

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Maestría en Ciencias
en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación
en Instrumentación y Control**

Formación en grupos de robots móviles

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Alberto López Parra

Ensenada, Baja California, México

2017

Tesis defendida por

Alberto López Parra

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. César Cruz Hernández

Codirector del Comité

Dr. Adrián Arellano Delgado

Codirector del Comité

Dr. Rafael de Jesús Kelly Martínez

Dr. Vassili Spirine

Dr. Héctor Escamilla Taylor



Dr. Miguel Ángel Alonso Arévalo

Coordinador del Programa de Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones

Dra. Rufina Hernández Martínez

Directora de Estudios de Posgrado

Alberto López Parra © 2017

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor

Resumen de la tesis que presenta Alberto López Parra como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Electrónica y Telecomunicaciones con orientación en Instrumentación y Control.

Formación en grupos de robots móviles

Resumen aprobado por:

Dr. César Cruz Hernández

Codirector de Tesis

Dr. Adrián Arellano Delgado

Codirector de Tesis

Esta tesis aborda el problema de sincronización y formación de grupos de robots móviles considerando el caso de evasión de colisiones. Para lograr el objetivo de esta tesis, se enmarca el problema en la teoría de sistemas complejos. En particular, se aborda la sincronización y formación (de manera numérica) de cinco robots móviles, utilizando el modelo linealizado y controlable obtenido por medio de retroalimentación dinámica del modelo más simple de un robot diferencial tipo Khepera III. En la primera parte de este trabajo de tesis, se implementan diferentes topologías haciendo uso de un controlador basado en teoría de redes complejas con el fin de lograr la sincronización de la red de robots móviles. A través del análisis de resultados obtenidos se aplica la topología con mejor desempeño en el controlador de formación.

Se presentan resultados numéricos para sincronización y resultados numéricos y experimentales para el caso de formación de redes de robots móviles considerando evasión de colisiones. Se presta especial atención al seguimiento de diferentes trayectorias con fines de aplicación a la exploración de terrenos.

Palabras Clave: **Formación, Sincronización, Sistemas complejos, Grupos de robots móviles, Robot Khepera III, Exploración.**

Abstract of the thesis presented by Alberto López Parra as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Electronics and Telecommunications with orientation in Instrumentation and Control.

Formation in groups of mobile robots

Abstract approved by:

Dr. César Cruz Hernández

Thesis Co-Director

Dr. Adrián Arellano Delgado

Thesis Co-Director

This dissertation aboards the networks synchronization and formation problems conformed by mobile robots, considering the case of collision avoidance. To achieve the goal, this thesis work proposes the use of complex systems theory. Particularly, the synchronization and formation of five mobile robots, by using a linear and controllable model of a differential robot obtained by dynamic feedback of the simplest model of a Khepera III differential type robot. In the first part of this thesis work, different topologies are implemented using a controller based on complex network theory in order to achieve the synchronization of the mobile robots network. Through the analysis of results obtained, the topology with the best performance controller is applied in the collective behavior of formation.

We present numerical results for synchronization and numerical and experimental results for formation of mobile robots networks, considering the case of collision avoidance. Special attention is given to the monitoring of different trajectories for purposes of exploration application.

Keywords: Formation, Synchronization, Complex systems, Groups of mobile robots, Robot Khepera III, Exploration.

Dedicatoria

A mi familia y amigos, por darle significado y soporte a mi vida.

Agradecimientos

A mis padres Jesús y Bertha por su amor, apoyo constante y enseñanzas.

A mis hermanos por sus consejos y palabras de aliento.

A mis amigos, mi segunda familia, gracias por todos los buenos ratos.

A mis compañeros y amigos de CICESE, por hacer agradable los días de estudio.

Al doctor César Cruz, por el apoyo y paciencia, gracias por compartir su conocimiento y consejos que sin duda han hecho de este un mejor trabajo.

Al doctor Adrián, gracias por todo el tiempo y dedicación.

Al comité, por sus comentarios y sugerencias que ayudaron a enriquecer este trabajo de tesis.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

Al CONACyT a través del proyecto de Investigación en ciencia básica entre instituciones Ref. 166654 "Sincronización de sistemas complejos y algunas aplicaciones".

Tabla de contenido

	Página
Resumen en español	iii
Resumen en inglés	iv
Dedicatoria	v
Agradecimientos	vi
Lista de figuras	ix
Lista de tablas	xiii
Capítulo 1. Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Planteamiento del problema de estudio	4
1.3 Propuesta de solución	5
1.4 Objetivos	5
1.4.1 Objetivo general	5
1.4.2 Objetivos específicos	5
1.5 Organización de la memoria	6
Capítulo 2. Preliminares	8
2.1 Sistemas complejos	8
2.2 Sistemas multiagente	8
2.3 Teoría de grafos	9
2.4 Algunos tipos de grafos	11
2.4.1 Grafo no dirigido	11
2.4.2 Grafo dirigido	11
2.4.3 Grafo mixto	11
2.5 Matrices asociadas a un grafo	12
2.5.1 Matriz de adyacencia $E(G)$	12
2.5.2 Matriz de grado $D(G)$	13
2.5.3 Matriz laplaciana $L(G)$	13
2.5.4 Matriz de acoplamiento $A(G)$	14
2.6 Algunas topologías de conexión	14
2.6.1 Topología de conexión en cadena	15
2.6.2 Topología de conexión en vecino cercano	16
2.6.3 Topología de conexión en estrella	17
2.6.4 Topología de conexión en mundo pequeño	18
Capítulo 3. Robot móvil diferencial	20
3.1 Modelo matemático del robot móvil diferencial	20
3.2 Linealización por retroalimentación dinámica	22
3.3 Cálculo de las velocidades angulares ω_L y ω_R del robot diferencial	25
Capítulo 4. Sincronización en grupos de robots móviles	27
4.1 Sincronización	27
4.2 Robot aislado	28

4.3	Redes de robots	28
4.4	Metodología para las simulaciones	30
4.5	Nodos aislados	31
4.6	Simulaciones utilizando algunas topologías de conexión	35
4.6.1	Grupo de robots móviles con topología en cadena	35
4.6.2	Grupo de robots móviles con topología en vecino cercano	40
4.6.3	Grupo de robots móviles con topología en estrella	44
4.6.4	Grupo de robots móviles con topología en mundo pequeño	49
4.7	Constantes de sincronización para el grupo con topología en estrella	54
4.8	Comparación entre la sincronización de los grupos de acuerdo a la topología	55
Capítulo 5. Formación en grupos de robots móviles		57
5.1	Formación	57
5.2	Evasión de colisiones	58
5.3	Simulaciones de formación de robots	60
5.3.1	Tarea de punto deseado para el grupo de robots	60
5.3.2	Ruta circular	66
5.4	Límites de velocidad	70
5.4.1	Cálculo de los límites de velocidad	70
5.5	Simulación con valores reales	72
Capítulo 6. Experimentos		77
6.1	Equipo de laboratorio y herramientas utilizadas en los experimentos	77
6.1.1	Robot móvil diferencial Khepera III	77
6.1.2	Cámaras Optitrack	77
6.1.3	Comunicación TCP/IP	78
6.2	Cálculo del ángulo de orientación	79
6.3	Experimentos	80
6.3.1	Metodología para realizar los experimentos	80
6.3.2	Punto deseado	80
6.3.3	Ruta circular	86
6.3.4	Ruta de exploración	90
Capítulo 7. Conclusiones		95
7.1	Trabajos futuros	96
Literatura citada		97

Lista de figuras

Figura	Página	
1	Algunas aplicaciones de robots: a) Robot para transportar cargas, b) Silla utilizada en medicina, c) Aspiradora doméstica, d) Robot explorando marte.	1
2	a) Robot explorando un área, b) Grupo de robots en formación explorando un área.	3
3	Comportamientos colectivos en animales: a) Parvada volando en sincronía, b) Banco de peces para evitar depredadores, c) Camino de hormigas llevando la comida al nido, d) Colonia de abejas trabajando en el panal.	4
4	Puentes de Königsberg. Fuente: Diestel (2005).	10
5	De a) a c) representación abstracta de los puentes y regiones de Königsberg. Fuente: Diestel (2005).	11
6	a) Grafo no dirigido, b) Grafo dirigido, c) Grafo mixto, d) Multigrafo.	12
7	Red con topología en cadena con 5 nodos acoplados en forma bidireccional.	15
8	Red con topología en vecino cercano con 5 nodos acoplados en forma bidireccional.	16
9	Red con topología en estrella con 5 nodos acoplados en forma bidireccional.	17
10	Red con topología en mundo pequeño con 5 nodos acoplados en forma bidireccional, obtenida a partir de la red en vecino cercano (figura 6).	18
11	Diagrama esquemático de un robot móvil diferencial.	20
12	Tareas básicas de un robot móvil: a) Movimiento punto a punto, b) Seguidor de trayectorias.	23
13	Experimento de Huygens. Fuente: Pikovsky <i>et al.</i> (2003).	27
14	Diagrama a bloques empleado para la implementación de las simulaciones.	30
15	Robots aislados, trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$	32
16	Robots aislados, dinámicas del error: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$	32
17	Robots aislados, entradas: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$	33
18	Robots aislados, movimiento en el plano x-y.	33
19	Robots aislados, posición inicial de los robots.	34
20	Robots aislados, posición final de los robots.	34
21	Red con topología en cadena, trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$	37
22	Red con topología en cadena, dinámicas del error: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$	37
23	Red con topología en cadena, entradas: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$	38
24	Red con topología en cadena, movimiento en el plano x-y.	38
25	Red con topología en cadena, posición inicial de los robots.	39

Figura	Página
26 Red con topología en cadena, posición final de los robots.	39
27 Red con topología en anillo, trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$	41
28 Red con topología en anillo, dinámicas del error: a) x_1-x_i , b) y_1-y_i , c) $\theta_1-\theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$	42
29 Red con topología en anillo, entradas: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$	42
30 Red con topología en anillo: movimiento en el plano x-y.	43
31 Red con topología en anillo, posición inicial de los robots.	43
32 Red con topología en anillo, posición final de los robots.	44
33 Red en topología estrella, trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$	46
34 Red en topología estrella, dinámicas del error: a) x_1-x_i , b) y_1-y_i , c) $\theta_1-\theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$	46
35 Red en topología estrella, entradas: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$	47
36 Red en topología estrella, movimiento en el plano x-y.	47
37 Red en topología estrella, posición inicial de los robots.	48
38 Red en topología estrella, posición final de los robots.	48
39 Red con topología en mundo pequeño, trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$	50
40 Red con topología en mundo pequeño, dinámicas del error: a) x_1-x_i , b) y_1-y_i , c) $\theta_1-\theta_i$, para $i = 2, 3, 4, 5$	51
41 Red con topología en mundo pequeño, entradas: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$	51
42 Red con topología en mundo pequeño, movimiento en el plano x-y.	52
43 Red con topología en mundo pequeño, posición inicial de los robots.	52
44 Red con topología en mundo pequeño, posición final de los robots.	53
45 Valores de las constantes de sincronización validas en la red en topología estrella.	54
46 Vuelo en formación de aves en "V".	57
47 Vector l formado entre los robots i, j	59
48 Grafo de conexiones dirigido utilizado para formación de 5 robots.	60
49 Trayectorias dinámicas para formación: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$	62
50 Dinámicas del error para formación: a) x_1-x_i , b) y_1-y_i , c) $\theta_1-\theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$	63
51 Entradas para formación: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$	63
52 Movimiento de los robots en el plano x-y.	64

Figura	Página	
53	Posición inicial del grupo robots y posición final deseada.	64
54	Posición final del grupo de robots, formación en "V".	65
55	Trayectorias dinámicas para formación: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$	67
56	Dinámicas del error para formación: a) x_1-x_i , b) y_1-y_i , c) $\theta_1-\theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$	67
57	Entradas para formación: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$	68
58	Movimiento de los robots en el plano x-y.	68
59	Posición inicial del grupo de robots.	69
60	Posición final del grupo de robots siguiendo la ruta deseada.	69
61	a) Función saturación, b) Ejemplo del recorte de onda de la función saturación.	71
62	Trayectorias dinámicas para formación: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$	73
63	Dinámicas del error para formación: a) x_1-x_i , b) y_1-y_i , c) $\theta_1-\theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$	73
64	Entradas para formación: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$	74
65	Movimiento del grupo de robots en el plano x-y.	74
66	Posición inicial de los robots.	75
67	Posición final del grupo de robots siguiendo la ruta deseada.	75
68	Vista general del robot Khepera III. Fuente: Lambercy y Bureau (2007).	77
69	Marcas reflejantes colocadas en los robots para detección de posición.	78
70	Robot en el software Motive.	79
71	Diagrama a bloques para la realización de los experimentos.	81
72	Topología utilizada en los experimentos.	81
73	Trayectorias dinámicas para formación: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, 3$	83
74	Dinámicas del error para formación: a) x_1-x_i , b) y_1-y_i , c) $\theta_1-\theta_i$, con $i = 2, 3$	83
75	Entradas para formación: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, 3$	84
76	Movimiento realizado por cada robot en el plano x-y.	84
77	Posición inicial y posición deseada del grupo de robots.	85
78	Posición final del grupo de robots en forma de "V" llegando al punto deseado.	85
79	Trayectorias dinámicas para formación: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, 3$	87
80	Dinámicas del error para formación: a) x_1-x_i , b) y_1-y_i , c) $\theta_1-\theta_i$, con $i = 2, 3$	87
81	Entradas para formación: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, 3$	88
82	Movimiento realizado por cada robot en el plano x-y.	88
83	Posición inicial del grupo de robots.	89

Figura		Página
84	Posición final del grupo de robots formados siguiendo la trayectoria circular.	89
85	Trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, 3$	91
86	Dinámicas del error: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3$	91
87	Entradas: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, 3$	92
88	Movimiento realizado por cada robot en el plano x, y	92
89	Posición inicial de los robots.	93
90	Posición final de los robots siguiendo la trayectoria de barrido.	93

Lista de tablas

Tabla	Página
1 Tiempos de sincronización de los grupos de robots con diferentes topologías.	55

Capítulo 1. Introducción

En este primer capítulo de la tesis, se proporciona una breve introducción a los comportamientos colectivos presentes en la naturaleza, el problema a tratar, así como los objetivos generales y específicos, alcances de la tesis y la forma en que está organizado el contenido de la tesis.

1.1 Motivación

El término robot proviene del checo *Robbota* y significa “Servidumbre” o “Labor forzada”. Con el avance tecnológico y la creciente productividad, se han construido diferentes tipos de robots, como: robots industriales, móviles, zoomórficos, etc.

