Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California

Maestría en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control

Sincronización de sistemas mecánicos con acoplamiento horizontal-vertical tipo Huygens.

Tesis
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Isaac Ruiz Ramos

Ensenada, Baja California, México
2016

Tesis defendida por

Isaac Ruiz Ramos

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Codirector del Comité

Dr. Jonatán Peña Ramírez
Codirector del Comité

M.C. Ricardo Francisco Núñez Pérez

Dr. José Ricardo Cuesta García

Dr. Pedro Negrete Regagnon

Dr. Miguel Ángel Alonso Arévalo
Coordinador del Programa de Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez
Director de Estudios de Posgrado

Resumen de la tesis que presenta Isaac Ruiz Ramos como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Sincronización de sistemas mecánicos con acoplamiento horizontal-vertical tipo Huygens.

Resumen aprobado por:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos
Codirector de Tesis

Dr. Jonatán Peña Ramírez
Codirector de Tesis

La sincronización es un fenómeno natural (o controlado) que se puede observar en sistemas de diversa naturaleza como físicos, biológicos o de ingeniería, por mencionar algunos. Hablar de sincronización es hablar de “coincidencia en el tiempo”. El primer reporte sobre sincronización se debe al científico holandés Christiaan Huygens, quien observó que dos de sus relojes de péndulo, los cuales estaban colocados sobre una estructura flexible, mostraban cierta “simpatía” –los péndulos de los relojes oscilaban al unísono pero en direcciones opuestas. Actualmente, lo que Huygens observó se llama sincronización en contra fase. Aunque Huygens no tenía las herramientas matemáticas necesarias para explicar su descubrimiento, concluyó que el elemento fundamental para que dos o más sistemas se sincronicen es la existencia de un medio por el cual los mismos transfieran energía entre sí. A dicho medio se le llama acoplamiento y en el caso de la estructura usada por Huygens, se suele referir como acoplamiento tipo Huygens. En esta tesis se estudia el fenómeno de sincronización en sistemas dinámicos que interactúan a través de un medio flexible. En particular, se considera una red de osciladores mecánicos (metrónomos), los cuales están acoplados por medio de una estructura flexible que consiste de dos plataformas, la cual se denomina acoplamiento horizontal-vertical de Huygens. Se considera el caso de sincronización natural, es decir, cuando los metrónomos se sincronizan sin que se requiera una fuerza externa. En el análisis presentado, se emplea el método de perturbaciones de Poincaré para el estudio analítico. Además, se deriva un modelo matemático, con el cual se realiza un estudio numérico exhaustivo con la finalidad de obtener los comportamientos límite de la red. Dicho estudio revela que, además de los regímenes de sincronización –en fase y en contra fase– existen otros comportamientos como la sincronización en frecuencia con amplitud variable. Adicionalmente, se presenta un análisis experimental y los resultados obtenidos se comparan con los resultados analíticos y numéricos. La importancia de este trabajo de investigación se enmarca por el hecho de que los resultados, tanto analíticos como numéricos y experimentales aquí presentados, proporcionan un nuevo entendimiento del fenómeno de la sincronización.

Palabras Clave: **Sincronización, Huygens, acoplamiento, oscilador, fase.**

Abstract of the thesis presented by Isaac Ruiz Ramos as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Master in Electronics and Telecomunications with Instrumentation and Control orientation.

Synchronization of mechanical systems with horizontal-vertical Huygens coupling.

Abstract approved by:

Dr. Joaquín Álvarez Gallegos	Dr. Jonatán Peña Ramírez
Thesis Co-Director	Thesis Co-Director

Synchronization is either a natural or controlled phenomenon which can be observed in different fields like physics, biology and engineering, to name a few. Talking about synchronization is talking about ''agreement in time". The first report about synchronization is due to the Dutch scientist Christiaan Huygens, who observed that two of his pendulum clocks, mounted on a flexible structure, showed some ''sympathy" –the pendula of the clocks oscillated in unison but in opposite directions–. Currently, the phenomenon observed by Huygens is called anti-phase synchronization. Even that Huygens did not have the necessary mathematical tools to explain his discovery, he concluded that the key for two or more systems to synchronize is the existence of a channel through which energy is transferred between the systems. This channel is called "coupling", in the case of the structure used by Hygens, it is called "Huygens coupling". In this thesis, the phenomenon of synchronization in dynamical systems interacting through a flexible channel is studied. In particular, it is considered a network of mechanical oscillators (metronomes), which are coupled through a flexible structure that consists of two platforms, called horizontal-vertical Huygens coupling. The case of natural synchronization –i.e., when the metronomes are synchronized without an external force – is considered. In this study we use the Poincaré method for perturbations to study the system in an analityc way. In addition, a mathematical model is derived, with which allows to coduct an exhaustive numerical study in order to obtain the limit behaviors. This study reveals that in addition to the synchronization regime, in phase or anti-phase, there are other behaviors in the system, such as frequency synchronization with variable amplitude. In addition, an experimental analysis is realized and the obtained results are compared to the analytical and numerical results. The importance of this research is framed by the fact that the analytical, numerical and experimental results presented here provide a new knowledge of the phenomenon of synchronization.

Keywords: **Synchronization, Huygens, coupling, oscillator, phase.**

Dedicatoria

A mis padres y hermano.

Agradecimientos

A mis padres por estar conmigo en los momentos más difíciles, no sólo de la maestría, sino de la vida; por apoyarme en todas mis decisiones, por su cariño, consejos y comprensión.

A los miembros de mi comité de tesis por los comentarios, consejos y aportaciones dadas, no sólo para el desarrollo de este trabajo, sino también en las presentaciones realizadas. En particular, a los Doctores Joaquín Álvarez y Jonatán Peña por permitirme formar parte de su equipo de trabajo. Al Maestro en Ciencias Ricardo Francisco Nuñez por los consejos dados para la elección del tema de tesis. Y al Doctor José Ricardo Cuesta por proporcionar las herramientas y programas esenciales para el desarrollo de esta tesis.

A Ismael Casarrubia, Eduardo Malfavaun y Alejandro Cruz por la amistad brindada durante los dos años de la maestría. En especial a Alejandro Cruz por acrecentar mi ánimo para elegir el tema de tesis que se desarrolla en este trabajo. También a Vicente Ramírez, un buen amigo, por apoyarme en un momento crucial por el cual pasé durante la maestría.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada y al Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones por darme la oportunidad de realizar la maestría en sus instalaciones.

Y en especial, al pueblo de México, con quien estaré eternamente agradecido por brindarme el apoyo económico a través del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), ya que sin ello, hoy no podría ver finalizada una meta más.

Tabla de contenido

Página

Lista de figuras

Figura Página

Figura Página

Figura Página

Figura Página

Figura Página

Lista de tablas

Tabla Página

Tabla Página

Capítulo 1. Introducción

La sincronización es uno de los fenómenos más comunes en la naturaleza y se puede encontrar desde niveles microscópicos, (v. g., el efecto Josephson, las células marcapasos, las neuronas, etc.) hasta macroscópicos (v. g., animales, personas, sistemas mecánicos, cuerpos celestes, etc.). Éstos y otros ejemplos se describen en (Blekhman, 1988; Blekhman *et al.*, 1997; Danino *et al.*, 2010; Mirollo y Strogatz, 1990; Pikovsky *et al.*, 2001; Spoor y Swift, 2000).

De acuerdo con la Real Academia Española, el término sincronización se define como la "acción y efecto de sincronizar", mientras que sincronizar es "hacer coincidir en el tiempo dos o más movimientos o fenómenos", por lo que se puede decir que el término sincronización es la acción de hacer que dos o mas fenómenos sucedan al mismo tiempo (Real Academia Española, 2016). De hecho ambos términos se derivan de la palabra griega *síncrono*, cuyo origen proviene de los vocablos griegos "$\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma$ (*cronos*) y $\sigma\acute{\upsilon}\nu$ (*sin*) que significan *tiempo* y *al mismo*, respectivamente". De lo anterior, se puede inferir que el significado de la palabra síncrono es *al mismo tiempo* (Pikovsky *et al.*, 2001).

Es posible encontrar dos clases de sincronización: natural y controlada. La primera se debe a propiedades naturales de los propios procesos y su interacción natural, por ejemplo, el vuelo sincronizado de una parvada o las células marcapasos, y la segunda es aquélla que persigue un objetivo de control (Alvarez *et al.*, 2010; Blekhman *et al.*, 2002; Peña Ramírez, 2013). Sin embargo, para que este fenómeno emerja, ya sea de manera natural o controlada, debe existir un medio por el cual los sistemas interactúen mediante la transferencia de energía, a este medio se le llama acoplamiento (Alvarez *et al.*, 2010; Pikovsky *et al.*, 2001).

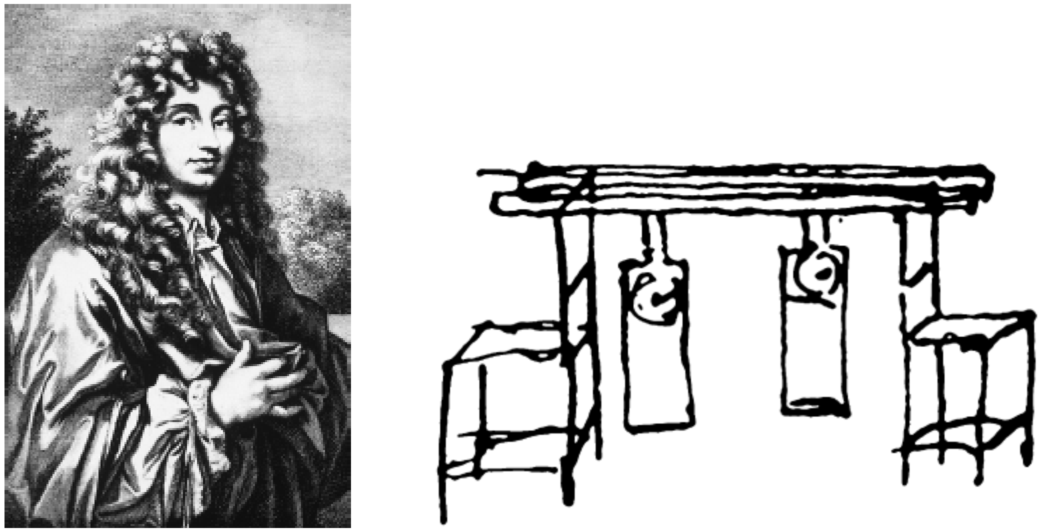
Dentro del campo de los sistemas dinámicos, la sincronización se estudia de manera amplia. Algunos de los trabajos que se pueden encontrar en la literatura engloban sincronización de sistemas lagrangianos (Alvarez *et al.*, 2010), osciladores electrónicos (Steur *et al.*, 2008), circuitos conmutados (Toledo Gallardo, 2014), sincronización en lazo abierto (Peña Ramírez *et al.*, 2015), entre otros. También el estudio de la sincronización ha tenido aplicaciones importantes; v. g., en Junio del 2000 durante la inauguración del

Puente del Milenio, en Londres, el puente empezó a generar peligrosas oscilaciones en el momento en que por él cruzaban los peatones, lo cual generó una sincronización lateral del mismo con la gente. Cabe mencionar que éste tuvo que ser cerrado hasta solucionar el problema (Ulrichs *et al.*, 2009). Años más tarde, Strogatz *et al.* (2005) realizaron un análisis teórico acerca de tal fenómeno, en el cual encontraron que la razón de dicha sincronización se debía al amortiguamiento que el puente presentaba y no al diseño del mismo. De acuerdo con los mismos autores, la aproximación que realizaron puede ser usada para evitar la sincronización lateral desarrollada por lo peatones en los puentes.

Pero un tipo de sincronización que, al menos en las últimas dos décadas, ha obtenido una mayor atención por parte de la comunidad científica es la sincronización tipo Huygens o sincronización de Huygens, la cual, a pesar de haber sido ya estudiada, aún permanece como un problema abierto (Peña Ramírez, 2013).

1.1 Notas históricas

Durante la segunda mitad del siglo XVII, el científico holandés Christiaan Huygens, Figura 1a, descubrió, de manera casual, un fenómeno peculiar cuando se encontraba trabajando en un método para medir la coordenada longitudinal sobre el mar mediante el uso de dos relojes de péndulo. Un día, mientras Huygens se encontraba enfermo y recostado sobre su cama, observó que dos de sus relojes que colgaban de una misma barra de madera, después de cierto tiempo, oscilaban al unísono pero en sentido opuesto; la configuración que él empleó se puede apreciar en la Figura 1b. Inicialmente, Huygens pensó que este fenómeno era causado por las corrientes de aire compartidas entre los péndulos; sin embargo, después de realizar varias observaciones, concluyó que este fenómeno se debía a las pequeñas oscilaciones, casi imperceptibles, que se generaban en la barra. A este fenómeno lo nombró *la simpatía de dos relojes*. También observó que después de perturbar a uno de los péndulos, la sincronización se restauró media hora después. Debido a las escasas herramientas matemáticas, Huygens no pudo realizar un modelo de dicho sistema; en cambio, logró realizar una buena descripción del fenómeno. Actualmente, al fenómeno observado por él, se le denomina sincronización en contra fase (Boda *et al.*, 2013; Peña Ramírez, 2013; Pikovsky *et al.*, 2001).



(a) Christiaan Huygens **(b) Configureación empleada por Huygens**

Figura 1**: Huygens y su experimento de sincronización (Pikovsky *et al.*, 2001).**

Medio siglo después, John Ellicot realizó experimentos similares con dos relojes de péndulo. Pero, a diferencia de Huygens, Ellicot observó que uno de ellos siempre se detenía después de dos horas de estar trabajando. Él concluyó que los relojes de péndulo se afectaban mutuamente (Peña Ramírez, 2013).

En 1873, Williams Ellis colocó sobre un estante de madera dos relojes de péndulo, y al igual que Huygens, observó que estos se sincronizaban en contra fase. Después agregó nueve relojes al estante de madera y observó que el fenómeno previo había desaparecido. De sus observaciones concluyó que los relojes se comunicaban a través del estante (Peña Ramírez, 2013). De acuerdo con (Peña Ramirez *et al.*, 2016) ni Ellicot ni Ellis hicieron referencia a las observaciones realizadas por Huygens.

En 1905, Korteweg modeló por primera vez el sistema descrito por Huygens y demostró que éste se descompone en tres modos normales, de los cuales, dos implican oscilaciones considerables de la estructura. De su análisis concluyó que la sincronización en contra fase es el modo más dominante. A finales del siglo XX, Blekhman agregó un término de Van der Pol al modelo de Korteweg para describir el mecanismo de escape de los relojes, proveyendo una primera teoría no lineal del sistema. Con su análisis concluyó que el mecanismo de sincronización en fase y en contra fase se encuentra en el sistema y que la manifestación de uno de los dos regímenes de sincronización (en fase o contra fase) depende de las condiciones iniciales (Jovanovic y Koshkin, 2012; Peña Ramírez, 2013).

1.2 Contenido de la tesis

Como se puede apreciar en los párrafos anteriores, la sincronización de Huygens tiene más de tres siglos bajo investigación, en los últimos 20 años el número de estudios acerca de este fenómeno creció de tal forma que es posible encontrar aquéllos en los que los relojes se sustituyen por otro tipo de osciladores y la barra por otro tipo de acoplamiento, como se verá más adelante. En este trabajo se realiza un estudio, tanto de manera analítica como numérica y experimental, sobre la sincronización de Huygens, pero ya no vista de la manera clásica, i. e., se modifica la configuración original, de tal forma que el estudio se amplía a mas de dos osciladores acoplados mediante una estructura de dos plataformas. Para su mayor compresión, el documento se divide en seis partes.

En el presente capítulo se hace una recopilación de algunas investigaciones que se han desarrollado sobre la sincronización de Huygens, así como las características que deben tener los sistemas involucrados para que se pueda dar el fenómeno de sincronización. Por último, se dan a conocer la motivación y los objetivos de este trabajo.

En el siguiente capítulo se da a conocer el método empleado para el análisis del sistema bajo estudio. También en dicho capítulo se presentan, de manera formal, las definiciones de sincronización que se manejan en este trabajo.

En el tercer capítulo se presenta el modelo y el análisis del sistema propuesto, al cual se le da el nombre de sistema horizontal-vertical de Huygens, o bien, sistema HV de Huygens. Cabe mencionar que el análisis se realiza con el método expuesto en el segundo capítulo.

En el cuarto capítulo, se presenta el estudio tanto analítico como numérico sobre la sincronización de dos osciladores empleando el sistema antes mencionado. De igual manera, en el quinto capítulo se presenta el estudio analítico y numérico para el caso de una red de cuatro osciladores, es decir, se amplía el estudio a más de dos osciladores.

El sexto capítulo trata sobre el estudio experimental que se realizó para comprobar los resultados obtenidos en los capítulos previos. Se inicia con la presentación de la instrumentación empleada para la medición de los desplazamientos de los metrónomos y de la estructura. Posteriormente se dan a conocer los experimentos realizados tanto para dos osciladores como para la red estudiada en el quinto capítulo.

Finalmente, en el séptimo capítulo se presentan las conclusiones a las que se llegó después de analizar los resultados obtenido. De igual manera, se presenta algunas recomendaciones y posibles aplicaciones.

1.3 Estado del arte

En un intento por develar el secreto de la sincronización de Huygens, se han realizado diversas investigaciones acerca de este fenómeno. En algunos trabajos se han aplicado diferentes métodos de análisis, en otros se han creado nuevas configuraciones y encontrado nuevos comportamientos. En este apartado se presenta el estado del arte relacionado con la sincronización de Huygens.

De acuerdo con (Peña Ramírez, 2013), dentro de las investigaciones que se han realizado se encuentran dos tipos de aproximaciones: la teórica y la experimental.

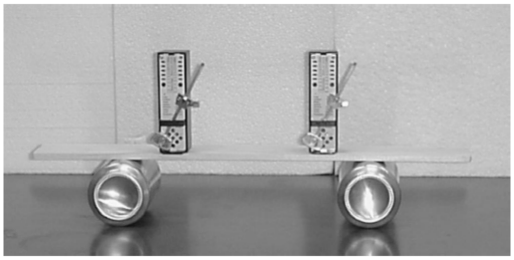
Dentro de la aproximación teórica se pueden encontrar aquellos trabajos que dan una explicación desde un punto de vista analítico y comprueban sus resultados mediante un análisis numérico o experimental, con lo cual se crean aproximaciones que explican los comportamientos que se desarrollan en la sincronización de Huygens. Así mismo, se encuentran los límites de los parámetros y las condiciones bajo las cuales emergen los diferentes fenómenos ya observados. Algunas técnicas que se emplean para el estudio analítico son:

- Método de Poincaré para perturbaciones (Jovanovic y Koshkin, 2012; Peña Ramirez *et al.*, 2014b; Peña Ramírez y Álvarez, 2015).
- Linealización armónica o función descriptiva (Fradkov y Adrievsky, 2007).
- Método del balance de energía (Czołczyński *et al.*, 2011; Czolczynski *et al.*, 2013).

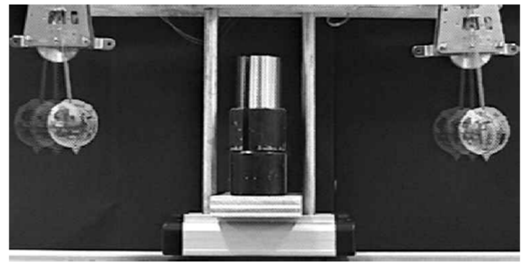
En otros trabajos relacionados con esta aproximación, se considera que la sincronización se da por la flexibilidad de la barra de la cual se encuentran suspendidos los osciladores (Dilão, 2009), y se amplía el estudio a una red de osciladores bajo la misma consideración (Dilão, 2014). En otros, el mecanismo de escape de los relojes se modela de diversas formas, por ejemplo en (Gu *et al.*, 2010) se modela con una función signo y en (Oliveira y Melo, 2015) se emplea un modelo de Andronov. Se amplía el estudio a osciladores de segundo orden (Peña-Ramírez *et al.*, 2012a,b; Rijlaarsdam *et al.*, 2010), y se estudia el ruido inducido en el acoplamiento de los osciladores (Pankratova y Belykh, 2013).

De acuerdo con (Peña Ramírez, 2013), en la segunda aproximación se realizan experimentos en los que la configuración de Huygens se modifica. Por ejemplo, en (Pantaleone, 2002), donde los relojes son sustituidos por metrónomos y la barra por una tabla sobre la cual se colocan los osciladores, ver Figura 2a. Cabe mencionar que en este trabajo se aplica el método de promediación para explicar los fenómenos observados. En (Bennett *et al.*, 2002) donde los relojes de péndulo son sustituidos por dos péndulos que cuelgan de una barra, ver Figura 2b, y en (Oud *et al.*, 2006) donde el mecanismo de escape de dos metrónomos se ensamblan a un barra de metal cuya masa y rigidez pueden ser variadas.

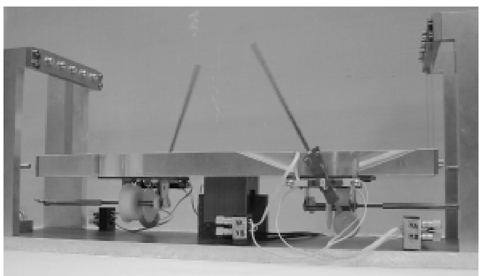
Además, existen otros trabajos en los cuales el estudio es tanto numérico como experimental algunos de ellos son (Boda *et al.*, 2013; Czolczynski *et al.*, 2011; Hu *et al.*, 2013). Cabe mencionar que la configuración de Huygens también fue modificada. En (Czolczynski *et al.*, 2011) se presenta una revisión de la sincronización de Huygens, ver Figura 2d, donde se encuentra que la emergencia de la sincronización en contra fase depende de las discrepancias entre los relojes. En (Hu *et al.*, 2013) se realizan experimentos con tres metrónomos empleando la plataforma de (Pantaleone, 2002). Los fenómenos que se observan son sincronización completa en fase, sincronización parcial, entre otros. En (Boda *et al.*, 2013) se propone un nuevo acoplamiento, se trata de un disco que gira libremente, ver Figura 2e; sobre el disco se colocan los metrónomos de manera simétrica en el perímetro del mismo. Los resultados obtenidos, en ese trabajo, muestran que el grado de sincronización incrementa conforme la frecuencia aumenta, y decrece conforme el número de metrónomos se incrementa.



(a) Plataforma de Pantaleon (Pantaleone, 2002)

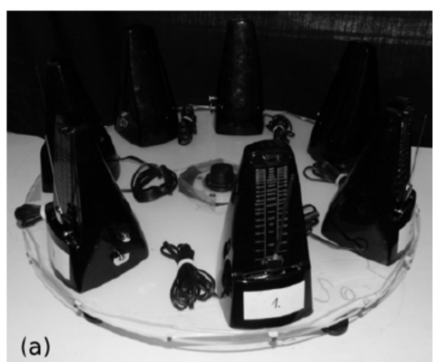


(b) Plataforma de Wiesenfelt (Bennett *et al.*, 2002)



(c) Plataforma de Nijmeijer (Oud *et al.*, 2006)

(d) Experimento con relojes (Czolczynski *et al.*, 2011)



(e) Experimento con plataforma giratoria (Boda *et al.*, 2013)

Figura 2**: Plataformas experimentales para el estudio de la sincronización de Huygens.**

Hasta el momento sólo se ha mencionado la existencia de sincronización en fase y en contra fase en todos los trabajos realizados en relación a la sincronización de Huygens. Pero, en el año 2013 fue descubierto un nuevo fenómeno dentro de este tipo de sincronización, los estados quimera. Sin embargo, antes de continuar, se definirá lo que es un estado quimera. De acuerdo con (Panaggio y Abrams, 2015), un estado quimera es un patrón espacio temporal en el cual un sistema de osciladores se divide en regiones coexistentes de oscilaciones coherentes e incoherentes. Lo anterior se refiere a que en un sistema de osciladores acoplados unos se sincronizan mientras que otros permanecen oscilando de manera asíncrona. Este fenómeno fue reportado por primera vez en (Kuramoto y Battogtokh, 2002). En dicho documento los autores trabajan con la ecuación de Ginzburg-Landau, y encuentran que la aparición de este fenómeno se debe a la fuerza de acoplamiento.

Cabe mencionar que años más tarde el nombre de estados quimera fue acuñado en (Abrams y Strogatz, 2004). A este fenómeno los autores lo nombraron como estados quimera por la similitud con la quimera, una bestia de la mitología griega, la cual era un híbrido de cabra, león y serpiente (Panaggio y Abrams, 2015).

Lo anterior se menciona debido a que en (Martens *et al.*, 2012), además de los comportamientos antes mencionados, se reportan por primera vez los estados quimera en un sistema con acoplamiento de Huygens. En dicho trabajo los relojes se sustituyen por grupos de metrónomos sobre unos columpios y la barra por un resorte, ver Figura 3. Los autores encuentran que para un resorte cuya constante elástica es muy 'grande' los metrónomos se sincronizan en fase. En cambio, cuando la misma constante es muy 'pequeña' el movimiento de los mismos es en contra fase. Sin embargo, para ciertos valores entre los límites de la constante elástica se logran observar los estados quimera.

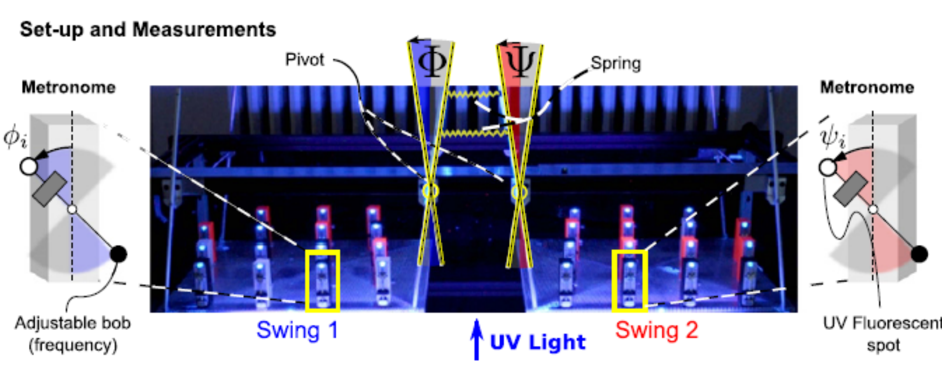


Figura 3**: Estudio de la sincronización de Huygens, en el cual se encontraron los estados quimera (Martens *et al.*, 2012).**

En (Kapitaniak *et al.*, 2014) se reporta otro comportamiento relacionado con la sincronización de Huygens y los estados quimera, los estados quimera imperfectos. En dicho trabajo los autores mencionan haber descubierto este comportamiento al estudiar osciladores mecánicos acoplados. De acuerdo con los autores, estos estados se presentan cuando osciladores solitarios aparecen dentro de los estados quimera y demuestran una dinámica caótica.

Por último, en (Peña Ramirez *et al.*, 2016) se presenta una nueva versión del experimento de Huygens. En dicho trabajo se emplean dos relojes monumentales y una base de madera sobre la cual se colocan éstos, ver Figura 4. A diferencia de los trabajos ya citados, el mecanismo de escape se modela por medio de una función por partes; y el acoplamiento, mediante el uso del método del elemento finito, el cual toma en cuenta la flexibilidad del sistema. Cabe mencionar que el estudio se realiza de tres maneras: analítica, numérica y experimental. De los resultados experimentales, sólo se encuentra sincronización en fase a diferencia de Huygens que observó sincronización en contra fase y ésto se comprueba por medio del análisis teórico. La razón de lo anterior, mencionan los autores del trabajo, se debe a que las propiedades del sistema empelado por ellos son diferentes a las del sistema empelado por Huygens. De los resultados numéricos se encuentran regiones de sincronización en fase y contra fase, y regiones en las cuales la diferencia de fase no es ni cero ni π, pero se mantiene constante.

Figura 4**: Versión moderna del experimento de Huygens (Peña Ramirez *et al.*, 2016).**

De los trabajos citados en los párrafos anteriores se puede decir que el estudio de redes con acoplamiento de Huygens no se aborda de manera amplia, ya que sólo algunos trabajos, como son (Boda *et al.*, 2013; Hu *et al.*, 2013; Martens *et al.*, 2012; Kapitaniak *et al.*, 2014), presentan un estudio acerca de ello. En este trabajo no sólo se estudia el caso para dos osciladores, sino también se amplía a una red de éstos. Además, se cambia el acoplamiento, de tal forma que se tienen dos plataformas unidas de manera vertical, por lo que a este tipo de acoplamiento se le denomina acoplamiento horizontal-vertical de Huygens, o bien, acoplamiento HV de Huygens.

1.4 Entendiendo la sincronización de Huygens

En la sección anterior se presentaron algunos de los trabajos que se elaboraron desde que Christiaan Huygens descubrió la "simpatía de relojes", nombre que él acuñó, y que ahora se conoce como sincronización de Huygens. Estos trabajos tiene algo en común, y es que todos ellos presentan osciladores conectados a través de un acoplamiento flexible. Independientemente del tipo de oscilador, cada uno de ellos comparte ciertas similitudes con los otros, y de igual manera sucede con los acoplamientos empleados. De lo anterior surgen las siguientes preguntas:

- ¿Cómo es posible que dos o más osciladores puedan sincronizarse?
- ¿Cuáles son las características que, entre cada uno de los trabajos presentados, comparten los elementos para que emerja la sincronización?

Para responder a estas preguntas, en la presente sección se dan a conocer, de manera general, las características de los osciladores y del acoplamiento para que se pueda dar el fenómeno de sincronización.

1.4.1 Osciladores

En todos los trabajos que se presentaron en la sección anterior, los osciladores son el elemento principal en cada una de las configuraciones. En los siguientes párrafos se presentan las características que comparten cada uno de ellos.

En la configuración empleada por Huygens se usaron dos relojes de péndulo, por lo que se describirá de manera breve la producción de la oscilación de dichos relojes. En la Figura 5 se presenta el mecanismo que un reloj de péndulo tiene y el cual, se encarga de que el último permanezca oscilando por tiempo indefinido. Para empezar, el péndulo [1] se conecta a un escape [2], el cual libera o bloquea una rueda de escape [3] de acuerdo al movimiento del péndulo. Además, la rueda de escape se conecta, por medio de un sistema de engranes [4,5,7] a una fuente de energía, la cual puede ser una pesa cayendo [8] o una resorte desenrollándose, y quienes controlan a la rueda de escape, quien finalmente entrega energía al péndulo. A este sistema se le llama mecanismo de escape, el cual proporciona al péndulo un movimiento oscilatorio y estable, incluso después de aplicar una pequeña perturbación, siempre y cuando la masa sea levantada o el resorte rebobinado. La oscilación se puede cuantificar sólo tomando en cuenta los parámetros internos del reloj y ésta no depende de las condiciones iniciales (Pikovsky *et al.*, 2001; Bennett *et al.*, 2002). Cabe mencionar que los números que se encuentran entre los corchetes indican el número al que corresponden en la Figura 5.

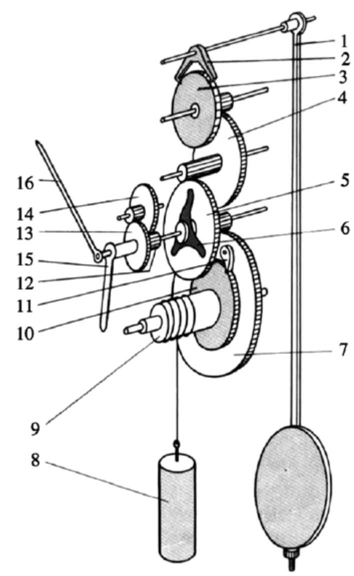


Figura 5: **Maquinaria de un reloj de péndulo (Kapitaniak *et al.*, 2012)**

De acuerdo con (Pikovsky *et al.*, 2001), estos sistemas son llamados osciladores auto-sostenidos y pueden presentar ritmos de formas variadas. De acuerdo con el mismo autor, los osciladores auto-sostenidos presentan las siguientes características:

- Contienen una fuente de energía que compensa la disipación de energía.

- Se describen, de manera matemática, como sistemas dinámicos[1].
- Puesto que un sistema dinámico lineal no puede generar sus propias oscilaciones, estos presentan no linealidades.
- La oscilación está determinada por los parámetros internos del sistema y es estable ante pequeñas perturbaciones.

La representación gráfica del comportamiento de un oscilador se puede hacer mediante el diagrama de fases[2], como el mostrado en la Figura 6. Puede observarse que a un punto de la curva cerrada en el diagrama de fase (izquierda) le corresponde un valor de la señal (derecha) el cual se repite de manera periódica. A este comportamiento se le llama ciclo límite.

Si el ciclo límite es estable, las trayectorias del sistema tenderán a él después de una perturbación. En caso contrario, se dice que es inestable si después de una perturbación no regresa al mismo, o medio estable si por un lado regresa y por el otro se aleja (Pikovsky *et al.*, 2001; Strogatz, 1994).

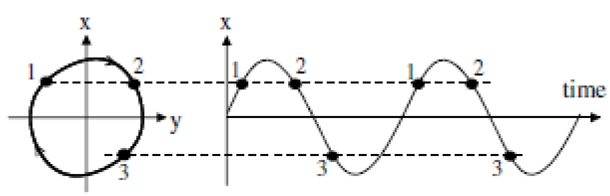


Figura 6**: Diagrama de fase de un oscilador auto-sostenido (Pikovsky *et al.*, 2001).**

Puesto que un oscilador auto-sostenido tiene un ciclo límite estable, cualquier perturbación tenderá al mismo, o a un punto cercano a él, después de un tiempo. Como se mencionó anteriormente, las oscilaciones se pueden determinar de los parámetros internos del sistema, por lo que la forma del ciclo límite dependerá de estos (Pikovsky *et al.*, 2001).

[1]Los sistemas dinámicos son modelos idealizados que no incorporan fluctuaciones naturales de los parámetros del sistema y otras fuentes de ruido que son inevitables en los objetos de mundo real Pikovsky *et al.* (2001).

[2]Un diagrama de fases es la representación gráfica del comportamiento de un sistema, en el cual se trazan las trayectorias que el mismo sigue y que a su vez cada punto en dichas trayectorias juega el papel de una condición inicial (Strogatz, 1994).

1.4.1.1 Fase de un oscilador auto-sostenido

Una de las principales características que tienen los osciladores auto-sostenidos es que es posible modificar su fase, lo cual permite la sincronización de dos o más de ellos al estar débilmente acoplados (Pikovsky *et al.*, 2001).

De acuerdo con (Pikovsky *et al.*, 2001), los osciladores cuasilineales presentan un ciclo límite circular y se pueden representar por una onda sinusoidal $x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi_0)$, donde A es la amplitud, ω_0 es la frecuencia natural del oscilador y ϕ_0 es la fase inicial del mismo. La fase de dicho oscilador está dada por $\phi = \omega_0 t + \phi_0$, puede apreciarse que ésta crece en función del tiempo y que depende de la frecuencia del oscilador. Esto último permite que dos o más sistemas puedan sincronizarse; pues al presentarse la sincronización, las frecuencias cambian y, por ende, las fases de los osciladores.

Como se mencionó antes, la amplitud de un oscilador auto-sostenido es estable y por lo tanto después de ser perturbado tiende al mismo ciclo límite o a un punto cercano a él; sin embargo, su fase puede ser modificada. Ahora, considere una perturbación de la forma $\epsilon\cos(\omega t + \bar{\phi}_e)$ y suponga que la amplitud de la perturbación se atenúa, lo único que permanece constante es la fase de la misma, es decir, $\phi_e(t) = \omega t + \bar{\phi}_e$. De lo anterior se pueden dar tres casos (Pikovsky *et al.*, 2001):

- Si $\omega_0 > \omega$, el punto de fase se mueve a una velocidad $\omega_0 - \omega$ alrededor del ciclo límite y en sentido opuesto a las manecillas del reloj .
- Si $\omega_0 < \omega$, el punto de fase se mueve a una velocidad $\omega - \omega_0$ y en sentido de las manecillas del reloj alrededor del ciclo límite.
- Si $\omega_0 = \omega$, el punto de fase permanece inmóvil.

De acuerdo con (Pikovsky *et al.*, 2001), cuando $\epsilon \neq 0$ se tiene una fuerza oscilante. En este caso ϵ es un vector y su influencia afecta tanto a la velocidad como a la posición del oscilador, por lo que, además de la diferencia de fases de la perturbación y del oscilador, se debe considerar el angulo que tiene este vector. De acuerdo con el mismo autor, en este caso se encuentran dos situaciones:

- Si la dirección de la fuerza es ortogonal a la trayectoria, no se genera un desplazamiento de fase del oscilador.

- En caso contrario se crean puntos inestables que pueden ser afectados por la diferencia de fases entre la perturbación y el oscilador.

1.4.2 Acoplamiento

Hasta este momento sólo se han mencionado las características de los osciladores. Pero, ¿qué hay acerca de la interacción de dos osciladores conectados como en la configuración usada por Huygens? Para responder a esta pregunta se vuelve a presentar la definición de acoplamiento. El acoplamiento es un medio por el cual los sistemas interactúan a través de la transferencia de energía (Pikovsky *et al.*, 2001; Alvarez *et al.*, 2010).

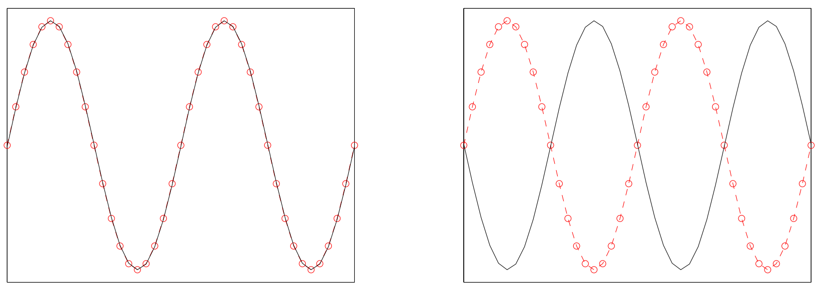
Por ejemplo, en la configuración de Huygens la barra de madera, de la cual se encontraban colgados los relojes, podía deformarse e incluso vibrar, lo cual hacía que el movimiento de cada péndulo fuera transmitido al otro a través de la misma. Esta vibración era casi imperceptible y dependía de la rigidez de la barra, i. e., a mayor rigidez menor era la vibración (Pikovsky *et al.*, 2001).

Como se puede apreciar, los osciladores afectaron a la dinámica de la barra y ésta a su vez indujo una perturbación en los mismos, la cual, finalmente hizo que éstos se sincronizaran al cambiar sus frecuencias y, por ende, sus fases. Cabe mencionar que a este tipo de acoplamiento se le llama acoplamiento tipo Huygens o acoplamiento de Huygens y que en los trabajos citados en la sección anterior, lo autores tomaron en cuenta la dinámica del acoplamiento dentro de los modelos desarrollados, i. e., para un sistema de Huygens se toman en cuenta tanto la dinámica de los osciladores como la del acoplamiento. Por ejemplo, para la configuración empleada por Huygens, el modelo dinámico del sistema consta de tres ecuaciones diferenciales, dos para los osciladores y una para el acoplamiento.

1.4.3 Sincronización

Como ya se vio, para que dos sistemas se sincronicen, es necesario considerar las propiedades de los mismos, así como las del acoplamiento.

Existen diferentes tipos de sincronización, pero las más comunes son la sincronización en fase y en contra fase. La primera se encuentra cuando la diferencia entre las fases de los osciladores es cero radianes, ver Figura 7a; mientras que la segunda, se da cuando la diferencia entre las mismas es $\pi \ rad$, ver Figura 7b.



(a) Fase **(b) Contra fase**

Figura 7**: Tipos de sincronización.**

En el caso del sistema empleado por Huygens, los relojes de péndulo se sincronizan en fase, si los péndulos oscilan en el mismo sentido y con la misma frecuencia; y en contra fase, cuando los péndulos se mueven en sentidos opuestos, con la misma frecuencia.

En resumen, para que a un fenómeno se le pueda llamar sincronización, es necesario que los sistemas ajusten sus ritmos debido a una débil interacción (Pikovsky *et al.*, 2001).

En el siguiente capítulo se da una definición formal de lo que es sincronización en este trabajo. En las siguientes secciones se presentan algunas de las razones por las que es de gran interés la sincronización de Huygens y los objetivos de este trabajo.

1.5 Motivación

Como se pudo apreciar en los párrafos anteriores, la sincronización de Huygens es un tema de gran relevancia, ya que este fenómeno puede encontrarse al estudiar dife-rentes osciladores (v. g., mecánicos, no lineales, etc.) acoplados de diferentes formas (v. g., barra de madera, discos, columpios, etc). Además, es posible seguir encontrando nuevas dinámicas que hasta el momento no se han reportado en la literatura relacionada con este tipo de sincronización, como en su momento sucedió con los estados quimera y estados quimera imperfectos. De lo anterior surgen las siguiente preguntas:

- ¿Bajo qué condiciones es posible sincronizar dos o mas osciladores?
- ¿Cuáles son las amplitudes, frecuencias y fases resultantes de la sincronización?
- ¿Es posible sincronizar osciladores de diferentes tipos mediante un acoplamiento de Huygens?
- ¿Cuál es el parámetro o parámetros que más influye en la sincronización de Huygens?
- ¿Qué otros fenómenos se pueden encontrar en este tipo de sincronización?

Dichas preguntas dan el primer motivo por el cual es de interés estudiar la sincronización de Huygens, entender este fenómeno.

Para entender la sincronización de Huygens es necesario aplicar alguno de los métodos analíticos, anteriormente citados, o en su defecto generar uno nuevo. Lo último proporcionaría mayores herramientas para entender o develar el secreto detrás, ya no sólo de la simpatía de dos relojes, sino también de la simpatía de una red de osciladores. Lo anterior nos lleva a una motivación más, generar nuevas herramientas de análisis. En el presente trabajo no se genera una, sino por el contrario, se aplica uno de los métodos analíticos ya citados; sin embargo, también sirve como una invitación para que el lector se introduzca en el estudio de este fenómeno, y de manera general, de la sincronización.

Dentro de la literatura relacionada con los sistemas biológicos es posible encontrar investigaciones en las que también se estudia la sincronización de dichos sistemas. Por ejemplo, en (Moser *et al.*, 2008) se menciona que la sincronización de algunos de los ritmos biológicos (v. g., respiración, ciclo circadiano, etc.) reduce el gasto de energía; además, dicha sincronización indica que tan saludable es el cuerpo de una persona.

También, no sólo se sincronizan entre ellos, se sincronizan con ritmos cósmicos, v. g., el día y la noche, los cuales afectan el sueño, la alimentación y la temperatura corporal; y los ciclos lunares, los cuales afectan al ciclo menstrual. Puede apreciarse que incluso a niveles microscópicos la sincronización está presente.

El lector podrá preguntarse que relación existe entre la sincronización de Huygens y la sincronización de células con otras células, e incluso con el movimiento planetario. Hasta el momento no existe una respuesta a esta pregunta; sin embargo, al estudiar la sincronización de sistemas mecánicos, se pueden determinar modelos (aproximaciones) con los cuales sería posible describir comportamientos que se presentan en los sistemas biológicos, no en una forma cuantitativa pero si cualitativa, y con esto poder tener un modelo en el cual basarse para su estudio; ya que, modelar un sistema biológico no es un problema trivial.

Otra razón más por la que es importante el estudio de la sincronización de Huygens, es la aplicación tecnológica que este fenómeno puede tener. Se pueden encontrar varias aplicaciones de este tipo de sincronización que van desde estudiar el acoplamiento de líneas de transmisión (Teoh y Davis, 1996) y la cancelación de vibraciones en motores termoacústicos acoplados (Spoor y Swift, 2000) hasta aplicaciones en ingeniería de control (Peña Ramirez *et al.*, 2014a).

1.6 Objetivos

De la sección anterior, se puede ver que existen varias razones por las cuales es de gran importancia el estudio de la sincronización de Huygens. Además, como se mencionó anteriormente, se han encontrado nuevos fenómenos al cambiar el tipo de acoplamiento. En el presente trabajo se cambia el tipo de acoplamiento, el cual consiste en una estructura de dos plataformas, de rigidez constante, dispuestas de manera vertical; por esta razón, se le llama acoplamiento horizontal-vertical de Huygens o acoplamiento HV de Huygens. También se emplean osciladores mecánicos (metrónomos) los cuales se colocan en dos configuraciones:

1. Dos osciladores. Uno en cada plataforma.

2. Red de osciladores. Dos por plataforma.

Puesto que el caso de la red se asemeja a dos sistemas de Huygens, i. e., no se pierde la sincronización de manera horizontal entre los metrónomos de una misma plataforma, al sistema entero se le denomina sistema HV de Huygens. Cabe mencionar que el estudio se realiza de manera analítica, numérica y experimental para el caso de sincronización natural.

De la descripción anterior se puede inferir que el objetivo general de este trabajo es:

Estudiar de manera analítica, numérica y experimental, la sincronización de Huygens de osciladores mecánicos interactuando a través de un acoplamiento horizontal-vertical de Huygens.

Para lograr cumplir con el objetivo principal, el cual se dio a conocer anteriormente, se establecen los siguiente objetivos específicos:

1. Obtener el modelo dinámico del sistema. Este objetivo fue establecido para poder realizar el estudio, tanto analítico como numérico, del sistema vertical de Huygens. Para el caso del estudió numérico, se usa para determinar los parámetros que mas influyen en el sistema y los posibles comportamientos que mediante el método analítico no son posibles de encontrar.

2. Aplicar el método de Poincaré. Este objetivo se fijó para determinar condiciones necesarias y suficientes para observar movimiento síncrono en la red de metrónomos; condiciones que pueden expresarse en términos de los parámetros clave. Así mismo, encontrar la amplitud, periodo y fase de las soluciones periódicas.

3. Instrumentar el sistema. Debido a que se realizarán experimentos, es de vital importancia utilizar un método de medición para obtener los resultados de los experimentos desarrollados.

4. Validar los resultados analíticos y numéricos obtenidos mediante un análisis experimental. Los experimentos realizados deberán abarcar la sincronización natural.

En los siguientes capítulos se muestran la metodología y los resultados tanto analíticos como numéricos y experimentales que se obtuvieron al estudiar el sistema HV de Huygens.

Capítulo 2. Preliminares

En el capítulo anterior se presentó el estado del arte y las características que los elementos deben cumplir para que a un fenómeno se le pueda llamar sincronización. En dicho capítulo se hizo mención de algunos métodos empleados en los trabajos citados, como son: el método de Poincaré, el método del balance de energías y la linealización armónica. También se mencionó la definición de sincronización de acuerdo con la Real Academia Española.

En este capítulo se introduce al método de Poincaré para perturbaciones, el cual se usó para encontrar soluciones periódicas para el sistema HV de Huygens, y se finaliza con la definición formal de sincronización.

2.1 Método de Poincaré para perturbaciones

Este método es fundamental para el descubrimiento de soluciones periódicas de sistemas que dependen de un parámetro pequeño $\mu \in \mathbb{R}^+$ (Andronov y Chaikin, 1949). Fue desarrollado por el científico francés Jules Henri Poincaré (1854-1912), particularmente para determinar soluciones de sistemas no lineales. Aunque en un principio se empleó en mecánica celeste, este método se puede aplicar en otras áreas como son física, química, biología e ingeniería; ya que en todas ellas los sistemas dinámicos se suelen representan por sistemas no lineales cuyo análisis no es trivial (Peña Ramirez y Nijmeijer, 2015).

A finales del siglo pasado, fue introducido por Malkin, en 1956, y Blekhman, en 1988, al estudio de soluciones periódicas que ocurren en sistemas débilmente no lineales (Peña Ramirez y Nijmeijer, 2015). En (Peña Ramirez y Nijmeijer, 2015) se muestra que este método puede ser usado para determinar el conjunto de sincronización en sistemas dinámicos acoplados.

Para aplicar este método se deben tomar en cuenta las siguientes condiciones:

1. Se deben considerar osciladores idénticos y pequeñas amplitudes de los mismos, de tal forma que (Peña Ramirez *et al.*, 2014b)

$$\sin(\theta) \approx \theta \quad \text{y} \quad \cos(\theta) \approx 1. \tag{1}$$

2. El sistema debe ser representado en la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mu\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \tag{2}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ que contiene los coeficientes de la parte lineal del sistema, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^l$ es el vector de estados y $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ es un vector de funciones analíticas no lineales de tal forma que se puedan expandir en una serie de potencias en $\mathbf{x}$ (Peña Ramirez y Nijmeijer, 2015). En este caso l representa el número de total de estados del sistema.

3. La matriz $\mathbf{A}$ debe contener un número par de valores característicos puramente imaginarios (Peña Ramirez y Nijmeijer, 2015). De tal forma que

$$\lambda_r = \begin{cases} in_r\omega, & r = 1, \ldots, k, \\ -a_r + ib_r, & r = k+1, \ldots, l, \end{cases} \tag{3}$$

donde λ_r representa cada valor característico, $n_r \neq 0$ es un entero positivo o negativo, $a_r > 0$, b_r es una constante real ($r = K+1, \ldots, l$), $\omega = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia angular de oscilación asociada al sistema (2) cuando $\mu = 0$ y T es el periodo (Peña Ramirez *et al.*, 2014b). Puede observarse que también aparece la variable k, la cual es un número par que se asocia al número total de estados relacionados a los osciladores.

4. En la matriz $\mathbf{A}$ se debe encontrar que la multiplicidad algebraica debe ser igual a la multiplicidad geométrica, i. e., el número de valores característicos asociados a la matriz $\mathbf{A}$ debe ser igual al número de vectores característicos linealmente independientes que se asocian a la misma matriz (Peña Ramirez y Nijmeijer, 2015). Lo anterior es para obtener una matriz de transformación $\mathbf{V}$ a partir de los vectores característicos, de tal forma que se pueda realizar el siguiente cambio de variables

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_l)^T, \tag{4}$$

para llegar a la representación matricial de la forma canónica

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{\Lambda z} + \mu \mathbf{F}(\mathbf{z}), \tag{5}$$

donde Λ es una matriz diagonal que contiene los valores característicos λ_r ($r = 1, \ldots, l$) y $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{V^{-1}\Phi(Vz)}$ es el vector de funciones no lineales cuyos elementos se pueden representar en la forma $f_r(\mathbf{z})$, para $r = 1, \ldots, l$.

Una vez que se ha representado el sistema (2) en la forma canónica (5), es posible obtener las soluciones a partir del sistema fundamental de (5), el cual se obtiene cuando $\mu = 0$ (Blekhman, 1988). Por lo tanto,

$$\dot{\mathbf{z}} = \Lambda \mathbf{z}, \tag{6}$$

cuyas soluciones asintóticas (periódicas) son de la forma

$$z_r^0 = \begin{cases} \alpha_r e^{\lambda_r t} = \alpha_r e^{i n_r \omega t} & r = 1, \ldots, k \\ 0 & r = k+1, \ldots, l \end{cases} \tag{7}$$

donde α_r para $r = 1, \ldots, k$ son constantes que determinan la amplitud de la solución (Peña Ramirez *et al.*, 2014b).

De acuerdo con (Peña Ramírez, 2013), a partir de este punto, el problema radica en encontrar los valores de α_r ($r = 1, \ldots, 2N$) de tal forma que las soluciones periódicas de (5) se reduzcan de manera asintótica a las soluciones generadoras de periodo T cuando $\mu = 0$. Más aún, las soluciones periódicas de (5) tendrán un periodo diferente de T, i. e. $T^*(\mu) = T + \tau_c(\mu)$. Por lo tanto, también es necesario determinar la 'corrección' $\tau_c(\mu)$ del periodo. Con el siguiente teorema es posible encontrar dichas soluciones, y además, determinar las condiciones para la existencia y estabilidad de las soluciones periódicas.

Teorema 2.1 ((Blekhman, 1988)) *Las soluciones periódicas con periodo $T^*(\mu) = T + \tau_c(\mu)$ para el sistema autónomo (5), en $\mu = 0$ son soluciones periódicas (7) (de periodo T) del sistema fundamental (6), que pueden corresponder solamente a tales valores de* *constantes* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1} = \alpha_k$*, los cuales satisfacen las ecuaciones*

$$Q_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \alpha_k n_k P_r - \alpha_r n_r P_k = 0, \quad r = 1, \ldots, k-1, \tag{8}$$

donde

$$\begin{aligned} P_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) &= \int_0^T f_r\left(z_1^0, \ldots, z_l^0\right) e^{-in_r\omega t}\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^T f_r\left(\alpha_1 e^{in_r\omega t}, \ldots, \alpha_k e^{in_k\omega t}, 0, \ldots, 0\right) e^{-in_r\omega t}\mathrm{d}t,\ r = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{9}$$

Si para un cierto conjunto de constantes $\alpha_1 = \alpha_1^*, \ldots, \alpha_{k-2} = \alpha_{k-2}^*, \alpha_{k-1} = \alpha_{k-1}^*, \alpha_k = \alpha_k^*$ *el cual satisface las ecuaciones (8), las partes reales de todas las raíces* χ *de la siguiente ecuación característica son negativos*

$$p(\chi) = det\left(\left.\frac{\partial Q_r}{\partial \alpha_j}\right|_{\alpha=\alpha_1^*, \ldots, \alpha_{k-1}=\alpha_k^*} - \alpha_k^* n_k \chi I\right) = 0, \quad r = 1, \ldots, k-1. \tag{10}$$

entonces, para μ *suficientemente pequeño, este conjunto de constantes en efecto corresponderá a una única solución periódica estable, analítica en relación a* μ*, del conjunto (5) con periodo* $T^*(\mu) = T + \tau_c(\mu)$*. En* $\mu = 0$*, resulta en una solución periódica (periodo T) (7) del sistema fundamental (6). Si la parte real de al menos una raíz de la ecuación (10) es positiva, entonces la respectiva solución es inestable. Con una precisión de hasta términos de orden* μ*, la corrección del periodo* $\tau_c(\mu)$ *se determina por*

$$\tau_c(\mu) = -\mu \frac{P_k\left(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_{k-2}^*, \alpha_{k-1}^*, \alpha_k^*\right)}{\lambda_k \alpha_k^*}. \tag{11}$$

Si el lector desea conocer la prueba de este teorema, se puede referir a (Peña Ramirez y Nijmeijer, 2015) o al apéndice A de (Peña Ramírez, 2013).

2.2 Definición de sincronización

En la sección 1.4 se mencionaron las características de los elementos involucrados en la sincronización y las características que un fenómeno debe cumplir para que pueda llamarse sincronización. También en la introducción se dio la definición de dicho término de acuerdo con la Real Academia Española. Sin embargo, desde el punto de vista de los sistemas dinámicos es necesario dar una definición de manera formal. De acuerdo con (Blekhman *et al.*, 1997), la definición de sincronización se da mediante el empleo de una funcional[3].

En este trabajo es necesario manejar una definición para los osciladores de la misma plataforma y otra para los osciladores de diferentes plataformas. Para ello, considere el siguiente sistema

$$\dot{\theta}_i = f_i(\theta_j, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad i = 1, \ldots, K, \ldots, N, \tag{12}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_j = g_j(\theta_j, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad j = 1, 2, \tag{13}$$

donde $\theta_i \in \mathbb{R}^2 = (\theta_i, \dot{\theta}_i)^T$, para $i = 1, \ldots, K, \ldots, N$, es el vector de estados de cada oscilador, $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^2 = (x_j, \dot{x}_j)^T$, para $j = 1, 2$, es el vector de estados de cada plataforma. Cabe mencionar que la variable K corresponde al número de osciladores que se encuentran sobre la plataforma inferior y N es el número total de osciladores sobre la estructura.

Puesto que los osciladores deben alcanzar el estado estacionario, la solución que estos presentan, en dicho estado, se puede representar por

$$\theta_i(t) = A_i \sin(\omega t + \phi_i^0), \; i = 1, \ldots, K, \ldots, N, \tag{14}$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^+$ representa la amplitud del i-ésimo oscilador, la cual debe ser constante, $\omega \in \mathbb{R}^+$ la frecuencia angular que el oscilador tiene en estado estacionario y $\phi_i^0 \in \mathbb{R}$ es la fase del oscilador una vez alcanzado el estado estacionario. Se debe notar que para todas las soluciones la frecuencia se considera la misma, ya que, se buscan soluciones para las cuales las frecuencias de los osciladores en estado estacionario son iguales, independientemente de la fase o amplitud que presenten los mismos.

Con lo anterior es posible dar las definiciones de sincronización empleadas en este trabajo.

---

[3]En matemáticas una funcional es una función real de un espacio vectorial V, usualmente de funciones (Rowland, 2016).

Definición 2.1 *Se dice que un par de osciladores (12) de una misma plataforma (13) se encuentran sincronizados en fase si, una vez alcanzado el estado estacionario, la solución se puede representar en la forma (14) y se cumple que*

$$\lim_{t\to\infty} |\phi_i^0 - \phi_j^0| \leq \epsilon_{fp},\ \forall\ i \neq j, \tag{15}$$

donde los subíndices i y j, se encuentran dados por $i, j = 1, \ldots, K$ para los osciladores de la plataforma inferior e $i, j = K+1, \ldots, N$ para los osciladores de la plataforma superior, y $\epsilon_{fp} \geq 0$ representa el desfase máximo que se puede dar entre los osciladores.

Definición 2.2 *Se dice que un par de osciladores (12) de una misma plataforma (13) se encuentran sincronizados en contra fase si, una vez alcanzado el estado estacionario, la solución se puede representar en la forma (14) y se cumple que*

$$\lim_{t\to\infty} ||\phi_i^0 - \phi_j^0| - \pi| \leq \epsilon_{cp},\ \forall\ i \neq j, \tag{16}$$

donde los subíndices i y j, se encuentran dados por $i, j = 1, \ldots, K$ para los osciladores de la plataforma inferior e $i, j = K+1, \ldots, N$ para los osciladores de la plataforma superior, y $\epsilon_{cp} \geq 0$ representa el desfase máximo que se puede dar entre los osciladores.

Definición 2.3 *Se dice que dos grupos de osciladores están sincronizados en fase si ambos grupos cumplen con alguna de las Definiciones 2.1 y 2.2, o ambas, y*

$$\lim_{t\to\infty} |\phi_1^0 - \phi_{K+1}^0| \leq \epsilon_{fg}, \tag{17}$$

donde $\epsilon_{gf} > 0$ corresponde a la diferencia máxima entre los osciladores.

Definición 2.4 *Se dice que dos grupos de osciladores están sincronizados en contra fase si ambos grupos cumplen con alguna de las Definiciones 2.1 y 2.2, o ambas, y*

$$\lim_{t\to\infty} ||\phi_1^0 - \phi_{K+1}^0| - \pi| \leq \epsilon_{cg}, \tag{18}$$

donde $\epsilon_{gc} > 0$ corresponde a la diferencia máxima entre los osciladores.

Puede observarse que si se aplican las Definiciones 2.1 y 2.2 a los ejemplos de la Figura 7, página 15, para un $\epsilon_{fp} = \epsilon_{cp} = 0$, se tiene la definición de sincronización de dichos ejemplos.

En el siguiente capítulo se presenta el modelo que se desarrolló en base a uno experimental y, posteriormente, se presenta el análisis que se realiza a dicho modelo basándose en el método de Poincaré.

Capítulo 3. Modelado del sistema y estrategia de análisis

Hasta el momento se ha hablado de investigaciones recientes acerca de la sincronización de Huygens en las cuales se modificó el sistema original, i. e., se usaron osciladores mecánicos, osciladores de segundo orden, entre otros, en lugar de los relojes de péndulo; y de igual manera el acoplamiento fue modificado de tal forma que ahora es posible encontrar desde acoplamientos en forma de discos (Boda *et al.*, 2013) hasta columpios (Martens *et al.*, 2012), con los cuales fueron observados por primera vez los estados quimera en la sincronización de Huygens.

Al igual que en los trabajos antes mencionados, en éste se hace una modificación al sistema original, al cual se le denomina sistema HV de Huygens. Sin embargo, antes de presentar dicho sistema, se describen las consideraciones que se realizaron para obtener el modelo dinámico del sistema propuesto. Finalmente, se muestra el análisis que se realizó, al mismo sistema, empleando el método de Poincaré para perturbaciones, y el cual se presentó en el capítulo anterior.

3.1 Consideraciones

Como se vio en el primer capítulo, los osciladores y el acoplamiento son necesarios para la emergencia de la sincronización. En esta sección se describen las consideraciones que se tomaron en cuenta sobre cada uno de ellos.

