuve durante la elaboración del equipo usado, por su paciencia al explicarme y por su apoyo motivacional para seguir trabajando en el proyecto. Como compañero y amigo, muchas gracias.

Quiero agradecer a Javier Dávalos por su amistad, por las muchas comidas y por los ánimos durante todos los meses de duro trabajo, realmente me ayudaron mucho para seguir adelante y no tirar la toalla.

Quiero agradecer a mis compañeros de laboratorio Citlali, Joel (Mávita), Daniel, Míriam y Eduardo por su amistad y por ayudarme a resolver dudas si alguna vez las tuve.

Quiero agradecer a mis compañeros de posgrado por su gran amistad, por las fiestas y los mejores momentos que he tenido en mi vida.

Quiero agradecer a Julia Gaos y Alejandra Portillo por su curso, que me permitió abrir los ojos de la vida que tengo enfrente y lo hermosa que es. En especial a Pedro Negrete por haber propuesto el curso en primer lugar.

Quiero agradecer a Pedro Negrete por convencerme que siguiera estudiando el posgrado en Óptica, que al final si me presento uno de los retos intelectuales más grandes que he llevado a cabo y que era justo lo que había buscado.

Quiero agradecer al CICESE por permitirme ser parte del selecto grupo de científicos que han podido estudiar ahí.

Quiero agradecer a mis padres por darme tanto apoyo para seguir adelante, por su amor y ánimos constantes para que pudiera estudiar una maestría que me apasionó y me retó como nunca nada lo había hecho. Los quiero mucho.

Quiero agradecer a Fernando López por ayudarme en la construcción de algunos componentes que usé en mi arreglo óptico.

Quiero agradecer al CONACyT por el apoyo económico durante mis estudios de maestría.

## Tabla de contenido

	Página
<b>Resumen español</b> .....	ii
<b>Resumen inglés</b> .....	iii
<b>Dedicatorias</b> .....	iv
<b>Agradecimientos</b> .....	v
<b>Lista de figuras</b> .....	viii
<b>Lista de tablas</b> .....	xi
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Láser.....	1
1.1.1 Láseres pulsados .....	3
1.2 Motivación y objetivos de la tesis.....	4
1.3 Estructura de la tesis .....	5
<b>Capítulo 2. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
2.1 Conceptos básicos.....	6
2.1.1 Simulación de pulsos usando fotones.....	14
2.1.2 Ancho temporal y tiempo de formación del pulso.....	15
2.1.3 Tiempo de Jitter.....	17
2.1.4 Limitantes del modelo de fotones.....	18
2.2 Ondas electromagnéticas.....	18
2.2.1 Modos transversales.....	20
2.2.2 Modos longitudinales.....	23
2.3 Obtención de las ecuaciones para simulación de pulsos usando campos eléctricos.....	25
2.3.1 Comparación entre sistemas de ecuaciones.....	30
2.3.2 Simulación de pulsos usando campos eléctricos.....	31
2.3.3 Resumen de efectos indeseados.....	32
2.3.4 Teoría del semillado.....	33
2.3.5 Simulaciones con semilla.....	34
2.4 Antecedentes del semillado.....	36
<b>Capítulo 3. Diseño experimental: diseño, fabricación y caracterización de los componentes usados</b>	<b>37</b>
3.1 Láser maestro.....	37
3.1.1 Potencia de emisión del láser maestro.....	38
3.1.2 Factor de calidad $M^2$ del láser maestro.....	39
3.1.3 Separación y ancho de modos longitudinales del láser maestro.....	40
3.1.4 Prototipo de láser maestro.....	43
3.2 Láser esclavo.....	43
3.2.1 Potencia de emisión del láser esclavo.....	44
3.2.2 Factor de calidad $M^2$ del láser esclavo.....	45

3.2.3 Separación de modos longitudinales del láser esclavo.....	46
3.2.4 Generación de pulsos en el láser esclavo.....	47
3.3. Sistema de corrección de la cavidad.....	48
3.4 Arreglo óptico completo.....	50
<b>Capítulo 4. Resultados y discusión de resultados</b>	<b>51</b>
4.1 Láser esclavo.....	51
4.2 Sistema semillado.....	53
4.3 Comparación entre sistemas pulsados.....	55
4.4 Resumen del proyecto de tesis.....	58
<b>Capítulo 5. Conclusiones</b>	<b>59</b>
<b>Lista de referencias bibliográficas.....</b>	<b>61</b>
<b>Anexos y Apéndices.....</b>	<b>63</b>

## Lista de figuras

Figura		Página
1	Proceso de generación y amplificación de un láser usando dos espejos.....	2
2	Comparación en la formación de pulsos usando la técnica del Q-switching.....	4
3	Interacción de la luz con los átomos desde el punto de vista cuántico.....	7
4	Sistema de población de 4 niveles para un láser de Nd:YAG.....	8
5	Diferencia de población y umbral de oscilación dependiente del factor Q de la cavidad.....	13
6	Evolución temporal de la inversión de población y el número de fotones en la generación de pulsos usando número de fotones.....	15
7	Tiempo de generación y ancho del pulso para diferentes valores de $x$ .....	15
8	Ancho temporal del pulso normalizado en función de $x$ .....	16
9	Tiempo de formación del pulso normalizado en función de $x$ y múltiplos de $\tau_c$ .....	17
10	Tiempo de formación del pulso y la del tiempo de jitter para 10 pulsos consecutivos.....	18
11	Modos transversales Hermite-Gaussianos.....	21
12	Radio de la amplitud del campo eléctrico para un haz gaussiano....	22
13	Curva de ganancia de un material con ensanchamiento homogéneo	24
14	Evolución temporal de la inversión de población y la intensidad del campo eléctrico en la generación de pulsos usando campos eléctricos.....	31

15	Fenómeno del batimiento para tres modos longitudinales en la cavidad con $x = 5$ .....	32
16	Efecto del semillado en la generación de pulsos para una cavidad láser para diferentes valores de $x$ .....	35
17	Efectos del semillado al tener una constante de acoplamiento longitudinal no unitaria.....	36
18	Esquema del láser maestro.....	37
19	Potencia de emisión del láser maestro en función de la potencia de bombeo.....	38
20	Ajuste de curva para la obtención del factor de calidad $M^2$ del láser maestro.....	39
21	Modos del láser maestro, mostrando el ancho espectral libre del interferómetro, el ancho en frecuencia de un modo longitudinal y una separación entre modos $\delta\omega$ .....	41
22	Arreglo interferométrico tipo Michelson mostrando la disminución de la visibilidad de la franjas de interferencia conforme se aumenta la distancia $h$ , mostrando la longitud de coherencia.....	42
23	Esquemático del láser esclavo en cavidad de anillo.....	44
24	Curvas de potencia de emisión en función de la potencia de bombeo y la eficiencia pendiente del láser esclavo para las salidas P1 y P2...	45
25	Ajuste de curva para la obtención del factor de calidad $M^2$ del láser esclavo para la salida P1.....	46
26	Separación entre modos longitudinales de la cavidad del láser esclavo.....	46
27	Formación del pulso una vez que se ha quitado el voltaje alto del modulador electroóptico y su despliegue en el osciloscopio.....	48
28	Arreglo interferométrico tipo Michelson usado para caracterizar el desplazamiento del piezoeléctrico.....	49

29	Ajuste de curva de interferencia obtenida del arreglo interferométrico para caracterizar el piezoeléctrico a $\lambda=632$ nm.....	49
30	Arreglo de láser pulsado semillado final.....	50
31	Ancho del pulso a la salida P1 del láser esclavo en función de la potencia de bombeo y su curva de ajuste teórica.....	51
32	Tiempo de formación del pulso a la salida P1 del láser esclavo en función de la potencia de bombeo.....	52
33	Potencia pico por pulso en función de la potencia de bombeo a una tasa de repetición de 100 Hz.....	52
34	Comparación entre pulsos emitidos con y sin semilla con una potencia de bombeo de 2.5 W del láser esclavo y una potencia de emisión de 15.5 mW del láser maestro.....	53
35	Comparación de semillado: un modo, dos modos y sin semilla a una potencia de bombeo de 3.9 W.....	54
36	Comparación de la formación de un pulso con semillado, auto-semillado y sin semilla a una potencia de bombeo de 2.5 W del láser esclavo.....	55
37	Ancho del pulso en función del bombeo aplicado para el láser esclavo solo y semillado con su ajuste teórico de curva.....	55
38	Tiempo de formación del pulso en función del bombeo aplicado para el láser esclavo solo y semillado con su ajuste teórico de curva.....	56
39	Tiempo de jitter por pulso en función del bombeo aplicado para el láser esclavo solo y semillado.....	57
40	Potencia pico emitida por pulso en función del bombeo aplicado para el láser esclavo solo y semillado.....	57
41	Relación de energía y potencia pico por pulso vista en el espacio temporal con los parámetros de tiempo de emisión y el ancho temporal del pulso.....	63

## Lista de tablas

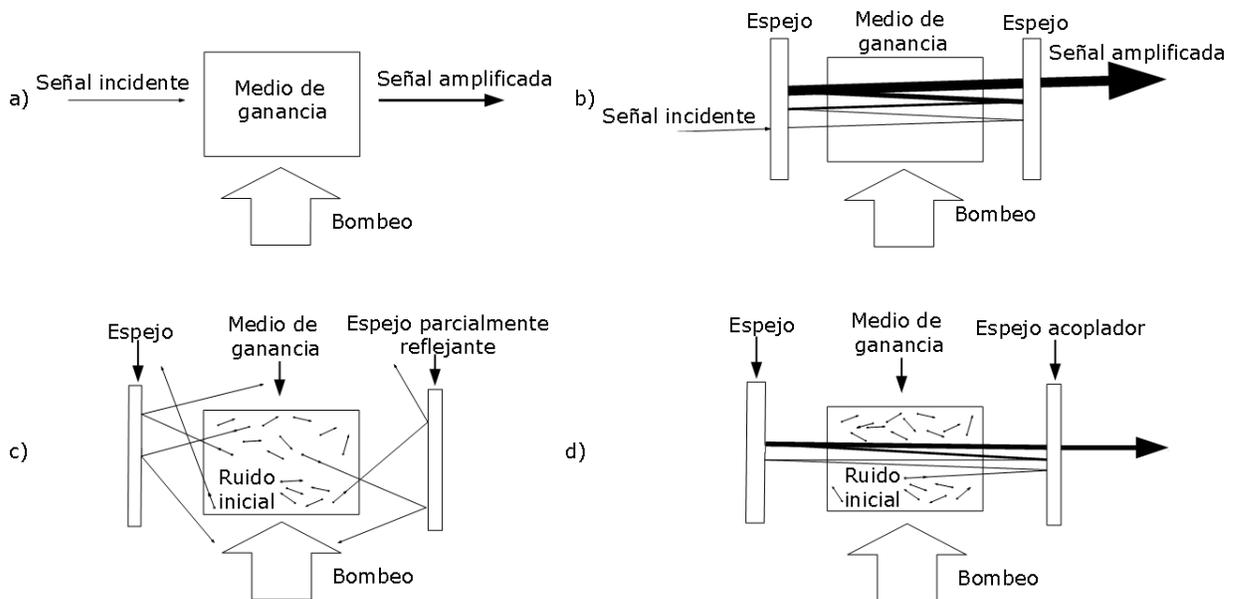
Tabla		Página
1	Constantes usadas para las simulaciones usando fotones	65
2	Constantes usadas para las simulaciones usando campos eléctricos.....	67

# Capítulo 1. Introducción

Los láseres desde que se propusieron (Townes-Schawlow, 1958) y se construyeron (Maiman,1960) se han convertido en herramientas indispensables en la vida diaria, funcionando en diversas áreas como: a) telecomunicaciones (fibra óptica), b) informática con el almacenamiento y lectura de información (DVD, Blu-Ray), c) medicina con cirugía láser y para tratamientos de la piel, d) el área de la industria para soldar y cortar materiales (láseres de CO<sub>2</sub>), entre muchas más. A continuación vamos a describir los principios básicos del funcionamiento del láser.

## 1.1 Láser

Un láser es un dispositivo que amplifica una señal de luz mediante un medio de ganancia, como se muestra en la figura 1.a. Esta amplificación será mayor si se hace pasar la señal varias veces por el medio amplificador. Esto se puede lograr colocando espejos a la entrada y salida del amplificador, los cuales retroalimentan la señal al amplificador (figura 1.b). Sin embargo, todo medio de ganancia presenta ruido, y este ruido será amplificado por el mismo medio de ganancia. El ruido es aleatorio, por lo cual se emite en todas las direcciones (figura 1.c), pero solamente aquél que viaje paralelo a la normal de los espejos se amplificará de una manera apreciable. Si uno de los espejos no refleja el 100% de la luz sino que tiene una transmitancia finita, entonces parte de este haz saldrá por este espejo, generando a la salida un haz de luz altamente direccional y colimado, como se muestra en la figura 1.d. Cuando ocurre esta emisión de luz se dice que el láser está *oscilando*. Para que este proceso de amplificación pueda dar lugar a la oscilación es necesario que la ganancia neta que imparte el amplificador a la señal sea mayor a las pérdidas que pueda tener.



**Figura 1: Proceso de generación y amplificación de un láser usando dos espejos. a) Amplificación de una señal incidente usando un medio de ganancia, b) expansión virtual del medio de ganancia para amplificar la señal incidente cada vez que pase por el medio de ganancia al introducir espejos, c) emisión del ruido inicial generado por el medio de ganancia en todas las direcciones, d) amplificación del ruido inicial que esté paralelo a la normal de los espejos, generando la emisión láser.**

Al arreglo de los dos espejos se le llama *cavidad láser*. Para que un material actúe como medio de ganancia, necesita suministrar energía a la señal que es amplificada. Esa energía la obtiene del *bombeo* mediante procesos que se explicarán en detalle en el segundo capítulo; por el momento solo es necesario decir que el bombeo es una fuente de energía que es absorbida por los átomos del medio de ganancia, los cuales ceden su energía a la señal que se está amplificando. Entre mayor bombeo se aplique al medio de ganancia, mayor podrá ser la amplificación. Cuando el bombeo es tal que la amplificación que provoca es igual a las pérdidas entonces el láser podrá oscilar (emitir luz). A este bombeo mínimo requerido para obtener la oscilación se le llama *bombeo umbral*.

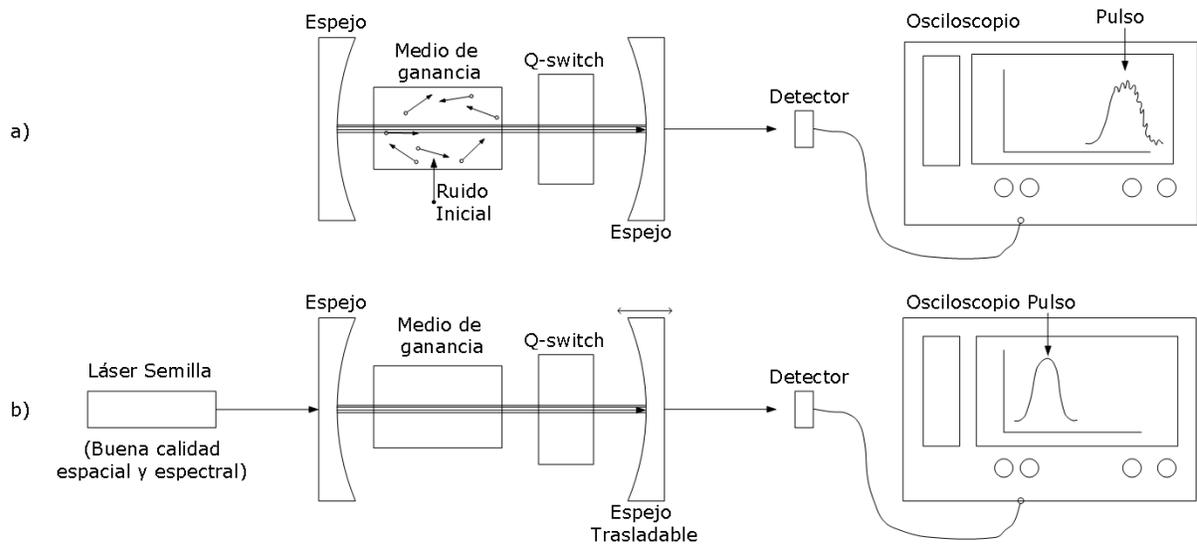
Los láseres pueden funcionar en un régimen continuo o pulsado, y por la importancia para este proyecto de tesis se enfocará más en describir los láseres pulsados.

### 1.1.1 Láseres pulsados

Los láseres de alta potencia son herramientas indispensables en laboratorios de óptica no lineal, debido a que los fenómenos ópticos no lineales son más eficientes a potencias altas. Se usan principalmente fuentes láseres pulsadas, ya que permiten generar potencias altas de emisión en tiempos reducidos.

Uno de los métodos más usados para la generación de pulsos del orden de nanosegundos es la técnica llamada *conmutación de Q* o conocida más por su nombre en inglés *Q-switching* (McClung and Hellwarth, 1962). Su principio de funcionamiento es el siguiente. De alguna manera se impide que el láser oscile, por ejemplo introduciendo un obstáculo en el camino del haz. Como no puede oscilar, toda la energía proveniente del bombeo se va almacenando en el medio de ganancia. Si de manera repentina se quita esta obstrucción entonces la ganancia del medio amplificador será muy elevada debido a toda la energía almacenada, por lo que el ruido se amplifica muy rápidamente, formando en fracciones de segundo un pulso de luz que extrae la energía almacenada en el medio amplificador. La razón del nombre extraño (conmutación de Q) de esta técnica para generar pulsos se verá más adelante.

La generación de pulsos usando la técnica del Q-switching presenta algunos efectos indeseados, como la variación en el tiempo que le toma generar el pulso y las variaciones de la intensidad en su perfil temporal (figura 2.a). Esto se debe a que el pulso se origina de ruido, que por definición es aleatorio. Muchos de estos efectos indeseados se pueden minimizar usando la técnica del semillado, o *injection seeding* en inglés, en donde en vez de depender del ruido para la formación del pulso se introduce a la cavidad un haz de baja potencia, llamado *haz semilla*, el cual tiene las características (dirección, polarización, etc.) que queremos impartir al pulso. De esta manera, el pulso empezará a generarse copiando las propiedades del haz semilla, reduciendo su tiempo de formación y permitiendo un control de sus propiedades (figura 2.b).



**Figura 2. Comparación en la formación de pulsos usando la técnica de Q-switching entre un sistema a) Sin semilla. El pulso se origina del ruido dentro del medio amplificador y b) Semillado. Un haz externo inicia el proceso de amplificación.**

Para poder implementar la técnica de semillado se requiere que la cavidad pueda “aceptar” el haz semilla. Una condición es que la longitud de onda del haz semilla corresponda a una de las permitidas por la cavidad (*modos longitudinales*), y como veremos más adelante estos modos dependen de la longitud de la cavidad, por lo que si tenemos control de la ésta podremos controlar también el empatamiento de la longitud de onda del haz semilla con alguno de los modos de la cavidad. Por esta razón es necesario controlar la posición de uno de los espejos de la cavidad, por ejemplo montando uno de los espejos sobre una base trasladable, como se indica en la figura 2.b.

## 1.2 Motivación y objetivos de la tesis

El Laboratorio de Láseres y Óptica No Lineal del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada (CICESE) requiere una fuente pulsada con alta calidad espacial y espectral para hacer experimentos de óptica no lineal.

El objetivo de este proyecto de tesis es elaborar un láser pulsado semillado de Nd:YAG. Consiste en diseñar y construir un láser semilla (también llamado láser maestro) que tenga buena calidad espacial y espectral, además de diseñar y construir un láser generador de pulsos (también llamado láser esclavo) que cuente con un control del tamaño de la cavidad.

### **1.3 Estructura de la Tesis**

En el capítulo 2 se describe la teoría básica sobre la formación de un haz láser, comenzando con las ecuaciones de tasa que describen la diferencia de población en un sistema de cuatro niveles en el medio de ganancia Nd:YAG. Posteriormente se deducen las ecuaciones que modelan la formación de pulsos en términos del número de fotones y los modos longitudinales, y se realizan las simulaciones numéricas de éstas. Finalmente se describe la técnica del semillado y las simulaciones computacionales asociadas a esta técnica.

En el capítulo 3 se describe el material y equipo usado, así como sus características. Se presenta la caracterización del láser maestro (potencia de emisión en función de la potencia de bombeo, los modos longitudinales y su factor de calidad  $M^2$ ). Se muestran las características del láser esclavo, tales como sus componentes en la cavidad, la geometría de la cavidad de anillo, su potencia de emisión en función del bombeo en modo continuo, los modos longitudinales, su factor de calidad  $M^2$  en modo continuo, y su operación en modo pulsado. Se describe el sistema de corrección de la cavidad.

En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos del láser esclavo en modo pulsado; se presentan los resultados al implementar la técnica del semillado, se presenta la comparación de los parámetros de formación del pulso entre un sistema pulsado con y sin semilla, el ancho del pulso y las potencias pico por pulso seguido de las consideraciones que pueden mejorar el funcionamiento del láser pulsado semillado.

En el capítulo 5 se presentan las conclusiones.

## Capítulo 2. Marco teórico

Se comenzará con un repaso de los conceptos e ideas básicas del láser que son relevantes para este proyecto. Se describirá la inversión de población en términos de la interacción de la luz con un material, y con ello la obtención de las ecuaciones básicas que describen la generación de pulsos cortos de luz. Se explican los modos longitudinales y transversales de oscilación, y con ellos la obtención del sistema de ecuaciones que describen la generación de pulsos usando campos eléctricos y su solución numérica. Se describe teóricamente y computacionalmente la técnica del semillado.

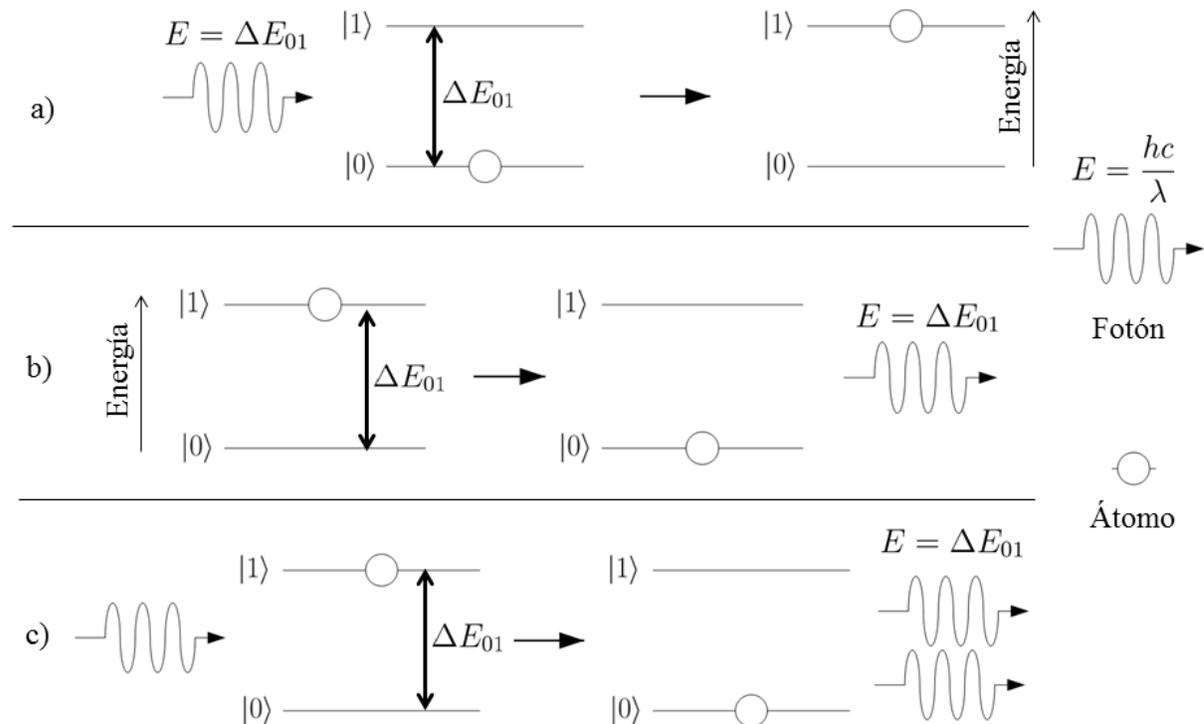
### 2.1 Conceptos básicos

Láser es acrónimo en inglés de *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* cuya traducción es *amplificación de luz por emisión estimulada de radiación*. Para entender mejor lo que significa amplificación en este sentido, al igual que la emisión estimulada, tenemos que hablar de los procesos que rigen la interacción de la luz con la materia, y para eso tenemos que partir desde un punto de vista cuántico, donde la luz se considera como una partícula llamada fotón y cuya energía está definida en función de su longitud de onda  $\lambda$

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad (1)$$

donde  $h$  es la constante de Planck y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Por otro lado, la materia a nivel atómico se comporta de manera muy diferente a un punto de vista macroscópico. Los átomos poseen niveles de energía discretos, es decir, no pueden tener cualquier valor de energía. La discretización tanto del campo electromagnético como de los átomos tiene implicaciones fuertes en su interacción.