En las últimas décadas, la robótica ha capturado la atención del mundo respondiendo a la solución de tareas como accidentes nucleares, búsqueda de barcos perdidos, exploración de volcanes y viajes al espacio. Los robots están cambiando la forma en que construimos, abastecemos, alimentamos y suplimos de energía el mundo, están cambiando la forma en que las personas viven y trabajan y están expandiendo los límites de la experiencia humana (Ollero Baturone, 2005). En la actualidad, la robótica está experimentando un crecimiento explosivo debido a los avances en computación, electrónica y el software. Con el progreso de la robótica nació la aparición de

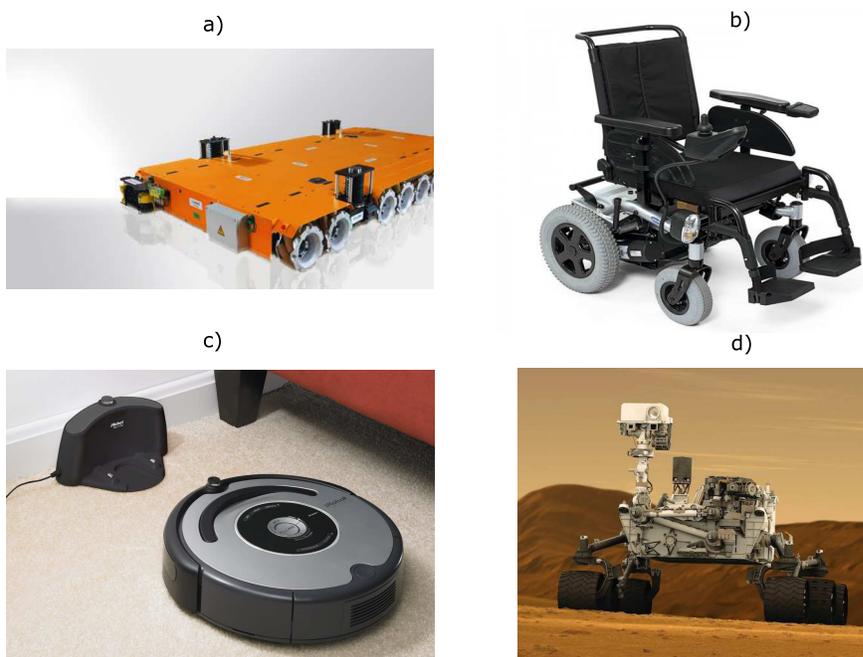


Figura 1: Algunas aplicaciones de robots: a) Robot para transportar cargas, b) Silla utilizada en medicina, c) Aspiradora doméstica, d) Robot explorando marte.

sistemas de grupos de robots móviles para resolver problemas cooperativamente, debido a las ventajas que presentan, entre las cuales mencionamos:

- Algunas tareas son imposibles de realizar por un solo robot.
- Un grupo de robots aumenta la eficiencia y efectividad de la tarea del sistema.
- La creación de muchos robots simples es más barata y fácil, permitiendo flexibilidad en cuanto a la atención de tareas que un robot único no es capaz de dar, sin importar su tamaño y que tan equipado esté.
- El uso de grupos de robots permite enfrentar fallas de mejor forma.
- Permiten la emergencia de comportamientos colectivos como: sincronización, formación, coordinación, etc.

Actualmente, los robots son utilizados en una diversidad de aplicaciones, la industria automotriz, tareas domésticas, medicina, exploración espacial, carga y descarga de máquinas, etc. En la figura 1 se muestran algunas aplicaciones de robots. En particular, en este trabajo de tesis se abordará el problema de exploración de áreas con un grupo de robots móviles con la finalidad de ahorro de tiempo y energía (véase figura 2).

En (Tian-Tian *et al.*, 2008) los autores logran formación de un grupo de robots móviles utilizando control predictivo, en este trabajo se presentan resultados numéricos. En (Abbaspour *et al.*, 2015) se logra formación óptima con la ayuda de varias técnicas de optimización numérica. Se utilizan como nodos a robots móviles con el propósito de manipular un objeto en común. Finalmente, se utiliza una aproximación virtual para demostrar cómo se logra la formación óptima. En (Dai *et al.*, 2015) se logra formación de robots móviles con evasión de obstáculos a través de control geométrico utilizando un robot líder, en este artículo se presentan resultados numéricos y resultados experimentales usando robots móviles ANBOT.

La teoría de la selección natural propuesta por Charles Darwin, está basada en la idea de que los organismos exhiben comportamientos que les dan una expectativa más alta de sobrevivir, de pasar sus genes y transmitir esos comportamientos a las futuras generaciones. Aquellos organismos que adoptan una estrategia de supervivencia tienen más probabilidades de lograrlo y de aumentar en número de individuos su especie y por el contrario, aquellos que no lo hacen decrecen en población (Sumpter, 2010).

Los comportamientos colectivos se observan en varios sistemas biológicos, entre los más notables, se encuentran las colonias de insectos como las luciérnagas, hormigas y abejas, en las aves y los bancos de peces. Estos comportamientos colectivos aseguran un beneficio al grupo, que de

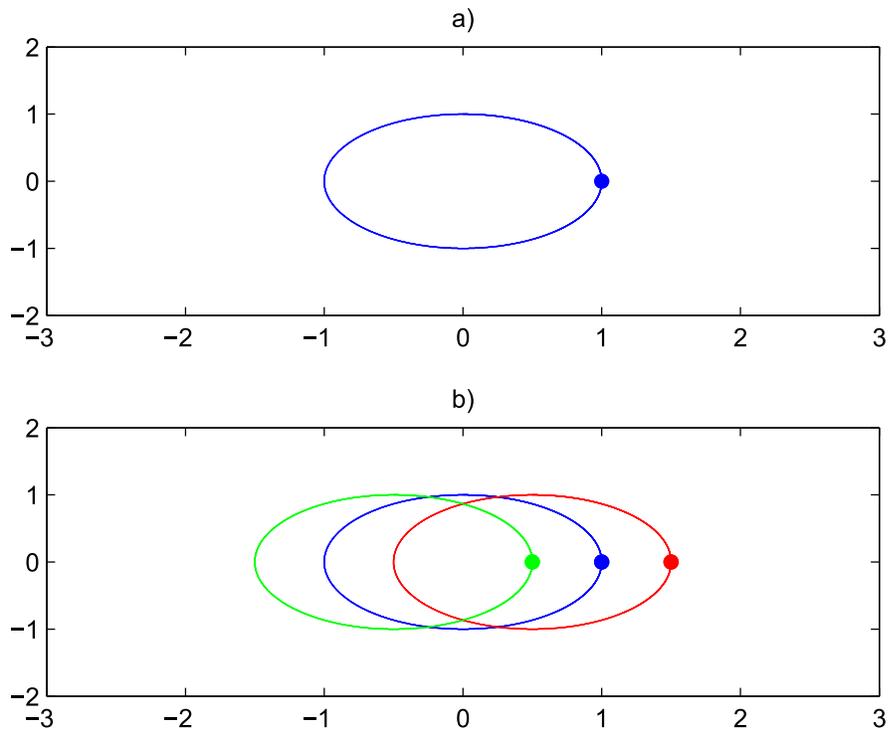


Figura 2: a) Robot explorando un área, b) Grupo de robots en formación explorando un área.

manera aislada, los individuos no podrían lograr.

Se considera que dichos comportamientos emergentes distinguen a los *sistemas complejos*, lo que significa que el entender los componentes básicos de los individuos no necesariamente explica el comportamiento colectivo del grupo, esto comúnmente hace referencia a la frase de Aristóteles “*El todo es más que la suma de sus partes*” (Deisboeck y Couzin, 2009).

En (Wang, 2002) se estudia la sincronización en diferentes redes regulares y redes aleatorias de mundo pequeño, utilizando sistemas lineales como nodos. En (Posadas-Castillo *et al.*, 2009) se estudia experimentalmente sincronización en redes globales con ayuda de la teoría de sistemas complejos utilizando circuitos caóticos de Chua como nodos. En (Posadas-Castillo *et al.*, 2007) se presenta la sincronización en matrices acopladas a través de redes neuronales celulares. En (Zhu *et al.*, 2015) los autores utilizan el modelo de una partícula propulsada para describir los comportamientos colectivos emergentes en un grupo de agentes móviles. Cada agente se coordina con sus vecinos a través de cierta fuerza alineando su velocidad y evitando obstáculos. Mediante el uso de la teoría de grafos se muestra que el comportamiento colectivo emerge, mientras que las colisiones entre los agentes se pueden evitar. Se emplean simulaciones numéricas para validar la resultados teóricos. En los últimos años, el control de sistemas multi-agente ha atraído la atención de las ciencias computacionales y sistemas de control. Con ayuda de las in-

investigaciones en los sistemas complejos y comportamientos colectivos, se han propuesto algunas leyes de control para lograr el desempeño y beneficio de agentes acoplados tales como consenso, formación, sincronización, etc. Sin embargo, la aplicación de estos comportamientos con evasión de obstáculos en sistemas multi-agente ha llamado aún más la atención de investigadores.

Motivados por lo argumentado arriba, este trabajo de tesis propone contribuir en la solución de este problema, es decir, estudiar los comportamientos colectivos de sincronización y formación para el desarrollo cooperativo de tareas. La gran diferencia con los trabajos reportados, es que se recurrirá a la teoría de sistemas complejos.

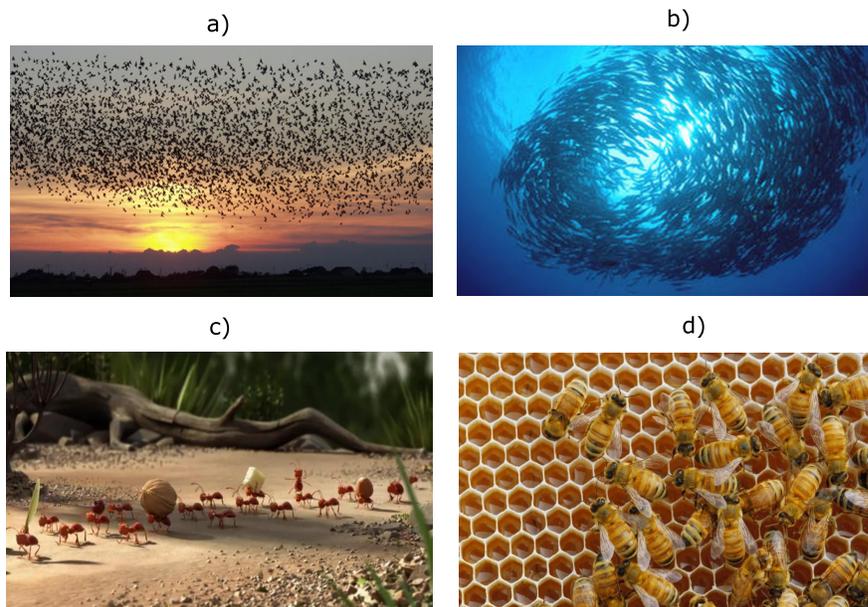


Figura 3: Comportamientos colectivos en animales: a) Parvada volando en sincronía, b) Banco de peces para evitar depredadores, c) Camino de hormigas llevando la comida al nido, d) Colonia de abejas trabajando en el panal.

1.2 Planteamiento del problema de estudio

En las últimas décadas, el estudio de sistemas multirobot ha acaparado gran interés, dadas las ventajas que tales sistemas muestran con respecto a robots individuales y debido a la mejora y avance de la tecnología que ha permitido la interacción entre múltiples sistemas. Es más fácil para un grupo de robots lograr tareas que no son posible para uno solo, como puede ser, mover un objeto muy pesado o permitir el censado de un área más grande. Por esto, en vez de usar un solo robot que realice toda la tarea, se utilizan sistemas multirobot, que son más baratos, de fácil ejecución y permiten flexibilidad.

El campo de los sistemas multirobot puede abarcar varias áreas tales como: industria, militar, investigación, estudio de sistemas biológicos, etc. Por otra parte, los sistemas multirobot pueden contribuir directamente en acciones como la exploración, carga de objetos pesados, navegación,

entretenimiento, etc.

Debido al estudio de comportamientos de grupos de animales y su representación en modelos matemáticos, es posible aplicar ciertos comportamientos colectivos que se encuentran en la naturaleza al área de control, específicamente en la robótica móvil. El propósito de ésta tesis es generar comportamientos colectivos como la sincronización y formación en grupos de robots móviles y aplicarlo en la exploración.

1.3 Propuesta de solución

Debido a las ventajas que presentan el desarrollo cooperativo de tareas mediante el uso de un grupo de robots, este trabajo de tesis, propone el estudio de sincronización en diferentes redes de conexiones y el estudio e implementación de formación en una red con diferentes objetivos de control, para su uso en el desarrollo cooperativo de tareas utilizando la teoría de sistemas complejos y la teoría de grafos. Esto se pretende realizar, empleando el modelo ideal de un robot diferencial para su estudio numérico y el robot Khepera III para su implementación. En los experimentos se hacen uso 8 cámaras que permiten el censado de las posiciones y ángulos de cada robot y un modem y tarjetas inalámbricas para la comunicación de los robots con la computadora.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

Aplicar la teoría de sistemas complejos para generar comportamientos colectivos en grupos de robots móviles, específicamente se persigue la sincronización y formación de redes de robots móviles tipo diferencial como el Khepera III. En particular, el comportamiento colectivo será con énfasis en la coordinación de tareas con el propósito de aplicarse en alguna de las tareas como búsqueda, rescate, transporte y patrullaje.

1.4.2 Objetivos específicos

- Realizar simulaciones numéricas aplicando la teoría de sistemas complejos en redes con diferentes topologías utilizando el modelo matemático de un robot diferencial, con la finalidad de aplicarlo en alguna tarea como búsqueda, rescate, transporte y patrullaje.
- Implementar numéricamente sincronización en redes con diferentes topologías mediante la teoría de sistemas complejos y teoría de grafos.

- Implementar experimentalmente sincronización y formación utilizando un robot diferencial Khepera III mediante el uso de la teoría de sistemas complejos y teoría de grafos y aplicar este comportamiento en alguna tarea específica.

Algunas contribuciones del presente trabajo de tesis con relación a los objetivos, son reportadas en el Sexto Simposium Internacional Regional de Ingeniería Industrial llevado a cabo en Puerto Peñasco, Sonora (13-15 de abril del 2016) y Latin American Conference on Automatic Control realizado en Medellín, Colombia (12-15 de octubre del 2016).

1.5 Organización de la memoria

El material contenido en esta memoria de tesis, está organizado de la siguiente manera:

En el **capítulo 2** se presenta lo relacionado con la propuesta de solución, se describen los sistemas complejos, los sistemas multiagente, la teoría de grafos y las matrices asociadas a un grafo. En esta sección se presentan algunas topologías de conexión a estudiar, entre éstas, cadena, vecino cercano, estrella y mundo pequeño y su representación matricial a través de la matriz de acoplamiento.

En el **capítulo 3** se expone el modelo matemático de un robot diferencial ideal y la linealización por retroalimentación dinámica del modelo, necesaria para aplicar los controladores de sincronización y formación. Se presenta además, el modelo inverso, que sirve para calcular las velocidades angulares para cada una de las llantas de los robots.