De acuerdo con (Boda *et al.*, 2013), el metrónomo es un dispositivo que produce pulsos regulares y métricos. Fue patentado por Johann Maelzel en 1815 como una herramienta de cronometraje para los músicos, y el elemento oscilante se trata de un péndulo físico compuesto por una varilla graduada en pulsos/minuto (*beats/min*) y en la cual están colocadas dos pesas, como se muestra en la Figura 8a. Puede observarse que una de las pesas se encuentra de manera fija en la parte inferior de la varilla, denotada como W_1, mientras que la otra se encuentra en la parte superior, denotada por W_2, y con la cual se establece la escala. Generalmente $W_1 >> W_2$, por lo que el centro de masa de la varilla se encuentra por debajo del eje de rotación de la misma, como se puede ver en la Figura 8a (Boda *et al.*, 2013).

Debido a lo anterior, en este trabajo el metrónomo se modela como un péndulo simple con longitud l, masa m y amortiguamiento δ. La longitud puede ser determinada por

$$l = \frac{g}{\Omega^2}, \tag{19}$$

donde g es la constante de gravedad y Ω es la frecuencia angular (rad/s),la cual se puede determinar por

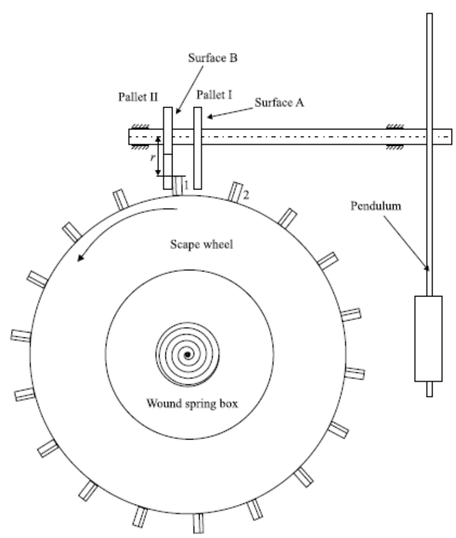
$$\Omega = \frac{\pi e}{60}, \tag{20}$$

donde e corresponde a la escala del metrónomo. Las escalas de esta herramienta musical van desde 40 pulsos/min hasta 208 pulsos/min. De acuerdo con (Martens *et al.*, 2012) cada 'tic-tac', o cada dos pulsos, corresponden a un periodo de oscilación.

En cuanto al coeficiente de amortiguamiento, se considera constante; por lo que se ignora el efecto que la fricción pueda tener en el mecanismo de escape. Aunque es posible realizar un modelo del mismo, se encuentra fuera del alcance de este trabajo.

Al igual que los relojes de péndulo, esta herramienta en su interior tiene un mecanismo de escape que compensa la pérdida de energía debido a la fricción, ver Figura 8b.

(a) Centro de masa del péndulo.



(b) Mecanismo de escape (Kapitaniak *et al.*, 2012).

Figura 8**: Características del metrónomo.**

En este trabajo, el mecanismo de escape se modela con un término de Van der Pol, es decir,

$$U_i = \nu_i \left(\gamma_i^2 - \theta_i^2\right) \dot{\theta}_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{21}$$

donde $\nu_i \in \mathbb{R}$ determina la cantidad de no linealidad, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ define el cambio de signo (Peña Ramirez *et al.*, 2014b), θ_i y $\dot{\theta}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ son los desplazamientos y velocidades angulares del péndulo, respectivamente; y N corresponde al número de metrónomos empleados en el análisis, como se verá más adelante. Cabe mencionar que se consideran desplazamientos angulares positivos cuando la pesa inferior se mueve a la derecha y negativos cuando se mueve hacia la izquierda.

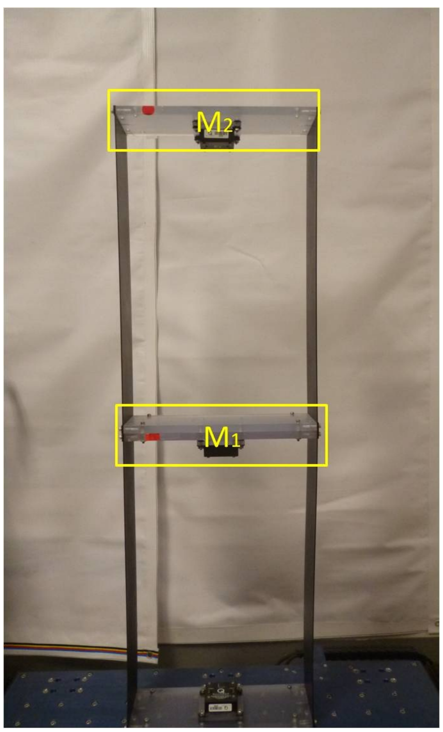


Figura 9**: Acoplamiento HV de Huygens.**

En cuanto al acoplamiento, en el modelo de Huygens se empleó una barra de madera que se encontraba sobre dos sillas. En esta sección se da a conocer el acoplamiento horizontal-vertical de Huygens o acoplamiento HV de Huygens. Éste se trata de una estructura, ver Figura 9, que se encuentra formada por dos plataformas colocadas, una sobre la otra. En este caso, por cada plataforma, se realizan las siguientes simplificaciones:

1. Se considera que cada plataforma tiene una constante de elasticidad y otra de amortiguamiento.
2. La masa, de cada una de ellas, se considera distribuida de manera uniforme.

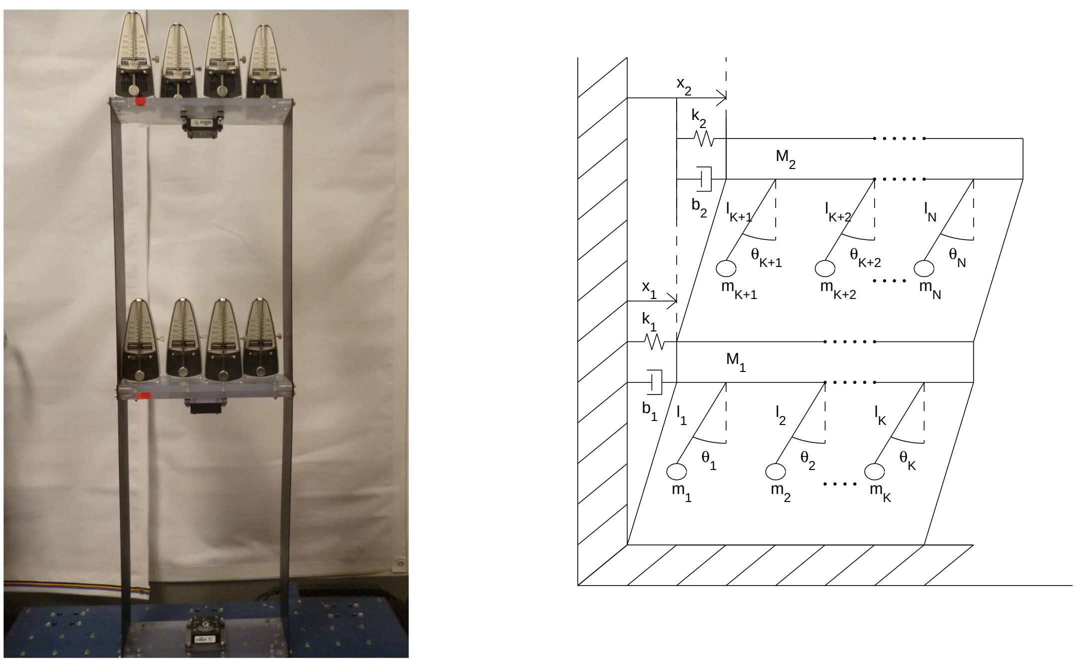
Al tomar en cuenta las distribuciones de masa, amortiguamiento y elasticidad que la plataforma tiene, implica tener que aplicar el método del elemento finito; sin embargo, en este trabajo se estudia el caso más simple, por lo que la aplicación de dicho método queda fuera del alcance del mismo.

Con las simplificaciones que se expusieron en esta sección, es posible determinar un modelo dinámico del sistema en cuestión. A partir de dicho modelo se pueden encontrar soluciones periódicas síncronas y los parámetros para los cuales se presenta dicho fenómeno.

3.2 Modelo dinámico

El sistema HV de Huygens, el cual se propone en este trabajo, se muestra en la Figura 10a. Puede observarse que sobre la estructura se colocan los osciladores mecánicos (metrónomos).

La representación esquemática del sistema HV de Huygens se presenta en la Figura 10b. Puede observarse que el sistema consta de una estructura de dos plataformas acopladas verticalmente cuyas masas son M_1 y M_2, constantes de elasticidad k_1 y k_2 y constantes de amortiguamiento b_1 y b_2. También puede apreciarse que de ambas plataformas se suspenden los péndulos de masa m_i, longitud l_i y constante de amortiguamiento δ_i $(i = 1, \ldots, K, \ldots, N)$, la última no se representa en la figura. En la misma figura se



(a) Sistema físico. **(b) Esquema del sistema.**

Figura 10**: Sistema horizontal-vertical de Huygens.**

pueden ver las variables x_1 y x_2, las cuales corresponden a los desplazamientos absolutos de las plataformas, y las variables θ_i $(i = 1, \ldots, K, \ldots, N)$, las cuales corresponden a los desplazamientos angulares de los péndulos. Las respectivas velocidades están dadas por $\dot{x}_i$ $(i = 1, 2)$ y $\dot{\theta}_j$ $(j = 1, \ldots, K \ldots, N)$.

Para determinar el modelo del sistema se aplicó la ecuación de Euler-Lagrange, la cual es (Kelly y Santibáñez, 2003)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \tau_i, \tag{22}$$

donde $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ es el lagrangiano del sistema, $\mathbf{q}$ corresponde al vector de posiciones, $\dot{\mathbf{q}}$ corresponde al vector de velocidades y τ_i corresponde a las fuerzas no conservativas y entradas del sistema. El lagrangiano está dado por

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \tag{23}$$

donde $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ corresponde a la energía cinética del sistema y $V(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ corresponde a la energía potencial (Castro-Figueroa, 1998).

Para determinar la energía cinética total del sistema es necesario encontrar las energías cinéticas de cada sistema, i. e., las energías cinéticas de los péndulos y de las plataformas. Las primeras están dadas por

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2}m_1\left[\left(\dot{x}_1 + l_1\dot{\theta}_1\cos(\theta_1)\right)^2 + l_1^2\dot{\theta}_1^2\sin^2(\theta_1)\right], \\
&\vdots \\
T_K &= \frac{1}{2}m_K\left[\left(\dot{x}_1 + l_K\dot{\theta}_K\cos(\theta_K)\right)^2 + l_K^2\dot{\theta}_K^2\sin^2(\theta_K)\right], \\
T_{K+1} &= \frac{1}{2}m_{K+1}\left[\left(\dot{x}_2 + l_{K+1}\dot{\theta}_{K+1}\cos(\theta_{K+1})\right)^2 + l_{K+1}^2\dot{\theta}_{K+1}^2\sin^2(\theta_{K+1})\right], \\
&\vdots \\
T_N &= \frac{1}{2}m_N\left[\left(\dot{x}_2 + l_N\dot{\theta}_N\cos(\theta_N)\right)^2 + l_N^2\dot{\theta}_N^2\sin^2(\theta_N)\right],
\end{aligned} \tag{24}$$

y las energías cinéticas de las plataformas son

$$T_{P1} = \frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2, \quad T_{P2} = \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2. \tag{25}$$

De igual manera es necesario encontrar las energías potenciales. Las que corresponden a los péndulos se encuentran dadas por

$$\begin{aligned}
V_1 &= m_1 l_1 g\left(1-\cos(\theta_1)\right),\\
&\vdots\\
V_K &= m_K l_K g\left(1-\cos(\theta_K)\right),\\
V_{K+1} &= m_{K+1} l_{K+1} g\left(1-\cos(\theta_{K+1})\right),\\
&\vdots\\
V_N &= m_N l_N g\left(1-\cos(\theta_N)\right),
\end{aligned} \tag{26}$$

y las energías potenciales de las plataformas son

$$V_{P1} = \frac{1}{2}k_1 x_1^2, \quad V_{P2} = \frac{1}{2}k_2(x_2-x_1)^2. \tag{27}$$

De (24) y (25) se puede determinar la energía cinética total, esto es

$$T = \frac{1}{2}\left[M_{T1}\dot{x}_1^2 + M_{T2}\dot{x}_2^2 + \sum_{j=1}^{N} m_j l_j^2 \dot{\theta}_j^{\,2}\right] + \dot{x}_1 \sum_{j=1}^{K} m_j l_j \dot{\theta}_j \cos(\theta_j) + \dot{x}_2 \sum_{j=K+1}^{N} m_j l_j \dot{\theta}_j cos(\theta_j), \tag{28}$$

donde

$$M_{T1} = M_1 + \sum_{j=1}^{K} m_j, \quad M_{T2} = M_2 + \sum_{j=K+1}^{N} m_j. \tag{29}$$

Con (26) y (27) se obtiene la energía potencial total, la cual está dada por

$$V = \frac{1}{2}\left[k_1 x_1^2 + k_2 x_1^2 + k_2 x_2^2\right] - k_2 x_1 x_2 + \sum_{j=1}^{N} m_j l_j g\left(1-\cos(\theta_j)\right). \tag{30}$$

Al sustituir (28) y (30) en (23) se tiene que

$$L = \frac{1}{2}\left[M_{T1}\dot{x}_1^2 + M_{T2}\dot{x}_2^2 + \sum_{j=1}^{N} m_j l_j^2 \dot{\theta}_j^{\,2} - k_1 x_1^2 - k_2 x_1^2 - k_2 x_2^2\right] + \dot{x}_1 \sum_{j=1}^{K} m_j l_j \dot{\theta}_j cos(\theta_j) + \\ + \dot{x}_2 \sum_{j=K+1}^{N} m_j l_j \dot{\theta}_j cos(\theta_j) + k_2 x_1 x_2 - \sum_{j=1}^{N} m_j l_j g\left(1 - \cos(\theta_j)\right). \quad (31)$$

Al sustituir (31) en (22) se tiene que la derivada con respecto a las velocidades es

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 m_1 l_1 cos(\theta_1) + l_1^2 m_1 \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_1 m_K l_K cos(\theta_K) + l_K^2 m_K \dot{\theta}_K \\ \dot{x}_2 m_{K+1} l_{K+1} cos(\theta_{K+1}) + l_{K+1}^2 m_{K+1} \dot{\theta}_{K+1} \\ \vdots \\ \dot{x}_2 m_N l_N cos(\theta_N) + l_N^2 m_N \dot{\theta}_N \\ M_{T1}\dot{x}_1 + \sum_{j=1}^{K} m_j l_j \dot{\theta}_j \cos(\theta_j) \\ M_{T2}\dot{x}_2 + \sum_{j=K+1}^{N} m_j l_j \dot{\theta}_j \cos(\theta_j) \end{pmatrix}. \quad (32)$$

La derivada de (32) con respecto al tiempo está dada por

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}\right) = \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 m_1 l_1 cos(\theta_1) + l_1^2 m_1 \ddot{\theta}_1 - \dot{x}_1 \dot{\theta}_1 m_1 l_1 cos(\theta_1) \\ \vdots \\ \ddot{x}_1 m_K l_K cos(\theta_K) + l_K^2 m_K \ddot{\theta}_K - \dot{x}_1 \dot{\theta}_K m_K l_K cos(\theta_K) \\ \ddot{x}_2 m_{K+1} l_{K+1} cos(\theta_{K+1}) + l_{K+1}^2 m_{K+1} \ddot{\theta}_{K+1} - \dot{x}_2 \dot{\theta}_{K+1} m_{K+1} l_{K+1} cos(\theta_{K+1}) \\ \vdots \\ \ddot{x}_2 m_N l_N cos(\theta_N) + l_N^2 m_N \ddot{\theta}_N - \dot{x}_2 \dot{\theta}_N m_N l_N cos(\theta_N) \\ M_{T1}\ddot{x}_1 + \sum_{j=1}^{K} m_j l_j \ddot{\theta}_j \cos(\theta_j) - \sum_{j=1}^{K} m_j l_j \dot{\theta}_j^2 \sin(\theta_j) \\ M_{T2}\ddot{x}_2 + \sum_{j=K+1}^{N} m_j l_j \ddot{\theta}_j \cos(\theta_j) - \sum_{j=K+1}^{N} m_j l_j \dot{\theta}_j^2 \sin(\theta_j) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

La derivada de (31) con respecto a las posiciones se encuentra dada por

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -m_1 l_1 g \sin(\theta_1) - \dot{x}_1 \dot{\theta}_1 m_1 l_1 \sin(\theta_1) \\ \vdots \\ -m_K l_K g \sin(\theta_K) - \dot{x}_1 \dot{\theta}_K m_K l_K \sin(\theta_K) \\ -m_{K+1} l_{K+1} g \sin(\theta_{K+1}) - \dot{x}_2 \dot{\theta}_{K+1} m_{K+1} l_{K+1} \sin(\theta_{K+1}) \\ \vdots \\ -m_N l_N g \sin(\theta_N) - \dot{x}_2 \dot{\theta}_N m_N l_N \sin(\theta_N) \\ -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ -k_2(x_2 - x_1) \end{pmatrix}. \tag{34}$$

En cuanto a las entradas del sistema, éstas quedan de la siguiente manera

$$\tau_i = \begin{pmatrix} -\delta_1 \dot{\theta}_1 + U_1 \\ \vdots \\ -\delta_K \dot{\theta}_K + U_K \\ -\delta_{K+1} \dot{\theta}_{K+1} + U_{K+1} \\ \vdots \\ -\delta_N \dot{\theta}_N + U_N \\ -b_1 \dot{x}_1 + b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ -b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \end{pmatrix}, \tag{35}$$

donde U_i $(i = 1, \ldots, N)$ corresponde a los términos de Van der Pol descritos en (21).

Al sustituir (33)-(35) en (22) se determinan las ecuaciones de Euler-Lagrange del sistema. Estas ecuaciones están dadas por

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 m_i l_i cos(\theta_i) + l_i^2 m_i \ddot{\theta}_i &= U_i - m_i l_i g \sin(\theta_i) - \delta_i \dot{\theta}_i, \quad i = 1, \ldots, K, \\ \ddot{x}_2 m_j l_j cos(\theta_j) + l_j^2 m_j \ddot{\theta}_j &= U_j - m_j l_j g \sin(\theta_j) - \delta_j \dot{\theta}_j, \quad j = K+1, \ldots, N, \\ M_{T1} \ddot{x}_1 + \sum_{n=1}^{K} m_n l_n \ddot{\theta}_n \cos(\theta_n) &= \sum_{n=1}^{K} m_n l_n \dot{\theta}_n^2 \sin(\theta_n) - k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) - b_1 \dot{x}_1 + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ M_{T2} \ddot{x}_2 + \sum_{n=K+1}^{N} m_n l_n \ddot{\theta}_n \cos(\theta_n) &= \sum_{n=K+1}^{N} m_n l_n \dot{\theta}_n^2 \sin(\theta_n) - k_2(x_2 - x_1) - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1). \end{aligned} \tag{36}$$

En (36) las dos primeras ecuaciones pertenecen a los osciladores de la plataforma inferior y superior, respectivamente. En cuanto a las otras dos ecuaciones corresponden a la estructura, la penúltima representa la dinámica de la plataforma inferior y la última pertenece a aquella de la plataforma superior. Puede observarse que en todas las ecuaciones aparecen unos términos cruzados, es decir, en las ecuaciones correspondientes a los osciladores dichos términos están dados por la multiplicación de $m_i l_i^2 \cos(\theta_i)$ $i = 1, \ldots, N$ y las aceleraciones de sus respectivas plataformas, y en las ecuaciones que describen la dinámica de las plataformas, se encuentran dadas por las sumatorias. Dichos términos cruzados, se conocen como fuerza de acoplamiento.

Es posible representar al sistema (36) como un sistema sin dimensiones. Para ello se define el siguiente cambio de variables

$$y_i = \frac{x_i}{l}, \qquad i = 1, 2, \tag{37}$$

$$\tau = t\omega, \tag{38}$$

donde $\omega = \sqrt{g/l}$.

Al sustituir (38) y (37) en (36) se tiene que

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_1 L_i cos(\theta_i) + \ddot{\theta}_i &= \eta_i U_i - \frac{\omega_i^2}{\omega^2}\sin(\theta_i) - \xi_i \dot{\theta}_i, \quad i = 1, 2, ..., K, \\
\ddot{y}_2 L_j cos(\theta_j) + \ddot{\theta}_j &= \eta_j U_j - \frac{\omega_j^2}{\omega^2}\sin(\theta_j) - \xi_j \dot{\theta}_j, \quad j = K+1, K+2, ..., N, \\
\ddot{y}_1 + \sum_{n=1}^{K} \beta_{1n} \ddot{\theta}_n \cos(\theta_n) &= \sum_{n=1}^{K} \beta_{1n} (\ddot{\theta}_n)^2 \sin(\theta_n) - \kappa_1 y_1 + \kappa_2 (y_2 - y_1) - \zeta_1 \dot{y}_1 + \zeta_2 \left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right), \\
\ddot{y}_2 + \sum_{n=K+1}^{N} \beta_{2n} \ddot{\theta}_n \cos(\theta_n) &= \sum_{n=K+1}^{N} \beta_{2n} (\dot{\theta}_n)^2 \sin(\theta_n) - \kappa_3 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - \zeta_3 (\dot{y}_2 - \dot{y}_1).
\end{aligned} \tag{39}$$

donde $L_i = \frac{l}{l_i}$, $L_j = \frac{l}{l_j}$, $\omega_i = \sqrt{\frac{g}{l_i}}$, $\omega_j = \sqrt{\frac{g}{l_j}}$, $\eta_i = \frac{1}{m_i l_i^2 \omega}$, $\eta_j = \frac{1}{m_j l_j^2 \omega}$, $\xi_i = \frac{\delta_i}{m_i l_i^2 \omega}$, $\xi_j = \frac{\delta_j}{m_j l_j^2 \omega}$, $\beta_{1n} = \frac{m_n l_n}{M_{T1} l}$, $\beta_{2n} = \frac{m_n l_n}{M_{T2} l}$, $\kappa_1 = \frac{k_1}{M_{T1}\omega^2}$, $\kappa_2 = \frac{k_2}{M_{T1}\omega^2}$, $\kappa_3 = \frac{k_2}{M_{T2}\omega^2}$, $\zeta_1 = \frac{b_1}{M_{T1}\omega}$, $\zeta_2 = \frac{b_2}{M_{T1}\omega}$, $\zeta_3 = \frac{b_2}{M_{T2}\omega}$. A partir de este punto las velocidades y aceleraciones se manejan como variables adimensionales, a menos que se indique lo contrario.

Para determinar las ecuaciones de movimiento del sistema (39) es necesario despejar las aceleraciones del mismo, y para ello es posible representarlo en la forma matricial

$$\mathbf{M}(\theta,\dot{\theta})\ddot{\theta} = f(\theta,\dot{\theta}), \tag{40}$$

donde $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N, y_1, y_2)^T$. La matriz $\mathbf{M}(\theta,\dot{\theta}) \in \mathbb{R}^{(N+2)\times(N+2)}$ se puede representar por

$$\mathbf{M}(\theta,\dot{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{pmatrix}. \tag{41}$$

De (41) se tiene que $\mathbf{M}_{11} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $\mathbf{M}_{12} \in \mathbb{R}^{N\times 2}$, $\mathbf{M}_{21} \in \mathbb{R}^{2\times N}$ y $\mathbf{M}_{22} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. En este caso N es el número de metrónomos con los que se trabajará. Las matrices $\mathbf{M}_{11}$ y $\mathbf{M}_{22}$ son matrices identidad. La matriz $\mathbf{M}_{11}$ corresponde a los coeficientes de $\ddot{\theta}_i$ y $\ddot{\theta}_j$, para $i = 1, \ldots, K$ y $j = K+1, \ldots, N$, en las dos primeras ecuaciones de (39) y la matriz $\mathbf{M}_{22}$ corresponde a los coeficientes de las aceleraciones lineales en las últimas dos ecuaciones del mismo sistema. Las matrices $\mathbf{M}_{12}$ y $\mathbf{M}_{21}$ se encuentran dadas por

$$\mathbf{M}_{12} = \begin{pmatrix} L_1\cos(\theta_1) & 0 \\ \vdots & \vdots \\ L_K\cos(\theta_K) & 0 \\ 0 & L_{K+1}\cos(\theta_{K+1}) \\ \vdots & \vdots \\ 0 & L_N\cos(\theta_N) \end{pmatrix}, \tag{42}$$

$$\mathbf{M}_{21} = \begin{pmatrix} \beta_{11}\cos(\theta_1) & \ldots & \beta_{1K}\cos(\theta_K) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \beta_{2K+1}\cos(\theta_{K+1}) & \ldots & \beta_{2N}\cos(\theta_N) \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Puede observarse que (42) corresponde a los coeficientes que multiplican a las aceleraciones lineales en las dos primeras ecuaciones de (39). Y (43) es la matriz de coeficientes que multiplica a las aceleraciones angulares en las últimas dos ecuaciones del mismo sistema.

El vector $\mathbf{f}(\theta,\dot{\theta})$ está dado por el lado derecho de (39). Éste se define como

$$\mathbf{f}(\theta,\dot{\theta}) = \begin{pmatrix} \eta_1 U_1 - \frac{\omega_1}{\omega}\sin(\theta_1) - \xi_1\dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \eta_K U_K - \frac{\omega_K}{\omega}\sin(\theta_K) - \xi_K\dot{\theta}_K \\ \eta_{K+1} U_{K+1} - \frac{\omega_{K+1}}{\omega}\sin(\theta_{K+1}) - \xi_{K+1}\dot{\theta}_{K+1} \\ \vdots \\ \eta_N U_N - \frac{\omega_N}{\omega}\sin(\theta_N) - \xi_N\dot{\theta}_N \\ \sum_{r=1}^{K}\beta_{1r}(\dot{\theta}_r)^2\sin(\theta_r) - \kappa_1 y_1 + \kappa_2(y_2-y_1) - \zeta_1\dot{y}_1 + \zeta_2\left(\dot{y}_2 - y_1'\right) \\ \sum_{p=K+1}^{N}\beta_{2p}(\theta_p')^2\sin(\theta_p) - \kappa_3(y_2-y_1) - \zeta_2(y_2'-y_1') \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Después de haber dado las definiciones anteriores es posible obtener las aceleraciones de (39), para ello se despeja el vector $\ddot{\theta}$ en (40), i. e.,

$$\ddot{\theta} = \mathbf{M}(\theta,\dot{\theta})^{-1}\mathbf{f}(\theta,\dot{\theta}). \tag{45}$$

Para encontrar $\mathrm{M}(\theta,\dot{\theta})^{-1}$, es posible aplicar el método de Gauss-Jordan, por lo que dicha matriz queda como sigue

$$\mathbf{M}(\theta,\dot{\theta})^{-1} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,K} & 0 & \dots & 0 & m_{1,N+1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{K,1} & \dots & m_{K,K} & 0 & \dots & 0 & m_{K,N+1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{K+1,K+1} & \dots & m_{K+1,N} & 0 & m_{K+1,N+2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & m_{N,K+1} & \dots & m_{N,N} & 0 & m_{N,N+2} \\ m_{N+1,1} & \dots & m_{N+1,K} & 0 & \dots & 0 & \Gamma & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{N+2,K+1} & \dots & m_{N+2,N} & 0 & \Delta \end{pmatrix}, \tag{46}$$

donde la variable Γ se relaciona con la plataforma inferior, y los elementos $m_{n,n}$, $m_{n,o}$, $m_{n,N+1}$ y $m_{N+1,m}$ con los osciladores de la misma plataforma. Dichos elementos se encuentran determinados por

$$
\begin{aligned}
m_{n,n} &= \left(1 - \sum_{i=1, i\neq n}^{K} L_i \beta_{1i} \cos^2\theta_i\right)\Gamma, && n = 1, 2, \ldots, N, \\
m_{n,o} &= L_o \beta_{1n} \cos(\theta_o)\cos(\theta_n)\Gamma, && n, o = 1, \ldots, K, \quad \forall n \neq o, \\
m_{n,N+1} &= -L_n \cos(\theta_n)\Gamma, && n = 1, 2, \ldots, K, \\
m_{N+1,o} &= -\beta_{1o}\cos(\theta_o)\Gamma, && o = 1, 2, \ldots, K, \\
\Gamma &= \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^{K} L_i \beta_{1i} \cos^2\theta_i}.
\end{aligned} \tag{47}
$$

En cambio, la variable Δ está relacionada con la plataforma superior, y los elementos $m_{p,p}$, $m_{p,r}$, $m_{p,N+2}$, $m_{N+2,r}$ se relacionan con los osciladores de dicha plataforma. Éstos se encuentran dados por

$$
\begin{aligned}
m_{p,p} &= \left(1 - \sum_{j=K+1, j\neq p}^{N} L_j \beta_{2j} \cos^2(\theta_j)\right)\Delta, && p = K+1, \ldots, N, \\
m_{p,r} &= L_r \beta_{2p} \cos(\theta_r)\cos(\theta_p)\Delta, && p, r = K+1, \ldots, N, \quad \forall p \neq r, \\
m_{p,N+2} &= -L_p \cos(\theta_p)\Delta, && p = K+1, \ldots, N, \\
m_{N+2,r} &= -\beta_{2r}\cos(\theta_r)\Delta, && r = K+1, \ldots, N, \\
\Delta &= \frac{1}{1 - \sum_{j=K+1}^{N} L_j \beta_{2j} \cos^2\theta_j}.
\end{aligned} \tag{48}
$$

En el apéndice A se presenta una primera validación del modelo obtenido en este apartado, ya que se compara con otro que se obtuvo siguiendo el método empleado por la empresa Quanser. Dicho modelo, se basa en coordenadas relativas a diferencia de éste que se obtuvo mediante coordenadas absolutas. En dicha comparación se encuentra que ambos modelos son iguales y por lo tanto es posible aplicar el que se presenta en esta sección.

3.3 Determinación de soluciones periódicas y estables en el sistema

De acuerdo con la teoría presentada en la sección sección 1.4, los osciladores deben presentar ciclos límite, y más aún, éstos deben ser estables ante cualquier perturbación para que emerja el fenómeno de sincronización. En esta sección se desarrolla el análisis para determinar la existencia y estabilidad de éstos en osciladores acoplados. Para ello, se hace uso del método de Poincaré para perturbaciones, el cual se presentó en el capítulo anterior. Por lo que esta sección se divide en obtener la forma de primer orden (2) del sistema HV de Huygens, transformar dicho sistema en la forma canónica (5) y aplicar el método de Poincaré.

Cabe señalar que el desarrollo que se realiza en esta sección se basa principalmente en (Jovanovic y Koshkin, 2012; Peña Ramirez *et al.*, 2014b; Peña Ramirez y Nijmeijer, 2015) y que las soluciones se presentan en los siguientes capítulos tanto para dos osciladores como para una red de cuatro de ellos.

3.3.1 Forma de primer orden

De acuerdo con las condiciones para la aplicación del método de Poincaré, presentadas anteriormente, es necesario usar osciladores idénticos, por ende, se tiene que $m_i = m$, $l_i = l$ y $\delta_i = \delta$ $(i = 1, \dots, N)$, y también se toma en cuenta (1); por lo tanto, $\sin(\theta_i) \approx \theta_i$ y $\cos(\theta_i) \approx 1$ $(i = 1, \dots, N)$. Al tomar en cuenta lo anterior se tiene que (47) y (48) ahora están dadas por:

$$\begin{aligned}
m_{n,n} &= (1 - K\beta_1)\Gamma, & n &= 1, 2, \dots, N, \\
m_{n,o} &= \beta_1 \Gamma, & n, o &= 1, \dots, K, \quad \forall n \neq o, \\
m_{n,N+1} &= -\Gamma, & n &= 1, 2, \dots, K, \\
m_{N+1,o} &= -\beta_1 \Gamma, & o &= 1, 2, \dots, K, \\
m_{p,p} &= (1 - \rho\beta_2)\Delta, & p &= K+1, \dots, N, \\
m_{p,r} &= \beta_2 \Delta, & p, r &= K+1, \dots, N, \quad \forall p \neq r, \\
m_{p,N+2} &= -\Delta, & p &= K+1, \dots, N, \\
m_{N+2,r} &= -\beta_2 \Delta, & r &= K+1, \dots, N, \\
\Gamma &= \frac{1}{1 - K\beta_1}, \\
\Delta &= \frac{1}{1 - \rho\beta_2},
\end{aligned} \tag{49}$$

donde $\beta_1 = \frac{m}{M_{T1}}$, $\beta_2 = \frac{m}{M_{T2}}$ y $\rho = N - K$ es el número de metrónomos que se encuentran en la plataforma superior. Debido a que los osciladores son idénticos, las variables M_{T1} y M_{T2} de (29) ahora están dadas por

$$M_{T1} = M_1 + Km \text{ y } M_{T2} = M_2 + \rho m. \tag{50}$$

Al sustituir (50) en las definiciones de β_1 y β_2, se tiene que

$$\beta_1 = \frac{m}{M_1 + Km} \quad \text{y} \quad \beta_2 = \frac{m}{M_1 + \rho m}, \tag{51}$$

por lo que al sustituir (51) en (49) se tiene que la matriz $M(\theta, \dot{\theta})^{-1}$ está dada por

$$M(\theta, \theta')^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\mu_1 & \dots & \mu_1 & 0 & \dots & 0 & -(1+K\mu_1) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & 0 \\ \mu_1 & \dots & 1+\mu_1 & 0 & \dots & 0 & -(1+K\mu_1) & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1+\mu_2 & \dots & \mu_2 & 0 & -(1+\rho\mu_2) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \mu_2 & \dots & 1+\mu_2 & 0 & -(1+\rho\mu_2) \\ -\mu_1 & \dots & -\mu_1 & 0 & \dots & 0 & 1+K\mu_1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -\mu_2 & \dots & -\mu_2 & 0 & 1+\rho\mu_2 \end{pmatrix}, \tag{52}$$

donde $\mu_1 = \frac{m}{M_1}$ y $\mu_2 = \frac{m}{M_2}$.

En cuanto al vector $f(\theta, \dot{\theta})$ se encuentra que ahora está dado por

$$f(\theta, \dot{\theta}) = \begin{pmatrix} \eta U_1 - \theta_1 - \xi\dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \eta U_K - \theta_K - \xi\dot{\theta}_K \\ \eta U_{K+1} - \theta_{K+1} - \xi\dot{\theta}_{K+1} \\ \vdots \\ \eta U_N - \theta_N - \xi\dot{\theta}_N \\ \beta_1 \sum_{n=1}^{K} (\dot{\theta}_n)^2\theta_n - \kappa_1 y_1 + \kappa_2(y_2 - y_1) - \zeta_1\dot{y}_1 + \zeta_2\left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right) \\ \beta_2 \sum_{n=K+1}^{N} (\dot{\theta}_n)^2\theta_n - \kappa_3(y_2 - y_1) - \zeta_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \end{pmatrix}. \tag{53}$$

donde se considera una sola variable adimensional ξ relacionada al amortiguamiento δ de los péndulos y una sola variable η, i. e, de (39) se tiene que

$$\xi_{i+1} = \xi_i = \xi \quad \text{y} \quad \eta_{i+1} = \eta_i = \eta, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{54}$$

En cuanto a las variables U_i y U_j, se tiene que al tratarse de osciladores idénticos, se maneja una sola variable ν y una variable γ, por lo tanto,

$$\nu_{i+1} = \nu_i = \nu \quad \text{y} \quad \gamma_{i+1} = \gamma_i = \gamma, \quad i = 1, \ldots, N-1. \tag{55}$$

Por último las variables κ_1, κ_2, κ_3, ζ_1, ζ_2 y ζ_3 mantienen la definición dada en (39).

Al sustituir (52) y (53) en (45) se tiene que

$$\ddot{\theta} = \begin{pmatrix} -\theta_1 + D_1 + \mu_1 \sum_{n=1}^{K} (-\theta_n + D_n) - [1 + K\mu_1] \left[\beta_1 \sum_{n=1}^{K} \dot{\theta}_n^2 \theta_n - w_1\right] \\ \vdots \\ -\theta_K + D_K + \mu_1 \sum_{n=1}^{K} (-\theta_n + D_n) - [1 + K\mu_1] \left[\beta_1 \sum_{n=1}^{K} \dot{\theta}_n^2 \theta_n - w_1\right] \\ -\theta_{K+1} + D_{K+1} + \mu_2 \sum_{n=K+1}^{N} (-\theta_n + D_n) - [1 + \rho\mu_2] \left[\beta_2 \sum_{n=K+1}^{N} \dot{\theta}_n^2 \theta_n - w_2\right] \\ \vdots \\ -\theta_N + D_N + \mu_2 \sum_{n=K+1}^{N} (-\theta_n + D_n) - [1 + \rho\mu_2] \left[\beta_2 \sum_{n=K+1}^{N} \dot{\theta}_n^2 \theta_n - w_2\right] \\ [1 + K\mu_1] \left[\beta_1 \sum_{n=1}^{K} \dot{\theta}_n^2 \theta_n - w_1\right] - \mu_1 \sum_{n=1}^{K} (-\theta_n + D_n) \\ [1 + \rho\mu_2] \left[\beta_2 \sum_{n=K+1}^{N} \dot{\theta}_n^2 \theta_n - w_2\right] - \mu_2 \sum_{n=K+1}^{N} (-\theta_n + D_n) \end{pmatrix}, \tag{56}$$

donde $D_n = \eta U_i - \xi\dot{\theta}_i$, para $n = 1, \ldots, K, \ldots, N$, $w_1 = \kappa_1 y_1 - \kappa_2(y_2 - y_1) + \zeta_1\dot{y}_1 - \zeta_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$, $w_2 = \kappa_3(y_2 - y_1) + \zeta_3(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)$. Sin embargo, para aplicar el método de Poincaré es necesario establecer un parámetro pequeño μ, debido a que tanto μ_1 como μ_2 se pueden considerar como parámetros pequeños, por lo tanto, se debe establecer una relación entre éstas. Dicha relación está dada por

$$\mu_1 = a\mu_2, \tag{57}$$

por ende, el parámetro que se va a usar de aquí en adelante es μ_2.

El lector podrá pensar que es necesario realizar un cambio de variables de la forma $D_n = \mu_1 \left[c_1 \left(\gamma^2 - \theta_n^2\right) - p_1\right] \dot{\theta}_n$ para los osciladores de la plataforma inferior, i. e., para $n = 1, \dots, K$; y otro de la forma $D_n = \mu_2 \left[c_2 \left(\gamma^2 - \theta_n^2\right) - p_2\right] \dot{\theta}_n$ para los osciladores de la otra plataforma, i. e., cuando $n = K{+}1, \dots, N$; donde U_n, $n = 1, \dots, K, \dots, N$, se sustituyó de acuerdo con (21) y (55). Sin embargo, de acuerdo con las definiciones dadas en (54) y (55), se tiene que $\xi = \mu_1 p_1 = \mu_2 p_2$ y $\eta\nu = \mu_1 c_1 = \mu_2 c_2$, i. e., no es necesario establecer dos cambios de variables diferentes para D_n, $n = 1, \dots, K, \dots, N$; ya que los términos que están implícitos en estas variables son iguales para todos los péndulos.

Al sustituir (57) en (56), y tomar en cuenta lo anterior, se tiene que el vector $\mathbf{f}(\theta, \dot{\theta})$ ahora está dado por

$$\ddot{\theta} = \begin{pmatrix} -\theta_1 + w_1 + \mu_2 \left\{ \left[c(\gamma^2 - \theta_i^2) - p\right] \dot{\theta}_1 - a \sum_{n=1}^{K} \theta_n \left(1 + \dot{\theta}_n^2\right) \right\} \\ \vdots \\ -\theta_K + w_1 + \mu_2 \left\{ \left[c(\gamma^2 - \theta_K^2) - p\right] \dot{\theta}_K - a \sum_{n=1}^{K} \theta_n \left(1 + \dot{\theta}_n^2\right) \right\} \\ -\theta_{K+1} + w_2 + \mu_2 \left\{ \left[c(\gamma^2 - \theta_{K+1}^2) - p\right] \dot{\theta}_{K+1} - \sum_{n=K+1}^{N} \theta_n \left(1 + \dot{\theta}_n^2\right) \right\} \\ \vdots \\ -\theta_N + w_2 + \mu_2 \left\{ \left[c(\gamma^2 - \theta_N^2) - p\right] \dot{\theta}_N - \sum_{n=K+1}^{N} \theta_n \left(1 + \dot{\theta}_n^2\right) \right\} \\ -w_1 + a\mu_2 \sum_{n=1}^{K} \theta_n \left(1 + \dot{\theta}_n^2\right) \\ -w_2 + \mu_2 \sum_{n=K+1}^{N} \theta_n \left(1 + \dot{\theta}_n^2\right) \end{pmatrix}. \tag{58}$$

donde $w_1 = q_1 y_1 - q_2 \left(y_2 - y_1\right) + s_1 \dot{y}_1 - s_2 \left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right)$ y $w_2 = q_3 \left(y_2 - y_1\right) + s_3 \left(\dot{y}_2 - \dot{y}_1\right)$. En w_1 y w_2 se tiene que

$$\begin{gathered} q_1 = \frac{k_1}{M_1 \omega^2}, \quad q_2 = \frac{k_2}{M_1 \omega^2}, \quad q_3 = \frac{k_2}{M_2 \omega^2}, \\ s_1 = \frac{b_1}{M_1 \omega}, \quad s_2 = \frac{b_2}{M_1 \omega} \quad \text{y} \quad s_3 \frac{b_2}{M_2 \omega}. \end{gathered} \tag{59}$$

Además, puede observarse que los términos de segundo grado o mayor de μ_2 se despreciaron en (58).

El sistema representado en (58) se puede expresar en su forma de primer orden (2). Para ello se sustituye $\mu = \mu_2$ por lo que se tiene

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mu_2 \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}), \tag{60}$$

donde $\mathbf{x} = (\theta_1, \dot{\theta}_1, \ldots, \theta_N, \dot{\theta}_N, y_1, \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)^T$, y la matriz $\mathbf{A}$ se encuentra dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & q & s & -q_2 & -s_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & q & s & -q_2 & -s_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -q_3 & -s_3 & q_3 & s_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 & -q_3 & -s_3 & q_3 & s_3 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -q & -s & q_2 & s_2 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & q_3 & s_3 & -q_3 & -s_3 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

donde $q = q_1 + q_2$ y $s = s_1 + s_2$.

En cuanto al vector $\Phi(\mathbf{x})$ se define como

$$\Phi(\mathbf{x}) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \left[c(\gamma^2 - \theta_1^2) - p\right] \dot{\theta}_1 - a \sum_{n=1}^{K} \theta_n \left(1 + \dot{\theta}_n^2\right) \\ \vdots \\ 0 \\ \left[c(\gamma^2 - \theta_K^2) - p\right] \dot{\theta}_K - a \sum_{n=1}^{K} \theta_n \left(1 + \dot{\theta}_n^2\right) \\ 0 \\ \left[c(\gamma^2 - \theta_{K+1}^2) - p\right] \dot{\theta}_{K+1} - \sum_{n=K+1}^{N} \theta_n \left(1 + \dot{\theta}_n^2\right) \\ \vdots \\ 0 \\ \left[c(\gamma^2 - \theta_N^2) - p\right] \dot{\theta}_N - \sum_{n=K+1}^{N} \theta_n \left(1 + \dot{\theta}_n^2\right) \\ 0 \\ a \sum_{n=1}^{K} \theta_i \left(1 + \dot{\theta}_i^2\right) \\ 0 \\ \sum_{n=K+1}^{N} \theta_n \left(1 + \dot{\theta}_n^2\right) \end{array} \right). \tag{62}$$

3.3.2 Transformación

Como se explicó en los primeros párrafos de este apartado, una vez representado el sistema (39) en (2), es necesario transformarlo a su forma canónica (5). Para ello se hace uso de (4), por lo que al sustituirla en (60) se tiene que

$$\dot{\mathbf{z}} = \Lambda \mathbf{z} + \mu_2 \mathbf{V}^{-1} \Phi(\mathbf{V}\mathbf{z}). \tag{63}$$

El problema en este caso reside en encontrar las matrices Λ y $\mathbf{V}$. La primera, como ya se mencionó, es una matriz diagonal que debe contener los valores característicos de la matriz $\mathbf{A}$, en este caso, de (60). En cuanto a la matriz $\mathbf{V}$, contiene los vectores característicos asociados a la misma matriz y que deben ser linealmente independientes.

Para ello se obtuvo la ecuación característica de $\mathbf{A}$, la cual está dada por

$$p(\lambda) = (\lambda^2 + 1)^N \left(\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\right), \tag{64}$$

donde los coeficientes a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ están dados por

$$\begin{aligned} a_3 =& s_3 + s_2 + s_1, \\ a_2 =& q_3 + q_2 + q_1 + s_1 s_3, \\ a_1 =& q_1 s_3 + q_3 s_1, \\ a_0 =& q_3 q_1. \end{aligned} \tag{65}$$

En (64) el factor $\lambda^2 + 1$ corresponde a los osciladores y el otro factor se debe al acoplamiento, en este caso, la estructura. Puede observarse que al resolver los factores se tendrán $2N$ raíces puramente imaginarias, y conjugadas, y cuatro raíces complejas conjugadas. Todo esto concuerda con la tercera condición, la cual establece que debe existir un número par de raíces puramente imaginarias. De lo anterior se tiene que la matriz diagonal Λ está dada por

$$\Lambda = \begin{pmatrix} i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_4 \end{pmatrix}, \tag{66}$$

donde $\sigma_1 = -\frac{1}{2}(d_1+d_2) - \frac{a_3}{4}$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}(d_2-d_1) - \frac{a_3}{4}$, $\sigma_3 = \frac{1}{2}(d_1-d_3) - \frac{a_3}{4}$ y $\sigma_4 = \frac{1}{2}(d_1+d_3) - \frac{a_3}{4}$, son las raíces de (64) relacionadas con la estructura. En cuanto a las variables d_1, d_2 y d_3 están dadas por

$$
\begin{aligned}
d_1 &= \left\{\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{\epsilon_1^2-4\epsilon_2^3}+\epsilon_1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{2}{\sqrt{\epsilon_1^2-4\epsilon_2^3}+\epsilon_1}\right)^{\frac{1}{3}}\epsilon_2\right]-\frac{2a_2}{3}+\frac{a_3^2}{4}\right\}^{1/2}, \\
d_2 &= \left\{-\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{\epsilon_1^2-4\epsilon_2^3}+\epsilon_1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{2}{\sqrt{\epsilon_1^2-4\epsilon_2^3}+\epsilon_1}\right)^{\frac{1}{3}}\epsilon_2\right]-\frac{4a_2}{3}+\frac{a_3^2}{2}-\frac{\epsilon_3}{4d_1}\right\}^{1/2}, \\
d_3 &= \left\{-\frac{1}{3}\left[\left(\frac{\sqrt{\epsilon_1^2-4\epsilon_2^3}+\epsilon_1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{2}{\sqrt{\epsilon_1^2-4\epsilon_2^3}+\epsilon_1}\right)^{\frac{1}{3}}\epsilon_2\right]-\frac{4a_2}{3}+\frac{a_3^2}{2}+\frac{\epsilon_3}{4d_1}\right\}^{1/2},
\end{aligned}
\tag{67}
$$

donde $\epsilon_1 = 27a_3^2a_0-9a_3a_2a_1+2a_2^3-72a_2a_0+27a_1^2$, $\epsilon_2 = a_2^2+12a_0-3a_3a_1$, $\epsilon_3 = 4a_3a_2-8a_1-a_3^3$.

A partir de las raíces dadas en (66) se pueden obtener los vectores característicos asociados a la matriz $\mathbf{A}$; por lo tanto, la matriz de transformación $\mathbf{V}$ está definida por

$$
\mathbf{V} = \begin{pmatrix}
-i & i & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\
1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_1 v_1 & \sigma_2 v_2 & \sigma_3 v_3 & \sigma_4 v_4 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & -i & i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\
0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_1 v_1 & \sigma_2 v_2 & \sigma_3 v_3 & \sigma_4 v_4 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -i & i & \dots & 0 & 0 & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \sigma_1 v_5 & \sigma_2 v_6 & \sigma_3 v_7 & \sigma_4 v_8 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -i & i & v_5 & v_6 & v_7 & v_8 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & \sigma_1 v_5 & \sigma_2 v_6 & \sigma_3 v_7 & \sigma_4 v_8 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & v_9 & v_{10} & v_{11} & v_{12} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sigma_1 v_9 & \sigma_1 v_{10} & \sigma_1 v_{11} & v_{12} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_1} & \frac{1}{\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_3} & \frac{1}{\sigma_4} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix},
\tag{68}
$$

donde v_i, v_{i+4} y v_{i+8}, para $i = 1, 2, 3, 4$, están dadas por

$$
\begin{aligned}
v_i &= -\frac{\sigma_i\left(s_2\sigma_i+q_2\right)}{\left[\sigma_i^2+1\right]\left[\sigma_i^2+s\sigma_i+q\right]},\\
v_{i+4} &= \frac{\left(s_3\sigma_i+q_3\right)\left(\sigma_i^2+s_1\sigma_i+q_1\right)}{\sigma_i\left[\sigma_i^2+1\right]\left[\sigma_i^2+s\sigma_i+q\right]},\\
v_{i+8} &= \frac{s_2\sigma_i+q_2}{\sigma_i\left[\sigma_i^2+s\sigma_i+q\right]}.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

En cuanto a la inversa de la matriz $\mathbf{V}$ se puede representar de la siguiente manera

$$
\mathbf{V^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{22} \end{pmatrix}
\tag{70}
$$

donde $\mathbf{V}_{11} \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$ es una matriz compleja cuadrada, $\mathbf{V}_{12} \in \mathbb{C}^{2N\times 4}$ y $\mathbf{V}_{22} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Se puede observar que existe una matriz nula $\mathbf{0}^{4\times 2N}$.

Las matrices $\mathbf{V}_{11}$ y $\mathbf{V}_{22}$ se encuentran dadas por

$$
\mathbf{V}_{11} = \begin{pmatrix}
i/2 & 1/2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
-i/2 & 1/2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & i/2 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & -i/2 & 1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & i/2 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -i/2 & 1/2 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & i/2 & 1/2 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -i/2 & 1/2
\end{pmatrix},
\tag{71}
$$

$$
\mathbf{V}_{22} = \begin{pmatrix}
\chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} & v_{12} \\
\chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} & v_{12} \\
\chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} & \chi_{22} \\
\chi_{41} & \chi_{42} & \chi_{43} & \chi_{44}
\end{pmatrix},
\tag{72}
$$

donde $\chi_{j,1}$, $\chi_{j,2}$, $\chi_{j,3}$ y $\chi_{j,4}$, para $j=1,2,3,4$, se encuentran determinadas por

$$\begin{aligned}
\chi_{j,1} &= -\frac{\left[qq_2\sigma_j^3 + b_{21}\sigma_j^2 + b_{11}\sigma_j + qa_0\zeta_2\right]\left[\sigma_j^2 + s\sigma_j + q\right]}{2\left(\sigma_j^3 + a_3\sigma_j^2 + a_1\sigma_j - 2q_1q_2\right)\left(q_2^2 - q_2s_1s_2 + q_1s_2^2\right)},\\
\chi_{j,2} &= -\frac{\left[(q_2s_1 - q_1s_2)\sigma_j^3 + c_{22}\sigma_j^2 + c_{21}\sigma_j + qq_1q_2q_3\right]\left[\sigma_j^2 + s\sigma_j + q\right]}{2\left(\sigma_j^3 + a_3\sigma_j^2 + a_1\sigma_j - 2q_1q_2\right)\left(q_2^2 - q_2s_1s_2 + q_1s_2^2\right)},\\
\chi_{j,3} &= -\frac{\left[q_2^2\sigma_j^3 + d_{23}\sigma_j^2 + d_{13}\sigma_j + qq_1q_2q_3\right]\left[\sigma_j^2 + s\sigma_j + q\right]}{2\left(\sigma_j^3 + a_3\sigma_j^2 + a_1\sigma_j - 2q_1q_2\right)\left(q_2^2 - q_2s_1s_2 + q_1s_2^2\right)},\\
\chi_{j,4} &= -\frac{\sigma_j^2(\sigma_j^2 + s\sigma_j + q)}{2\left(\sigma_j^3 + a_3\sigma_j^2 + a_1\sigma_j - 2q_1q_2\right)\left(q_2^2 - q_2s_1s_2 + q_1s_2^2\right)}.
\end{aligned} \tag{73}$$

En (73), $b_{21} = q(qs_2 + s_2s_3)$, $b_{11} = qa_1s_2 + a_0(q_2 - ss_2)$, $c_{22} = (q_2(s_1s_3 + q_1 + 1) - q_1s_2s_3)$, $c_{12} = (a_1q_2 - a_0s_2)$, $d_{23} = sq_2^2 + q_1q_2$, $d_{13} = a_1q_2 - a_0s_2^2$.

La matriz $\mathbf{V}_{12}$ se encuentra dada por

$$\mathbf{V}_{12} = \begin{pmatrix}
-\frac{q_3s_2 - qs_3 + i(q-a_0)}{2(n_1+in_2)} & -\frac{q+s_1s_3-a_0+i(s-a_1)}{2(n_1+in_2)} & \frac{q_2s_3-q_3s_2+iq_2}{2(n_1+in_2)} & \frac{q_2+is_2}{2(n_1+in_2)}\\
-\frac{q_3s_2 - qs_3 - i(q-a_0)}{2(n_1-in_2)} & -\frac{q+s_1s_3-a_0-i(s-a_1)}{2(n_1-in_2)} & \frac{q_2q_3-q_3s_2-iq_2}{2(n_1-in_2)} & \frac{q_2-is_2}{2(n_1-in_2)}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-\frac{q_3s_2 - qs_3 + i(q-a_0)}{2(n_1+in_2)} & -\frac{q+s_1s_3-a_0+i(s-a_1)}{2(n_1+in_2)} & \frac{q_2s_3-q_3s_2+iq_2}{2(n_1+in_2)} & \frac{q_2+is_2}{2(n_1+in_2)}\\
-\frac{q_3s_2 - qs_3 - i(q-a_0)}{2(n_1-in_2)} & -\frac{q+s_1s_3-a_0-i(s-a_1)}{2(n_1-in_2)} & \frac{q_2s_3-q_3s_2-iq_2}{2(n_1-in_2)} & \frac{q_2-is_2}{2(n_1-in_2)}\\
\frac{sq_3-qs_3+iq_3}{2(n_1+in_2)} & \frac{q_3+is_3}{2(n_1+in_2)} & \frac{sq_3-q_2s_3+i(q_3-a_0)}{2(n_1+in_2)} & \frac{a_0-q_3-s_1s_3+i(a_1-s_3)}{2(n_1+in_2)}\\
\frac{sq_3-qs_3-iq_3}{2(n_1-in_2)} & \frac{q_3-is_3}{2(n_1-in_2)} & \frac{sq_3-q_2s_3-i(q_3-a_0)}{2(n_1-in_2)} & \frac{a_0-q_3-s_1s_3-i(a_1-s_3)}{2(n_1-in_2)}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\frac{sq_3-qs_3+iq_3}{2(n_1+in_2)} & \frac{q_3+is_3}{2(n_1+in_2)} & \frac{sq_3-q_2s_3+i(q_3-a_0)}{2(n_1+in_2)} & \frac{a_0-q_3-s_1s_3+i(a_1-s_3)}{2(n_1+in_2)}\\
\frac{sq_3-qs_3-iq_3}{2(n_1-in_2)} & \frac{q_3-is_3}{2(n_1-in_2)} & \frac{sq_3-q_2s_3-i(q_3-a_0)}{2(n_1-in_2)} & \frac{a_0-q_3-s_1s_3-i(a_1-s_3)}{2(n_1-in_2)}
\end{pmatrix}, \tag{74}$$

donde $n_1 = 1 + a_0 - a_2$ y $n_2 = a_1 - a_3$.

3.3.3 Aplicación del método de Poincaré

Al sustituir $\mu_2 = 0$ y (66) en (63) se obtiene el sistema fundamental, cuyas soluciones se pueden representar por

$$z_r = \begin{cases} \alpha_r e^{i\frac{2\pi}{T}n_r\tau}, & r = 1, \ldots, 2N, \\ \alpha_r e^{\sigma_j \tau}, & r = 2N + j,\ j = 1, 2, 3, 4, \end{cases} \tag{75}$$

donde $T = 2\pi$ es el periodo adimensional y $n_r \in \{-1, 1\}$ $(r = 1, \ldots, 2N)$ son los coeficientes de las unidades imaginarias en la matriz Λ dada en (66). A partir de dicha matriz se puede concluir que

$$n_r = \begin{cases} 1, & r = 2n - 1, \quad n = 1, \ldots, N \\ -1, & r = 2n, \quad n = 1, \ldots, N \end{cases}. \tag{76}$$

Sin embargo, debido a que en (75) las soluciones z_r $(r = 2N + 1, \ldots, 2N + 4)$ se considera que asintóticamente tienden a cero, el análisis se enfoca en las soluciones periódicas z_r $(r = 1, \ldots, 2N)$. Por lo tanto,

$$z_r = \begin{cases} \alpha_r e^{i\frac{2\pi}{T}n_r\tau}, & r = 1, \ldots, 2N, \\ 0, & r = 2N + 1, \ldots, 2N + 4. \end{cases} \tag{77}$$

Al sustituir (77) en (63), se obtienen las soluciones periódicas (de periodo $T = 2\pi$) del sistema (60).Lo anterior está dado por

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \vdots \\ \theta_N \\ \dot{\theta}_N \\ y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\alpha_1 e^{i\tau} + i\alpha_2 e^{-i\tau} \\ \alpha_1 e^{i\tau} + \alpha_2 e^{-i\tau} \\ \vdots \\ -i\alpha_{2N-1} e^{i\tau} + i\alpha_{2N} e^{-i\tau} \\ \alpha_{2N-1} e^{iT\tau} + \alpha_{2N} e^{-i\tau} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{78}$$

De esta última ecuación es posible deducir que

$$\theta_j = i\alpha_{2j} e^{-i\tau} - i\alpha_{2j-1} e^{i\tau}, \quad \dot{\theta}_j = \alpha_{2j} e^{-i\tau} + \alpha_{2j-1} e^{i\tau}, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{79}$$

Ahora, es necesario encontrar los valores de α_r $(r = 1, \ldots, 2N)$ para los cuales existen soluciones periódicas síncronas.

Para encontrar los valores de dichas variables es necesario hacer uso del Teorema 2.1. En éste se establece que se deben tomar en cuenta sólo aquellas funciones no lineales correspondientes a las soluciones periódicas (77). Por lo que sólo deberán analizarse las primeras $2N$ ecuaciones de $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{Vz})$ en (63). Por consiguiente es posible definir un vector que contenga dichas funciones después de resolver $\mathbf{V}^{-1}\mathbf{\Phi}(\mathbf{Vz})$ en (63).