Denotaremos los niveles de energía de un medio usando la notación de Dirac. Un ejemplo sería denotar el nivel de energía 1 como  $|1\rangle$  y así, en general, cualquier nivel de energía  $n$  como  $|n\rangle$ . Llamaremos al nivel  $|0\rangle$  como el estado *base* o de mínima energía.

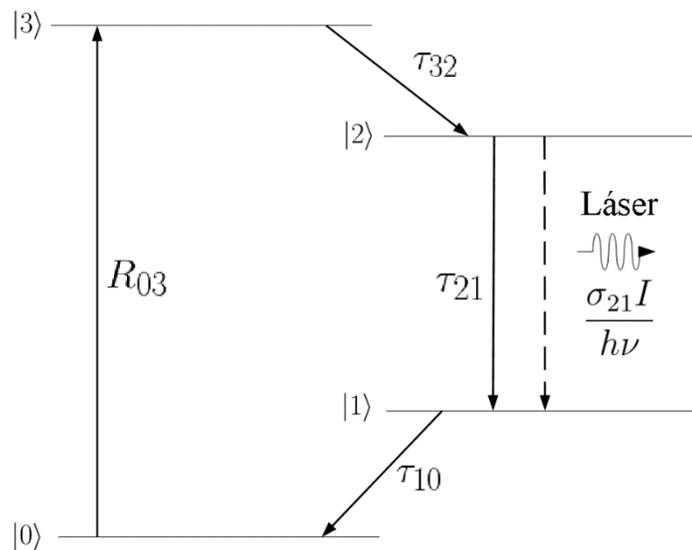


**Figura 3. Interacción de la luz con los átomos desde el punto de vista cuántico. a) Absorción de un fotón generando un estado excitado. b) Emisión espontánea de un fotón. c) Emisión estimulada de un fotón.**

Hay tres tipos de interacciones de la luz con átomos: absorción, emisión espontánea y emisión estimulada. La absorción se presenta cuando la diferencia de energía entre el nivel  $|0\rangle$  y  $|1\rangle$  ( $\Delta E_{01}$ ), coincide con la energía del fotón que incide sobre el átomo, por lo que éste *absorberá* al fotón, y subirá al siguiente nivel de energía  $|1\rangle$ . A este estado lo llamamos un estado *excitado*. El proceso de absorción se muestra en la figura 3 a).

Una vez que el átomo está excitado, podrá regresar a su estado base por dos procesos: por emisión espontánea o emisión estimulada. La emisión espontánea ocurre cuando un átomo decae a un nivel inferior, liberando la energía  $\Delta E_{01}$  en forma de un fotón en una dirección aleatoria y a un tiempo arbitrario, es decir de manera *espontánea* como se ve en la figura 3 b). El proceso de emisión estimulada ocurre cuando un fotón incide sobre un átomo previamente excitado. Si este fotón tiene una energía igual a la diferencia de energía de los niveles atómicos, el átomo emitirá un fotón con las mismas propiedades (dirección de propagación, estado de polarización, frecuencia, etc.) del fotón incidente, como se ve en la figura 3 c). El proceso de emisión estimulada es lo que da lugar a la ganancia del láser.

Einstein demostró que bajo condiciones de equilibrio térmico es igualmente probable de causar absorción de un fotón por un átomo no excitado que causar una emisión estimulada en un átomo excitado. Para que pueda haber una ganancia neta, requerimos que haya más eventos de emisión estimulada que de absorción, por lo que se requiere que haya más átomos en el estado superior (de mayor energía) que en el inferior entre los cuales se dan las transiciones. A esto le llamamos *inversión de población*, y se llama así porque bajo condiciones de equilibrio térmico ocurre lo opuesto: entre mayor es la energía del nivel, menor es su población. Una manera de generar una inversión de población es usando un sistema de cuatro niveles, en donde el bombeo se lleva a cabo mediante excitación óptica por otro láser. El modelo simplificado que describe los niveles de energía para el medio de ganancia Nd:YAG es el sistema de 4 niveles como se ve en la figura 4.



**Figura 4. Sistema de 4 niveles de energía que describe la cantidad de átomos excitados en cada nivel de energía para el medio de ganancia Nd:YAG.**

Un diodo láser con una longitud de onda de  $808 \text{ nm}$  bombea ópticamente el medio de ganancia Nd:YAG. Ésto genera que los átomos se exciten y pasen de un nivel de energía  $|0\rangle$  a un nivel  $|3\rangle$ . Del nivel  $|3\rangle$  decaerán de una manera no radiativa (sin emitir luz) al nivel  $|2\rangle$  con un tiempo de decaimiento  $\tau_{32}$ . Del nivel  $|2\rangle$  al nivel  $|1\rangle$  los átomos excitados decaen en un tiempo  $\tau_{21}$ , y del nivel  $|1\rangle$  al nivel  $|0\rangle$  decaen en un tiempo  $\tau_{10}$ . Si  $\tau_{21} > \tau_{32}$  y  $\tau_{21} > \tau_{10}$ , se puede probar que con cualquier bombeo que haya se

generará una inversión de población entre los niveles  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ , siempre y cuando se puedan despreciar las excitaciones térmicas a los diferentes niveles superiores.

Con el objetivo de estudiar el sistema de 4 niveles, se representan la evolución temporal de la población de átomos excitados para cada nivel de energía con cuatro ecuaciones de tasa o razón (rate equations en inglés)

$$\frac{dN_0}{dt} = -R_{03}N_0 + \frac{N_1}{\tau_{10}}, \quad (2.1)$$

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{N_2}{\tau_{21}} - \frac{N_1}{\tau_{10}} + (N_2 - N_1) \frac{\sigma_{21}}{h\nu} I, \quad (2.2)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{N_3}{\tau_{32}} - \frac{N_2}{\tau_{21}} - (N_2 - N_1) \frac{\sigma_{21}}{h\nu} I, \quad (2.3)$$

$$\frac{dN_3}{dt} = R_{03}N_0 - \frac{N_3}{\tau_{32}}, \quad (2.4)$$

donde  $N_s$  es la población del nivel  $s$ , para  $s = 0,1,2,3$ , los  $\tau_{nm}$  son los tiempos de decaimiento entre los niveles  $n = 0,1,2,3$  y  $m = 0,1,2,3$  respectivamente y  $R_{03}$  es la tasa de bombeo entre los niveles  $|0\rangle$  y  $|3\rangle$ . Las ecuaciones, (2.2) y (2.3) contienen términos proporcionales a la intensidad  $I$  del haz de luz en la cavidad y se deben a la absorción y emisión estimulada entre los niveles  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ . En estos términos,  $\nu$  es la frecuencia de oscilación de emisión láser y  $\sigma_{21}$  es conocida como la sección transversal de emisión.

La diferencia de población de átomos excitados entre el estado  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$  es la inversión de población  $\Delta N = N_2 - N_1$ . Bajo ciertas consideraciones, podemos llegar a una expresión para la diferencia de población de un sistema de 4 niveles. Supondremos que la variación del bombeo es lenta a comparación de la tasa de decaimiento del nivel  $|3\rangle$  al nivel  $|2\rangle$ , es decir

$$\frac{dN_3}{dt} = R_{03}N_0 - \frac{N_3}{\tau_{32}} \approx 0, \quad (3)$$

$$\therefore N_3 = R_{03}N_0\tau_{32}.$$

Suponemos que la población en el nivel  $|1\rangle$  es depreciable a comparación a la población en el nivel  $|2\rangle$ , esto debido a que la población  $N_1$  decaerá mucho más rápidamente al estado base que el decaimiento del nivel 2 al 1, por lo que  $N_1 \ll N_2$  dando por consecuencia que  $\Delta N = N_2 - N_1 \approx N_2$ . Con esta suposición, y la ecuación (3), podemos escribir la inversión de población como

$$\frac{d\Delta N}{dt} \approx \frac{dN_2}{dt} \approx R_{03}N_0 - \frac{N_2}{\tau_{21}} - N_2 \frac{\sigma_{21}}{h\nu} I. \quad (4)$$

La ecuación (4) presenta tres términos importantes en la formación del haz láser. El primer término es conocido como el término de bombeo, y está relacionado con la cantidad de átomos excitados que pasan del nivel base y generan átomos excitados en  $N_2$ . El segundo término describe el número de átomos que se están perdiendo por emisión espontánea en el nivel  $N_2$ . El tercer término es la cantidad de átomos perdidos por emisión estimulada dentro de la cavidad, y se relaciona con la intensidad dentro de la cavidad  $I$ , o visto de otra manera: con el número de fotones  $\Phi$ .

El número de fotones puede crecer dentro de la cavidad debido a la emisión estimulada como

$$\frac{d\Phi}{dt} \underset{\text{emisión estimulada}}{\text{emisión}} = - \frac{dN_2}{dt} \underset{\text{emisión estimulada}}{\text{emisión}} \times V_{\text{medio}} = N_2 \frac{\sigma_{21}}{h\nu} I \times V_{\text{medio}}, \quad (5)$$

donde  $V_{\text{medio}}$  es el volumen del medio de ganancia. La intensidad está relacionada con la energía total dentro de la cavidad láser como

$$\frac{\text{energía en la cavidad}}{\text{volumen de la cavidad}} = \frac{\Phi h\nu}{V_{\text{cav}}} = \frac{I}{c}, \quad (6)$$

$$\therefore I = \frac{\Phi h\nu}{V_{\text{cav}}} c,$$

donde  $V_{\text{cav}}$  es el volumen de la cavidad. Si sustituimos el resultado de la intensidad de la ecuación (6) en la ecuación (5) obtenemos el número de fotones que se generan por emisión estimulada

$$\frac{d\Phi}{dt} \underset{\text{estimulada}}{\text{emisión}} = N_2 \frac{c\sigma_{21}}{V_{cav}} \Phi \times V_{medio} . \quad (7)$$

Las pérdidas de fotones en la cavidad las podemos escribir como

$$\frac{d\Phi}{dt} \underset{\text{pérdidas}}{} = -\frac{\Phi}{\tau_c} , \quad (8)$$

donde  $\tau_c$  es el tiempo de vida del fotón en la cavidad, es decir el tiempo que el fotón está dentro de la cavidad antes de salir de ésta. Para una cavidad de dos espejos, el valor de  $\tau_c$  es

$$\tau_c = \frac{2L}{c(1 - R_2)} , \quad (9)$$

donde  $L$  es la separación entre los espejos y  $R_2$  es la reflectancia del espejo de salida suponiendo que el otro espejo es 100% reflejante y que las únicas pérdidas en la cavidad son causadas por el espejo de salida. El valor de  $\tau_c$  está íntimamente relacionado con el *factor de calidad*  $Q$ , el cual se define como

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energía almacenada en la cavidad}}{\text{Energía perdida en un ciclo}} .$$

Para una cavidad láser, este tiene el valor de

$$Q = 2\pi \frac{\Phi h\nu}{\Phi h\nu \times \frac{1}{\nu} \times \frac{1}{\tau_c}} = 2\pi\nu\tau_c . \quad (10)$$

Si sustituimos la ecuación (6) en (4) y sumamos las ecuaciones (7) y (8) obtenemos el sistema de ecuaciones acopladas que describen la formación de fotones en la cavidad

$$\frac{dN_2}{dt} = R_{03}N_0 - \frac{N_2}{\tau_{21}} - N_2 \frac{c\sigma_{21}}{V_{cav}} \Phi , \quad (11.1)$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Phi}{\tau_c} + N_2 c\sigma_{21} \Phi \frac{V_{medio}}{V_{cav}} . \quad (11.2)$$

Las ecuaciones (11) no tienen solución analítica, sin embargo, podemos simular su comportamiento con ciertas consideraciones. Si suponemos que en un principio no tenemos formación de fotones en la cavidad ( $\Phi = 0$ ) y hay una tasa de bombeo constante a partir de un tiempo  $t \geq 0$ ,  $R_{03} = cte$  y cero para  $t < 0$ , podemos resolver la ecuación (11.1) dando como solución

$$N_2(t) = R_{03}N_0\tau_{21}(1 - e^{-t/\tau_{21}}). \quad (12)$$

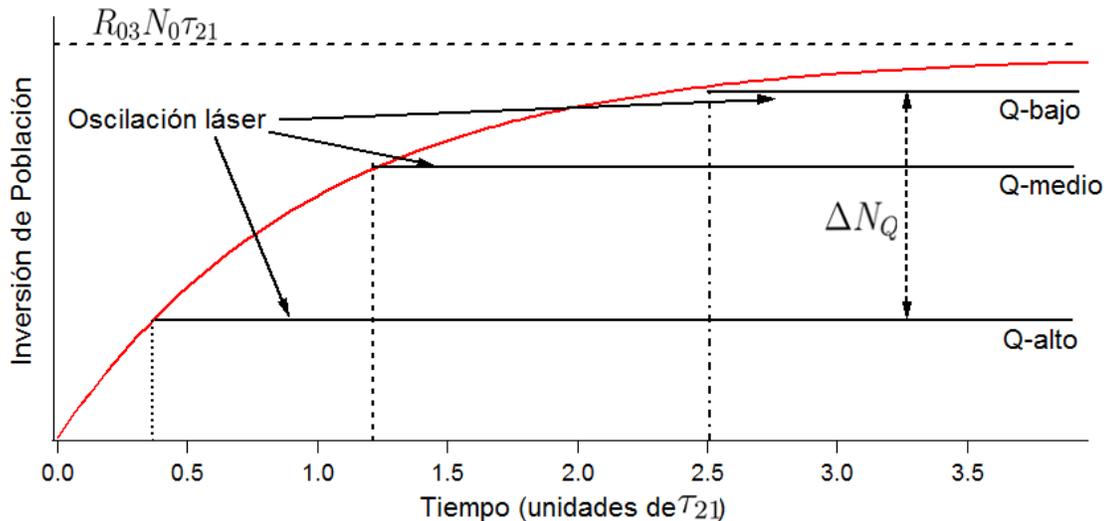
De la ecuación (12) se observa un valor máximo de la diferencia de población cuando  $t \rightarrow \infty$  cuyo valor es  $R_{03}N_0\tau_{21}$ . Este valor define la inversión de población máxima que permite generar el medio de ganancia a una tasa de bombeo constante  $R_{03}$ , por consecuencia, si aumentamos la tasa de bombeo, podemos aumentar el valor de diferencia de población máxima en el medio de ganancia.

Para un bombeo menor al requerido que permita oscilación, la derivada del número de fotones con respecto al tiempo tiene que ser igual a cero. Igualando la ecuación (11.2) a cero obtenemos entonces la inversión de población requerida para que haya oscilación:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} = 0 &\rightarrow \Phi \left( -\frac{1}{\tau_c} + N_2 c \sigma_{21} \frac{V_{medio}}{V_{cav}} \right) = 0, \\ \therefore N_2^{umbral} &= \frac{V_{cav}}{V_{medio}} \frac{1}{c \sigma_{21}} \frac{1}{\tau_c}. \end{aligned} \quad (13)$$

A esta inversión de población se le conoce como como *inversión de población umbral*.

Se aprecia de la ecuación (13) que la inversión de población umbral está en función de  $\tau_c$ , es decir que la inversión de población mínima para que el láser empiece a oscilar está en función de las pérdidas en la cavidad  $\tau_c$  y con ello del factor Q.



**Figura 5. Diferencia de población y umbral de oscilación dependiente del factor  $Q$  de la cavidad**

La figura 5 presenta la inversión de población en función del tiempo suponiendo un bombeo constante y que inicialmente la inversión de población es cero. La curva roja es la inversión que se obtiene si no hay emisión estimulada, es decir, es la solución dada en la ecuación (12). Las otras tres líneas continuas corresponden a la inversión de población para tres valores de  $Q$  diferentes. Nótese que mientras la inversión de población es menor a la inversión umbral, estas tres curvas son idénticas al caso cuando no hay emisión estimulada. Sin embargo, en el momento en que la inversión de población alcanza el valor umbral el láser empieza a oscilar y la intensidad del haz que se forma no permite que la inversión sobrepase el valor umbral y se amarra a este valor. Nótese que cada valor de  $Q$  tiene inversiones de población umbrales diferentes y que a menor  $Q$ , mayor la inversión de población umbral y mayor el tiempo en que toma llegar a ésta.

En la generación de pulsos, la técnica del Q-switching aprovecha el comportamiento descrito en la figura 5 y los umbrales de oscilación para diferentes valores de  $Q$ . Primero se evita que el láser funcione al suministrar suficientes pérdidas para que el láser no pueda oscilar ( $Q$ -bajo) y se mantiene un bombeo constante al medio de ganancia, lo que ocasiona que la inversión de población llegue a un valor cercano a su valor máximo  $R_{03}N_0\tau_{21}$ . Después se cambia rápidamente el valor  $Q$  de la cavidad a uno alto ( $Q$ -switch), lo que ocasiona que el láser empiece a oscilar. El exceso de inversión de población (vista como  $\Delta N_Q$  en la figura 5) permite una ganancia neta muy grande, lo

que obliga a la cavidad a amplificar el ruido inicial en muy poco tiempo, generando un pulso de luz a la salida que extrae toda la energía almacenada en el medio de ganancia.

Definimos una variable  $x$  como

$$x \equiv \frac{N_2}{N_2^{umbral}}, \quad (14)$$

donde  $N_2$  es la inversión de población justo antes de hacer el “Q-switching” y  $N_2^{umbral}$  es la inversión de población umbral para que haya oscilación una vez que la cavidad tiene una Q alta. De la ecuación (14) y suponiendo que antes del Q-switch la inversión de población ya ha alcanzado su valor máximo  $R_{03}N_0\tau_{21}$ , vemos que

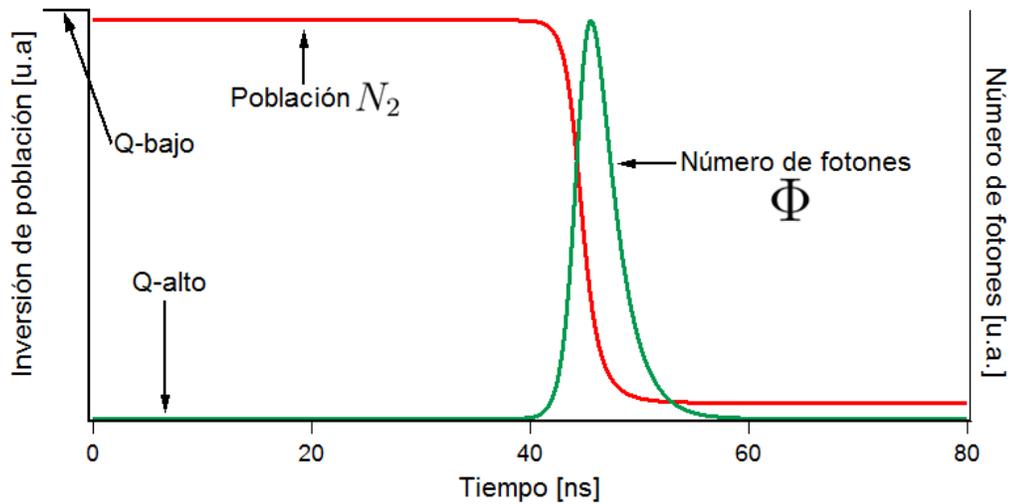
$$R_{03}N_0 = \frac{xN_2^{umbral}}{\tau_{21}} \equiv R_p. \quad (15)$$

La ventaja de declarar al bombeo así es para no calcular la cantidad de población en el estado base  $N_0$ , y solamente declaramos la cantidad de átomos que se excitan por unidad de tiempo, por lo que  $R_p$  tiene unidades diferentes a  $R_{03}$ .

Para el sistema de cuatro niveles, si conocemos las constantes asociadas a la inversión de población umbral (13), y el tiempo de decaimiento  $\tau_{21}$ , podemos resolver las ecuaciones (11) para diferentes valores de  $x$  usando integración numérica.

### 2.1.1 Simulación de pulsos usando fotones

Presentamos la solución numérica de las ecuaciones acopladas (11) suponiendo que la inversión de población se encuentra en su valor máximo posible  $R_p\tau_{21}$ , y empezamos a resolver la ecuación cuando cambiamos el factor Q de la cavidad, es decir resolvemos las ecuaciones cuando permitimos al láser oscilar. Las constantes y consideraciones de integración se encuentran en el apéndice 2, mientras que el código programado en MATLAB se encuentra en el anexo 1. Los resultados de esta simulación se presentan en la figura 6 para un valor de  $x = 3$  vista en la ecuación (14).

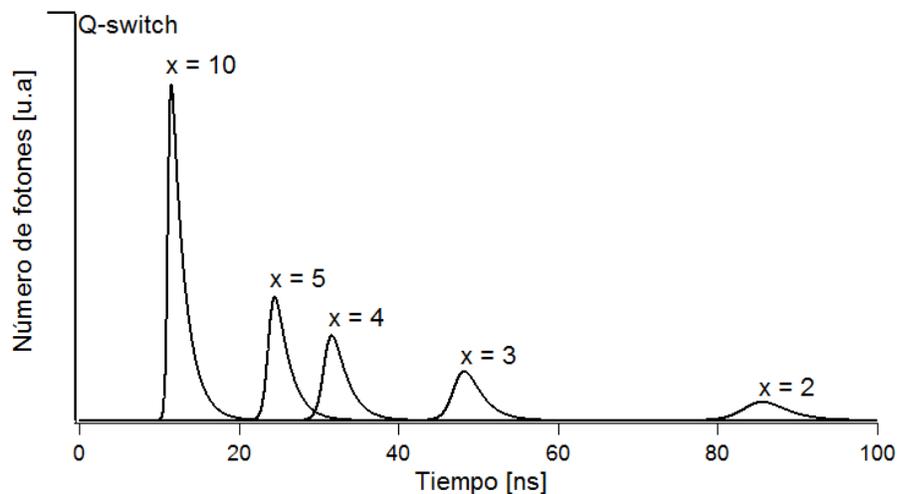


**Figura 6.** Evolución temporal de la inversión de población y el número de fotones en la generación de pulsos usando número de fotones. La línea negra muestra las pérdidas en la cavidad y el cambio del valor Q en la cavidad.

De la figura 6, vemos que una vez que se empieza a formar el pulso (alrededor de los 40 ns después de activar el Q switch) este mismo pulso provoca la reducción repentina de la inversión de población.

### 2.1.2 Ancho temporal y tiempo de formación del pulso

De acuerdo a la ecuación (12), entre mayor sea el bombeo aplicado al medio de ganancia, mayor inversión de población se podrá generar, por ende la amplificación será mayor y el ancho temporal del pulso se va a reducir. Este comportamiento se observa si se simula la generación de pulsos para diferentes valores de  $x$ , y se presenta el resultado en la figura 7.