El **capítulo 4** está dedicado al comportamiento colectivo de sincronización, ejemplos que se presentan en la naturaleza, su definición formal y los resultados numéricos del controlador de sincronización aplicados a las 4 topologías de conexión. Se presenta además una gráfica donde se muestran los valores válidos de las constantes de sincronización, así como la comparación de tiempos en lo que se llega a la sincronía en cada una de las redes.

En el **capítulo 5** se presenta el comportamiento colectivo de formación, se expone la modificación del controlador (para evitar colisiones) y su implementación en una topología en estrella dirigida (retomando los resultados del capítulo anterior). Se presentan los resultados numéricos de punto deseado y ruta circular. Se agregan además, límites de velocidad para cada una de las ruedas de los robots y se muestran resultados numéricos de un objetivo de control utilizando dichos límites.

El **capítulo 6** presenta todo lo relacionado a los experimentos. Se hace una descripción de los equipos a utilizar, presentando sus características técnicas y cálculos necesarios para la implementación de los controladores. En esta sección se muestran los resultados de los 3 experimentos

realizados utilizando diferentes objetivos de control: punto deseado, ruta circular y una ruta de exploración.

Finalmente, en el **capítulo 7** se presentan las conclusiones más importantes referentes a los resultados obtenidos durante el desarrollo de la tesis y los trabajos futuros.

Capítulo 2. Preliminares

En este capítulo se exponen los fundamentos en los que está basada la tesis. Se hablará sobre la teoría de sistemas complejos, la teoría de grafos, las principales matrices asociadas a un grafo, así como algunas topologías de conexión (cadena, vecino cercano, estrella, mundo pequeño) y su representación matricial para su uso en las simulaciones numéricas de los comportamientos de sincronización y formación de grupos de robots móviles. El lector interesado en profundizar con la teoría de grafos y en general con el material de este capítulo, puede consultar por ejemplo las referencias (Diestel, 2005; Harary, 1969).

2.1 Sistemas complejos

El mundo está acostumbrado a contemplar todo desde una perspectiva simple y no desde la complejidad. Sin embargo, en los últimos años se reportan investigaciones en las que demuestran que la realidad no es tan “simple” como se venía creyendo. Von Bertalanffy definió un sistema como un “complejo” de componentes que interactúan, que constituyen una totalidad organizada y que se caracteriza además por la interacción entre sus elementos (Munné, 2005).

Un *sistema complejo* es un sistema compuesto de un gran número de elementos, bloques o agentes, capaces de intercambiar estímulos con otros elementos y con su medio ambiente. La interacción entre elementos debe ocurrir con vecinos cercanos o con vecinos distantes, los elementos pueden ser todos iguales o diferentes; pueden moverse en el espacio u ocupar un lugar fijo, y pueden tener uno o muchos estados. La característica que tienen en común es que presentan una organización (Otiino, 2003) .

En los sistemas complejos, el comportamiento particular de los bloques elementales no describe el comportamiento global del sistema. Estos sistemas no pueden comprenderse estudiando únicamente las partes aisladas. La esencia del sistema está en la interacción de las partes y del comportamiento global que surge de sus interacciones. Así pues, el sistema debe ser visto como un todo.

Para analizar los sistemas complejos generalmente se recurre a modelos dinámicos no lineales, ecuaciones diferenciales y análisis de series de tiempo, grafos y teoría de redes, y dependiendo del problema particular de estudio, teoría de la información, algoritmos genéticos, etc.

2.2 Sistemas multiagente

En diferentes dominios se realizan esfuerzos en el planteamiento de formas para la solución de problemas de una manera cooperativa. La inteligencia artificial es uno de los dominios que

ha estudiado ese problema, en general basándose en sistemas cooperativos compuestos por al menos dos agentes, los cuales interactúan para la resolución de un problema particular. Los agentes por su parte, deben tener cierto grado de autonomía, capacidad de interactuar, negociar, coordinarse y hasta competir con otros para llevar a cabo tareas que pueden ser individuales o colectivas. Así pues un *sistema multiagente* (SMA) tiene que ver con el comportamiento de una colección de agentes autónomos tratando de resolver un problema particular, estos agentes comparten conocimiento acerca del problema y sus soluciones. Un SMA está formado por un grupo (comunidad) de individuos que interactúan entre sí, utilizando protocolos y lenguajes de comunicación, con el propósito de resolver problemas que están más allá de las capacidades de cada uno. Algunas de las características y ventajas de los SMA (Aguilar *et al.*, 2012) son:

- Cada agente tiene capacidad de resolver parcialmente el problema.
- No hay un agente central que controle al grupo.
- Los agentes son capaces de actuar y/o comunicarse con sus vecinos.
- Se enfocan primordialmente en la coordinación de acciones entre los agentes.
- Permiten la emergencia de comportamientos colectivos.

Para alcanzar objetivos en los SMA se requiere que existan interacciones entre los individuos que los conforman. Estas interacciones permiten por medio de la comunicación entre individuos, transmitir información que eventualmente puede inducir un comportamiento colectivo deseado. Para alcanzar este objetivo, en este trabajo de tesis se hará uso de la teoría de sistemas complejos y teoría de grafos, conectando los robots en diferentes topologías.

2.3 Teoría de grafos

La *teoría de grafos* se originó con la solución analítica del problema de los siete puentes de Königsberg, un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736. Su nombre se debe a Königsberg, la ciudad de Prusia Oriental y luego de Alemania que desde 1945 se convertiría en la ciudad rusa de Kaliningrado.

Esta ciudad es atravesada por el río Pregel, el cual se bifurca para rodear con sus brazos a la isla Kneiphof, dividiendo la ciudad en cuatro regiones distintas, las que entonces estaban unidas mediante siete puentes (como se observa en la figura 4) llamados puente del herrero, puente conector, puente verde, puente del mercado, puente de madera, puente alto y puente de la miel.

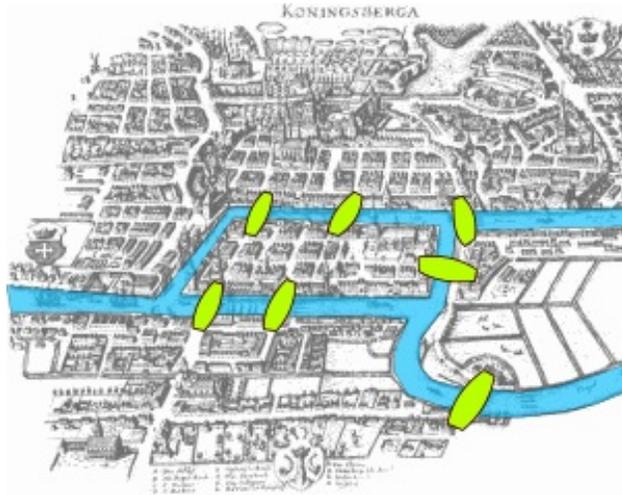


Figura 4: Puentes de Königsberg. Fuente: Diestel (2005).

El problema fue formulado en el siglo XVIII y consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie las cuatro regiones de la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes y regresando al punto de inicio. Por los años en que surge la formulación del problema de los puentes de Königsberg, este problema se propagó a modo de juego y de trivia matemática entre los intelectuales de la época.

La respuesta es negativa, no existe una ruta con estas características (Diestel, 2005). El problema puede resolverse recurriendo al método de *fuerza bruta* , lo que implica probar todos los posibles recorridos existentes. Sin embargo, Leonhard Euler en 1736 en su publicación “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” demostró una solución analítica y generalizada del problema, que puede aplicarse a cualquier territorio en que ciertos accesos estén restringidos a ciertas conexiones, tales como los puentes de Königsberg.

Para dicha demostración, Euler recurrió a una abstracción del mapa de la ciudad de Königsberg, enfocándose exclusivamente en las regiones terrestres y las conexiones entre éstas. En la figura 5 se tiene la representación abstracta utilizada por Euler para representar las cuatro regiones y los siete puentes.

Cada puente lo representó mediante una línea que unía a dos puntos, cada uno de los cuales representaba una región diferente. Así, el problema se reduce a decidir si existe o no un camino que comience por uno de los puntos, transite por todas las líneas una única vez y regrese al punto de partida.

La publicación de Euler fue la primera que hizo alusión a una geometría de este tipo, en que sólo interesan las propiedades estructurales de los objetos y no sus medidas, como tradicionalmente se hacía en las matemáticas. A esta abstracción Euler le llamó *grafo* , ver figura 5c.

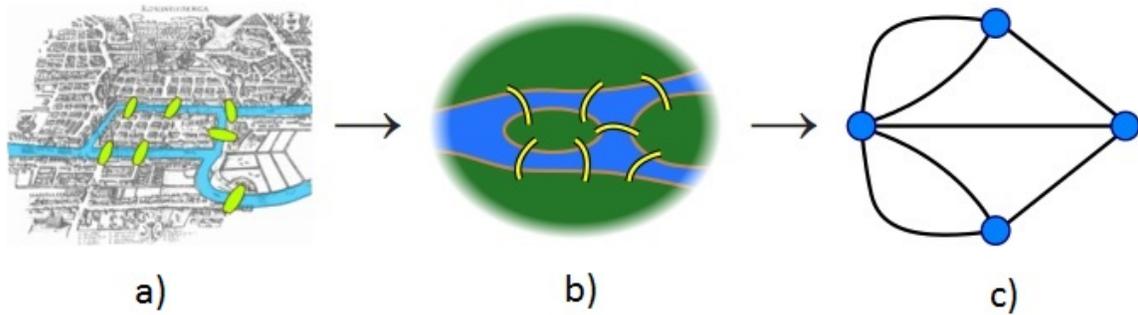


Figura 5: De a) a c) representación abstracta de los puentes y regiones de Königsberg. Fuente: Diestel (2005).

2.4 Algunos tipos de grafos

Matemáticamente se define un grafo $G = (V, E)$ como un par formado por el conjunto V de vértices o nodos y el conjunto E de aristas. La forma usual de un grafo se traza dibujando un punto que representa cada nodo que conforma el grafo, uniendo 2 de estos puntos por una línea. Cómo estos puntos y líneas son dibujadas es considerado irrelevante; todo lo que importa es cuál par de nodos están conectados y cuáles no. Existen diferentes parámetros asociados a un grafo tales como: el grado, el orden, entre otros, que ayudan al análisis y descripción de los miembros de un grupo.

2.4.1 Grafo no dirigido

O simplemente grafo, es aquel que acepta una sola conexión uniendo dos nodos cualesquiera, a diferencia del multigrafo, ver figura 6 d). En la figura 6 a) se ilustra un ejemplo de grafo no dirigido, en el cual, la información fluye en ambas direcciones entre dos nodos, es decir, ambos nodos pueden enviar y recibir información.

2.4.2 Grafo dirigido

Es un tipo de grafo donde las conexiones que unen dos nodos se encuentran con dirección. En la figura 6 b) se tiene un ejemplo de grafo dirigido, es decir la información fluye solamente del nodo $N1$ al nodo $N2$.

2.4.3 Grafo mixto

Si un grafo contiene conexiones dirigidas y no dirigidas, se denomina mixto, ver figura 6 c).

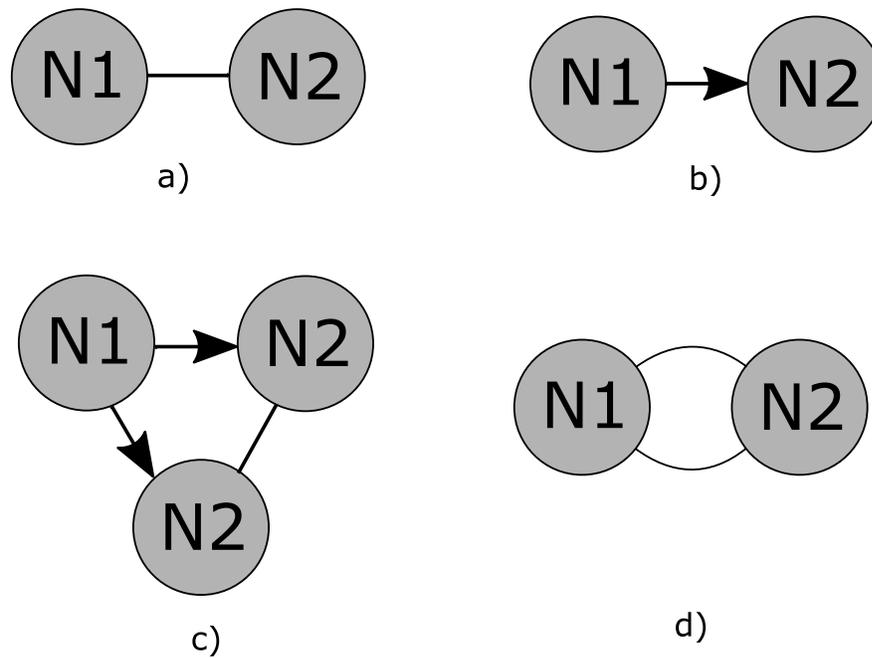


Figura 6: a) Grafo no dirigido, b) Grafo dirigido, c) Grafo mixto, d) Multigrafo.

2.5 Matrices asociadas a un grafo

La teoría de grafos se utiliza como herramienta para el análisis y descripción de grafos. Existen diferentes matrices que describen las conexiones, el grado, entre otras características de un grafo. Para fines del desarrollo de la tesis se utilizarán cuatro matrices de interés asociadas a un grafo: matriz de adyacencia, matriz de grado, matriz laplaciana y matriz de acoplamiento, que se describen a continuación.

2.5.1 Matriz de adyacencia $E(G)$

Es una matriz de $N \times N$ donde N representa el número de nodos del grafo. Se forma de unos y ceros y *representa las conexiones entre nodos*, se define como sigue (Harary, 1969),

$$E(G) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1N} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \gamma_{N2} & \vdots & \gamma_{NN} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (1)$$

donde

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el nodo } i \text{ tiene conexión con el nodo } j, i \neq j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2)$$

2.5.2 Matriz de grado $D(G)$

Es una matriz diagonal de dimensión $N \times N$, que *representa el número de vecinos* que tiene cada nodo, dicha matriz está dada por (Wang, 2002),

$$D(G) = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & d_{NN} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (3)$$

donde los elementos d_{ij} están dados por

$$d_{ij} = \begin{cases} d_i, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (4)$$

Con d_i como el *grado* del nodo i (con $i = 1, 2, \dots, N$), el cual se determina por la suma de unos de la fila i de $E(G)$, de la manera siguiente,

$$d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N \gamma_{ij} \in E(G). \quad (5)$$

2.5.3 Matriz laplaciana $L(G)$

Es la matriz del grafo G , que se obtiene de la resta de la matriz de grado $D(G)$ menos la matriz de adyacencia $E(G)$ (Wu y Chua, 1995),

$$L(G) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1N} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{N1} & l_{N2} & \vdots & l_{NN} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (6)$$

es decir,

$$L(G) = D(G) - E(G). \quad (7)$$

Los elementos $l_{ij} \in L(G)$ se definen como

$$l_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, & \text{si } i = j, \\ -1, & \text{si existe conexión entre el nodo } i, j \text{ (} i \neq j \text{)}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (8)$$

2.5.4 Matriz de acoplamiento $A(G)$

Es una matriz en la cual todos los valores propios son negativos o cero, en caso de grafos fuertemente conectados. También se utiliza para describir un grafo. Se define como (Wang, 2002),

$$A(G) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \vdots & a_{NN} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (9)$$

en particular se determina por

$$A(G) = -L(G), \quad (10)$$

donde cada elemento $a_{ij} \in A(G)$ se define como

$$a_{ij} = -l_{ij}. \quad (11)$$

2.6 Algunas topologías de conexión

Hasta el momento se presentaron diferentes conceptos fundamentales de los sistemas multi-agente, sin embargo, los elementos de estos sistemas deben estar conectados a través de una topología de conexión para alcanzar el propósito o comportamiento común; es decir, el medio o la forma para transmitir información entre los agentes. Las topologías de conexión pueden definirse como una configuración o forma que adoptan las conexiones entre los nodos. A continuación se describen las configuraciones de conexiones entre nodos en redes, que serán empleadas para alcanzar los comportamientos colectivos de sincronización en grupos de robots como se mostrará en el capítulo siguiente.