Se encuentra que dicho vector está dado por

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{y}})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} [c(\gamma^2-\theta_1^2)-p]\,\dot{\theta}_1+a\iota_1\sum_{n=1}^{K}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2)+\iota_2\sum_{n=K+1}^{N}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2) \\ [c(\gamma^2-\theta_1^2)-p]\,\dot{\theta}_1+a\bar{\iota}_1\sum_{n=1}^{K}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2)+\bar{\iota}_2\sum_{n=K+1}^{N}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2) \\ \vdots \\ [c(\gamma^2-\theta_K^2)-p]\,\dot{\theta}_K+a\iota_1\sum_{n=1}^{K}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2)+\iota_2\sum_{n=K+1}^{N}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2) \\ [c(\gamma^2-\theta_K^2)-p]\,\dot{\theta}_K+a\bar{\iota}_1\sum_{n=1}^{K}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2)+\bar{\iota}_2\sum_{n=K+1}^{N}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2) \\ \left[c(\gamma^2-\theta_{K+1}^2)-p\right]\dot{\theta}_{K+1}+\iota_4\sum_{n=K+1}^{N}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2)+a\iota_3\sum_{n=1}^{K}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2) \\ \left[c(\gamma^2-\theta_{K+1}^2)-p\right]\dot{\theta}_{K+1}+\bar{\iota}_4\sum_{n=K+1}^{N}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2)+a\bar{\iota}_3\sum_{n=1}^{K}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2) \\ \vdots \\ [c(\gamma^2-\theta_N^2)-p]\,\dot{\theta}_N+\iota_4\sum_{n=K+1}^{N}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2)+a\iota_3\sum_{n=1}^{K}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2) \\ [c(\gamma^2-\theta_N^2)-p]\,\dot{\theta}_N+\bar{\iota}_4\sum_{n=K+1}^{N}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2)+a\bar{\iota}_3\sum_{n=1}^{K}\theta_n(1+\dot{\theta}_n^2) \end{pmatrix} \tag{80}$$

donde $\tilde{\mathbf{y}}=(\theta_1,\dot{\theta}_1,\ldots,\theta_N,\dot{\theta}_N,0,0,0,0)$ son las soluciones en (78) y las variables $\bar{\iota}_n$ representan los conjugados de las variables ι_n $(n=1,2,3,4)$ y estas últimas se encuentran dadas por

$$\iota_1=\frac{q_3-1+is_3}{n_1+in_2},\quad \iota_2=\frac{q_2+is_2}{n_1+in_2},\quad \iota_3=\frac{q_3+is_3}{n_1+in_2},\quad \iota_4=\frac{q-1+is}{n_1+in_2}. \tag{81}$$

De acuerdo con (9) es necesario integrar cada una de las funciones de (80) y considerar los coeficientes de las unidades imaginarias de las primeras $2N$ raíces de (66). No obstante, en (76) se encontró que el valor de los coeficientes es 1 para las raíces pares y -1 para las raíces impares. Por lo que al aplicar (9), y tomar en cuenta (76), se encuentra que

$$P_r(\tilde{\alpha})=\begin{cases}\int_0^{2\pi} f_r(\tilde{\mathbf{y}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau, & r=1,3,\ldots,2N-1\\ \int_0^{2\pi} f_r(\tilde{\mathbf{y}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\tau, & r=2,4,\ldots,2N,\end{cases} \tag{82}$$

donde $\omega=1$ y $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_{2N})$.

Después de realizar las respectivas integraciones, se tiene que las funciones P_r ($r=1,2,\ldots,2N$) se encuentran dadas por

$$P_r = \begin{cases} \pi\left[\alpha_r\left(\varepsilon - c\alpha_r\alpha_{r+1}\right) - i\left(a\iota_1\varsigma_1 + \iota_2\varsigma_2\right)\right], \; r = 1, 3, \ldots, 2K-1, \\ \pi\left[\alpha_r\left(\varepsilon - c\alpha_{r-1}\alpha_r\right) + i\left(a\bar{\iota}_1\varsigma_3 + \bar{\iota}_2\varsigma_4\right)\right], \; r = 2, 4, \ldots, 2K, \\ \pi\left[\alpha_r(\varepsilon - c\alpha_r\alpha_{r+1}) - i\left(a\iota_3\varsigma_1 + \iota_4\varsigma_2\right)\right], \; r = 2K+1, 2K+3, \ldots, 2N-1, \\ \pi\left[\alpha_r(\varepsilon - c\alpha_{r-1}\alpha_r) + i\left(a\bar{\iota}_3\varsigma_3 + \bar{\iota}_4\varsigma_4\right)\right], \; r = 2K+2, 2K+4, \ldots, 2N. \end{cases} \tag{83}$$

donde $\varepsilon = c\gamma^2 - p$, $\varsigma_1 = \sum_{n=1}^{K} \alpha_{2n-1}\left(1 + \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\right)$, $\varsigma_2 = \sum_{n=K+1}^{N} \alpha_{2n-1}\left(1 + \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\right)$, $\varsigma_3 = \sum_{n=1}^{K} \alpha_{2n}\left(1 + \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\right)$, $\varsigma_4 = \sum_{n=K+1}^{N} \alpha_{2n}\left(1 + \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\right)$.

En el Teorema 2.1 se establece que $\alpha_{2N-1} = \alpha_{2N}$, por lo que (83) se puede reescribir de la siguiente manera

$$P_r = \begin{cases} \pi\left\{\alpha_r\left(\varepsilon - c\alpha_r\alpha_{r+1}\right) - i\left[a\iota_1\varsigma_1 + \iota_2\left(\varsigma_2 + \varsigma_5\right)\right]\right\}, & r = 1, 3, \ldots, 2K-1, \\ \pi\left\{\alpha_r\left(\varepsilon - c\alpha_{r-1}\alpha_r\right) + i\left[a\bar{\iota}_1\varsigma_3 + \bar{\iota}_2\left(\varsigma_4 + \varsigma_5\right)\right]\right\}, & r = 2, 4, \ldots, 2K, \\ \pi\left\{\alpha_r(\varepsilon - c\alpha_r\alpha_{r+1}) - i\left[a\iota_3\varsigma_1 + \iota_4\left(\varsigma_2 + \varsigma_5\right)\right]\right\}, & r = 2K+1, 2K+3, \ldots, 2N-3, \\ \pi\left\{\alpha_r(\varepsilon - c\alpha_{r-1}\alpha_r) + i\left[a\bar{\iota}_3\varsigma_3 + \bar{\iota}_4\left(\varsigma_4 + \varsigma_5\right)\right]\right\}, & r = 2K+2, 2K+4, \ldots, 2N-2, \\ \pi\left\{\alpha_{2N-1}(\varepsilon - c\alpha_{2N-1}^2) - i\left[a\iota_3\varsigma_1 + \iota_4\left(\varsigma_2 + \varsigma_5\right)\right]\right\}, & r = 2N-1, \\ \pi\left\{\alpha_{2N-1}(\varepsilon - c\alpha_{2N-1}^2) + i\left[a\bar{\iota}_3\varsigma_3 + \bar{\iota}_4\left(\varsigma_4 + \varsigma_5\right)\right]\right\}, & r = 2N. \end{cases} \tag{84}$$

donde ς_1 y ς_3 ya se definieron anteriormente, $\varsigma_5 = \alpha_{2N-1}\left(1 + \alpha_{2N-1}^2\right)$, y ahora $\varsigma_2 = \sum_{n=K+1}^{N-1} \alpha_{2n-1}\left(1 + \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\right)$ y $\varsigma_4 = \sum_{n=K+1}^{N-1} \alpha_{2n}\left(1 + \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}\right)$.

Para encontrar α_r $(r = 1, \ldots, 2N-1)$, es necesario aplicar la ecuación (8) y resolver las funciones resultantes. De lo anterior, se encuentra que las funciones de periodicidad Q_r $(r = 1, \ldots, 2N-1)$ están dadas por

$$Q_r(\tilde{\alpha}) = \begin{cases} -\pi\left\{\alpha_r\alpha_{2N-1}\left[2\varepsilon - c(\alpha_r\alpha_{r+1}+\alpha_{2N-1}^2)\right] + i\Psi_r\right\}, & r = 1,3,\ldots,\vartheta-1,\\ \pi\left\{c\alpha_r\alpha_{2N-1}(\alpha_{r-1}\alpha_r - \alpha_{2N-1}^2) + i\Psi_r\right\}, & r = 2,4,\ldots,\vartheta,\\ -\pi\left\{\alpha_r\alpha_{2N-1}\left[2\varepsilon - c(\alpha_r\alpha_{r+1}+\alpha_{2N-1}^2)\right] + i\Psi_r\right\}, & r = \vartheta+1,\ldots,2N-3,\\ \pi\left\{c\alpha_r\alpha_{2N-1}(\alpha_{r-1}\alpha_r - \alpha_{2N-1}^2) + i(\alpha_r - \alpha_{2N-1})\Psi_r\right\}, & r = \vartheta+2,\ldots,2N-2,\\ -\pi\alpha_{2N-1}\left\{2\alpha_{2N-1}\left[\varepsilon + \iota_5\left(1+\alpha_{2N-1}^2\right) - c\alpha_{2N-1}^2\right] + i\Psi_r\right\}, & r = 2N-1, \end{cases} \tag{85}$$

donde $\vartheta = 2K$, $\iota_5 = \frac{sn_1 - n_2(q-1)}{n_1^2+n_2^2}$ y

$$\Psi_r = \begin{cases} a\left(\bar{\iota}_3\alpha_r\varsigma_3 - \iota_1\alpha_{2N-1}\varsigma_1\right) + \left(\bar{\iota}_4\alpha_r\varsigma_4 - \iota_2\alpha_{2N-1}\varsigma_2\right) + \varsigma_{5r}, & r = 1,3,\ldots,\vartheta-1,\\ a\left(\bar{\iota}_3\alpha_r - \bar{\iota}_1\alpha_{2N-1}\right)\varsigma_3 + \left(\bar{\iota}_4\alpha_r - \bar{\iota}_2\alpha_{2N-1}\right)\left(\varsigma_4+\varsigma_5\right), & r = 2,4,\ldots,\vartheta,\\ a\left(\bar{\iota}_3\alpha_r\varsigma_3 - \iota_3\alpha_{2N-1}\varsigma_1\right) + \left(\bar{\iota}_4\alpha_r\varsigma_4 - \iota_4\alpha_{2N-1}\varsigma_2\right) + \varsigma_{6r}, & r = \vartheta+1,\ldots,2N-3,\\ a\bar{\iota}_3\varsigma_2 + \bar{\iota}_4\left(\varsigma_4+\varsigma_5\right), & r = \vartheta+2,\ldots,2N-2,\\ a\left(\bar{\iota}_3\varsigma_3 - \iota_3\varsigma_1\right) + \left(\bar{\iota}_4\varsigma_4 - \iota_4\varsigma_2\right), & r = 2N-1, \end{cases} \tag{86}$$

$$\begin{aligned} \varsigma_{5r} &= \left(\bar{\iota}_4\alpha_r - \iota_2\alpha_{2N-1}\right)\alpha_{2N-1}\left(1+\alpha_{2N-1}^2\right),\ r = 1,3,\ldots,2K-1,\\ \varsigma_{6r} &= \left(\bar{\iota}_4\alpha_r - \iota_4\alpha_{2N-1}\right)\alpha_{2N-1}\left(1+\alpha_{2N-1}^2\right),\ r = 2K+1,2K+3,\ldots,2N-3. \end{aligned} \tag{87}$$

En cuanto a la estabilidad de las soluciones, ésta se determina de acuerdo con (10) en el Teorema 2.1 al establecer el número de metrónomos por analizar.

Debido a que las oscilaciones de la estructura afectan al comportamiento de los osciladores, éstos se ven obligados a cambiar su periodo; el cual, de acuerdo con (Blekhman, 1988) se considera que es de la forma[4]

$$\tilde{T} = T + \tau_c(\mu_2) = 2\pi + \tau_c(\mu_2), \tag{88}$$

donde τ_c determina la corrección del periodo T y está dada por (11). Al sustituir este

[4]Este párrafo se encuentra basado en (Peña Ramirez *et al.*, 2014b)

nuevo periodo en (77) y tomando en cuenta que $\alpha_{2N} = \alpha_{2N-1}$, se puede reescribir a (79) de la siguiente forma

$$\theta_j = \begin{cases} i\alpha_{2j} e^{-i\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau} - i\alpha_{2j-1} e^{i\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau}, & j = 1, \ldots, N-1, \\ 2\alpha_{2N-1} \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau\right), & j = N, \end{cases} . \tag{89}$$

y

$$\dot{\theta}_j = \begin{cases} \alpha_{2j} e^{-i\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau} + \alpha_{2j-1} e^{i\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau}, & j = 1, \ldots, N-1, \\ 2\alpha_{2N-1} \cos\left(\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau\right), & j = N \end{cases} . \tag{90}$$

En los capítulos cuatro y cinco se presentan los desarrollos que se siguieron para encontrar los valores de α_i $(i = 1, \ldots, 2N-1)$ para dos y cuatro osciladores, respectivamente, mediante el uso de la metodología presentada en éste.

Capítulo 4. Análisis para dos osciladores

En el capítulo anterior se presentó la metodología que se empleará en el análisis del presente capítulo y del siguiente. En este capítulo se muestra el análisis que se desarrolló para el caso de dos osciladores, ver Figura 11. Se inicia con el estudio analítico, para lo cual se aplica el método de Poincaré y se comparan los resultados obtenidos con algunas simulaciones. Posteriormente se presenta el estudio numérico que se realizó, donde se presentan las regiones de atracción que dependen de las condiciones iniciales y de los parámetros de la estructura considerando el caso ideal, i. e., los parámetros de una plataforma son iguales a los homólogos de la otra, los mismo sucede con los osciladores.

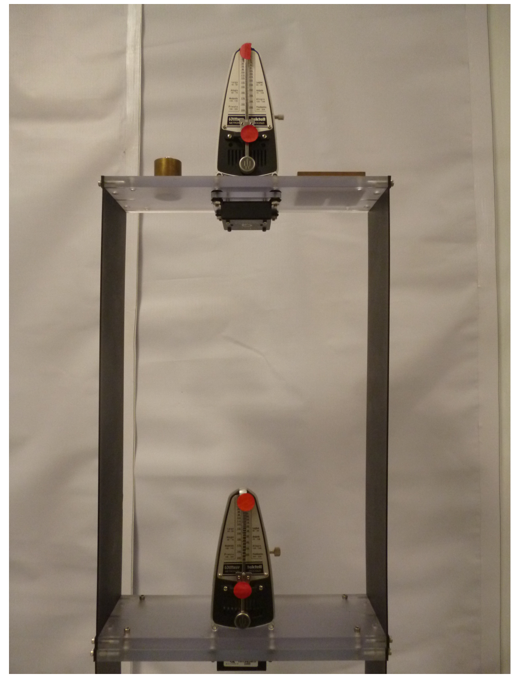


Figura 11: **Sistema horizontal-vertical de Huygens con dos metrónomos.**

4.1 Estudio analítico

En la sección anterior se determinaron las funciones de periodicidad Q_r, para $r = 1, \ldots, 2N-1$, del sistema HV de Huygens para N péndulos. En está sección se analiza el sistema para el caso de dos péndulos, para ello se hace uso de la metodología presentada en el capítulo anterior. De acuerdo con (85) las ecuaciones para el sistema de dos osciladores se encuentran dadas por:

$$Q_r(\hat{\alpha}_1) = \begin{cases} -\pi\left\{\alpha_1\alpha_3\left[2\varepsilon - c\left(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3^2\right)\right] + i\Psi_r(\hat{\alpha}_1)\right\}, & r=1, \\ \pi\left\{c\alpha_2\alpha_3\left(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3^2\right) + i\Psi_r(\hat{\alpha}_1)\right\}, & r=2, \\ -\pi\alpha_3\left\{2\alpha_3\left[\varepsilon+\iota_5\left(1+\alpha_3^2\right) - c\alpha_3^2\right] + ia\left(\bar{\iota}_3\alpha_2-\iota_3\alpha_1\right)\left(1+\alpha_1\alpha_2\right)\right\}, & r=3, \end{cases} \tag{91}$$

donde $\hat{\alpha}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y

$$\Psi_r(\hat{\alpha}_1) = \begin{cases} a\alpha_1 \left(\bar{\iota}_3\alpha_2 - \iota_1\alpha_3\right)\left(1 + \alpha_1\alpha_2\right) + \left(\bar{\iota}_4\alpha_1 - \iota_2\alpha_3\right)\alpha_3\left(1 + \alpha_3^2\right), & r = 1, \\ a\alpha_2 \left(\bar{\iota}_3\alpha_2 - \bar{\iota}_1\alpha_3\right)\left(1 + \alpha_1\alpha_2\right) + \alpha_3\left(\bar{\iota}_4\alpha_2 - \bar{\iota}_2\alpha_3\right)\left(1 + \alpha_3^2\right), & r = 2, \end{cases} \tag{92}$$

De lo anterior se puede concluir que las soluciones (89) serán de la forma

$$\theta_1 = i\alpha_2 e^{-i\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau} - i\alpha_1 e^{i\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau} \quad y \quad \theta_2 = 2\alpha_3 \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau\right). \tag{93}$$

Sin embargo, las soluciones α_1 y α_3 deben ser reales, ya que en un sistema mecánico no existen magnitudes complejas. En (93) se puede apreciar que la única amplitud que resulta ser real es α_3, y de acuerdo con lo expuesto anteriormente, es necesario que θ_1 también lo sea, por ende, se debe cumplir que $\alpha_2 = \alpha_1$. Al tomar en cuenta lo anterior, se tiene que

$$\theta_1 = 2\alpha_1 \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau\right) \quad \text{y} \quad \theta_2 = 2\alpha_3 \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau\right). \tag{94}$$

Al sustituir $\alpha_2 = \alpha_1$ en (91) se tiene que

$$Q_r(\hat{\alpha}_1) = \begin{cases} -\pi\left\{\alpha_1\alpha_3\left[2\varepsilon - c\left(\alpha_1^2 + \alpha_3^2\right)\right] + i\Psi_r(\hat{\alpha}_1)\right\}, & r = 1, \\ \pi\left\{c\alpha_1\alpha_3\left(\alpha_1^2 - \alpha_3^2\right) + i\Psi_r(\hat{\alpha}_1)\right\}, & r = 2, \\ -2\pi\alpha_3\left\{2\alpha_3\left[\varepsilon + \iota_5\left(1 + \alpha_3^2\right) - c\alpha_3^2\right] + a\iota_6\alpha_1\left(1 + \alpha_1\alpha_2\right)\right\}, & r = 3, \end{cases} \tag{95}$$

donde $\iota_6 = \frac{s_3 n_1 - q_3 n_2}{n_1^2 + n_2^2}$ y

$$\Psi_r(\hat{\alpha}_1) = \begin{cases} a\alpha_1 \left(\bar{\iota}_3\alpha_1 - \iota_1\alpha_3\right)\left(1 + \alpha_1^2\right) + \left(\bar{\iota}_4\alpha_1 - \iota_2\alpha_3\right)\alpha_3\left(1 + \alpha_3^2\right), & r = 1, \\ a\alpha_1 \left(\bar{\iota}_3\alpha_1 - \bar{\iota}_1\alpha_3\right)\left(1 + \alpha_1^2\right) + \alpha_3\left(\bar{\iota}_4\alpha_1 - \bar{\iota}_2\alpha_3\right)\left(1 + \alpha_3^2\right), & r = 2, \end{cases} \tag{96}$$

Al intentar resolver el sistema (95), se puede encontrar que no es posible obtener una solución explícita de α_1 y, por lo tanto, no es posible obtener soluciones explícitas para

(91). Por las razones anteriores, se propone el siguiente cambio de variables

$$\alpha_1 = \upsilon\alpha_3 e^{i\phi} \quad \text{y} \quad \alpha_2 = \upsilon\alpha_3 e^{-i\phi}, \tag{97}$$

donde $\alpha_3, \phi \in \mathbb{R}$ y $\upsilon \in \mathbb{R}^{+}$. Puede observarse que $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$, por lo que las soluciones (93) ahora se encuentran dadas por

$$\theta_1 = 2\upsilon\alpha_3 \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau + \phi\right) \quad \text{y} \quad \theta_2 = 2\alpha_3 \sin\left(\frac{2\pi}{\tilde{T}}\tau\right). \tag{98}$$

Al sustituir (97) en (85), se encuentra que las funciones de periodicidad quedan de la siguiente manera

$$Q_r(\hat{\alpha}_2) = \begin{cases} -\alpha_3^2\pi\left\{\upsilon e^{i\phi}\left[2\varepsilon - c\alpha_3^2\left(\upsilon^2+1\right)\right] + i\Psi_r(\hat{\alpha}_2)\right\}, & r=1,\\ \alpha_3^2\pi\left\{\upsilon e^{-i\phi}c\alpha_3^2\left(\upsilon^2-1\right) + i\Psi_r(\hat{\alpha}_2)\right\}, & r=2,\\ -\alpha_3^2\pi\left\{2\left[\varepsilon - c\alpha_3^2 + \iota_6\left(\alpha_3^2+1\right)\right] + i\Psi_r(\hat{\alpha}_2)\right\}, & r=3,\end{cases} \tag{99}$$

donde $\hat{\alpha}_2 = (\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \alpha_3)$ y

$$\Psi_r(\hat{\alpha}_2) = \begin{cases} a\upsilon e^{i\phi}\left(\bar{\iota}_3\upsilon e^{-i\phi} - \iota_1\right)\left(1+\upsilon^2\alpha_3^2\right) + \left(\bar{\iota}_4\upsilon e^{i\phi} - \iota_2\right)\left(\alpha_3^2+1\right), & r=1,\\ a\upsilon e^{-i\phi}\left(\bar{\iota}_3\upsilon e^{-i\phi} - \bar{\iota}_1\right)\left(1+\upsilon^2\alpha_3^2\right) + \left(\bar{\iota}_4\upsilon e^{-i\phi} - \bar{\iota}_2\right)\left(\alpha_3^2+1\right), & r=2,\\ a\upsilon\left(\bar{\iota}_3 e^{-i\phi} - \iota_3 e^{i\phi}\right)\left(1+\upsilon^2\alpha_3^2\right), & r=3,\end{cases} \tag{100}$$

En (99) se puede despejar α_3, donde se encuentra que dos raíces son iguales a cero y las otras dos están dadas por

$$\alpha_3 = \pm\sqrt{\frac{2\left(\varepsilon+\iota_5\right) - ia\upsilon\left(\iota_3 e^{i\phi} - \bar{\iota}_3 e^{-i\phi}\right)}{2\left(c-\iota_5\right) + ia\upsilon^3\left(\iota_3 e^{i\phi} - \bar{\iota}_3 e^{-i\phi}\right)}}. \tag{101}$$

Puede observarse que si $\phi = 0$ (sincronización en fase) ó $\phi = \pi$ (sincronización en contra fase) y $\upsilon = 1$ (misma amplitud), α_3 se vuelve un número complejo, lo cual, físicamente no es válido. Por esta razón, no es posible obtener sincronización completa en fase o en contra fase; en cambio, se obtendrá sincronización parcial. De ahí, que las

Definiciones 2.3 y 2.3 presentan un error ϵ_{fg} y ϵ_{cg}, respectivamente, y el cual debe ser mayor a cero.

Las otras dos variables, ϕ y υ, se encuentran de manera numérica. Para ello, este problema se trata como un problema de optimización multivariable, con las siguientes restricciones

- $|Q_i(\tilde{\alpha})| < \epsilon$ $(i = 1, 2)$ de (99),
- $\alpha_3 \in \mathbb{R}$.

donde $\epsilon \in \mathbb{R} > 0$ corresponde a un error.

Para resolver este problema se aplicaron los métodos de la cuadrícula y el simplex (Rao, 1994) con valor de $\epsilon = 1 \times 10^{-15}$. El primero es para determinar las regiones en las cuales se puedan encontrar las raíces que cumplan con las restricciones anteriormente mencionadas, ya que es posible encontrar raíces que sólo cumplan con una de las dos restricciones, y el segundo, para obtener un resultado más exacto.

Debe notarse que no se encontrarán los parámetros para los cuales existen soluciones periódicas estables; por el contrario, se deben conocer los parámetros del sistema y en base a estos se obtienen las soluciones periódicas, y mediante el uso de (10) y (88) se determinan la estabilidad y periodo, respectivamente, de dichas soluciones.

Para realizar el análisis, se emplearon los parámetros de la Tabla 1, donde los valores del término de Van der Pol se encontraron al medir la máxima amplitud del metrónomo y mediante simulaciones se aproximó la forma de onda de un oscilador a una onda senoidal. En cuanto al amortiguamiento del mismo se realizaron mediciones y mediante simulación se estimó. En relación a la estructura, las constantes de elasticidad y amortiguamiento se obtuvieron de (Hirata Salazar, 2016), en cuanto a la masa se estableció en 1.4 kg, ya que es el único parámetro que se puede variar en la estructura.

Los resultados que se obtuvieron con los parámetros mostrados en la Tabla 1, se presentan en la Tabla 2. Puede observarse que en la Tabla 2 ya se han clasificado los tipos de sincronización, en fase y contra fase.

Tabla 1: **Parámetros usados para el análisis teórico.**

Elemento	Parámetro	Valor
Plataforma inferior	Masa (M_1)	1.4 kg
	Amortiguamiento (b_1)	0.08 Ns/m
	Constante elástica (k_1)	500 N/m
Plataforma superior	Masa (M_2)	1.4 kg
	Amortiguamiento (b_2)	0.08 Ns/m
	Constante elástica (k_2)	500 N/m
Péndulos	Masa m_i $(i = 1, 2)$	0.03 kg
	Amortiguamiento δ_i $(i = 1, 2)$	2×10^{-5} Ns/m
	Frecuencia ω_i $(i = 1, 2)$	12.2522 rad/s
Término de Van der Pol	Factor de no linealidad ν_i $(i = 1, 2)$	1.5×10^{-3} Ns/m
	Cambio de signo γ_i $(i = 1, 2)$	0.2 rad

Tabla 2: **Soluciones del sistema (99)**

υ	ϕ (rad)	α_3 (rad)	Tipo de sincronización
1.58527	3.06562	0.11297	Contra fase
0.616	-0.06356	0.16184	Fase

Al sustituir las soluciones de la Tabla 2 en (97) se obtienen los resultados para α_i $(i = 1, 2)$, los cuales se muestran en la Tabla 3 para los dos regímenes de sincronización.

Tabla 3: **Resultados de α_i $(i = 1, 2, 3)$ para dos péndulos.**

Variable	Contra Fase	Fase
α_1	$0.17909e^{i3.06562}$	$0.09969e^{-i0.06356}$
α_2	$0.17909e^{-i3.06562}$	$0.09969e^{i0.06356}$
α_3	0.11297	0.16184

La estabilidad de dichas soluciones se obtiene con (10), donde la parte real de las raíces del polinomio característico deben ser menores a cero. El polinomio característico de (10) para los valores de la Tabla 1, con soluciones en contra fase, se encuentra dado por

$$p(\chi) = 1.3786\chi^3 + (1.9185 + i3.9505)\chi^2 + (33.397 + i4.1892)\chi + 29.0057 + i1.4235, \quad (102)$$

y sus raíces son

$$\chi_1 = -8.6981 - i0.2378, \quad \chi_2 = -2.3071 + i36.0425, \quad \chi_3 = -2.7049 - i64.0354. \quad (103)$$

Para la soluciones en fase, se encuentra que el polinomio característico es

$$p(\chi) = 0.5889\chi^3 - (1.6491 + i3.2522)\chi^2 + (27.0329 - i0.8)\chi - (67.1599 + i150.5734), \quad (104)$$

y sus raíces

$$\chi_1 = -13.8976 - i31.9123, \ \chi_2 = -0.1713 + i35.1214, \ \chi_3 = -0.4358 - i31.8141. \quad (105)$$

Puede observarse que en ambos casos, las partes reales de sus respectivas raíces son negativas y, por lo tanto, los valores de fase y contra fase que se encontraron son estables para los parámetros dados.

El tiempo de corrección y el período se determinan mediante (11) y (88). En la Tabla 4 se presentan estos resultados.

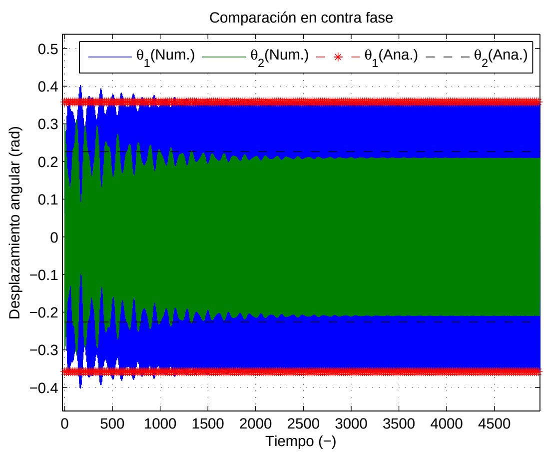
Tabla 4: **Resultados de los periodos para dos péndulos.**

Variable	Contra Fase	Fase
$\tau_c(\mu_2)\ (-)$	-0.05679	-0.82152
$\tilde{T}\ (-)$	6.2264	5.46166

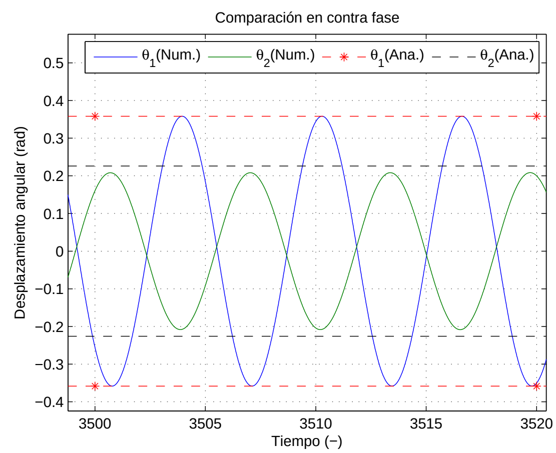
4.1.1 Comparación de resultados analíticos con resultados numéricos

Para comprobar los resultados obtenidos, se realizaron dos simulaciones con los parámetros de la Tabla 1 y el sistema adimensional (39). Los resultados numéricos se obtuvieron con la función ode45 de Matlab, empleándose 5000 seg. y un incremento de 0.01 seg., que en el sistema dimensional corresponde a 408 seg. de simulación con un incremento de 8.16179×10^{-4} seg., aproximadamente.

La primera simulación corresponde a la sincronización en contra fase cuyas condiciones iniciales fueron $\theta_1(0) = 0.2\ rad$ y $\theta_2(0) = -0.3\ rad$, mientras las otras iniciaban en cero. La comparación entre las magnitudes se presenta en la Figura 12; en la Figura 12a se aprecia la serie completa del tiempo que se estableció para la simulación mientras que en la Figura 12b se aprecia un acercamiento entre los 3500 y 3520 seg. Puede observarse que las soluciones analíticas θ_1, en rojo, y θ_2, línea negra punteada, son buenas aproximaciones de las soluciones obtenidas numéricamente.



(a) Serie de tiempo



(b) Acercamiento

Figura 12**: Resultados de amplitud con condiciones iniciales en contra fase.**

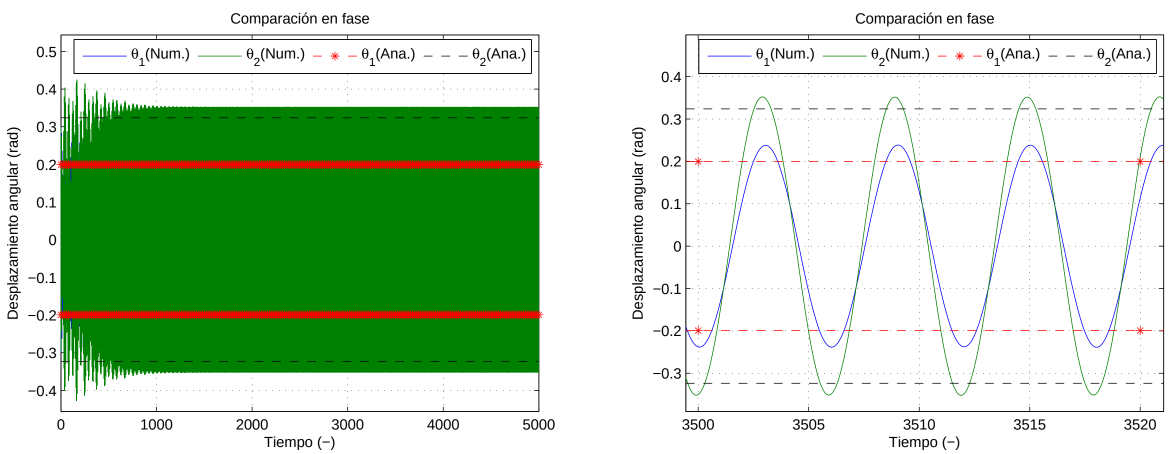
Otra observación que se puede hacer es que el tiempo en el que los osciladores llegan a un estado estacionario es poco menor a los 3500 seg. en el sistema adimensional, el cual corresponde a aproximadamente 286 seg. en el sistema dimensional, ver Figura 12a. Por otro lado, en la Figura 12b se puede observar que, ya estando en estado estacionario, tanto las fases como las frecuencias de los osciladores permanecen constantes a lo largo del tiempo. Para obtener los valores de estas variables, se aplicó la transformada de Fourier a los últimos 200 seg.

Al comparar los resultados analíticos y numéricos, se obtienen los errores relativos al método numérico mostrados en la Tabla 5. Puede observarse que los errores del periodo, de la fase y de la amplitud del oscilador de la plataforma inferior, son menores al uno por ciento, a diferencia del error de la amplitud del oscilador de la plataforma superior. Este error se debe tanto a los términos iguales o superiores a segundo grado de la variable μ_2 que no se tomaron en cuenta, como al error numérico debido a los métodos empleados para obtener las soluciones de (99).

Tabla 5: **Comparación de los resultados analíticos y numéricos para sincronización en contra fase.**

Variable	Método analítico	Método numérico	Error($\%$)
Periodo	6.2264 $(-)$	6.25031 $(-)$	0.38
Fase	3.06562 (rad)	3.05135 (rad)	0.47
Amplitud θ_1	0.35818 (rad)	0.35817 (rad)	0
Amplitud θ_2	0.22594 (rad)	0.2088 (rad)	4.79

Para el caso de sincronización en fase, se aplicó el método del caso anterior, pero con condiciones iniciales en fase, es decir, $\theta_1(0) = 0.2\ rad$ y $\theta_2(0) = 0.3\ rad$, mientras las demás iniciaban en cero. Las comparaciones de las amplitudes se muestran en la Figura 13, y los resultados de fase y periodo en la Tabla 6.



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 13: **Resultados de amplitud con condiciones iniciales en fase.**

Tabla 6: **Comparación de los resultados analíticos y numéricos para sincronización en fase.**

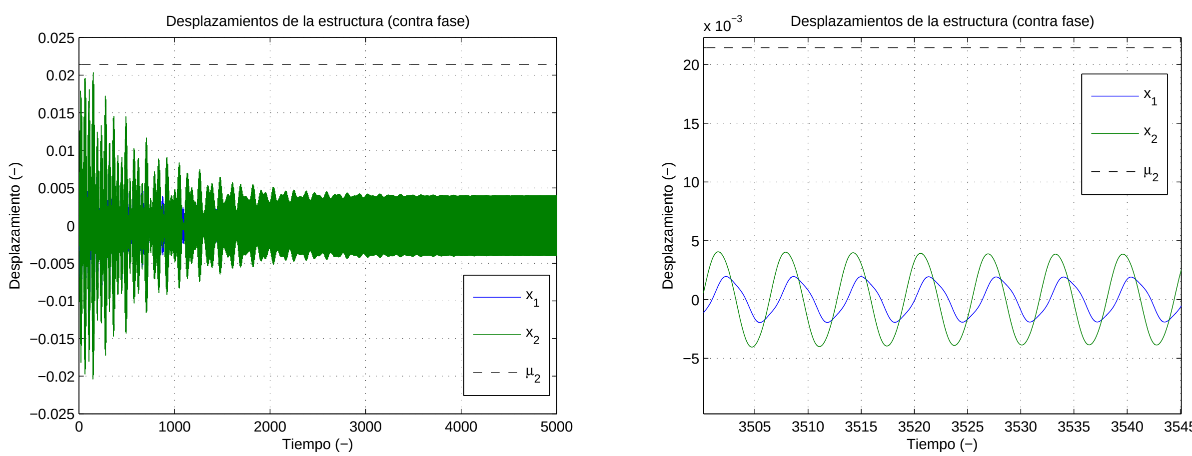
Variable	Método analítico	Método numérico	Error(%)
Periodo $(-)$	5.46166	6.06091	9.89
Fase (rad)	-0.06356	-0.14434	55.97
Amplitud θ_1 (rad)	0.21326	0.23879	16.5
Amplitud θ_2 (rad)	0.32368	0.35211	8.08

Puede observarse que existe un error en la fase de más del 50% para el caso de sincronización en fase, y que el periodo está cerca del límite aceptable de error (10%). De acuerdo con (Blekhman *et al.*, 2002), Poincaré demostró que las soluciones obtenidas con este método no siempre son soluciones del sistema original o en su defecto pertenecen a un número infinito de soluciones. Lo anterior se debe a que en el método de Poincaré se desprecian los términos iguales o mayores a segundo grado en el parámetro pequeño, es decir, la forma canónica (5) del sistema (2) realmente es

$$\dot{z}_r = \lambda_r z_r + \mu f_r(z_1, \ldots, z_l) + \mathcal{O}(\mu^2), \quad r = 1, \ldots, k. \tag{106}$$

donde $\mathcal{O}(\mu^2)$ representa los términos en los que aparece el parámetro pequeño con un orden igual o mayor a dos. En este caso, dichos términos afectan al sistema por lo que es necesario realizar una expansión del método para incluirlos en el análisis. Sin embargo, dicha expansión se encuentra fuera del alcance de este trabajo.

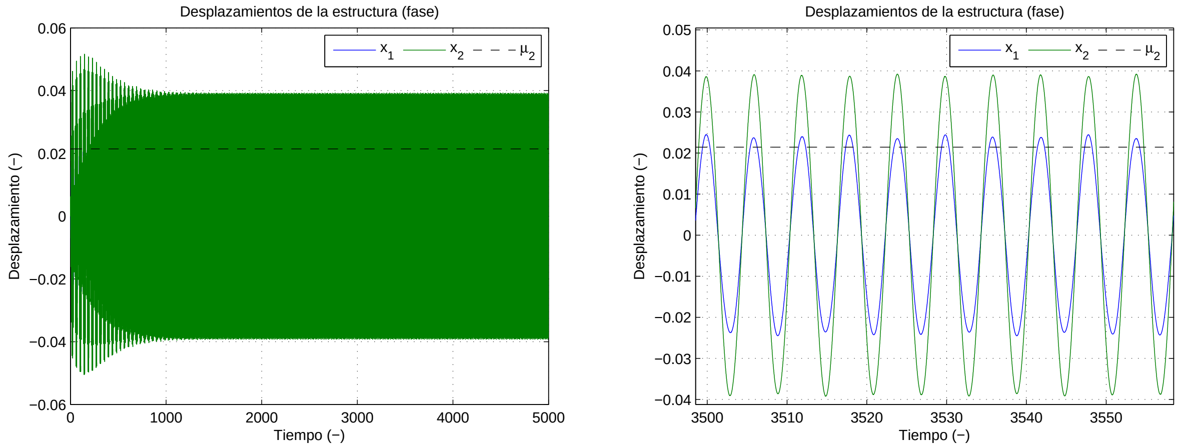
Otra razón por la que se presenta ese error, es que al momento de aplicar el método de Poincaré se considera que las oscilaciones de la estructura se atenúan o el orden de dichas oscilaciones es menor al orden del parámetro pequeño, algo que no sucede en el caso de sincronización en fase. En las Figuras 14 y 15 se presentan las comparaciones entre los desplazamientos de la estructura y el valor de μ_2 para los casos de las Figuras 12 y 13, respectivamente. Puede observarse que para el caso de sincronización en contra fase, los desplazamientos de la estructura, x_1 y x_2, son menores al valor del parámetro pequeño μ_2, Figura 14; en cambio, para el caso de sincronización en fase, Figura 15, sucede lo contrario.



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 14**: Desplazamientos de la estructura cuando se tiene sincronización en contra fase.**

Pero es posible demostrar que el método de Poincaré es apto para encontrar las soluciones de un sistema en la forma (39). Por ejemplo, para los valores de la Tabla 7, las



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

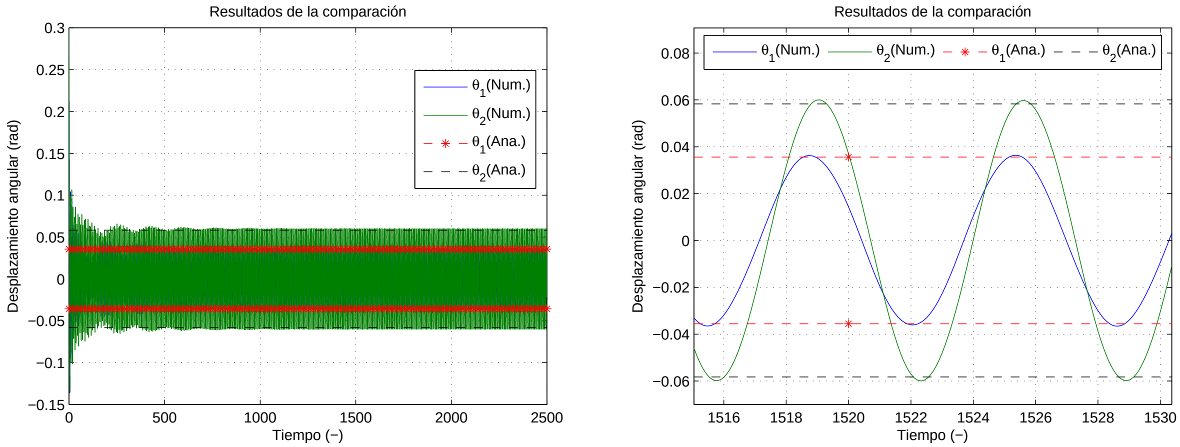
Figura 15**: Desplazamientos de la estructura para sincronización en fase.**

condiciones iniciales $\theta_1(0) = 0.2$, $\theta_2(0) = 0.3$ y las demás iguales a cero, se obtienen los resultados de la Figura 16. Se puede observar que, a diferencia de los resultados de la Figura 13, los errores en amplitud se redujeron.

Tabla 7**: Parámetros para dos péndulos.**

Elemento	Parámetro	Valor
Plataforma inferior	Masa (M_1)	1.5 kg
	Amortiguamiento (b_1)	0.0015 Ns/m
	Constante elástica (k_1)	500 N/m
Plataforma superior	Masa (M_2)	1.5 kg
	Amortiguamiento (b_2)	0.0015 Ns/m
	Constante elástica (k_2)	500 N/m
Péndulos	Masa m_i $(i = 1, 2)$	0.05 kg
	Amortiguamiento δ_i $(i = 1, 2)$	1×10^{-3} Ns/m
	Longitud l_i $(i = 1, 2)$	0.125 m
Término de Van der Pol	Factor de no linealidad ν	0.57 Ns/m
	Cambio de signo γ_i $i = 1, 2)$	0.05 rad

En cuanto a los resultados de fase y frecuencia, se presentan en la Tabla 8. Se encuentra que la fase tanto del método numérico como del analítico son parecidas. Puede observarse que los errores disminuyeron; sin embargo, el error de la fase sigue estando por encima del valor de tolerancia aceptable. Ésto quiere decir que existe un conjunto de parámetros para los cuales la aproximación que se realiza con el método de Poincaré se acerca a la solución numérica, debido a que se reducen las oscilaciones de la estructura



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 16**: Resultados de amplitud con condiciones iniciales en fase para los valores de la Tabla 7.**

a un orden menor que aquel del parámetro μ_2.

Tabla 8**: Comparación de los resultados y de la simulaciones para dos osciladores con condiciones inciales en fase.**

Variable	Método analítico	Método numérico	Error(%)
Periodo $(-)$	6.40732	6.66699	2.49
Fase (rad)	0.23138	0.27924	16.45
Amplitud θ_1 (rad)	0.03559	0.03653	0.32
Amplitud θ_2 (rad)	0.05828	0.06003	1.28

Como se puede observar el método de Poincaré sólo se puede aplicar en el caso de sincronización en contra fase, ya que para sincronización en fase es necesario ampliar el método para los términos iguales o mayores a segundo orden, o incluir los desplazamientos de la estructura. También se puede ver que los parámetros influyen mucho en que tan exacto es el método al encontrar soluciones en fase.

4.2 Análisis numérico

En la sección 2.2 se dieron a conocer las funcionales con las que se definen sincronización en este trabajo. De acuerdo con las Definiciones 2.3 y 2.4 los grupos de osciladores se encuentran sincronizados en fase o contra fase siempre y cuando exista un error ϵ_{fg} o ϵ_{cg} en la fase para el cual se satisfagan (17) ó (18). Dichos errores se consideran como $\epsilon_{fg} = \epsilon_{cg} = 0.4\ rad$, i. e., la máxima diferencia de fases debe ser de 0.4 rad.

Se estudiaron cinco casos de acuerdo con la siguiente lista:

1. Se cambiaron las condiciones iniciales de los osciladores mientras se mantenían constantes los parámetros del sistema.

2. Se estudiaron los cambios en las masas de la estructura, donde $M_1 = M_2 = M$, en relación a las condiciones iniciales del oscilador de la plataforma superior θ_2, mientras $\theta_1(0)$ permanecía constante. El tiempo de simulación empleado en este caso fue de 2500 seg.

3. Se estudió el cambio de la elasticidad de la estructura, donde $k_1 = k_2 = k$, en relación a las condiciones iniciales del oscilador de la plataforma superior θ_2, mientras $\theta_1(0)$ permanecía constante. El tiempo se simulación empleado fue de 2500 seg.

4. En este caso, se trataron los cambios del amortiguamiento de la estructura, donde $b_1 = b_2 = b$, en relación a $\theta_2(0)$ y $\theta_1(0)$ constante. El tiempo de simulación para este caso fue de 2500 seg.

5. El último caso se trató sobre las variaciones de la frecuencia del oscilador, $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ en relación a las condiciones iniciales de θ_2 y $\theta_1(0)$ constante. El tiempo de simulación para este caso fue de 3500 seg.

Cabe mencionar que en todos los casos las simulaciones se realizaron con el sistema (36), $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0\ rad/s$, $x_1(0) = x_2(0) = 0\ m$ y $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0\ m/s$; los parámetros que no se encontraban bajo estudio permanecieron constantes de acuerdo con la Tabla 1 y se empleó la función `ode45` de Matlab para resolver de manera numérica el sistema empleado. El estudio de fases y frecuencias se realizó a los últimos 200 seg. mediante la transformada de Fourier. Además, a la diferencia de fases se les aplicó el modulo 2π, para aquellas cuyo valor absoluto fuera mayor a π, de tal forma que el valor final quedara en el rango $-pi < \phi < pi\ rad$.

4.2.1 Estudio de las condiciones iniciales

Como se mencionó en los párrafos anteriores, el primer estudio se realizó sobre las condiciones iniciales del sistema. El rango empleado para el estudio es el siguiente

$$-0.8 < \theta_i(0) < 0.8\, rad \quad i = 1, 2, \tag{107}$$

con un paso de $0.02\, rad$. El resultado que se obtuvo se muestra en la Figura 17, la región de color amarillo es la de sincronización en fase; en cambio, la de color rojo representa la de contra fase. Puede observarse que la gráfica es simétrica, i. e., que las regiones de atracción son iguales para los cuadrantes contra puestos. Mientras que en los cuadrantes I y III, condiciones iniciales en fase, se encuentra la coexistencia de los regímenes, en los cuadrantes II y IV, condiciones iniciales en contra fase, se encuentra que sólo existe contra fase.

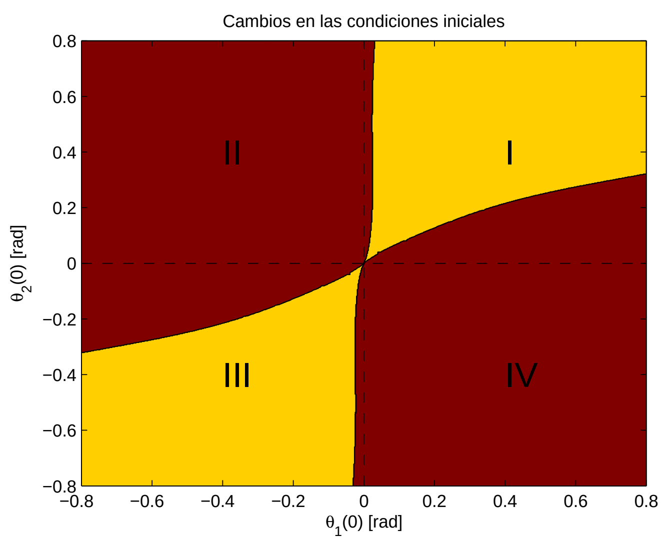
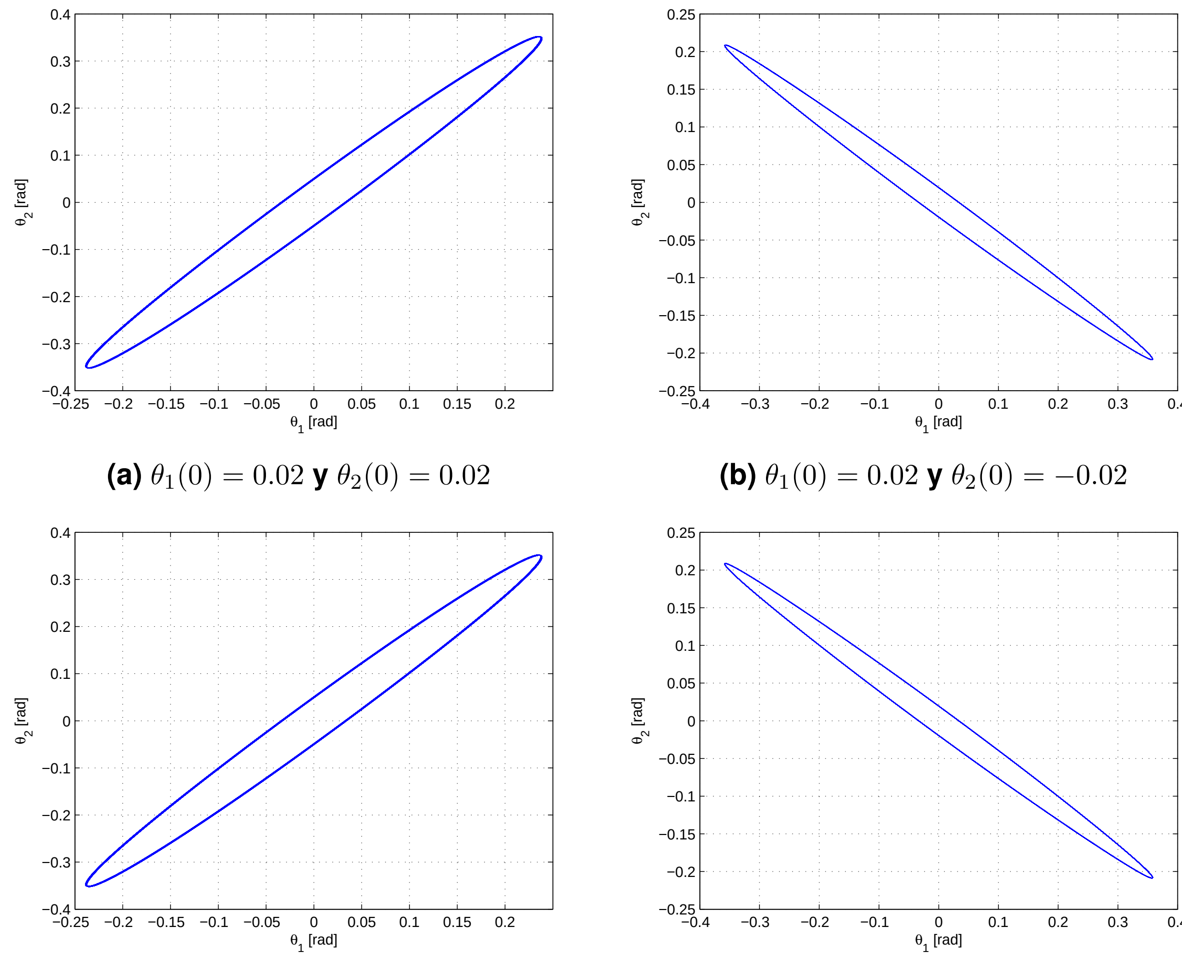


Figura 17: **Resultados al variar las condiciones iniciales. La región de color rojo corresponde a la región de sincronización en contra fase y la región de color amarillo representa las condiciones iniciales para las cuales emerge la sincronización en fase.**

Para validar los resultados obtenidos, se realizaron algunas simulaciones. En la Figura 18 se presentan los diagramas de fase de dichas simulaciones. Puede observarse que para las condiciones iniciales en fase $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0.02$ y $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0.8$ la pendiente formada, por el primer estado de cada uno de los osciladores, es positiva; esto se puede observar en las Figuras 18a y 18c, respectivamente. En cambio, para condiciones iniciales en contra fase $\theta_1(0) = -\theta_2(0) = 0.02$ y $\theta_1(0) = -\theta_2(0) = 0.8$, Figuras 18b y 18d, respectivamente, la pendiente es negativa. Cabe mencionar que los diagramas de fase se obtuvieron al analizar los últimos 200 seg.



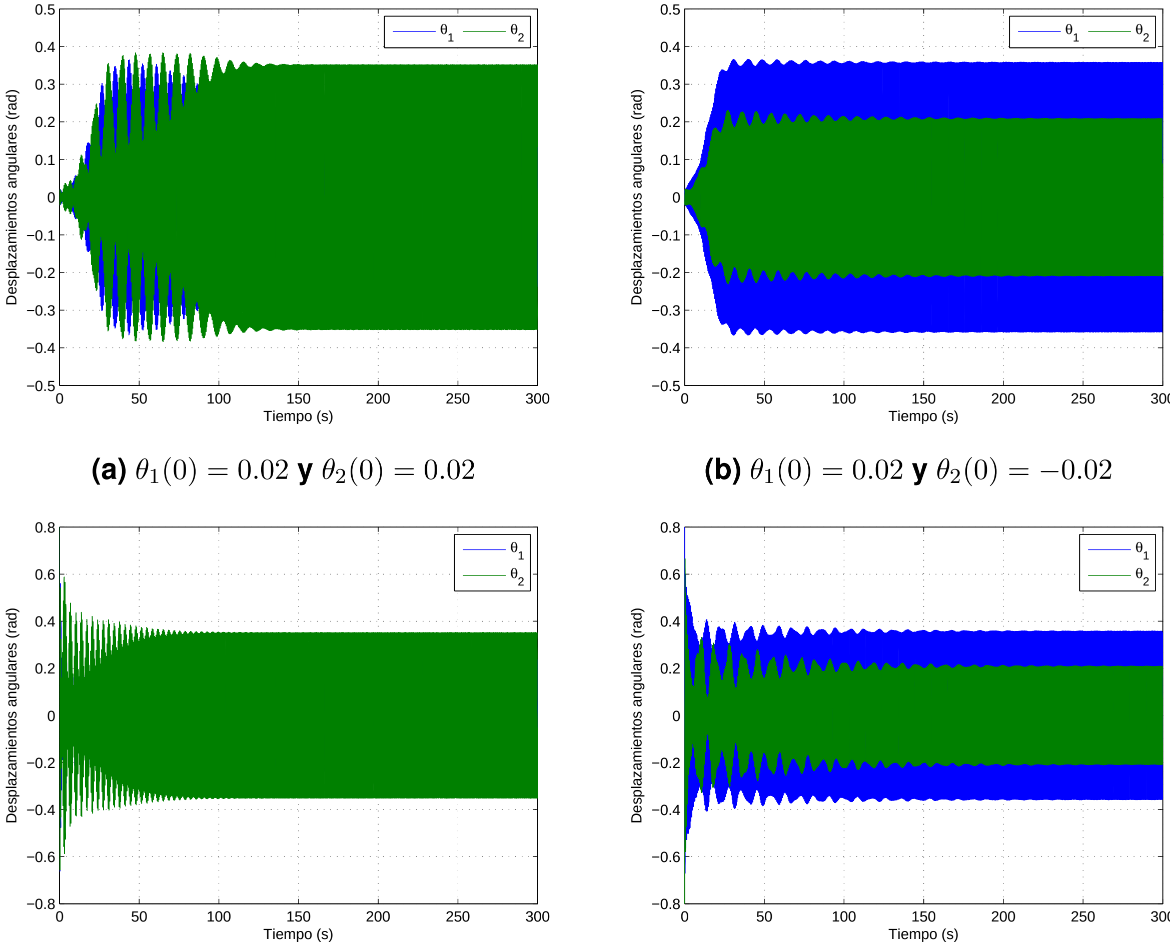
(a) $\theta_1(0) = 0.02$ **y** $\theta_2(0) = 0.02$ **(b)** $\theta_1(0) = 0.02$ **y** $\theta_2(0) = -0.02$

(c) $\theta_1(0) = 0.8$ **y** $\theta_2(0) = 0.8$ **(d)** $\theta_1(0) = 0.8$ **y** $\theta_2(0) = -0.8$

Figura 18**: Diagramas de fase para algunas condiciones iniciales. Estos diagramas representan el régimen al cual tienden algunas de las condiciones iniciales de la Figura 17 los incisos (a) y (c) representan sincronización en fase; en cambio, los otros dos, (b) y (c) corresponden a sincronización en contra fase.**

En cuanto a las series de tiempo, los resultados se presentan en la Figura 19 para los primeros 300 seg. de simulación de un tiempo de 1200 seg. Puede observarse que para condiciones iniciales en fase el tiempo en que los osciladores alcanzan el estado estacionario es menor que aquel que se emplea cuando el régimen de sincronización es en contra fase.

Las frecuencias, amplitudes y fases de cada una de las simulaciones de la Figura



(a) $\theta_1(0) = 0.02$ **y** $\theta_2(0) = 0.02$ **(b)** $\theta_1(0) = 0.02$ **y** $\theta_2(0) = -0.02$

(c) $\theta_1(0) = 0.8$ **y** $\theta_2(0) = 0.8$ **(d)** $\theta_1(0) = 0.8$ **y** $\theta_2(0) = -0.8$

Figura 19**: Series de tiempo para las condiciones iniciales analizadas en la Figura 18.**

19 se pueden apreciar en la Tabla 9. Puede observarse que no importa en que condiciones iniciales empiecen los osciladores, una vez alcanzado el estado estacionario, la frecuencia y fase son iguales para un conjunto de condiciones iniciales cuyo régimen de sincronización, en dicho estado, es el mismo.

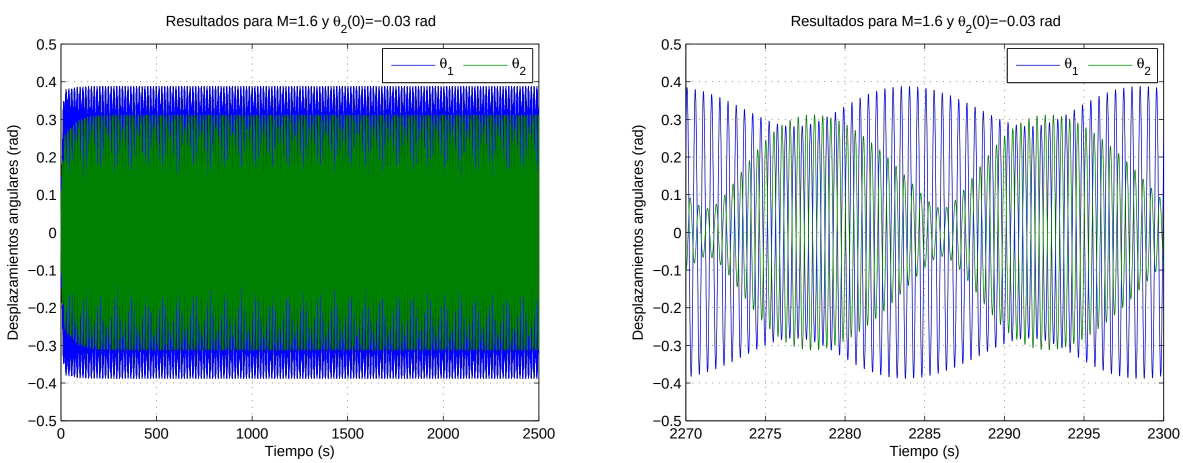
Tabla 9**: Resultados de las simulaciones para las condiciones iniciales de la Figura 18.**

Condiciones iniciales (rad)		Amplitud (rad)		Frecuencia (Hz)	$\|\phi\|(rad)$
θ_1	θ_2	θ_1	θ_2		
0.02	0.02	0.23881	0.35214	2.04653	0.14287
0.02	-0.02	0.3581	0.20868	1.9332	3.0505
0.8	0.8	0.2388	0.35214	2.04653	0.14286
0.8	-0.8	0.3581	0.20868	1.9332	3.0506

4.2.2 Masas

Como se mencionó en el párrafo introductorio al análisis numérico, en esta sección se presentan los resultados que se obtuvieron al realizar cambios en las masas en relación a los cambios de las condiciones iniciales de θ_2. Para ello, se consideró que $M_1 = M_2 = M$, por lo que el rango empleado para las variaciones de las masas fue $0.5\ kg \leq M \leq 3\ kg$ con un paso de $0.02\ kg$. En cuanto a las condiciones de iniciales θ_2, se realizaron de acuerdo con (107) para $i = 2$ y un tamaño de paso de $0.01\ rad$ mientras $\theta_1(0) = 0.1\ rad$.