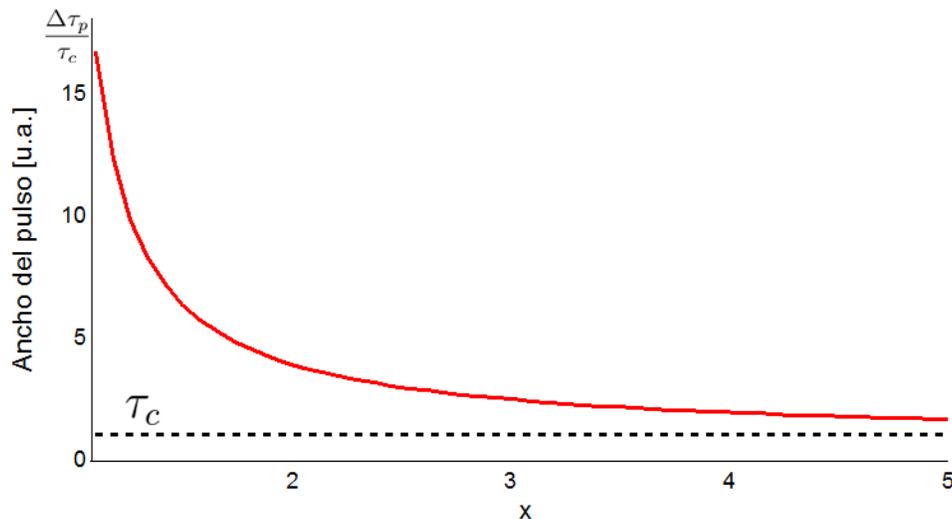


**Figura 7.** Tiempo de generación y ancho del pulso para diferentes valores de  $x$ .

De la figura 7 podemos apreciar la disminución del ancho temporal y el tiempo de formación del pulso con el aumento de  $x$ . El ancho temporal del pulso en función de  $x$  se puede estimar con la ecuación

$$\Delta\tau_p(x) = \tau_c \frac{xh^{inv}}{x - 1 - \ln x}, \quad (16)$$

donde  $\tau_c$  es el tiempo de vida del fotón en la cavidad presentada en la ecuación (10) y  $h^{inv}$  es la eficiencia de inversión de población y se define  $h^{inv} \equiv (N_i - N_f)/N_i$ , donde  $N_i$  es la inversión de población antes de que se forme el pulso y  $N_f$  es la inversión de población después de la formación del pulso. La ecuación (16) se obtiene al resolver las ecuaciones (11) con ciertas consideraciones antes y después de generarse el pulso y cuya obtención se describe con más detalle en el capítulo 8.4.4 del libro *Principles of Lasers* de Orazio Svelto (2010). La solución normalizada de la ecuación (16)  $\Delta\tau_p(x)/\tau_c$  se presenta en la figura 8.



**Figura 8.** Ancho temporal del pulso normalizado en función de  $x$ . La línea punteada marca el límite que puede alcanzar el ancho temporal del pulso.

De la figura 8 se observa que conforme se aumente el valor de  $x$ , el ancho temporal va a converger al tiempo de vida del fotón  $\tau_c$ ; éste es el valor mínimo que se puede obtener de ancho temporal del pulso.

El tiempo de formación del pulso en la cavidad se obtiene con las mismas consideraciones que la ecuación (16), y éste presenta un comportamiento dado por

$$T_f(x) = \frac{\tau_c}{x-1} \ln(\Phi_{ss}), \quad (17)$$

donde  $\Phi_{ss}$  es el número de fotones en la cavidad en un estado *cuasi-estable*, es decir  $\Phi_{ss}$  es el número total de todos los fotones generados por emisión estimulada sin que éstos salgan de la cavidad láser, cuando el medio de ganancia es bombeado  $x$  veces arriba del umbral de oscilación. La solución normalizada de la ecuación (17)  $T_f(x)/\tau_c$  se presenta en la figura 9.

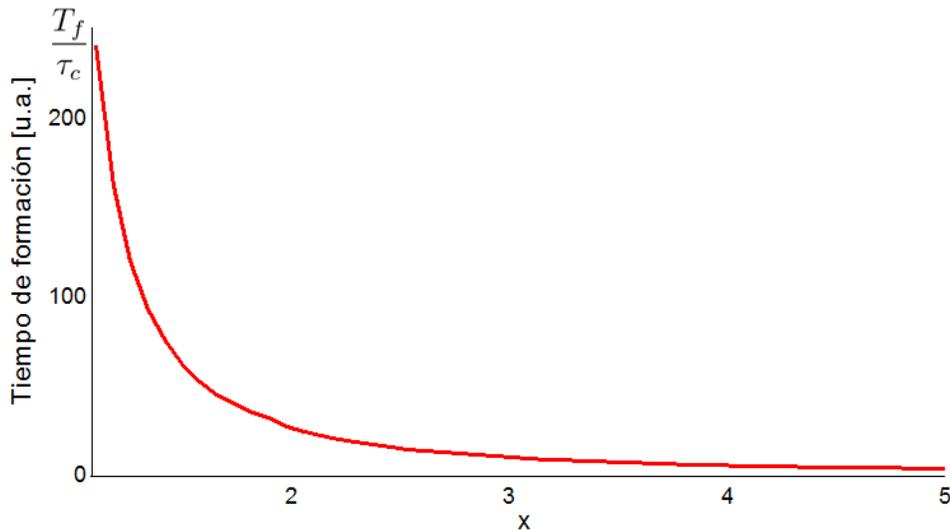


Figura 9. Tiempo de formación del pulso normalizado en función de  $x$  y múltiplos de  $\tau_c$ .

La figura 9 presenta un comportamiento similar al de la figura 8, sin embargo éstos no son iguales, ya que el ancho temporal del pulso va a tener un ancho mínimo limitado por el tiempo de vida del fotón en la cavidad, mientras que el tiempo de formación del pulso siempre va a disminuir.

### 2.1.3 Tiempo de Jitter

La naturaleza del ruido inicial en el material de ganancia genera efectos indeseados en el tiempo de formación del pulso al crear una incertidumbre temporal entre pulsos llamado tiempo de *jitter*. Las simulaciones de 10 pulsos consecutivos con ruido aleatorio inicial se muestran en la figura 10, donde se aprecia una formación aleatoria de pulsos y el tiempo de jitter para un valor de  $x = 3$  vista en la ecuación (14).

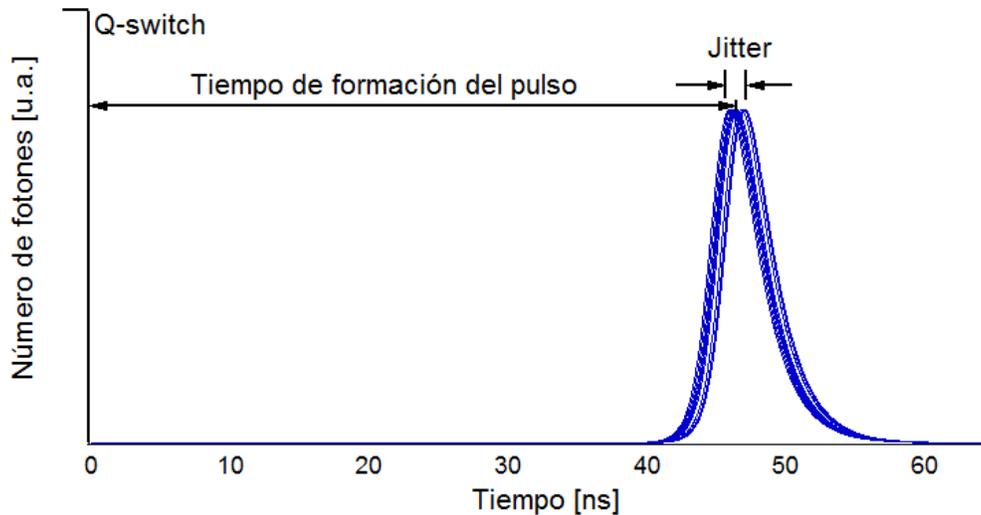


Figura 10. Tiempo de formación del pulso y la del tiempo de jitter para 10 pulsos consecutivos.

De la figura 10, podemos apreciar que el pulso no se genera siempre en el mismo tiempo, y la incertidumbre de formación del pulso es significativa. Éste es un comportamiento indeseado en la generación de pulsos de manera experimental.

#### 2.1.4 Limitantes del modelo de fotones

Una limitante de usar las ecuaciones (12) es que describen al pulso como un haz de fotones y no describen efectos de ondas. Para una descripción de la formación de pulsos resulta apropiado describirlos en función de campos electromagnéticos, y con ello de los modos longitudinales y transversales que se generan en la cavidad láser.

## 2.2 Ondas electromagnéticas

Las ecuaciones de Maxwell describen los fenómenos físicos relacionados con la electricidad y el magnetismo en función de los campos eléctricos  $\vec{E}(x, y, z, t)$  y magnéticos  $\vec{B}(x, y, z, t)$ . En forma diferencial, las ecuaciones de Maxwell son

$$\nabla \cdot \vec{E}(x, y, z, t) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (18.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(x, y, z, t) = 0, \quad (18.2)$$

$$\nabla \times \vec{E}(x, y, z, t) = -\frac{\partial \vec{B}(x, y, z, t)}{\partial t}, \quad (18.3)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \mu_0 \vec{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)}{\partial t}, \quad (18.4)$$

donde  $\varepsilon_0$  es la permitividad eléctrica en el vacío,  $\mu_0$  es la permitividad magnética en el vacío,  $\vec{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)$  es la densidad de corriente y  $\rho$  es la densidad de carga eléctrica. En el vacío, si suponemos que no hay corrientes ni cargas libres, es decir  $\vec{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \rho = 0$ , se puede demostrar usando álgebra vectorial que los campos satisfacen la ecuación de onda

$$\nabla^2 \vec{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)}{\partial t^2}, \quad (19.1)$$

$$\nabla^2 \vec{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t)}{\partial t^2}, \quad (19.2)$$

donde  $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ . Si se obtiene la amplitud del campo eléctrico, se puede obtener la amplitud del campo magnético y viceversa, por lo que podemos tomar cualquier amplitud para describir el comportamiento de la luz, siendo la amplitud del campo eléctrico la más usada.

La ecuación (19.1) describe a la luz como un campo electromagnético que se propaga como una onda y tiene dependencia espacial y temporal. Se puede suponer que el campo electromagnético dentro de la cavidad se puede expandir en sus dependencias temporales y espaciales como una sumatoria de campos eléctricos dados por

$$\vec{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \sum_n \vec{U}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) E_n(t), \quad (20)$$

donde  $\vec{U}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  es la dependencia espacial y  $E_n(t)$  es la dependencia temporal del campo eléctrico  $n$ . Esta suposición es válida siempre y cuando la dependencia espacial satisfaga las condiciones impuestas por la cavidad láser. Si utilizamos separación de variables, tanto la dependencia espacial como temporal del campo eléctrico para cada campo  $n$  dentro de la cavidad deben satisfacer las ecuaciones diferenciales

$$[\nabla^2 + k_n^2] \vec{U}_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0, \quad (21)$$

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_n^2 \right] E_n(t) = 0, \quad (22)$$

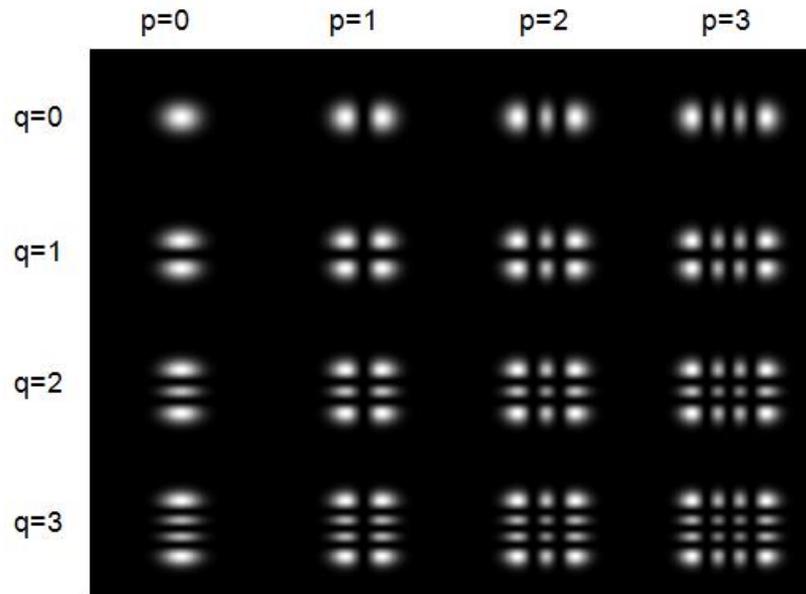
donde  $k_n$  es el número de onda del campo  $n$ , y  $\omega_n$  es su frecuencia angular de oscilación tomando en consideración que  $\omega_n = ck_n$  en el proceso de separación de variables. La ecuación (21) es conocida como la ecuación de Helmholtz, y se debe satisfacer siempre para poder hacer la expansión descrita en la ecuación (20). Las soluciones a las ecuaciones (21) y (22) están restringidas por las condiciones de frontera de la cavidad láser y esto limita a solo ciertas soluciones permitidas, llamados modos transversales y longitudinales.

### 2.2.1 Modos transversales

Si suponemos que la luz se propaga en la coordenada espacial  $z$ , y que los campos eléctricos generados en la cavidad no divergen mucho, las soluciones a la ecuación (21) son llamados *modos transversales* Hermite-Gaussianos. Los modos transversales son campos eléctricos que mantienen el mismo perfil espacial en las coordenadas  $(x, y)$  y su polarización, mientras se propagan de manera perpendicular a la dirección de propagación en la cavidad ( $z$ ) y fuera de ella. La solución de los modos Hermite-Gaussianos es proporcional a

$$U_{n,p,q}(x, y, z) \propto \frac{1}{w(z)} H_p \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_q \left( \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right), \quad (23)$$

donde  $H_p(x)$  es el polinomio de Hermite de orden  $p$  y  $w(z)$  es el radio de la amplitud del campo eléctrico transversal que se describirá má adelante. Los polinomios de Hermite son ortogonales, lo que indica que polinomios de diferente orden  $p$  para un sistema coordenado no interfieren, es decir, se ven como soluciones aisladas una de la otra. El perfil transversal de los modos se aprecia cuando medimos la intensidad  $I \propto |U_{n,p,q}(x, y, z)|^2$ . En la figura 11 presentamos la intensidad de los primeros modos transversales Hermite-Gaussianos para números  $p, q = 0, 1, 2, 3$ .



**Figura 11. Modos transversales Hermite-Gaussianos**

Es posible formar diferentes modos transversales al cambiar la alineación de los espejos, y/o ajustando la geometría del medio de ganancia. El modo  $p = q = 0$ , es conocido como modo Gaussiano. En la práctica, se busca este perfil espacial ya que permite: i) concentrar la energía del haz en un solo punto con mayor facilidad, ii) lograr mejor direccionamiento del haz, y iii) empalmar otros láseres con él con mayor facilidad.

El parámetro  $w(z)$  representa cómo cambia el ancho del haz al propagarse, y está descrita como:

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left( \frac{(z - z_0)\lambda}{\pi w_0^2} \right)^2}, \quad (24)$$

donde  $w_0$  es el radio de cintura Gaussiana,  $z_0$  es la posición donde se encuentra la cintura Gaussiana y  $\lambda$  es la longitud de onda del haz. Conforme el haz se propaga, el radio diverge conforme una línea recta, con un semiángulo dado por

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}. \quad (25)$$

El comportamiento de la ecuación (24) y (25) se presenta en la figura 12.

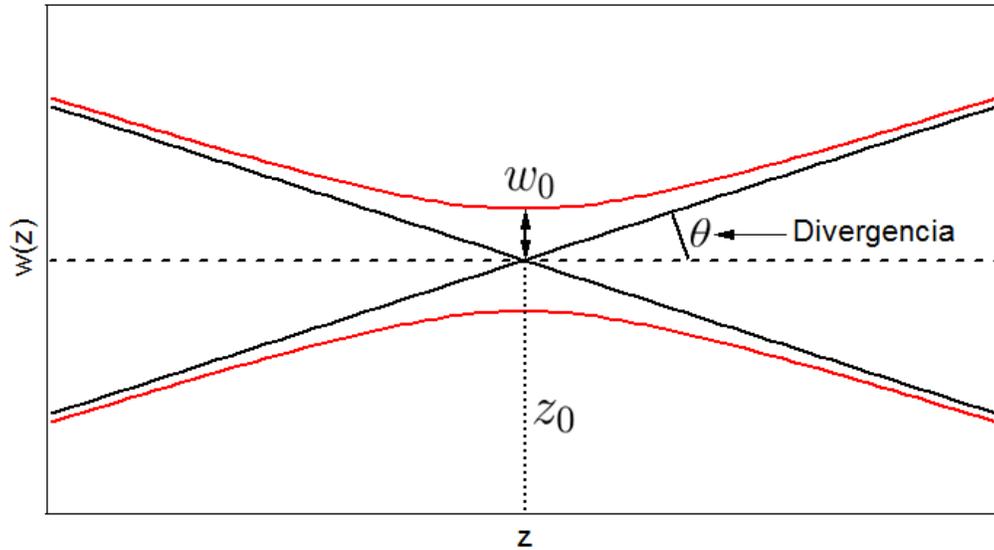


Figura 12. Radio de la amplitud del campo eléctrico para un haz gaussiano y de cómo se acerca al ángulo de divergencia conforme se aleja de  $z_0$ . Se muestra la cintura Gaussiana en  $z_0$ .

Sin embargo, en el laboratorio, los láseres no divergen como un haz Gaussiano ideal, sino que lo hacen conforme a

$$\theta = M^2 \frac{\lambda}{\pi w_0}, \quad (26)$$

donde el valor  $M^2$  es llamado el *factor de calidad de haz gaussiano* e indica qué tanto diverge un haz real de un haz gaussiano ideal (Nemes, Ruff y Siegman, 1994). El factor  $M^2$  surge de la contribución de cada uno de los modos diferentes a  $p = q = 0$  que pueden generarse dentro de la cavidad, lo cual expande el radio de amplitud del campo eléctrico a la salida. El valor más pequeño que puede tener el factor de calidad es  $M^2 = 1$ , y describe un haz ideal sin modos diferentes al Gaussiano dentro de la cavidad. Para estos haces no ideales el ancho  $W(z)$  está dado por una ecuación similar a la ecuación (24):

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \left( \frac{M^2 (z - z_0) \lambda}{\pi W_0^2} \right)^2}. \quad (27)$$

La obtención del valor  $M^2$  se hace de manera experimental al enfocar el haz láser con la ayuda de una lente y al tomar datos del radio de intensidad a diferentes valores de  $z$ , es decir se obtienen los valores  $W(z)$  de la ecuación (27). Después por computadora se hace un ajuste de mínimos cuadrados para ajustar los parámetros  $W_0$ ,  $z_0$  y  $M^2$  de la ecuación (27) a los datos experimentales, y con ello encontramos el valor del factor de calidad. Como el perfil transversal tiene geometría cartesiana, hay un valor de  $M^2$  para cada coordenada  $(x, y)$ , los cuales no necesariamente son iguales, ya que por la geometría de la cavidad láser, estos valores pueden presentar diferencias significativas.

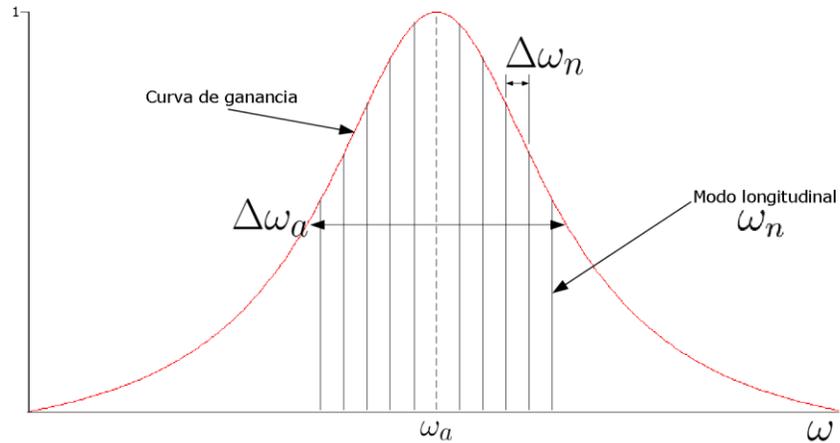
### 2.2.2 Modos longitudinales

Las soluciones a la ecuación (22) se conocen como *modos longitudinales*, y restringen las frecuencias de oscilación de la cavidad a solo ciertas frecuencias delimitadas por

$$\omega_n = \omega_c + n\Delta\omega_n = \omega_c + n\left(2\pi\frac{c}{2d}\right), \quad (28)$$

donde  $\omega_c$  es la frecuencia de oscilación central de la cavidad,  $\Delta\omega_n$  es la separación entre modos longitudinales para valores de  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm N_{modos}$  y  $d$  es la distancia óptica de la cavidad. Como se puede apreciar de la ecuación (28), las frecuencias de oscilación están en función de la longitud de la cavidad, y nos indica que si ajustamos el tamaño de la cavidad, podemos cambiar las frecuencias de oscilación permitidas. Con aumentar el tamaño de la cavidad una fracción de la longitud de onda de emisión podemos cambiar los modos permitidos y con ello las frecuencias de oscilación.

Si el bombeo aplicado al medio de ganancia es suficiente, se puede formar más de un modo longitudinal en la cavidad, lo cual se debe a la *curva de ganancia* del material amplificador, que describe la probabilidad de generar un modo longitudinal en el medio de ganancia. Por ejemplo, para medios de ganancia que presentan ensanchamiento homogéneo (medios cuya probabilidad de generar un fotón por emisión estimulada es igual para todos los átomos), la curva de ganancia se describe por una función Lorentziana y se muestra en la figura 13.



**Figura 13. Curva de ganancia de un material con ensanchamiento homogéneo, mostrando el ancho de ganancia del material y la separación de los modos longitudinales la cavidad.**

donde  $\Delta\omega_a$  es el ancho de frecuencia de ganancia del material amplificador,  $\Delta\omega_n$  es la separación entre modos longitudinales en la cavidad y  $\omega_a$  es la frecuencia de emisión central del material. Como se puede notar de la figura 13, es posible generar varios modos longitudinales en la cavidad, explícitamente se generan el número de modos  $N$  dado por

$$N = \frac{\Delta\omega_a}{\Delta\omega_n} = \frac{\Delta\omega_a}{2\pi} \frac{2d}{c}. \quad (29)$$

Entre mayor sea el ancho de ganancia del material, se pueden generar un mayor número de modos dentro de la cavidad. En la práctica se pueden restringir el número de modos dentro de la cavidad al introducir un elemento óptico llamado etalón, que funciona como una cavidad más pequeña dentro de la cavidad láser. Como el etalón es una cavidad, ésta presenta diferentes frecuencias de oscilación permitidas, y solamente las frecuencias que sean idénticas entre la cavidad láser y el etalón se podrán formar, por ende, disminuyendo el número de modos que se puedan formar en la cavidad.

Ya definidos los modos transversales y longitudinales, se deducirán las ecuaciones acopladas que describen la generación de pulsos usando campos eléctricos para tener una descripción más detallada de la interacción entre los modos longitudinales en una cavidad láser.

## 2.3 Obtención de las ecuaciones para la formación de luz usando campos eléctricos

Con el fin de poder describir con mayor detalle la formación de pulsos usando campos eléctricos, partimos de un sistema de ecuaciones que describen la evolución de la inversión de población  $\Delta N = N_2 - N_1$ , la amplitud del campo eléctrico  $E_n$  y la polarización del material  $P_n$  para cada modo longitudinal de la cavidad.

$$\frac{d^2 E_n(t)}{dt^2} + \gamma_c \frac{dE_n(t)}{dt} + \omega_c^2 E_n(t) = -\frac{1}{\epsilon} \frac{d^2 P_n(t)}{dt^2}, \quad (30.1)$$

$$\frac{d^2 P_n(t)}{dt^2} + \Delta\omega_a \frac{dP_n(t)}{dt} + \omega_a^2 P_n(t) = -K_n \Delta N(t) E_n(t), \quad (30.2)$$

$$\frac{d\Delta N(t)}{dt} + \frac{\Delta N(t) - \Delta N_0}{\tau_{21}} = \frac{1}{\hbar} \sum_n \frac{E_n(t)}{\omega_n} \frac{dP_n(t)}{dt}, \quad (30.3)$$

donde  $\omega_c$ ,  $\omega_n$  y  $\omega_a$  son las frecuencias de oscilación central de la cavidad, la frecuencia de oscilación del modo  $n$  y la frecuencia de emisión del medio de ganancia,  $\gamma_c$  son las pérdidas en la cavidad y están asociadas con el tiempo del fotón en la cavidad  $\tau_c$ ,  $\epsilon$  es la permitividad eléctrica del material de ganancia,  $\Delta\omega_a$  es el ancho espectral de emisión del material,  $K_n$  es una constante de acoplamiento,  $\tau_{21}$  es el tiempo de transición en los niveles de energía donde se genera la emisión estimulada,  $\hbar$  es la constante de reducida de Planck y  $\Delta N_0$  es la diferencia de población inicial causada por efectos mecánicos y térmicos del material. La deducción de la ecuación (30.1) parte de las ecuaciones de Maxwell para la generación de luz en una cavidad láser. La deducción de la ecuación (30.2) parte del modelo del electrón de Lorentz, y de cómo cambia la oscilación del electrón en presencia de un campo eléctrico externo. La deducción de la ecuación (30.3) parte del sistema de 2 niveles y la generación de átomos excitados en función de la polarización y el campo eléctrico en el material. La deducción formal de las ecuaciones (30) se pueden ver en el capítulo 24 del libro *Lasers* (Siegman, 1986). Estas ecuaciones permiten describir con facilidad la formación de un haz láser en una cavidad, sin embargo es solo una aproximación mientras la expansión de campos eléctricos en la cavidad de la ecuación (20) se cumpla en todo momento. Con estas ecuaciones podemos estudiar el campo eléctrico total en función del tiempo para

cualquier cavidad, pero si se introduce un campo eléctrico externo  $E_e$  en la cavidad, la ecuación de evolución del campo eléctrico (30.1) incluye un nuevo factor

$$\frac{d^2 E_n(t)}{dt^2} + \gamma_c \frac{dE_n(t)}{dt} + \omega_c^2 E_n(t) = -\frac{1}{\epsilon} \frac{d^2 P_n(t)}{dt^2} + a_n c_n \left( \frac{8\gamma_e}{\epsilon V_c} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{dE_e(t)}{dt}, \quad (31)$$

donde  $\gamma_e$  son las pérdidas por acoplamiento de la cavidad del campo externo,  $V_c$  es el volumen de la cavidad resonante,  $a_n$  es el factor de acoplamiento longitudinal del campo externo y  $c_n$  es el factor de acoplamiento transversal del campo externo, los cuales se explicarán a mayor detalle más adelante.