2.6.1 Topología de conexión en cadena

Esta topología de conexión entre los nodos de una red se encuentra interrumpida por los dos nodos extremos como se observa en la figura 7. En este caso la información debe transitar por un determinado número de nodos para llegar al otro extremo. En consecuencia, si la red cuenta con un número grande de nodos, la información tardará más tiempo en llegar de un extremo al otro.

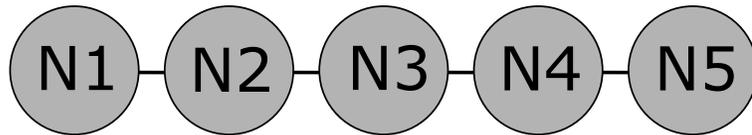


Figura 7: Red con topología en cadena con 5 nodos acoplados en forma bidireccional.

La matriz de acoplamiento asociada a una red de N nodos conectados en topología de anillo abierto o cadena, se describe a continuación (Acosta Del Campo *et al.*, 2011; Martínez Clark, 2014):

$$A(G)_{cadena} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Los valores propios de la matriz $A(G)_{cadena}$ según (Martínez Clark, 2014) pueden encontrarse con la expresión,

$$\lambda_k = -4\text{sen}^2\left(\frac{(k-1)\pi}{2N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (13)$$

2.6.2 Topología de conexión en vecino cercano

Esta topología de conexión entre nodos de la red es similar a la anterior, con la diferencia que la cadena se cierra con sus dos nodos extremos, formando un anillo como se observa en la figura 8. De esta manera, se asegura que la distancia a recorrer por la información entre dos agentes conectados a la topología en anillo sea corta, a diferencia de la topología en cadena abierta. Si el número de nodos conectados en esta red es muy grande, el tiempo de recorrido de la información por todos los nodos también aumentará. Para un número N de nodos, la matriz de acoplamiento de esta red es la siguiente (Wang, 2002):

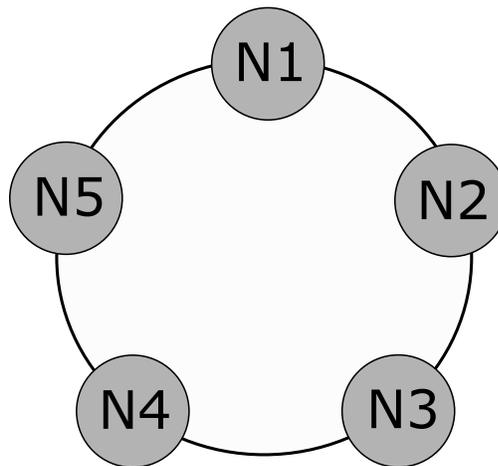


Figura 8: Red con topología en vecino cercano con 5 nodos acoplados en forma bidireccional.

$$A(G)_{anillo} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Los valores propios de la matriz $A(G)_{anillo}$ según (Wang, 2002) pueden encontrarse con la expresión,

$$\lambda_k = -4 \sum_{j=1}^{k/2} \text{sen}^2\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

2.6.3 Topología de conexión en estrella

La red con topología de conexión en estrella, consiste en que todos los nodos de la red se conectan a uno central, el cual envía la información a todos los nodos restantes, un ejemplo de una red con cinco nodos con esta topología se proporciona en la figura 9. La correspondiente matriz de acoplamiento de esta red con N nodos es como sigue (Wang, 2002),

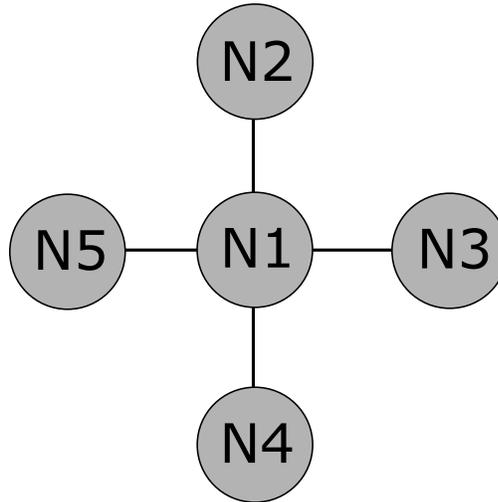


Figura 9: Red con topología en estrella con 5 nodos acoplados en forma bidireccional.

$$A(G)_{estrella} = \begin{bmatrix} -N+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Los valores propios de $A(G)_{estrella}$ como se reporta en (Wang, 2002) son: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -N$, $\lambda_3 = -1$, ..., $\lambda_N = -1$.

2.6.4 Topología de conexión en mundo pequeño

Las topologías de conexiones de los nodos de las redes pueden clasificarse en regulares (cadena, vecino cercano, estrella) y aleatorias. Sin embargo, muchos sistemas biológicos, tecnológicos y sociales caen en una topología intermedia entre estas dos redes. Las redes con topología de conexiones de los nodos en *mundo pequeño* tienen una topología entre regular y aleatoria, para construir estas redes se recurre al siguiente procedimiento: Se comienza con una topología de conexión en vecino cercano con N nodos y k conexiones, posteriormente se agregan conexiones entre nodos con una probabilidad p . Esta construcción nos permite pasar de un grafo regular ($p = 0$) a uno globalmente conectado ($p = 1$) o quedarnos en una zona donde $0 < p < 1$ como se establece en (Watts y Strogatz, 1998). A manera de ejemplo ilustrativo, las conexiones que se agregaron a la red en vecino cercano (ver figura 8) para obtener una red con topología en mundo pequeño, pueden observarse en la figura 10.

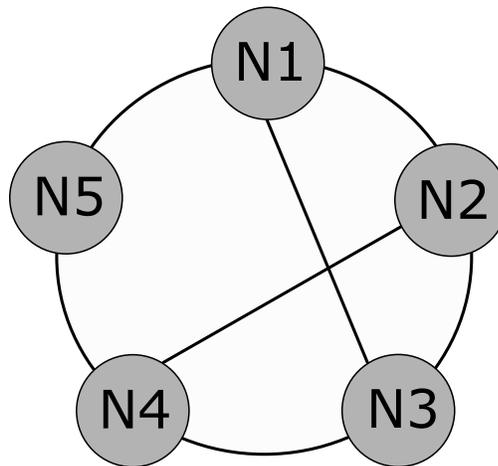


Figura 10: Red con topología en mundo pequeño con 5 nodos acoplados en forma bidireccional, obtenida a partir de la red en vecino cercano (figura 6).

La matriz de acoplamiento de la red con topología de conexión en mundo pequeño para $N = 5$ nodos, está dada por

$$A(G)_{mundo} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Los valores propios de $A(G)_{mundo}$ son: $\lambda_1 = -5$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_3 = -3$, $\lambda_4 = -2$, $\lambda_5 = 0$.

Conclusiones del capítulo

Los sistemas complejos se rigen por la interacción de las partes que lo componen y del comportamiento global que surge de sus interacciones. El entender los componentes básicos que conforman al sistema no necesariamente explica el comportamiento colectivo del grupo. La teoría de sistemas complejos proporciona una herramienta matemática para representar y estudiar las redes donde no importan las propiedades estructurales de los nodos ni sus medidas, sino las conexiones que existen entre los nodos, y como consecuencia, las interacciones que se producen entre los nodos pueden dar origen a comportamientos colectivos. Una forma de representar las conexiones de un grafo es mediante la matriz de acoplamiento, dicha matriz puede usarse para el cálculo del control de comportamientos colectivos como sincronización y formación en redes complejas dinámicas.

Capítulo 3. Robot móvil diferencial

En este capítulo de la tesis se presenta la descripción y modelo matemático (tomando en cuenta algunas consideraciones) de un robot móvil diferencial. Además, se muestra la linealización por retroalimentación dinámica del modelo considerado, así como el modelo inverso para el cálculo de las velocidades angulares ω_L y ω_R . Este modelo será empleado como nodo o agente en los capítulos siguientes para alcanzar sincronización y formación de grupos de robots móviles.

3.1 Modelo matemático del robot móvil diferencial

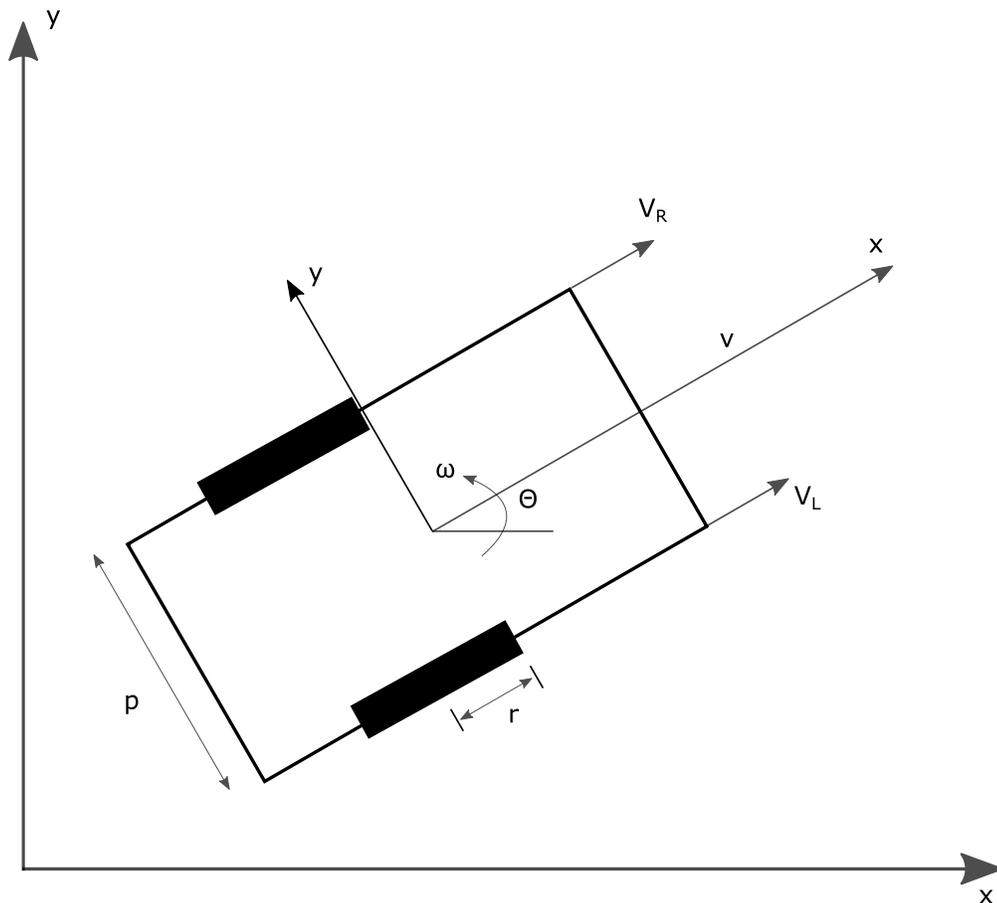


Figura 11: Diagrama esquemático de un robot móvil diferencial.

Acorde a la figura 11, los ejes coordenados son “x” y “y”, p es la distancia entre las ruedas, r es el radio de las ruedas, V_L y V_R son las velocidades lineales de la rueda izquierda y derecha respectivamente, θ es el ángulo de orientación del robot, ω es la velocidad angular y v es la velocidad lineal. En (Suster y Jadlovská, 2010) se plantea el modelo matemático de un robot diferencial, tomando en cuenta las siguientes consideraciones:

- El robot se mueve en una superficie perfectamente plana sin deslizamiento, además no considera la resistencia de las llantas.
- La posición del robot está determinada por las coordenadas “x”, “y” y un ángulo θ , el cual representa la rotación del robot en relación al sistema de coordenadas.
- El robot se controla por las velocidades angulares ω_L y ω_R . La relación entre las velocidades angulares ω_L y ω_R y las velocidades lineales V_L y V_R es la siguiente:

$$V_L = r\omega_L, \quad (18)$$

$$V_R = r\omega_R. \quad (19)$$

La posición (x, y) y la rotación θ del robot en el espacio (como se observa en la figura 11) están basadas en las siguientes ecuaciones, que forman el modelo cinemático del robot diferencial (Suster y Jadlosvská, 2010):

$$\dot{x} = v\cos(\theta), \quad (20)$$

$$\dot{y} = v\sin(\theta), \quad (21)$$

$$\dot{\theta} = \omega. \quad (22)$$

Con la velocidad lineal v y la velocidad angular ω del robot diferencial definidas como:

$$v = \frac{V_L + V_R}{2}, \quad (23)$$

$$\omega = \frac{V_R - V_L}{p}. \quad (24)$$

De las ecuaciones del robot (20)-(24) se observa que es un sistema no lineal de la forma,

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{f}(\mathbf{R})\mathbf{u}, \quad (25)$$

donde $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estados del robot diferencial, $\mathbf{u} = (v \ \omega)^T$ representa al vector de entradas del robot diferencial (20)-(24), mientras que \mathbf{f} está definido como,

$$\mathbf{f} = [f_1(\cdot) \ f_2(\cdot)], \quad (26)$$

con

$$f_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

por lo tanto

$$\dot{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega. \quad (29)$$

3.2 Linealización por retroalimentación dinámica

Dos tareas básicas de los robots móviles diferenciales, considerando las aplicaciones a las que puedan destinarse se pueden observar en la figura 12 y se describen como sigue:

- *Movimiento punto a punto*: El robot está destinado a alcanzar una posición objetivo a partir de una posición inicial dada.
- *Seguidor de trayectorias*: El robot está destinado a seguir una trayectoria deseada en el espacio cartesiano, a partir de una posición inicial dada.

La ejecución de estas tareas puede lograrse utilizando control por retroalimentación de estado. Sin embargo, debido a que las entradas v y ω del robot (23), (24) se encuentran acopladas, es necesario primero utilizar alguna técnica que nos permita desacoplarlas, y posteriormente diseñar los controladores para alcanzar los comportamientos colectivos de sincronización y formación en grupos de robots móviles (20)-(24), como se mostrará en capítulos posteriores. Una de estas técnicas como se plantea en (De Luca *et al.*, 2001) es la *linealización por retroalimentación dinámica*.