Antes de presentar los resultados, se muestra un fenómeno peculiar que se encontró al estar buscando el tiempo de simulación óptimo para este estudio. Dicho fenómeno se presenta en la Figura 20, puede observarse que la amplitud del oscilador no es constante como en los casos de la Figura 19. En la Figura 20a se puede apreciar la serie de tiempo y en la Figura 20b se puede apreciar un acercamiento entre los 2270 y los 2300 seg. Cabe mencionar que este fenómeno se observó para $M = 1.6\ kg$ y $\theta_2(0) = 0.03\ rad$.



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 20**: Resultados de sincronización en frecuencia con amplitud variable.**

En la Figura 20b puede observarse que las formas de onda se repiten sin llegar a cambiar su frecuencia o fase. Para determinar si existía algún tipo de sincronización se obtuvo su espectro de frecuencias, el cual se muestra en la Figura 21. Puede observarse que todas las frecuencias que están presentes en el sistema son iguales, por lo que se puede decir que existe sincronización al menos en frecuencia.

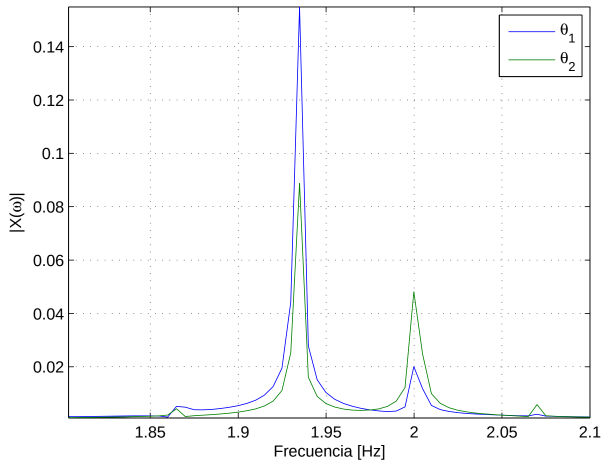


Figura 21**: Espectro de frecuencias para M=1.6 y** $\theta_2(0) = 0.03$**.**

Aunque este fenómeno no cumple con las Definiciones 2.3 y 2.4, puede ser considerado como un caso de sincronización en frecuencia con amplitud. Para fines de este trabajo, este tipo de fenómenos no es estudiado y sólo se consideran aquellos casos en los que existe sincronización con una amplitud constante, de acuerdo con las definiciones de la sección 2.2.

La manera en la que se llegó a descartar este tipo de fenómenos fue mediante el factor de cresta. De acuerdo con (Núñez-Pérez, 2014), el factor de cresta de una señal de voltaje o corriente repetitiva se define como el cociente entre el nivel del pico máximo y su valor eficaz durante un tiempo determinado. En la misma referencia se encuentra que el factor de cresta de una señal sinusoidal es de aproximadamente 1.41; sin embargo, debido a las pequeñas variaciones de amplitud que se presentaban durante el tiempo de análisis, se estableció como límite 1.44 para ambos osciladores.

Los resultados obtenidos al graficar los cambios de masa en relación a los cambios en la condición inicial de θ_2 se muestran en la Figura 22. Puede observarse que la sincronización en fase (color amarillo) y en contra fase (color rojo) en el sistema, así mismo el régimen de sincronización en fase emerge en el rango $1 < M < 2.2\ kg$; en cambio la sincronización en contra fase se da en el rango $0.6 < M < 1.5\ kg$. También es posible observar que sólo hay un rango de masas en los cuales hay coexistencia y la emergencia de uno de los dos regímenes de sincronización depende de las condiciones iniciales. En cambio, fuera de ese rango sólo es posible observar un régimen.

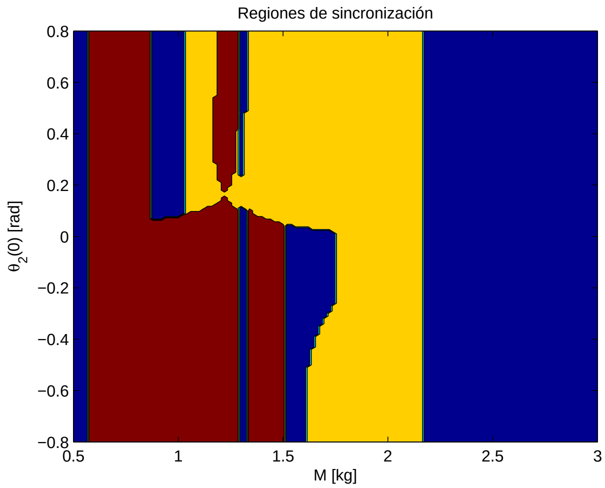
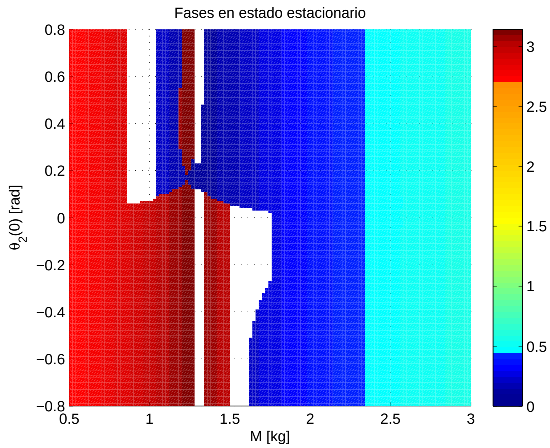


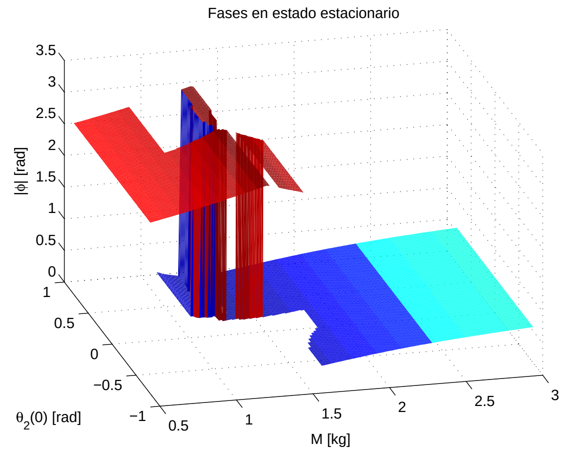
Figura 22**: Resultados del análisis de las masas y condiciones iniciales. La región de color amarillo corresponde al régimen de sincronización en fase, el color rojo indica el régimen de sincronización en contra fase y el color azul corresponde a los valores de elasticidad y condiciones iniciales en los que no se presentó sincronización de acuerdo con las Definiciones 2.3 y 2.4.**

Al realizar simulaciones para valores mayores a $2.16\ kg$ se encontró que los fenómenos no cumplen con las Definiciones 2.3 y 2.4. Para las zonas donde $M = 1.6\ kg$, $-0.8 \leq \theta_2(0) \leq 0.03\ rad$ y $M = 1.7\ kg$, $-0.31 \leq \theta_2(0) \leq -0.02\ rad$ se encontró el fenómeno descrito en la Figura 20.

Un análisis del cambio de fase de acuerdo con los cambios en las condiciones iniciales y las masas arroja que la fase crece de manera lineal, para cada régimen, conforme la masa incrementa y queda invariante de acuerdo a las condiciones iniciales. Lo anterior se puede observar en la Figura 23 donde el eje vertical representa el valor absoluto de la fase de acuerdo al plano $M - \theta_2(0)$, i. e., no se consideran los adelantos o atrasos que los osciladores tuvieron entre ellos. Puede observarse que la fase de los osciladores, para $M = 0.5\ kg$, se ha agregado, así como también para $M > 2.16\ kg$. La razón radica en que existe una sincronización en frecuencia como se ve en la Figura 24. Además, se puede apreciar que el desfase en sincronización en contra fase aumenta conforme incrementa la masa, hasta un valor de aproximadamente 1.2 kg a partir de este valor el desfase disminuye para el mismo régimen. Para el régimen de sincronización en fase, se puede ver que desde el momento en que emerge, aproximadamente para una masa de 1 kg, el desfase entre los osciladores tiende a crecer. Cabe mencionar que los cambios en el color rojo representan las regiones de sincronización en contra fase, los cambios en el color azul corresponden a sincronización en fase y las zonas en las que el desfase dado entre los osciladores no cumple con las Definiciones 2.3 y 2.4, pero el mismo se mantiene constante, está representando por los cambios que van desde el color cian hasta el anaranjado. En cuanto las zonas en blanco representan las regiones en las que la fase o la amplitud no son constantes.



(a) Plano $M - \theta_2(0)$

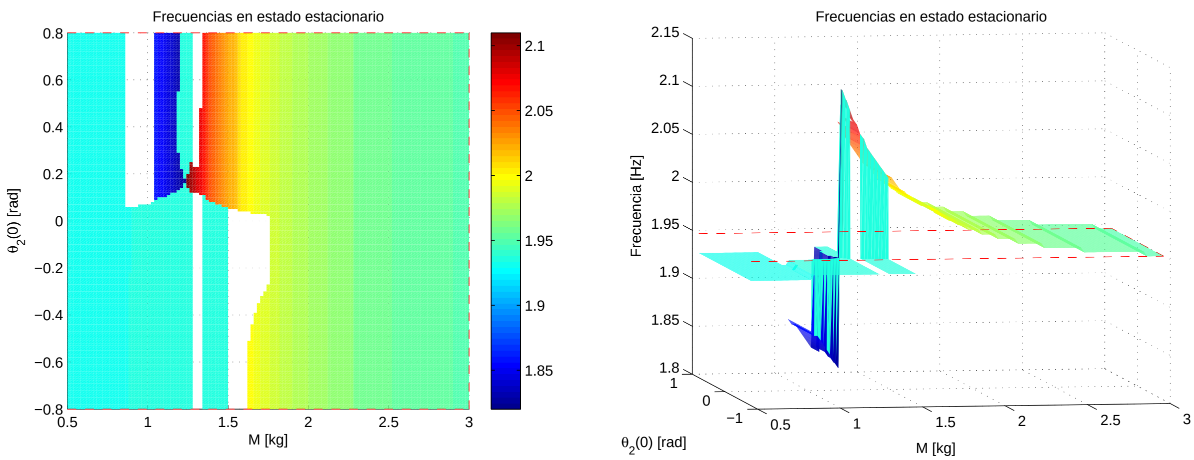


(b) Gráfica en tres dimensiones

Figura 23**: Distribución de la diferencia de fases para los cambios en las masas.**

En cuanto a la frecuencia, en la Figura 24 se presenta el comportamiento que ésta presenta al cambiar las masas y las condiciones iniciales. Puede observarse que para sincronización en contra fase la frecuencia permanecen constante independientemente de las condiciones iniciales y del valor de la masa. También se puede apreciar que se encuentran por debajo de la frecuencia natural de los osciladores (línea roja). En cambio, cuando se trata de sincronización en fase, la frecuencia en estado estacionario se encuentran por arriba de la frecuencia natural de los osciladores y decrece conforme la masa se incrementa, a excepción del rango $1 < M < 1.2\ kg$, donde la frecuencia está por debajo de la frecuencia natural de los osciladores. Puede observarse que en la figura el incremento de la frecuencia se da de manera escalonada. Al igual que en el caso anterior las regiones de sincronización en fase se identifican con el color amarillo, las zonas de sincronización en contra fase con el color rojo y las de fase constante con el color azul.

En las Figuras 23 y 24 se pueden observar espacios en blanco, estas regiones corresponden a las zonas donde se daba sincronización en frecuencia con amplitud variable, o en su defecto no se presentaba ningún tipo de sincronización.



(a) Plano $M - \theta_2(0)$ **(b) Gráfica en tres dimensiones**

Figura 24**: Frecuencias en estado estacionario para los cambios en las masas.**

4.2.3 Elasticidad

En los apartados anteriores se mostraron los resultados del estudio realizado para los cambios de las masas de las plataformas y las condiciones iniciales. En éste se muestra el efecto que tiene el cambio de la elasticidad de la estructura.

De acuerdo con lo que se presentó en el párrafo introductorio a esta sección, se manejó el caso donde $k_1 = k_2 = k$ para lo cual se empleó un rango de $0 \leq k \leq 500$ N/m con pasos de 5 N/m, mientras que las condiciones iniciales, al igual que en el caso anterior, se manejaron de acuerdo con (107) para $i = 2$ con un paso de 0.01 rad y $\theta_1(0) = 0.1$ rad.

Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 25. Puede observarse que el régimen de mayor atracción es el de sincronización en fase (color amarillo). En cambio, el régimen de contra fase (color rojo) casi no está presente.

En la región azul que va desde los 350 N/m hasta los 470 N/m se logran observar fenómenos como el de la Figura 20. En cuanto a la región que va desde cero hasta 50 N/m, los osciladores se sincronizan con un cierto desfase, pero el cual no está dentro del error establecido, i. e., no cumplen con las Definiciones 2.3 y 2.4 a pesar de que es constante.

En la Figura 26 se puede apreciar el cambio de fase en las zonas en las que la amplitud

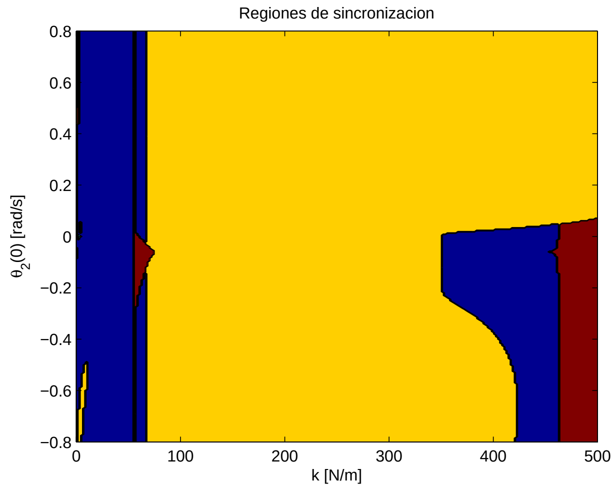
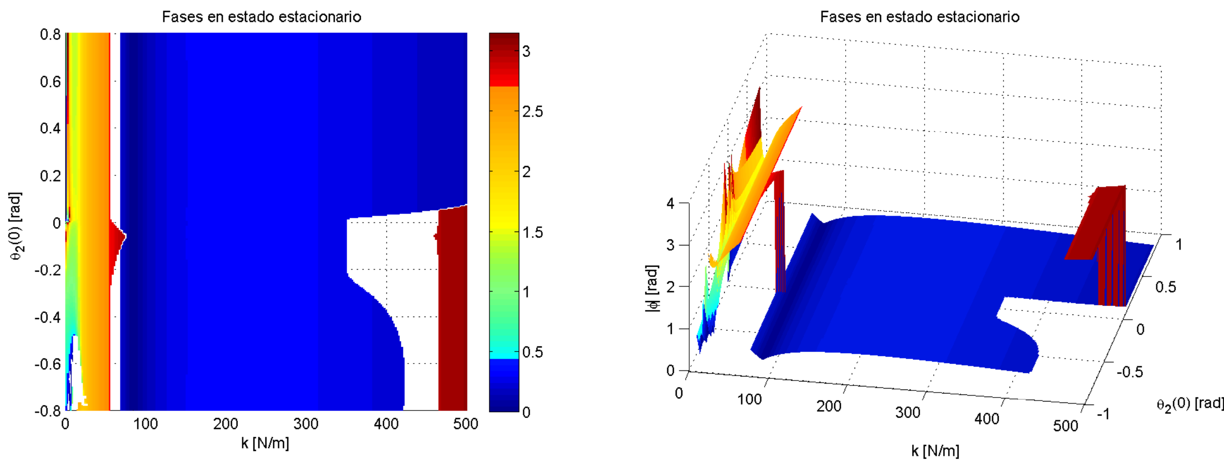


Figura 25**: Regiones de atracción para los cambios en la elasticidad. La región de color amarillo corresponde al régimen de sincronización en fase, el color rojo indica el régimen de sincronización en contra fase y el color azul corresponde a los valores de elasticidad y condiciones iniciales en los que no se presentó sincronización de acuerdo con las Definiciones 2.3 y 2.4..**

se mantuvo constante de acuerdo con el criterio tomado anteriormente. El eje vertical corresponde al valor absoluto de la fase, y al igual que el caso anterior, no se consideraron los adelantos o atrasos que los osciladores tuvieron entre ellos. Además, en algunos casos se observó que $|\phi| > 4\ rad$, por lo que se realizó un ajuste al sustraer $2\pi\ rad$ a esos valores. En la misma figura puede observarse que conforme se incrementa la elasticidad, el desfase entre los osciladores crece, en especial entre los primeros $50\ N/m$. Después de este punto se genera sincronización en contra fase, lo cual sucede en el rango $50 < k \leq 75\ N/m$ y posteriormente cae el desfase al cambiar de régimen. En cambio, al estar cerca de los $500\ N/m$ puede apreciarse que ambos regímenes coexisten y que, en esa región, la emergencia de uno de ellos depende de las condiciones iniciales. También se puede apreciar que la fase, para el régimen de sincronización en fase, tiende a cambiar conforme se incrementa la elasticidad de la estructura, de tal forma que no crece de manera lineal, a diferencia del caso que se presentó en los cambios de la masa.

Cabe mencionar que, al igual que en el caso anterior, las zonas donde la amplitud varía con el tiempo no se tomaron en cuenta.

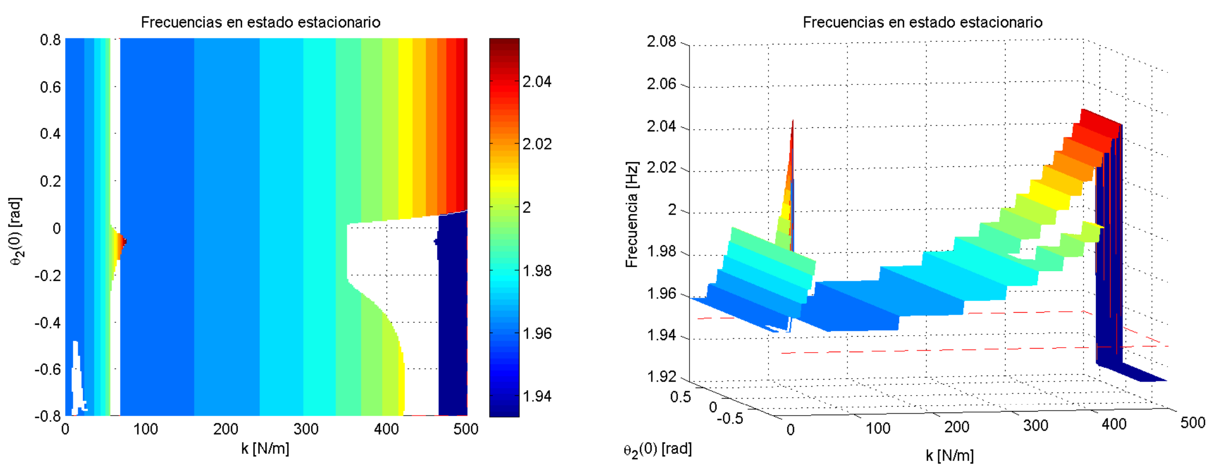
En cuanto a las frecuencias, en la Figura 27 se presentan los resultados que se obtuvieron. La línea roja, en la Figura 27b representa la frecuencia natural de los osciladores. Puede observarse que la frecuencia de los osciladores aumenta de acuerdo con la elas-



(a) Vista en dos dimensiones **(b) Vista en tres dimensiones**

Figura 26**: Distribución de la diferencia de fases para los cambios en la eslasticidad de la estructura. Puede observarse que para las regiones de color azul de la Figura 25 existen regiones en las que se presenta sincronización pero con una fase que no cumple con las Definiciones 2.3 y 2.4**

ticidad de la estructura para las zonas de sincronización en fase. Sin embargo, para las regiones de sincronización en contra fase se pueden apreciar dos frecuencias; la primera que se encuentran entre los 50 y 100 N/m, y cuyo valor se encuentra por arriba de la frecuencia natural de los osciladores; y la segunda, la cual se encuentra entre los 450 y 500 N/m, cuyo valor es aproximadamente 1.94 Hz y la cual es menor que la frecuencia natural de los osciladores.



(a) Plano $k - \theta_2(0)$ **(b) Gráfica en tres dimensiones**

Figura 27**: Frecuencias en estado estacionario para los cambios de la elasticidad y condiciones iniciales.**

En las Figuras 26 y 27 se pueden apreciar espacios en blanco, al igual que en el anterior caso de estudio, dicho espacio representa las zonas en las que ni la fase ni la amplitud de los osciladores permanecía constante.

4.2.4 Amortiguamientos

De acuerdo con la lista presentada en la introducción, el cuarto estudio corresponde a las variaciones del amortiguamiento con respecto a los cambios de las condiciones iniciales. Al igual que en los casos anteriores, el rango de las condiciones iniciales para θ_2 está dado por (107) para $i = 2$ con un paso de $0.01\ rad.$, mientras $\theta_1(0) = 0.1\ rad$. En cuanto al rango del amortiguamiento, es $0.01 \leq b \leq 3\ Ns/m$ con un paso de $0.01\ Ns/m$. Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 28. Puede observarse que la región de mayor atracción es la de sincronización en contra fase (color rojo). En cambio la región de sincronización en fase (color amarillo) sólo se presenta cuando las condiciones iniciales son cercanas a fase y el amortiguamiento es menor a $0.8\ Ns/m$.

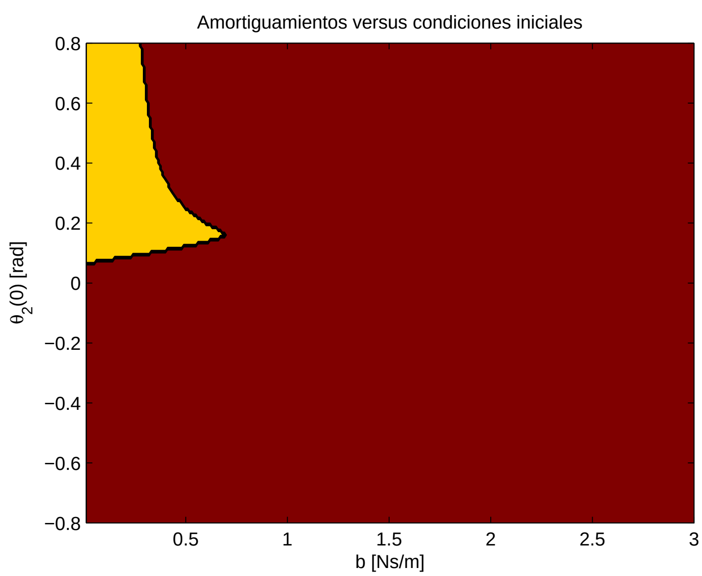
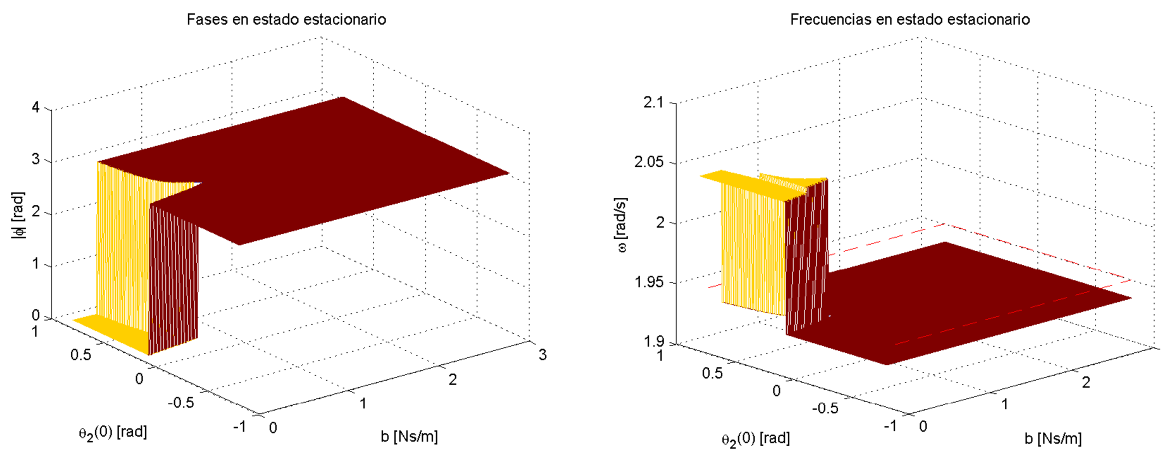


Figura 28: **Resultados del análisis de los amortiguamientos y condiciones iniciales. La región de color amarillo corresponde al régimen de sincronización en fase y el color rojo indica aquél de sincronización en contra fase.**

Como se puede ver en este caso los cambios en el amortiguamiento no tienen efecto sobre la aparición de otros fenómenos, como los observados para los casos de masa y la elasticidad, sino por el contrario, sólo cambia el régimen de sincronización.

Al realizar un estudio sobre el cambio de fase y frecuencia se obtuvieron las gráficas de la Figura 29. En la gráfica de la Figura 29a se pueden apreciar los cambios de fase, donde el eje vertical representa el valor absoluto de la fase de acuerdo al plano $b - \theta_2(0)$, no se consideran los adelantos o atrasos que los osciladores tiene entre ellos. Puede observarse que el desfase entre los osciladores es constante independientemente de los cambios en el amortiguamiento o en las condiciones iniciales.

En cuanto a las frecuencias, se obtuvo la gráfica de la Figura 29b, donde se puede apreciar que al menos para el área de sincronización en fase la frecuencia no es constante. En cambio, en la otra región la frecuencia no se ve afectada por los cambios de $\theta_2(0)$ y del amortiguamiento. Además se puede observar que la frecuencia cuando se está en sincronización en fase es mayor que en el caso de contra fase y se encuentra pos arriba de la frecuencia natural de los osciladores (linea roja).



(a) Fases **(b) Frecuencias**

Figura 29**: Resultados de fases y frecuencias para los cambios de amortiguamientos y condiciones iniciales.**

4.2.5 Frecuencias

En este último apartado se dan a conocer los resultados que se obtuvieron al variar las frecuencias de los osciladores en relación a los cambios en las condiciones iniciales. Para ello, se consideró el caso ideal $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0$ se cambió el valor de la frecuencia en función de la escala, por lo que el rango se basa en la escala y mediante (20) se obtiene el valor de la frecuencia en rad/s. El rango que se empleó fue $50 \leq e \leq 260\ beats/min$, con un paso de $2\ beats/min$, por lo que el rango de frecuencias quedó de la siguiente manera

$$2.61799 \leq \omega_0 \leq 13.61357\ rad/s, \tag{108}$$

En cuanto a las condiciones iniciales de θ_2, se manejó el mismo rango que en los casos anteriores, mientras se mantenía a $\theta_1(0) = 0.1\ rad$.

Los resultados obtenidos se presentan en la Figura 30. Puede observarse que la región de mayor atracción es la de sincronización en contra fase (color rojo). En cambio la región de sincronización en fase (amarillo) sólo se presenta cuando la escala se encuentra arriba de $208\ beats/min$, o $10.89\ rad/s$. En las zonas azules se pueden apreciar fenómenos como los que se reportaron en la parte del estudio de las masas; pero, al no ser objeto de estudio de este trabajo, no se analizan.

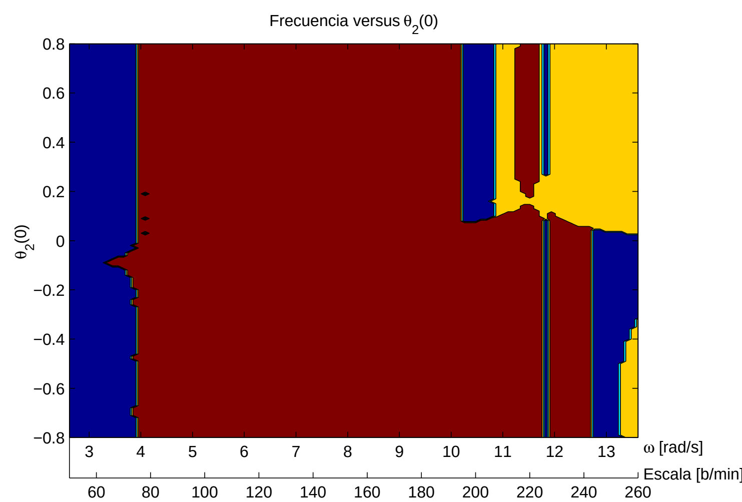
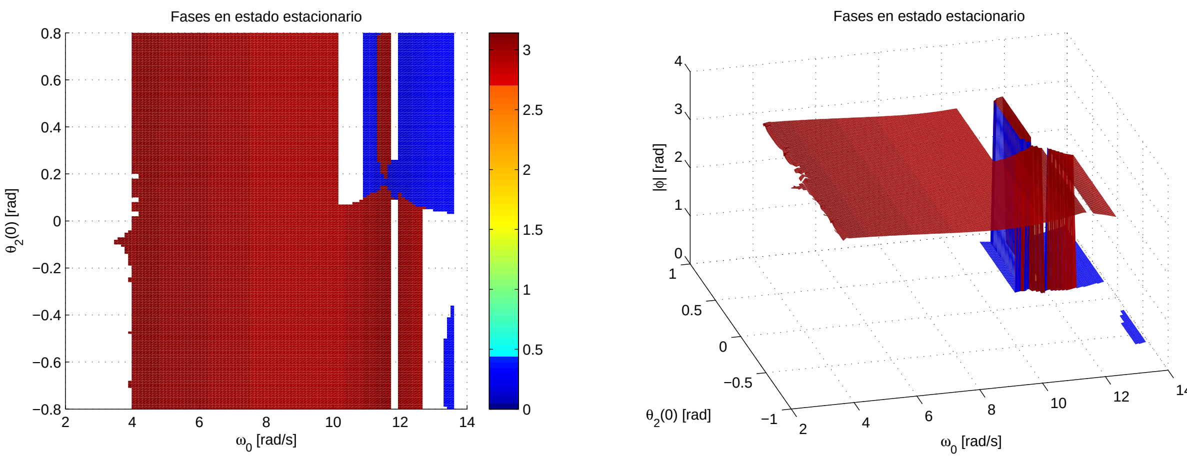


Figura 30**: Resultados del análisis de frecuencias versus condiciones iniciales. La región de color amarillo corresponde al régimen de sincronización en fase, el color rojo indica el régimen de sincronización en contra fase y el color azul corresponde a los valores de elasticidad y condiciones iniciales en los que no se presentó sincronización de acuerdo con las Definiciones 2.3 y 2.4.**

Al igual que en los casos anteriores se realizó un estudio del cambio de fase de acuerdo a las variables y parámetros analizados, en este caso la frecuencia, o escala, y las condiciones iniciales de θ_2. Los resultados se presentan en la Figura 31, donde se puede observar que en ambos regímenes la fase no permanece constante o crece de manera uniforme; sino por el contrario, presenta variaciones con el incremento de la frecuencia natural.

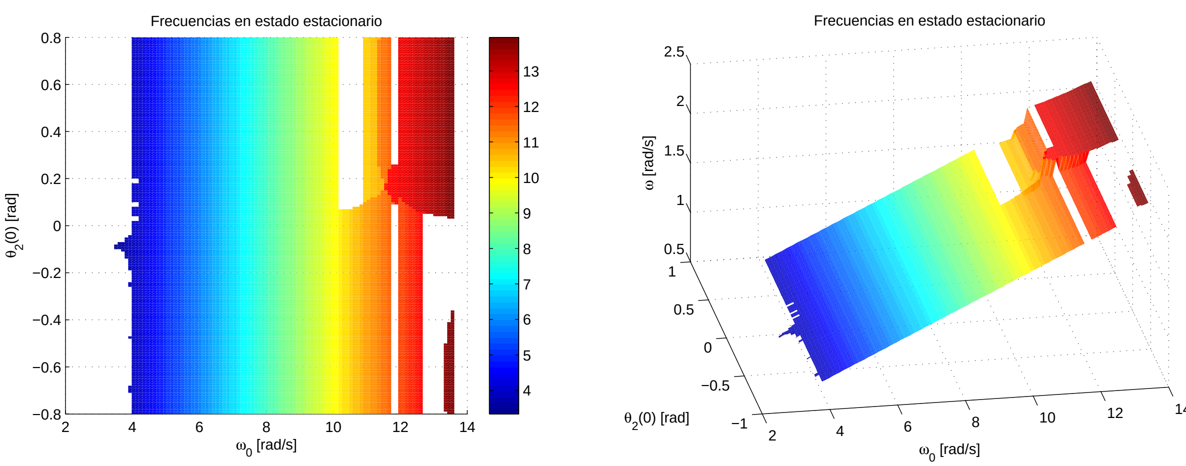
En cuanto a las frecuencias en estado estacionario, los resultados se presentan en la Figura 32. Puede observarse que las frecuencias crecen de manera uniforme conforme se incrementa la frecuencia natural de los osciladores. Sin embargo, para las regiones



(a) Plano $\omega_0 - \theta_2(0)$ **(b) Gráfica en tres dimensiones**

Figura 31**: Cambios de fase para las variaciones de condiciones iniciales y frecuencias naturales.**

de sincronización en fase donde la frecuencia natural de los osciladores está en el rango $10.8908 \leq \omega_0 \leq 11.2050\ rad/s$ la frecuencia en estado estacionario es menor, que los casos de sincronización en contra fase.



(a) Plano $\omega_0 - \theta_2(0)$ **(b) Gráfica en tres dimensiones**

Figura 32**: Frecuencias de sincronización para las variaciones de frecuencias naturales y condiciones iniciales.**

4.3 Conclusiones

De los resultados obtenidos se puede concluir que el método de Poincaré da soluciones al sistema con una gran precisión. Sin embargo, en este caso no fue posible obtener soluciones cuando se trataba de sincronización en fase por las propias características del método. También es posible concluir que las funciones de periodicidad encontradas son las adecuadas para determinar las soluciones del sistema desarrollado en este trabajo a pesar de que no es posible obtener una solución analítica. En cambio, si se conocen los parámetros del sistema es posible obtener las soluciones y estabilidad de las mismas.

En cuanto al análisis numérico, es posible concluir que los parámetros que más influyen en la emergencia o no de los regímenes de sincronización son las masas y las constantes de elasticidad de la estructura, y la frecuencia de los osciladores. Sin embargo, al cambiar el amortiguamiento, éste hace que el régimen de mayor atracción sea contra fase. Es decir, que si se requiere que haya sólo sincronización en contra fase, es necesario aumentar el amortiguamiento. Caso contrario, si lo que se desea es que sólo exista sincronización en fase, entonces es necesario disminuir el amortiguamiento y la elasticidad, y aumentar las masas de la estructura; en cuanto a los osciladores, manejar frecuencias más altas. También es posible concluir que las condiciones iniciales no tienen efecto sobre las variaciones en fase y frecuencia cuando se trata de un mismo régimen de sincronización. Por último, se concluye que la frecuencia en sincronización en fase es mayor que la frecuencia del régimen de contra fase.

Capítulo 5. Análisis de una red de cuatro osciladores

En el capítulo anterior se presentó el estudio para el caso de la sincronización HV de Huygens para dos osciladores, en éste se presenta el caso de una red osciladores con acoplamiento HV de Huygens. El caso de estudio de este capítulo es el de cuatro osciladores, dos por plataforma, ver Figura 33. La razón por la que se estudia esta red, es para encontrar los fenómenos que se puedan dar al incrementar el número de osciladores, de tal forma que no se incremente el número de condiciones iniciales a manejar.

Figura 33: **Red de cuatro osciladores para el sistema HV de Huygens.**

Al igual que en el caso anterior, este capítulo se divide en dos partes. El análisis teórico, donde se realiza el estudio mediante el método de Poincaré para encontrar las soluciones del sistema y determinar la estabilidad de las mismas; y el análisis numérico, para determinar los comportamientos que se puedan dar al variar los parámetros del sistema, así como sus condiciones iniciales.

A diferencia del capítulo anterior, en el análisis numérico se realizaron cambios en la masa en relación a los otros tres parámetros analizados, elasticidad, amortiguamiento y frecuencias naturales. Además, se anexa un estudio sobre las condicione iniciales, donde se analizan cuatro casos.

5.1 Análisis teórico

Las funciones de periodicidad para N péndulos se encuentran dadas por (85), en este capítulo se considera que $N = 4$ y $K = 2$, i. e., el número total de osciladores en el sistema es cuatro y en la plataforma inferior se encuentran dos; por lo tanto, en la plataforma superior se colocan otros dos. Al igual que en el caso de dos osciladores, las soluciones en la forma (89) deben ser reales, ésto implica que $\alpha_{2j} = \alpha_{2j-1}$, para $j = 1, \ldots, N-1$. Al realizar este cambio de variables en (85) se tiene que

$$Q_r(\hat{\alpha}_3) = \begin{cases} -\pi \left\{\alpha_7\alpha_r \left[2\varepsilon - c\left(\alpha_r^2 + \alpha_7^2\right)\right] + i\Psi_r(\tilde{\alpha})\right\}, & r = 1, 3, \\ \pi \left\{\alpha_7\alpha_{r-1} \left[c\left(\alpha_{r-1}^2 - \alpha_7^2\right)\right] + i\Psi_r(\tilde{\alpha})\right\}, & r = 2, 4, \\ -\pi \left\{\alpha_5\alpha_7 \left[2\varepsilon - c\left(\alpha_5^2 + \alpha_7^2\right)\right] + i\Psi_r(\tilde{\alpha})\right\}, & r = 5, \\ \left(\alpha_5 - \alpha_7\right)\pi\left\{\alpha_7\alpha_5 c\left(\alpha_5 + \alpha_7\right) + i\Psi_r(\tilde{\alpha})\right\}, & r = 6, \\ -\pi\alpha_7\left[2\alpha_7\left(\varepsilon - c\alpha_7^2\right) + \Psi_r(\tilde{\alpha})\right], & r = 7, \end{cases} \tag{109}$$

donde $\hat{\alpha}_3 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_7)$ y

$$\Psi_r(\hat{\alpha}_3) = \begin{cases} a\left(\alpha_r\bar{\iota}_3 - \alpha_7\iota_1\right)\sum_{p=1}^{2}\varsigma_{1p} + \left(\alpha_r\bar{\iota}_4 - \alpha_7\iota_2\right)\sum_{n=3}^{4}\varsigma_{1n}, & r = 1, 3, \\ a\left(\alpha_{r-1}\bar{\iota}_3 - \alpha_7\bar{\iota}_1\right)\sum_{p=1}^{2}\varsigma_{1p} + \left(\alpha_{r-1}\bar{\iota}_4 - \alpha_7\bar{\iota}_2\right)\sum_{n=3}^{4}\varsigma_{1n}, & r = 2, 4, \\ a\left(\alpha_5\bar{\iota}_3 - \alpha_7\iota_3\right)\sum_{p=1}^{2}\varsigma_{1p} + \left(\alpha_5\bar{\iota}_4 - \alpha_7\iota_4\right)\sum_{n=3}^{4}\varsigma_{1n}, & r = 5, \\ a\bar{\iota}_3\sum_{p=1}^{2}\varsigma_{1p} + \bar{\iota}_4\sum_{n=3}^{4}\varsigma_{1n}, & r = 6, \\ a\iota_6\sum_{p=1}^{2}\varsigma_{1p} + \iota_5\sum_{n=3}^{4}\varsigma_{1n}, & r = 7, \end{cases} \tag{110}$$

En (109) existe una solución en fase para Q_6, la cual está dada por

$$\alpha_5 = \alpha_7, \tag{111}$$

ésto quiere decir que los osciladores de la plataforma superior están en fase. Al tomar en cuenta esta solución se tiene que

$$Q_r(\hat{\alpha}_3) = \begin{cases} -\pi \left\{\alpha_7\alpha_r \left[2\varepsilon - c\left(\alpha_r^2 + \alpha_7^2\right)\right] + i\Psi_r(\tilde{\alpha})\right\}, & r = 1, 3, \\ \pi \left\{\alpha_7\alpha_{r-1} \left[c\left(\alpha_{r-1}^2 - \alpha_7^2\right)\right] + i\Psi_r(\tilde{\alpha})\right\}, & r = 2, 4, \\ -\pi\alpha_7\left[2\alpha_7\left(\varepsilon - c\alpha_7^2\right) + \Psi_r(\tilde{\alpha})\right], & r = 5, 7, \\ 0, & r = 6, \end{cases} \tag{112}$$

donde

$$\Psi_r(\hat{\alpha}_3) = \begin{cases} a\left(\alpha_r\bar{\iota}_3 - \alpha_7\iota_1\right)\sum_{p=1}^{2}\varsigma_{1n} + 2\left(\alpha_r\bar{\iota}_4 - \alpha_7\iota_2\right)\alpha_7\left(1+\alpha_7^2\right), & r = 1,3, \\ a\left(\alpha_{r-1}\bar{\iota}_3 - \alpha_7\bar{\iota}_1\right)\sum_{p=1}^{2}\varsigma_{1p} + 2\left(\alpha_{r-1}\bar{\iota}_4 - \alpha_7\bar{\iota}_2\right)\alpha_7\left(1+\alpha_7^2\right), & r = 2,4, \\ a\iota_6\sum_{p=1}^{2}\varsigma_{1p} + 2\iota_5\alpha_7\left(1+\alpha_7^2\right), & r = 5,7. \end{cases} \tag{113}$$

Anteriormente se definió $\rho = N - K$, esta definición se mantiene. Puede observarse que el sistema de ecuaciones que se obtuvo es parecido a (95), con la diferencia de que aquí existen $2K$ funciones periódicas para los osciladores de la plataforma inferior.

Puesto que en la plataforma superior una de las soluciones se encuentra en sincronización en fase, se asume que en los osciladores de la plataforma inferior también existe dicha solución, por lo que

$$\alpha_3 = \alpha_1, \tag{114}$$

de esta forma (112) queda ahora dada por

$$Q_r(\hat{\alpha}_3) = \begin{cases} -\pi\left\{\alpha_7\alpha_1\left[2\varepsilon - c\left(\alpha_1^2+\alpha_7^2\right)\right] + i2\Psi_r(\tilde{\alpha})\right\}, & r = 1,3, \\ \pi\left\{\alpha_7\alpha_1\left[c\left(\alpha_1^2-\alpha_7^2\right)\right] + i2\Psi_r(\tilde{\alpha})\right\}, & r = 2,4, \\ -2\pi\alpha_7\left[\alpha_7\left(\varepsilon - c\alpha_7^2\right) + \Psi_r(\tilde{\alpha})\right], & r = 5,7, \\ 0, & r = 6, \end{cases} \tag{115}$$

donde

$$\Psi_r(\hat{\alpha}_3) = \begin{cases} a\alpha_1\left(\alpha_1\bar{\iota}_3 - \alpha_7\iota_1\right)\left(1+\alpha_1^2\right) + \left(\alpha_1\bar{\iota}_4 - \alpha_7\iota_2\right)\alpha_7\left(1+\alpha_7^2\right), & r = 1,3, \\ a\alpha_1\left(\alpha_1\bar{\iota}_3 - \alpha_7\bar{\iota}_1\right)\left(1+\alpha_1^2\right) + \left(\alpha_1\bar{\iota}_4 - \alpha_7\bar{\iota}_2\right)\alpha_7\left(1+\alpha_7^2\right), & r = 2,4, \\ a\alpha_1\iota_6\left(1+\alpha_1^2\right) + \iota_5\alpha_7\left(1+\alpha_7^2\right), & r = 5,7, \end{cases} \tag{116}$$

Puede observarse que la forma de (112) es igual a la de (95), por lo cual en este caso tampoco es posible encontrar una solución analítica para determinar los parámetros bajo los cuales se van a sincronizar los osciladores. En cambio, sí se puede determinar la solución para dicho sistema, siempre y cuando se tenga conocimiento de los parámetros del mismo.

Al igual que en el caso de dos osciladores, aquí también se propone un cambio de variables tomando en cuenta las observaciones realizadas. El cambio de variables es como sigue

$$\begin{aligned} \alpha_{2j-1} = \upsilon\alpha_{2N-1}e^{i\phi}, \quad \alpha_{2j} = \upsilon\alpha_{2N-1}e^{-i\phi}, \quad j=1,2, \\ \alpha_{2j-1} = \alpha_{2j} = \alpha_{2N-1}, \quad j=3,4, \end{aligned} \tag{117}$$

donde $\upsilon \in \mathbb{R}^+$ y $r, \phi \in \mathbb{R}$.

Al sustituir (117) en (85), se obtiene que

$$Q_r(\hat{\alpha}_4) = \begin{cases} -\pi\alpha_7^2\left\{\upsilon e^{i\phi}\left[2\varepsilon - c\alpha_7^2(\upsilon^2+1)\right] + i2\Psi_r\right\}, & r=1,3, \\ \pi\alpha_7^2\left\{c\upsilon e^{-i\phi}(\upsilon^2-1) + i2\Psi_r\right\}, & r=2,4, \\ -2\pi\alpha_7^2\left\{\left[\varepsilon - c\alpha_7^2 + 2\iota_5\left(1+\alpha_7^2\right)\right] + i\Psi_r\right\}, & r=5,7, \\ 0, & r=6, \end{cases} \tag{118}$$

donde $\hat{\alpha}_4 = (\alpha_1, \bar{\alpha}_1, \alpha_3, \bar{\alpha}_3, \alpha_7, \alpha_7, \alpha_7)$ y

$$\Psi_r(\hat{\alpha}_4) = \begin{cases} a\upsilon e^{i\phi}\left(\bar{\iota}_3\upsilon e^{-i\phi} - \iota_1\right)(1+\upsilon^2\alpha_7^2) + \left(\bar{\iota}_4\upsilon e^{i\phi} - \iota_2\right)(1+\alpha_7^2), & r=1,3, \\ a\upsilon e^{-i\phi}\left(\bar{\iota}_3\upsilon e^{-i\phi} - \bar{\iota}_1\right)(1+\upsilon^2\alpha_7^2) + \left(\bar{\iota}_4\upsilon e^{-i\phi} - \bar{\iota}_2\right)(1+\alpha_7^2), & r=2,4, \\ a\upsilon\left(\bar{\iota}_3 e^{-i\phi} - \iota_3 e^{i\phi}\right)(1+\upsilon^2\alpha_7^2), & r=5,7, \end{cases} \tag{119}$$

Despejando α_7 de $Q_7(\tilde{\alpha})$ en (118), se encuentran cuatro raíces de las cuales dos son iguales a cero y las otras dos están dadas por

$$\alpha_7 = \pm\sqrt{\frac{(\varepsilon + 2\iota_5) - ia\upsilon\left(\iota_3 e^{i\phi} - \bar{\iota}_3 e^{-i\phi}\right)}{(c - 2\iota_5) + ia\upsilon^3\left(\iota_3 e^{i\phi} - \bar{\iota}_3 e^{-i\phi}\right)}}. \tag{120}$$

Al igual que en el caso de dos osciladores, el sistema (118) se resolvió como un problema de optimización con los mismos métodos y con las mismas restricciones, pero, para cuatro funciones de periodicidad, i. e.,

- $|Q_r| < \epsilon$ $(i = 1, 2, 3, 4)$,

- $\alpha_7 \in \mathbb{R}$,

donde $\epsilon \in \mathbb{R} > 0$ corresponde a un error.

Al igual que en el caso de dos osciladores las soluciones se obtuvieron con los métodos de la cuadrícula y del simplex (Rao, 1994), con un valor de $\epsilon = 1 \times 10^{-15}$. Para los valores de la Tabla 1, página 61, se obtuvieron los resultados que se presentan en la Tabla 10. Puede observarse que los valores de υ y ϕ son muy similares a los que se obtuvieron para el caso de dos osciladores.

Tabla 10: **Soluciones del sistema (118)**

υ	ϕ (rad)	α_7 (rad)	Tipo de sincronización
1.58494	3.10366	0.11298	Contra fase
0.6171	-0.02476	0.1427	Fase

Al sustituir los valores de la Tabla 10 en (117) se tienen los valores de α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ y los cuales se presentan en la Tabla 11.

Tabla 11: **Resultados de α_i $(i = 1, \ldots, 7)$ para cuatro péndulos.**

Variable	Contra Fase	Fase
α_i $(i = 1, 3)$	$0.17907e^{i3.10366}$	$0.08806e^{-i0.02476}$
α_i $(i = 2, 4)$	$0.17907e^{-i3.10366}$	$0.08806e^{i0.02476}$
α_i $(i = 5, 6, 7)$	0.11298	0.1427

En cuanto a la estabilidad de dichas soluciones, se determina al analizar la parte real de cada raíz de la ecuación característica que se obtiene con (10). Como bien se sabe, cada una debe ser negativa para considerar que las soluciones son estables.

Para el caso de la soluciones de sincronización en contra fase la ecuación característica es la siguiente

$$p(\chi) = a_{c7}\chi^7 + a_{c6}\chi^6 + a_{c5}\chi^5 + a_{c4}\chi^4 + a_{c3}\chi^3 + a_{c2}\chi^2 + a_{c1}\chi + a_{c0}, \tag{121}$$

donde $a_{c7} = 2.116$, $a_{c6} = 5.429 + i6.062$, $a_{c5} = 164.236 + i12.632$, $a_{c4} = 309.325 + i18.715$, $a_{c3} = 244.847 + i8.1$, $a_{c2} = 124.551 - i3.799$, $a_{c1} = 48.43 - i4.181$ y $a_{c0} = 11.372 - i0.836$; y sus raíces se encuentran dadas por

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= 0.239 + i4.828, \\
\chi_2 &= -0.457 - i4.762, \\
\chi_3 &= -2.924 + i72.503, \\
\chi_4 &= -3.373 - i100.26, \\
\chi_5 &= -8.266 - i53.9, \\
\chi_6 &= -5.249 - i2.693, \\
\chi_7 &= -5.249 + i2.693,
\end{aligned} \tag{122}$$

puede observarse que las soluciones obtenidas no son estables, ya que la parte real de una de ellas es positiva.

En cuanto a la ecuación característica que se obtiene para el caso de sincronización en fase, se tiene que está dada por

$$p(\chi) = a_{f7}\chi^7 - a_{f6}\chi^6 + a_{f5}\chi^5 - a_{f4}\chi^4 + a_{f3}\chi^3 - a_{f2}\chi^2 + a_{f1}\chi - a_{f0}, \tag{123}$$

donde $a_{f7} = 0.34$, $a_{f6} = 0.55 + i1.6$, $a_{f5} = 156.95 - i0.9$, $a_{f4} = 231.9 + i740.45$, $a_{f3} = 24099.96 - i281.4$, $a_{f2} = 32354.8 + i113164.4$, $a_{f1} = 1231500.9 - 22607.1$ y $a_{f0} = 1503338.5 + i5749347.2$; y sus raíces son

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= 0.66648 + i70.617029, \\
\chi_2 &= -0.2074 - i71.17697, \\
\chi_3 &= -2.63357 + i76.24431, \\
\chi_4 &= -4.341587 - i75.78339, \\
\chi_5 &= -6.35906 - i28.34345, \\
\chi_6 &= 1.56311 - i76.35461, \\
\chi_7 &= 1.56311 + i76.35461,
\end{aligned} \tag{124}$$

puede observarse que, al igual que en el caso de contra fase, las soluciones no son estables.

El tiempo de corrección y el periodo se obtienen con (11) y (88). Los resultados para los dos regímenes se presentan en la Tabla 12.

Tabla 12**: Resultados de los periodos para dos péndulos.**

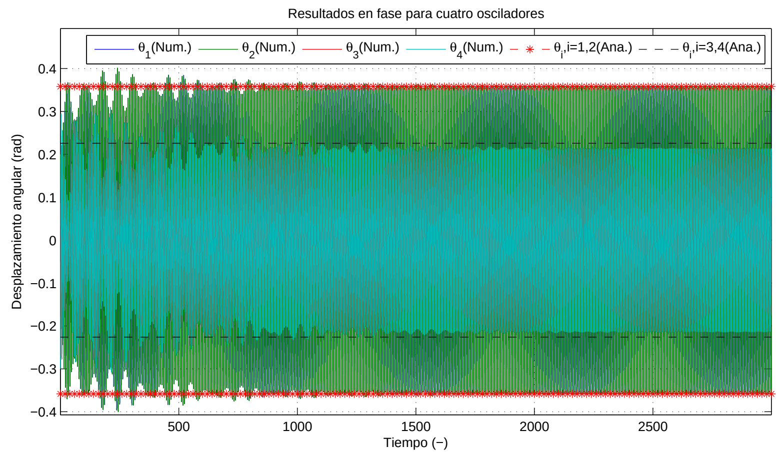
Variable	Contra Fase	Fase
$\tau_c(\mu_2)$ $(-)$	0.02412	-1.49895
$\tilde{T}$ $(-)$	6.30731	4.78423

5.1.1 Comprobación de los resultados obtenidos

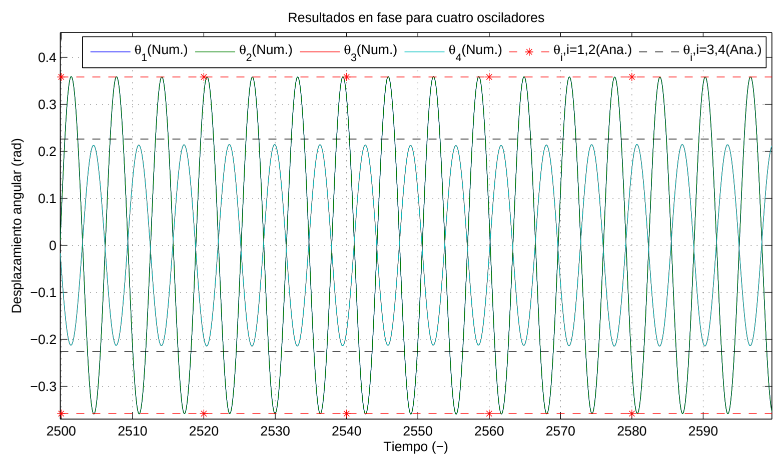
Al igual que en el capítulo anterior, los resultados obtenidos de manera teórica se compararon con aquellos que se obtuvieron de manera numérica mediante el empleo de la función `ode45` de Matlab. El modelo empleado también fue el sistema (39) y las simulaciones se realizaron para un tiempo de 3000 seg. en el sistema adimensional, el cual corresponde a aproximadamente 245 seg. en el sistema dimensional. Además, en las simulaciones realizadas para la comprobación de los resultados analíticos, los valore iniciales de $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$, x_1, x_2, $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ son iguales a cero.

Los resultados obtenidos de la simulación para condiciones iniciales $\theta_1(0) = 0.2\ rad$, $\theta_2(0) = 0.2\ rad$, $\theta_3(0) = -0.3\ rad$ y $\theta_4(0) = -0.3\ rad$ se presentan en la Figura 34, donde las líneas indican las amplitudes encontradas con el método de Poincaré para los osciladores de la plataforma inferior (color rojo) y de aquéllos de la plataforma superior (color negro). Puede observarse que el tiempo en el que alcanzan el estado estacionario es poco menos de 2000 seg. en el sistema adimensional, lo cual corresponde a 163 seg. en el sistema dimensional, aproximadamente. Además, la amplitudes calculadas, tanto de manera analítica como numérica, son muy similares.

En la Tabla 13 se pueden apreciar los errores que se obtuvieron al comparar los resultados analíticos y numéricos. Puede observarse que todos los errores son menores al limite aceptable de error (10%), por lo que se puede decir que los resultados obtenidos mediante el método de Poincaré son confiables y es posible predecir las soluciones para sincronización en contra fase en una red de metrónomos en el sistema HV de Huygens.



(a) Serie de tiempo



(b) Acercamiento

Figura 34**: Resultados para sincronización en contra fase para cuatro osciladores. En este caso la señal de θ_1 se encuentra debajo de la señal de θ_2, y para el caso de θ_3, se encuentra debajo de θ_4.**

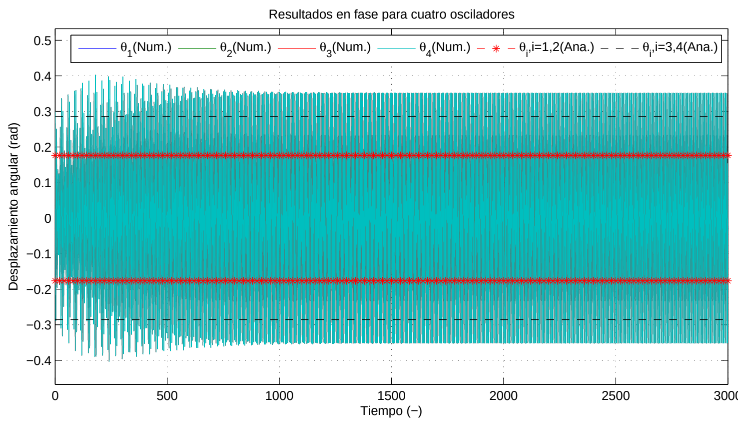
También se puede apreciar que el error en la amplitud de los osciladores de la plataforma superior es mayor que en el resto de las variables, al igual que en el caso de dos osciladores.

Tabla 13**: Comparación de los resultados analíticos y numéricos para sincronización en contra fase.**

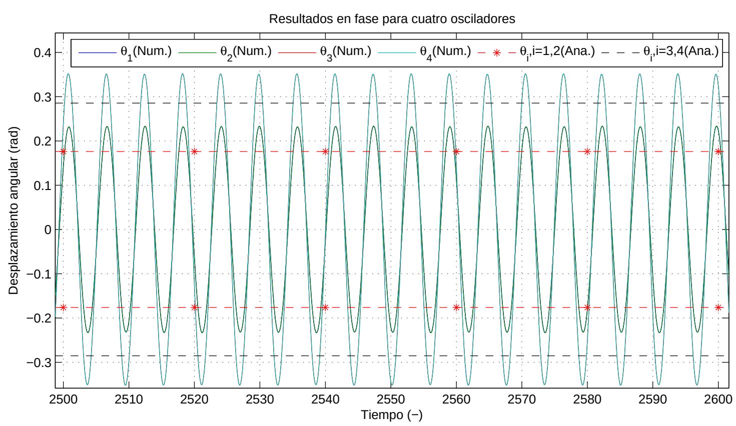
Variable	Método analítico	Método numérico	Error($\%$)
Periodo $\tilde{T}\ (-)$	6.30731	6.25031	0.91
Fase $\phi\ (rad)$	3.10366	3.19397	2.83
Amplitud $\theta_i,\ i = 1, 2,\ (rad)$	0.35813	0.35897	0.23
Amplitud $\theta_2\ i = 3, 4,\ (rad)$	0.22596	0.21422	5.48

En cuanto a los resultados obtenidos de la simulación para las condiciones iniciales $\theta_1(0) = 0.2\ rad$, $\theta_2(0) = 0.2\ rad$, $\theta_3(0) = 0.3\ rad$ y $\theta_4(0) = 0.3\ rad$ se presentan en la

Figura 35. Puede observarse que existe un error entre las amplitudes que se obtuvieron de manera analítica, líneas de color rojo y negro, y aquéllas que se obtuvieron de manera numérica. Dicho error es mayor que en el caso de dos osciladores. Además, el tiempo en el que alcanzan el estado estacionario es de aproximadamente 1000 seg. (122.4 seg. en el sistema dimensional).



(a) Serie de tiempo



(b) Acercamiento

Figura 35**: Resultados para sincronización en fase para cuatro osciladores.**

En la Tabla 14 se presentan los errores relativos al método numérico. Puede observarse que en este caso los errores en todos los parámetros son mayores al error aceptable (10%), por lo que el método deja de tener confiabilidad a la hora de predecir las soluciones cuando se trata de sincronización en fase.