Las ecuaciones (30.2, 30.3 y 31) pueden simplificarse haciendo varias suposiciones, entre ellas está el expresar los campos eléctricos para cada modo, la polarización del medio para cada modo y el campo eléctrico externo como ondas planas con amplitud dependiente del tiempo y que oscilan a una frecuencia  $\omega_n$  y  $\omega_e$ , dada por

$$E_n(t) = \frac{1}{2} [\tilde{E}_n(t) e^{-i\omega_n t} + c.c.], \quad (32.1)$$

$$P_n(t) = \frac{1}{2} [\tilde{P}_n(t) e^{-i\omega_n t} + c.c.], \quad (32.2)$$

$$E_e(t) = \frac{1}{2} [\tilde{E}_e(t) e^{-i\omega_e t} + c.c.], \quad (32.3)$$

donde *c.c.* significa el complejo conjugado de la primera amplitud e  $i = \sqrt{-1}$ . Por comodidad para escribir, expresaremos las amplitudes dependientes del tiempo como:  $\tilde{E}_e(t) = \tilde{E}_e$ ,  $\tilde{P}_n(t) = \tilde{P}_n$  y  $\tilde{E}_n(t) = \tilde{E}_n$ . La tilde denota que es un campo con amplitud y fase. Si las ondas planas (32) las derivamos conforme lo indican las ecuaciones (30.2, 30.3 y 31) y factorizamos, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \tilde{E}_n}{dt^2} + (\gamma_c - 2i\omega_n) \frac{d\tilde{E}_n}{dt} + (\omega_c^2 - \omega_n^2 - i\omega_n \gamma_c) \tilde{E}_n \\ & = -\frac{1}{\epsilon} \frac{d^2 \tilde{P}_n}{dt^2} - 2i\omega_n \frac{d\tilde{P}_n}{dt} - \omega_n^2 \tilde{P}_n + a_n c_n \left( \frac{8\gamma_e}{\epsilon V_c} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{d\tilde{E}_e}{dt} - i\omega_e \tilde{E}_e \right], \quad (33.1) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2\tilde{P}_n}{dt^2} + (\Delta\omega_a - 2i\omega_n)\frac{d\tilde{P}_n}{dt} + (\omega_a^2 - \omega_n^2 - i\omega_n\Delta\omega_a)\tilde{P}_n = -K_n\Delta N\tilde{E}_n, \quad (33.2)$$

$$\frac{d\Delta N}{dt} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{\tau_{21}} = \frac{1}{4\hbar} \sum_n \tilde{E}_n\tilde{P}_n^* - \tilde{E}_n^*\tilde{P}_n. \quad (33.3)$$

Ahora suponemos que la amplitud del campo eléctrico y la polarización del material cambian muy lentamente en comparación a un periodo de oscilación de la onda, es decir

$$\left| \frac{d^2\tilde{E}_n}{dt^2} \right| < \left| \gamma_c \frac{d\tilde{E}_n}{dt} \right| \ll \left| \omega_n \frac{d\tilde{E}_n}{dt} \right|, \quad (34)$$

$$\left| \frac{d^2\tilde{P}_n}{dt^2} \right| < \left| \Delta\omega_a \frac{d\tilde{P}_n}{dt} \right| \ll \left| \omega_n \frac{d\tilde{P}_n}{dt} \right|, \quad (35)$$

y si además suponemos que la amplitud del campo eléctrico externo no cambia con el tiempo  $\tilde{E}_e(t) \approx cte$ , obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\frac{d\tilde{E}_n}{dt} + \left[ \frac{\gamma_c}{2} - i(\omega_c - \omega_n) \right] \tilde{E}_n = \frac{i\omega_n}{2\epsilon} \tilde{P}_n + a_n c_n \frac{\omega_e}{\omega_n} \left( \frac{2\gamma_e}{\epsilon V_c} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{E}_e, \quad (36.1)$$

$$\frac{d\tilde{P}_n}{dt} + \left[ \frac{\Delta\omega_a}{2} + i(\omega_a - \omega_n) \right] \tilde{P}_n = -\frac{iK_n\Delta N\tilde{E}_n}{\omega_n}, \quad (36.2)$$

$$\frac{d\Delta N}{dt} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{\tau_{21}} = \frac{1}{4\hbar} \sum_n \tilde{E}_n\tilde{P}_n^* - \tilde{E}_n^*\tilde{P}_n, \quad (36.3)$$

suponiéndose que  $(\omega_c^2 - \omega_n^2) = (\omega_c + \omega_n)(\omega_c - \omega_n) \approx 2\omega_n(\omega_c - \omega_n)$  por la cercanía de las frecuencias de oscilación. La suposición que la amplitud varía lentamente con el tiempo (ecuaciones 34 y 35) se conoce como *aproximación de envolvente lenta* (SVEA por sus siglas en inglés) y es una aproximación válida cuando el ancho de frecuencia del modo longitudinal es pequeño, que para los modos de la cavidad láser se llega a cumplir.

Podemos simplificar las ecuaciones (36) suponiendo que la polarización del material cambia muy rápidamente a comparación del tiempo de vida del fotón  $\tau_c$  lo que ocasiona

que la polarización tenga una respuesta casi instantánea a la influencia del campo eléctrico en el material, teniendo por consecuencia que el cambio de polarización del material es aproximadamente cero  $d\tilde{P}_n/dt \approx 0$ , con lo cual podemos declarar una polarización  $\tilde{P}_n$  que cambia linealmente con el campo eléctrico  $\tilde{E}_n$

$$\tilde{P}_n = -\frac{K_n}{\Delta\omega_a\omega_n}\Delta N\beta_n \left[ i + \frac{2(\omega_a - \omega_n)}{\Delta\omega_a} \right] \tilde{E}_n, \quad (37)$$

donde hemos introducido el factor  $\beta_n$  que indica la probabilidad de un modo  $n$  de formarse dentro de la cavidad, y describe un ensanchamiento homogéneo que se ajusta a una curva Lorentziana, y está definido como

$$\beta_n = \frac{1}{1 + \left( \frac{2(\omega_a - \omega_n)}{\Delta\omega_a} \right)^2}. \quad (38)$$

La constante de acoplamiento  $K_n$  se define en función de la polarización del material, y para casos constantes está definida como  $K_n = \eta_n \varepsilon \sigma c \Delta\omega_a / n_{medio}$ , donde  $\sigma$  es la sección transversal de emisión del material,  $n_{medio}$  es el índice de refracción del medio de ganancia y  $\eta_n$  es el factor de acoplamiento del modo longitudinal con el medio de ganancia. Con esto en mente, la polarización la podemos escribir como

$$\tilde{P}_n = -\frac{\eta_n \varepsilon \sigma c}{n_{medio} \omega_n} \Delta N \beta_n \left[ i + \frac{2(\omega_a - \omega_n)}{\Delta\omega_a} \right] \tilde{E}_n. \quad (39)$$

Sustituyendo la polarización (39) en las ecuaciones del campo eléctrico (36.1) y diferencia de población (36.3), se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{d\Delta N}{dt} + \frac{\Delta N - \Delta N_0}{\tau_{21}} = -\frac{\varepsilon \sigma c}{2\hbar n_{medio}} \Delta N \sum_n \frac{\eta_n \beta_n |\tilde{E}_n|^2}{\omega_n}, \quad (40.1)$$

$$\frac{d\tilde{E}_n}{dt} = \left[ -\frac{\gamma_c}{2} + \frac{\sigma c \Delta N \eta_n \beta_n}{2n_{medio}} - i \left[ (\omega_c - \omega_n) + \frac{\sigma c \Delta N \eta_n \beta_n 2(\omega_a - \omega_n)}{n_{medio} \Delta\omega_a} \right] \right] \tilde{E}_n + a_n c_n \frac{\omega_e}{\omega_n} \left( \frac{2\gamma_e}{\varepsilon V_c} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{E}_e. \quad (40.2)$$

Vamos a hablar de los términos de fase en la ecuación del campo eléctrico (40.2), es decir los que están multiplicados por  $i$ . El primer paréntesis es consecuencia de la fase relativa entre la frecuencia central de la cavidad y el modo  $n$ , mientras que el segundo

término toma en consideración efectos que presenta el material de ganancia en la presencia de un campo eléctrico, que llega a tener una contribución mucho menor que el primero, es decir

$$|\omega_c - \omega_n| \gg \left| \frac{\sigma c \Delta N \eta_n \beta_n}{n_{medio}} \frac{2(\omega_a - \omega_n)}{\Delta \omega_a} \right|, \quad (41)$$

por lo que podemos despreñar el segundo término. Sin embargo, no son todas las interacciones que se tienen que tomar en cuenta, ya que en la formación del campo eléctrico de cada modo también hay emisión espontánea  $\tilde{E}_{esp}$  causada por el ruido del material de ganancia. La diferencia de población también presenta un término de bombeo  $R_p$  que nos permitirá hacer la inversión de población necesaria para que nuestro láser funcione. Además supondremos que la diferencia de población inicial es mucho menor que la diferencia de población que se genera en el medio de ganancia es decir  $\Delta N - \Delta N_0 \approx \Delta N$ . Las ecuaciones finales a implementar son

$$\frac{d\tilde{E}_n}{dt} = \left[ -\frac{\gamma_c}{2} + \frac{\sigma c \Delta N \eta_n \beta_n}{2n_{medio}} - i(\omega_c - \omega_n) \right] \tilde{E}_n + a_n c_n \frac{\omega_e}{\omega_n} \left( \frac{2\gamma_e}{\epsilon V_c} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{E}_e + \tilde{E}_{esp}, \quad (42.1)$$

$$\frac{d\Delta N}{dt} = -\frac{\Delta N}{\tau_{21}} - \frac{\epsilon \sigma c}{2\hbar n_{medio}} \Delta N \sum_n \frac{\beta_n \eta_n |\tilde{E}_n|^2}{\omega_n} + R_p. \quad (42.2)$$

La ecuación de la inversión de población (42.2) tiene un comportamiento similar a la ecuación (11.1), ya que presentan un término de pérdidas por emisión espontánea, un término de pérdidas asociadas a la emisión estimulada y un término de bombeo. Si suponemos un solo modo en la cavidad  $\tilde{E}_0$ , y que no haya campo externo ni ruido inicial ( $\tilde{E}_e = 0, \omega_c = \omega_n$ ), la ecuación (42.1) se escribe como

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dt} = \left[ -\frac{\gamma_c}{2} + \frac{\sigma c \eta_0 \Delta N \beta_0}{2n_{medio}} \right] \tilde{E}_0. \quad (43)$$

La ecuación (43) en comparación con la ecuación (11.2) se puede apreciar que tienen un comportamiento similar, al presentar un término de pérdidas en la cavidad, y un término de generación de campo eléctrico asociado a la emisión estimulada.

### 2.3.1 Comparación entre sistemas de ecuaciones

Para comparar la equivalencia entre la ecuación (43) y la ecuación (11.2), describiremos el campo eléctrico en función del número de fotones

$$\Phi = \frac{\text{Energía en la cavidad}}{\text{Energía por fotón}} = \frac{\epsilon/2V_c|\tilde{E}_0|^2}{\hbar\omega_n} = \frac{\epsilon V_c}{2\hbar\omega_n}\tilde{E}_0\tilde{E}_0^*. \quad (44)$$

Si derivamos la ecuación (44) con respecto al tiempo y usamos la ecuación (43) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\epsilon V_c}{2\hbar\omega_n} \left[ \frac{d\tilde{E}_0}{dt} \tilde{E}_0^* + \tilde{E}_0 \frac{d\tilde{E}_0^*}{dt} \right], \\ \frac{d\Phi}{dt} &= \frac{\epsilon V_c}{2\hbar\omega_n} \tilde{E}_0\tilde{E}_0^* \left[ -\frac{\gamma_c}{1} + \frac{\sigma c \Delta N \eta_0 \beta_0}{n_{medio}} \right], \\ \therefore \frac{d\Phi}{dt} &= \Phi \left[ -\frac{\gamma_c}{1} + \frac{\sigma c \Delta N \eta_0 \beta_0}{n_{medio}} \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

De la ecuación (45) nos damos cuenta que es equivalente a la ecuación que obtuvimos anteriormente para el número de fotones en la cavidad (11.2). Si sustituimos la ecuación (44) para un solo modo de la cavidad en la ecuación (42.2), obtenemos la inversión de población en función del número de fotones

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta N}{dt} &= -\frac{\Delta N}{\tau_{21}} - \frac{\sigma c \beta_0 \eta_0 \epsilon |\tilde{E}_0|^2}{n_{medio} 2\hbar\omega_0} \Delta N + R_p \\ \therefore \frac{d\Delta N}{dt} &= -\frac{\Delta N}{\tau_{21}} - \frac{\sigma c \beta_0 \eta_0 \Phi}{n_{medio} V_c} \Delta N + R_p \end{aligned} \quad (46)$$

Las ecuaciones (45) y (46) son equivalentes a las ecuaciones que obtuvimos para el número de fotones con un enfoque diferente. En primera aproximación, podemos suponer que la distribución de átomos es homogénea y el modo longitudinal se empalma uniformemente con el medio de ganancia, por lo que podemos escribir  $\eta_0 = V_{medio}/V_{cavidad}$  y  $\beta_0 = 1$  para recuperar las ecuaciones (11).

$$\frac{d\Phi}{dt} = \Phi \left[ -\frac{\gamma_c}{1} + \frac{\sigma c \Delta N}{n_{medio}} \frac{V_{medio}}{V_{cavidad}} \right], \quad (47.1)$$

$$\frac{d\Delta N}{dt} = -\frac{\Delta N}{\tau_{21}} - \frac{\sigma c}{n_{medio}} \frac{V_{medio}}{V_{cavidad}} \frac{\Phi}{V_c} \Delta N + R_p. \quad (47.2)$$

De la misma manera, nos damos cuenta de las limitaciones del modelo propuesto en las ecuaciones (11) de usar fotones para la generación de pulsos, que es suponer un solo modo longitudinal dentro de la cavidad y no hay campo externo.

### 2.3.2 Simulación de pulsos usando campos eléctricos

Al igual que las simulaciones para las ecuaciones (11), vamos a suponer que la inversión de población se encuentra en su valor máximo posible  $R_p$ , y empezamos a resolver la ecuación cuando cambiamos el factor Q de la cavidad, es decir resolvemos las ecuaciones (42) cuando permitimos al láser oscilar. En primera instancia supondremos un solo modo longitudinal en la cavidad sin campo externo ( $\vec{E}_e = 0$ ). Los resultados de esta simulación se presentan en la figura 12. Las constantes y consideraciones de integración se encuentran en el apéndice 3, mientras que el código usado se encuentra en el anexo 2.

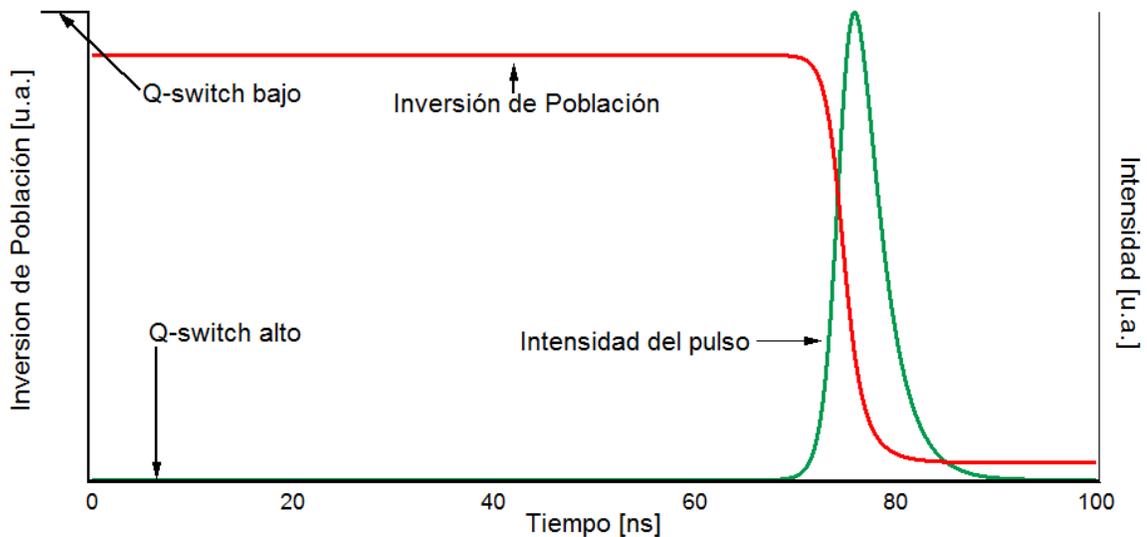
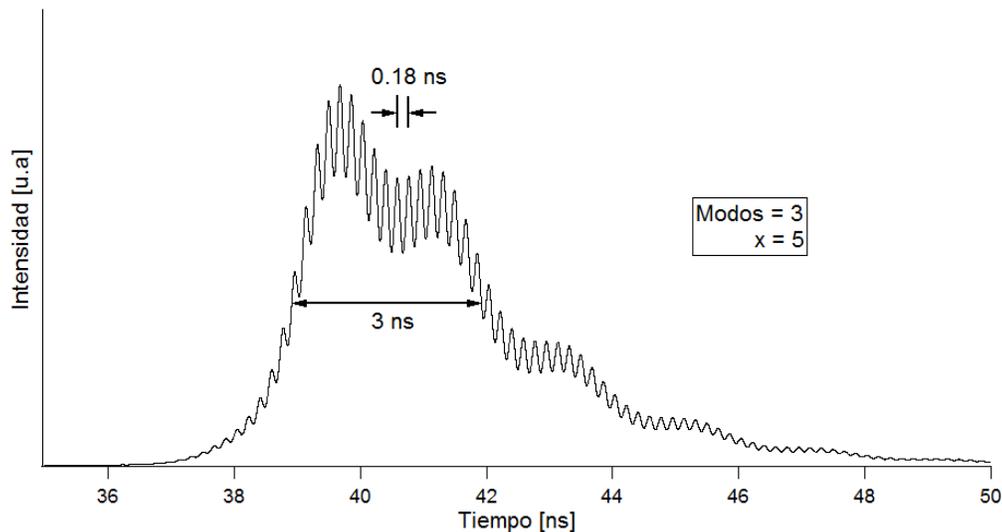


Figura 14. Evolución temporal de la inversión de población y la intensidad del campo eléctrico en la generación de pulsos usando campos eléctricos. La línea negra muestra las pérdidas en la cavidad y el cambio del valor Q en la cavidad.

Si comparamos la figura 6 con la 14, podemos apreciar un comportamiento idéntico si generamos un solo modo longitudinal en la cavidad. La intensidad del pulso es proporcional a la amplitud del campo eléctrico  $I \propto \sum_n |\tilde{E}_n|^2$ .

A comparación de las ecuaciones (11), las ecuaciones (42) presentan un término que genera fase entre los campos eléctricos, lo cual afecta de manera significativa en la formación de pulsos. Supondremos 3 modos longitudinales dentro de la cavidad con un bombeo  $x = 5$ , y presentamos el resultado en la figura 15.



**Figura 15. Fenómeno del batimiento para tres modos longitudinales en la cavidad con  $x = 5$ .**

De la figura 15 se observan oscilaciones que afectan el perfil temporal del pulso. Estas oscilaciones son causadas por efectos de interferencia dentro de la cavidad generada por la interacción de todos los modos longitudinales en la cavidad, y tiene por nombre *batimiento de modos*. Las oscilaciones son menores que el ancho temporal del pulso, y tienen un periodo delimitado por el tiempo de vida del fotón en la cavidad. Es por el efecto de batimiento de modos que se busca un solo modo longitudinal en la cavidad.

### 2.3.3 Resumen de efectos indeseados

Como se pudo ver en las simulaciones, los efectos indeseados más comunes en la formación de pulsos usando la técnica de Q-switching son el jitter y el batimiento de modos, que de manera experimental afectan la variación en el tiempo de formación del pulso vista en la figura (10), y el perfil espacial del campo eléctrico con variaciones de

intensidad en su perfil temporal como se presentó en la figura (15). Estas variaciones parten de la naturaleza aleatoria del ruido inicial y de la capacidad de la cavidad láser de permitir más de un solo modo de oscilación en la cavidad. Una de las técnicas que permite reducir estos efectos indeseados es conocida como *semillado*, la cual se explica a continuación.

### 2.3.4 Teoría del semillado

Como se ha descrito anteriormente, los modos longitudinales en la cavidad se generan del ruido, lo cual afecta en la formación de pulsos con el tiempo de jitter y genera batimiento por generar varios modos longitudinales en la cavidad. Si en vez de usar el ruido inicial usamos una señal externa como semilla inicial y que su frecuencia de oscilación sea idéntica a uno de los modos de la cavidad, este modo se generará primero y por encima de los demás. Al momento de formarse el pulso, éste copiará las propiedades de la semilla inyectada (frecuencia de oscilación, polarización, dirección de propagación, etc.), permitiendo la formación de un pulso sin efectos indeseados.

La señal externa de semillado se expresó anteriormente en la ecuación (32), de la forma

$$\text{Señal externa} \rightarrow a_n c_n \frac{\omega_e}{\omega_n} \left( \frac{2\gamma_e}{\epsilon V_c} \right)^{\frac{1}{2}} \tilde{E}_e. \quad (48)$$

La constante  $a_n$  de la ecuación (48) es el factor de acoplamiento longitudinal, e indica que tanto se empatan los modos longitudinales de la cavidad con la semilla. Suponiendo que la señal externa es monocromática (que tiene una sola frecuencia de oscilación), podemos escribir el factor de acoplamiento longitudinal como

$$a_n = \text{sinc} \left[ \frac{\pi}{\Delta\omega_n} (\omega_n - \omega_e) \right], \quad (49)$$

donde  $\omega_e$  es la frecuencia de oscilación de la semilla,  $\omega_n$  es la frecuencia de oscilación del modo  $n$  y  $\Delta\omega_n$  es la separación entre modos longitudinales en la cavidad láser. El comportamiento está descrito por una función *sinc*, y se puede notar que para  $\omega_n = \omega_e$ , el acoplamiento es completo para el modo  $n$  con  $a_n = 1$ .