La retroalimentación dinámica consiste en encontrar, si es posible, un compensador dinámico de la forma

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= a(\mathbf{R}, \xi) + b(\mathbf{R}, \xi) \mathbf{u}^*, \\ \omega &= c(\mathbf{R}, \xi) + d(\mathbf{R}, \xi) \mathbf{u}^*, \end{aligned} \quad (30)$$

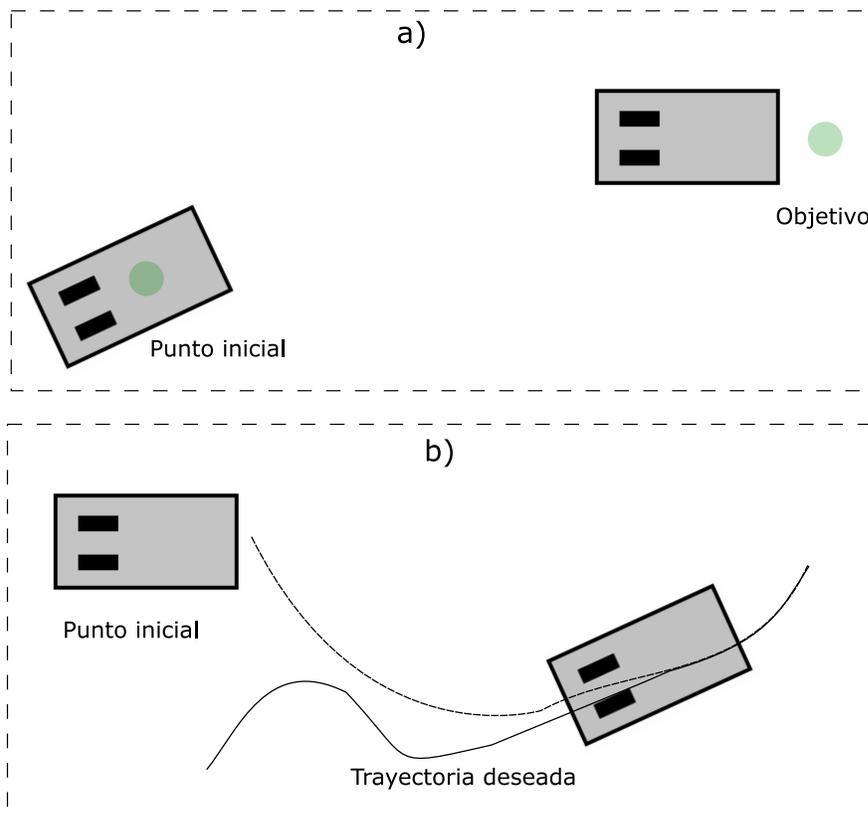


Figura 12: Tareas básicas de un robot móvil: a) Movimiento punto a punto, b) Seguidor de trayectorias.

con vector de estados $\xi \in \mathbb{R}^k$ y vector de entradas externas $\mathbf{u}^* \in \mathbb{R}^m$, para que el sistema (25) y (30) resulte equivalente a través de una transformación de estados,

$$z = T(\mathbf{R}, \xi), \quad (31)$$

a un sistema *lineal y controlable*.

Para lograr esto, se define apropiadamente un sistema con m salidas de la forma,

$$\eta = h(\mathbf{R}), \quad (32)$$

en el cual, la tarea de seguimiento de trayectorias puede ejecutarse por el robot móvil. Después se diferencia la salida hasta que las entradas aparezcan en una forma explícita. Este algoritmo forma el estado ξ del compensador dinámico (30). El proceso termina después de un número finito de diferenciaciones, cuando el sistema es invertible en las salidas elegidas. Si la suma de las diferenciaciones de la salida es igual a la dimensión $n+k$ en el espacio de estados extendidos, entonces se obtiene la linealización de entrada-salida del sistema equivalente. El sistema en lazo

cerrado es entonces equivalente a un conjunto de integradores desacoplados desde la entrada a la salida.

Permítase definir el vector de salidas como $\eta = (x, y)$, $v = \xi$, $\dot{\xi} = a_c$, diferenciando con respecto al tiempo se tiene,

$$\dot{\eta} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Debido a que $\dot{\eta}$ sólo es afectado por la velocidad lineal del robot v , se puede definir como

$$\dot{\eta} = \xi \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

$$\ddot{\eta} = \dot{\xi} \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \text{sen}(\theta) \end{bmatrix} + \xi \dot{\theta} \begin{bmatrix} -\text{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Sustituyendo $\dot{\xi} = a_c$ y $\dot{\theta} = \omega$ en la ecuación (35) y expresando en forma matricial, se tiene que

$$\ddot{\eta} = \begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\xi \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \xi \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_c \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}, \quad (36)$$

donde

$$\begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\xi \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \xi \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_c \\ \omega \end{bmatrix}. \quad (37)$$

En la ecuación (37) la matriz que multiplica al vector formado por a_c y ω es no singular, siempre y cuando $\xi \neq 0$. Tomando en cuenta esto se tiene,

$$\begin{bmatrix} a_c \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ \frac{-\text{sen}(\theta)}{\xi} & \frac{\cos(\theta)}{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}. \quad (38)$$

De la ecuación (38) finalmente se tiene que

$$\dot{\xi} = a_c = u_1^* \cos(\theta) + u_2^* \text{sen}(\theta), \quad (39)$$

$$\omega = \frac{u_2^* \cos(\theta) - u_1^* \text{sen}(\theta)}{\xi}. \quad (40)$$

Debido a que el compensador es de dimensión uno, se tiene que $n + k = 3 + 1 = 4$, que es igual al número total de diferenciaciones de la salida en la ecuación (36). Ahora, en las nuevas

coordenadas (31), se tiene el modelo del robot diferencial:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= x, \\
 z_2 &= y, \\
 \dot{z}_1 &= \dot{x} = v \cos(\theta) = \xi \cos(\theta), \\
 \dot{z}_2 &= \dot{y} = v \sin(\theta) = \xi \sin(\theta).
 \end{aligned} \tag{41}$$

El sistema extendido completamente lineal y controlable es descrito por las ecuaciones de segundo orden como sigue:

$$\begin{aligned}
 \ddot{z}_1 &= \ddot{x} = u_1^*, \\
 \ddot{z}_2 &= \ddot{y} = u_2^*,
 \end{aligned} \tag{42}$$

donde \mathbf{R} es el vector de salidas $\mathbf{R} = (z_1, z_2, \dot{z}_1, \dot{z}_2)$ y \mathbf{u}^* el vector de entradas $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*)$.

3.3 Cálculo de las velocidades angulares ω_L y ω_R del robot diferencial

A partir del modelo original no lineal (20)-(24) se pueden calcular las entradas (ω_R, ω_L) que se le dan al sistema a partir de la velocidad lineal v y la velocidad angular ω , utilizando el sistema equivalente en las nuevas coordenadas (41) como se vió en la sección 3.1.

De la ecuación (23) tenemos que

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{V_R}{2} + \frac{V_L}{2}, \\
 V_R &= 2v - V_L.
 \end{aligned} \tag{43}$$

Sustituyendo la ecuación (43) en la ecuación (24) se tiene que

$$\omega = \frac{V_R}{p} - \frac{V_L}{p} = \frac{2v - V_L}{p} - \frac{V_L}{p},$$

$$V_L = v - \frac{p\omega}{2}, \tag{44}$$

$$\omega_L = \frac{v - \frac{p\omega}{2}}{r}. \tag{45}$$

Finalmente sustituyendo la ecuación (44) en la ecuación (23) se obtiene:

$$v = \frac{V_R}{2} + \frac{V_L}{2} = \frac{v - \frac{p\omega}{2}}{2} + \frac{V_R}{2},$$

$$V_R = v + \frac{p\omega}{2}, \quad (46)$$

$$\omega_R = \frac{v + \frac{p\omega}{2}}{r}. \quad (47)$$

Este modelo extendido lineal y controlable del robot diferencial (42) y las entradas (23), (24) serán empleadas con el propósito de alcanzar los comportamientos colectivos de sincronización y formación en grupos de robots móviles.

Conclusiones del capítulo

El modelo matemático de un robot diferencial ideal reportado en (Suster y Jadlovská, 2010) es no lineal y con entradas acopladas. Para utilizar las leyes de control con el objetivo de lograr comportamientos colectivos como sincronización y formación en grupos de robots móviles es necesario llevarlo a una forma lineal. En este trabajo de tesis, se optó por seleccionar una de las técnicas para linealizar el modelo del robot diferencial reportado en (Suster y Jadlovská, 2010) a través de la linealización por retroalimentación dinámica. Utilizando esta técnica se lleva al modelo no lineal a una forma donde es posible lograr objetivos de control como movimiento punto a punto y seguidor de trayectorias.

Capítulo 4. Sincronización en grupos de robots móviles

En este capítulo, se aborda el comportamiento colectivo de sincronización, se emplea el modelo matemático del robot móvil diferencial linealizado obtenido en el capítulo anterior como nodo aislado y de grupos de robots, se analiza además la sincronización de grupos de cinco robots móviles conectados en diferentes topologías. Finalmente, se reportan los resultados numéricos obtenidos.

4.1 Sincronización

Reconocido por Christiaan Huygens en 1665, el fenómeno de sincronización es abundante en la naturaleza, ciencia, ingeniería y vida social. Huygens descubrió que un par de relojes de péndulo colgando de un soporte común sincronizaban sus oscilaciones haciéndolas coincidir perfectamente, mientras que los péndulos se movían siempre en sentidos contrarios. El experimento que Huygens realizó se ilustra en la figura 13.

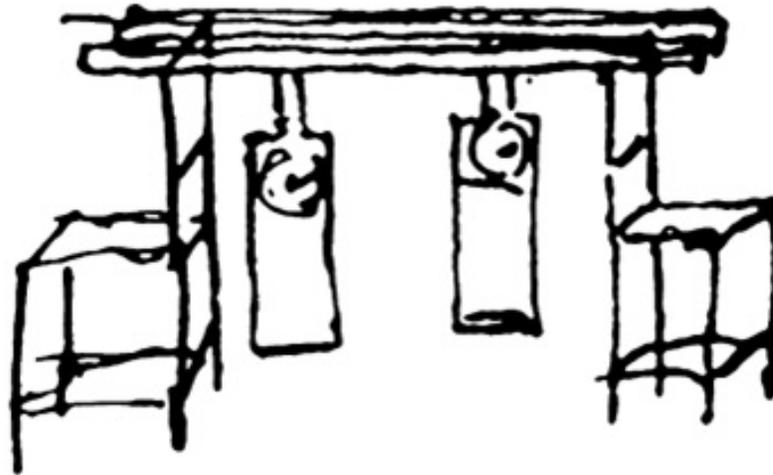


Figura 13: Experimento de Huygens. Fuente: Pikovsky *et al.* (2003).

Además, Huygens definió de forma breve pero extremadamente precisa su observación de la sincronización de la siguiente manera (Pikovsky *et al.*, 2003):

“Vale la pena notar, que cuando suspendemos dos relojes contruidos con 2 ganchos incrustados en la misma viga de madera, los movimientos de cada péndulo oscilando en sentidos contrarios estaban tan de acuerdo que nunca han disminuido en lo más mínimo uno del otro y el sonido de cada uno siempre se escuchó simultáneamente. Además, si este acuerdo es perturbado por alguna interferencia, es restablecido en un corto tiempo. Durante mucho tiempo me quede sor-

prendido por este resultado inesperado, pero después de un examen cuidadoso, finalmente encontré que la causa de esto se debe al movimiento de la viga, a pesar de que esto es apenas perceptible. La causa es que las oscilaciones del péndulo, en proporción a su peso, comunican algún movimiento a los relojes. Este movimiento es transferido a la viga, que tiene el efecto de hacer llegar a los péndulos a un estado exactamente donde uno va en sentido contrario al otro, aún si no estuvieran así en un principio. Finalmente el movimiento de la viga cesa. Pero esto no ocurre hasta que los relojes tienen movimientos opuestos exactamente iguales”.

La *sincronización* también ocurre cuando varios individuos se coordinan para actuar al unísono, es decir, comportamientos o conductas iguales a través del tiempo. En la definición amplia de la palabra, muchos tipos diferentes de comportamientos colectivos son ejemplos de sincronización. Por ejemplo un gran grupo de aves alineadas, peces o partículas se dicen que están sincronizados en la dirección del movimiento.

Así como otros comportamientos colectivos, la sincronización puede representarse con modelos matemáticos, que describen como emerge el comportamiento colectivo a partir de las interacciones entre individuos a través del tiempo (Sumpter, 2010), pudiéndose aplicar así al control de sistemas dinámicos.

4.2 Robot aislado

Para el caso del robot diferencial descrito en (20)-(24) que cuenta con tres estados, es decir, $\mathbf{R} = (x, y, \theta) \in \mathbb{R}^3$ y dos entradas de control, es decir, $\mathbf{u} = (v, \omega)$, el sistema toma la forma de la ecuación (25). Nótese que como el nuevo sistema (41) es lineal con entradas desacopladas (42) es fácil diseñar una ley de control que cumpla los objetivos de punto deseado y seguidor de trayectorias. Suponiendo que el robot móvil debe seguir una trayectoria deseada $(X_d(t), Y_d(t))$ la ley de control para el seguimiento de la trayectoria (en coordenadas cartesianas) queda como,

$$u_1^* = c_{11}(\dot{X}_d(t) - \dot{x}) + c_{12}(X_d(t) - x), \quad (48)$$

$$u_2^* = c_{21}(\dot{Y}_d(t) - \dot{y}) + c_{22}(Y_d(t) - y), \quad (49)$$

con $c_{11}, c_{21}, c_{12}, c_{22} > 0$ y por ser apropiadamente seleccionadas.

4.3 Redes de robots

En esta parte del capítulo, se consideran redes de robots móviles formadas por N robots descritos por (20)-(24). Para lograr la sincronización en este caso, en una red formada por N

nodos idénticos con acoplamiento lineal, se usarán los estados de cada robot en la red. Con fines de consistencia de notación, se realiza el siguiente cambio de variables:

$$\dot{x} = \dot{x}_i, \quad (50)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_i, \quad (51)$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_i, \quad (52)$$

$$u_i^* = (u_{i1}^*, u_{i2}^*). \quad (53)$$

El subíndice i se agrega con el fin de representar a más de un robot, es decir, al robot i –ésimo. Estas ecuaciones nos permiten conocer la posición y rotación del robot i –ésimo sabiendo las condiciones iniciales y las velocidades independientes de cada una de las ruedas.