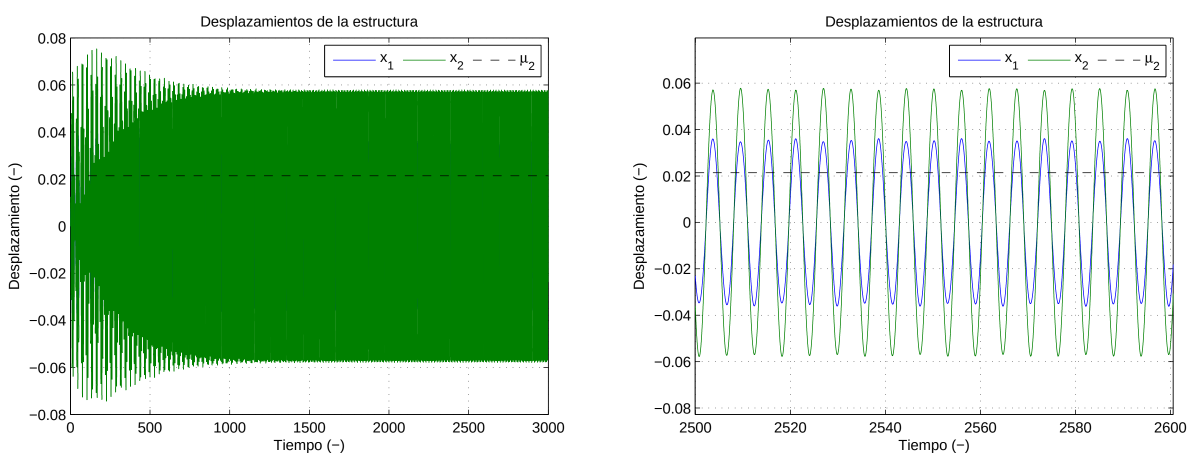
Puede observarse que los resultados obtenidos para dos osciladores son similares a aquéllos que se obtuvieron para cuatro. Sin embargo, para el caso de sincronización en

Tabla 14**: Comparación de los resultados analíticos y numéricos para sincronización en fase.**

Variable	Método analítico	Método numérico	Error(%)
Periodo $\tilde{T}$ $(-)$	4.78423	5.88265	18.67
Fase ϕ (rad)	-0.02476	-0.09371	73.57
Amplitud $\theta_i,\ i=1,2,\ (rad)$	0.17612	0.23344	24.56
Amplitud θ_2 $i=3,4,\ (rad)$	0.2854	0.35184	18.88

fase, los errores entre los métodos de análisis crecen con este número de osciladores.

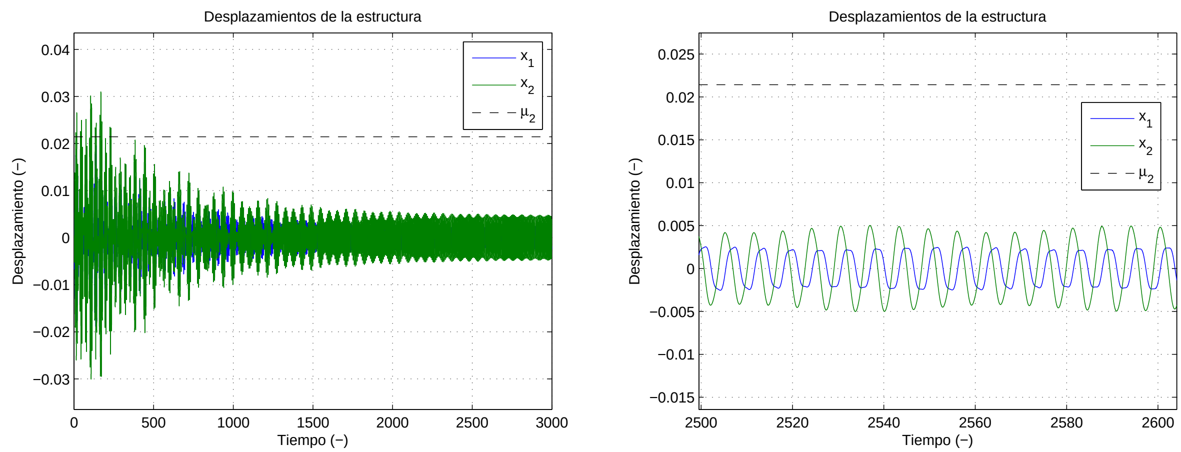
Al graficar el desplazamiento de las plataformas para las condiciones iniciales analizadas anteriormente, se obtienen los resultados de las Figuras 37 y 36. Puede observarse que para el caso de sincronización en fase, Figura 36, el orden de los desplazamientos es mayor que aquél del parámetro pequeño (μ_2) -línea de color negro-. Además, las oscilaciones de la estructura son mayores que para el caso de dos osciladores para el mismo régimen. En cambio, para el caso de sincronización en contra fase, ver Figura 37, las oscilaciones de la estructura se mantienen iguales a las del estudio de dos osciladores.



(a) serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 36**: Desplazamientos de la estructura para sincronización en fase.**

Con lo anterior, es posible concluir que el método de Poincaré sólo permite obtener soluciones confiables para sincronización en contra fase, para el sistema HV de Huygens. Lo anterior se debe a que al presentarse este régimen, las oscilaciones de la estructura crecen de acuerdo con el número de osciladores, y por lo tanto, el error al aplicar el método de Poincaré. Cabe mencionar que al igual que en caso anterior los términos



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 37**: Desplazamientos de la estructura cuando se tiene sincronización en contra fase.**

mayores o iguales a segundo grado, en el parámetro pequeño, se desprecian; lo cual también, es una causa de dicho error.

5.1.2 Comparación entre los resultados de la red y el caso de dos osciladores

Después de realizar los estudios analíticos para cuatro osciladores, así como aquéllos numéricos, se puede realizar una comparación entre los resultados obtenidos en este capítulo y sus homólogos en el estudio para dos. En relación a los resultados analíticos, en la Tabla 15 se presentan éstos. Puede observarse que en la región de sincronización en contra fase los resultados son muy parecidos, a excepción de la estabilidad. Lo anterior quiere decir que al cambiar de dos a cuatro osciladores, para los mismos parámetros, la solución se vuelve inestable, de acuerdo con el estudio analítico. En cuanto al régimen de sincronización en fase, puede apreciarse que, al igual que en el caso anterior, al realizar dicho cambio el régimen se vuelve inestable. Además, las variables que componen a la solución (amplitud, fase y periodo) se reducen al cambiar de dos a cuatro osciladores. Para poder determinar si sucede lo mismo independientemente del número de osciladores, es necesario realizar un estudió analítico de la misma forma pero con más osciladores.

En cuanto a los resultados numéricos obtenidos de la comparación con los analíticos en cada configuración, se tiene que, al igual que en el caso anterior, las variables (amplitud, periodo y fase) de las soluciones obtenidas se reducen al incrementar el número de

Tabla 15: **Comparación de los resultados analíticos para dos y cuatro osciladores.**

Régimen	Variable	Método analítico	
		Dos osciladores	Cuatro osciladores
Fase	Fase (rad)	-0.06356	-0.02476
	Periodo $(-)$	5.46166	4.78423
	Amp. osc. plat. inf. (rad)	0.21326	0.17612
	Amp. osc. plat. sup. (rad)	0.32368	0.2854
	Estabilidad	Estable	Inestable
Contra Fase	Fase (rad)	3.06562	3.10366
	Periodo $(-)$	6.2264	6.30731
	Amp. osc. plat. inf. (rad)	0.35818	0.35813
	Amp. osc. plat. sup. (rad)	0.22594	0.22596
	Estabilidad	Estable	Inestable

osciladores, de dos a cuatro, cuando se trata de sincronización en fase. En cambio, para las soluciones en contra fase, la diferencia en dichas variables no es muy grande. Ésto se puede observar en la Tabla 16.

Tabla 16: **Comparación de los resultados numéricos para dos y cuatro osciladores.**

Régimen	Variable	Método numérico	
		Dos osciladores	Cuatro osciladores
Fase	Fase (rad)	-0.14434	-0.09371
	Periodo $(-)$	6.06091	5.88265
	Amp. osc. plat. inf. (rad)	0.23879	0.23344
	Amp. osc. plat. sup. (rad)	0.35211	0.35184
Contra Fase	Fase (rad)	3.05135	3.19397
	Periodo $(-)$	6.25031	6.25031
	Amp. osc. plat. inf. (rad)	0.35817	0.35897
	Amp. osc. plat. sup. (rad)	0.2088	0.2142

5.2 Análisis numérico

En la sección anterior se presentó el análisis teórico que se desarrolló para encontrar las soluciones para una red de cuatro osciladores con acoplamiento HV de Huygens. En este apartado, al igual que en su homólogo en el capítulo anterior, se presentan los resultados numéricos que se obtuvieron al realizar las respectivas simulaciones para los diferentes casos de estudio.

En este caso se aplicaron las cuatro definiciones de la sección 2.2, donde $\epsilon_{fp} = \epsilon_{cp} = 0$, para los osciladores de una misma plataforma, y $\epsilon_{fg} = \epsilon_{fg} = 0.4$ para los grupos de osciladores. Lo anterior quiere decir que por cada grupo, o par de osciladores sobre la misma plataforma, se encontraron ambos regímenes de sincronización y, posteriormente, se determinó el tipo de sincronización entre los dos grupos. Para ello, se consideró el caso ideal, i. e., $M_1 = M_2 = M$, $k_1 = k_2 = k$, $b_1 = b_2 = b$ y $\omega_i^0 = \omega$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Los casos de estudio se enumeran de la siguiente manera:

1. Condiciones iniciales.
2. Masas contra elasticidad.
3. Masas contra amortiguamiento.
4. Masas contra frecuencias.

A diferencia del análisis numérico para dos osciladores, en éste las condiciones iniciales de las desplazamientos angulares son constantes de acuerdo con la Tabla 17.

Tabla 17: **Posiciones iniciales para cuatro péndulos.**

Condición inicial	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
En fase	0.25	0.3	0.2	0.15
Contra fase	0.25	-0.3	-0.2	0.15

De los últimos tres casos de estudio, se puede entender que al cambiar las masas de la estructura se cambian las fuerzas de acoplamiento de los osciladores; en particular al incrementar M se reducen las fuerzas de acoplamiento.

Cabe mencionar que, al igual que en el análisis numérico para dos osciladores, los valores que se mantuvieron constantes se consideraron de acuerdo con la Tabla 1, página 61. Para realizar las simulaciones se usó el sistema (36) con un tiempo de simulación de 1200 seg. También, se empleó la función `ode45` de Matlab para resolver de manera numérica el sistema empleado, y el estudio de fases y frecuencias se realizó a los últimos 200 seg. mediante la transformada de Fourier. Además, las condiciones iniciales de la estructura y de las velocidades angulares se igualaron a cero.

5.2.1 Condiciones iniciales

Como se mencionó al principio de esta sección, para el caso de condiciones iniciales se manejaron cuatro casos, en los cuales dos de ellas permanecían constantes, mientras las otras dos se variaban dentro del mismo rango que se empleó para dos osciladores y el cual se retoma en esta sección

$$-0.8 \leq \theta_i(0) \leq 0.8 \, rad, \tag{125}$$

donde el subíndice i cambia de acuerdo a los osciladores cuyas condiciones iniciales no eran constantes. Los cuatro casos estudiados se presentan a continuación:

1. Primer caso. Los valores del primer oscilador de cada plataforma se mantuvieron constantes y cercanos a fase, i. e., $\theta_1(0) = 0.1 \, rad$ y $\theta_3(0) = 0.2 \, rad$; en cuanto a las otras dos, se manejó el rango de (125) para $i = 2, 4$.

2. Segundo caso. Los valores del primer oscilador de cada plataforma se mantuvieron constantes y cercanos a contra fase, i. e., $\theta_1(0) = -0.1 \, rad$ y $\theta_3(0) = 0.2 \, rad$; en cuanto a las otras dos, se manejó el rango de (125) para $i = 2, 4.$.

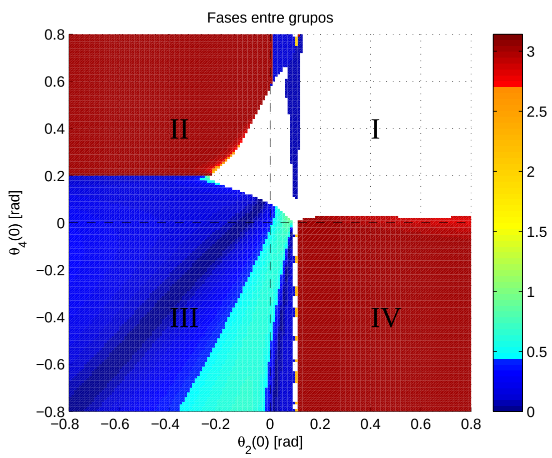
3. Tercer caso. Los osciladores de la plataforma inferior se dejaron en condiciones iniciales en cero, i. e., $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0 \, rad$; en cuanto a los otras dos, se manejó el rango de (125) para $i = 3, 4$.

4. Cuarto caso. Se trató de manera similar al caso anterior, con la diferencia de que los osciladores de la plataforma superior se dejaron en condiciones iniciales en cero, i. e., $\theta_3(0) = \theta_4(0) = 0 \, rad$; en cuanto a los otras dos, se manejó el rango de (125) para $i = 1, 2$.

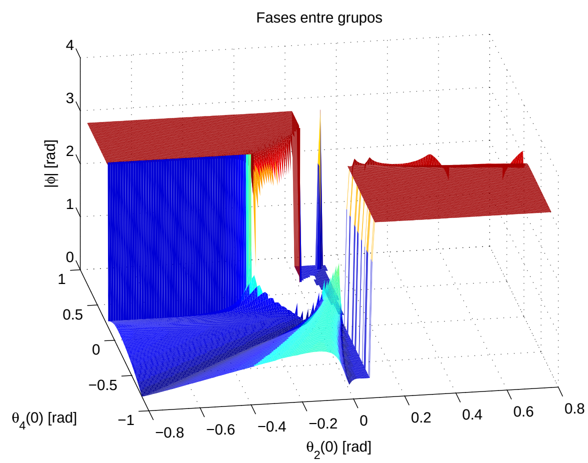
5.2.1.1 Primer caso

Los resultados obtenidos para el primer caso se muestran en la Figura 38a, donde se presentan los cambios en la fase. Puede observarse que el régimen que predomina entre los grupos es el de sincronización en contra fase, tonalidades del color rojo. En cambio, la región de sincronización en fase, tonalidades del color azul, ocupa la segunda región existente en el sistema. Las zonas que van desde el color cian hasta el anaranjado, corresponde a las regiones en las que la fase permanece constante pero que no cumplen con las Definiciones 2.3 y 2.4. En cuanto al color blanco, corresponde a las regiones en las que la fase o la amplitud no son constantes. Puede observarse que para un mismo régimen, la fase suele cambiar de acuerdo con las condiciones iniciales y la misma se encuentra dentro del rango en el que se define sincronización, $0 < |\phi| \leq 0.4\, rad$ para fase y $\pi - 0.4 \leq |\phi| < \pi\, rad$.

En la Figura 38b se puede apreciar una vista en tres dimensiones de la Figura 38a, la cual presenta un mayor detalle de los cambios en la fase, principalmente en la zona de color cian.



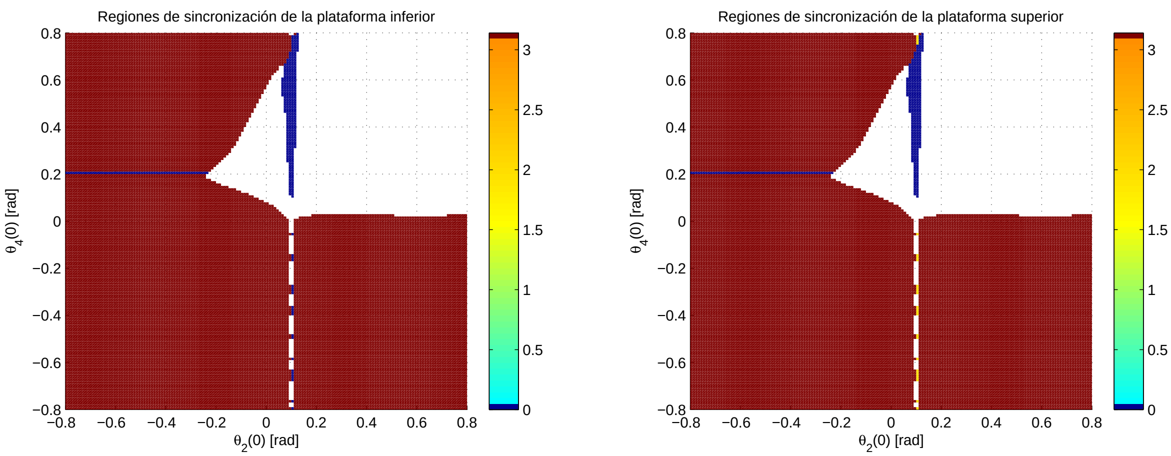
(a) Vista del plano $\theta_2(0) - \theta_4(0)$



(b) Vista en tres dimensiones

Figura 38: **Regiones de sincronización entre los grupos de osciladores cuando $\theta_1(0) = 0.1\ rad$ y $\theta_3(0) = 0.2\ rad$ con variaciones en $\theta_2(0)$ y $\theta_4(0)$. Las tonalidades del color azul representan sincronización en fase ($0 \leq |\phi| \leq 0.4\ rad$). En relación a aquéllas que corresponden al color rojo, se refieren a sincronización en contra fase ($\pi - 0.4 \leq |\phi| \leq \pi\ rad$). En cuanto a las zonas que van desde el color cian hasta el color anaranjado corresponde a zonas en las que la fase y la amplitud permanecen constante pero no cumplen con las Definiciones 2.3 y 2.4.**

Al estudiar los regímenes de sincronización de cada grupo se tienen los resultados de la Figura 38. En la Figura 38a se pueden apreciar las regiones de sincronización del grupo de osciladores de la plataforma inferior. En cuanto a las regiones correspondientes a los osciladores de la plataforma superior se presentan en la Figura 38b. Puede observarse que, en ambos casos, la región de sincronización en contra fase (color rojo) es mayor que la región de sincronización en fase (color azul).



(a) Plataforma inferior **(b) Plataforma superior**

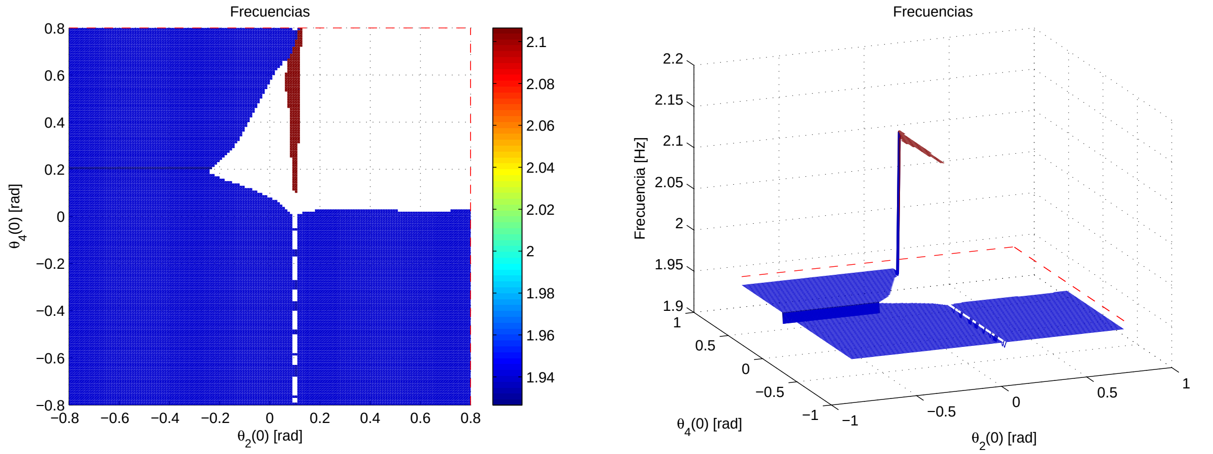
Figura 39: **Regiones de sincronización para cada grupo de osciladores cuando $\theta_1(0) = 0.1\ rad$ y $\theta_3(0) = 0.2\ rad$ con variaciones en $\theta_2(0)$ y $\theta_4(0)$. El color rojo representa sincornización en contra fase ($|\phi| = \pi\ rad$), el color azul representa sincronización en fase ($|\phi| = 0\ rad$), el color blanco las regiones en las que la amplitud o la fase no son constates, y los demás colores, de acuerdo con las barras de niveles, representan las regiones en las que $|\phi| \neq 0\ rad$ o $|\phi| \neq \pi\ rad$, pero permanece constante.**

Al analizar las Figuras 38a y 39, se puede observar que la sincronización en contra fase predomina, tanto en el análisis para los grupos de osciladores como en el análisis para los osciladores de una misma plataforma.

En cuanto a las frecuencias, los resultados obtenidos se presentan en la Figura 40. Puede observarse que en las regiones en las que el régimen de sincronización es en contra fase, la frecuencia que alcanzan los osciladores en estado estacionario es menor que la frecuencia natural de los mismos, contrario al caso de sincronización en fase.

5.2.1.2 Segundo caso

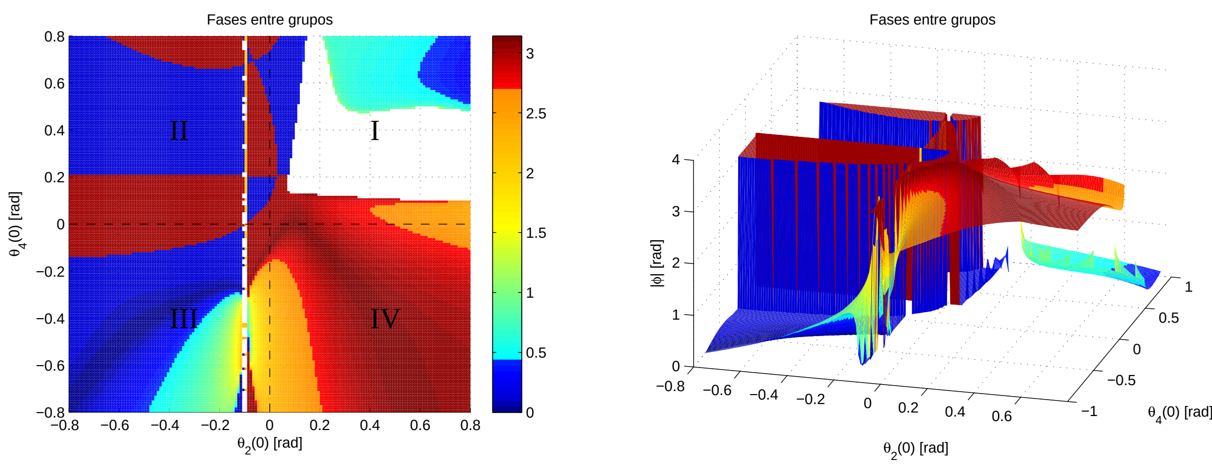
Como se mencionó anteriormente el segundo caso se trata cuando $\theta_1(0) = -0.1$ y $\theta_3(0) = 0.2$ mientras que las condiciones iniciales de θ_2 y θ_4 se varían de acuerdo con (125) para $i = 2, 4$. Los resultados obtenidos sobre las regiones de sincronización entre los grupos de osciladores se presentan en la Figura 41. Puede observarse que la sincronización en contra fase (niveles de color rojo) predomina más que la sincronización en fase (niveles de color azul). También se puede ver que existen regiones donde no se cumplen las definiciones de sincronización pero el desfase entre los osciladores se mantiene constante, dichas regiones van desde el color cian hasta el anaranjado. En



(a) Plano $\theta_2(0) - \theta_4(0)$ **(b) vista en tres dimensiones**

Figura 40**: Resultados de frecuencias para $\theta_1(0) = 0.1\ rad$, $\theta_3(0) = 0.2\ rad$ y cambios en $\theta_2(0)$ y $\theta_4(0)$.**

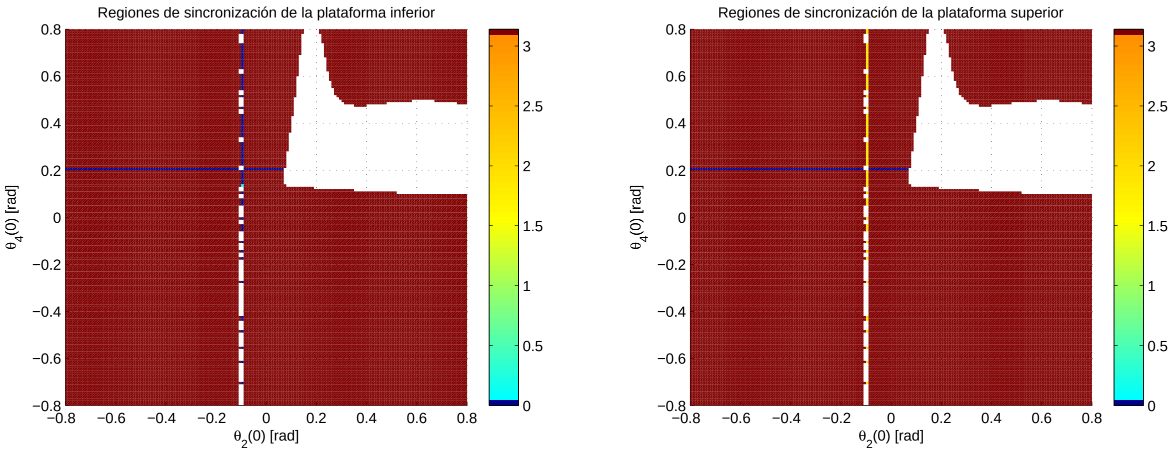
cuanto a la Figura 41b es una representación en tres dimensiones del comportamiento de la fase en estado estacionario. Puede observarse que las regiones de sincronización en contra fase que se encuentra en el cuadrante IV tienden a variar más de acuerdo con las condiciones iniciales que aquellas zonas que comprenden sincronización en fase.



(a) Plano $\theta_2(0) - \theta_4(0)$ **(b) Vista en tres dimensiones**

Figura 41**: Regiones de sincronización entre los grupos de osciladores cuando $\theta_1(0) = -0.1\ rad$ y $\theta_3(0) = 0.2\ rad$ con variaciones en $\theta_2(0)$ y $\theta_4(0)$. Las tonalidades del color azul representan sincronización en fase ($0 \leq |\phi| \leq 0.4\ rad$). En relación a aquéllas que corresponden al color rojo, se refieren a sincronización en contra fase ($\pi - 0.4 \leq |\phi| \leq \pi\ rad$). En cuanto a las zonas que van desde el color cian hasta el color anaranjado corresponde a zonas en las que la fase y la amplitud permanecen constante pero no cumplen con las Definiciones 2.3 y 2.4.**

Al igual que en el caso anterior, se estudió el tipo de sincronización entre los osciladores de una misma plataforma y se encontró que en ambos casos la sincronización en contra fase era predominante a diferencia de la sincronización en fase, la cual para ciertas condiciones iniciales existe. Los resultados se pueden apreciar en la Figura 42, donde la zona de color rojo representa sincronización en contra fase, el color azul representa las zonas de sincronización en fase y el color blanco aquéllas en las que la fase o la amplitud no son constantes.

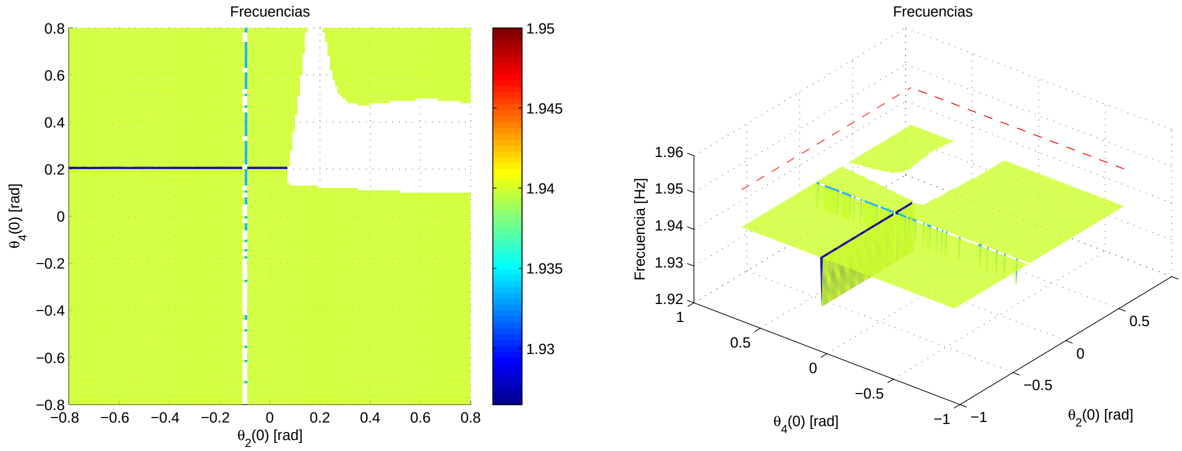


(a) Plataforma inferior **(b) Plataforma superior**

Figura 42**: Regiones de sincronización para cada grupo de osciladores cuando $\theta_1(0) = -0.1\ rad$ y $\theta_3(0) = 0.2\ rad$ con variaciones en $\theta_2(0)$ y $\theta_4(0)$. El color rojo representa sincornización en contra fase ($|\phi| = \pi\ rad$), el color azul representa sincronización en fase ($|\phi| = 0\ rad$), el color blanco las regiones en las que la amplitud o la fase no son constates, y los demás colores, de acuerdo con las barras de niveles, representan las regiones en las que $|\phi| \neq 0\ rad$ o $|\phi| \neq \pi\ rad$, pero permanece constante.**

En cuanto al estudio de las frecuencias, los resultados se presentan en la Figura 43. Puede observarse que para el caso de estudio la frecuencia en estado estacionario, tanto para las regiones de sincronización en fase como en contra fase de la Figura 42, son inferiores a la frecuencia natural de los osciladores.

Al comparar las Figuras 41, 42 y 43 se puede observar que independientemente del desfase que se da entre los dos grupos de osciladores, la frecuencia permanece constante cuando en ambos grupos sus respectivos osciladores se sincronizan en contra fase. Por otro lado, cuando en ambos grupos se encuentra que el régimen de sincronización es en fase, pero el régimen que emerge entre los dos grupos es sincronización en contra fase, la frecuencia es todavía menor. Lo último se puede comprobar al analizar los resultados para $\theta_4(0) = 0.2\ rad$. Incluso este mismo resultado se puede observar en el anterior caso de estudio, para la misma condición.



(a) Plano $\theta_2(0) - \theta_4(0)$ **(b) Vista en tres dimensiones**

Figura 43: **Resultados de frecuencias para $\theta_1(0) = -0.1\ rad$, $\theta_3(0) = 0.2\ rad$ y cambios en $\theta_2(0)$ y $\theta_4(0)$.**

5.2.1.3 Tercer caso

El tercer caso se trató en comenzar en cero las condiciones iniciales de los osciladores de la plataforma inferior mientras los cambios se daban en las condiciones iniciales de los otros. De acuerdo con los resultados obtenidos, en este caso la sincronización en contra fase, entre los grupos de osciladores, aparece sólo cuando $\theta_4(0) = \theta_3(0)$, y deja de existir sincronización, de acuerdo con las Definiciones 2.3 y 2.4, cuando $\theta_4(0) \neq \theta_3(0)$. Además, los osciladores presentan un desfase constante con el cual no se cumplen dichas definiciones. En la Figura 44 se presentan los resultados que se obtuvieron sobre el estudio acerca de la sincronización entre los grupos y se puede observar lo que se mencionó anteriormente. Además, se puede apreciar que existe una simetría ya que para condiciones iniciales del mismo signo, cuadrantes I y III, se tienen los mismos resultados, de igual manera sucede para aquéllas que tienen signos contrarios, cuadrantes II y IV.

En relación a las regiones de sincronización de cada grupo, para el grupo de osciladores de la plataforma inferior no se observó sincronización para los casos $\theta_3(0) = -\theta_4(0)$; sin embargo, para el resto de condiciones iniciales el resultado fue sólo sincronización en fase. Para los osciladores de la plataforma superior, los resultados se presentan en la Figura 45. Puede observarse que este grupo tiene un comportamiento similar al mostrado en la Figura 44. La diferencia radica en que la línea formada por las condiciones $\theta_4(0) = \theta_3(0)$, en este caso, corresponde a la sincronización en fase (línea

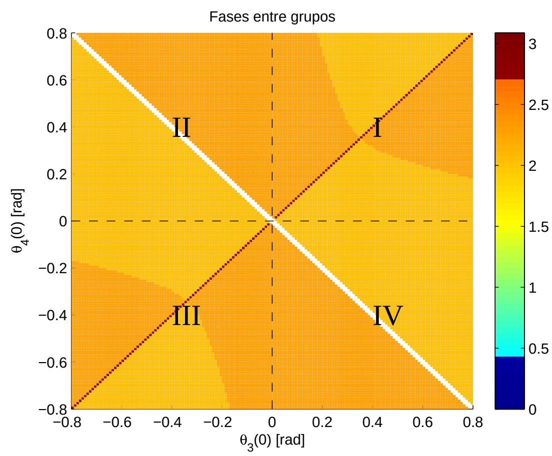


Figura 44**: Regiones de sincronización entre los grupos de osciladores cuando $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0\ rad$ con variaciones en $\theta_3(0)$ y $\theta_4(0)$. Las tonalidades del color rojo se refieren a sincronización en contra fase ($\pi - 0.4 \leq |\phi| \leq \pi\ rad$), mientras que las tonalidades del color amarillo representan aquéllas condiciones iniciales para las cuales la fase permanece constante pero no cumple con las Definiciones 2.3 ó 2.4.**

azul) de los osciladores de la plataforma superior. En cuanto al color amarillo indica las regiones en las cuales los osciladores presentaron la misma frecuencia pero con un desfase diferente de cero o $\pi\ rad$; en este caso es de aproximadamente 2 rad, y se mantiene constante independientemente de las condiciones iniciales.

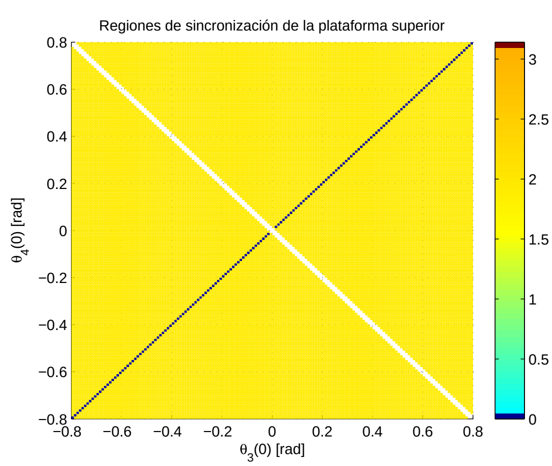
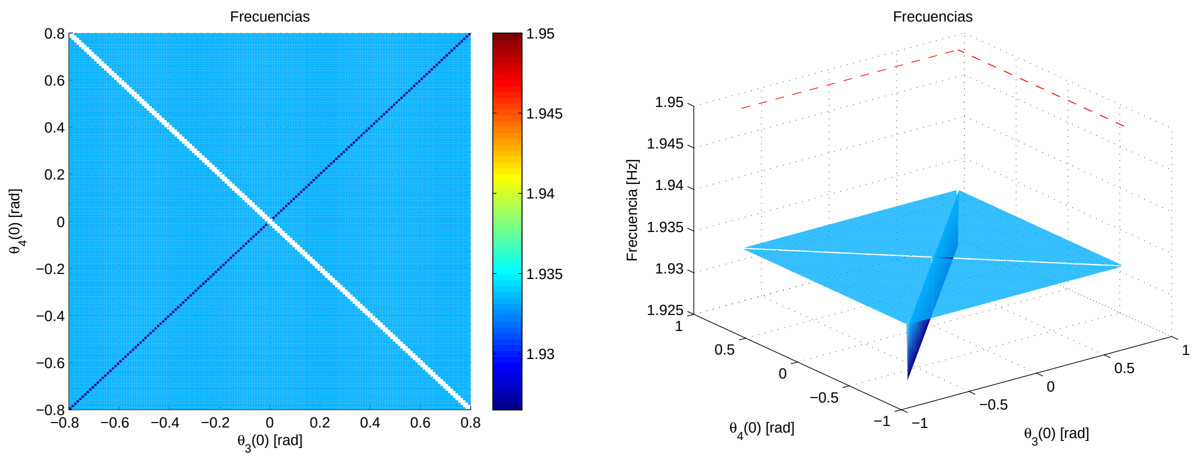


Figura 45**: Regiones de sincronización para los osciladores de la plataforma superior cuando $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0\ rad$ con variaciones en $\theta_3(0)$ y $\theta_4(0)$. El color azul representa sincronización en fase ($|\phi| = 0\ rad$), el color blanco las regiones en las que la amplitud o la fase no son constates, y el color amarillo corresponde una fase de sincronización constante pero de un valor de aproximadamente 2 rad.**

En cuanto a las frecuencias, se presentan en la Figura 46. Puede observarse que para las regiones en las cuales los osciladores de la plataforma superior presentan un desfase constante, la frecuencia es mayor que en las regiones donde se cumplen las definiciones de la sección 2.2. Sin embargo, en todos los casos la frecuencia en estado estacionario se encuentra por debajo de la frecuencia natural del oscilador (1.95 Hz).



(a) Plano $\theta_1(0) - \theta_2(0)$ **(b) Plano $\theta_1(0) - \theta_2(0)$**

Figura 46: **Resultados de frecuencias para $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0\ rad$ y cambios en $\theta_3(0)$ y $\theta_4(0)$. Puede observarse que las freceuncias para este caso de estudio son menores que la frecuencia natural de los oscialdores, cuyo valor es de 1.95 Hz (línea roja).**

Al analizar las Figuras 44, 45 y 46 se encuentra que, para las condiciones iniciales $\theta_1(0) = \theta_2(0)$, el régimen de sincronización que resulta, en ambos grupos de osciladores, es en fase; el régimen de sincronización entre los grupos es en contra fase; y la frecuencia resultante es menor que en el resto de las condiciones iniciales, lo cual concuerda con los resultados anteriores correspondientes a la frecuencia.

5.2.1.4 Cuarto caso

El cuarto caso trata cuando los osciladores de la plataforma superior inician en cero, i. e., $\theta_3(0) = \theta_4(0) = 0$, mientras los cambios se realizan para $\theta_i(0)\ i = 1, 2$ de acuerdo con (125). De los resultados obtenidos se encuentra que los dos grupos se sincronizan en contra fase cuando las condiciones iniciales de $\theta_i(0)\ i = 1, 2$ se encuentran cercanas a fase. Lo anterior se presenta en la Figura 47, donde la región de color blanco indica que no se encontró ningún fenómeno que cumpliera con las Definiciones 2.3 y 2.4, o que el desfase permaneciera constante. En cuanto a las Por su parte, el estudio del desfase entre los grupos indica que éste permanece alrededor de los 3 rad e invariante a las condiciones iniciales.

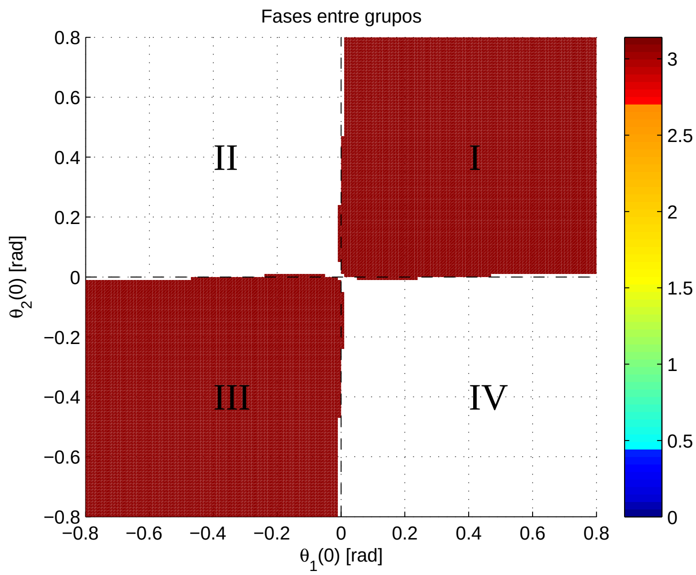


Figura 47: **Regiones de sincronización entre los grupos para** $\theta_i(0) = 0\ i = 3, 4$**.**

Al analizar el tipo se sincronización entre los osciladores de una misma plataforma, se encontró que, en las dos plataformas, las regiones de sincronización siguen el mismo patrón que se da en la Figura 47, con la única diferencia de que para cada grupo de osciladores el régimen de sincronización es en fase. De lo anterior se puede deducir que para el caso de $\theta_i(0) = 0\ i = 3, 4$ y variaciones en $\theta_1(0)$ y $\theta_2(0)$, los osciladores de un mismo grupo se sincronizan en fase; pero, entre los dos grupos de osciladores, el régimen que predomina es el de sincronización en contra fase.

En cuanto a las frecuencias en estado estacionario, éstas se encuentran por debajo de la frecuencia natural de los osciladores y permanecen constantes independientemente de las condiciones iniciales. El valor de dicha frecuencia es aproximadamente 1.925 Hz.

Puede observarse que, a diferencia del caso de dos osciladores, es posible encontrar una mayor diversidad de fenómenos al cambiar las condiciones iniciales. De lo anterior, se puede apreciar que existen diferentes soluciones para el mismo espacio de parámetros y, las cuales, dependen de las primeras. Además, éstas puedan ser o no estables, situación que no se analizó en este estudio. Lo anterior concuerda con lo que se menciona en (Blekhman, 1988) en relación al método de Poincaré, y que se retomó en el capítulo anterior; es posible obtener una solución por medio del método de Poincaré pero ésta puede pertenecer a un número infinito de soluciones o, en su defecto, no ser solución de tal sistema.

Al analizar las gráficas que se obtuvieron para la frecuencia en estado estacionario en cada uno de los casos estudiados, se puede encontrar que ésta es mayor a la frecuencia natural de los osciladores siempre y cuando todos ellos se encuentren sincronizados en fase. En caso de que exista una sincronización en contra fase, ya sea entre los grupos o entre los osciladores de una misma plataforma, la frecuencia en estado estacionario tiende a ser menor que la frecuencia natural de los osciladores.

5.2.2 Masa vs. elasticidad

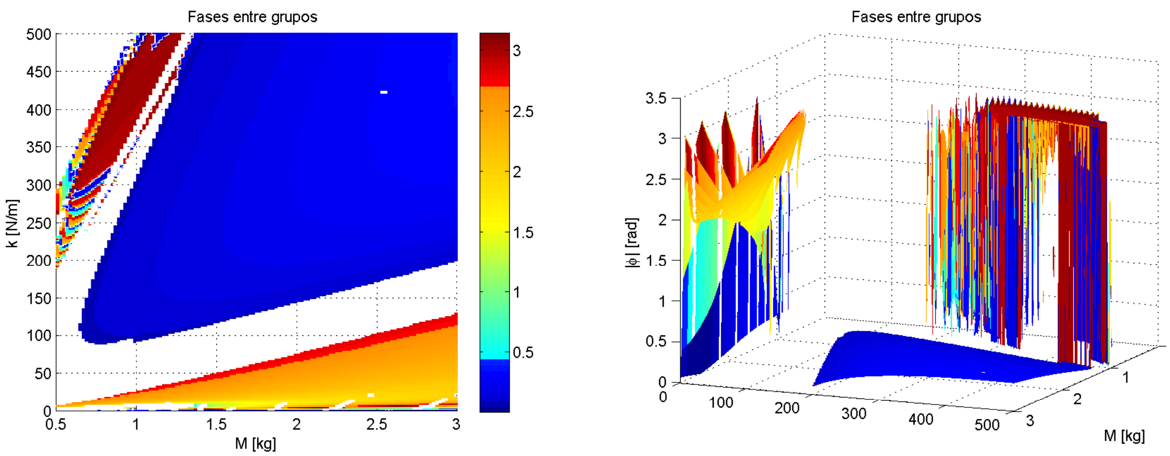
Como se menciona en la introducción al estudio numérico, en este apartado se presenta el estudio para los cambios de masas y elasticidad. Para ello, los rangos empleados, para los cambios en dichos parámetros, fueron los mismos que se usaron en el caso de dos osciladores. Estos rangos son los siguientes

$$0.5 \leq M \leq 3\ kg, \quad 0 \leq k \leq 500\ N/m. \tag{126}$$

Para el caso de las masas, el tamaño de paso fue de $0.02\ kg$, mientras que para la elasticidad, dicho paso fue de $2\ N/m$.

Los resultados obtenidos, para las condiciones iniciales en fase, se presentan en la Figura 48. Puede observarse que la región de sincronización en fase (tonalidades del color azul) predomina más que la región de sincronización en contra fase (tonalidades del color rojo). Además, la región en la que el desfase entre los osciladores se mantiene constante (colores cian a anaranjado), pero no cumple con las definiciones 2.3 y 2.4, es mayor que las regiones de contra fase. También puede observarse que para las condiciones iniciales en fase el desfase existente entre los grupos no cambia de manera abrupta cuando el régimen es sincronización en fase, ver Figura 48b.

En cuanto a los resultados para las condiciones iniciales en contra fase, se presentan en la Figura 49, donde la región que comprende las diferentes tonalidades del color rojo corresponde a sincronización en contra fase; la región de color blanco corresponde a las zonas en las que no se presentó una sincronización en frecuencia o la amplitud de los

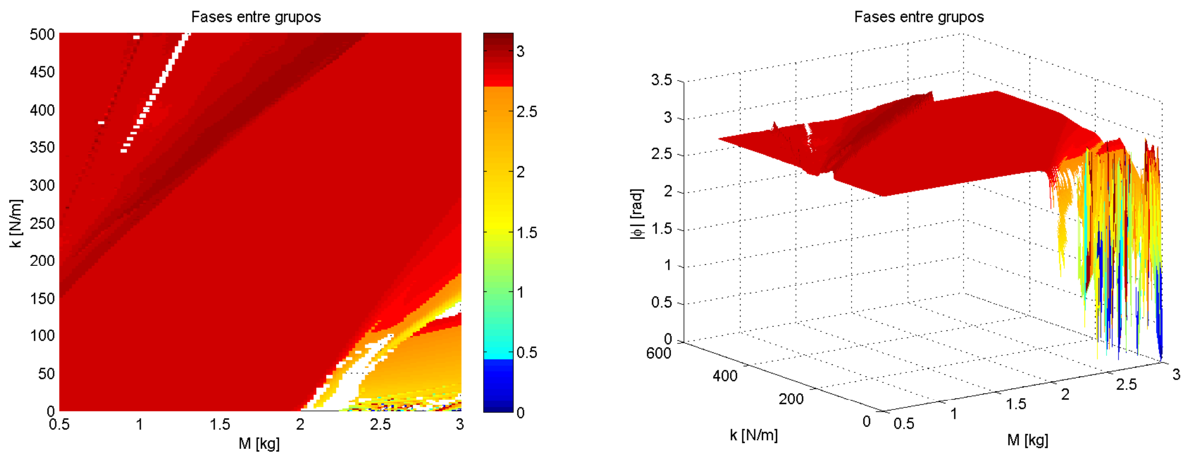


(a) Plano M-k **(b) Vista en tres dimensiones**

Figura 48**: Regiones de sincronización entre los grupos de osciladores para las condiciones iniciales en fase y los cambios de masas contra la elasticidad de la estructura. Las tonalidades del color azul indican el rango de fase para el cual existe sincronización en fase (**$0 \leq |\phi| \leq 0.4\ rad$**), los cambios en el color rojo representan el rango de sincronización en contra fase (**$\pi - 0.4 \leq |\phi| \leq \pi$**), los colores que van desde el cian al anaranjado inidican las regiones de fase constante y las regiones de color blanco corresponden a fenómenos desconocidos.**

osciladores en estado estacionario no era constante, en cuanto a las regiones que van desde el color cian hasta el anaranjado corresponden a las zonas en las que la fase es constante, pero no cumplen con las Definiciones 2.3 y 2.4. Puede observarse que para este caso, es mayor la probabilidad de sincronización en contra fase, a diferencia del caso anterior, donde casi no está presente el fenómeno. También se puede apreciar que en la zona en la que la masa se encuentra en el rango $2.2 < M \leq 3\ kg$ y $0 \leq k < 50\ N/m$ se presentan pequeñas regiones de sincronización en fase, ver Figura 49b.

De los resultados presentados anteriormente, se pueden encontrar regiones en las que coexisten ambos regímenes de sincronización y las cuales se presentan en la Figura 50. Puede observarse que la región de coexistencia (color rojo) es la que más se presenta, la región de contra fase para una condición inicial (color azul claro) es la que le sigue. En cuanto a la existencia de sincronización en contra fase para las dos condiciones iniciales (color anaranjado), es la que menos se presenta. También se puede apreciarse que no existen regiones en las que exista sincronización en fase para las dos condiciones iniciales (color verde). Cabe mencionar que en la misma figura se presentan las etiquetas con sus respectivos colores, pero en algunas etiquetas se maneja la abreviatura c. i. la cual quiere decir condiciones iniciales, dicha abreviatura se emplea en las



(a) Plano M-k **(b) Vista en tres dimensiones**

Figura 49**: Regiones de sincronización entre los grupos de osciladores para las condiciones iniciales en fase y los cambios de masas contra la elasticidad de la estructura. Las tonalidades del color azul indican el rango de fase para el cual existe sincronización en fase ($0 \leq |\phi| \leq 0.4\ rad$), los cambios en el color rojo representan el rango de sincronización en contra fase ($\pi - 0.4 \leq |\phi| \leq \pi$), los colores que van desde el cian al anaranjado inidican las regiones de fase constante y las regiones de color blanco corresponden a fenómenos desconocidos.**

siguientes figuras.

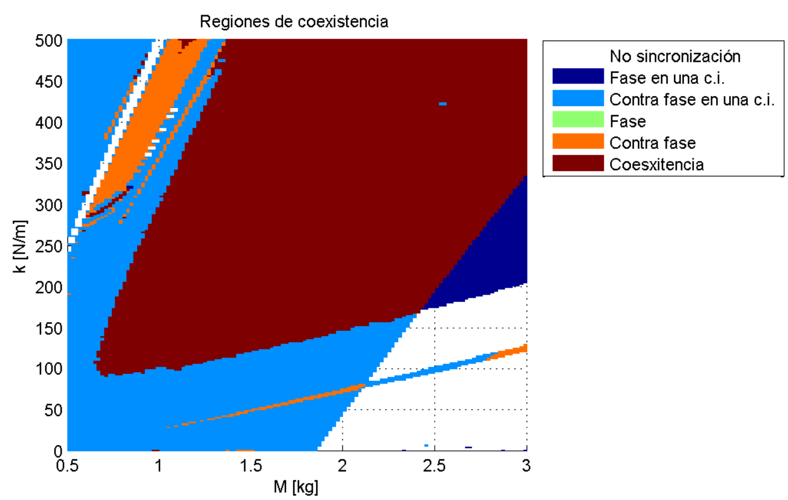
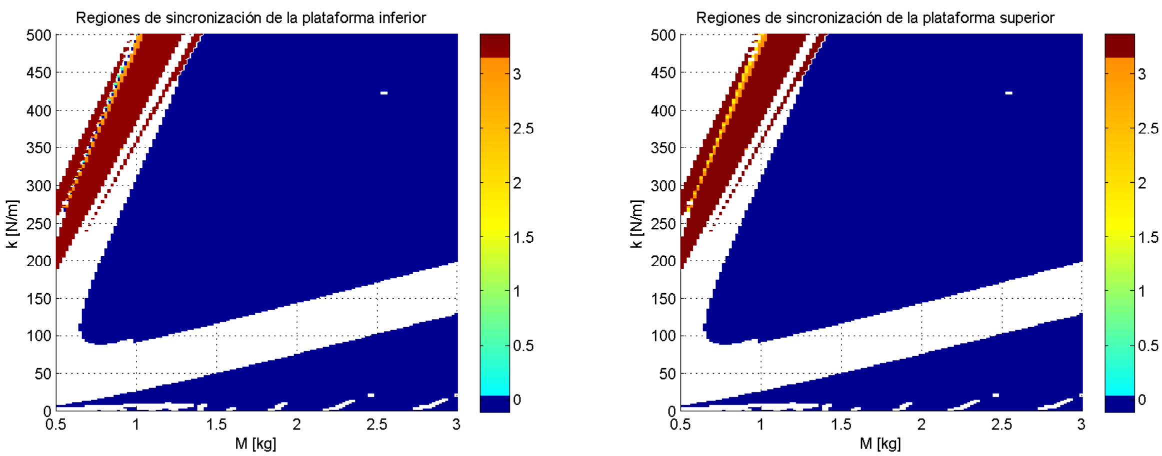


Figura 50**: Regiones de coexistencia para los cambios de las masas y la elasticidad de la estructura.**

5.2.2.1 Análisis para condiciones iniciales en fase

Al analizar las regiones de sincronización de cada uno de los grupos cuando las condiciones iniciales están en fase, se obtuvieron las gráficas de la Figura 51. En la Figura 51a se presentan los resultados para la plataforma inferior, donde se puede apreciar que la región de sincronización en fase (color azul) predomina sobre la sincronización en contra fase (color rojo). Puede observarse que existe una línea que se encuentra en el rango de las masas $0.5 \leq M \leq 1\ kg$ y cuyos colores van desde el cian hasta el anaranjado indican las zonas en las que fase en estado estacionario no es ni cero ni $\pi\ rad$. Para el caso de los osciladores de la plataforma superior se tienen los resultados de la Figura 51b, donde se puede ver una línea que va desde el color amarillo hasta el anaranjado.A diferencia de los osciladores de la plataforma inferior, en la plataforma superior la fase que es diferente de cero o $\pi\ rad$, se encuentra en el rango de $1.5 \leq |\phi| < \pi\ rad$.

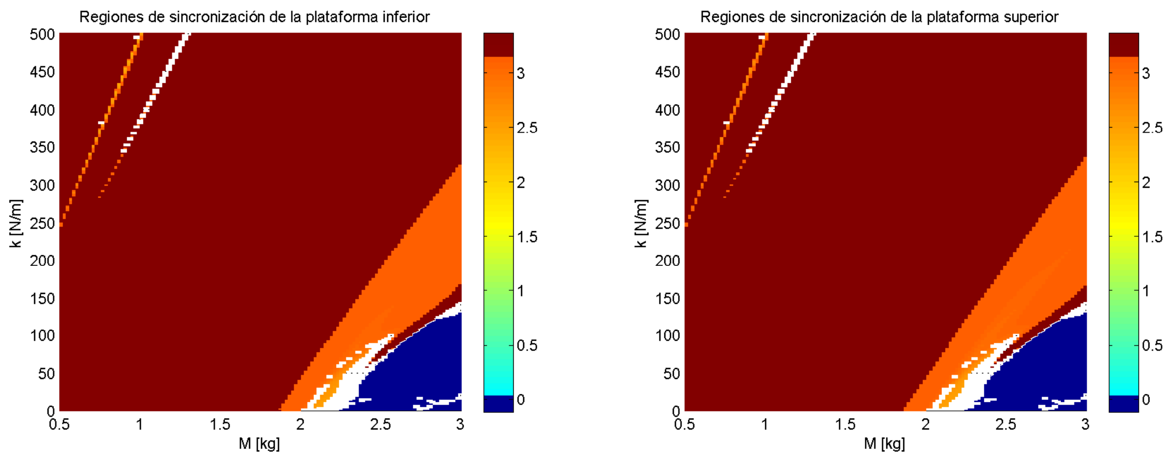


(a) Plataforma inferior **(b) Plataforma superior**

Figura 51: **Regiones de sincronización de los dos grupos de osciladores para las condiciones iniciales en fase y los cambios de masas contra la elasticidad de la estructura.**

5.2.2.2 Análisis para condiciones iniciales en contra fase

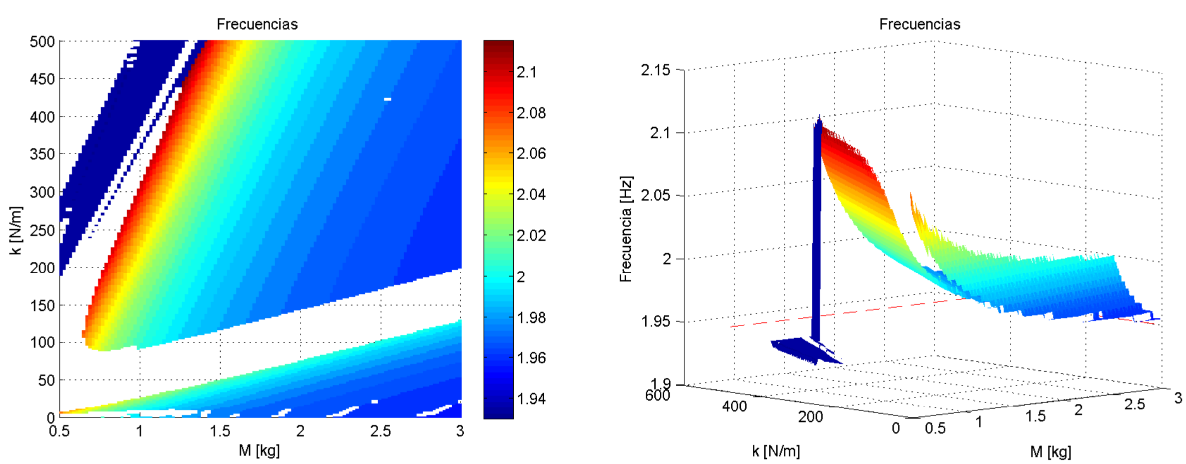
Las regiones de sincronización para cada grupo, cuando las condiciones iniciales son en contra fase, se presentan en la Figura 52. Puede observarse que en ambos casos la sincronización en contra fase (color rojo) es predominante. El sistema de colores, en este caso, se maneja igual que en el caso anterior, i. e., el color azul es sincronización en fase, el color rojo es sincronización en contra fase y los colores que van desde el cian hasta el anaranjado corresponde a las regiones en las que la fase no es ni cero ni $\pi\ rad$. Puede observarse que la región de color anaranjado que se encuentra en el rango de masas $2 \leq M \leq 3\ kg$ es menor para el caso de los osciladores de la plataforma inferior que en el caso de los osciladores de la otra plataforma. En ambos casos se puede observar que el valor mínimo para dicha región es de aproximadamente 2 rad.



(a) Plataforma inferior **(b) Plataforma superior**

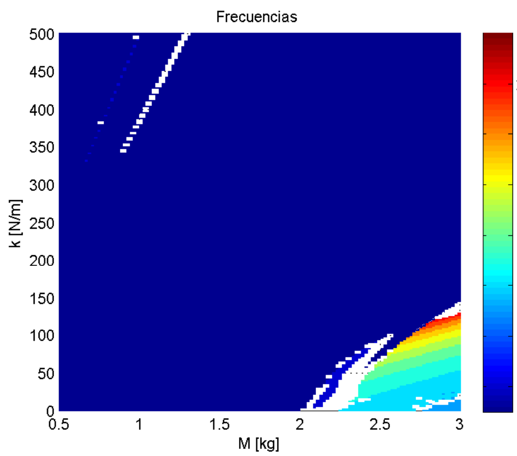
Figura 52**: Regiones de sincronización de los dos grupos de osciladores para las condiciones iniciales en contra fase y los cambios de masas contra la elasticidad de la estructura.**

Al igual que en todos los casos de estudio, en éste se presentan las gráficas relacionadas con las variaciones en la frecuencia para ambas condiciones iniciales, ver Figuras 53 y 54. Si las Figuras 53a y 54a se comparan con las Figuras 48 y 49, respectivamente, se puede apreciar que las regiones de sincronización en fase suelen tener mayor frecuencia que aquellas correspondientes a la sincronización en contra fase; y además, para este último régimen, la frecuencia de sincronización es inferior a la frecuencia natural de los osciladores. También es posible observar que, para ambas condiciones iniciales, conforme crece el desfase entre los osciladores que se presenta en sincronización en fase, la frecuencia disminuye para el mismo régimen de sincronización.