El factor de acoplamiento transversal  $c_n$  de la ecuación (48), está relacionado con el empate espacial entre el modo transversal de la cavidad y el perfil espacial del haz semilla, y está definido como

$$c_n = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_n(x, y, z)^* \cdot \vec{U}_e(x, y, z) dx dy}{\left[ \iint_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_n(x, y, z)^* \cdot \vec{U}_n(x, y, z) dx dy * \iint_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_e(x, y, z)^* \cdot \vec{U}_e(x, y, z) dx dy \right]^{1/2}}, \quad (50)$$

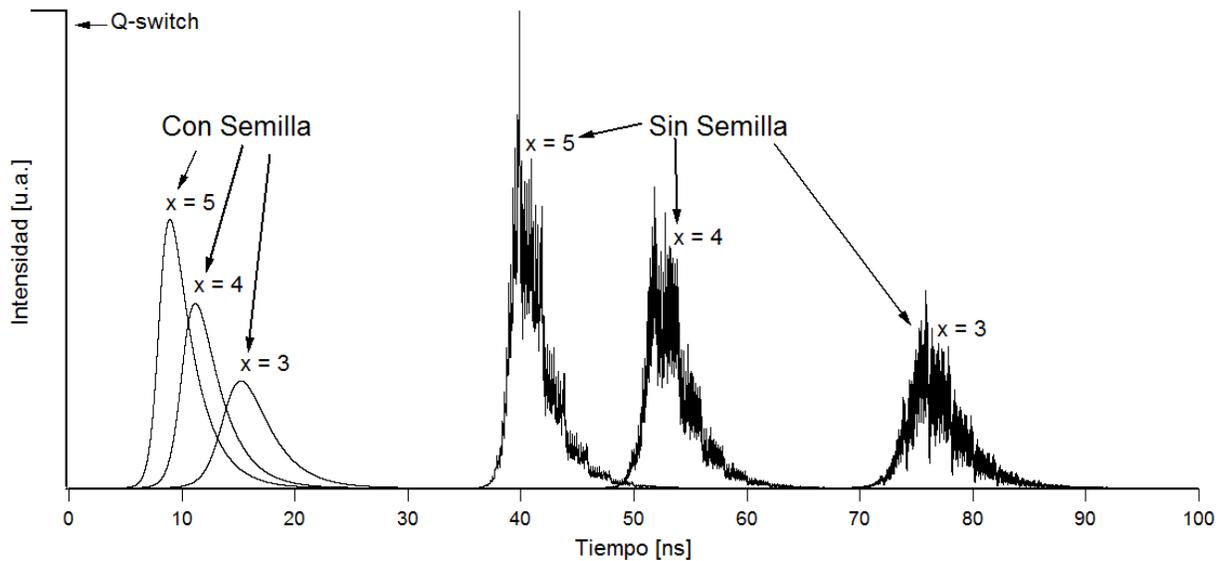
donde  $\vec{U}_n(x, y, z)$  y  $\vec{U}_e(x, y, z)$  son las amplitudes espaciales del modo  $n$  y del campo externo, respectivamente. Como los modos transversales son ortogonales, se requiere que el modo transversal de la cavidad y el perfil espacial de la señal externa sean iguales para poder interactuar. Si suponemos que los dos campos son Gaussianos, que las cinturas de los campos se propagan en la misma dirección ( $z_n = z_e$ ) y que están en el mismo plano transversal ( $x_n = x_e, y_n = y_e$ ), entonces el coeficiente de acoplamiento queda en función de las cinturas de los dos haces

$$c_n = \frac{2w_{0n}w_{0e}}{w_{0n}^2 + w_{0e}^2}, \quad (51)$$

y se puede apreciar que si las cinturas son del mismo tamaño  $w_{0n} = w_{0e}$ , el acoplamiento espacial se hace unitario y se tiene un empalme transversal completo. Un tratamiento más extenso para la constante de acoplamiento espacial se puede ver en el trabajo de Barnes y Barnes (1993).

### 2.3.5. Simulaciones con semilla

Retomando las ecuaciones de generación de pulsos (42), vamos a resolver numéricamente la formación de pulsos con una señal externa o semilla dentro de la cavidad. Simulamos la generación de pulsos en función del bombeo  $x$ , suponiendo una semilla de amplitud constante ( $\tilde{E}_e = 1 \times 10^{-12} N/C$ ), cuyo acoplamiento espacial y espectral sea completo ( $c_n = a_n = 1$ ) y considerando 11 modos longitudinales en la cavidad. Los resultados se muestran en la figura 16 en comparación al pulso generado sin señal externa.



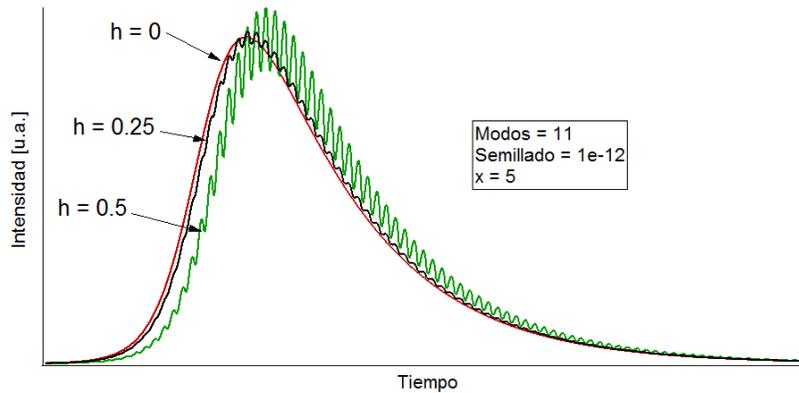
**Figura 16.** Efecto del semillado en la generación de pulsos para una cavidad láser para diferentes valores de  $x$ .

En la figura 16 se observa que cuando introducimos una semilla a la cavidad las variaciones de intensidad causadas por el batimiento de modos se eliminan y se presenta un tiempo menor de formación del pulso. La figura 16 muestra el potencial de aplicar la técnica del semillado a un sistema generador de pulsos usando Q-switching, ya que las variaciones se eliminan y presentan un tiempo de formación menor.

En la práctica, no siempre se obtienen constantes de acoplamiento unitarias, debido a efectos mecánicos de la cavidad (vibraciones) o efectos térmicos (la cavidad se expande y contrae) lo cual cambia la longitud total de la cavidad, y con ello la separación de los modos longitudinales. Para analizar estas variaciones y como afectan al empalme longitudinal en la formación del pulso, supongamos que la constante de acoplamiento espacial sigue siendo unitaria ( $c_n = 1$ ), pero que la frecuencia de oscilación externa se encuentre entre 2 modos de la cavidad y separados una fracción  $h$  de uno de estos modos

$$\omega_e = \omega_c + h\Delta\omega_c \quad (52)$$

En la figura 17 se muestra la simulación de la formación de pulsos considerando estas variaciones.



**Figura 17. Efectos del semillado al tener una constante de acoplamiento longitudinal no unitaria.**

De la figura 17 se observa el batimiento de modos en el pulso en términos del grado de empalme de la semilla con dos modos de la cavidad. Para corregir este efecto, se requiere de un elemento que permita ajustar el tamaño de la cavidad en tiempo real, y que obligue a que un modo longitudinal de la cavidad se mantenga empalmado en todo momento.

## 2.4 Antecedentes del semillado

Los láseres y OPO's (osciladores ópticos paramétricos, que son fuentes de luz similares a los láseres) pulsados semillados se comenzaron a estudiar con los trabajos de Bjorkholm y Danielmeyer (1969) al hacer un OPO semillado por un láser de Nd:YAG, demostrando el principio de empalme de modos. Schmitt y Rahn (1986) propusieron semillar una cavidad láser de dos espejos aislando el haz semilla con un rotador de Faraday. Otra variante es usar una cavidad en forma de anillo (Ball, 1987; Chekhlov, Fitzpatrick, Rosser, Western y Ashworth, 2002; Mahnke y Wirth, 2010), que permite la amplificación en una sola dirección, protegiendo al láser semilla de posibles reflexiones.

Uno de los sistemas más usados de control de empate del semillado con el amplificador, fue propuesto por Larry Rahn (1984), el cual ajusta el tamaño de la cavidad del láser a partir del tiempo de retraso entre el generador de pulsos (Q-switch) y la salida.

La semilla puede ser continua o pulsada. De forma continua, se ha aplicado a láseres de Nd:YAG (Park, Giuliani y Byer, 1984, Schmitt *et al*, 1985) y en láseres de Ti:Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> (Barnes, Barnes, Wang y Edwards, 1993), y de forma pulsada en láseres de modo amarrado en Nd:vidrio (Basu y Byer, 1990).

## Capítulo 3. Desarrollo experimental: diseño, fabricación y caracterización de los componentes usados

La propuesta de este proyecto de tesis es fabricar un láser pulsado semillado, y para eso se requiere de un láser semilla, un láser generador de pulsos, y un sistema que permita empalmar los modos del láser semilla con los modos del láser generador de pulsos. En este capítulo se presentará el láser maestro y el láser esclavo y las características importantes de cada componente, entre ellos las curvas de potencia de emisión en función del bombeo, el factor de calidad del haz  $M^2$  y la separación y ancho espectral de modos longitudinales en la cavidad. Se describe cómo se generan pulsos usando un modulador electroóptico, así como el sistema de ajuste de la cavidad y su procedimiento de caracterización.

### 3.1 Láser maestro

Como láser maestro en este proyecto de tesis se ha usado un láser de onda continua (cw) marca MICOS CA – 1230 que emite a  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ , cuyo medio de ganancia es un cristal de Nd:YAG que tiene en una de sus caras un espejo altamente reflejante a  $\lambda = 1064 \text{ nm}$  y en la otra cara una película anti-reflejante a  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ ; es bombeado por un diodo láser que emite a  $\lambda = 808 \text{ nm}$ . El láser cuenta con un espejo de salida con radio de curvatura ( $R_c$ ) de  $100 \text{ mm}$  y reflectancia del 98 % a  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ . El esquema del láser maestro se presenta en la figura 18.

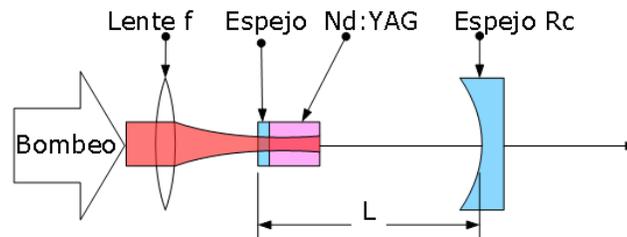
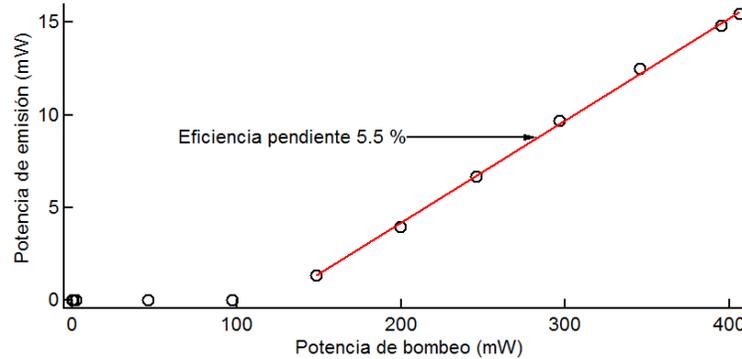


Figura 18. Esquema del láser maestro

El tamaño de la cavidad  $L$  es de aproximadamente  $23 \text{ mm}$  y se diseñó así para generar una separación de modos longitudinales muy grande ( $\Delta\nu_n = \Delta\omega_n/2\pi \approx 6.5 \text{ GHz}$ ) y permitir seleccionar un solo modo longitudinal con mayor facilidad.

### 3.1.1 Potencia de emisión del láser maestro

Se midió la potencia de emisión del láser maestro en función de la potencia de bombeo usando un fotodiodo de silicio marca Thorlabs S121C (tiempo de respuesta  $< 1 \mu s$ ) y el medidor de potencia marca Thorlabs PM100USB calibrado a  $1064 \text{ nm}$ . El resultado se presenta en la figura 19.



**Figura 19. Potencia de emisión del láser maestro en función de la potencia de bombeo. Muestra una eficiencia pendiente de 5.5%**

La figura 19 muestra un comportamiento lineal de potencia de emisión en función del bombeo. El comportamiento lineal se puede comprobar si las ecuaciones de razón (2) se resuelven suponiendo un estado estacionario, es decir, que la cantidad de átomos excitados en cada nivel se mantiene constante. El comportamiento lineal se ajusta a la ecuación

$$P_o = \begin{cases} \eta(P_{in} - P_{umbral}) & P_{in} > P_{umbral}, \\ 0 & P_{in} < P_{umbral}, \end{cases} \quad (53)$$

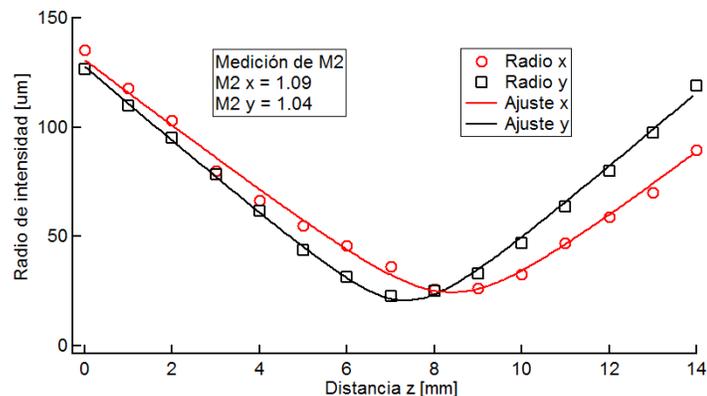
donde  $P_o$  es la potencia de emisión del láser,  $P_{in}$  es la potencia de bombeo,  $P_{umbral}$  es la potencia umbral y  $\eta$  es la eficiencia pendiente. El láser empieza a emitir cuando la potencia de bombeo excede la potencia umbral ( $P_{in} > P_{umbral}$ ), y la eficiencia pendiente es la fracción de incremento en potencia de emisión una vez que éste empieza a emitir. Al hacer el ajuste de los datos experimentales de la figura 16 con la ecuación (53) se muestra que el láser maestro presenta una potencia de bombeo umbral de  $124 \text{ mW}$  con una eficiencia pendiente de 5.5%.

La eficiencia pendiente toma en consideración varios factores en el proceso de formación de láser, entre ellos: la eficiencia cuántica de emisión, la eficiencia

relacionada con pérdidas en la cavidad y por factores de alineación de los espejos de la cavidad. La eficiencia máxima que permite el láser está relacionada con la eficiencia cuántica de emisión, que por conservación de energía, es la máxima eficiencia que permite el átomo al generar emisión estimulada en el medio de ganancia y está en función de las longitudes de onda de emisión y bombeo  $\eta_{max} = \lambda_{emision}/\lambda_{bombeo} = 0.75 \rightarrow 75 \%$ . Como se puede notar, la eficiencia pendiente del láser maestro es mucho menor que la eficiencia máxima teórica, y para el diseño de este láser se debe principalmente a la alineación de los espejos en la cavidad al obligar al láser maestro a emitir en un modo transversal Gaussiano, teniendo por consecuencia una fuerte disminución en su eficiencia pendiente.

### 3.1.2 Factor de calidad $M^2$ del láser maestro

Se midió el factor de calidad  $M^2$  al enfocar el haz del láser maestro con una lente de 50 mm de distancia focal en el perfilómetro óptico Thorlabs BP104-IR, el cual mide y reconstruye el perfil de intensidad del haz láser por computadora y muestra los valores del diámetro de intensidad gaussiano  $2W(z)$  descrito anteriormente en el capítulo 2.2.1 para los ejes coordenados  $(x, y)$ . Se obtuvieron valores del radio de intensidad del láser maestro  $W(z)$  a diferentes distancias del haz enfocado con una potencia de emisión de 15 mW y se ajustaron a la ecuación (27). Los resultados de ajuste para cada eje coordenado  $(x, y)$  se presentan en la figura 20.



**Figura 20. Ajuste de curva para la obtención del factor de calidad  $M^2$  del láser maestro para cada eje coordenado  $(x, y)$ .**

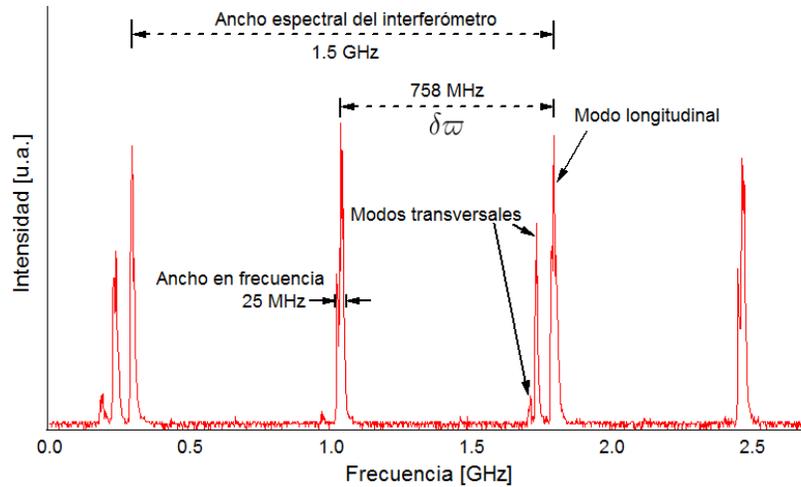
Como se nota de la figura 21, los datos experimentales se ajustan bien a la ecuación (27), y describen un haz con factor de calidad  $M_x^2 = 1.09$  y  $M_y^2 = 1.04$ , lo que indica que

el haz es muy cercano a un haz Gaussiano ideal ( $M^2 = 1$ ). La figura 20 muestra que para cada eje coordenado hay un diferente valor de posición de su cintura, e indica que el perfil espacial presenta astigmatismo.

### 3.1.3 Separación y ancho de modos longitudinales del láser maestro

La separación de modos longitudinales y su ancho en frecuencia la obtenemos al enfocar el haz laser en el interferómetro Fabry-Perot confocal de escaneo (*scanning confocal Fabry-Perot interferometer* en inglés) que presenta un funcionamiento similar a una cavidad láser sin un medio de ganancia. La cavidad del interferómetro está compuesta por dos espejos curvos idénticos separados una distancia igual a su radio de curvatura. Dentro del interferómetro, uno de los espejos se encuentra unido a un actuador piezoeléctrico, y permite hacer un escaneo del haz láser al cambiar las frecuencias de oscilación permitidas del interferómetro. Si una de las frecuencias de oscilación del láser es compatible con una frecuencia de oscilación del interferómetro, éste mostrará un pico de intensidad relacionado con ese modo de oscilación del láser. Con éste método se puede identificar el número de modos longitudinales que hay en un haz láser, el ancho en frecuencia de los modos longitudinales y la separación de modos longitudinales. El proceso de escaneo necesita un osciloscopio para ver el resultado del escaneo y los picos de intensidad asociados a cada modo de oscilación. Para calibrar los resultados del osciloscopio, se escogen dos picos de intensidad que se note están repetidos, éste indica la separación de modos del interferómetro llamada *ancho espectral libre* porque indica la separación entre máximos de interferencia constructiva del interferómetro que se repiten de manera periódica. La selección de los dos picos de intensidad permite hacer una relación entre frecuencia y tiempo vista en el osciloscopio con una regla de 3. Para que se pueda identificar por completo o resolver la separación de modos del láser que se enfoca en el interferómetro, se necesita que el ancho espectral libre del interferómetro sea mucho mayor que la separación de modos longitudinales del láser  $\Delta\omega_{FP} \gg \Delta\omega_{Láser}$ , esto para poder resolver todos los modos del láser que se han generado, en caso contrario se obtiene igual un resultado, pero su interpretación puede ser errónea.

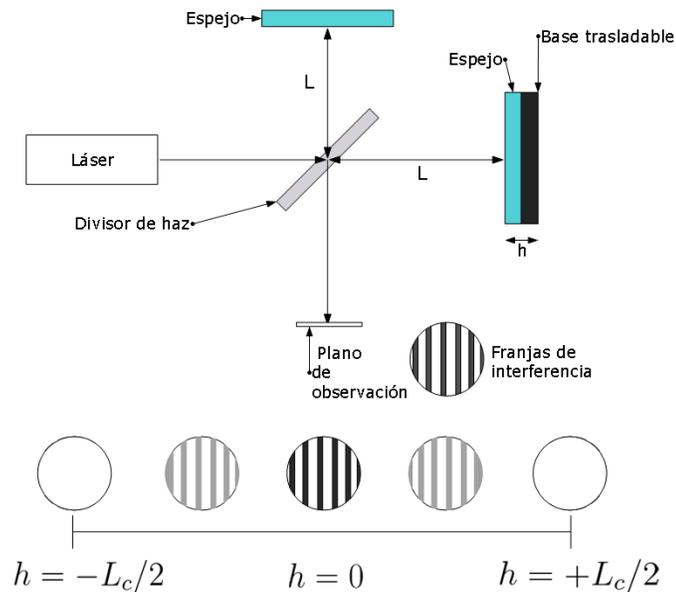
En la figura 21 se muestran los modos longitudinales ( $n$ ) y transversales ( $p, q$ ) del láser maestro al usarse el interferómetro Fabry-Perot confocal de escaneo Thorlabs SA200-9A, con ancho espectral libre de 1.5 GHz ya calibrado y vista en frecuencia.



**Figura 21. Modos del láser maestro, mostrando el ancho espectral libre del interferómetro, el ancho en frecuencia de un modo longitudinal y una separación entre modos  $\delta\omega$ .**

De la figura 21 se muestra el resultado de usar el interferómetro ya calibrado, y se muestra una separación de modos  $\delta\omega$  de 758 MHz y un ancho en frecuencia para un modo longitudinal de 25 MHz. Sin embargo, este resultado no se puede tomar como correcto, ya que el ancho espectral libre del interferómetro (1.5 GHz) es mucho menor que la separación de modos longitudinales teórica del láser maestro (6.5 GHz). Si tomamos la separación de modos  $\delta\omega$  y resolvemos para encontrar la longitud de la cavidad que describe, obtenemos una cavidad láser de 197 mm de largo, lo cual por diseño sabemos que no es cierto (25 mm), y ésto se podría interpretar de varias maneras, entre ellas está suponer que  $\delta\omega$  no es un modo longitudinal directo, es decir  $\delta\omega$  es uno de los posibles modos longitudinales que se han podido repetir por la periodicidad del interferómetro. Como los resultados de usar el interferómetro Fabry-Perot confocal de escaneo pueden ser mal interpretados, se necesita de otro método para describir el ancho en frecuencia de los modos y la separación de modos.

El ancho en frecuencia, también llamado ancho espectral ( $\Delta\nu$ ), se obtiene experimentalmente cuando se mide la longitud de coherencia ( $L_c$ ) con un interferómetro tipo Michelson. Un arreglo básico del interferómetro usado se muestra en la figura 22.



**Figura 22. Arreglo interferométrico tipo Michelson mostrando la disminución de la visibilidad de la franjas de interferencia conforme se aumenta la distancia  $h$ , mostrando la longitud de coherencia.**

Seguendo la figura 22, el haz láser se hace incidir sobre un divisor de haz, haciendo que una parte se refleje y otra se transmita, generando dos caminos de propagación del haz, llamados brazos del interferómetro. A una distancia  $L$  del divisor de haz de cada brazo se pone un espejo para que regrese el haz por el mismo camino. Uno de los espejos está montado sobre una base trasladable, permitiendo un aumento de distancia extra  $h$  de ese brazo del interferómetro. La diferencia de distancia entre los brazos del interferómetro ( $h$ ) genera franjas de interferencia en el plano de observación como se muestra en la figura 22, las cuales desaparecen a una cierta distancia conforme se aumenta  $h$ , llamada *longitud de coherencia* ( $L_c$ ). La longitud de coherencia y el ancho espectral se relacionan por

$$L_c = \frac{c}{\pi\Delta\nu}. \quad (54)$$

La ecuación (54) se tomó de RP Photonics Encyclopedia Coherence Length (Paschotta). Construyendo el arreglo experimental de la figura 22, se midió la longitud de coherencia del láser maestro a una potencia de emisión de  $15 \text{ mW}$ , dando como resultado una longitud de coherencia  $L_c \approx 6 \text{ mm}$ . Si resolvemos la ecuación (54) para el ancho espectral, se obtiene un valor  $\Delta\nu \approx 16 \text{ GHz}$ . Este valor de ancho espectral toma en consideración todos los modos que se emiten del láser maestro. Otra manera de

interpretar este resultado es convertir el ancho en frecuencia ( $\Delta\nu$ ) a ancho de longitud de onda ( $\Delta\lambda$ ) y relacionarlo con la longitud de coherencia

$$L_c = \frac{\lambda^2}{\pi\Delta\lambda}, \quad (55)$$

donde  $\lambda = 1064 \text{ nm}$  sustituyendo  $\Delta\nu = \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}c$ . Si resolvemos la ecuación (55) para  $\Delta\lambda$ , obtenemos un ancho en longitud de onda  $\Delta\lambda = 0.06 \text{ nm}$ , que a comparación del ancho de ganancia del cristal de Nd:YAG  $\Delta\lambda = 0.6 \text{ nm}$  (RP Photonics Encyclopedia YAG lasers, Paschotta), se observa que el ancho espectral del láser maestro está usando una gran parte del ancho de ganancia del material de ganancia, que para un láser maestro no es óptimo.