Para una red de N robots acoplados se tiene que

$$\dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{f}_i(\mathbf{R}_i)\mathbf{u}_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (54)$$

donde $\mathbf{R}_i = (x_i, y_i, \theta_i)^T \in \mathbb{R}^3$ es el vector de estados del robot i y $\mathbf{u}_i = (v_i, \omega_i)^T \in \mathbb{R}^2$ es el vector de entradas de control del sistema (20)-(24) que son modificadas por las nuevas entradas de control u_{i1}^* , u_{i2}^* . Para representar una red compuesta por N robots móviles acoplados se tiene que

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{R}_1)\mathbf{u}_1^*, \\ \dot{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{f}_2(\mathbf{R}_2)\mathbf{u}_2^*, \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{R}}_N = \mathbf{f}_N(\mathbf{R}_N)\mathbf{u}_N^*, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{array} \right. \quad (55)$$

En (Wang, 2002) se establece que una red dinámica de N nodos (55) sincroniza completa y de manera asintótica si

$$\mathbf{R}_1(t) = \mathbf{R}_2(t) = \mathbf{R}_3(t) = \dots = \mathbf{R}_N(t), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty. \quad (56)$$

Si se define el error de sincronía en el estado x entre los nodos i y j como $\mathbf{e}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ con $i \neq j$, se

dice que los nodos i y j sincronizan en x completa y asintóticamente cuando,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_{ij}(t)\| = 0. \quad (57)$$

En el caso de un grupo de robots, las leyes de control del robot i -ésimo para lograr el comportamiento colectivo de sincronización definidas para las entradas u_{i1}^* y u_{i2}^* , quedan de la siguiente forma:

$$u_{i1}^* = c_{11} \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j + c_{12} \sum_{i=1}^N a_{ij} \dot{x}_i, \quad (58)$$

$$u_{i2}^* = c_{21} \sum_{j=1}^N a_{ij} y_j + c_{22} \sum_{i=1}^N a_{ij} \dot{y}_i, \quad (59)$$

donde $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} > 0$ representan las fuerzas de acoplamiento entre los nodos de la red y a_{ij} es un elemento de la matriz de acoplamiento.

4.4 Metodología para las simulaciones

Las simulaciones por presentarse a continuación fueron realizadas en el software Matlab para sincronizar en particular un grupo de cinco robots móviles (20)-(24). La figura 14 muestra el diagrama a bloques utilizado para la realización de las simulaciones. Se emplean posiciones $X_d(t)$ y $Y_d(t)$ deseadas que se dan como referencias en (48),(49). A la salida de este bloque se obtiene la nueva velocidad lineal v y la velocidad angular ω que sirven para calcular las velocidades angulares de las ruedas derecha e izquierda, ω_L y ω_R , respectivamente. Estas variables se dan como entradas al robot móvil (18), (19) y como salidas obtenemos una posición en “ x ”, “ y ” y una orientación θ .

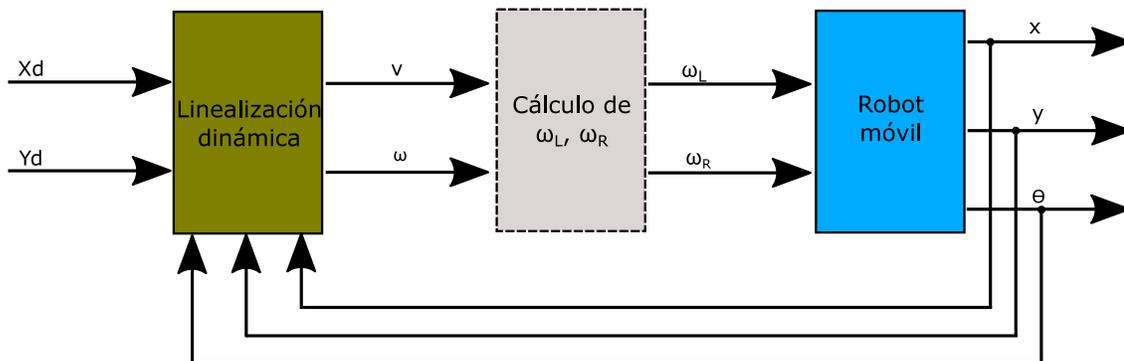


Figura 14: Diagrama a bloques empleado para la implementación de las simulaciones.

4.5 Nodos aislados

En esta primera simulación se considera el escenario de cinco robots móviles aislados, es decir, sin conexión entre éstos. Cada agente tiene una velocidad y una orientación distinta, siguiendo cada uno su propio camino debido a que no hay controladores. Las condiciones iniciales para cada robot móvil son:

$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (3, -1.5, 0, 0.03)$, $(x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (-2, 0, \frac{\pi}{4}, 0.01)$, $(x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (1, 0.5, \frac{\pi}{2}, 0.005)$, $(x_4(0), y_4(0), \theta_4(0), \xi_4(0)) = (2, -2, \pi, 0.02)$, $(x_5(0), y_5(0), \theta_5(0), \xi_5(0)) = (3, 0, \frac{\pi}{3}, 0.09)$, $r = 0.0205$, $p = 0.08841$. Para robots aislados las fuerzas de acoplamiento corresponden a $c_{11} = c_{12} = c_{21} = c_{22} = 0$. Las ecuaciones de estado que describen el movimiento del robot i ($i = 1, 2, \dots, 5$) están descritas por

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= v_i \cos(\theta_i), \\ \dot{y}_i(t) &= v_i \text{sen}(\theta_i), \\ \dot{\theta}_i(t) &= \omega_i = \frac{V_{Ri} - V_{Li}}{2}, \\ \dot{\xi}_i(t) &= a_{ci} = u_{i1}^* \cos(\theta_i) + u_{i2}^* \text{sen}(\theta_i),\end{aligned}\tag{60}$$

donde las entradas de control u_{i1}^* y u_{i2}^* modifican directamente la aceleración ξ_i y la orientación ω_i .

Los resultados numéricos obtenidos fueron los siguientes: En la figura 15 es posible observar que cada robot sigue su ruta con una velocidad constante y una orientación inicial dada. En la figura 16 se aprecia que existe un error entre los cinco robots debido a que no están conectados, por lo que cada uno sigue su propia dinámica. En la figura 17 se muestran las entradas de cada robot ω_{Ri} y ω_{Li} , mientras que en el plano bidimensional de la figura 18 vemos el movimiento que cada robot realiza de manera individual. En las figuras 19 y 20 se muestran la posición inicial y final de los cinco robots.

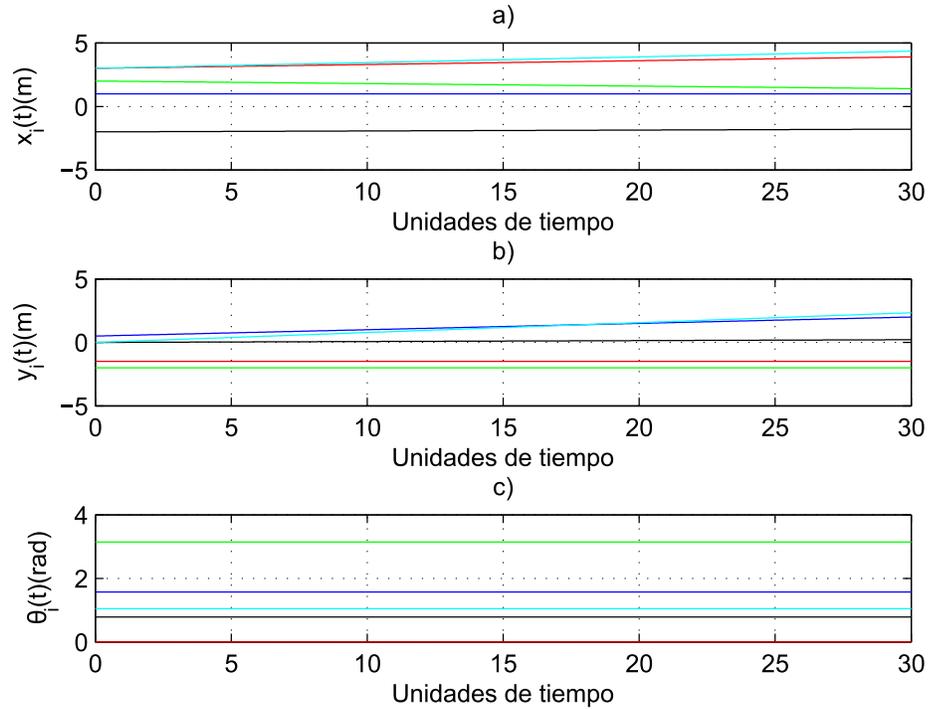


Figura 15: Robots aislados, trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$.

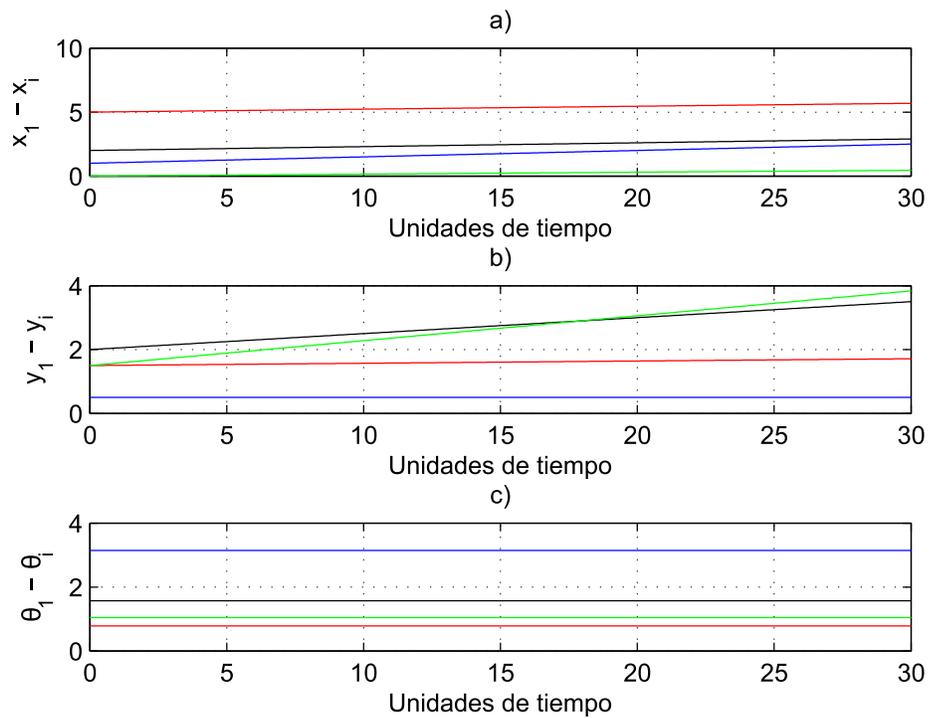


Figura 16: Robots aislados, dinámicas del error: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$.

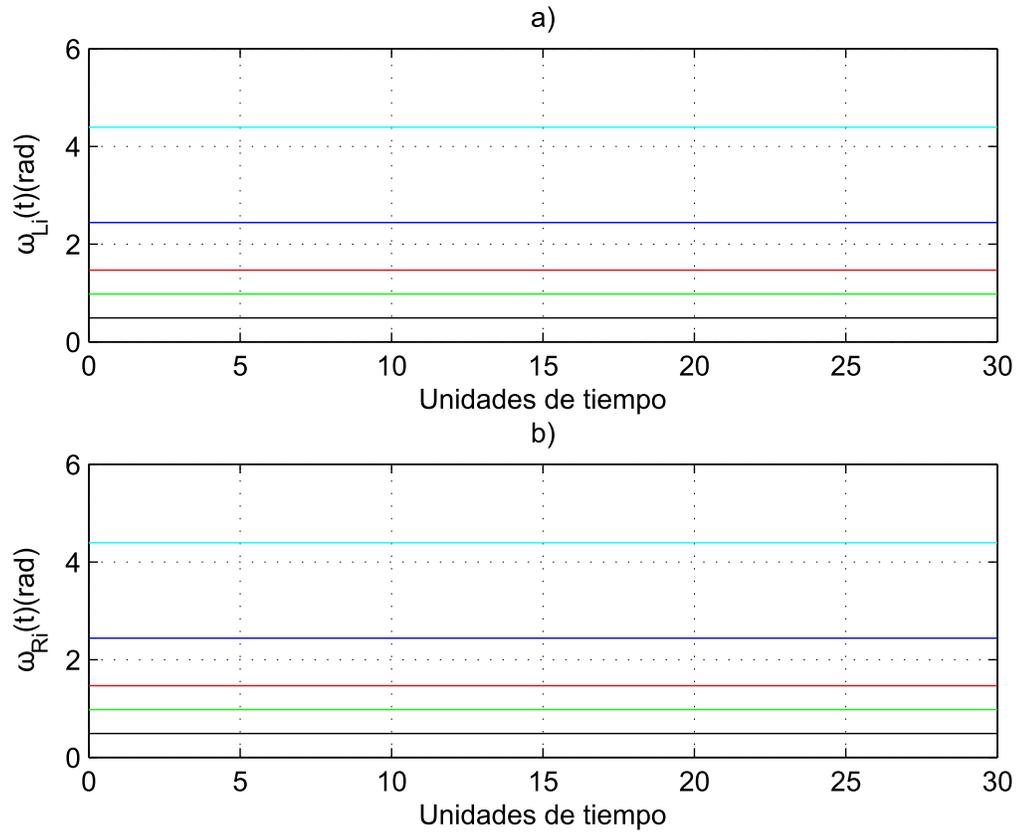


Figura 17: Robots aislados, entradas: a) ω_{L_i} y b) ω_{R_i} , con $i = 1, 2, \dots, 5$.

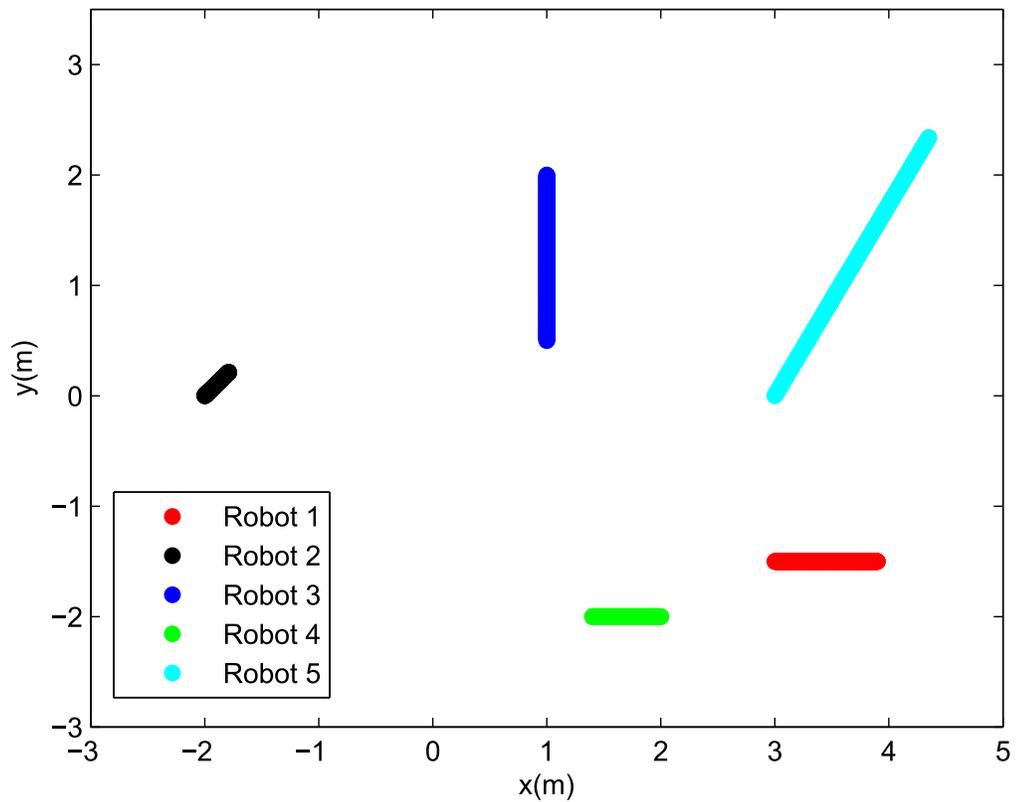


Figura 18: Robots aislados, movimiento en el plano x-y.