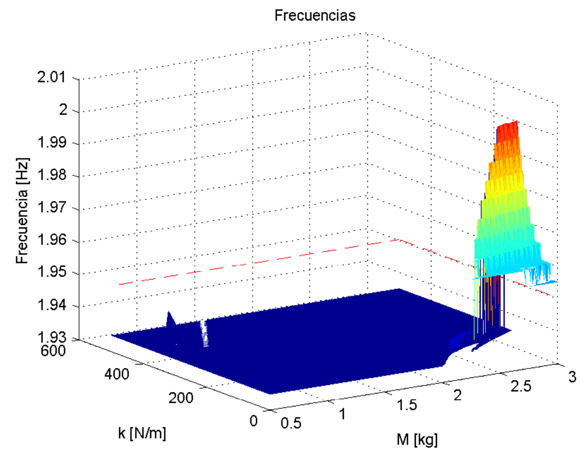


(a) Plano M-K **(b) Gráfica en 3D**

Figura 53**: Frecuencias para las condiciones iniciales en fase en el estudio de las masas contra la elasticidad de la estructura.**



(a) Plano M-K



(b) Gráfica en 3D

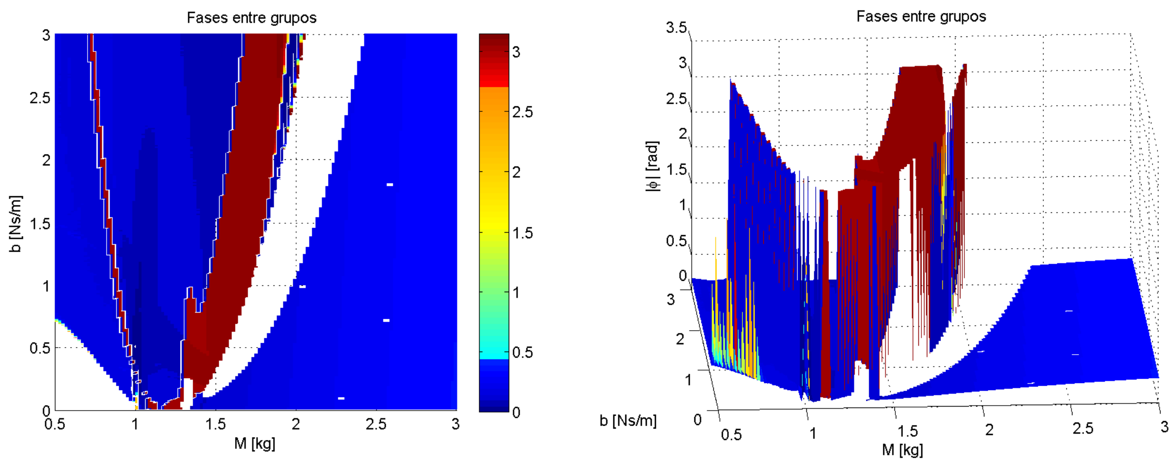
Figura 54**: Frecuencias para las condiciones iniciales en contra fase en el estudio de las masas contra la elasticidad de la estructura.**

5.2.3 Masa vs. amortiguamientos

En los casos anteriores se trabajó con las condiciones iniciales y los cambios realizados en las masas contra los que se hicieron en la elasticidad de la estructura. En esta parte se estudia, como se mencionó en la introducción a esta sección, los cambios de las masas de la estructura en relación a los cambios de amortiguamiento. En (126) se definió un rango para las masas, el cual se retoma en este estudio, con el mismo tamaño de paso. En cuanto a las variaciones de los amortiguamientos, estos se realizaron en el mismo rango empleado para dos osciladores, i. e., $0.01 \leq b \leq 3\ Ns/m$ con un paso de $0.01\ Ns/m$. Al igual que en el caso anterior, se obtuvieron las regiones de sincronización para ambas condiciones iniciales.

Los resultados para el desfase entre los grupos de osciladores cuando las condiciones iniciales están en fase se presentan en la Figura 55. Puede observarse que los dos regímenes de sincronización están presentes en el sistema, donde la sincronización en fase (tonalidades del color azul) es predominante sobre la sincronización en contra fase (tonalidades del color rojo); y, además, estos dependen de los cambios de los parámetros en cuestión. Otra observación que se pude hacer, es que el desfase en estado estacionario cambia para un mismo régimen de sincronización, v. g., la región en la que la masa se encuentra en el rango $0.5 \leq M \leq 1.5\ kg$ el desfase entre los osciladores se mantiene constante para algunos puntos pero para otros decrece; lo anterior para ambos regímenes, ver Figura 55a. En cuanto al rango de masas $1.5 < M \leq 3\ kg$ el desfase tiende a crecer conforme se incrementa la masa y sin que la elasticidad tenga efecto sobre dicho desfase, ver Figura 55b.

También se puede observar que las regiones en las que la fase permanece constante (colores cian a anaranjado) casi no están presentes. En cuanto al color blanco indica las regiones en las que ni la amplitud ni la fase de los osciladores permanecen constantes.

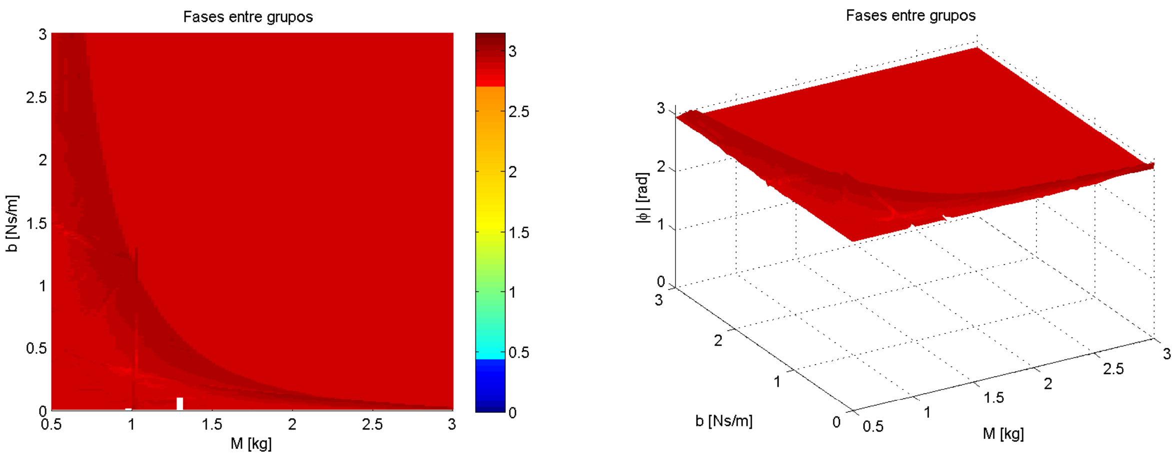


(a) Plano M-b **(b) Vista en tres dimensiones**

Figura 55: **Regiones de sincronización entre los dos grupos de osciladores para las condiciones iniciales en fase y los cambios de masas contra el amortiguamiento de la estructura.**

En cambio, para las condiciones en contra fase, sólo existe la región de sincronización en contra fase (tonalidades del color rojo), ver Figura 56. A diferencia de las condiciones iniciales en fase, se puede observar que el desfase en sincronización en contra fase suele tener una mayor variación; sin embargo, en la mayor parte de las combinaciones (M, b) el desfase permanece invariante. Al igual que en las otras figuras el color blanco representa las regiones en las que ni la amplitud ni la fase de los osciladores permanecen constantes.

Al seguir la estructura del estudio anterior, se realizó la gráfica en la cual se presentan las regiones de coexistencia y la cual se muestra en la Figura 57. Puede observarse que la región de coexistencia (color rojo) comprende la región de sincronización en fase de la Figura 55 que corresponde a las condiciones iniciales en fase, mientras que la región de contra fase (color anaranjado) que se presenta en ambas condiciones iniciales es menor que la anterior. En cuanto a la región de color azul claro, corresponde a la región en la cual



(a) Condiciones iniciales en fase **(b) Condiciones iniciales en contra fase**

Figura 56**: Regiones de sincronización entre los dos grupos de osciladores para las condiciones iniciales en contra fase y los cambios de masas contra el amortiguamiento de la estructura.**

se presenta sincronización en contra fase para una sola condición inicial; la cual, en este caso, corresponde a la intersección entre la región de color blanco (no sincronización) de la Figura 55 (condiciones iniciales en fase) y la región roja (sincronización en contra fase) que corresponde a las condiciones iniciales en contra fase, Figura 56.

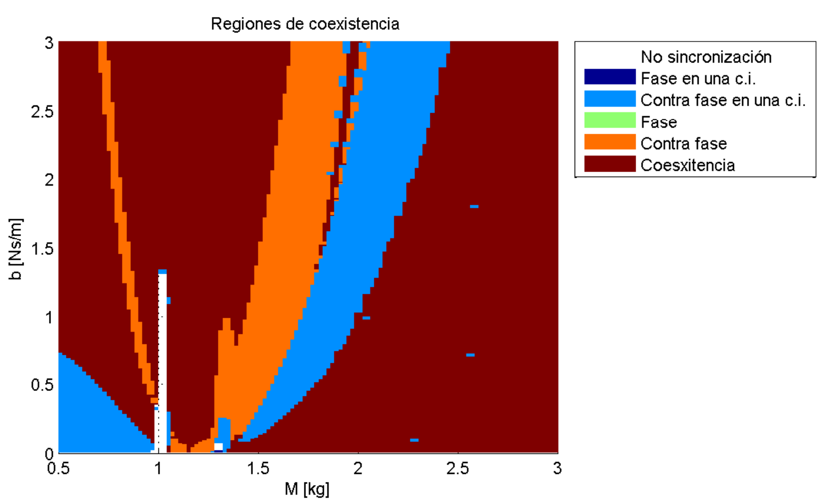
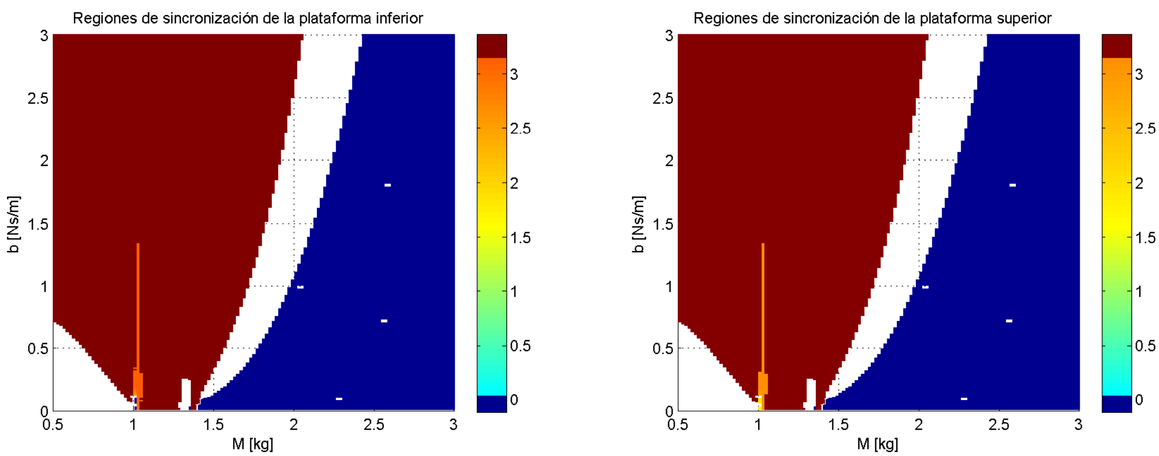


Figura 57**: Regiones de coexistencia para las condiciones iniciales estudiadas en los cambios de las masas y el amortiguamiento de la estructura.**

5.2.3.1 Análisis para condiciones iniciales en fase

En cuanto a las regiones de sincronización para las condiciones iniciales en fase, los resultados se presentan en la Figura 58 y se puede observar que, al igual que en el caso para los desfases entre los grupos de osciladores, Figura 55, las gráficas presentan la misma forma; pero, con la diferencia de que las regiones de sincronización en fase (color azul) y sincronización en contra fase (color rojo) se encuentran bien definidas. Puede observarse que en $M = 1\ kg$ existen regiones en las que el desfase no es cero ni $\pi\ rad$. En este caso se encontró que el desfase tiene un valor mínimo de 0.012 rad y máximo de 0.1158 rad para los osciladores de la plataforma inferior, mientras que para los osciladores de la otra plataforma el desfase se encontraba entre 1.732 y 1.838 rad.



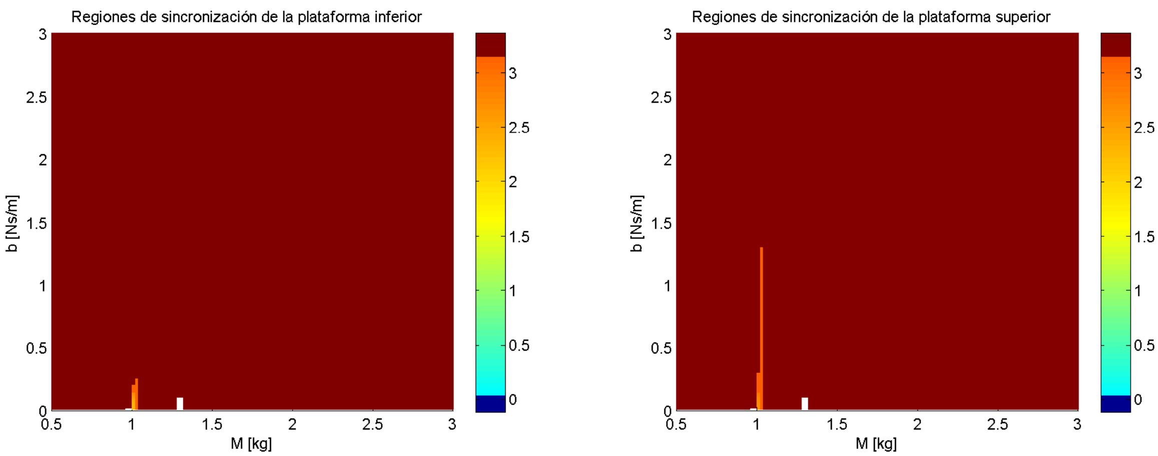
(a) Plataforma inferior **(b) Plataforma superior**

Figura 58**: Regiones de sincronización de los dos grupos de osciladores para las condiciones iniciales en fase y los cambios de masas contra el amortiguamiento de la estructura.**

5.2.3.2 Análisis para condiciones iniciales en contra fase

En cuanto a las regiones de sincronización para las condiciones iniciales en contra fase, los resultados se presentan en la Figura 59 y se puede observar que ambas gráficas presenta la misma forma que la de la Figura 56. En las regiones de color anaranjado se encontró que el desfase se encontraba en el rango $2.29 \leq |\phi| \leq 3.14\ rad$ para los osciladores de la plataforma inferior en cambio para los osciladores de la plataforma superior el rango era $2.606 \leq |\phi| \leq 3.14\ rad$.

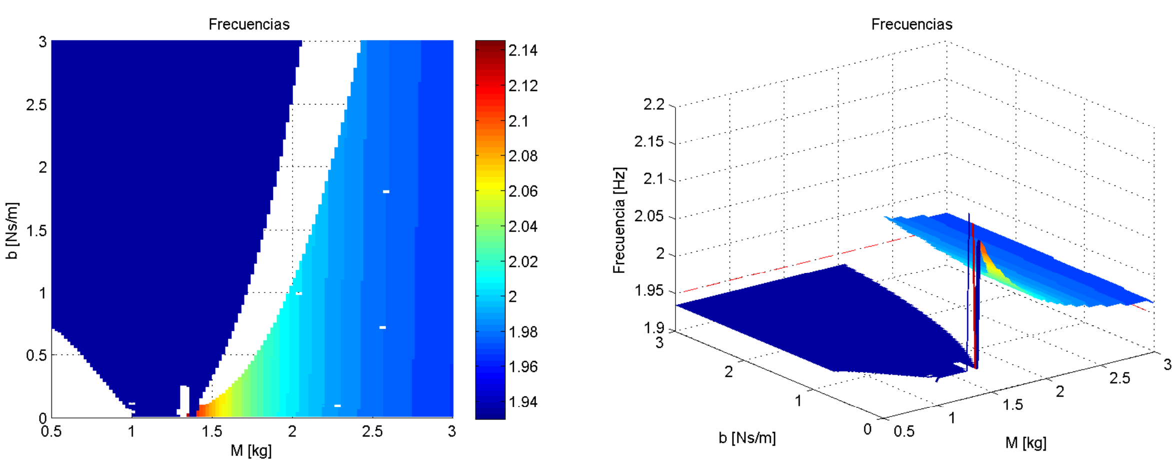
El estudio de la frecuencia arroja que para sincronización en fase la frecuencia en estado estacionario es mayor que la frecuencia natural de los osciladores, y a su vez, de la frecuencia que se presenta en sincronización en contra fase para condiciones iniciales en fase, ver Figura 60. También se puede observar que la frecuencia en estado estacionario



(a) Plataforma inferior **(b) Plataforma superior**

Figura 59**: Regiones de sincronización de los dos grupos de osciladores para las condiciones iniciales en fase y los cambios de masas contra el amortiguamiento de la estructura.**

disminuye y se aproxima a la frecuencia natural de los osciladores conforme aumentan las masas de la estructura y sin que el amortiguamiento tenga efecto sobre la frecuencia. En cambio, para las otras condiciones iniciales, la frecuencia en estado estacionario permanece por debajo de la frecuencia natural, en aproximadamente 12.16 rad/s ó 1.9353 Hz.



(a) Plano M-b **(b) Vista en tres dimensiones**

Figura 60**: Frecuencias para condiciones iniciales en fase y el estudio de las masas versus los amortiguamientos de la estructura.**

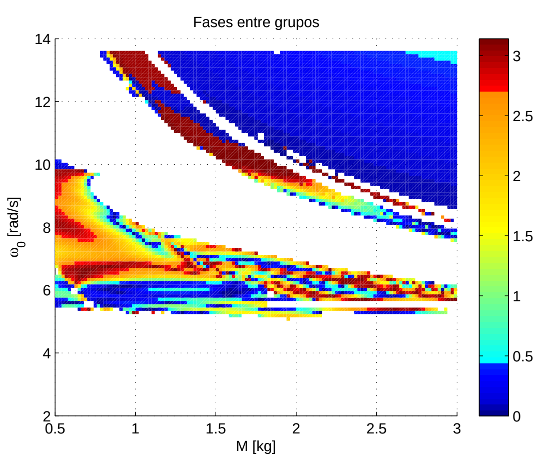
5.2.4 Masa vs. frecuencias naturales

En los apartados anteriores se realizaron los estudios para las condiciones iniciales, los cambios de masa en relación a la elasticidad y el amortiguamiento, respectivamente.

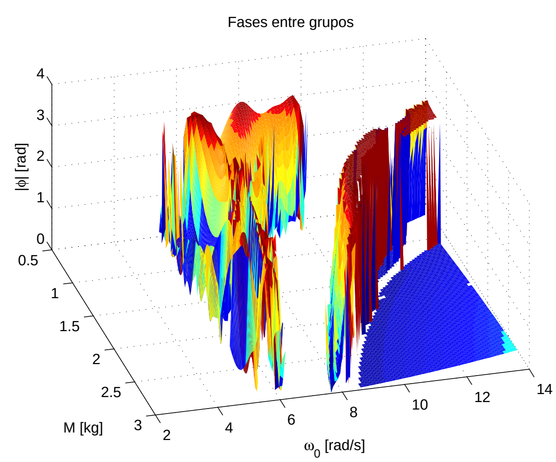
En este apartado, como se mencionó a un principio, se presentan los resultados que se obtuvieron al realizar simulaciones para los cambios en las masas y las frecuencias naturales de los osciladores.

Los cambios en las masas, como bien se sabe, se realizaron de acuerdo con (126) con un paso de $0.02\ kg$, en cuanto a los cambios en las frecuencias se realizaron de acuerdo a (108) con un paso de aproximadamente $0.0333\pi\ rad/s$.

Los resultados obtenidos sobre las regiones de sincronización para las condiciones iniciales en fase, se presentan en la Figura 61. Se puede apreciar que existen regiones de sincronización en fase (tonalidades del color azul) y contra fase (tonalidades del color rojo), y al igual que en los demás casos, se presentan regiones donde el desfase entre los osciladores permanece constante (colores cian a anaranajado), pero el cual no cumple con las Definiciones 2.3 y 2.4. Ahora bien se puede observar que la fase tiene grandes cambios para el rango en la frecuencia $5 < \omega_0 < 10\ rad/s$, ver Figura 61a. En cuanto a la región de sincronización en fase que se encuentra en el rango de masas $1 \leq M \leq 3\ kg$ el desfase entre los osciladores crece conforme se incrementan los parámetros bajo estudio, ver Figura 61b.



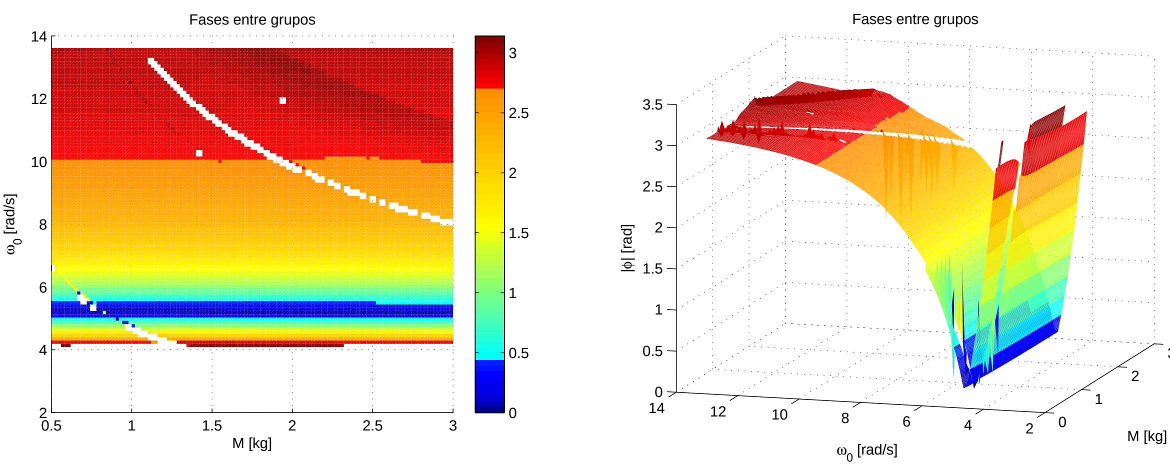
(a) Condiciones iniciales en fase



(b) Condiciones iniciales en contra fase

Figura 61: **Regiones de sincronización entre los dos grupos de osciladores para las condiciones iniciales en fase y los cambios de masas contra la frecuencia natural de los osciladores.**

En cuanto a las condiciones iniciales en contra fase, se obtuvieron los resultados de la Figura 56. En las gráficas que se presentan en dicha figura, se puede apreciar que el desfase que se genera entre los osciladores decrece conforme aumenta la frecuencia, hasta una frecuencia cercana a los $5\ rad/s$, punto en el cual vuelve a crecer. Además, el cambio en la masa no influye mucho en el mismo. Al igual que en los casos anteriores las regiones de sincronización en contra fase se definen por las tonalidades en el color rojo, mientras que las de sincronización en fase son aquellas que corresponden a los cambios en el color azul, y la región de color blanco representa la región en la que la fase o la amplitud no permanecen constantes. En cuanto a los colores que van desde el cian hasta el anaranjado corresponden a las zonas en las que se encuentra que el desfase entre los osciladores es constante pero no cumple con las Definiciones 2.3 y 2.4.



(a) Condiciones iniciales en fase **(b) Condiciones iniciales en contra fase**

Figura 62**: Regiones de sincronización entre los dos grupos de osciladores para las condiciones iniciales en contra fase y los cambios de masas contra la frecuencia natural de los mismos**

De la Figura 61, puede observarse que si se grafican las regiones de coexistencia sólo la región que se encuentra entre $1\ kg$ y los $3\ kg$, y los $10\ rad/s$ y aproximadamente los $14\ rad/s$ comprenderán las regiones de coexistencia. En la Figura 63 se presentan las regiones de coexistencia (color rojo), contra fase (color anaranjado), contra fase para una condición inicial (color cian), sincronización en fase para una condición inicial (color azul claro) y regiones en las que no se encontró sincronización de acuerdo con las definiciones de la sección 2.2

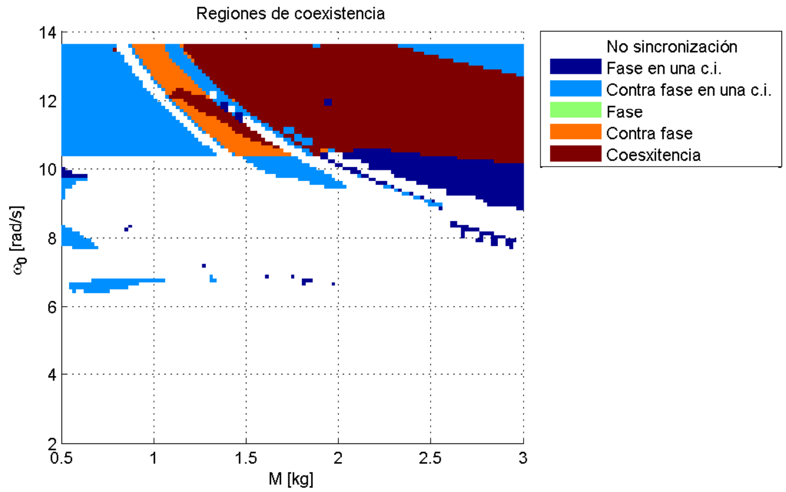


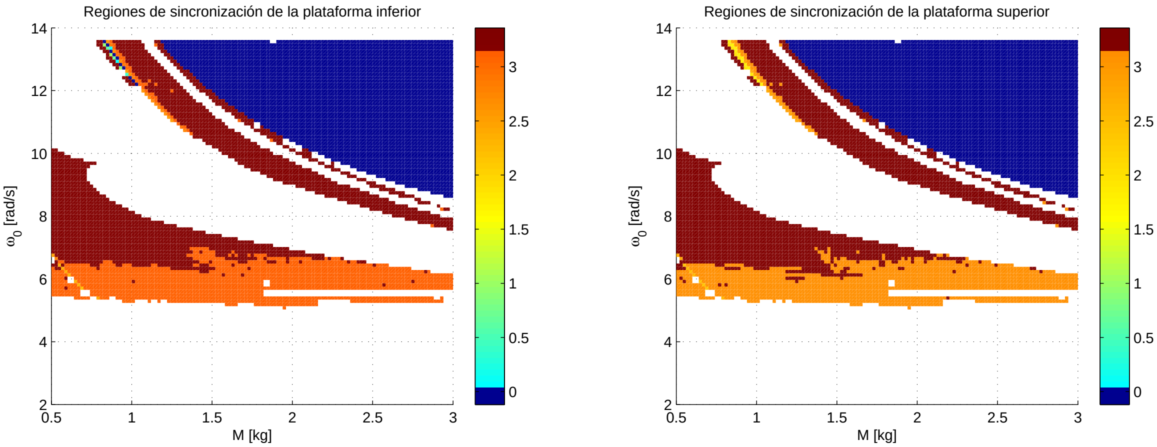
Figura 63**: Regiones de coexistencia para las condiciones iniciales estudiadas en los cambios de las masas y la frecuencia natural de los osciladores.**

5.2.4.1 Análisis para condiciones iniciales en fase

Al realizar el respectivo estudio sobre las regiones de sincronización de cada grupo de osciladores, se obtienen las gráficas de la Figura 64, para condiciones iniciales en fase. Puede observarse que el comportamiento que más prevalece en cada grupo es sincronización en fase (color azul), en cuanto al régimen de sincronización en contra fase (color rojo) es el segundo fenómeno que se puede apreciar en cada grupo. Además, también se pueden observar que existen regiones en las cuales el desfase no es cero ni $\pi \ rad$ (colores cian a anaranjado). Otra observación que se puede hacer, es que se presentan los mismos fenómenos en ambas plataformas, para la mayoría de las combinaciones de los parámetros bajo análisis. Cabe mencionar que en las regiones de fase constante se encontró que existe una diferencia mayor a $0.001 \ rad$ entre el desfase encontrado y $\pi \ rad$, i. e., se encuentra cercano a la región de sincronización en contra fase.

5.2.4.2 Análisis para condiciones iniciales en contra fase

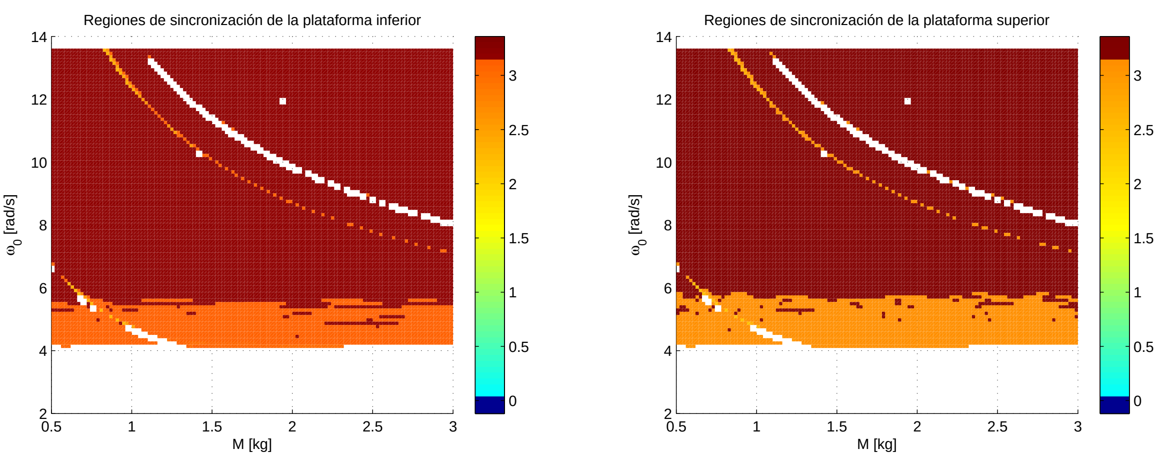
En cuanto a las regiones de sincronización entre los osciladores de la misma plataforma para las condiciones iniciales en contra fase, los resultados se presentan en la Figura 65. En éste caso se presentan los resultados de la plataforma inferior, ya que los comportamientos son similares para ambos grupos. Puede observarse que la única región



(a) Plataforma inferior **(b) Plataforma superior**

Figura 64**: Regiones de sincronización de los dos grupos de osciladores para las condiciones iniciales en fase y los cambios de masas contra la frecuencia natural de los osciladores.**

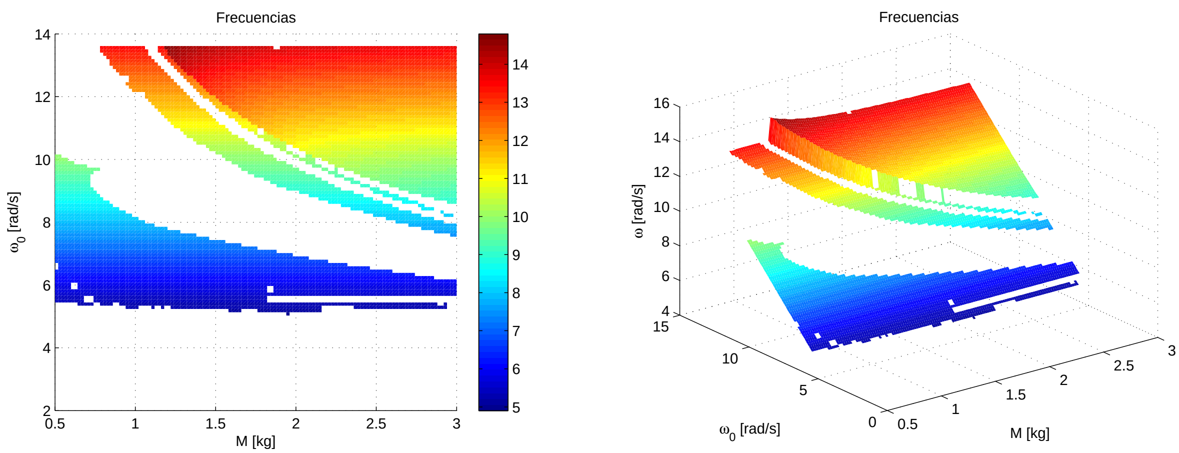
de sincronización que cumple con las Definiciones 2.1 y 2.2 es la de sincronización en contra fase (color rojo). Además, es posible observar que existe una región de fase constante (color anaranjado) y cuyo desfase, se encontró que el mínimo era aproximadamente de 2.2614 rad para la plataforma inferior y de aproximadamente 2.4503 de rad para la plataforma superior.



(a) Plataforma inferior **(b) Plataforma superior**

Figura 65**: Regiones de sincronización de los grupos de osciladores para condiciones iniciales en contra fase y los cambios de masas contra la frecuencia natural de los osciladores.**

En cuanto a las frecuencias, se encontró que la frecuencia en estado estacionario crecía de manera líneal conforme se incrementaba la frecuencia natural de los osciladores y era menor que la última para las regiones de sincronización en contra fase en ambas condiciones iniciales. En cambio, para la región de sincronización en fase de la primer condición inicial, las frecuencias en estado estacionario presentaban un valor mayor que la frecuencia natural de los osciladores, ver Figura 66.



(a) Plano M-ω_0 **(b) Vista en tres dimensiones**

Figura 66: **Frecuencias para las condiciones iniciales en fase en el estudio de las masas contra la frecuencia natural de los osciladores. Puede observarse que para las regiones de sincronización en fase de la Figura 61, la frecuencia en estado estacionario es mayor que la freceuncia nataural de los osciladores.**

5.3 Conclusiones

De los resultados obtenidos del análisis teórico, se puede concluir que, al igual que en el caso de dos osciladores, el método de Poincaré presenta un error muy grande al determinar la solución de sincronización en fase. Además, los errores con el método de Poincaré incrementan con el aumento de osciladores bajo análisis.

También se puede concluir que los resultados que corresponden al régimen de sincronización en contra fase no varían en gran proporción con el cambio de dos a cuatro osciladores, a diferencia del régimen de sincronización en fase, tanto para el caso analítico como para el caso numérico. Otra conclusión a la que se llegó después de realizar el estudio teórico, es que la estabilidad de las soluciones, aparentemente, desaparece conforme el número de osciladores se incrementa. El lector se podrá preguntar por qué aparentemente, la razón a dicha pregunta radica en que no se realizó un estudio para un número mayor de osciladores, por lo que no es posible afirmar que así es. Ahora bien, si se desea corroborar esa suposición, es necesario realizar un estudio con un número mayor de osciladores para los mismos parámetros.

En cuanto a los resultados obtenidos del análisis numérico, se puede concluir que existen diversas soluciones para los cambios dados en las condiciones iniciales, a diferencia del caso de dos osciladores, donde las regiones de sincronización son simétricas, i. e., se tiene una solución para condiciones iniciales del mismo signo (cercanas a fase), así como, otra única solución para todas las condiciones iniciales de signos contrarios. Además, se puede concluir que el régimen predominante es el de sincronización en contra fase y que el sistema es más susceptible a las condiciones iniciales de los osciladores, a diferencia del caso para dos.

Al igual que en el caso de dos osciladores, se concluye que el amortiguamiento influye en qué tipo de régimen es más probable que aparezca, i. e., si se requiere sincronización en contra fase, es necesario aumentar el amortiguamiento. En cambio, si lo que se requiere es una mayor probabilidad de que los osciladores se sincronicen en fase, es necesario aumentar la masa, disminuir el amortiguamiento, mantener una elasticidad media (150 a 350 N/m) y ajustar los osciladores a condiciones iniciales cercanas a fase. También se puede concluir que los parámetros que más influyen sobre la frecuencia de oscilación en estado estacionario son las masas y la elasticidad de la estructura, y la frecuencia natural de los osciladores.

Si se comparan las gráficas de las regiones de sincronización entre los osciladores de un mismo grupo, las gráficas de las regiones de sincronización entre los grupos y las gráficas de las frecuencias obtenidas en la variación paramétrica para cada condición inicial, se puede concluir que independientemente de los parámetros bajo análisis, al igual que en el caso de las condiciones iniciales, la frecuencia que alcanzan los osciladores en estado estacionario es mayor que la frecuencia natural de los mismos cuando todos ellos se encuentran sincronizados en fase. En cambio, cuando se presenta sincronización en contra fase, ya sea entre los osciladores de un mismo grupo o entre los grupos, la frecuencia en estado estacionario es menor que la frecuencia natural de éstos y por consiguiente es menor que la frecuencia que se presenta en sincronización en fase. Cabe mencionar que si se presenta sincronización en fase en ambos grupos de osciladores, pero existe sincronización en contra fase entre los grupos, la frecuencia en estado estacionario será menor que aquélla que se da cuanto existe sincronización en contra fase, ya sea entre los grupos o entre los osciladores de un mismo grupo.

En otras palabras, cualquier tipo de sincronización en contra fase, entre grupos u osciladores, reduce la frecuencia en estado estacionario a un valor menor que la frecuencia natural de los osciladores. Por lo que, si es necesario que la frecuencia en estado estacionario sea mayor que la frecuencia natural de éstos, todos ellos deben estar sincronizados en fase o cercanos a este régimen. De hecho, para el caso de dos osciladores también se llegó a la misma conclusión; en sincronización en fase, la frecuencia en estado estacionario es mayor que la frecuencia natural de los osciladores, caso contrario cuando se trata de sincronización en contra fase.

Capítulo 6. Análisis experimental

En los capítulos anteriores se presentaron los resultados obtenidos de manera analítica y numérica, en éste se dan a conocer los resultados que se obtuvieron de manera experimental. Sin embargo, como se mencionó en la introducción, en el mismo se presenta la instrumentación empleada para realizar las mediciones. Posteriormente se presentan los resultados que se obtuvieron de los experimentos realizados tanto para dos osciladores como para la red analizada en el capítulo anterior. Finalmente, se presenta un análisis de los resultados obtenidos a lo largo de la investigación.

6.1 Instrumentación

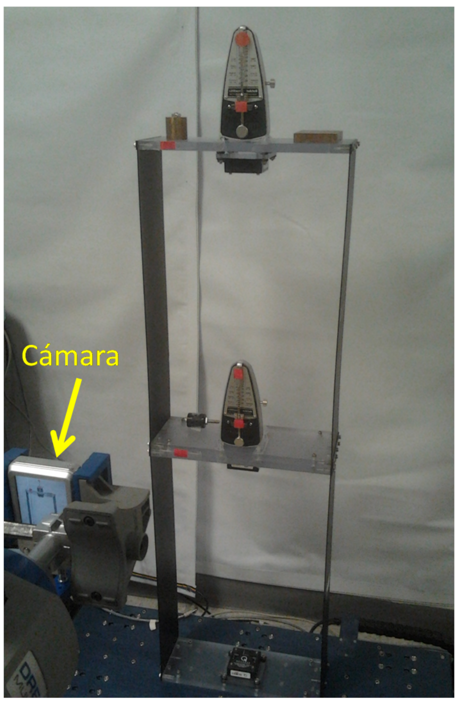


Figura 67: **Configuración usada para medir los desplazamientos angulares de los péndulos.**

Considere la imagen mostrada en la Figura 67, en la cual se puede apreciar la configuración que se realizó para la adquisición de los datos con una cámara Panasonic modelo DMC-FH4. Se genera un vídeo que después es analizado para determinar la amplitud, frecuencia y fase de las oscilaciones de cada uno de los péndulos, y poder determinar el tipo de sincronización. De lo anterior se puede concluir que este modelo es un sistema en lazo abierto, ya que no será necesario realizar un lazo de control.

Para detectar la posición de los péndulos, fue necesario poner una marca en el eje y otra en el extremo superior de la varilla. En la misma figura se pueden apreciar dichas marcas.

En cuanto al método de análisis del video, en la Figura 68 se muestra el diagrama de flujo que se siguió para obtener el ángulo de cada uno de los metrónomos. Puede observarse que antes de realizar el análisis se delimitan las áreas, ver Figura 69a, es decir, se seleccionan aquellas áreas en las que se encuentran los metrónomos sobre la estructura. Posteriormente se inicia el análisis cuadro por cuadro para cada una de las áreas seleccionadas. Finalmente, se filtran, grafican y guardan los resultados obtenidos.

En el análisis cuadro por cuadro se realiza una sustracción entre los colores rojo y verde. La razón de ésto es para obtener las diferentes tonalidades del color gris y que las marcas rojas de los metrónomos sean las más brillantes en el resultado, ver Figura 69b. Posteriormente se filtra el resultado, ver Figura 69c, y se obtienen los centroides de los puntos resultantes. En este punto se maneja una condición en la que si el número de centroides que se obtuvieron no es igual a dos veces el número de metrónomos sobre la plataforma bajo análisis, los puntos *x* e *y* se igualan a cero para este punto y se guarda el número de cuadro para su posterior análisis. El análisis de los cuadros erróneos se hace de manera individual y se determinan cuales fueron las razones por las que se generó el error. Cabe mencionar que se usa un filtro paso bajas del tipo promediador de dos coeficientes para filtrar los resultados de los desplazamientos angulares. Cabe mencionar que el algoritmo utilizado en este trabajo se basa en el que se implementó en (Franco Flores y Cuesta, 2015).

6.1.1 Validación

Antes de realizar las mediciones del sistema vertical de Huygens, se comparó este método de adquisición con el sensor magnético Honywell HCM1512. Este sensor se encuentra formado por resistencias magnéticas, i. e., resistencias que varían su valor en presencia de un campo magnético y las cuales se encuentran dispuestas en dos puentes de Weaston (Honeywell Inc., 2002; Honeywell International Inc., 2010). El diagrama del circuito empleado para detectar el campo magnético se muestra en la Figura 70. Puede observarse que el circuito se conecta una tarjeta de adquisición de datos NI-USB6952 de National Instruments, la cual se configuró para una frecuencia de muestreo de 1 kHz.

El sensor fue colocado a una distancia de 6 cm del metrónomo y a una altura de 1 cm sobre la base de la plataforma, ya que se encontró que en esta posición el mismo obtenía una onda sinusoidal. También fue necesario agregar una imán para que el sensor detectara la posición del péndulo. Dicho imán se colocó en la pesa inferior, i. e., en la

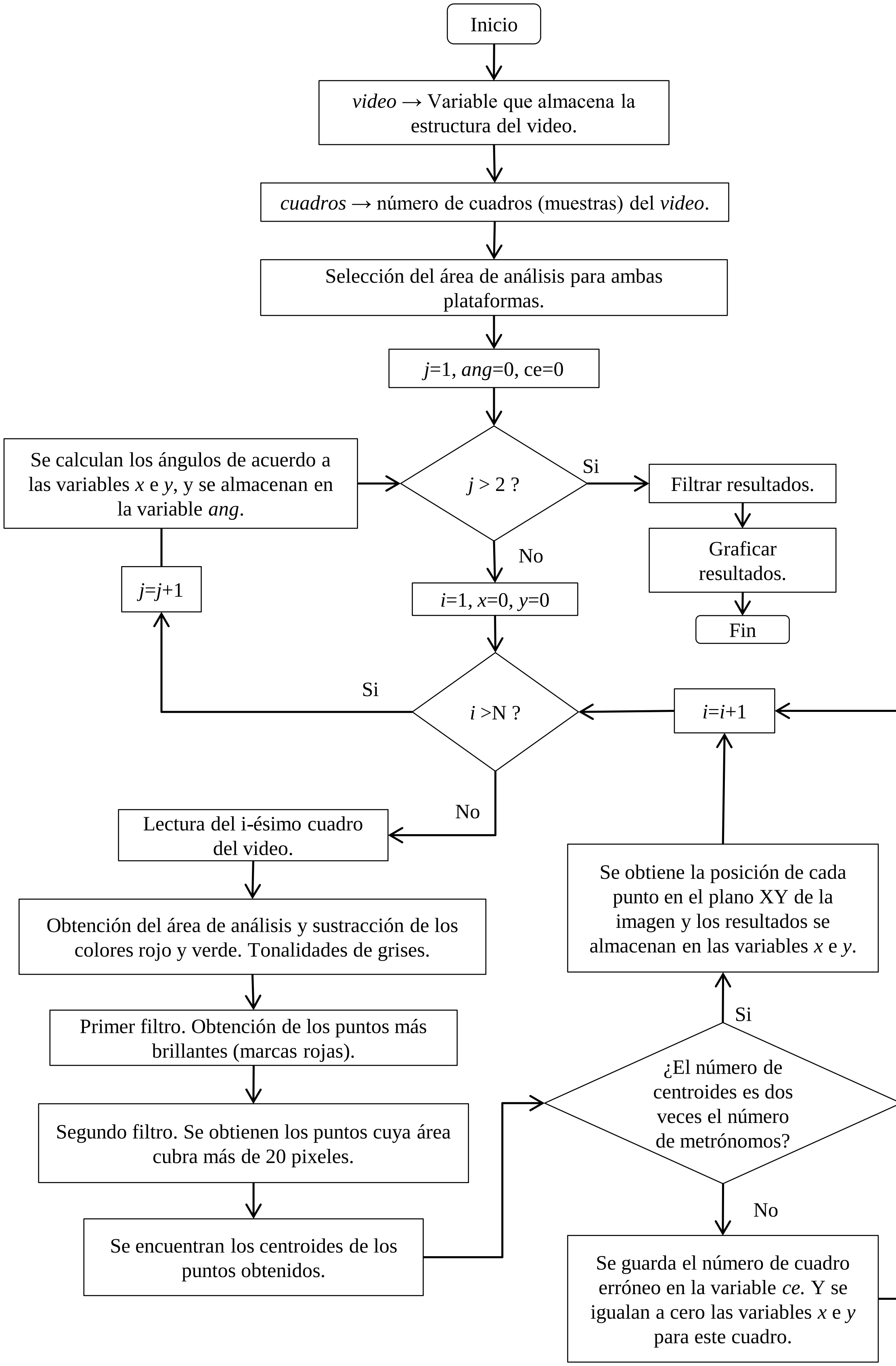
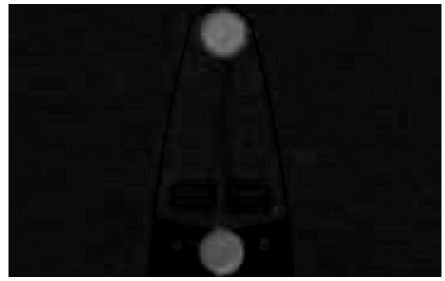
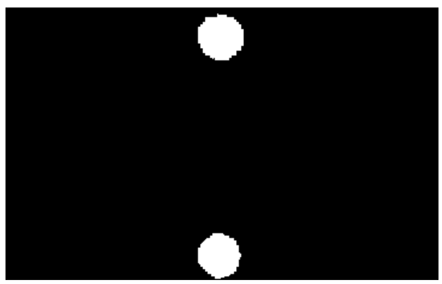


Figura 68**: Diagrama de flujo del algoritmo implementado para obtener los desplazamientos angulares de los péndulos.**

(a) Delimitación de las áreas



(b) Tonalidades de grises



(c) Filtrado

Figura 69**: Resultados de cada procedimiento en el análisis de cada cuadro.**

pesa de mayor valor.

Mediante el programa Labview Signal Express los datos fueron adquiridos y procesados. En la Figura 71a se muestra la señal adquirida para una escala de oscilación del metrónomo de 208 $beats/min$ y puede observarse que existe un nivel de corriente directa. Para eliminar ese nivel, se aplicó un desbalance de aproximadamente 2 V y posteriormente un filtro, ver Figura 71b. El filtro que se aplicó fue un filtro Bessel pasa banda de segundo orden, cuyas frecuencias de corte se establecieron a $100\ mHz$ y $10\ Hz$. En las dos figuras se aprecian sólo los primeros 60 segundos de la adquisición.

En la Figura 71 se muestran sólo los niveles de voltaje que se obtuvieron con el sensor; sin embargo, estos no representan el desplazamiento angular del metrónomo. Para ello

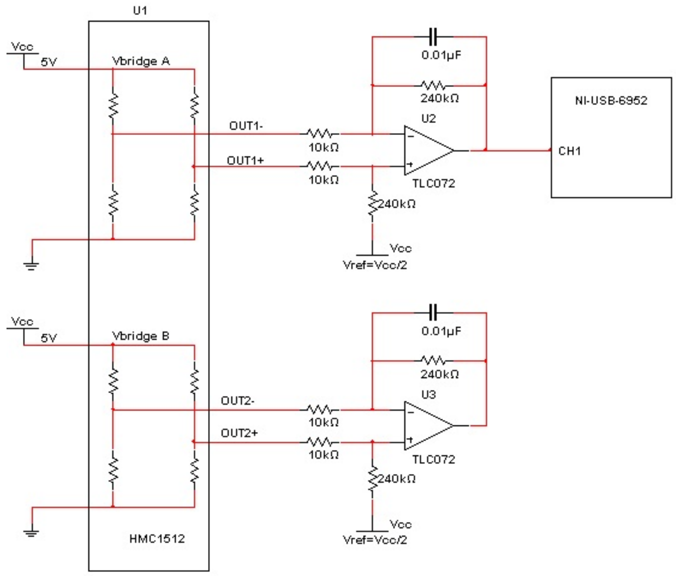
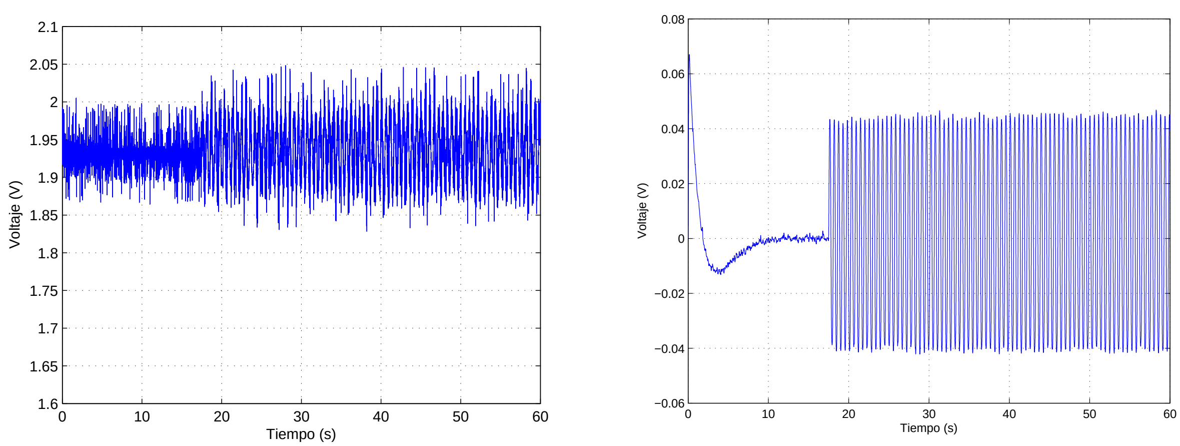


Figura 70**: Diagrama del circuito del sensor magnético (Honeywell Inc., 2002).**



(a) Señal adquirida **(b) Señal filtrada**

Figura 71**: Adquisición y filtrado de la señal generada con el sensor magnético.**

es necesario aplicar la ecuación que el fabricante proporciona en la hoja de datos del sensor. Dicha ecuación está dada por (Honeywell Inc., 2002)

$$\Delta V = -V_s S \sin(2\theta), \tag{127}$$

donde ΔV representa los cambios de voltaje, i. e., la señal adquirida, S es la sensibilidad del material cuyo valor es de $12\ mV/V$ y V_s es el voltaje de la fuente de alimentación, la cual, en este caso es de $5\ V$. Para obtener el desplazamiento angular, se despeja a θ

de (127) y se resuelve para cada valor de voltaje que se obtuvo. Al aplicar el despeje en la señal filtrada, se obtiene la señal de la Figura 72. Puede observarse que la señal obtenida es completamente sinusoidal.

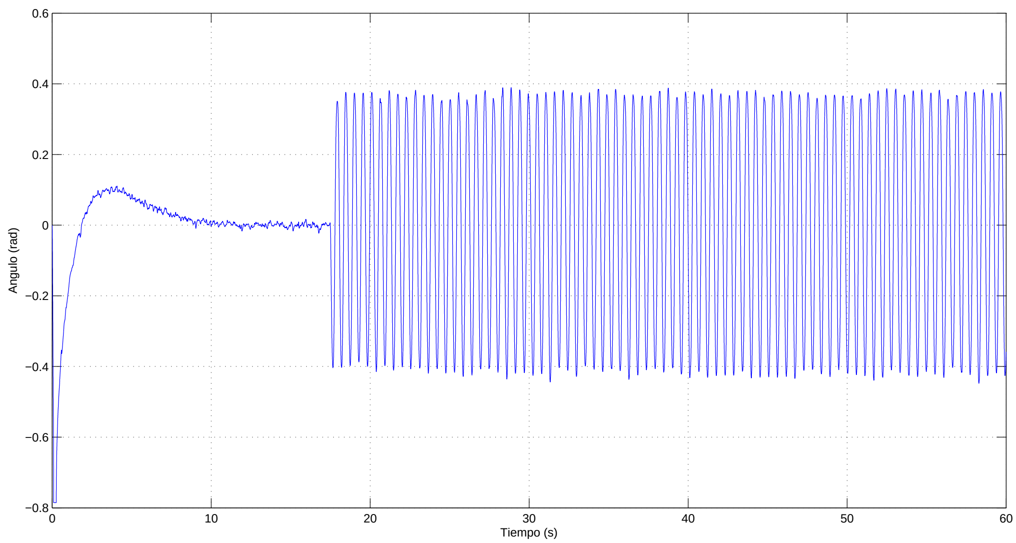
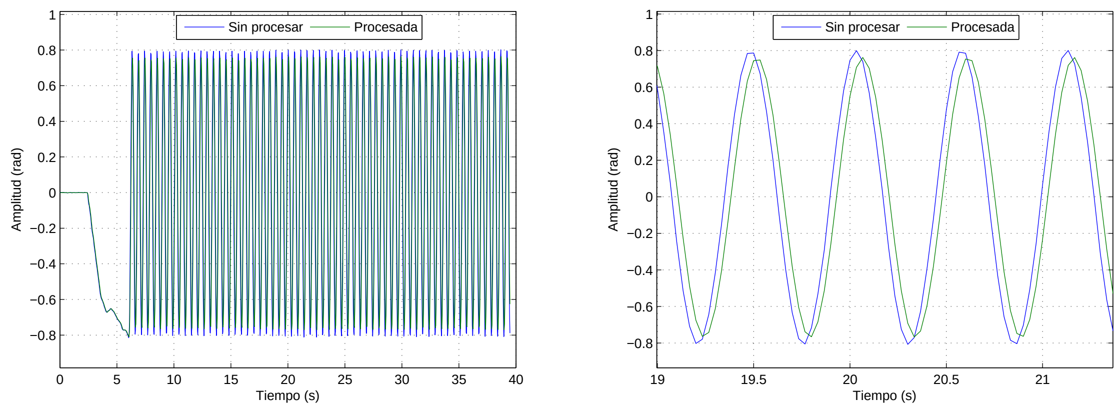


Figura 72**: Desplazamiento angular del metrónomo.**

En cuanto a la señal obtenida con la cámara, se muestra en la Figura 73. En la Figura 73a puede observarse la serie de tiempo para la señal procesada y sin procesar. En la Figura 73b se presenta un acercamiento y se puede apreciar que la señal procesada se encuentra desfasada y su amplitud es menor que la señal original. El desfase se debe a que es un fenómeno inherente al comportamiento de los filtros, incluso en la señal filtrada del sensor, también se presenta dicho desfase. En cuanto a la amplitud, se ve reducida debido a que el filtro paso bajas usado es promediador y, por lo tanto, se promedian los valores de las dos muestras.

Como puede observarse la Figura 72 es diferente a la Figura 73, la razón de esta diferencia es que las señales fueron tomadas en diferentes momentos. Sin embargo, un estudio de su espectro de frecuencias puede mostrar las similitudes que existen entre ellas. En la Figura 74 se presenta el espectro de frecuencias de ambas señales, y puede observarse que las frecuencias principales de ambas señales son aparentemente iguales.



(a) serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 73**: Señal obtenida con la cámara.**

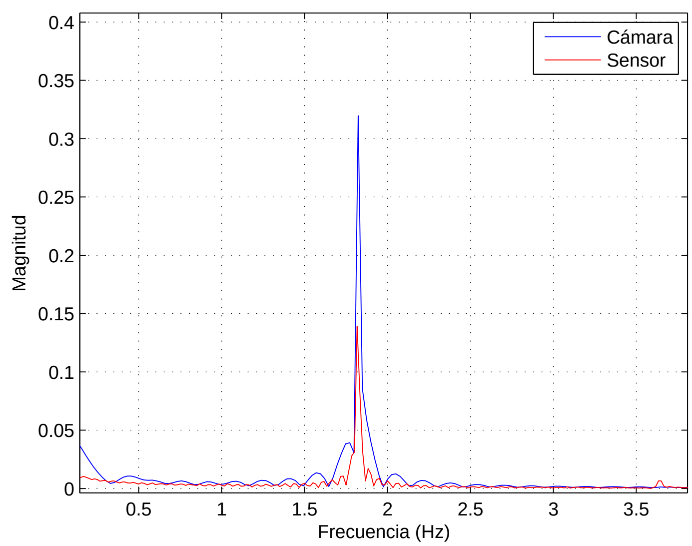


Figura 74**: Espectro de frecuencias de las señales.**

Al determinar las frecuencias por medio de la transformada de Fourier se tiene que la frecuencia del oscilador, de acuerdo con la cámara, es de $1.8227\ Hz$; en cambio, con el sensor es de $1.8166\ Hz$.

En la Tabla 18 se muestran los resultados que se obtuvieron de las mediciones realizadas. Puede observarse que los resultados con ambos métodos son muy parecidos. Sin embargo, al cotejarlos con el valor esperado se puede ver que están alejados de dicho valor, sobre todo a frecuencias bajas, i. e., lo de 0.333 y $0.7\ Hz$.

Los errores que se presentan en bajas frecuencias se deben al imán utilizado para

Tabla 18: **Mediciones realizadas con el sensor y la cámara.**

Escala ($beats/min$)	Frecuencia (Hz)	Frecuencia de la adquisición (Hz)		Errores (%)	
		Cámara	Sensor	Cámara	Sensor
208	1.7333	1.8333	1.8310	5.7700	5.6346
104	0.8667	1.0326	1.0237	19.1409	18.1145
84	0.7	0.8803	0.8788	25.7594	25.5361
40	0.3333	0.6327	0.6278	89.8154	88.3260

obtener el desplazamiento del metrónomo mediante el sensor magnético, los mismos valores se volvieron a medir pero ahora sin el imán y las frecuencias obtenidas se encuentran cercanas a la esperada. En la Tabla 19 se presentan los resultados obtenidos.

Tabla 19: **Mediciones realizadas con la cámara.**

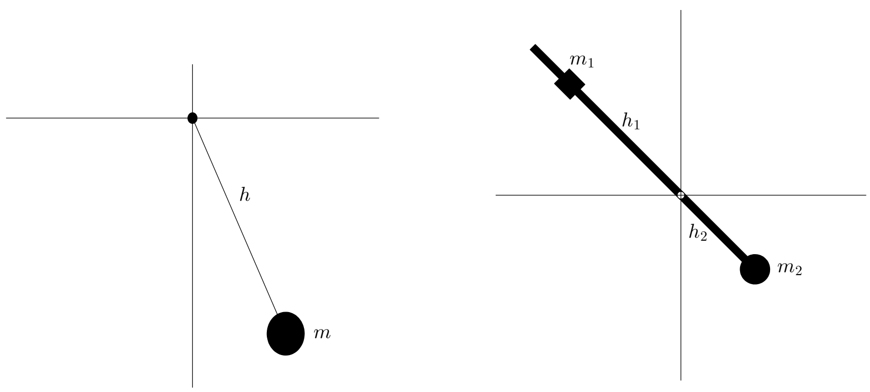
Escala (beats/min)	Frecuencia (Hz)	Frecuencia medida (Hz)	Error %
40	0.3333	0.3226	3.2258
84	0.7	0.688	1.7142
104	0.8667	0.8553	1.3157
208	1.7333	1.7250	0.4807

El lector podrá preguntarse en qué afecta la masa del imán al metrónomo, para responder a esta pregunta es necesario definir el centro de masa y el momento de inercia de un cuerpo. El centro de masa es el punto en un cuerpo en el cual se puede concentrar toda la masa; y el momento inercia es la resistencia que presentan un cuerpo a un movimiento rotacional (Serway y Jewett Jr., 2005a). Cabe mencionar que el centro de masa se encuentra más cerca de la masa de mayor valor. El mismo y el momento inercia se encuentran dadas por

$$x_{c.m.} = \frac{\sum_{i=1}^{K} m_i h_i}{\sum_{i=1}^{K} m_i}, \quad \text{y} \quad J = \sum_{i=1}^{K} m_i h_i^2, \tag{128}$$

donde m_i es la masa en cada punto del cuerpo, h_i es la distancia a la que se encuentra esa masa con respecto al eje de rotación, $x_{c.m.}$ representa el centro de masa y J el segundo momento de inercia del cuerpo. En (128) se puede apreciar que si se cambia alguna de las masas, el centro de masa y el segundo momento de inercia del cuerpo se ven afectados.

Ahora, en este caso no se está trabajando con un péndulo simple, por el contrario, se está trabajando con un péndulo compuesto o físico. El péndulo simple es un péndulo ideal y se representa por una varilla de masa despreciable y una masa puntual a una distancia h de su eje de rotación, ver Figura 75a. En cambio, un péndulo compuesto, como su nombre lo indica, está compuesto por una distribución no uniforme de masas, ver Figura 75b, donde la varilla también puede jugar un papel importante en el cálculo de la inercia y del centro de masa.