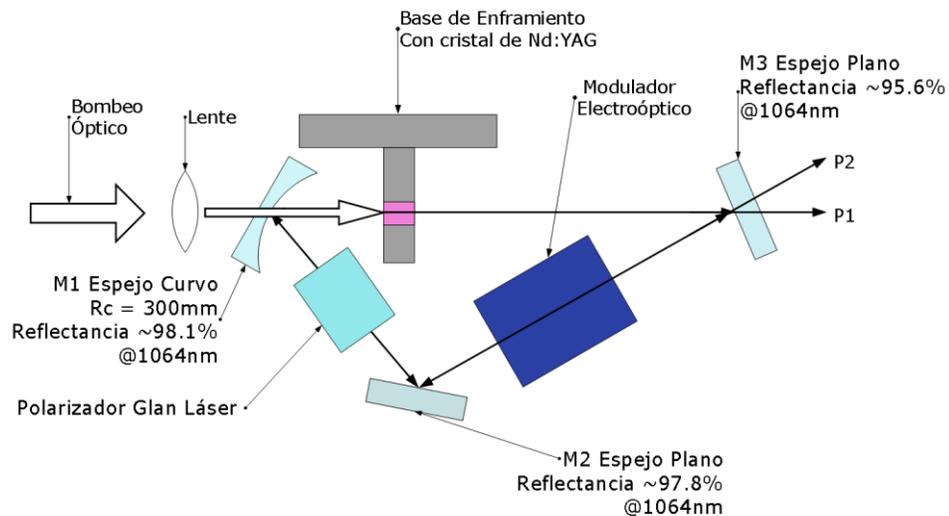
### 3.1.4 Prototipo de láser maestro

A pesar de haberse usado como láser maestro un láser comercial, en el laboratorio se diseñó y construyó también un láser semilla. Tenía entre sus características una eficiencia pendiente del 7 %, una separación entre modos de 1 GHz, un ancho espectral de 8 MHz y un factor de calidad  $M_y^2 = 1.08$  y  $M_x^2 = 1.24$ , con perfil espacial Gaussiano y con una sola frecuencia de oscilación. Sin embargo, no se consideró como láser semilla ya que algunos componentes ópticos que se tenían en ese láser se usaron para el láser esclavo, tal como el espejo de salida y el sistema de bombeo.

## 3.2 Láser esclavo

El láser esclavo está diseñado en forma de cavidad de anillo, como se muestra en la figura 23, lo cual permite la inyección de la semilla con mayor facilidad a través de alguno de los espejos de ésta y para disminuir el efecto conocido como *spatial hole burning* en inglés que reduce la eficiencia general del láser al generar un patrón de interferencia en el medio de ganancia, el cuál disminuye la diferencia de población  $\Delta N$  que podemos obtener del medio amplificador. El láser esclavo consiste de un espejo curvo M1 con radio de curvatura de 300 mm y reflectancia  $R = 98.1 \%$  a  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ , un espejo plano M2 con reflectancia  $R = 97.8 \%$  a  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ , un espejo de salida (espejo acoplador) M3 con reflectancia  $R = 95.6 \%$  a  $\lambda = 1064 \text{ nm}$ . Un cristal cilíndrico de Nd:YAG (dopaje 0.3 %) de 9 mm de largo por 3 mm de diámetro, con películas

antirreflejantes a  $\lambda = 1064 \text{ nm}$  en ambas caras y puesto en una base de aluminio con control de temperatura, un polarizador de calcita marca Thorlabs Glan-Laser GL10-C y una celda Pockels marca Qioptic KD\*P CPC (modulador electroóptico). El láser es bombeado por un diodo láser Jenoptik JOLD-30-FC-14-808 acoplado a fibra óptica (diámetro del núcleo  $d = 400 \mu\text{m}$ ) con una longitud de onda de emisión  $\lambda = 806.2 \text{ nm}$  con control de temperatura, y enfocado dentro del cristal por una lente de distancia focal de  $100 \text{ mm}$ . La longitud física de la cavidad es de  $347 \text{ mm}$ .

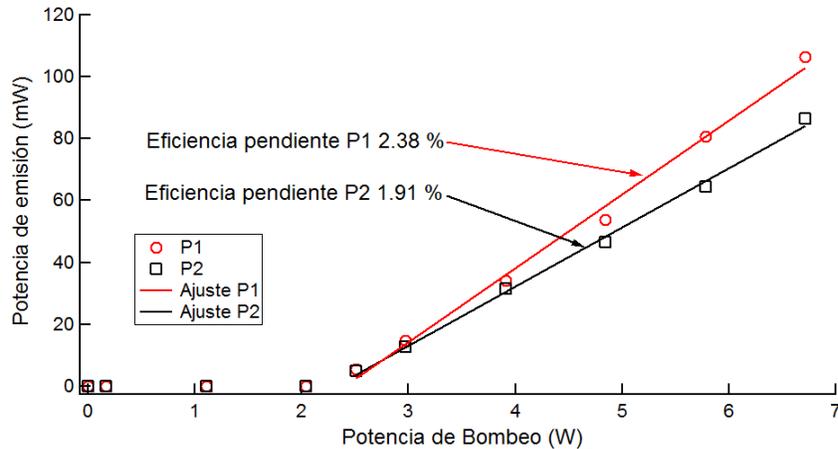


**Figura 23. Esquema del láser esclavo en cavidad de anillo**

Por la geometría de la cavidad, existen dos salidas del láser esclavo las cuales denotamos como salidas P1 y P2 (figura 23) y tienen orientaciones contrarias dentro de la cavidad de anillo. La razón por la que hay dos salidas se debe a que el ruido inicial del medio de ganancia puede emitirse en cualquier dirección, permitiendo que un fotón que se alinee con los espejos de la cavidad y genere emisión estimulada, forme una haz de luz y con ello una de las dos orientaciones a la salida.

### 3.2.1 Potencia de emisión del láser esclavo

Se obtuvieron datos de potencia de emisión en modo de onda continua (cw) en función de la potencia de bombeo para las salidas P1 y P2, dando por resultado la figura 24, donde se muestran los datos experimentales y el ajuste a la ecuación (53). Los datos se obtuvieron con el mismo equipo usado en la sección 3.1.1.

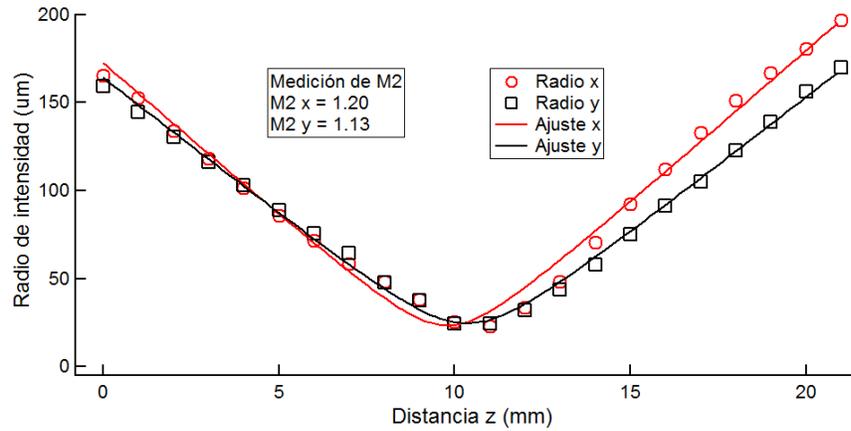


**Figura 24. Curvas de potencia de emisión en función de la potencia de bombeo y la eficiencia pendiente del láser esclavo para las salidas P1 y P2.**

De la figura 25 se aprecia que las eficiencias pendiente de P1 (2.38 %) y P2 (1.91 %) son distintas, esto se piensa que es debido a la dirección del bombeo sobre el cristal de ganancia y los elementos ópticos dentro de la cavidad de anillo. Las potencias umbrales de las salidas P1 (2.3 W) y P2 (2.2 W) presentan una diferencia de 100 mW al hacer el ajuste a la ecuación (53), sin embargo esto es solo una aproximación, ya que la emisión láser justo arriba del umbral tiene un comportamiento que no es lineal. En terminos prácticos, la potencia umbral es igual para las dos salidas.

### 3.2.2 Factor de calidad $M^2$ del láser esclavo

Se midió el factor de calidad  $M^2$  a una potencia de emisión de 14.5 mW de manera continua para la salida P1, usando el mismo método y equipo usado para la medición del factor de calidad del láser maestro en la sección 3.1.2. Los resultados experimentales y el ajuste a la ecuación (27) para cada eje coordenado ( $x, y$ ) se muestran en la figura 25.

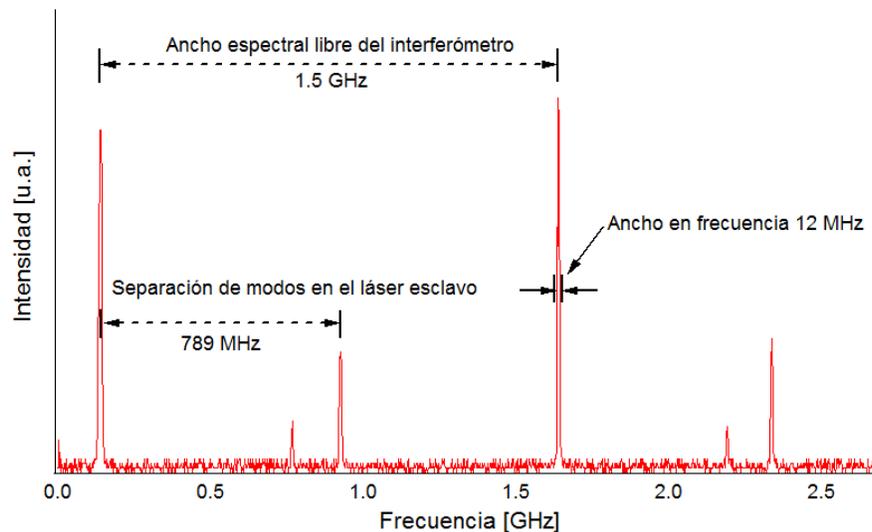


**Figura 25. Ajuste de curva para la obtención del factor de calidad  $M^2$  del láser esclavo para la salida P1**

De la figura 25 se obtienen los factores de calidad para cada eje coordenado, dando los valores  $M_x^2 = 1.20$  y  $M_y^2 = 1.13$ , los cuales son valores muy cercanos al valor mínimo ( $M^2 = 1$ ). La separación entre cinturas indica que el haz presenta astigmatismo, sin embargo es menor que la del láser maestro.

### 3.2.3 Separación de modos longitudinales del láser esclavo

La separación de modos longitudinales del láser esclavo la obtenemos usando el interferómetro Fabry-Perot confocal descrito en la sección 3.1.3, a una potencia de emisión de 36 mW por la salida P1. La gráfica 26 muestra los resultados de usar el interferómetro ya calibrado y visto en frecuencia.



**Figura 26. Separación entre modos longitudinales de la cavidad del láser esclavo.**

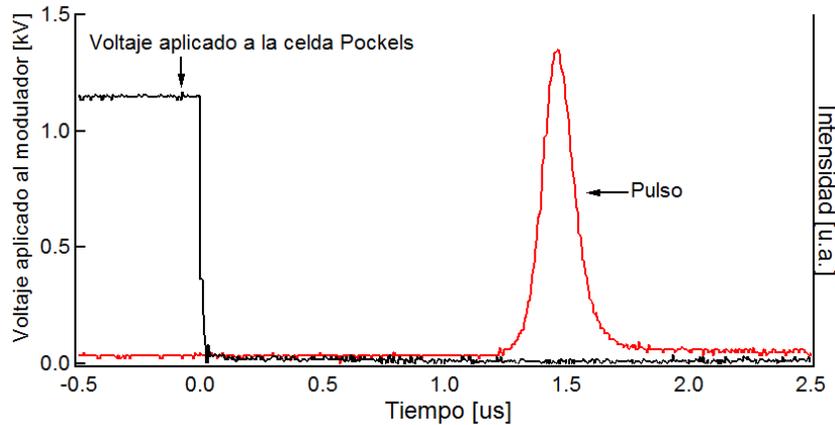
Por la configuración de la cavidad de anillo, la separación teórica de modos longitudinales cambia a  $\Delta\omega_n = 2\pi c/d$  donde  $d = 388 \text{ mm}$  es la distancia óptica del haz en la cavidad. La separación teórica de los modos del láser esclavo es  $\Delta\nu_n = \Delta\omega_n/2\pi = 773 \text{ MHz}$ , y se puede notar de la figura 26 que hay concordancia entre el valor teórico ( $773 \text{ MHz}$ ) y el experimental ( $789 \text{ MHz}$ ), con una diferencia de  $16 \text{ MHz}$  que se pueden deber a efectos de calibración o por cifras significativas en la obtención teórica de la distancia óptica. El ancho espectral de un modo longitudinal es de  $12 \text{ MHz}$ , sin embargo el ancho espectral del haz completo no se pudo medir, ya que la longitud de coherencia era mayor a la separación máxima que se le podía impartir en el interferómetro tipo Michelson  $h \approx 20 \text{ mm}$ .

### 3.2.4 Generación de pulsos en el láser esclavo

Los elementos ópticos que se utilizaron para cambiar el factor Q de la cavidad de anillo son una celda Pockels marca Qioptiq de KD\*P con  $V_{\pi/2} = 3.2 \text{ kV}$ , un polarizador de calcita marca Thorlabs Glan Laser GL10-C, y un generador de pulsos de voltaje alto QBU-4016. La celda Pockels es un dispositivo electroóptico que rota el estado de polarización lineal en función de un voltaje aplicado mientras que el polarizador es un rectificador de polarización. Si el polarizador está orientado para solamente dejar pasar polarización vertical, solamente dejará pasar a la componente del campo eléctrico que tenga esa polarización, mientras que la otra componente se discrimina y es reflejada fuera de la cavidad, lo que permite que el láser mantenga siempre una sola polarización. La polarización definida del láser esclavo es polarización vertical, esto debido a que en el laboratorio de láseres y óptica no lineal es deseable esta polarización.

Dentro de la cavidad, se orientan el polarizador y la celda Pockels para tener una eficiencia máxima de potencia de emisión en modo continuo con polarización vertical. Una vez orientados, se aplica un voltaje a la celda Pockels, para que rote la polarización lineal del haz en la cavidad generando pérdidas, evitando que el láser esclavo oscile mientras se mantiene el bombeo al cristal de ganancia. Posteriormente se quita el voltaje por un tiempo definido en un rango de  $1$  a  $10 \mu\text{s}$ , permitiendo que el láser funcione, empezando el proceso de formación del pulso. El pulso generado se observa usando un detector InGaAs PIN marca THORLABS DET410 con tiempo de

respuesta de  $5\text{ ns}$  y un osciloscopio Agilent 54642A con ancho de banda de  $500\text{ MHz}$  a la salida P1. En la figura 27 se muestra el perfil temporal de un pulso al generar el cambio de voltaje vista en el osciloscopio.



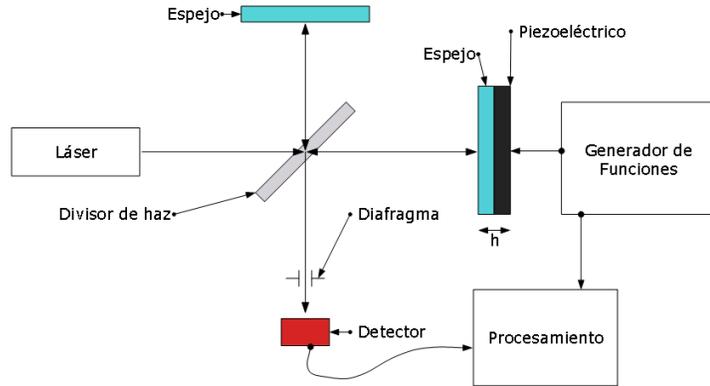
**Figura 27. Formación del pulso una vez que se ha quitado el voltaje alto del modulador electroóptico y su despliegue en el osciloscopio.**

Para la obtención de datos experimentales se fijó un voltaje aproximado de  $3.4\text{ kV}$  aplicado al modulador electroóptico que permite generar pulsos cuando se aplica un bombeo máximo al medio de ganancia y a cualquier bombeo por debajo de este bombeo. El bombeo máximo aplicado al medio de ganancia se fijó en  $6.8\text{ W}$ , ya que el láser en modo continuo arriba de este bombeo presenta una disminución en su potencia de emisión.

### 3.3 Sistema de corrección de la cavidad

El sistema de ajuste de la longitud de la cavidad se compone de un espejo (M2, de la figura 23) colocado en una base traslacional con un actuador piezoeléctrico marca THORLABS NF15AP25 – NanoFlex con resolución de  $25\text{ nm}$  alimentado por una fuente de voltaje Agilent E3630A en un rango de voltaje de  $0\text{ a }20\text{ V DC}$ .

Como el desplazamiento necesario para sintonizar los modos longitudinales de oscilación es del orden de fracciones de longitud de onda, se caracterizó el desplazamiento del espejo M2 usando un arreglo interferométrico tipo Michelson, con una fuente de luz de  $\lambda = 632\text{ nm}$  (láser He-Ne marca Melles Griot con  $5\text{ mW}$  de potencia máxima) vista en la figura 28, ésto debido a que el arreglo permite detectar desplazamientos del orden de fracciones de longitud de onda.

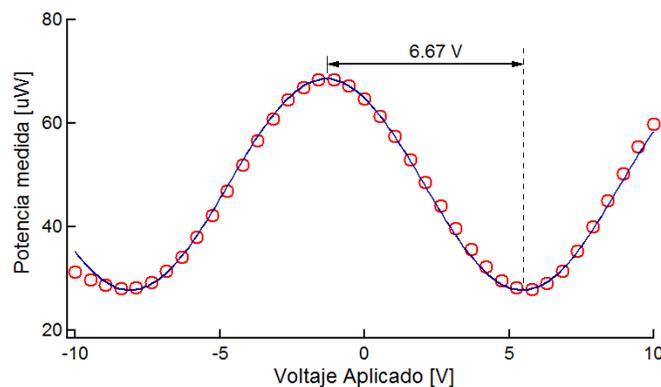


**Figura 28. Arreglo interferométrico tipo Michelson usado para caracterizar el desplazamiento del piezoeléctrico.**

Usando un generador de funciones marca HP33120A, se aplicó un voltaje lineal de  $-10$  a  $+10$  V al piezoeléctrico, generando un desplazamiento en las franjas en el plano de observación. Para medir el desplazamiento de las franjas, se usó un medidor de potencia y un diafragma en el plano de observación. La potencia medida se ajustó a la curva de franjas de interferencia

$$P \propto \sin^2 \left( \frac{2\pi h}{\lambda} \frac{V}{V_{\pi/2}} \right), \quad (56)$$

donde  $h$  es el desplazamiento del espejo,  $\lambda$  es la longitud de onda de la fuente de luz del interferómetro,  $V$  es el voltaje aplicado al piezoeléctrico y  $V_{\pi/2}$  es el voltaje que permite desplazar el patrón de interferencia de una franja de interferencia clara (constructiva) a una oscura (destruktiva). La curva de potencia se puede deducir al sumar los campos eléctricos de cada brazo del interferómetro y obtener la intensidad en el plano de observación. Los datos experimentales y su ajuste a la ecuación (55) se muestran en la figura 29.

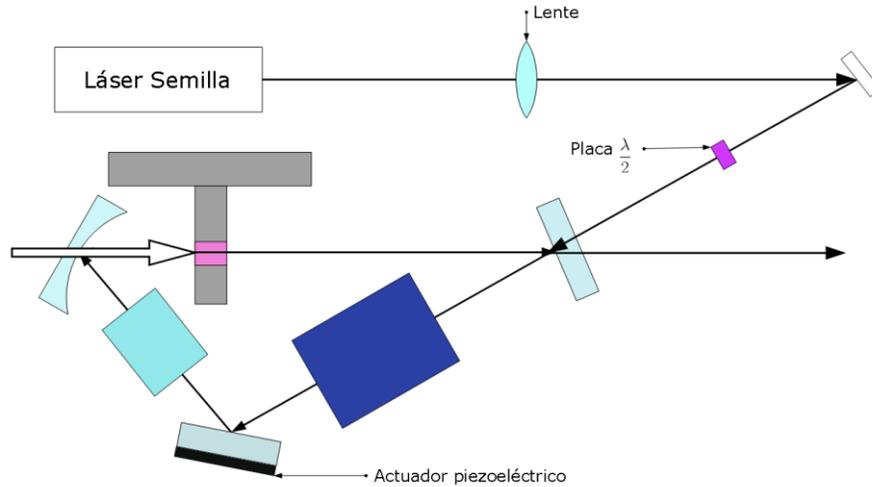


**Figura 29: Ajuste de curva de interferencia obtenida del arreglo interferométrico para caracterizar el piezoeléctrico a  $\lambda = 632$  nm**

De la figura 29 se obtiene un voltaje  $V_{\pi/2} = 6.67 V$ , entonces se tiene que al aplicar dicho voltaje, el espejo con el actuador piezoeléctrico cambió su longitud en  $\lambda/4$  (158 nm).

### 3.4 Arreglo óptico completo

Una vez caracterizados el láser maestro, el láser esclavo y el sistema de control de la cavidad, éstos se acoplaron de acuerdo a la figura 30.



**Figura 30. Arreglo de láser pulsado semillado final**

Se incorporó una lente de 300 mm de distancia focal para enfocar el láser maestro dentro de la cavidad del láser esclavo por la salida P2, y una placa  $\lambda/2$  que es un rotador de polarización lineal, para hacer coincidir la polarización del láser maestro con los elementos del Q-switch dentro de la cavidad de anillo.

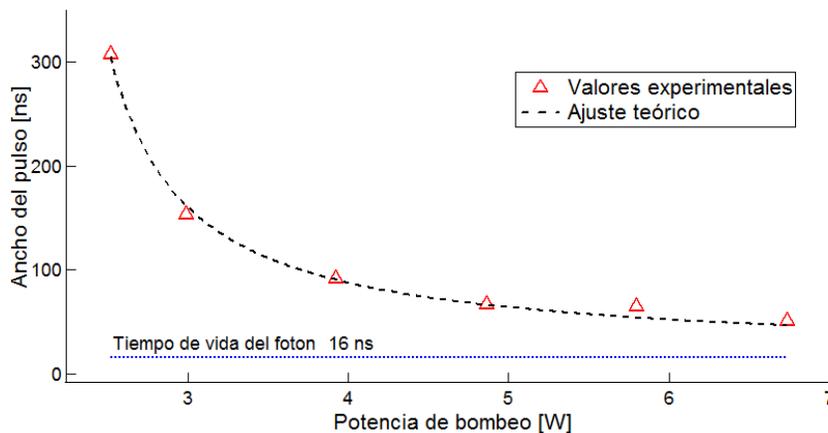
Para empalmar los modos del láser maestro con el esclavo, se ajusta ligeramente el tamaño de la cavidad del láser esclavo al aplicar un voltaje (0-20 V DC) en el actuador piezoeléctrico en el espejo M3, lo cual cambia las frecuencias de emisión del láser esclavo.

## Capítulo 4. Resultados y discusión de resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la caracterización del láser esclavo pulsado sin semilla: el ancho temporal del pulso, el tiempo de formación del pulso con su jitter y la potencia pico por pulso. Después se presentan los resultados de inyectar una semilla en la cavidad de anillo y una comparación del láser esclavo con y sin semilla.

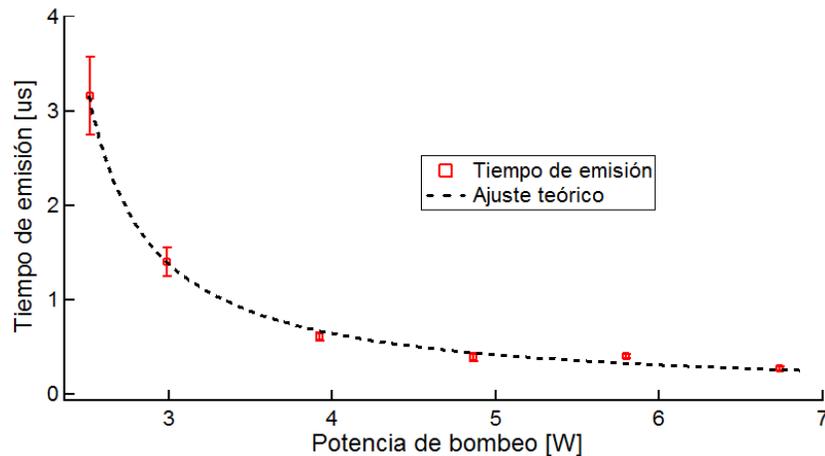
### 4.1 Láser esclavo

El láser esclavo se hizo pulsar a una tasa de repetición de  $100\text{ Hz}$ , es decir una vez cada  $10\text{ ms}$ . De la salida P1 se obtuvieron los valores de ancho temporal de pulso y el tiempo de formación del pulso en función de la potencia de bombeo, vistas en las figuras 31 y 32 respectivamente.