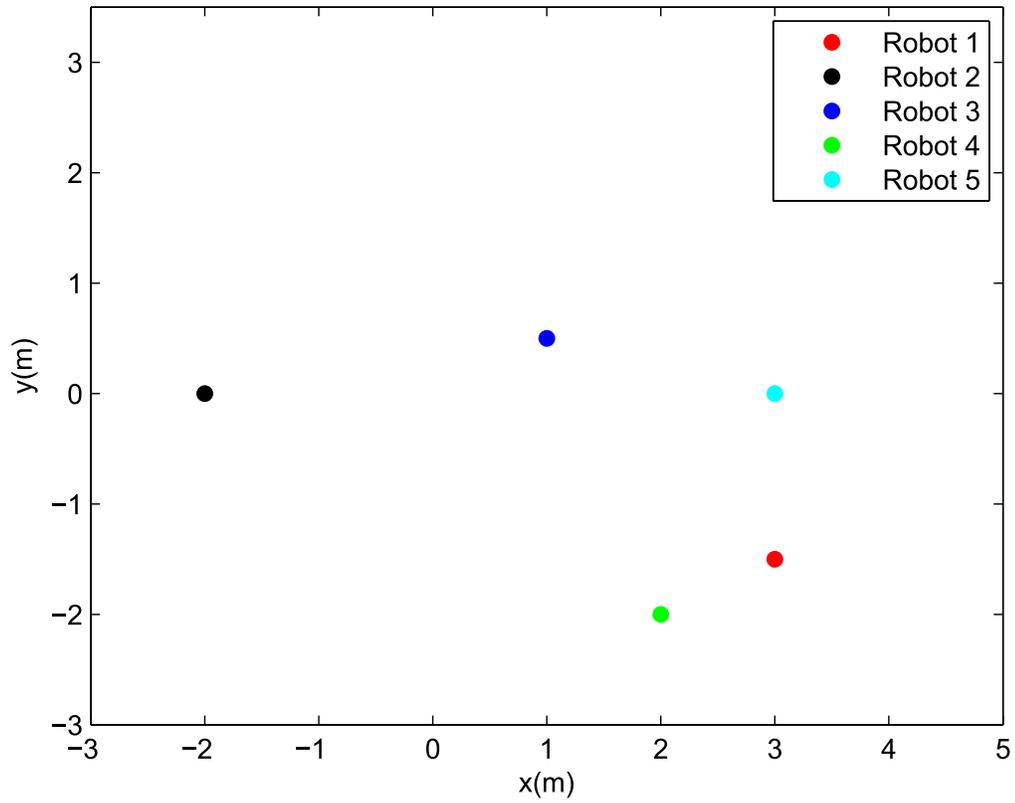


Figura 19: Robots aislados, posición inicial de los robots.

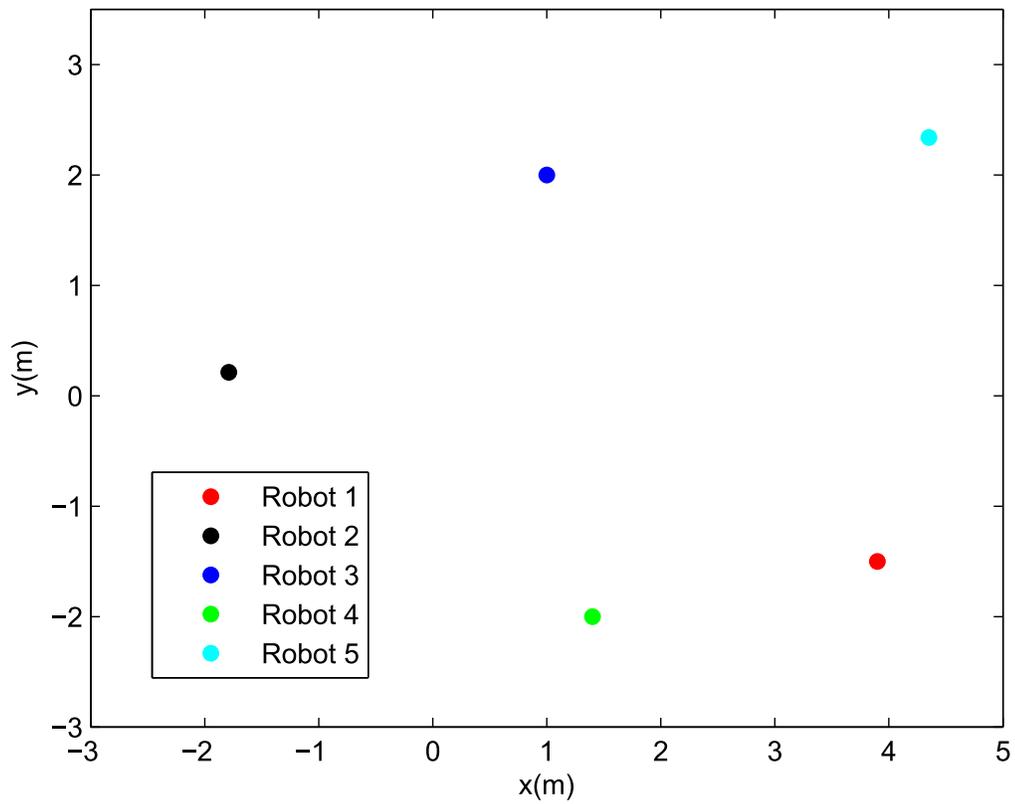


Figura 20: Robots aislados, posición final de los robots.

4.6 Simulaciones utilizando algunas topologías de conexión

En cada topología se utilizarán cinco robots móviles acoplados bidireccionalmente con el objetivo de sincronizarlos. Las condiciones iniciales serán las mismas para cada robot en todas las redes, esto con el fin de comparar los tiempos en los que se llega a establecer la sincronía de los robots en cada topología.

Las condiciones iniciales son:

$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (3, -1.5, 0, 0.03)$, $(x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (-2, 0, \frac{\pi}{4}, 0.01)$, $(x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (1, 0.5, \frac{\pi}{2}, 0.05)$, $(x_4(0), y_4(0), \theta_4(0), \xi_4(0)) = (2, -2, \pi, 0.02)$, $(x_5(0), y_5(0), \theta_5(0), \xi_5(0)) = (3, 0, \frac{\pi}{3}, 0.09)$, $r = 0.0205$, $p = 0.08841$. Las constantes de acoplamiento entre los robots $c_{11} = c_{21} = 3$, $c_{12} = c_{22} = 3$.

4.6.1 Grupo de robots móviles con topología en cadena

Como primera simulación, se tienen cinco robots móviles ($N = 5$) acoplados de forma bidireccional en topología cadena como se muestra en la figura 7. Para este caso, la matriz de acoplamiento queda de la siguiente forma,

$$A(G)_{cadena} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Las ecuaciones de estado que describen el movimiento del robot i ($i = 1, 2, \dots, 5$) están descritas por las ecuaciones (60), mientras que las ecuaciones de cada entrada para los robots R_1, \dots, R_5

son:

$$R_1 \quad \begin{cases} u_{11}^* = c_{11}(x_2 - x_1) + c_{12}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ u_{12}^* = c_{21}(y_2 - y_1) + c_{22}(\dot{y}_2 - \dot{y}_1), \end{cases} \quad (62)$$

$$R_2 \quad \begin{cases} u_{21}^* = c_{11}(x_1 - 2x_2 + x_3) + c_{12}(\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + \dot{x}_3), \\ u_{22}^* = c_{21}(y_1 - 2y_2 + y_3) + c_{22}(\dot{y}_1 - 2\dot{y}_2 + \dot{y}_3), \end{cases} \quad (63)$$

$$R_3 \quad \begin{cases} u_{31}^* = c_{11}(x_2 - 2x_3 + x_4) + c_{12}(\dot{x}_2 - 2\dot{x}_3 + \dot{x}_4), \\ u_{32}^* = c_{21}(y_2 - 2y_3 + y_4) + c_{22}(\dot{y}_2 - 2\dot{y}_3 + \dot{y}_4), \end{cases} \quad (64)$$

$$R_4 \quad \begin{cases} u_{41}^* = c_{11}(x_3 - 2x_4 + x_5) + c_{12}(\dot{x}_3 - 2\dot{x}_4 + \dot{x}_5), \\ u_{42}^* = c_{21}(y_3 - 2y_4 + y_5) + c_{22}(\dot{y}_3 - 2\dot{y}_4 + \dot{y}_5), \end{cases} \quad (65)$$

$$R_5 \quad \begin{cases} u_{51}^* = c_{11}(x_4 - x_5) + c_{12}(\dot{x}_4 - \dot{x}_5), \\ u_{52}^* = c_{21}(y_4 - y_5) + c_{22}(\dot{y}_4 - \dot{y}_5). \end{cases} \quad (66)$$

Los resultados numéricos obtenidos fueron los siguientes: En la figura 21 se observa que debido al controlador, las trayectorias de los robots convergen a una misma posición en x , y . Cabe mencionar que aunque en la figura 21 c), las líneas no tienden a un mismo punto, están separadas por un múltiplo de 2π , lo que indica sincronización en fase de la orientación θ . En la figura 22 se ve que conforme avanza el tiempo los errores $x_1 - x_i$, $y_1 - y_i$ con $i = 2, 3, 4, 5$ son cero, mientras que en el error del ángulo de orientación $\theta_1 - \theta_i$ existe una diferencia de un múltiplo de 2π . En la figura 23 se muestra el comportamiento de las entradas para cada una de las ruedas, es posible observar que ya no son constantes y que el controlador las va modificando conforme el tiempo avanza. En la figura 24 se tiene el rastro del movimiento que siguieron los robots hasta llegar a sincronizarse, mientras que en las figuras 25 y 26 se tiene la posición inicial y final de los robots.

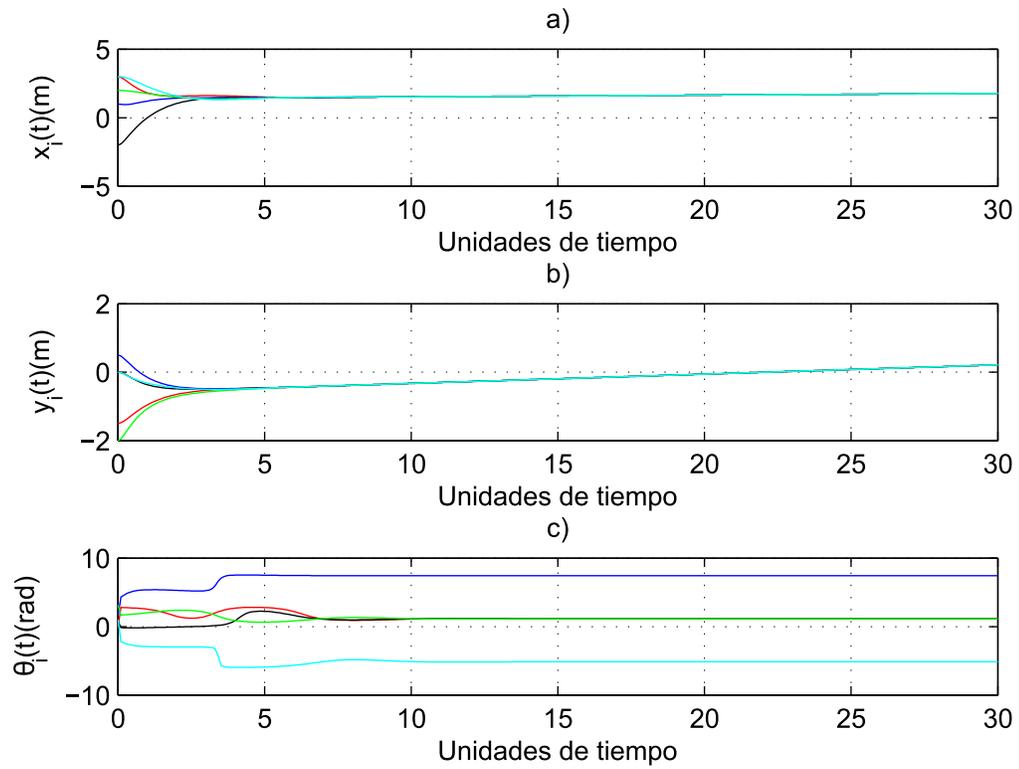


Figura 21: Red con topología en cadena, trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$.

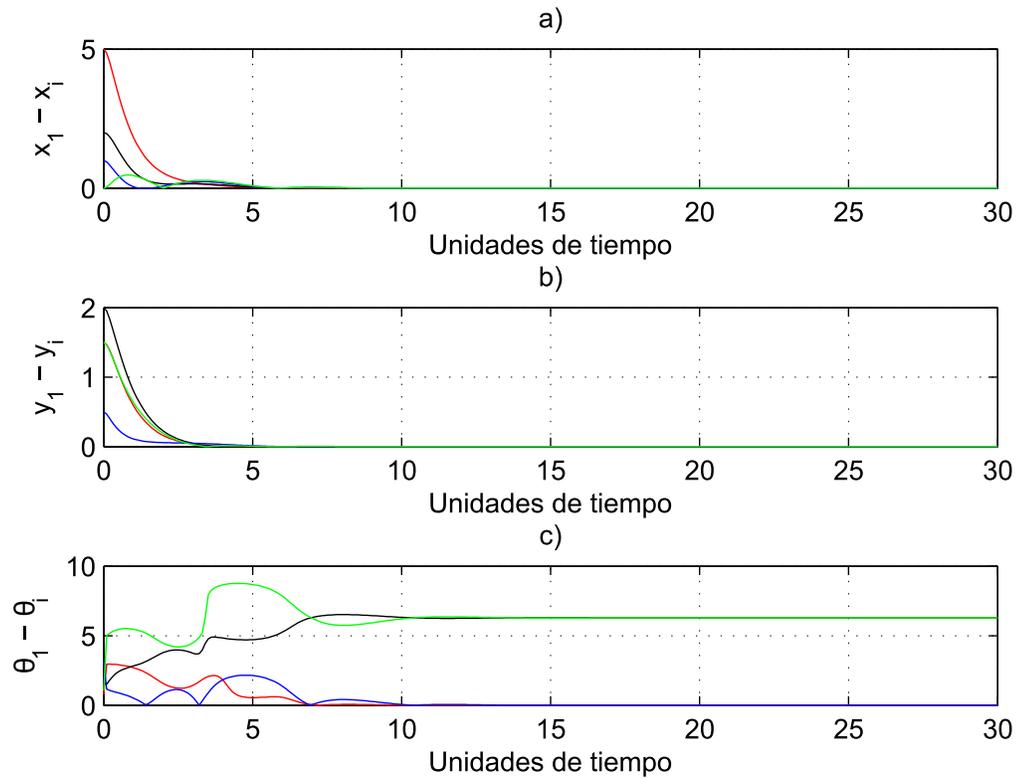


Figura 22: Red con topología en cadena, dinámicas del error: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$.