(a) Péndulo simple **(b) Péndulo compuesto**

Figura 75**: Tipos de péndulos.**

La frecuencia de un péndulo compuesto está dada por (Serway y Jewett Jr., 2005b)

$$w = \sqrt{\frac{m_T x_{c.m.} g}{J}}, \tag{129}$$

donde m_T es la masa total del péndulo. Puede observarse que la frecuencia de un péndulo físico depende de la masa del mismo; es decir, que si se cambia ésta, la frecuencia cambia con ella. Lo anterior es la razón por la que cambia la frecuencia al usar el imán, pues se agrega otra masa que incrementa la distancia en el centro de masa y el eje de giro. También es la razón por la que el metrónomo puede oscilar a frecuencias tan bajas sin la necesidad de tener una varilla de masa despreciable y de una longitud de aproximadamente dos metros.

De lo anterior se puede concluir que el uso de la cámara de video como método de adquisición es adecuado para lo que se requiere en este apartado, ya que no agrega otros factores a la dinámica del péndulo. También se concluye que el método de validación es aceptable tomando en cuenta lo que se mencionó en los párrafos anteriores. Sin embargo, cabe recalcar que usar un sensor magnético no es la mejor opción para medir el desplazamiento angular del metrónomo sí se quiere respetar la frecuencia correspondiente a la escala. En caso de que no sea necesario respetar la escala, se tendrá que calcular la nueva frecuencia que se tenga al agregar el imán, sobre todo a frecuencias bajas o en su defecto usar un imán cuya masa no afecte al oscilador.

Opciones alternas al sensor magnético pueden ser los sensores ópticos o los inductivos, ya que estos no afectan la dinámica del péndulo; pues no es necesario agregar otro elemento al mismo para poder realizar la medición. También es posible hacer mediciones en tiempo real con una cámara. Pero, sí se requiere para control, se tiene que tomar en cuenta que este método puede generar un retardo que afecte al controlador que se aplique, ya que se tiene que procesar la imagen.

En las siguientes secciones se presentan los resultados experimentales para las configuraciones realizadas en los capítulos tres y cuatro.

6.2 Experimentos para dos osciladores

En el capítulo cuatro se mostraron los resultados obtenidos de manera numérica y analítica para el caso de dos osciladores, en este apartado se presentan los experimentos realizados para el mismo caso.

Los parámetros reales del sistema se presentan en la Tabla 20, donde aquéllos relacionados a la estructura se obtuvieron de (Hirata Salazar, 2016), puede observarse que son parecidos a los empleados en el análisis numérico, salvo por las masas de la estructura y la masa del metrónomo. En dicho estudio, la primera se igualó a la masa de la plataforma inferior y la segunda no se tomó en cuenta.

Los experimentos realizados constaron en cambiar los valores de las masas de la estructura y de la frecuencias naturales de los osciladores, de tal forma que una permanecía

Tabla 20: **Parámetros para la sincronización vertical de Huygens.**

Elemento	Parámetro	Valor
Plataforma inferior	Masa (M_1)	1.3kg
	Amortiguamiento (b_1)	0.08Ns/m
	Constante elástica (k_1)	500 N/m
Plataforma superior	Masa (M_2)	0.6kg
	Amortiguamiento (b_2)	0.08Ns/m
	Constante elástica (k_2)	500 N/m
Metrónomo	Masa del péndulo m_i $(i = 1, 2)$	0.03 kg
	Masa del metrónomo sin péndulo	0.12 kg
	Amortiguamiento δ_i $(i = 1, 2)$	2×10^{-5} Ns/m
Término de van der Pol	Factor de no linealidad ν	1.5×10^{-3} Ns/m
	Cambio de signo γ_i $i = 1, 2)$	0.2 rad

constante mientras la otra se variaba. La razón por la cual se estudiaron sólo estos dos parámetros radica en que son los únicos que se pueden modificar en todo el sistema, ya que el amortiguamiento y la elasticidad de la estructura son constantes.

Para igualar las masas, o aproximarlas, se usaron algunas pesas. También, en ambas plataformas, se tomó en cuenta la masa del metrónomo sin la masa del péndulo. El peso que se agregó a la plataforma superior fue de $0.75\ kg$, mientras que en la plataforma inferior se agregó una pesa de $0.05\ kg$. De acuerdo con los pesos agregados se tiene que la masas de ambas plataformas es de $1.47\ kg$ lo cual se aproxima a $1.5\ kg$.

En cuanto a las definiciones de sincronización, al igual que en el estudio numérico, sólo se toman en cuenta las Definiciones 2.3 y 2.4. En estos casos los errores que se consideran son $\epsilon_{fg} = \epsilon_{cg} = 0.65\ rad$, ya que hay que considerar que existen diferencias paramétricas entre los osciladores y ajustar el error a un valor más pequeño haría demasiado restrictivo el análisis.

Cabe mencionar que las condiciones iniciales para las cuales se realizaron los experimentos se determinaron después de analizar el video de cada experimento, i. e., no se tenía un control sobre las condiciones iniciales de los metrónomos.

En las siguientes secciones se presentan los resultados que se obtuvieron después de realizar los experimentos. En la primera parte se tratan los cambios en frecuencia, mientras que en la segunda se presentan los resultados relacionados con el cambio en las masas.

6.2.1 Frecuencias de los osciladores

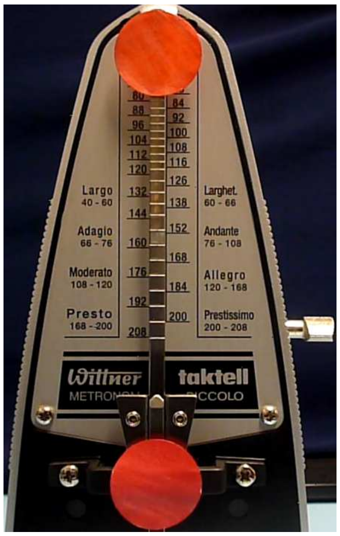


Figura 76**: Escala de 234** $beats/min$

Como se mencionó en párrafos anteriores, en este apartado se presentan los resultados que se obtuvieron después de realizar los experimentos que tratan sobre el estudio de las frecuencias. Para ello, éstas se seleccionaron al posicionar la contrapeso en diferentes escalas del metrónomo, desde la escala más alta hasta aquella en la que desaparecía la sincronización. Sin embargo, los experimentos se realizaron principalmente para tres escalas 208, 234 y 254. Cabe mencionar que las frecuencias más altas corresponden a las escalas de 234 y 254 $beats/min$, las cuales se alcanzan cuando la contrapeso se encuentra cerca del eje de rotación, ver Figura 76, y cuando se retira el contrapeso, respectivamente.

Las frecuencias de las escalas que se mencionaron en el párrafo anterior se presentan en la Tabla 21. Pues desde este punto sólo se mencionan las frecuencias.

Tabla 21**: Parámetros para la sincronización vertical de Huygens.**

Escala ($beats/min$)	Frecuencia (Hz)
208	1.7333
234	1.95
254	2.1166

6.2.1.1 Frecuencia de 1.7333 Hz ó 208 $beats/min$

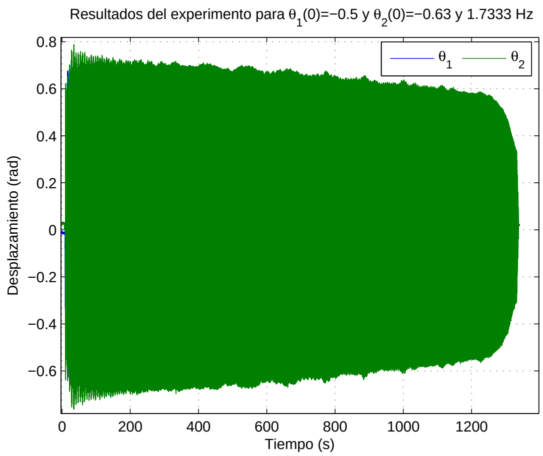
Para la frecuencia de 1.7333 Hz, se obtuvieron los resultados mostrados en las Figuras 77a, 77c y 77e para las condiciones iniciales $\theta_1(0) = -0.63$ y $\theta_1(0) = -0.5$. En cuanto a las Figuras 77b, 77d y 77f presentan el resultado que se obtuvo de las simulaciones para dichas condiciones iniciales. Puede observarse que en ambos casos el resultado es sincronización en fase, ver Figuras 77e y 77f. Aunque el desfase no es el mismo, ver Figuras 77c y 77d, y los resultados del experimento se atenúan, se puede decir que aquéllos que se obtuvieron con el modelo son congruentes con los del experimento. Otra observación que se puede realizar es que en el experimento se alcanza el estado estacionario en aproximadamente 200 seg. mientras que en la simulación tarda un poco más, comparar las Figuras 77a y 77b.

Para la misma frecuencia pero con condiciones iniciales en contra fase, de aproximadamente 1 rad, se obtuvieron los resultados de la Figura 78. Puede observarse que el resultado es sincronización en fase, ver Figura 78c. En cuanto a la simulación relacionada con estos resultados, se presentan en las Figuras 78b y 78d. Puede observarse que los resultados numéricos concuerdan con los resultados experimentales, al menos en una forma cualitativa, i. e., bajo estas condiciones iniciales y los parámetros empleados en el experimento, el modelo es capaz de predecir el régimen de sincronización al cual convergerá el experimento. Puede observarse que se ha omitido la amplificación en la serie de tiempo.

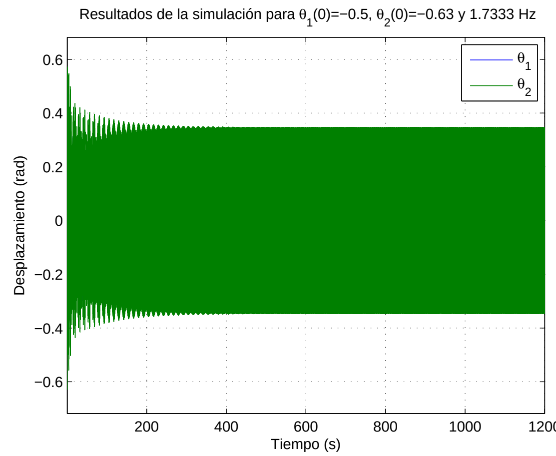
En total se realizaron cuatro experimentos para la frecuencia de 1.7333 Hz, donde en el último las condiciones iniciales se manejaron en fase con una apertura de aproximadamente $1\ rad$; el resultado que se obtuvo fue en fase, como se puede ver en la Tabla 22.

Los resultados de fase y frecuencia tanto de los experimentos como de las simulaciones, se presentan en la Tabla 22. Puede observarse que las frecuencias son iguales, pero las fases difieren. También se puede observar de los experimentos que las fases no son tan diferentes entre ellas. En cambio, al compararlas con las simulaciones se puede apreciar que existen grandes diferencias, sobre todo en aquel experimento en el que se inicia en contra fase y finaliza en fase.

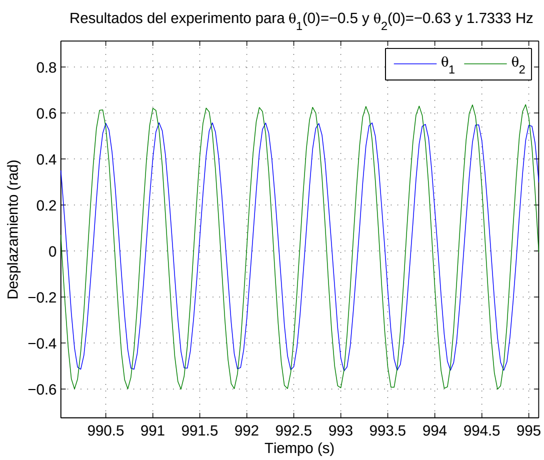
En los próximos experimentos no se grafican los resultados, salvo que se consideren de relevancia. En cambio, se tabulan las frecuencias y fases de los experimentos realiza-



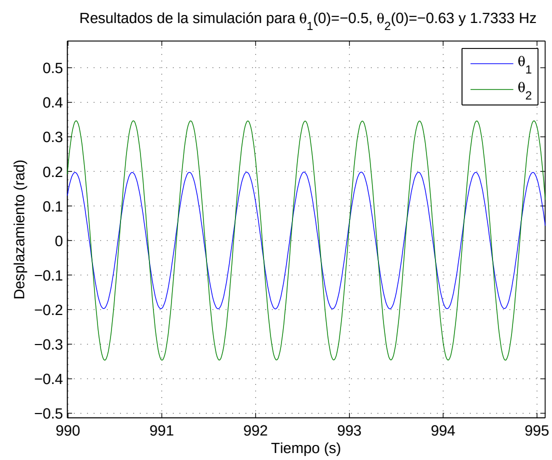
(a) serie de tiempo del experimento



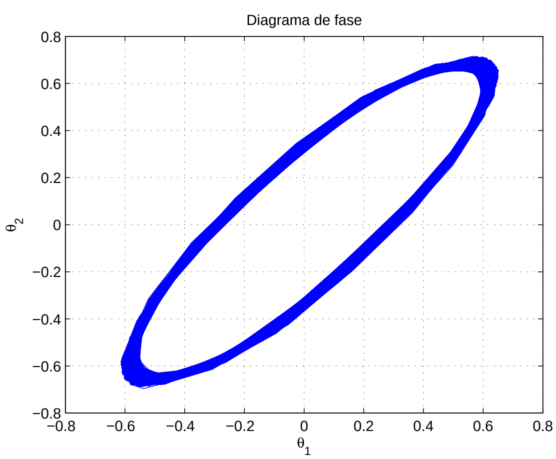
(b) serie de tiempo de la simulación



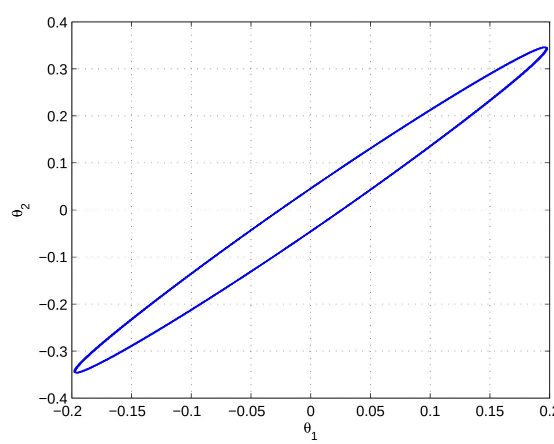
(c) Acercamiento de la serie de tiempo del experimento



(d) Acercamiento de la serie de tiempo de la simulación

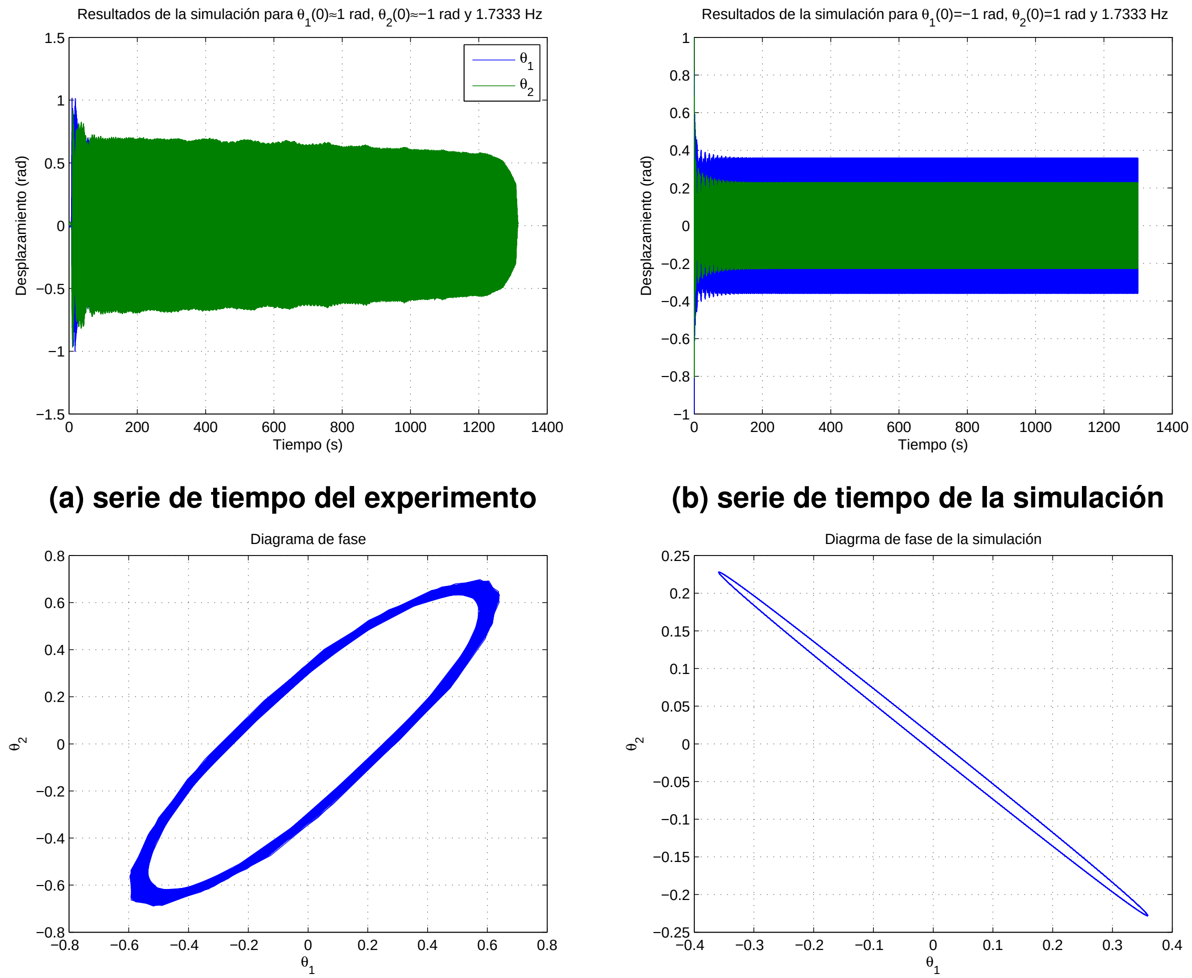


(e) Diagrama de fase del experimento



(f) Diagrama de fase de la simulación

Figura 77**: Resultados del experimento y de la simulación para** $\theta_1(0) = -0.5\ rad,\ \theta_2(0) = -0.63\ rad$ **y** $F_0 = 1.7333\ Hz$**.**



(a) serie de tiempo del experimento **(b) serie de tiempo de la simulación**

(c) Diagrama de fase del experimento **(d) Diagrama de fase de la simulación**

Figura 78: **Resultados del experimento y las simulaciones para $M \approx 1.5kg$ y $F_0 = 1.7333Hz$ y condiciones iniciales en contra fase $\theta_i \approx -\theta_2 \approx 1rad$ ($i = 1, 2$).**

Tabla 22: **Resultados de fase y frecuencia para una frecuencia inicial de 208 $beats/min$.**

Condiciones iniciales	Frecuencia (Hz)		Fase (rad)	
	Simulación	Experimento	Simulación	Experimento
$\theta_i \approx 1\ rad\ (i = 1, 2)$	1.63989	1.78	0.12964	0.54652
$-0.6rad < \theta_i < -0.5rad$	1.63989	1.78	0.12961	0.64106
$\theta_1 \approx -\theta_2 \approx 1\ rad\ (i = 1, 2)$	1.71991	1.78	-3.09414	0.56468

dos, así de como de las simulaciones realizadas para comparar los resultados.

6.2.1.2 Frecuencia de 1.95 Hz ó 234 $beats/min$

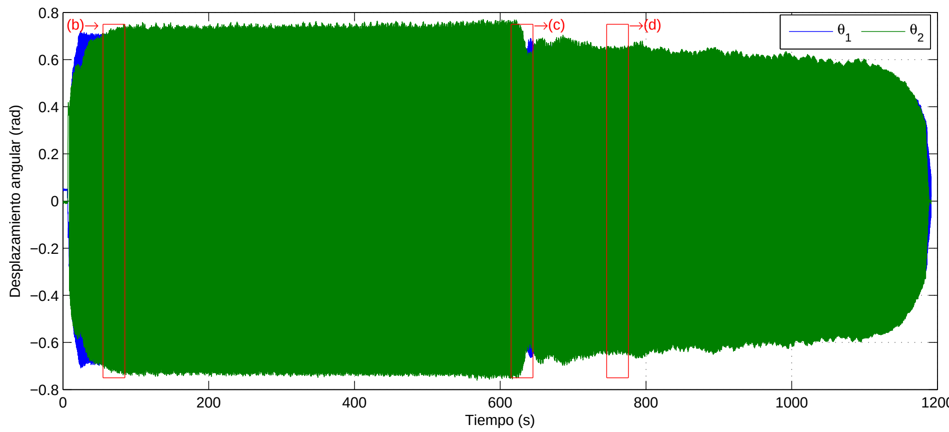
Para una frecuencia de 1.95 (escala de 234 $beats/min$) se obtienen los resultados de la Tabla 23, donde “Sim.” es de simulación y “Exp.” de experimento. Puede observarse que existen condiciones en fase para las cuales existen regiones de sincronización en contra fase. En cambio, cuando las condiciones iniciales son cercanas a contra fase, existe un rango para el cual el régimen de sincronización en fase existe. Sin embargo, fuera de ese rango, el régimen de sincronización en contra fase es predominante. También se puede observar que las frecuencias entre los mismos regímenes son iguales y sus fases difieren no por mucho, excepto en el caso $\theta_1 \approx 0.4\ rad\ \theta_2 \approx -0.4\ rad$. Además, todas las frecuencias, tanto para sincronización en fase como en contra fase, están por arriba de este valor, de acuerdo con los experimentos. También se puede observar que sólo existe una condición para la cual no hay congruencia entre los resultados numéricos y los experimentales.

Tabla 23**: Resultados de fase y frecuencia para una frecuencia inicial de 1.95 Hz, o escala de 234 $beats/min$.**

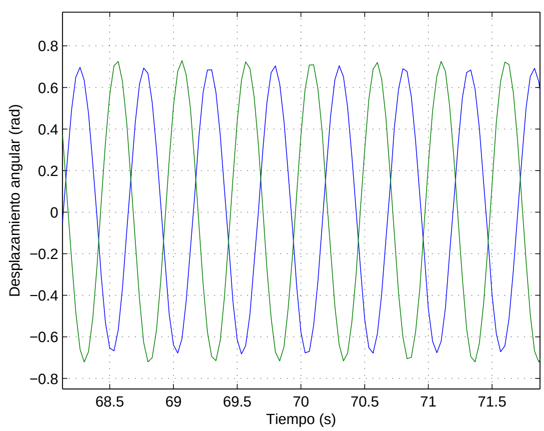
Condiciones iniciales (rad)	Frecuencia (Hz)		Fase (rad)		Régimen	
	Sim.	Exp.	Sim.	Exp.	Sim.	Exp.
$\theta_1 \approx -0.27$, $\theta_2 \approx -0.35$	2.01987	2	-0.17937	0.53285	F.	F.
$\theta_1 \approx -0.7$, $\theta_2 \approx -0.8$	2.01989	1.98666	-0.17955	3.75287	F.	C. F.
$\theta_1 \approx 0.4$, $\theta_2 \approx -0.3$	1.9332	1.99333	-3.29971	0.55709	C. F.	F.
$\theta_1 \approx 0.8$, $\theta_2 \approx -0.54$	1.9332	1.98666	-3.29966	3.68285	C. F.	C. F.
$\theta_1 \approx 0.76$, $\theta_2 \approx -0.7$	1.9349	1.98666	-3.29959	-3.29958	C. F.	C. F.

Para el caso de $\theta_1 \approx 0.4\ rad$ y $\theta_2 \approx -0.3\ rad$ se presenta la gráfica, ya que en este caso el régimen inicial, aparentemente, es contra fase; sin embargo, éste cambia a fase. La gráfica se puede apreciar en la Figura 79. Puede observarse que antes de los 600 seg. el régimen parece ser contra fase, ver Figura 79b, y después de los 600 seg. éste cambia a fase, ver Figura 79d. En la Figura 79c se puede apreciar el momento en el que empieza el cambio de régimen. A diferencia de las simulaciones, en este caso el régimen en contra fase muestra que el oscilador superior (θ_2) tiene mayor amplitud y su amplitud crece conforme el tiempo pasa, lo cual causa que el sistema se reinicie y converja a sincronización en fase.

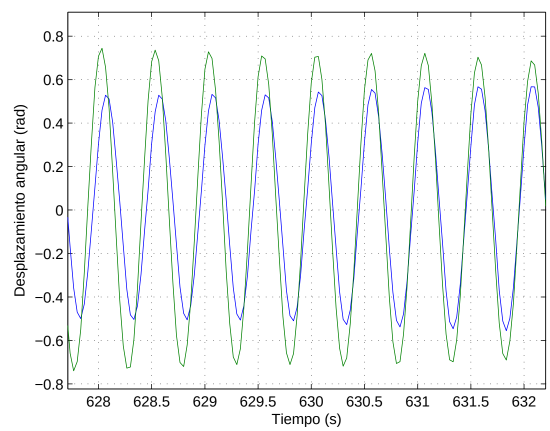
En cuanto al régimen de sincronización en contra fase, casos $\theta_1 \approx -0.69\ rad\ rad$ y $\theta_2 \approx -0.79\ rad$, $\theta_1 \approx 0.4\ rad$ y $\theta_2 \approx -0.36\ rad$, $\theta_1 \approx 0.76\ rad$ y $\theta_2 \approx -0.54\ rad$ y, $\theta_1 \approx 0.7\ rad$ y $\theta_2 \approx -0.7\ rad$, las gráficas son similares; por lo que sólo se presentan los resultados



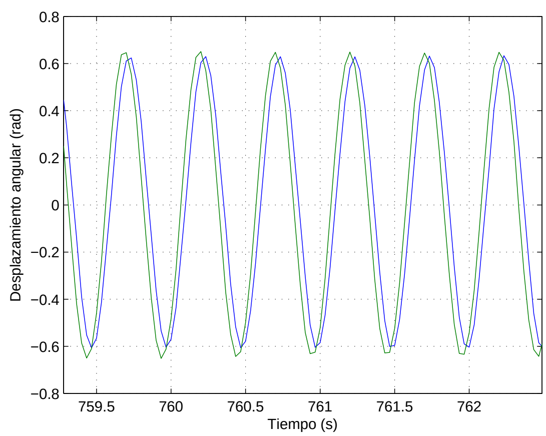
(a) serie de tiempo



(b) Principio



(c) Cambio



(d) Desplazamiento final

Figura 79: **Resultados obtenidos del experimento para $\theta_1 \approx 0.4\ rad$ y $\theta_2 \approx -0.3\ rad$.**

para $\theta_1 \approx 0.76\ rad$ y $\theta_2 \approx -0.7\ rad$, los cuales se muestran en las Figuras 80a y 80c. Puede observarse que el oscilador de la plataforma inferior mantiene su amplitud mientras que la amplitud del oscilador de la otra plataforma decrece hasta que la cuerda se acaba, ver Figura 80a. También se puede observar que al final del experimento, el oscilador de la plataforma inferior se mantiene oscilando por un cierto tiempo, ésto se debe a que la cuerda del metrónomo todavía permite que el mecanismo de escape proporcione la energía suficiente para compensar las pérdidas por la fricción. Cabe mencionar que ésto se observó en todos los caso en los que se dio sincronización en contra fase. En cuanto al modo de sincronización se puede apreciar en la Figura 80c, donde se presenta el diagrama de fases que se obtuvo entre los 700 seg. y los 900 seg.

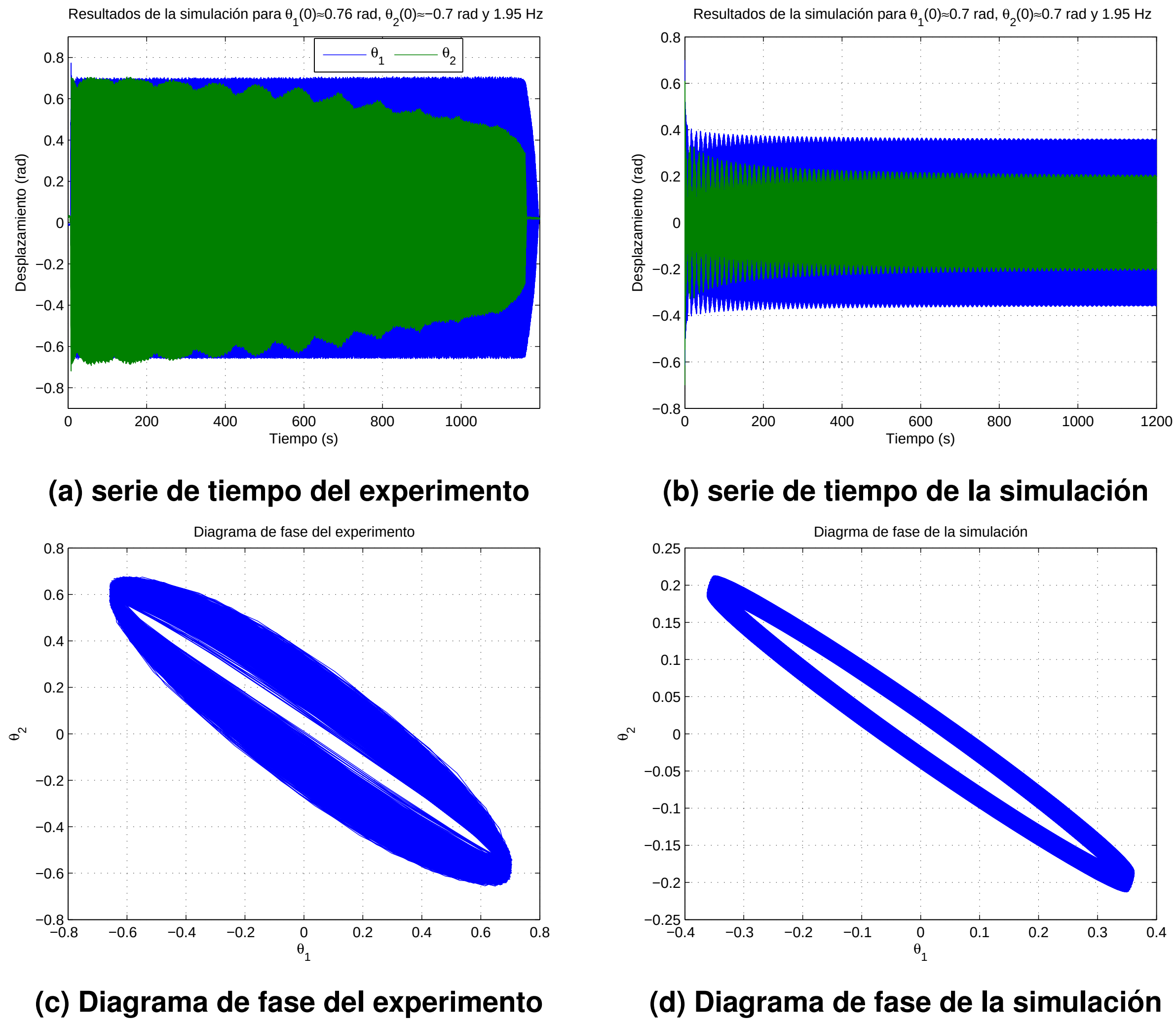
Si los resultados del experimento se comparan con su respectiva simulación, se podrá encontrar que el comportamiento es similar. El resultado de la simulación se puede apreciar en las Figuras 80b y 80d. La única diferencia que existe es que en la simulación las oscilaciones no se apagan, sin embargo, el tiempo en el que alcanza el estado estacionario es aproximadamente el mismo en el que la cuerda se de los osciladores se acaba. Es decir, que si la cuerda de los osciladores durara más tiempo, la Figura 80a tendría la misma forma que la Figura 80b.

6.2.1.3 Frecuencia de 2.1166 Hz ó 254 $beats/min$

Para una frecuencia de 2.1166 Hz se tienen los resultados de la Tabla 24, donde se puede apreciar que para condiciones iniciales en contra fase no existe sincronización de acuerdo con las simulaciones. Por otro lado, para condiciones iniciales en fase ambos resultados, experimentales y numéricos, arrojan el mismo régimen.

Tabla 24: **Resultados de fase y frecuencia para una frecuencia inicial de 2.1166 Hz, o escala de 254 $beats/min$.**

Condiciones iniciales (rad)	Frecuencia (Hz)		Fase (rad)		Régimen	
	Sim.	Exp.	Sim.	Exp.	Sim.	Exp.
$\theta_1 \approx -0.5$, $\theta_2 \approx -0.6$	2.16652	2.15333	-0.31891	0.29912	Fase	Fase
$\theta_1 \approx -0.8$, $\theta_2 \approx -0.7$	2.16489	2.15333	-0.31912	0.36464	Fase	fase
$\theta_1 \approx 0.4$, $\theta_2 \approx -0.4$	-	2.15333	-	0.35241	-	Fase
$\theta_1 \approx 1$, $\theta_2 \approx -0.9$	-	2.15333	-	0.33461	-	Fase



(a) serie de tiempo del experimento **(b) serie de tiempo de la simulación**

(c) Diagrama de fase del experimento **(d) Diagrama de fase de la simulación**

Figura 80**: Resultados del experimento y de la simulación para $\theta_1 \approx 0.76\ rad$ y $\theta_2 \approx -0.7\ rad$, con una frecuencia inicial de 1.95 Hz y $M_1 = M_2 \approx 1.5\ kg$.**

En la Tabla 25 se presentan los promedios de las frecuencias y fases para cada régimen de las frecuencias analizadas. Puede apreciarse que la única frecuencia en la que se encuentra coexistencia en el sistema es la de 1.95 Hz ó 234 $beats/min$. En cuanto a la frecuencia de 1.3333 Hz se encontró que esta era la frecuencia de menor valor en la cual era posible encontrar sincronización.

6.2.2 Masas de la estructura

En el apartado anterior se presentaron los resultados que se obtuvieron al realizar los cambios en las frecuencias de los osciladores, donde se pudo observar que existe un rango de éstas para el cual el modelo es capaz de predecir el tipo de sincronización, fuera de ese rango no se garantiza que el mismo pueda predecir el régimen al cual con-

Tabla 25: **Resultados de fase y frecuencia para una frecuencia inicial de 2.1166 Hz, o escala de 254 $beats/min$.**

Frecuencia natural (Hz)	Escala ($beats/min$)	Sinc. en fase		Sinc. en contra fase	
		Frec. (Hz)	Fase (rad)	Frec. (Hz)	Fase (rad)
1.3333	176	-	-	1.33238	3.22171
1.5333	184	-	-	1.52237	-3.13522
1.6	192	1.63736	-0.05680	-	-
1.6666	200	1.71235	-0.20961	-	-
1.7333	208	1.78	0.58408	-	-
1.95	234	1.9967	0.54497	1.9867	3.47311
2.1166	254	2.1533	0.3377	-	-

vergerá el sistema. También se pudo apreciar que existe un rango en el que el modelo experimental presenta algún tipo de sincronización.

En este apartado se presentan los resultados que se adquirieron después de realizar los experimentos con los cambios de masas. El estudio realizado consistió en cambiar las masas de la estructura mientras la frecuencia permanecía constante en $1.95Hz$ ó $234\ beats/min$. La masas estudiadas fueron $1.5\ kg$, cuyos resultados para $1.95\ Hz$ ya se presentaron en el apartado anterior en la Tabla 23, $1.75\ kg$ y $2\ kg$.

Para alcanzar los $1.75\ kg$ en ambas plataformas, además de agregar las pesas utilizadas en los experimentos anteriores, fue necesario agregar una masa de $0.25\ kg$ para alcanzar la masa requerida. Los resultados que se obtuvieron después de realizar los experimentos relacionados con esta masa, se muestran en la Tabla 26. Puede observarse que los desfases son muy parecidos cuando se trata de una mismo régimen.

Tabla 26: **Resultados de fase y frecuencia para una masa de $1.75\ kg$.**

Condiciones iniciales (rad)	Frecuencia (Hz)		Fase (rad)		Régimen	
	Sim.	Exp.	Sim.	Exp.	Sim.	Exp.
$\theta_1 \approx 0.43$, $\theta_2 \approx -0.43$	-	1.99333	-	-0.56852	-	Fase
$\theta_1 \approx 0.7$, $\theta_2 \approx -0.72$	-	1.99333	-	-0.56251	-	fase
$\theta_1 \approx 0.48$, $\theta_2 \approx -0.58$	-	1.98666	-	-3.73665	-	C. Fase
$\theta_1 \approx -0.4$, $\theta_2 \approx -0.63$	1.9899	1.99333	-0.27098	-0.49945	Fase	Fase
$\theta_1 \approx -0.37$, $\theta_2 \approx -0.47$	1.9899	1.98666	-0.27107	-3.72927	Fase	C. Fase
$\theta_1 \approx -0.71$, $\theta_2 \approx -0.72$	1.9899	1.98666	-0.27109	-3.94217	Fase	-

Para aproximar las masas de las plataformas a $2\ kg$, a la masa anterior se le agregó una pesa de $0.25\ kg$. En cuanto a los resultados para esta masa se presentan en la Tabla 27. Puede observarse que los valores de fase son muy parecidos; sin embargo, sólo para un valor se presenta sincronización ya que no se cumple con la funcional. Pero, se puede apreciar que, a diferencia de los otros experimentos, en éste la frecuencia es prácticamente la misma para todos los experimentos realizados.

Tabla 27**: Resultados de fase y frecuencia para una masa de $2\ kg$.**

Condiciones iniciales (rad)	Frecuencia (Hz)		Fase (rad)		Régimen	
	Sim.	Exp.	Sim.	Exp.	Sim.	Exp.
$\theta_1 \approx 0.41$, $\theta_2 \approx -0.44$	1.9699	1.98666	-0.35409	-0.77528	Fase	-
$\theta_1 \approx 0.68$, $\theta_2 \approx -0.66$	1.9699	1.98466	-0.35411	2.90245	Fase	C. Fase
$\theta_1 \approx 0.36$, $\theta_2 \approx 0.56$	1.9699	1.98666	-0.35372	-0.83032	Fase	-
$\theta_1 \approx 0.61$, $\theta_2 \approx 0.55$	1.9699	1.98666	-0.35384	-0.8194	Fase	-

En la Tabla 28 se presentan los resultados de frecuencias y fases que se obtuvieron para los experimentos realizados en relación a los cambios de las masas de la estructura y la comparación con la frecuencia natural de los osciladores ω_0. Las fases que se presentan en la Tabla 28 corresponden al promedio de los valores absolutos de las fases que se obtuvieron para cada masa. Puede observarse que en este caso el promedio de las frecuencias para sincronización en contra fase no cambia con la masa; en cambio, para el régimen de sincronización en fase la frecuencia de mayor valor se presenta cuando la masa es de $1.5\ kg$. También se puede apreciar que las frecuencias de ambos regímenes se encuentran por arriba de la frecuencia natural de los osciladores y que el cambio de las masas tiene un efecto principalmente en la fase.

Tabla 28**: Resultados de fase y frecuencia para una frecuencia inicial de 2.1166 Hz, o escala de 254 $beats/min$.**

Masa (kg)	Sincronización en fase		Sincronización en contra fase	
	Frecuencia (Hz)	Fase (rad)	Frecuencia (Hz)	Fase (rad)
1.5	1.9967	0.54497	1.9867	3.47311
1.75	1.99333	0.54349	1.98666	3.73296
2	1.98666	0.80833	1.98466	2.90245

6.3 Experimentos para cuatro osciladores

En la sección anterior se presentaron los resultados que se obtuvieron al realizar experimentos para el caso de dos osciladores. En esta sección se presentan los experimentos realizados para el caso de cuatro osciladores. Al igual que en el caso anterior, los únicos parámetros que se pueden cambiar son las frecuencias de éstos y las masas de la estructura; por lo que, los experimentos se dividen de la misma forma que en el caso anterior.

Para el caso de dos osciladores se encontró que la emergencia de una solución u otra se debía tanto a las condiciones iniciales como al parámetro en cuestión. En el caso de cuatro osciladores, se observó que independientemente de las condiciones iniciales, el sistema siempre convergía a una solución. En algunos casos no se presentan los comportamientos que se observaron ya que tienden a la misma solución que otros experimentos. Para ello, en el texto se especifica en que momento no se presentan las gráficas.

Los errores de fase para los cuales se considera la existencia de sincronización, de acuerdo con las Definiciones 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4, son

$$\epsilon_{fp} = \epsilon_{cp} = 0.1\ rad, \tag{130}$$

$$\epsilon_{fg} = \epsilon_{cg} = 0.65\ rad, \tag{131}$$

puede observarse que los desfases entre los grupos ϵ_{gf} y ϵ_{gc} son iguales al caso de dos osciladores.

De la misma forma que se realizaron los experimentos para dos osciladores, en éste caso las condiciones iniciales para las cuales se llevaron a cabo cada uno de ellos se determinaron después de analizar el video generado.

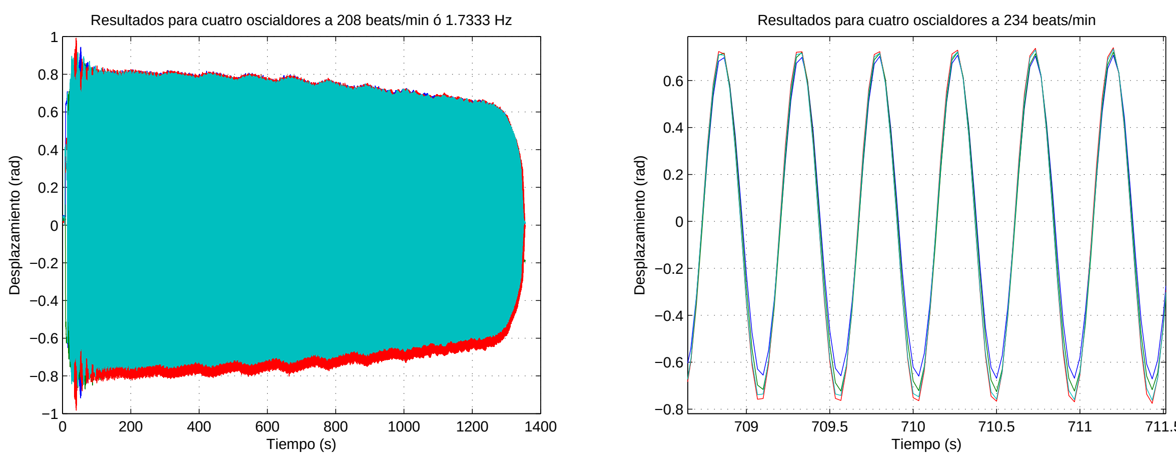
6.3.1 Frecuencias de los osciladores

Para el caso de las frecuencias, los parámetros se dejaron constantes de acuerdo con la Tabla 1, mientras que se agregó una masa de $0.75\ kg$, a la plataforma superior, y $0.05\ kg$, a la plataforma inferior. Al tomar en cuenta la masa de los metrónomos sin contar para ello la de los péndulos, se tiene que la masa total por plataforma es de aproxi-madamente $1.59\ kg$ lo cual se aproxima a $1.6\ kg$.

Al igual que en el caso de dos osciladores, se realizaron experimentos para tres frecuencias principales $1.7333\ Hz$, $1.95\ Hz$ y $2.1166\ Hz$. También se estuvo cambiando la frecuencia de los metrónomos hasta determinar en que momento se perdía la sincronía.

6.3.1.1 Frecuencia de 1.7333 Hz o escala de 208 $beats/min$

Los experimentos realizados para una frecuencia de $1.7333\ HZ$ dan como resultado sincronización en fase entre todos los osciladores, ésto se puede apreciar en la Figura 81. Puede observarse que el desfase parece ser prácticamente igual a cero.



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 81**: Resultados del experimento para cuatro osciladores a una frecuencia de $1.7333\ Hz$ y con plataformas cuyas masas son aproximadamente $1.6\ kg$.**

En la Tabla 29 se presentan los resultados que se obtuvieron para a una frecuencia natural de $1.7333\ Hz$ para diferentes condiciones iniciales. Puede observarse que para todas las condiciones iniciales los osciladores presentan desfases diferentes de cero pero muy menores a 0.1 rad, por lo que se puede decir que se encuentran sincronizados en fase. Además, las frecuencias que se presentan en estado estacionario para todas las condiciones iniciales son iguales.

Al realizar simulaciones para las mismas condiciones iniciales se encontró que los re-

Tabla 29: **Resultados de fase y frecuencia para una frecuencia inicial de 208** $beats/min$.

Condiciones iniciales (rad)	Dif. de fase en osc. (rad)		Dif. de fase entre grupos (rad)	Frecuencia (Hz)
	Plat. Inf.	Plat. Sup.		
$\theta_1 \approx 0.67$, $\theta_2 \approx -0.61$, $\theta_3 \approx 0.27$, $\theta_4 \approx 0.27$	-0.06899	0.04168	-0.06841	1.77333
$\theta_1 \approx -0.45$, $\theta_2 \approx -0.57$, $\theta_3 \approx -0.7$, $\theta_4 \approx -0.25$	-0.05694	0.084192	-0.11593	1.77333
$\theta_1 \approx 0.74$, $\theta_2 \approx -0.57$, $\theta_3 \approx 0.28$, $\theta_4 \approx 0.47$	-0.04846	0.06521	-0.10702	1.77333

sultados numéricos mostraban que no había sincronización. En la Figura 82 se presenta el resultado de la simulación para las condiciones iniciales $\theta_1 \approx 0.67\ rad$, $\theta_2 \approx -0.61\ rad$, $\theta_3 \approx 0.27\ rad$, $\theta_4 \approx 0.27\ rad$ de la Tabla 29. Puede apreciarse que las amplitudes de los osciladores de la plataforma inferior θ_1 y θ_2 no se mantienen con una amplitud constante.

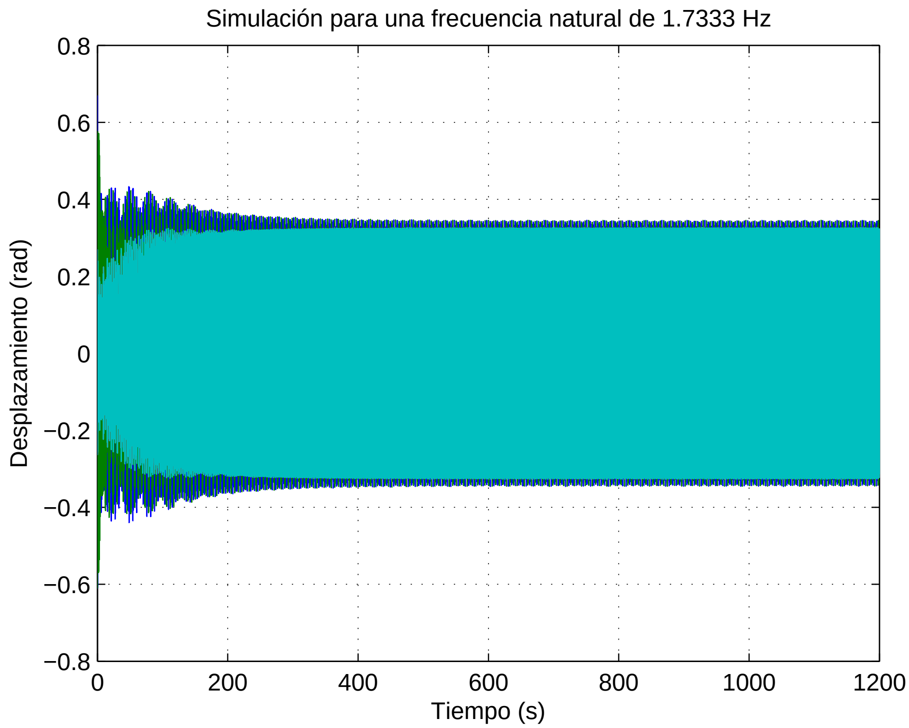
El lector podrá pensar que el modelo que se obtuvo no corresponde al modelo experimental. La respuesta a ésto es sí, pero se debe recordar que se tomaron varias consideraciones acerca de los elementos (osciladores y estructura) que conforman al sistema entero, por lo que no sería posible predecir, con el modelo teórico y para las mismas condiciones iniciales, todos los fenómenos que en el modelo experimental se dan. Sin embargo, la idea es que el modelo teórico capturare los comportamientos del modelo experimental independientemente de cuales sean las condiciones iniciales, y al menos en una manera cualitativa.

Ahora bien, si se consideran las condiciones iniciales

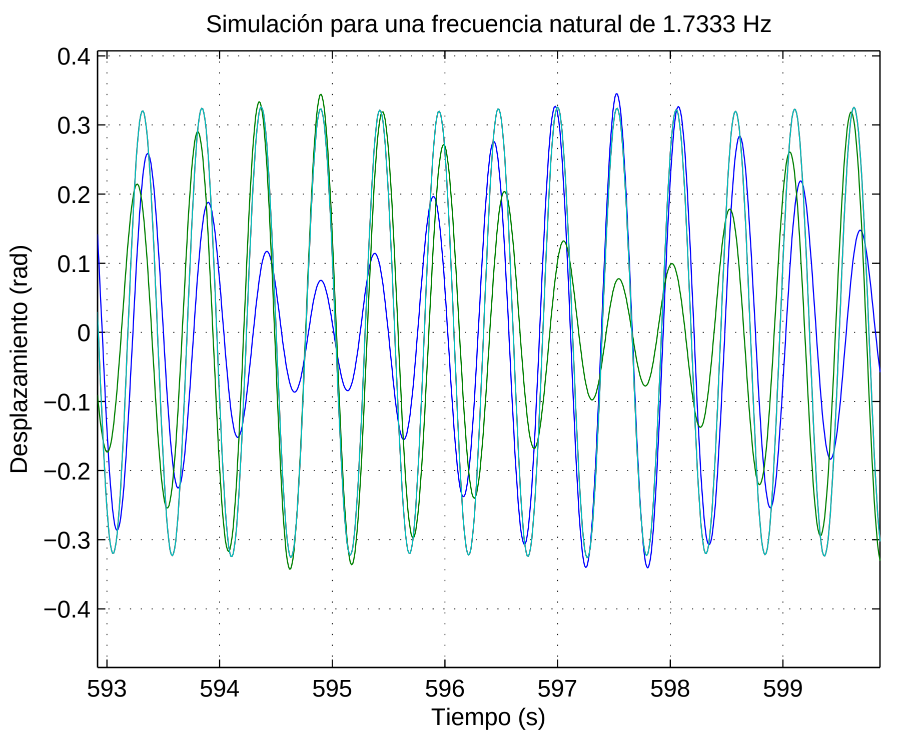
$$\theta_1(0) = \theta_2(0),\ \theta_3(0) = \theta_4(0), \tag{132}$$

se podrán obtener resultados similares a los del experimento, con la única diferencia en que existe una diferencia de amplitudes. Por ejemplo, considere las condiciones iniciales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0.2\ rad$ y $\theta_3(0) = \theta_4(0) = 0.3\ rad$, el resultado es sincronización en fase, ver Figura 83. Además, puede observarse que la diferencia de amplitudes es diferente a la que se obtuvo en el experimento.

Como se apreció, el modelo desarrollado sólo pudo predecir la solución o fenómeno, al

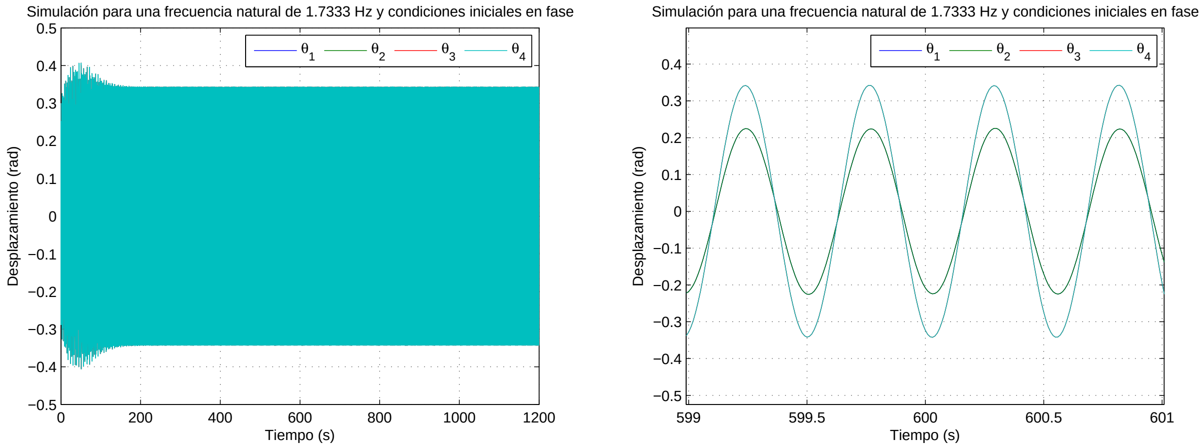


(a) Series de tiempo de los osciladores



(b) Acercamiento

Figura 82: **Resultados de la simulación para las condiciones iniciales** $\theta_1(0) \approx 0.67\ rad$**,** $\theta_2(0) \approx -0.61\ rad$**,** $\theta_3(0) \approx 0.27\ rad$ **y** $\theta_4(0) \approx 0.27\ rad$ **a una frecuencia natural de 1.7333** Hz**.**



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 83: **Resultados de la simulación para las condiciones iniciales** $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0.2\ rad$ **y** $\theta_3(0) = \theta_4(0) = 0.3\ rad$ **a una frecuencia natural de 1.7333** Hz**.**

cual el modelo experimental converge, cuando las condiciones iniciales de los osciladores de la misma plataforma se encuentran en fase. En los siguientes experimentos se presentan casos similares en los que el modelo teórico no predice el fenómeno observado en el modelo experimental para las mismas condiciones iniciales.

6.3.1.2 Frecuencia de 1.95 Hz o escala de 234 $beats/min$

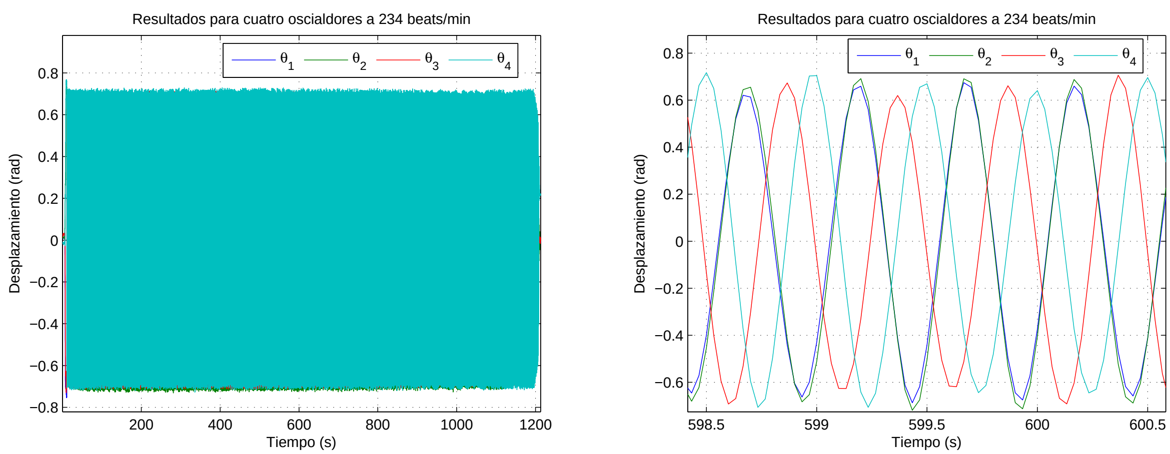
Para una frecuencia de $1.95\ Hz$, los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 30. Puede observarse que las diferencias de fases son diferentes de cero para el caso de los osciladores de una misma plataforma y en los osciladores de la plataforma superior se encuentra que están casi en cuadratura. En cuanto a la diferencia entre los grupos, sólo se determinó la diferencia entre los primeros osciladores de cada grupo.

Los osciladores presentan una sincronización en frecuencia, sin embargo la fase difiere de lo esperado que es de aproximadamente cero radianes entre los osciladores de una misma plataforma. En cuanto a las formas de onda, en la Figura 84 se presenta el resultado de la primera condición inicial de la Tabla 30, ya que el resto tiende a la misma solución. Puede observarse que efectivamente entre los 598.5 seg. y los 600.5 seg. se presenta un desfase aparentemente de 90º entre el tercer oscilador, θ_3, y el cuarto oscilador, θ_4, de la plataforma superior, ver Figura 84b. También puede observarse que después de los 1000 seg. la sincronización desaparece, ésto se le atribuye al mecanismo

Tabla 30**: Resultados de fase y frecuencia para una frecuencia inicial de 1.95** Hz**.**

Condiciones iniciales (rad)	Dif. de fase en osc. (rad)		Dif. de fase (rad) entre grupos (rad)	Frecuencia (Hz)
	Plat. Inf.	Plat. Sup.		
$\theta_1 \approx -0.75$, $\theta_2 \approx 0.73$, $\theta_3 \approx -0.63$, $\theta_4 \approx 0.76$	-0.07976	1.5073	2.32282	1.98467
$\theta_1 \approx 0.42$, $\theta_2 \approx -0.56$, $\theta_3 \approx 0.46$, $\theta_4 \approx -0.05$	-0.08435	-1.35441	-2.5053	1.97967
$\theta_1 \approx -0.66$, $\theta_2 \approx -0.75$, $\theta_3 \approx -0.6$, $\theta_4 \approx -0.8$	-0.13966	1.52116	2.28382	1.98467
$\theta_1 \approx -0.75$, $\theta_2 \approx -0.71$, $\theta_3 \approx -0.76$, $\theta_4 \approx -0.47$	-0.09666	-1.29705	-2.55083	1.98467

de escape del metrónomo, el cual ya no es capaz de suministrar de energía al péndulo.



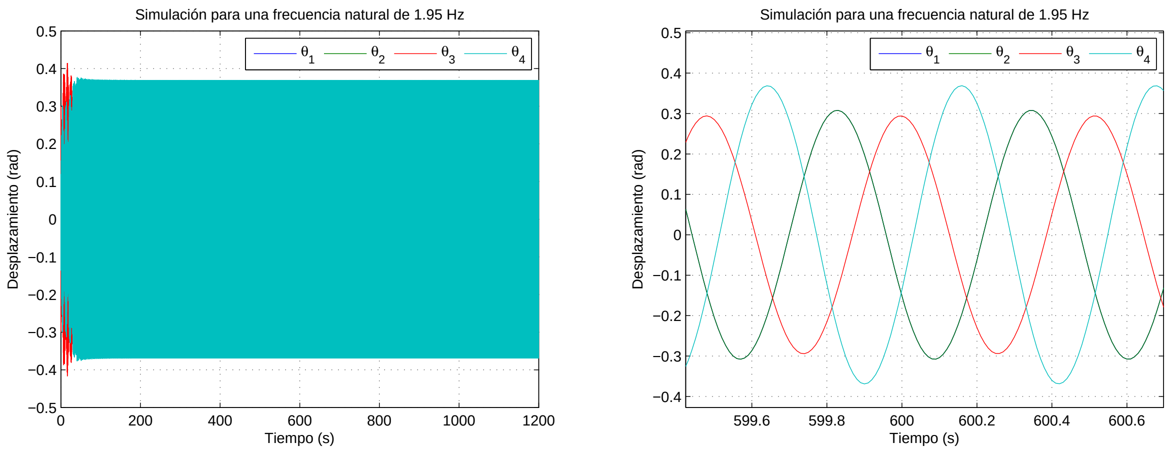
(a) serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 84**: Resultados de la primer condición inicial de la Tabla 30.**

Al realizar simulaciones para las condiciones iniciales de la Tabla 30, se encontró que los resultados obtenidos no son congruentes con los que se obtuvieron en los experimentos. Por ejemplo, para las condiciones iniciales de la primera y segunda filas de la Tabla 30, el modelo teórico da como resultado sincronización en contra fase. En cambio, para las otras dos, el resultado que se obtiene es sincronización en fase. Ahora bien, si el modelo tiene las condiciones iniciales

$$\theta_i(0) = 0\ rad,\ i = 1, 2,\ \theta_3(0) < 0,\ 0 < \theta_4(0) < |\theta_3(0)|, \tag{133}$$

se llega a una solución similar a la del experimento. En la Figura 85 se puede observar el comportamiento que se obtuvo para las condiciones iniciales $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$, $\theta_3(0) = -0.3$ y $\theta_4(0) = 0.1$. Puede observarse que la única diferencia entre los resultados numéricos para estas condiciones iniciales y aquéllos experimentales, son las relaciones de amplitudes de los osciladores.



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 85**: Resultados de la simulación para las condiciones iniciales** $\theta_1(0) = \theta_2(0) = 0\ rad$**,** $\theta_3(0) = 0.1\ rad$**,** $\theta_4(0) = 0.3\ rad$**.**

Como puede observarse, existen condiciones iniciales para las cuales el modelo teórico puede reproducir el fenómeno observado en el experimento, aunque aquéllas del primero no correspondan a las del segundo.