**Figura 31.** Ancho del pulso a la salida P1 del láser esclavo en función de la potencia de bombeo y su curva de ajuste teórica.

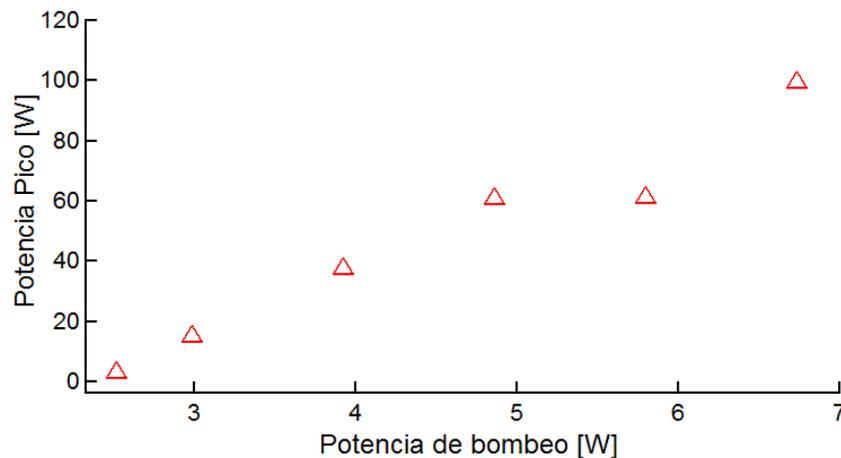
De la figura 31 se aprecia que los valores experimentales del ancho temporal del pulso siguen el comportamiento esperado de la ecuación (33) y obtenemos un tiempo de vida del fotón de  $16\text{ ns}$ . Si obtenemos el tiempo de vida del fotón en la cavidad de manera teórica y usando el resultado experimental de la separación de modos de la figura 26, el tiempo de vida del fotón del láser maestro es  $\tau_c = 1/(\Delta\nu(1 - R_1R_2R_3)) = 1/(789\text{ Mhz}(1 - (0.981)(0.978)(0.956))) = 16\text{ ns}$ , lo cual concuerda con el ajuste teórico de la figura 31. Se observa de la figura 31 que el ajuste teórico se va acercando al tiempo de vida del fotón en la cavidad conforme se aumenta la potencia de bombeo.



**Figura 32. Tiempo de formación del pulso a la salida P1 del láser esclavo en función de la potencia de bombeo. Las barras de error muestran el jitter asociado.**

De la figura 32 se observa que los valores experimentales del tiempo de formación del pulso siguen el comportamiento esperado por la ecuación (35). Las barras de error muestran el jitter asociado al pulso y se aprecia que conforme la potencia de bombeo aumenta, el jitter disminuye. Para la obtención del tiempo de jitter, se dejó pulsar el láser 1 minuto de pulsos sucesivos y se midió el tiempo entre el pulso con menor tiempo de formación y el pulso con mayor tiempo de formación.

Los resultados de potencia pico por pulso se muestran en la figura 33. La potencia pico se obtiene al tomar valores de potencia promedio y dividirlos entre la tasa de repetición y el ancho temporal del pulso el cual se explica con mayor detalle en el apéndice 1. La potencia promedio se midió usando el cabezal y medidor de potencia descritos en la sección 3.1.1.

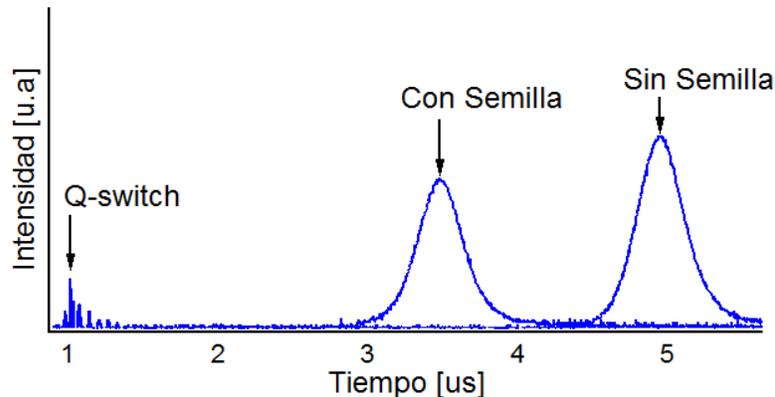


**Figura 33 Potencia pico por pulso en función de la potencia de bombeo a una tasa de repetición de 100 Hz.**

En la gráfica 33 se observa que a potencias de bombeo entre 5 y 6 W hay una disminución en la potencia pico. Esta disminución se debe a un efecto conocido como birrefringencia inducida en el material de ganancia, y lo que genera es una rotación adicional del estado de polarización de la luz cada vez que pasa por el medio de ganancia. Como la cavidad tiene un polarizador orientado para polarización vertical, la luz al pasar por el medio de ganancia tendrá una rotación extra que generará pérdidas adicionales al pasar por el polarizador, por ende disminuyendo la potencia pico por pulso. A una potencia de bombeo máximo se obtuvo una potencia pico de 99 W.

## 4.2 Sistema semillado

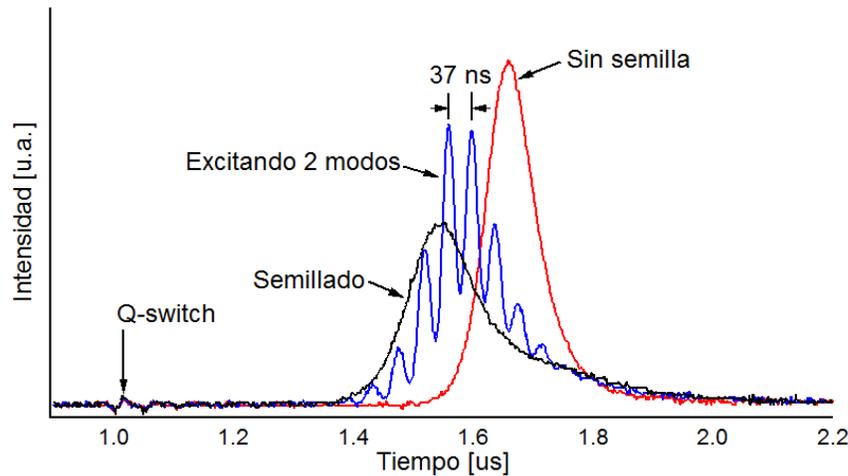
Se introdujo el haz semilla con potencia de emisión de 15.5 mW al láser esclavo, y se muestra el resultado del pulso generado en la figura 34.



**Figura 34.** Comparación entre pulsos emitidos con y sin semilla con una potencia de bombeo de 2.5 W del láser esclavo y una potencia de emisión de 15.5 mW del láser maestro.

En la figura 34 se demuestra el efecto del semillado en la cavidad, ya que se llega a reducir el tiempo de formación del pulso hasta en 1.5  $\mu\text{s}$ , cuando se bombea el láser esclavo con 2.5 W. El efecto del semillado es instantáneo, tal que si se bloquea la semilla antes de entrar a la cavidad de anillo, el pulso se recorre a su posición sin semilla.

Al ajustar el tamaño de la cavidad del láser esclavo con el aumento de voltaje al actuador piezoeléctrico, se demuestra el semillado de dos modos longitudinales al estar bombeando con 3.9 W en el láser esclavo, como se muestra en la figura 34.

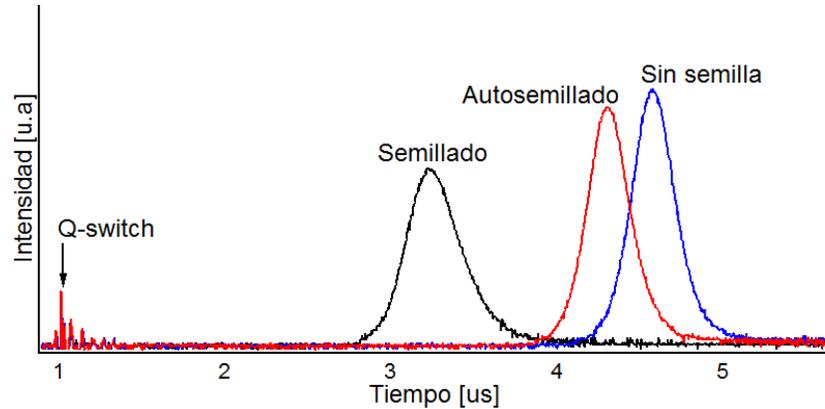


**Figura 35. Comparación de semillado: un modo, dos modos y sin semilla a una potencia de bombeo de 3.9 W.**

La oscilación del batimiento de modos en la figura 35, corresponde a un tiempo de oscilación de  $37\text{ ns}$ , que es mayor al tiempo de vida del fotón en la cavidad. La razón de la discrepancia entre estos valores se desconoce.

Como se esperaba de la teoría, es posible semillar dos modos en el láser esclavo si ajustamos las frecuencias de oscilación del láser esclavo. De la figura 35, cuando el pulso está semillado, se aprecia una “cola” del pulso resultante, y se relaciona con la calidad del semillado, ya que esa cola se piensa es debido a que el ruido inicial también está tomando parte en la formación del pulso, lo cual genera este efecto en el perfil temporal, y por ende aumentando el ancho temporal.

Si se apaga el láser maestro, se puede usar el pulso a la salida P2 como semilla, reinyectándose al mismo láser esclavo cuando el pulso incide en el espejo de salida del láser maestro y regresa por el mismo camino hacia la cavidad de anillo. A esta configuración se le llama auto-semillado. En la figura 36 se compara el tiempo de formación de un pulso con semilla, con auto-semilla y sin semilla a una potencia de bombeo de 2.5 W.

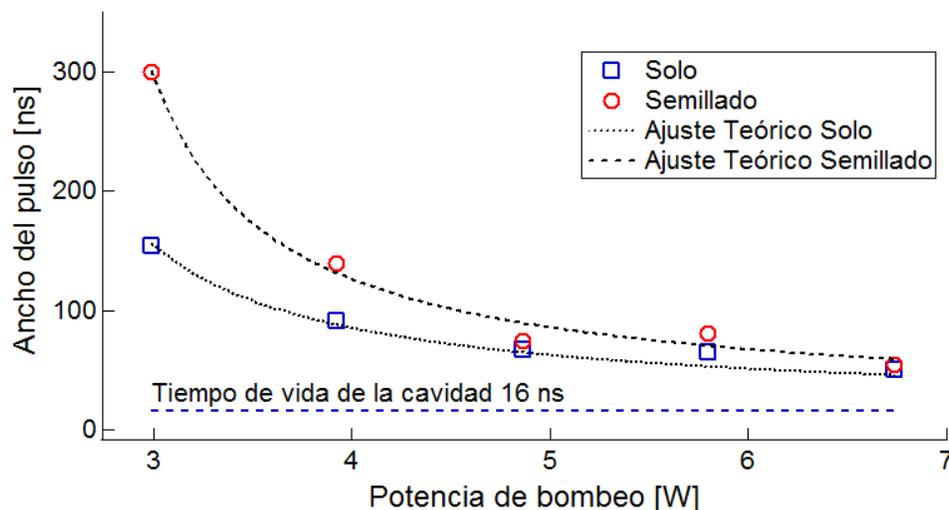


**Figura 36.** Comparación de la formación de un pulso con semillado, auto-semillado y sin semilla a una potencia de bombeo de 2.5 W del láser esclavo.

Se aprecia de la figura 36 que es posible usar la salida P2 como una semilla, sin embargo no es óptima para la técnica del semillado, por lo que se decidió comparar los resultados cuando solamente se semilla la cavidad en modo continuo, es decir sin auto-semillar.

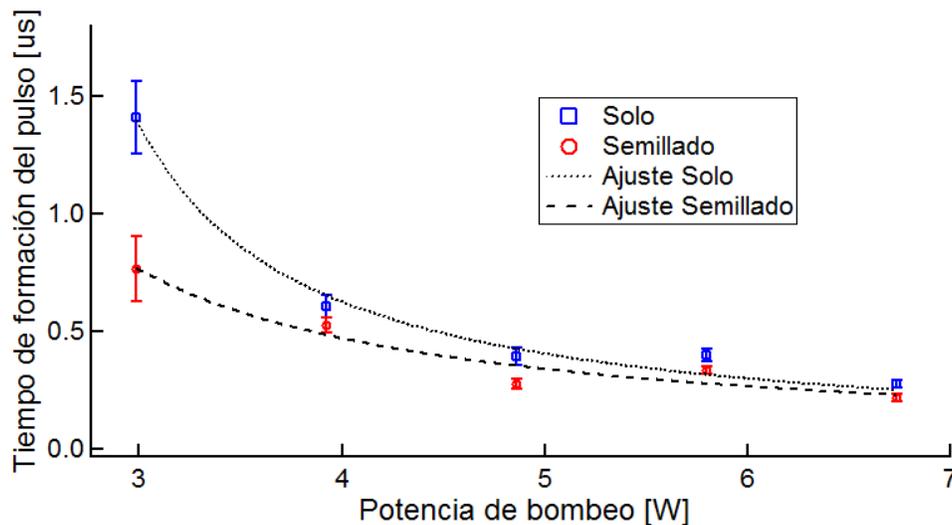
### 4.3 Comparación entre sistemas pulsados

Una vez que se probó la técnica del semillado, se tomaron datos del ancho temporal del pulso y tiempo de formación del pulso en función del bombeo aplicado y se compararon con los resultados de la sección 4.1. Los dos sistemas presentan las mismas características de bombeo y tasa de repetición (100 Hz). Los resultados para el ancho del pulso para el sistema con y sin semilla se muestran en la figura 37, mientras que el tiempo de formación del pulso con su jitter se presenta en la figura 38.



**Figura 37.** Ancho del pulso en función del bombeo aplicado para el láser esclavo solo y semillado con su ajuste teórico de curva.

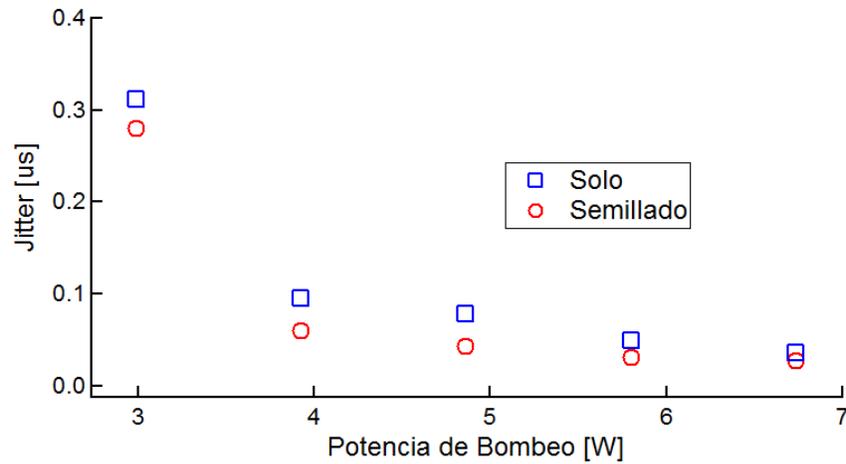
De la figura 37 se observa que el ancho del pulso para el sistema solo es menor que para un sistema semillado. El ancho del pulso de acuerdo a las simulaciones debería de ser el mismo para ambos sistemas, siempre y cuando el empataamiento transversal y longitudinal sea unitario, sin embargo, por las limitaciones de enfocar el láser maestro en el medio de ganancia del láser esclavo, y por cuestiones de estabilidad ésto nunca se cumple, haciendo que el ancho del pulso aumente. Este aumento se puede deber a que el ruido inicial participe también en la formación del pulso, aumentando el ancho temporal.



**Figura 38.** Tiempo de formación del pulso en función del bombeo aplicado para el láser esclavo solo y semillado con su ajuste teórico de curva.

De la figura 38 se aprecia que el tiempo de formación del pulso es menor para un sistema sin semilla, lo cual coincide con la teoría. Se aprecia de la figura 37 y 38 que a pesar de semillar la cavidad, se sigue manteniendo un efecto de birrefringencia en el cristal para potencias de bombeo en el rango de 5 – 6 W al aumentar el tiempo de formación y el ancho temporal del pulso, lo cual indica que el semillado no corrige efectos de birrefringencia.

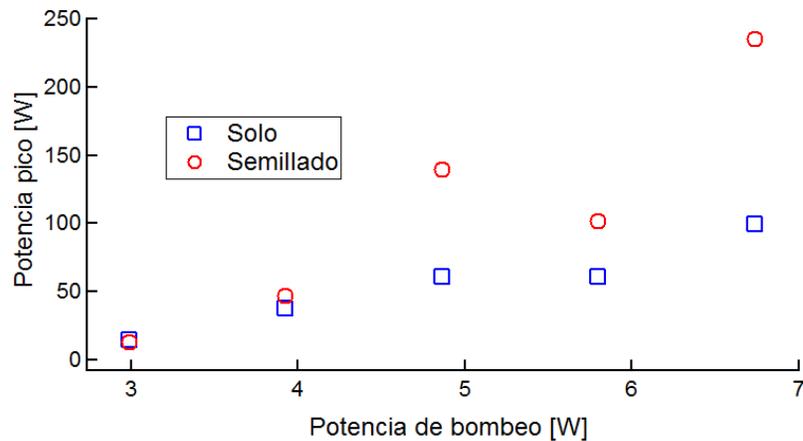
En la figura 39 se presenta una gráfica con los tiempos de jitter para un sistema con y sin semilla, para comparar con mayor detalle el tiempo de jitter.



**Figura 39. Tiempo de jitter por pulso en función del bombeo aplicado para el láser esclavo solo y semillado**

De la figura 39 se aprecia que el tiempo de jitter se reduce para un sistema con semilla, lo cual se esperaba de reducir el tiempo de formación del pulso al semillar la cavidad.

En la figura 40 se muestra la potencia pico por pulso en función de la potencia de bombeo para el sistema solo y semillado.



**Figura 40. Potencia pico emitida por pulso en función del bombeo aplicado para el láser esclavo solo y semillado.**

De la figura 40 se puede notar que un sistema con semilla emite mayor potencia pico. Ésto debido a que la semilla da a la cavidad de anillo una dirección preferencial de oscilación al momento de formarse el pulso, haciendo que la mayor parte de la energía salga por la salida P1.

Para una potencia de bombeo máxima, el tiempo de formación del pulso se reduce un 23 % y se reduce el jitter un 22 %. Hay un incremento del 237 % en potencia pico por

pulso, y un incremento en el ancho temporal del pulso del 11 %. De los resultados mostrados es claro que mejoran algunas características de la formación de los pulsos si el sistema es semillado.

#### **4.4 Resumen del proyecto de tesis**

El objetivo de este proyecto de tesis era diseñar un láser pulsado que usará la técnica de semillado para generar una fuente pulsada con un solo modo longitudinal y transversal con un tiempo de jitter mínimo y sin batimiento de modos.

En este proyecto de tesis se demostró la técnica del semillado en una fuente pulsada al disminuir el tiempo de jitter y el batimiento de modos. Sin embargo, por las limitantes de usar una fuente semilla no idónea, el sistema de láser pulsado semillado desarrollado en este proyecto no fue el más óptimo.

## Capítulo 5. Conclusiones

Después de haber realizado el análisis teórico de la formación de pulsos y el desarrollo experimental al aplicar la técnica de semillado en un láser pulsado, se pueden enunciar las siguientes conclusiones.

Se dedujeron y resolvieron numéricamente las ecuaciones acopladas que describen la formación de pulsos usando número fotones y campos eléctricos. En las ecuaciones de los campos eléctricos, se simuló la técnica de semillado para poderse comparar con los datos experimentales. Se encontró que si están bien empalmados la semilla y uno de los modos de oscilación de la cavidad esclava entonces se reduce el tiempo de formación del pulso y se elimina el batimiento de modos. Se encontró que si la frecuencia de oscilación de la semilla no coincide con la frecuencia de alguno de los modos de oscilación del láser esclavo entonces se genera batimiento de modos, de ahí la importancia de tener un control de las frecuencias de oscilación del laser esclavo.

Se construyó un láser pulsado de Nd:YAG en cavidad de anillo. Los pulsos se generan usando la técnica de "Q-switching" con un modulador electroóptico y se semilló con una señal externa, probándose que la técnica de semillado aumenta la potencia pico por pulso, reduce el tiempo de formación del pulso y el tiempo de jitter, lo cual concuerda cualitativamente con las predicciones teóricas.

Para el sistema semillado bombeado con  $6.8 W$ , se obtuvo un incremento en la potencia pico por pulso del 237 %. Se redujo el tiempo de formación del pulso en un 23 % con una reducción de jitter del 22 %. Por otro lado se incrementó el ancho temporal del pulso en un 11 %; se supone que este fue debido a que el empalme espectral y espacial no fue el óptimo.

Se encontró experimentalmente que si el empalme longitudinal no es óptimo se pueden semillar dos modos longitudinales del láser pulsado, lo cual también se había predicho en la teoría.

El objetivo de construir y diseñar una fuente pulsada que usara la técnica de semillado era para generar pulsos de alta energía sin batimiento de modos y con un ancho espectral reducido. Debido a que la semilla usada no fue óptima, en el sentido de que

no emitía en un solo modo longitudinal sino en varios, no se pudo lograr el objetivo principal de reducir el ancho de banda del pulso. Sin embargo, dado que los otros objetivos (reducción del jitter, intensificación de los pulsos, entre otros) sí se cumplieron, es de esperarse que de utilizarse una mejor semilla este objetivo se podría lograr fácilmente. Por razones de tiempo y de disponibilidad de equipo ya no se pudo continuar esta investigación.

Con el objetivo de construir y diseñar una fuente pulsada con alta calidad espacial y espectral para uso futuro en el laboratorio, se requieren mejorar los siguientes puntos:

1. Estabilidad: El sistema requiere una mayor estabilidad mecánica para sus componentes ópticas, que eviten vibraciones indeseadas e inestabilidades térmicas. Esto se podrá realizar fácilmente con tan sólo montar todas las piezas a una altura menor para reducir vibraciones y aislando el sistema para evitar corrientes de aire.
2. Birrefringencia del cristal de ganancia: Debido al enfocamiento del bombeo, el cristal de ganancia presenta efectos de birrefringencia inducida que generan pérdidas en la cavidad. Una solución es rediseñar el sistema de bombeo o utilizar otro medio de ganancia que presente este efecto en menor grado.
3. Diseño de la cavidad del láser esclavo: la cavidad de anillo con tres espejos crea un efecto de astigmatismo del haz que no es deseable en el laboratorio. Se propone rediseñar la cavidad de anillo usando cuatro espejos.
4. Láser maestro: diseñar y construir un láser maestro que tenga una sola frecuencia de oscilación, de mayor potencia y linealmente polarizado. Además se puede incluir un aislador óptico (diodo óptico) para proteger el láser maestro de posibles reflexiones y evitar el auto-semillado.
5. Sistema de control: se requiere implementar un sistema que corrija los cambios de frecuencia de los modos del láser esclavo, los cuales siempre ocurren debido a cambios de temperatura. Esto se podrá lograr de varias maneras, por ejemplo monitoreando el tiempo de formación de los pulsos o monitoreando la potencia de salida por el puerto no deseado. Esta información puede ser procesada en tiempo real para así introducir un cambio adecuado de la longitud de la cavidad del láser esclavo.

## Lista de referencias bibliográficas

- Ball, G. (1987). *Injection Seeding of a Q-switched Nd:YLF Oscillator*. (Tesis de maestría), University of Rochester.
- Barnes, J. C., Barnes, N. P., Wang, L. G. and Edwards, W. (1993). Injection seeding II: Ti:Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> experiments. *IEEE J. Quantum Electron.* 29 (10), 2684.
- Barnes, P. N. and Barnes, C. J. (1993). Injection Seeding I: Theory. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, vol.29 (10), 2670 – 2683.
- Basu, S. and Byer, R. L. (1990). Short pulse injection seeding of Q-switched Nd:glass laser oscillators-theory and experiment. *Quantum Electronics, IEEE Journal of* 26 (1), 149-157.
- Bjorkholm, J. E. and Danielmeyer, H. G. (1969). Frequency control of a pulsed optical parametric oscillator by radiation injection, *Appl. Phys. Lett.* 15, 171.
- Chekhlov, O. V., Fitzpatrick, J. A. J., Rosser, K. N., Western, C. M. & Ashworth, S. H. (2002). An all solid-state narrow bandwidth optical parametric oscillator and its applications to the high resolution of free radicals. *Journal of modern optics.* 49(5/6), 865-876.
- Cudney, R. R. (2014). *Notas del curso: Láseres*. Ensenada, México: CICESE.
- Fix, A., Schroder, T. Wallenstein, R., Haub, J. G., Johnson, M. J. and Orr, B. (1993). Tunable Beta-barium borate optical parametric oscillator: operating characteristics with and without injection seeding. *J.Opt.Soc.Am.B*, 10 (9), 1744-1750
- Fowles, G. R. (1990). *Introduction to Modern Optics*. New York, Holt, Rinehart and Winston Inc.
- Mahnke, P. and Wirth, M. (2010). Real-time quantitative measurement of the mode beating of an injection-seeded optical parametric oscillator. *Appl Phys B.* 99, 141-148.
- Nemes, G., Ruff, J. A. and Siegman, A. E. (1994). The beam quality concept applied to high power lasers. *AIP Conf. Proc.* 318 (1) 489-490.
- Park, Y. K. Giuliani, G. and Byer, R. L. (1984). Single Axial Mode Operation of a Q-switched Nd:YAG Oscillator by Injection Seeding. *Quantum Electronics, IEEE Journal of*, 20 (2), 117 – 125.

- Paschotta, R. (s.f.). Coherence Length. *RP Photonics Encyclopedia*. Recuperado de [https://www.rp-photonics.com/coherence\\_length.html](https://www.rp-photonics.com/coherence_length.html).
- Paschotta, R. (s.f.). Doping Concentration. *RP Photonics Encyclopedia*. Recuperado de [https://www.rp-photonics.com/doping\\_concentration.html](https://www.rp-photonics.com/doping_concentration.html)
- Paschotta, R. (s.f.). Injection Seeding. *RP Photonics Encyclopedia*. Recuperado de [https://www.rp-photonics.com/injection\\_seeding.html](https://www.rp-photonics.com/injection_seeding.html)
- Paschotta, R. (s.f.). Peak Power. *RP Photonics Encyclopedia*. Recuperado de [https://www.rp-photonics.com/peak\\_power.html](https://www.rp-photonics.com/peak_power.html).
- Paschotta, R. (s.f.). Q-switched Lasers. *RP Photonics Encyclopedia*. Recuperado de [https://www.rp-photonics.com/q\\_switched\\_lasers.html](https://www.rp-photonics.com/q_switched_lasers.html).
- Paschotta, R. (s.f.). Resonator Modes. *RP Photonics Encyclopedia*. Recuperado de [https://www.rp-photonics.com/resonator\\_modes.html](https://www.rp-photonics.com/resonator_modes.html).
- Paschotta, R. (s.f.). YAG Lasers. *RP Photonics Encyclopedia*. Recuperado de [https://www.rp-photonics.com/yag\\_lasers.html](https://www.rp-photonics.com/yag_lasers.html).
- Rahn, L. A. (1985). Feedback stabilization of an injection-seeded Nd:YAG laser. *Appl. Opt.* 24 (7), 940-942.
- Saleh, B. E. A. and Teich, M. C. (1991). *Fundamentals of Photonics*, New York: Wiley.
- Satyajit, K.T., Doravari, S., Kanakavalli, T.E. & Ananthamurthy, S. (2004, diciembre). *A Low Cost Scanning Fabry Perot Interferometer for Student Laboratory*. Trabajo presentado en Seventh International Conference on Optoelectronics, Fibre Optics, and Photonics. Cochin, India.
- Schmitt, R. L. & Rahn, L. A. (1986). Diode-laser-pumped Nd:YAG laser injection seeding system. *Appl. Opt.* 25, 629-633
- Siegman, A. E. (1986). *Lasers*. Mill Valley California: Interscience Publishers.
- Silfvast, W. T. (1996). *Laser Fundamentals*. New York: Cambridge University Press.
- Technical Note #1 (s.f.). Average and Peak Power – A Tutorial. *Newport Photonics*. Recuperado de <http://assets.newport.com/webDocuments-EN/images/TechNote1-AvgandPeakPwrCalculation.PDF>

## Anexos o Apéndices

### Apéndice 1: Energía por pulso y potencia pico

Es posible estimar la energía y la potencia pico por pulso al conocer ciertos parámetros medibles, entre ellos la potencia promedio ( $P_{prom}$ ), el ancho del pulso ( $\Delta t$ ) y la tasa de repetición de los pulsos ( $f = 1/T$ ). Para ver los parámetros asociados, usamos la figura 41 como referencia visual.

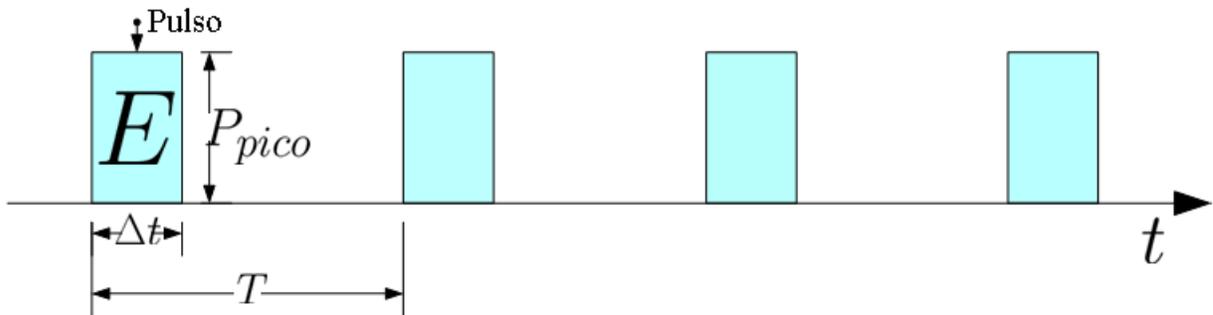


Figura 41. Relación de energía y potencia pico por pulso vista en el espacio temporal con los parámetros de tiempo de emisión y el ancho temporal del pulso.

Si asumimos que la energía de pulso a pulso es constante, podemos relacionarlos con los parámetros de potencia pico ( $P_{pico}$ ) y potencia promedio de la siguiente manera:

$$P_{pico} = \frac{E}{\Delta t} \quad (57)$$

$$P_{prom} = \frac{E}{T} \quad (58)$$

Y definiendo la potencia pico como el flujo de energía por pulso y la potencia promedio como el flujo de energía promediado por un periodo completo. Si despejamos la energía para las ecuaciones (57) y (58) obtenemos

$$P_{pico}\Delta t = P_{prom}T \quad (59)$$

Si re-arreglamos los términos de la ecuación (59) nos permite definir una nueva variable llamado *Ciclo útil* (Duty Cycle), el cuál es el tiempo fraccional que el láser está “prendido” durante cualquier periodo.

$$Duty\ Cycle = \frac{\Delta t}{T} = \frac{P_{prom}}{P_{pico}} \quad (60)$$

Con esto podemos obtener la potencia pico por pulso

$$P_{pico} = \frac{P_{prom}}{Duty\ Cycle} \quad (61)$$

La conversión de potencia depende del perfil temporal del pulso. Para pulsos gaussianos, la potencia pico (61) se tiene que multiplicar con un factor de 0.94 y para perfiles con  $\text{sech}^2 t$ , el factor es de 0.88.

## Apéndice 2: Constantes y consideraciones para las simulaciones de formación de pulsos usando fotones

La solución de las ecuaciones (11) de formación de pulsos usando fotones se resolvieron usando el método de Euler por su facilidad de implementación. El método sirve para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias con valor inicial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0. \quad (62)$$

Se declara un espacio de integración  $a \leq x \leq b$  dividido en  $N$  espacios igualmente espaciados por un intervalo  $h = (b - a)/N$ . Si definimos  $x_j = nh + a$   $y(x_j) = y_j$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ , el método de integración se puede escribir

$$y_{j+1} = y_j + hf(x_j, y_j). \quad (63)$$

Tomando en consideración el método de integración que describe la ecuación (63), se resolvieron las ecuaciones (12) con  $N = 10000$  y un tiempo de integración  $h = 10 \times 10^{-12} s$ . Los valores de las constantes usadas en las simulaciones se encuentran en la tabla 1. La inversión de población inicial  $\Delta N(t_0)$  se declaró de acuerdo a la ecuación (36), es decir en su valor máximo de inversión de población y  $\Phi(t_0) = 1 \times 10^{-10}$  como ruido inicial de fotones.

**Tabla 1: Constantes usadas para las simulaciones usando fotones**

Constante	Valor numérico
$c$	$3 \times 10^8$ m/s
$\tau_{21}$	$230 \times 10^{-6}$ s
$R_1$	0.8
$R_2$	1.0
$\sigma$	$2.8 \times 10^{-23}$ m <sup>2</sup>
Longitud de la cavidad	10 cm
Longitud del cristal de ganancia	5 mm
Diámetro del cristal	3 mm

### Apéndice 3: Constantes y consideraciones para las simulaciones de formación de pulsos usando campos eléctricos

Las ecuaciones (42.1) y (42.2) se simularon usando el método numérico Runge-Kutta de orden 4 (RK4), esto debido a que se requiere de un método más preciso que el método de Euler (Apéndice 2), ya que las oscilaciones causadas por el batimiento de modos hace que el método numérico diverja y no muestre el resultado correcto.

El método Runge-Kutta de orden 4 se define como

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (64.1)$$

$$k_1 = f(x_j, y_j) \quad (64.2)$$

$$k_2 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (64.3)$$

$$k_3 = f\left(x_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (64.4)$$

$$k_4 = f(x_j + h, y_j + hk_3) \quad (64.5)$$

Se declaró un espacio con  $N = 200000$  puntos y un tiempo de integración  $h = 0.5 \times 10^{-12}s$ . La inversión de población inicial  $\Delta N(t_0)$  se declaró de acuerdo a la ecuación (36), es decir en su valor máximo de inversión de población para diferentes valores de  $x$  con un valor inicial de campo eléctrico  $E(t_0) = 1 \times 10^{-10} N/C$ .

Cabe mencionar que las simulaciones toman en consideración también los campos conjugados del campo eléctrico, es decir se están simulando dos ecuaciones del campo eléctrico para cada modo longitudinal  $n$ . Esto es importante para la ecuación de inversión de población, ya que toma en consideración el campo eléctrico total en la cavidad.

Las constantes usadas para las simulaciones se declaran en la tabla 2.

**Tabla 2: Constantes usadas para las simulaciones usando campos eléctricos**

<b>Constante</b>	<b>Valor numérico</b>
$c$	$3 \times 10^8$ m/s
$\hbar$	$1.055 \times 10^{-34}$ J · s
$\tau_{21}$	$230 \times 10^{-6}$ s
$R_1$	0.8
$R_2$	1.0
$\sigma$	$2.8 \times 10^{-23}$ m <sup>2</sup>
$\epsilon$	$2.89 \times 10^{-11}$ F/m
$\Delta\omega_a$	$9.99 \times 10^{11}$ 1/s
Longitud de la cavidad	10 cm
Longitud del cristal de ganancia	5 mm

## Anexo 1: Código usado para la simulación de pulsos usando fotones

```
function pul_foton

clc

x = 3;           %veces arriba del umbral

%constantes
c_luz = 3e8;     %velocidad de la luz
T_2 = 230e-6;   %tiempo de relajación del medio 230e-6
R_1 = 0.8;      %reflectancia del espejo acoplador
L_cavidad = 0.1; %longitud de la cavidad resonante [m]
sigma_a = 2.8e-23; %seccion eficaz de absorción
L_cristal = 9e-3; %longitud del cristal [m]
t_cav = L_cavidad./(c_luz.*(1-R_1)); %tiempo de vida en la cavidad
nth = -log(R_1)/(sigma_a*L_cristal); %condicion mínima de oscilación
ruido_aleatorio = 1e-10; %ruido aleatorio en la cavidad
Rp = x*nth/T_2; %bombeo
d_cristal = 3.10e-3; %diametro del cristal de ganancia
V_c = (pi*L_cavidad*d_cristal^2)/4; %volumen de la cavidad

%constantes reducidas
A = c_luz*sigma_a/V_c;
B = c_luz*sigma_a*L_cristal/L_cavidad;
gam_21 = 1./T_2;
gam_c = 1./t_cav;

%implementación numérica
tiempo_max = 1e-7; %tiempo máximo para graficar 1e-7
delta_t = 10e-12; %delta de integración 0.5e-12
num_puntos = floor(tiempo_max/delta_t); %numero de puntos
%num_puntos = 3;
tiempo = linspace(0,tiempo_max,num_puntos);

%declaracion de espacios
N_2 = zeros(1,num_puntos); %poblacion
n_f = zeros(1,num_puntos); %numero de fotones

N_2(1) = x*nth;
n_f(1) = ruido_aleatorio;

%metodo de euler

for l = 2:num_puntos

    N_2(l) = N_2(l-1)+delta_t*evo_N2(N_2(l-1),n_f(l-1), Rp, gam_21,A);
    n_f(l) = n_f(l-1)+delta_t*evo_nf(N_2(l-1),n_f(l-1),gam_c,B);

end

figure(1); plot(tiempo, N_2); title('N2');
figure(2); plot(tiempo,n_f); title ('nf');
```

```
end
```

```
function N_final = evo_N2(dN2,dnf, Rp, gam_21,A)
```

```
    N_final = Rp-gam_21.*dN2-A.*dN2.*dnf;
```

```
end
```

```
function nf_final = evo_nf(dN2,dnf,gam_c,B)
```

```
    nf_final = -gam_c*dnf+B*dN2*dnf;
```

```
end
```

## Anexo2: Código usado para la simulación de pulsos usando campos eléctricos

```

function re_r_q_switch_3

clc

%valores a cambiar
N_modos = 11; %11
x = 3; %veces arriba del umbral
E_ext = 1e-6; %valor constante
frac_lej = 0.5;
c_n_esp = 1.0; %valor de empataamiento espacial

%variables
c_luz = 3e8; %velocidad de la luz
h_bar = 1.055e-34; %constante de planck reducida [J*s]
T_2 = 230e-6; %tiempo de relajación del medio 230e-6
R_1 = 0.8; %reflectancia del espejo acoplador
L_cavidad = 0.1; %longitud de la cavidad resonante [m]
sigma_a = 2.8e-23; %seccion eficaz de abrosción
epsi_0 = 8.85e-12; %permitividad del vacio [F/m]
indice_yag = 1.81; %indice de refracción del Nd:YAG 1.81
epsi_yag2 = indice_yag.^2;
epsi_yag_f = epsi_0.*epsi_yag2; %permitividad del Nd:YAG
lam_a = 1064e-9; %longitud de onda de emisión del laser
dlam_a = .6e-9; %ancho de banda en [m]
L_cristal = 5e-3; %longitud del cristal [m]

%constantes reducidas
A = sigma_a.*c_luz;
B = A*epsi_yag_f/h_bar;
t_cav = L_cavidad./(c_luz.*(1-R_1)); %tiempo de vida en la cavidad
nth = -log(R_1)/(sigma_a*L_cristal); %condicion mínima de oscilación
ruido_aleatorio = 1e-15; %ruido aleatorio en la cavidad

%numero de modos en la cavidad
sep_cav = c_luz/L_cavidad; %separación entre modos de la cavidad
sep_gan = c_luz*dlam_a./lam_a.^2; %separación entre modos de la ganancia
%N_modos = floor(sep_gan/sep_cav)-1; %numero de modos en la cavidad
%N_modos = 11; %11

%implementación numérica
tiempo_max = 1e-7; %tiempo máximo para graficar
delta_t = .5e-12; %delta de integración
num_puntos = tiempo_max/delta_t; %numero de puntos
%num_puntos = 3;
tiempo = linspace(0,tiempo_max,num_puntos);

%espacio a graficar
FW_E = zeros(N_modos,num_puntos); %forward En
BW_E = FW_E; %backward En
E_tot = zeros(1,num_puntos); %campo total
N_tot = E_tot; %diferencia de población

```

```

%modos
w_a = 2*pi*c_luz./lam_a;           %frecuencia de oscilaciòn de
emision [hz]
w_c = w_a;
d_w_c = 2*pi*sep_cav;             %separacion entre modos en
frecuencias wn
dw_a = 2*pi*sep_gan ;             %separaciòn entre modos de
ganancia en frecuencia
N_esp_modos = -floor((N_modos-1)/2):1:floor((N_modos-1)/2);
w_modos = N_esp_modos*d_w_c +w_a; %frecuencia de los modos en la
cavidad
Beta_m = cons_betam(w_modos,w_a,dw_a); %Factor de acoplamiento del modo
homogéneo
w_modos = transpose(w_modos);
Beta_m = transpose(Beta_m);
B2 = B/w_a;                       %constante reducida aproximada
de_N_0 = 1e-10;

%valores a implementar
%x = 5;          %veces arriba del umbral
vol_cav = L_cristal/L_cavidad; %volumen en la cavidad
%p_medio = floor(N_modos/2+1);

%valores iniciales
%rp_alea = 1e-1*randn;
rp_alea = 0;
N_tot(1) = (x+rp_alea)*nth;
Rp = (x+rp_alea)*nth/T_2;
x_fin_g = x+rp_alea;

%semilla
% E_ext = 0; %valor constante
% frac_lej = 0.0;
w_e = w_c+frac_lej*d_w_c; %frecuencia externa
rel_we = w_e./w_modos; %relaciòn entre frecuencias
d_cristal = 3.10e-3; %diametro del cristal de ganancia
V_c = (pi*L_cavidad*d_cristal^2)/4;
%V_cris = (pi*L_cristal*d_cristal^2)/4;
gam_ext = log(1./R_1)./t_cav;
%cons_acopla = sqrt((2*gam_ext)/(epsi_yag_f*V_c));
cons_acopla = 1;
a_n = sin(pi*(w_modos-w_e)/d_w_c)./(pi*(w_modos-w_e)/d_w_c);

%revisar
rev_a_n = isnan(a_n);
for g = 1:length(a_n)

    if rev_a_n(g) ==1
        a_n(g) = 1;
    end

end

a_n = c_n_esp.*cons_acopla.*a_n.*rel_we*E_ext;

%figure(100); plot(a_n)

%método de runge Kutta orden 4

```

```

for g = 2:num_puntos

    FW_E_tra = FW_E(:,g-1);
    BW_E_tra = BW_E(:,g-1);
    N_tot_tra = N_tot(g-1);

    %k1
    FW_E_k1 = FW_E(:,g-1);
    BW_E_k1 = BW_E(:,g-1);
    N_tot_k1 = N_tot(g-1);

    %k2
    FW_E_k2 =
    evo_dE_F(t_cav,A,N_tot_tra+.5.*N_tot_k1*delta_t,FW_E_tra+.5*FW_E_k1.*delta_t,r
uido_aleatorio,Beta_m,vol_cav,N_modos,w_c,w_modos);
    BW_E_k2 =
    evo_dE_B(t_cav,A,N_tot_tra+.5.*N_tot_k1*delta_t,BW_E_tra+.5*BW_E_k1.*delta_t,r
uido_aleatorio,Beta_m,vol_cav,N_modos,w_c,w_modos);
    N_tot_k2 =
    evo_dN_FB(de_N_0,T_2,B,N_tot_tra+.5.*N_tot_k1*delta_t,FW_E_tra+.5*FW_E_k1.*del
ta_t,BW_E_tra+.5*BW_E_k1.*delta_t,Rp,Beta_m,w_modos);

    %k3
    FW_E_k3 =
    evo_dE_F(t_cav,A,N_tot_tra+.5.*N_tot_k2*delta_t,FW_E_tra+.5*FW_E_k2.*delta_t,r
uido_aleatorio,Beta_m,vol_cav,N_modos,w_c,w_modos);
    BW_E_k3 =
    evo_dE_B(t_cav,A,N_tot_tra+.5.*N_tot_k2*delta_t,BW_E_tra+.5*BW_E_k2.*delta_t,r
uido_aleatorio,Beta_m,vol_cav,N_modos,w_c,w_modos);
    N_tot_k3 =
    evo_dN_FB(de_N_0,T_2,B,N_tot_tra+.5.*N_tot_k2*delta_t,FW_E_tra+.5*FW_E_k2.*del
ta_t,BW_E_tra+.5*BW_E_k2.*delta_t,Rp,Beta_m,w_modos);

    %k4
    FW_E_k4 =
    evo_dE_F(t_cav,A,N_tot_tra+N_tot_k3*delta_t,FW_E_tra+FW_E_k3.*delta_t,ruido_al
eatorio,Beta_m,vol_cav,N_modos,w_c,w_modos);
    BW_E_k4 =
    evo_dE_B(t_cav,A,N_tot_tra+N_tot_k3*delta_t,BW_E_tra+BW_E_k3.*delta_t,ruido_al
eatorio,Beta_m,vol_cav,N_modos,w_c,w_modos);
    N_tot_k4 =
    evo_dN_FB(de_N_0,T_2,B,N_tot_tra+N_tot_k3*delta_t,FW_E_tra+FW_E_k3.*delta_t,BW
_E_tra+BW_E_k3.*delta_t,Rp,Beta_m,w_modos);

    %final
    FW_E(:,g) =
    FW_E_tra+delta_t*(FW_E_k1+2*FW_E_k2+2*FW_E_k3+FW_E_k4)./6+ruido_aleatorio.*exp
(1i*randn(N_modos,1))+a_n;
    BW_E(:,g) =
    BW_E_tra+delta_t*(BW_E_k1+2*BW_E_k2+2*BW_E_k3+BW_E_k4)./6+ruido_aleatorio.*exp
(1i*randn(N_modos,1));
    E_tot(g) =
    evo_E_tot(FW_E(:,g),BW_E(:,g),delta_t,g,N_esp_modos,d_w_c,Beta_m);
    N_tot(g) = N_tot_tra+delta_t*(N_tot_k1+2*N_tot_k2+2*N_tot_k3+N_tot_k4)./6;

    a = isnan(E_tot(g));

```

```

    if a == 1
        g
        break
    end

end

end

%smooth_E = smooth(E_tot,0.0015);

figure(10); plot(tiempo,E_tot); title('E_{tot}');
% figure(11); plot(tiempo,abs(sum(FW_E)).^2); title('Forward');
% figure(12); plot(tiempo,abs(sum(BW_E)).^2); title('Backward');
%figure(20); plot(tiempo,N_tot); title('N_{tot}');
%figure(30); plot(tiempo,smooth_E); title('Smooth E');

end

function N_fin = evo_dN(de_N_0,T_2,B,dN,dE,Rp)

N_fin = -B.*dN.*dE./2+Rp-(dN-de_N_0)./T_2;

end

function N_fin = evo_dN_FB(de_N_0,T_2,B,dN,dEF,dEB,Rp,Beta_m,w_modos)

AA = abs(dEF+dEB).^2;
AA = sum(Beta_m.*AA./w_modos);

N_fin = -B.*dN.*AA./2-(dN-de_N_0)./T_2+Rp;

end

function E_fin =
evo_dE_F(t_cav,A,dN,dE,ruido_aleatorio,Beta_m,vol_cav,N_modos,w_c,w_modos)

% gam_c_2.*dE./2
% A.*dN.*dE./2
% li.*(w_c-w_m).*dE

m = -1./(2*t_cav)+A.*dN.*Beta_m*vol_cav./2-li*(w_c-w_modos);

E_fin = m.*dE;%+ruido_aleatorio.*exp(li*randn(N_modos,1));

end

function E_fin =
evo_dE_B(t_cav,A,dN,dE,ruido_aleatorio,Beta_m,vol_cav,N_modos,w_c,w_modos)

% gam_c_2.*dE./2
% A.*dN.*dE./2
% li.*(w_c-w_m).*dE

```

```

m = -1./(2*t_cav)+A.*dN.*Beta_m*vol_cav./2+1i*(w_c-w_modos);

E_fin = m.*dE;%+ruido_aleatorio.*exp(1i*randn(N_modos,1));

end

function E_fin =
evo_E_tot(dFW_E,dBW_E,delta_t,contador,N_esp_modos,d_w_c,Beta_m)

N_esp_modos = transpose(N_esp_modos);

E_fin = Beta_m.*(dFW_E+dBW_E).*exp(1i*N_esp_modos.*d_w_c.*contador.*delta_t);
%E_fin = Beta_m.*(dFW_E+dBW_E);
E_fin = abs(sum(E_fin)).^2;

end

function betam_final = cons_betam(w_m,w_a,dw_a)

betam_final = 1./(1+(2.*(w_a-w_m)./dw_a).^2);

end

```