6.3.1.3 Frecuencia de 2.1166 Hz o escala de 254 $beats/min$

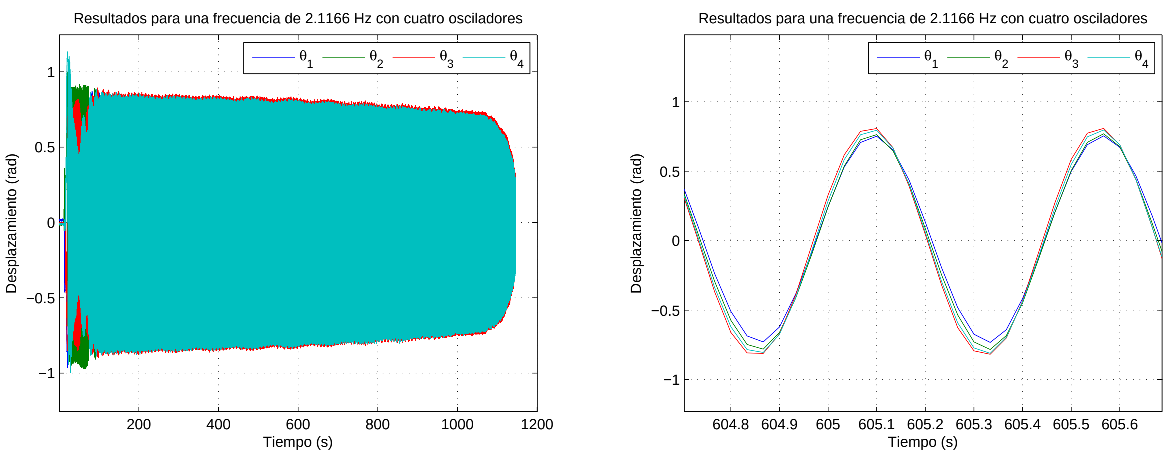
En cuanto a los resultados que se obtuvieron para una frecuencia de $2.1166\ Hz$, los resultados se presentan en la Tabla 31. Puede observarse que independientemente de las condiciones iniciales, los osciladores se sincronizan en fase.

Para comprobar lo anterior, se graficaron las formas de onda de la última condición inicial, las cuales se muestran en la Figura 86. Puede observarse que las diferencias de fases están cercanas a cero por lo que es posible que todos los osciladores están sincronizados en fase.

Al comparar los resultados experimentales con los resultados numéricos se encontró

Tabla 31: **Resultados de fase y frecuencia para una frecuencia inicial de 254 $beats/min$.**

Condiciones iniciales (rad)	Dif. de fase en osc. (rad)		Dif. de fase entre grupos (rad)	Frecuencia (Hz)
	Plat. Inf.	Plat. Sup.		
$\theta_1 \approx -0.42$, $\theta_2 \approx -0.56$, $\theta_3 \approx -0.71$, $\theta_4 \approx -0.28$	-0.0335	0.01545	-0.07963	2.13333
$\theta_1 \approx 0.42$, $\theta_2 \approx -0.56$, $\theta_3 \approx 0.46$, $\theta_4 \approx -0.05$	-0.0154	0.01408	-0.097505	2.14666
$\theta_1 \approx -0.51$, $\theta_2 \approx -0.53$, $\theta_3 \approx 0.57$, $\theta_4 \approx 0.55$	-0.05398	-0.00999	-0.0704	2.14666
$\theta_1 \approx -0.75$, $\theta_2 \approx 0.81$, $\theta_3 \approx -0.74$, $\theta_4 \approx 1.08$	-0.06962	0.03276	-0.10261	2.14666



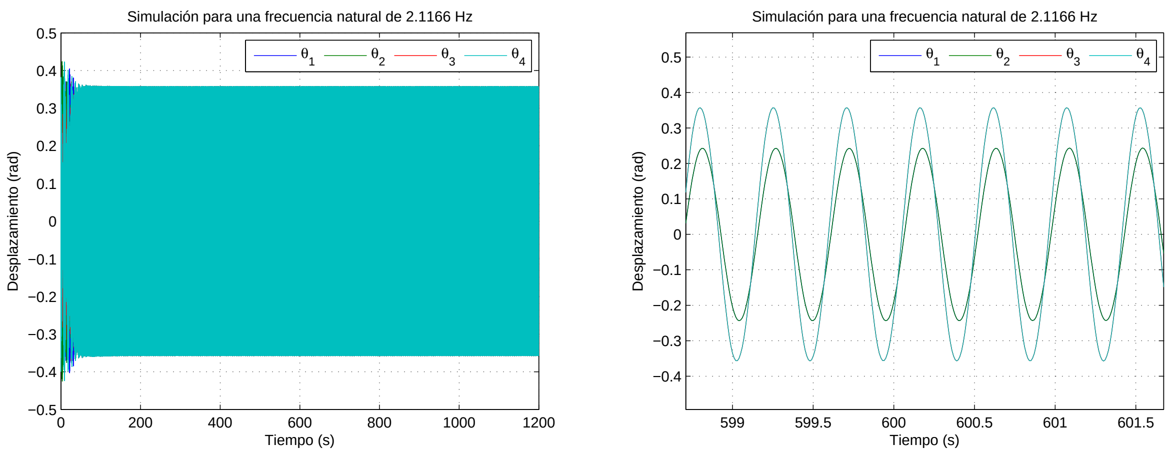
(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 86: **Formas de onda para los resultados de los experimentos a 2.1166 Hz.**

que los últimos predicen el fenómeno que se observó en el experimento para condiciones iniciales de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &\theta_i(0) \neq 0, && i = 1, 2, \\ &sign\,(\theta_3(0)) = sign\,(\theta_4(0)) \ \forall\, \theta_i(0) \neq 0, && i = 3, 4, \end{aligned} \tag{134}$$

i. e., los osciladores de la plataforma superior tienen que estar en fase para que todo el sistema se sincronice en fase siempre y cuando, al menos, uno de los osciladores de la plataforma inferior sea diferente de cero. Por ejemplo, para las condiciones iniciales $\theta_1(0) = -0.1$, $\theta_1(0) = 0.3$, $\theta_3(0) = -0.2$ y $\theta_4(0) = -0.4$ los resultados que se tiene se muestran en la Figura 87. Puede observarse que los osciladores se encuentran sin-



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 87**: Resultados de la simulación para una frecuencia de 2.1166 Hz y condiciones iniciales $\theta_1(0) = -0.1$, $\theta_1(0) = 0.3$, $\theta_3(0) = -0.2$ y $\theta_4(0) = -0.4$.**

cronizados en fase, aunque las amplitudes no concuerdan con las del experimento, pero se puede decir que el modelo desarrollado en el presente trabajo es capaz de predecir ciertos fenómenos que se dan en el modelo experimental, para las condiciones iniciales de (134).

Al realizar más experimentos variando las frecuencias naturales de los osciladores se tiene que la mínima frecuencia en la que se tiene sincronización es para 1.5333 Hz ó en la escala de 184 $beats/min$. En la Tabla 32 se presentan las frecuencias para las cuales se realizaron los experimentos. El resultado de las fases y las frecuencias corresponde al promedio que se obtuvo de las diferentes condiciones iniciales que se estudiaron para cada frecuencia natural. Puede observarse que para la única frecuencia natural en la que se presenta sincronización en fase entre los grupos de osciladores es en la frecuencia de 1.95 Hz ó 234 $beats/min$.

6.3.2 Masas de la estructura

En el apartado anterior se presentaron los resultados para una masa de $1.6\ kg$ y diferentes frecuencias, en éste se presentan los resultados que se obtuvieron al incrementar las masas de las plataformas. Los cambios se realizaron para 1.85, 2.1 y 2.35 kg a una frecuencia natural de 1.95 Hz.

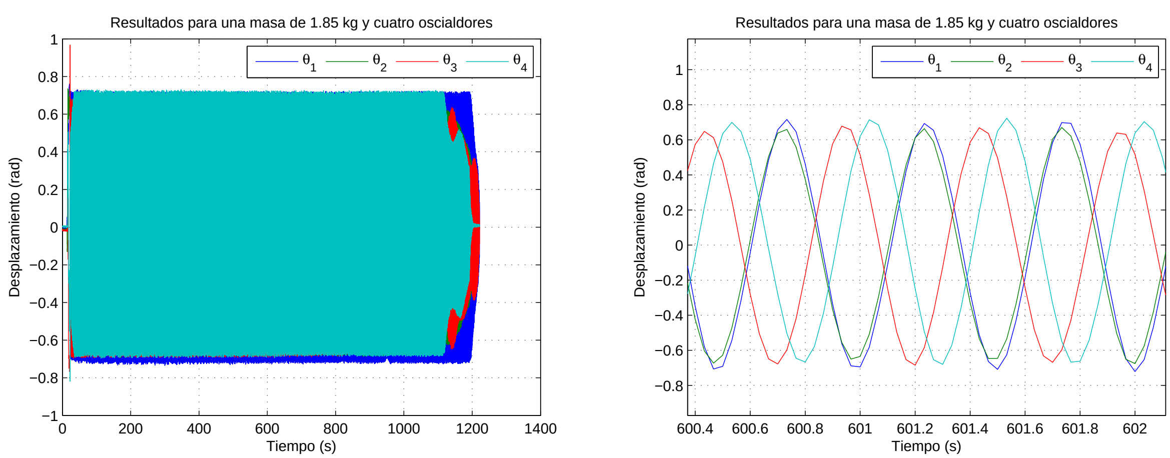
Al realizar los experimentos para una masa de 1.85 kg, se encontró que, independien-

Tabla 32: **Resumen de fases y frecuencias para el estudio de cuatro osciladores con cambios en las frecuencias naturales de los osciladores.**

Frecuencia natural (Hz)	Escala ($beats/min$)	Dif. de fase en osc. (rad)		Dif. de fase entre grupos (rad)	Frecuencia (Hz)
		Plat. Inf.	Plat. Sup.		
1.5333	184	0.00584	0.02955	0.07407	1.57895
1.6	192	0.0144	0.02172	0.04519	1.62546
1.6666	200	0.011	0.01439	0.02944	1.68707
1.73333	208	0.05813	0.06369	0.09712	1.77333
1.95	234	0.1001	1.41998	3.12045	1.98342
2.1166	254	0.04312	0.01807	0.08753	2.14332

temente de las condiciones iniciales, los resultados siempre tendían a la misma solución; por lo que, al igual que en los casos anteriores, se presenta sólo una forma de onda.

En la Figura 88 se puede apreciar la serie de tiempo para este experimento. Puede observarse que el desfase entre los osciladores de la plataforma superior difiere de lo esperado, lo cual causa que no se cumplan las definiciones de la sección 2.2. Además, se puede apreciar que los resultados de este experimento son similares aquellos que se obtuvieron para el caso de una masa de 1.6 kg.



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 88: **Resultados del experimento para una masa de** $1.85\ kg$ **y cuatro osciladores a una frecuencia natural de** $1.95\ Hz$**.**

En la Tabla 33 se presentan los resultados para la masa de $1.85\ kg$. Puede apreciarse que la fase que se da entre los dos osciladores de la plataforma superior no cumple con las condiciones para que se considere sincronización. Además, el desfase entre los primeros osciladores de cada grupo se encuentra fuera del valor por el cual también se puede decir que no están sincronizados. Además, independientemente de las condiciones iniciales las soluciones son similares y prácticamente presentan la misma frecuencia, así como, los desfases entre los osciladores de una misma plataforma.

Tabla 33: **Resultados de fase y frecuencia para una masa de $1.85\ kg$ para el caso de cuatro osciladores.**

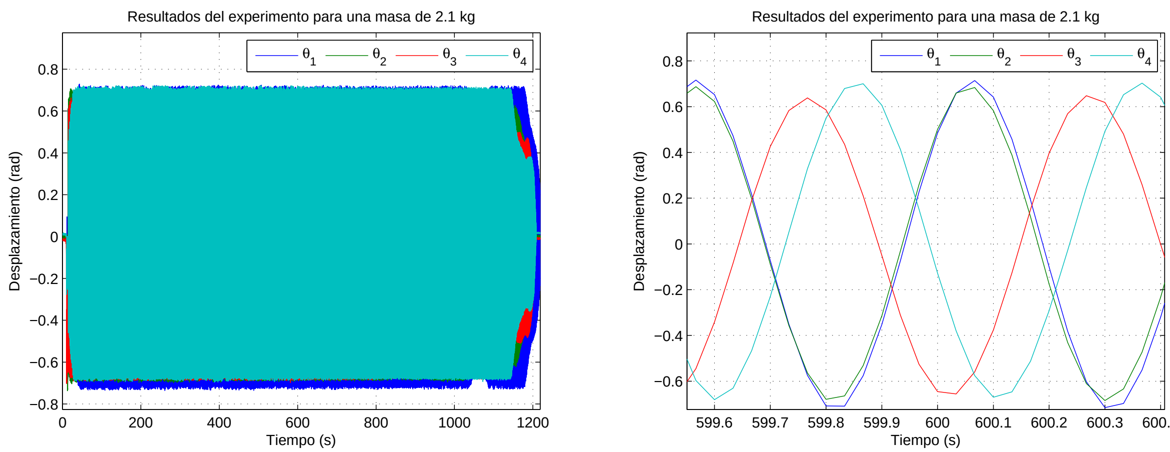
Condiciones iniciales (rad)	Dif. de fase en osc. (rad)		Dif. de fase entre grupos (rad)	Frecuencia (Hz)
	Plat. Inf.	Plat. Sup.		
$\theta_1 \approx -0.72$, $\theta_2 \approx -0.72$, $\theta_3 \approx -0.66$, $\theta_4 \approx 0.09$	-0.2835	1.29138	-3.83847	1.9926
$\theta_1 \approx 0.75$, $\theta_2 \approx 0.67$, $\theta_3 \approx -0.73$, $\theta_4 \approx -0.15$	-0.29758	1.23425	-3.83502	1.99446
$\theta_1 \approx -0.77$, $\theta_2 \approx 0.71$, $\theta_3 \approx -0.66$, $\theta_4 \approx 0.75$	-0.24847	1.22013	-3.81746	1.99446

Al realizar simulaciones para una masa de 1.85 kg y una frecuencia de 1.95 Hz, se encontró que, al igual que en el caso de 1.6 kg, el modelo no predecía el fenómeno observado en el experimento. Sin embargo, al realizar simulaciones con las condiciones iniciales de (133) se encontró que los resultados obtenidos eran similares a los experimentales.

En este caso se agregaron 0.25 kg más, a ambas plataformas, para alcanzar una masa de 2.1 kg. Los resultados que se obtuvieron son similares a los del caso anterior, ver Figura 89. Puede observarse que el desfase entre los osciladores de una misma plataforma se incrementa para este caso.

Sin embargo, en la Tabla 34 se presentan los resultados que se obtuvieron de frecuencia y fase para los experimentos realizados para esta masa. Puede observarse que, al igual que en el caso anterior, independientemente de las condiciones iniciales los resultados tienden a la misma solución y las definiciones presentadas en la sección 2.2 no se cumplen.

De las simulaciones realizadas para este caso, se encontró que el modelo reproduce el fenómeno que se observó en el experimento siempre y cuando las condiciones iniciales sean de la forma (133).



(a) Serie de tiempo **(b) Acercamiento**

Figura 89: **Resultados del experimento para una masa de** $1.85\ kg$ **y cuatro osciladores a una frecuencia natural de** $1.95\ Hz$**.**

Tabla 34: **Resultados de fase y frecuencia para una masa de** $2.1\ kg$ **para el caso de cuatro osciladores.**

Condiciones iniciales (rad)	Dif. de fase en osc. (rad)		Dif. de fase entre grupos (rad)	Frecuencia (Hz)
	Plat. Inf.	Plat. Sup.		
$\theta_1 \approx -0.65$, $\theta_2 \approx -0.63$, $\theta_3 \approx -0.64$, $\theta_4 \approx -0.14$	-0.08263	0.98239	-3.61254	1.99421
$\theta_1 \approx -0.74$, $\theta_2 \approx -0.72$, $\theta_3 \approx 0.48$, $\theta_4 \approx 0.39$	-0.73403	0.52087	-3.53225	1.98434
$\theta_1 \approx -0.65$, $\theta_2 \approx 0.7$, $\theta_3 \approx -0.7$, $\theta_4 \approx 0.78$	-0.09059	0.33974	-3.34606	1.99421

Para la masa de 2.35 kg se encontró que las formas de onda de la Figura 88 se presentaban nuevamente, por lo que no se presentan las gráficas, pero si los resultados de fase y frecuencias. Dichos resultados se presentan en la Tabla 35 y puede observarse que, al igual que en los casos anteriores, en éste no se cumple ninguna de las definiciones presentadas en la sección 2.2.

Al realizar simulaciones no se encontraron condiciones iniciales para las cuales el modelo teórico pudiera reproducir el fenómeno observado en este experimento.

Al igual que en el caso para dos osciladores, en éste caso se tabulan los promedios de fases y frecuencias de los experimentos realizados. En la Tabla 36 se presentan dichos resultados, y puede observarse que la frecuencia prácticamente no se ve afectada por

Tabla 35**: Resultados de fase y frecuencia para una masa de $2.35\ kg$ para el caso de cuatro osciladores.**

Condiciones iniciales (rad)	Dif. de fase en osc. (rad)		Dif. de fase entre grupos (rad)	Frecuencia (Hz)
	Plat. Inf.	Plat. Sup.		
$\theta_1 \approx -0.77$, $\theta_2 \approx -0.73$, $\theta_3 \approx -0.65$, $\theta_4 \approx -0.5$	-0.08304	-0.90375	3.62546	1.98983
$\theta_1 \approx -0.54$, $\theta_2 \approx 0.59$, $\theta_3 \approx -0.67$, $\theta_4 \approx 0.7$	-0.28598	-1.00162	3.61771	1.99733
$\theta_1 \approx 0.37$, $\theta_2 \approx -0.73$, $\theta_3 \approx 0.3$, $\theta_4 \approx -0.44$	-0.36357	-0.91387	3.51829	1.99733

el cambio de masa y permanece por arriba de la frecuencia natural de los osciladores la cual es de 1.95 Hz.

Tabla 36**: Resumen de fases y frecuencias para el estudio de cuatro osciladores con cambios en las masas de la estructura.**

Masas de la estructura (kg)	Dif. de fase en osc. (rad)		Dif. de fase entre grupos (rad)	Frecuencia (Hz)
	Plat. Inf.	Plat. Sup.		
1.6	0.1001	1.41998	2.41569	1.98342
1.85	0.27651	1.24858	3.83031	1.99384
2.1	0.30242	0.61433	3.49695	1.99483
2.35	0.2442	0.93974	3.58715	1.99483

6.4 Conclusiones

Del sistema empleado para medir los desplazamientos angulares de los péndulos, se puede concluir que es apto para medir éstos, cuando no es importante analizar lo que sucede en el sistema en tiempo real. Para ello, como se mencionó antes, es necesario otro método que no introduzca nuevas variables al sistema y de esta manera se puedan realizar mediciones confiables.

En cuanto a los resultados obtenidos de los experimentos, se puede concluir que hay una coexistencia de los regímenes de sincronización, para el caso de dos osciladores, y la cual depende tanto de la frecuencia natural de los mismos como de las condiciones iniciales. También, el régimen de sincronización en fase desaparece cuando la frecuencia se encuentra por debajo de 1.6666 Hz o por debajo de la escala de 200 $beats/min$.

En relación a las masas, para el mismo caso, se puede concluir que el régimen de sincronización en contra fase desaparece cuando ésta se incrementa, tal y como se observó en el estudio numérico referente a éste caso, y además, el desfase, que se da entre los osciladores, incrementa con el aumento de la masa cuando se sincronizan en fase.

En cambio, para la red, el modelo que se desarrolló no fue capaz de predecir los comportamiento que en los experimentos se observaron para las mismas condiciones iniciales. Sin embargo, si fue capaz de capturar las dinámicas de los mismos, pero para condiciones iniciales diferentes a las del experimento. Por lo tanto, se puede concluir que el modelo teórico es capaz de emular las dinámicas del modelo experimental.

Capítulo 7. Conclusiones y recomendaciones

En esta tesis se realizó una investigación sobre un nueva versión de la sincronización de Huygens. A diferencia de la versión clásica, i. e., los dos relojes acoplados a través de la barra de madera, en éste, se usó un nuevo acoplamiento al cual se le denominó acoplamiento horizontal-vertical de Huygens, o bien, acoplamiento HV de Huygens; el cual, consiste en una estructura de dos plataformas que se encuentran acopladas a través dos barras laterales de cierta flexibilidad, como se mostró en la Figura 9. Dicho nombre se debe a que en cada plataforma se presenta un acoplamiento horizontal que se da entre sus respectivos osciladores, como en la versión clásica; y como se mencionó anteriormente, existe un acoplamiento entre las dos plataformas o grupos de osciladores que se considera vertical, i. e., la transferencia de energía entre los grupos se da de manera vertical. Al colocar los osciladores en cada plataforma se tiene lo que en esta tesis se ha llamado *el sistema HV de Huygens* y al fenómeno que se da *sincronización HV de Huygens*.

En los capítulos previos se presentó de manera ordenada el estudio realizado para la sincronización HV de Huygens y se pudo observar que dentro del mismo sistema, coexisten los dos regímenes de sincronización. En este capítulo se presentan las conclusiones de manera general; previo a ello, se realiza un análisis de los resultados que se obtuvieron de los tres estudios. Posteriormente se presentan las posibles aplicaciones y las recomendaciones que se tienen para futuras investigaciones relacionadas con la sincronización HV de Huygens.

7.1 Análisis de resultados obtenidos en los tres estudios

De los análisis teóricos, o estudios analíticos, desarrollados para la sincronización HV de Huygens para dos y cuatro osciladores, y los cuales se presentaron en los capítulos cuatro y cinco, se puede decir que el método de Poincaré para perturbaciones, a pesar de ser una herramienta bastante útil para el análisis de sistemas acoplados, presenta limitaciones. Como se pudo observar, al momento de aplicar dicho método, sólo se lograron encontrar soluciones para sincronización en contra fase y con cierta exactitud, tanto para dos osciladores como para la red empleada. En cambio, ése no fue el caso para sincronización en fase. Lo anterior se debe a las características propias del método, i. e., al momento de aplicar el mismo es necesario rechazar los términos iguales o mayores a segundo grado en el parámetro pequeño y, además, considerar que las oscilaciones de la estructura se atenúan de tal forma que la magnitud de éstas sean menores a las de dicho parámetro, lo cual no es así para el caso de sincronización en fase.

En la comparación realizada en el quinto capítulo para las dos configuraciones estudiadas, se encontró que los resultados analíticos no diferían mucho cuando se trataba de sincronización en contra fase. En cambio, para el caso de sincronización en fase, aquéllos eran menores cuando se trataba de cuatro osciladores. Lo mismo se encontró para el caso de los resultados numéricos que se obtuvieron como referencia para el método analítico.

De los resultados numéricos, tanto para dos osciladores como para cuatro, se encontró que las fases y frecuencias no se ven afectadas por las condiciones iniciales cuando se trata de un mismo régimen. En cambio, la variación en los parámetros tiene una mayor influencia en estas variables. Además, para el caso de cuatro osciladores, se puede encontrar una mayor diversidad de soluciones con sólo cambiar las condiciones iniciales para un mismo conjunto de parámetros.

En cuanto a los resultados experimentales, también fue posible apreciar que las fases y frecuencias que presentan los osciladores en estado estacionario no sufren grandes cambios al variar las condiciones iniciales. Pero a diferencia de los resultados numéricos, estos presentan una solución para un mismo conjunto de parámetros e independiente de las condiciones iniciales.

Debido a que el método de Poincaré no arroja resultados confiables para el caso de sincronización en fase, para el sistema HV de Huygens, no es posible comparar el primer estudio, analítico o teórico, con los otros dos, numérico y experimental. Sin embargo, los últimos dos, debido a la naturaleza de los mismos, es posible compararlos; ya que, el estudio numérico se basa en un modelo desarrollado a partir de uno experimental, i. e., el primer modelo es una idealización del segundo.

De ambos estudios se infiere que los dos regímenes de sincronización coexisten en el sistema y que la emergencia de uno de ellos depende de los parámetros del mismo, así como, de las condiciones iniciales. Ahora bien, si se comparan los resultados experimentales para dos osciladores, presentados en el capítulo anterior, con aquellos numéricos, lo cuales se presentan en el cuarto capítulo, se podrá apreciar que el rango de frecuencias para el cual se encontró sincronización en los experimentos se encuentra dentro del rango de frecuencias obtenido en el análisis numérico. Aunque con ciertas diferencias, ya que para algunas frecuencias en las que se obtiene sólo sincronización en fase, de manera experimental, para los resultados numéricos se obtiene sólo sincronización en contra fase. En cuanto a las demás frecuencias, el tipo de régimen en los experimentos concuerda con los resultados numéricos.

En cuanto a los cambios de las masas, se puede encontrar que no son del todo congruentes los resultados numéricos y experimental, en lo que respecta a dos osciladores; ya que, sólo para un valor de masa concuerdan los dos resultados en que se presenta una coexistencia de los dos regímenes. En cuanto a las otras masas, los resultados experimentales indican la coexistencia de tales regímenes, pero en los resultados numéricos se encuentra que sólo se presenta sincronización en fase.

Para el caso de cuatro osciladores, al comparar los rangos de frecuencias para los cuales se encontró algún tipo de sincronización, tanto en el modelo teórico como en el experimental, se puede encontrar que existen escalas o frecuencias para las cuales el modelo presenta sincronización, ya sea que las Definiciones 2.3 y 2.4 se cumplan o que se presente un desfase que permanece constante; pero, en los resultados experimentales se encuentra que existe un continuo de frecuencias para las cuales existe algún tipo de sincronización. Parte del rango de frecuencias que se emplean en los experimentos concuerdan los resultados que se obtuvieron en el quinto capítulo y los cuales se muestran en la Figura 61a, aún cunado las condiciones iniciales no son iguales.

En cambio, las variaciones realizadas en relación a las masas de la estructura, los experimentos indican que no existe una sincronización de acuerdo con las Definiciones presentadas en la sección 2.2. Pero, los resultados numéricos indican que los dos regímenes de sincronización coexisten para ciertas condiciones iniciales.

Como se menciona en las conclusiones del capítulo anterior, el modelo no predice los comportamientos que en los experimentos se observan para las mismas condiciones iniciales. Sin embargo, al intentar con otras condiciones, el primero es capaz de capturar las dinámicas del segundo. Además, se debe tener en cuenta que, como se mencionó anteriormente, el modelo desarrollado es una idealización de un modelo experimental, por lo que se realizaron simplificaciones para obtener el primero. Por ejemplo, en el sistema físico puede existir una fricción de coulomb que no se tomó en cuenta en el modelo teórico y el comportamiento real del mecanismo de escape de los metrónomos no se modela por medio de un término de van der Pol sino por otra función. Otra razón por la que el modelo desarrollado difiere de aquel experimental, es la diferencia en los parámetros. Mientras que en el estudio numérico se consideraron parámetros idénticos, en el experimento existen ciertas diferencias que influyen en los fenómenos. Por las razones anteriores existen ciertas discrepancias entre los resultados experimentales y numéricos, tanto para dos osciladores como para la red estudiada.

En todos los fenómenos observados, se puede constatar que no existe sincronización perfecta entre los osciladores de diferentes plataformas, i. e., el desfase entre dichos osciladores es diferente de cero y de π. Por el contrario existe un error en el desfase entre los osciladores de diferentes plataformas. Lo anterior se debe a los desplazamientos que se dan en las mismas; ya que, para los dos tipos de sincronización, la plataforma superior presenta un mayor desplazamiento en comparación con su homóloga. Ahora bien, en los experimentos se pudo observar que existe una diferencia de fase entre los osciladores de una misma plataforma; la razón de ésto se debe a la diferencia paramétrica entre los osciladores.

7.2 Conclusiones

Como se puede observar un acoplamiento horizontal-vertical de Huygens, o acoplamiento HV de Huygens, es capaz de presentar nuevos comportamientos como el presentado en el cuarto capítulo, y el cual presentaba la característica de que la amplitud variaba con el tiempo.

En lo particular, se puede concluir que debido a las características propias del método de Poincaré, no es posible obtener resultados confiables para el sistema HV de Huygens cuando se requiera obtener soluciones para sincronización en fase. Para ello, como se menciona en el cuarto capitulo, es necesario expandir el método para incluir aquellos términos que se eliminan para su aplicación, o en su defecto considerar las oscilaciones de la estructura.

En cuanto a las diferencias que se encontraron entre el modelo teórico y el experimental, se puede concluir que el primero es una muy buena aproximación del segundo, si sólo se consideran dos osciladores. En cambio, para el caso de cuatro osciladores, pese a las discrepancias en los resultados, se puede concluir que el modelo teórico reproduce las dinámicas del modelo experimental, aún cuando el primero no tenga las mismas condiciones iniciales que el segundo.

De lo anterior se puede concluir que es posible encontrar nuevos comportamientos con sólo cambiar la forma de acoplar los osciladores dentro de la sincronización de Huygens, y en especial, que en la sincronización HV de Huygens nunca se podrá observar sincronización completa debido a los desplazamientos de las plataformas, los cuales influyen en los desfases de los osciladores.

En general, se puede concluir que para cualquier acoplamiento de Huygens, la dinámica del mismo influye sobre la dinámica de los osciladores y viceversa, de tal forma que se afectan mutuamente y debido a ello se pueden generar nuevos comportamientos como los estados quimera (Martens *et al.*, 2012). Pero, en relación a un acoplamiento HV de Huygens, existen dos dinámicas que influyen en los comportamientos de los osciladores, y que no permiten la sincronización completa de dos osciladores, o grupos de osciladores, que se encuentran sobre plataformas diferentes. Además, pueden causar que la amplitud de los mismos tienda a oscilar aún cuando presenten la misma frecuencia en estado estacionario y el desfase entre ellos sea constante; lo cual causa que los espectros de frecuencia de todo el sistema coincidan pero con magnitudes diferentes. También es posible decir que los parámetros que más influyen en la emergencia o no de uno de los dos regímenes de sincronización son los parámetros de la estructura y la frecuencia natural de los osciladores. Por ejemplo, si lo que se requiere es que emerja un sólo régimen de sincronización para una determinada frecuencia natural, es necesario ajustar los parámetros de la estructura de tal forma que emerja el fenómeno deseado independientemente de las condiciones iniciales. De igual manera, sucede para la coexistencia de los dos regímenes de sincronización o la aparición de la sincronización en frecuencia con amplitud variable.

7.3 Recomendaciones

En la sección anterior se realizó un análisis sobre el trabajo realizado y se presentaron las conclusiones a las cuales se llegaron después de ello. En esta sección se presentan las posibles aplicaciones y las recomendaciones que se tiene para la sincronización HV de Huygens.

Respecto a las aplicaciones, y la cuales se basan en los fenómenos observados en los apartados anteriores, se pueden proporcionar algunas ideas en las cuales se podría aplicar la sincronización HV de Huygens. Cabe mencionar que se tiene que investigar la factibilidad de las mismas.

Las posibles aplicaciones son las siguientes:

- Estudio de vibraciones en edificios, o control de las mismas.
- En general, la sincronización de Huygens podría servir para generación de comunicaciones en modulación PSK, debido a que es capaz de generar diferentes señales con un desfase constante.
- De igual forma que en el caso anterior, la sincronización de Huygens podría servir en la comunicación entre dos canales, ya que al cambiar un parámetro del sistema se cambia el tipo de sincronización o se genera un desfase constante y con ello se puede cambiar el canal, i. e., los canales se sincronizan.

Por el momento son algunas de las posibles aplicaciones que se le pueden dar tanto a la sincronización HV de Huygenes como a la sincronización de Huygens.

En relación a las recomendaciones, las cuales se basan en los experimentos presentados en el capítulo anterior y el análisis realizado en la sección 7.1, se presentan aquéllas que se tienen para posibles investigaciones en relación a la sincronización HV de Huygens.

En cuanto al desarrollo del modelo:

- Modelar el mecanismo de escape del metrónomo. Esto implica estudiar a detalle el funcionamiento del mismo y, de ser posible, incluir también la dinámica de la cuerda.
- Aplicar el método del elemento finito para considerar la distribución de la elasticidad a lo largo de la estructura. En este trabajo se consideró que las elasticidad de la estructura era uniforme y por lo tanto constante; cuando en realidad la distribución de la misma varia de acuerdo a las características de los materiales con los cuales se encuentra elaborada.

En cuanto al método analítico empleado, como ya se mencionó en las conclusiones, ampliar el método de Poincaré para incluir los términos que se desprecian. En relación al análisis experimental, desarrollar un sistema de control para posicionar el metrónomo en el ángulo deseado, y de esa manera se pueda tener un mejor control sobre las condiciones iniciales de los osciladores. Además, considerar que el método de medición sea capaz de mesurar, en tiempo real, los desplazamientos de los osciladores y de las plataformas, para posibles aplicaciones de control; de tal forma que no altere las variables del sistema.

Literatura citada

Abrams, D. M. y Strogatz, S. H. (2004). Chimera states for coupled oscillators. *Physical review letters*, **93**(17): 174102.

Alvarez, J., Rosas, D., Hernandez, D., y Alvarez, E. (2010). Robust Synchronization of Arrays Lagrangian Systems. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, **8**(5): 1039–1047.

Andronov, A. A. y Chaikin, C. E. (1949). *Theory of Oscillations*, capítulo IX, p. 315. Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Bennett, M., Schatz, M. F., Rockwood, H., y Wiesenfeld, K. (2002). Huygens' clocks. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **458**(2019): 563–579.

Blekhman, I. (1988). *Synchronization in science and thecnology*, capítulo 10, p. 190. ASME Press, New York.

Blekhman, I., Fradkov, A., Nijmeijer, H., y Pogromsky, A. (1997). On self-synchronization and controlled synchronization. *Systems & Control Letters*, **31**(1): 299–305.

Blekhman, I., Fradkov, A., Tomchina, O., y Bogdanov, D. (2002). Self-synchronization and controlled synchronization: general definition and example design. *Mathematics and Computers in Simulations*, **58**(1): 367–384.

Boda, S., Tyukodi, B., y Tunyagi, A. (2013). The rythm of coupled metronomes. *Eur. Phys J. B*, **86**(263): 1–9.

Castro-Figueroa, A. R. (1998). *Estabilidad. De las ecuaciones diferenciales ordinarias y de las ecuaciones funcionales con sus aplicaciones*, capítulo 4, p. 201. Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.

Czolczynski, K., Perlikowski, P., Stefański, A., y Kapitaniak, T. (2011). Huygens' odd sympathy experiment revisited. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **21**(7): 2047–2056.

Czołczyński, K., Perlikowsli, P., Stefański, A., y Kapitaniak, T. (2011). Why two clocks synchronize: Energy balance of the synchronized clocks. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **21**(2): 1–9.

Czolczynski, K., Perlikowsli, P., Stefanski, A., y Kapitaniak, T. (2013). Synchronization of the self-excited pendula suspended on the vertically displacing beam. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **18**(2): 386–400.

Danino, T., Mondragón-Palomino, O., Tsimring, L., y Hasty, J. (2010). A synchronized quorum of genetic clocks. *Nature*, **463**: 326–330.

Dilão, R. (2009). Antiphase and in-phase synchronization of nonlinear oscillators: The Huygens' clocks system. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **19**(2): 023118.

Dilão, R. (2014). Anti-phase synchronization and ergodicity in arrays of oscillators coupled by an elastic force. *The European Physical Journal. Special Topics*, **223**(1): 665–676.

Fradkov, A. L. y Adrievsky, B. (2007). Synchronization and phase relations in the motion of two-pendulum system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **1**(42): 895–901.

Franco Flores, A. K. y Cuesta, R. (2015). Captura de video e indéntificación de objetos para el análisis de su posición. Reporte técnico, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Gu, Y. I., Hyun, K. L., Sung, H. J., y Beom, J. K. (2010). Antiphase synchronization of two nonidentical pendulums. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **20**(7): 2179–2184.

Hirata Salazar, G. (2016). *Diseño e implentación de algoritmos de control para la atenuación de vibraciones en una clase de estructura*. Tesis de doctorado, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México.

Honeywell Inc. (2002). Applications of magnetic position sensors. Recuperado de: `http://www51.honeywell.com/aero/common/documents/Applications-of-Magnetic-Position-Sensors.pdf`. Accesado: Marzo,2014.

Honeywell International Inc. (2010). Applications of magnetic position sensors. Recuperado de: `http://www51.honeywell.com/aero/common/documents/Applications-of-Magnetic-Position-Sensors.pdf`. Accesado: Marzo,2014.

Hu, Q., Liu, W., Yang, H., Xiao, J., y Qian, X. (2013). Experimental study on synchronization of three coupled mechanical metronomes. *Eur. J. Physc.*, **34**(1): 291–302.

Hurley, D. y Vandyck, M. (2006). *K. Williams*, capítulo An observation about Huygens clock problem, pp. 59–70. Two Cultures, Birkhäuser, Basel.

Jovanovic, V. y Koshkin, S. (2012). Synchronization of Huygens' clocks and the Poncairé method. *Journal of Sound and Vibration*, **331**: 2887–2900.

Kanunnikov, A. Y. y Hyun, R. E. (2003). Synchronization of pendulum clocks suspended on an elastic beam. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **44**(5): 748–752.

Kapitaniak, M., Czolczynski, K., Perlikowski, P., Stefanski, A., y Kapitaniak, T. (2012). Syncrhonization of clocks. *Physic Reports*, **512**(1-2): 1–69.

Kapitaniak, T. y Kurths, J. (2014). Synchronized pendula: From Huygens' clocks to chimera states. *The European Physical Journal. Special Topics*, **223**: 609–6012.

Kapitaniak, T., Kuzma, P., Wojewoda, J., Czolczynski, K., y Maistrenko, Y. (2014). Imperfect chimera states for coupled pendula. *Scientific Reports*, **4**(6379): 1–4.

Kelly, R. y Santibáñez, V. (2003). *Control de Movimiento de Robots Manipuladores*, capítulo 3, p. 63. Pearson Educación, Madrid.

Kuramoto, Y. y Battogtokh, D. (2002). Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators: A soluble case. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **5**(4): 380–385.

Martens, E. A., Thutupalli, S., Fourrière, A., y Hallatschek, O. (2012). Chimera states in mechanical oscillator networks. *PNAS*, **110**(26): 10563–10567.

Mirollo, R. E. y Strogatz, S. H. (1990). Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM*, **50**(6): 1645–1662.

Moser, M., Frühwirth, M., y Kenner, T. (2008). The Symphony of life. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazin*, **27**(1): 29–37.

Núñez-Pérez, R. F. (2014). La tendencia del factor de cresta ayuda a detectar eventos nacientes; circuito electrónico, programas y aplicaciones a señales de diversos campos. *Ingeniería Investigación y Tecnología*, **XV**(1): 63–81.

Oliveira, H. y Melo, L. (2015). Huygens synchronization of two clocks. *Scientific Reports*, **5**(11548): 1–12.

Oud, W. T., Nijmiejer, H., y Pogromsky, A. Y. (2006). A study of Huijgens' synchronization: experimental results. En: *Group Coordination and Cooperative Control*, Vol. 336 de *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer, Berlin, pp. 191–203.

Panaggio, M. y Abrams, D. (2015). Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled osicllators. *Nonlinearity*, **28**(1): R67–R87.

Pankratova, E. V. y Belykh, V. N. (2013). Consequential noise-induced synchronization of indirectly coupled self-sustained oscillators. *Eur. Phys J. Special Topics*, **222**(1): 2509–2515.

Pantaleone, J. (2002). Synchronization of metronomes. *American Journal Physics*, **70**(10): 992–1000.

Peña Ramírez, J. (2013). *Huygens' synchronization of dynamical systems:beyond pendulum clocks*. Tesis de doctorado, Eindhoven University of Technology, The Netherlys.

Peña Ramírez, J. y Álvarez, J. (2015). Rotating waves in oscillators with huygens' coupling. *IFAC*, **48**(18): 71–76.

Peña Ramirez, J. y Nijmeijer, H. (2015). The poincaré method: A powerful tool for analyzing synchronization of coupled oscillators. *Indagationes Mathematicae*, **48**(18): 1–20.

Peña Ramirez, J., Denasi, A., Rodriguez-Angeles, A., Alvarez Gallegos, J., Nijmeijer, H., y Aihara, K. (2014a). Controlled synchronization: a Huygens' inspired approach. En: *Proceedings of The 19th IFAC World Congress*. The International Federation of Automatic Control, pp. 3098–3103.

Peña Ramirez, J., K.Aihara, Fey, R., y Nijmeijer, H. (2014b). Futher understying of Huygens' coupled clocks: The effect of stiffness. *Physica D*, **270**(1): 11–19.

Peña Ramírez, J., Alvarez-Aguirre, A., Nuñez Pérez, R. F., y Alvarez, J. (2015). Open-loop synchronization: uncoupled oscillators may show synchronized motion. En: *Proceedings of The 4th IFAC Conference on Analysis and Control of Chaotic Systems*.

Peña Ramirez, J., Olvera, L. A., Nijmeijer, H., y Alvarez, J. (2016). The symphaty of two pendulum clocks: beyond Huygens' observations. *Scientific Reports*, **23580**(6): 1–16.

Peña-Ramírez, J., Fey, R., y Nijmeijer, H. (2012a). An experimental study on synchronization of nonlinear oscillators with Huygens' coupling. *Nonlinear Theory and Its Applications*, **3**(2): 128–142.

Peña-Ramírez, J., Fey, R. H., y Nijmeijer, H. (2012b). In-phase and anti-phase synchronization of oscillators with Huygens' coupling. *Cybernetics and Physics*, **1**(1): 58–66.

Pikovsky, A., Rosenblum, M., y Kurths, J. (2001). *Synchronization. An Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press. Nueva York, Estados Unidos.

Quanser (2003). *Active Mass Damper-Two Floors (AMD-2). Student Handout*.

Rao, S. S. (1994). *Engineering Optimization. Theory and Practice.*, capítulo 6, pp. 301–379. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey.

Real Academia Española (2016). Diccionario de la lengua española. Recuperado de: `http://dle.rae.es/?w=diccionario`. Accesado: Agosto,2016.

Rijlaarsdam, D., Pogromski, A. Y., y Nijmiejer, H. (2010). *Dynamics and Control of Hybrid Mechanical Systems*, Vol. 14 de *B*, capítulo Synchronization between coupled oscillators: an experimental approach, pp. 153–165. World Scientific Publishing Company, Singapur.

Rowland, T. (2016). Functional. Recuperado de: `http://mathworld.wolfram.com/Functional.html`. Accesado: Septiembre,2014.

Serway, R. A. y Jewett Jr., J. W. (2005a). *Físcia. Para ciencias e ingenierías*, Vol. 1, capítulo 9, pp. 251–291. Thomson, México.

Serway, R. A. y Jewett Jr., J. W. (2005b). *Físcia. Para ciencias e ingenierías*, Vol. 1, capítulo 15, pp. 452–485. Thomson, México.

Spoor, P. S. y Swift, G. W. (2000). The Huygens entrainment phenomenon and thermoacoustic engines. *Acoustical Society of America*, **108**(2): 588–599.

Steur, E., Kodde, R., y Nijmeijer, A. H. (2008). Synchronization of diffusively coupled electronic Hindmarsh-Rose oscillators. En: *ENOC-2008*.

Strogatz, S. H. (1994). *Nonlinear Dynamic and Chaos. Whit Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*, capítulo 6, pp. 145–146. Perseus Books Publishing, Estados Unidos.

Strogatz, S. H., Abrams, D. M., McRobie, A., Eckhardt, B., y Ott, E. (2005). Crowd synchronization on the millenium bridge. *Nature*, **438**: 43–44.

Teoh, C. S. y Davis, L. E. (1996). A coupled pendula system as an analogy to coupled transmission lines. *IEEE Transactions on Education*, **39**(4): 548–557.

Toledo Gallardo, S. R. (2014). *Sincronización de circuitos conmutados de segundo orden*. Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Baja California, México.

Ulrichs, H., Mann, A., y Parlitz, U. (2009). Synchronization and chaotic of coupled mechanical metronomes. *CHAOS*, **19**(4): 1–6.

Apéndice A. Comparación con plataforma de Quanser

El siguiente modelo se determinó de acuerdo al procedimiento mostrado en Quanser (2003). El diagrama de la Figura 10b se modifica y queda como se muestra en la Figura A.1. Puede observarse que en este caso sólo se manejaron cuatro osciladores para el desarrollo del modelo. Para diferenciar entre el modelo desarrollado en esta sección y aquél que se desarrolló en la sección 3.2, se han cambiado las variables relacionadas con las posiciones, en este caso se usan las mayúsculas. En cuanto a los parámetros de cada elemento, se mantiene la misma nomenclatura, m_i, δ_i y l_i $(i = 1, \ldots, N)$ para las masas, amortiguamientos y longitudes de los péndulos, respectivamente. Para los parámetros de la estructura se tiene k_i, b_i y M_i $(i = 1, 2)$ para las constantes de resorte, amortiguamientos y masas de cada plataforma, respectivamente.

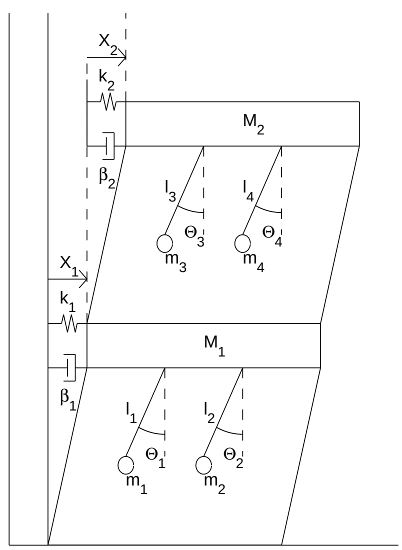


Figura A.1: **Diagrama del sistema.**

Al igual que en el modelo de la sección sección 3.2 se aplica la ecuación de Euler-Lagrange. Por lo que es necesario encontrar el lagrangiano de este sistema. El último está dado por

$$L = \frac{1}{2}\left[M_{T11}\dot{X}_1^2 + M_{T22}\dot{X}_2^2 + \sum_{b=1}^{4} m_b l_b^2 \dot{\Theta}_b^{\ 2} - k_1 X_1^2 - k_2 X_2^2\right] + \dot{X}_1 \sum_{i=1}^{N} m_i l_i \dot{\Theta}_i cos(\Theta_i) +$$
$$+ \dot{X}_2 \sum_{j=3}^{4} m_j l_j \dot{\Theta}_j cos(\Theta_j) + M_{T2}\dot{X}_1\dot{X}_2 - \sum_{d=1}^{4} m_d l_d g\left(1 - \cos(\Theta_d)\right), \quad (135)$$

donde

$$M_{T11} = M_1 + M_2 + \sum_{a=1}^{4} m_a,\ M_{T22} = M_2 + \sum_{c=3}^{4} m_c. \quad (136)$$

Aplicando la ecuación de Euler-Lagrange, se tiene que el modelo para el sistema de la Figura A.1 está dado por

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_1 m_1 l_1 cos(\Theta_1) + l_1^2 m_1 \ddot{\Theta}_1 &= U_1(\Theta_1, \dot{\Theta}_1) - m_1 l_1 g \sin(\Theta_1) - \delta_1 \dot{\Theta}_1,\\
\ddot{X}_1 m_2 l_1 cos(\Theta_2) + l_2^2 m_2 \ddot{\Theta}_2 &= U_2(\Theta_2, \dot{\Theta}_2) - m_2 l_2 g \sin(\Theta_2) - \delta_2 \dot{\Theta}_2,\\
(\ddot{X}_2 + \ddot{X}_1) m_3 l_1 cos(\Theta_3) + l_3^2 m_3 \ddot{\Theta}_3 &= U_3(\Theta_3, \dot{\Theta}_3) - m_3 l_3 g \sin(\Theta_3) - \delta_3 \dot{\Theta}_3,\\
(\ddot{X}_2 + \ddot{X}_1) m_4 l_1 cos(\Theta_4) + l_4^2 m_4 \ddot{\Theta}_4 &= U_4(\Theta_4, \dot{\Theta}_4) - m_4 l_4 g \sin(\Theta_4) - \delta_3 \dot{\Theta}_4,\\
M_{T11}\ddot{X}_1 + M_{T22}\ddot{X}_2 + \sum_{r=1}^{4} m_r l_r \ddot{\Theta}_r \cos(\Theta_r) &= \sum_{r=1}^{4} m_r l_r \dot{\Theta}_r^2 \sin(\Theta_r) - k_1 X_1 - \beta_1 \dot{X}_1,\\
M_{T22}\ddot{X}_1 + M_{T22}\ddot{X}_2 + \sum_{p=3}^{4} m_p l_p \ddot{\Theta}_p \cos(\Theta_p) &= \sum_{p=3}^{4} m_p l_p \dot{\Theta}_p^2 \sin(\Theta_p) - k_2 X_2 - \beta_2 \dot{X}_2. \quad (137)
\end{aligned}$$

Y para N osciladores se tiene que

$$\begin{aligned}
\ddot{X}_1 m_i l_i cos(\Theta_i) + l_i^2 m_i \ddot{\Theta}_i &= U_i(\Theta_i, \dot{\Theta}_i) - m_i l_i g \sin(\Theta_i) - \delta_i \dot{\Theta}_i,\ i = 1, 2, \ldots, K,\\
\left(\ddot{X}_1 + \ddot{X}_2\right) m_j l_j cos(\Theta_j) + l_j^2 m_j \ddot{\Theta}_j &= U_j(\Theta_j, \dot{\Theta}_j) - m_j l_j g \sin(\Theta_j) - \delta_j \dot{\Theta}_j,\ j = K+1, \ldots, N,\\
M_{T11}\ddot{X}_1 + M_{T22}\ddot{X}_2 + \sum_{r=1}^{N} m_r l_r \ddot{\Theta}_r \cos(\Theta_r) &= \sum_{r=1}^{N} m_r l_r \dot{\Theta}_r^2 \sin(\Theta_r) - k_1 X_1 - \beta_1 \dot{X}_1,\\
M_{T22}\ddot{X}_1 + M_{T22}\ddot{X}_2 + \sum_{p=K+1}^{N} m_p l_p \ddot{\Theta}_p \cos(\Theta_p) &= \sum_{p=K+1}^{N} m_p l_p \dot{\Theta}_p^2 \sin(\Theta_p) - k_2 X_2 - \beta_2 \dot{X}_2. \quad (138)
\end{aligned}$$

En este caso debido a que es una comparación entre el modelo presentado en la sección 3.2 y el que se desarrolló aquí, se omite el proceso para generar un modelo adimensional. Sin embargo, el proceso para generar uno es igual que el empleado en la sección 3.2. De lo anterior se puede intuir que los modelos que se compararán son (138) y (39).

A.1 Resultados de la comparación

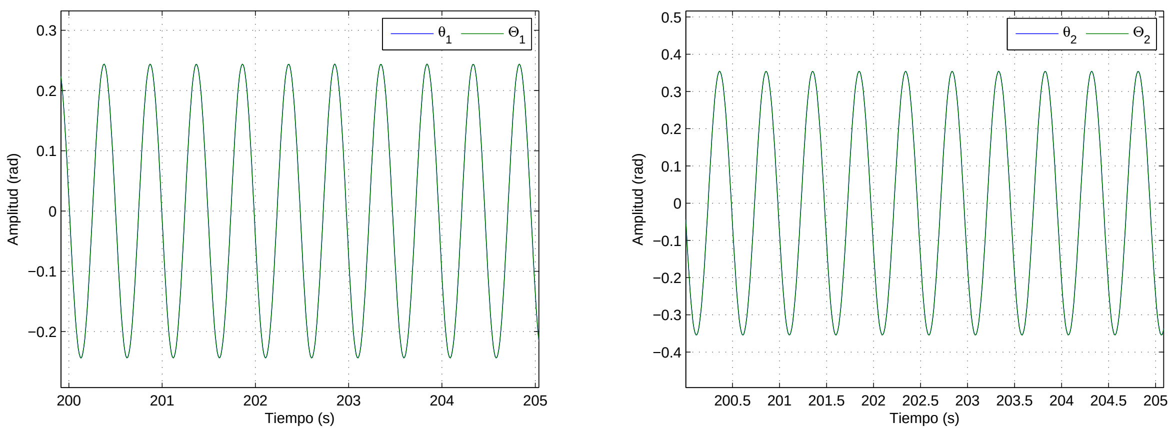
Para comparar los dos modelos se usaron los valores de la Tabla A.1.1, los cuales son iguales a los que se emplearon en la sección 4.1.

Tabla A.1.1: **Parámetros para dos péndulos.**

Elemento	Parámetro	Valor
Plataforma inferior	Masa (M_1)	1.5 kg
	Elasticidad (k_1)	500 N/m
	Amortiguamiento (b_1)	0.08Ns/m
Plataforma superior	Masa (M_2)	1.5 kg
	Elasticidad (k_2)	500 N/m
	Amortiguamiento (b_1)	0.08Ns/m
Péndulos	Masa m_i $(i = 1, 2)$	0.03 kg
	Amortiguamiento δ_i $(i = 1, 2)$	2×10^{-5} Ns/m
	Frecuencia ω_i $(i = 1, 2)$	10.89 rad/s
Término de van der Pol	Factor de no linealidad ν	1.5×10^{-3} Ns/m
	Cambio de signo γ_i $i = 1, 2)$	0.2 rad

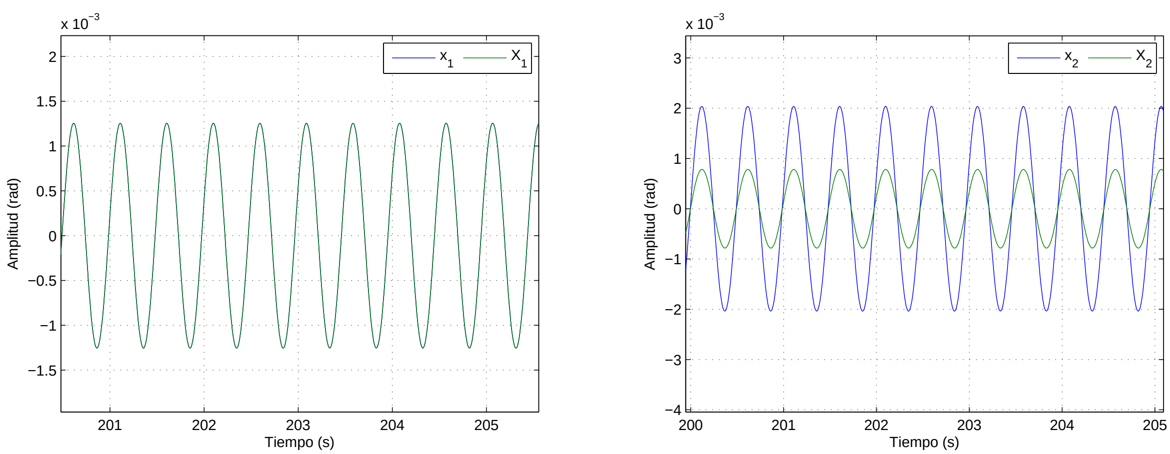
Los resultados obtenidos para dos osciladores, uno en cada plataforma, se muestran en la Figura A.2, donde se aprecia que los desplazamientos angulares, ver Figuras A.2a y A.2b, y el desplazamiento de la plataforma inferior, ver Figura A.3a, son iguales entres los dos modelos. Sin embargo, los desplazamientos de la plataforma superior difieren, esto es debido a que el modelo desarrollado en la sección 3.2 tiene una referencia absoluta; en cambio, el modelo que se desarrolló en este apéndice tiene referencias relativas, es decir, que la suma de los desplazamientos de las plataformas del modelo con referencias relativa (X_1 y X_2) es igual al desplazamiento de la plataforma superior del modelo con referencia absoluta (x_2), ésto es

$$x_2 = X_1 + X_2, \qquad (139)$$



(a) Desplazamientos angulares de θ_1 y Θ_1 **(b) Desplazamientos angulares de θ_1 y Θ_2**

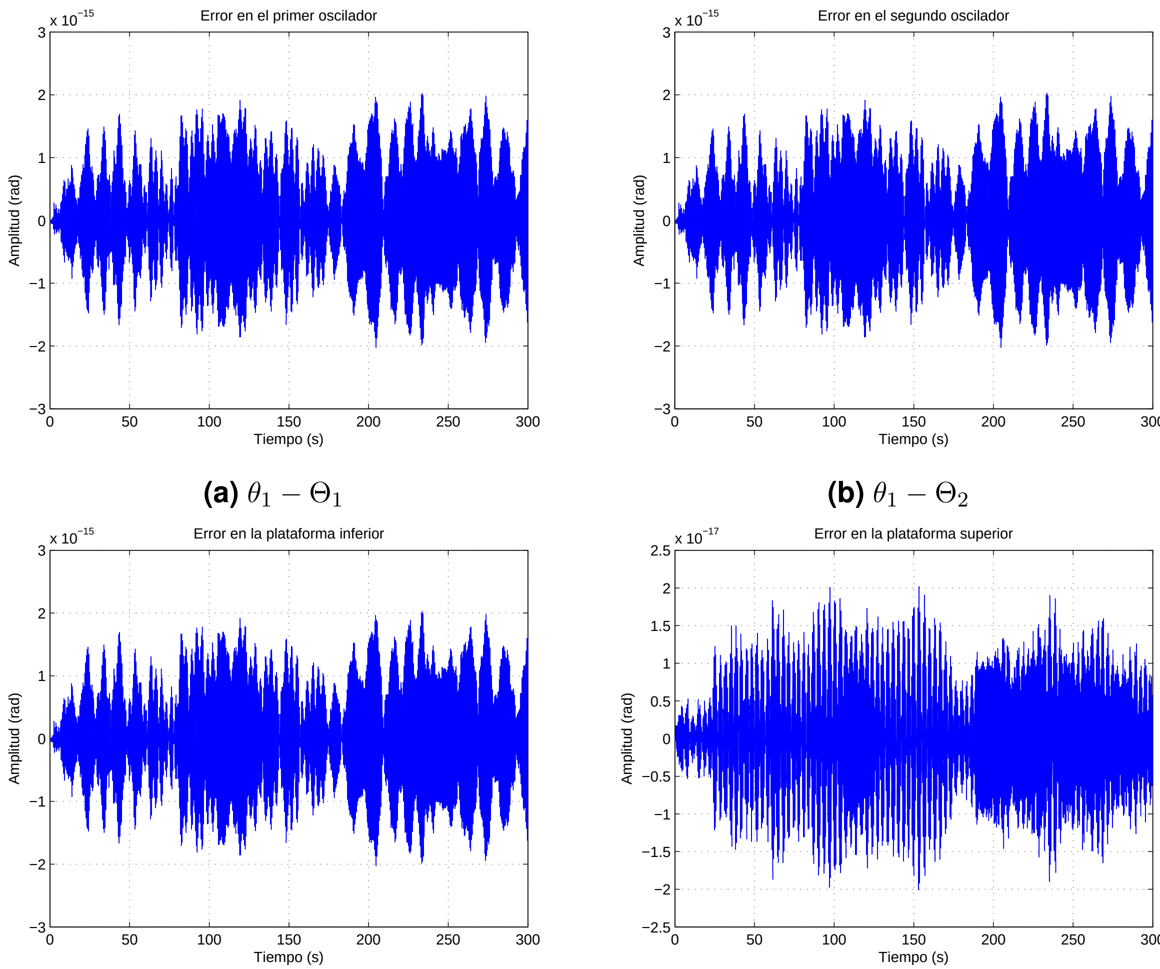
Figura A.2**: Desplazamientos de los osciladores.**



(a) Desplazamientos de x_1 y X_1 **(b) Desplazamientos de x_2 y X_2**

Figura A.3**: Desplazamientos de las plataformas.**

Si se grafican los errores que existen entre los desplazamientos que tienen los dos modelos, se puede encontrar que los errores son numéricos. Obviamente, para la plataforma superior se tiene que tomar en cuenta lo que se mencionó en el párrafo anterior. Los resultados de dichos errores se presentan en la Figura A.3.



(a) $\theta_1 - \Theta_1$

(b) $\theta_1 - \Theta_2$

(c) $x_1 - X_1$

(d) $x_2 - (X_2 + X_1)$

Figura A.4**: Errores en la comparación de los desplazamientos de los dos modelos.**