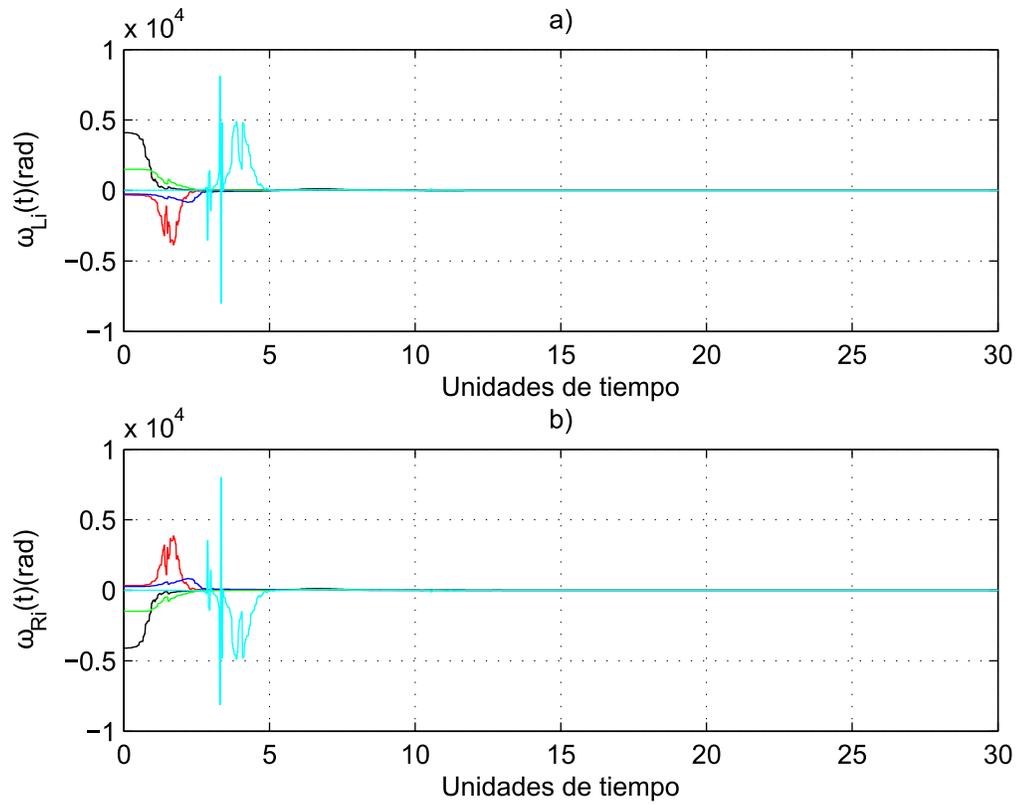


Figura 23: Red con topología en cadena, entradas: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$.

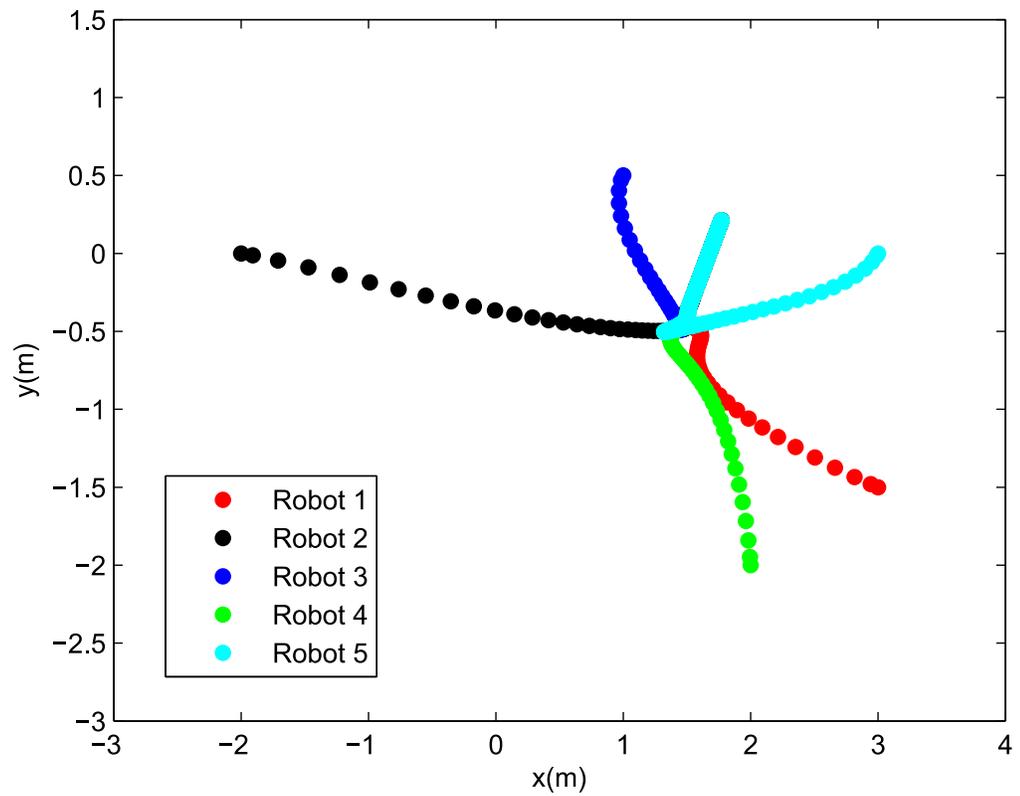


Figura 24: Red con topología en cadena, movimiento en el plano x-y.

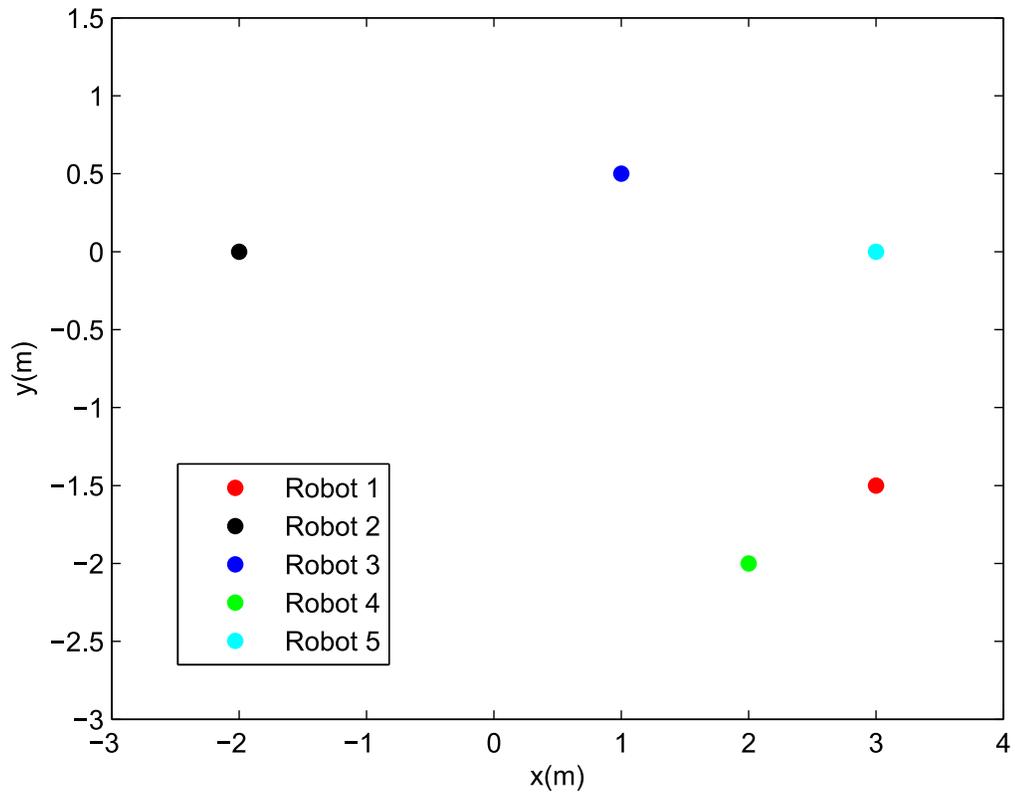


Figura 25: Red con topología en cadena, posición inicial de los robots.

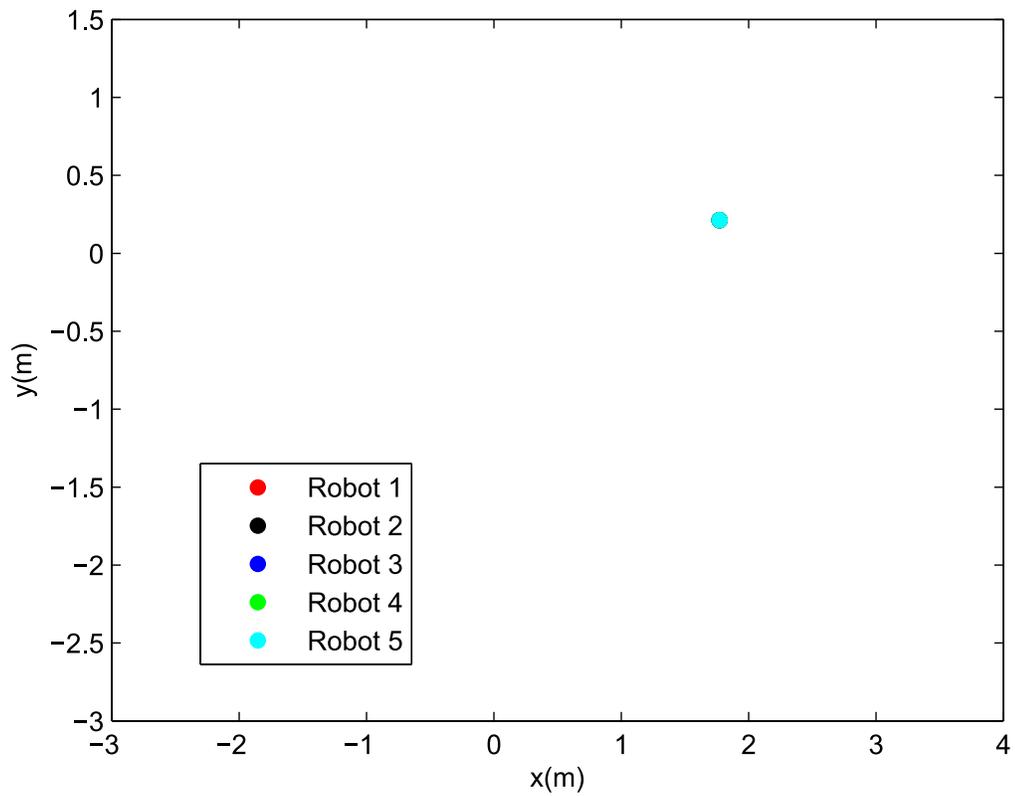


Figura 26: Red con topología en cadena, posición final de los robots.

4.6.2 Grupo de robots móviles con topología en vecino cercano

En la topología anillo (o vecino cercano), los cinco robots móviles se conectaron como se observa en la figura 8, para este caso la matriz de acoplamiento de los robots en el grupo queda de la siguiente forma,

$$A(G)_{\text{anillo}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Las ecuaciones de estado que describen el movimiento del robot i ($i = 1, 2, \dots, 5$) son descritas en la ecuación (60), mientras que las ecuaciones de cada entrada se describen de la siguiente manera:

$$R_1 \begin{cases} u_{11}^* = c_{11}(x_2 - 2x_1 + x_5) + c_{12}(\dot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + \dot{x}_5), \\ u_{12}^* = c_{21}(y_2 - 2y_1 + y_5) + c_{22}(\dot{y}_2 - 2\dot{y}_1 + \dot{y}_5), \end{cases} \quad (68)$$

$$R_2 \begin{cases} u_{21}^* = c_{11}(x_1 - 2x_2 + x_3) + c_{12}(\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + \dot{x}_3), \\ u_{22}^* = c_{21}(y_1 - 2y_2 + y_3) + c_{22}(\dot{y}_1 - 2\dot{y}_2 + \dot{y}_3), \end{cases} \quad (69)$$

$$R_3 \begin{cases} u_{31}^* = c_{11}(x_2 - 2x_3 + x_4) + c_{12}(\dot{x}_2 - 2\dot{x}_3 + \dot{x}_4), \\ u_{32}^* = c_{21}(y_2 - 2y_3 + y_4) + c_{22}(\dot{y}_2 - 2\dot{y}_3 + \dot{y}_4), \end{cases} \quad (70)$$

$$R_4 \begin{cases} u_{41}^* = c_{11}(x_3 - 2x_4 + x_5) + c_{12}(\dot{x}_3 - 2\dot{x}_4 + \dot{x}_5), \\ u_{42}^* = c_{21}(y_3 - 2y_4 + y_5) + c_{22}(\dot{y}_3 - 2\dot{y}_4 + \dot{y}_5), \end{cases} \quad (71)$$

$$R_5 \begin{cases} u_{51}^* = c_{11}(x_4 - 2x_5 + x_1) + c_{12}(\dot{x}_4 - 2\dot{x}_5 + \dot{x}_1), \\ u_{52}^* = c_{21}(y_4 - 2y_5 + y_1) + c_{22}(\dot{y}_4 - 2\dot{y}_5 + \dot{y}_1). \end{cases} \quad (72)$$

Los resultados numéricos obtenidos se describen a continuación. En la figura 27 se observa que debido a la acción de los controladores, los robots del grupo convergen a una misma posición en “ x ”, “ y ”. Cabe mencionar que aunque en la figura 27 c), las líneas no tienden a un mismo punto, están separadas por un múltiplo de 2π , lo que indica sincronización en fase de la orientación θ . En la figura 28 se ve que conforme avanza el tiempo los errores de sincronía $x_1 - x_i$, $y_1 - y_i$ con $i = 2, 3, 4, 5$ son cero, mientras que en el error del ángulo de orientación $\theta_1 - \theta_i$ existe una

diferencia de un múltiplo de 2π . En la figura 29 se muestran las entradas para cada una de las ruedas. En la figura 30 se tiene el rastro del movimiento que siguieron los robots hasta llegar a sincronizarse, mientras que en las figuras 31 y 32 se tiene la posición inicial y final de los robots.

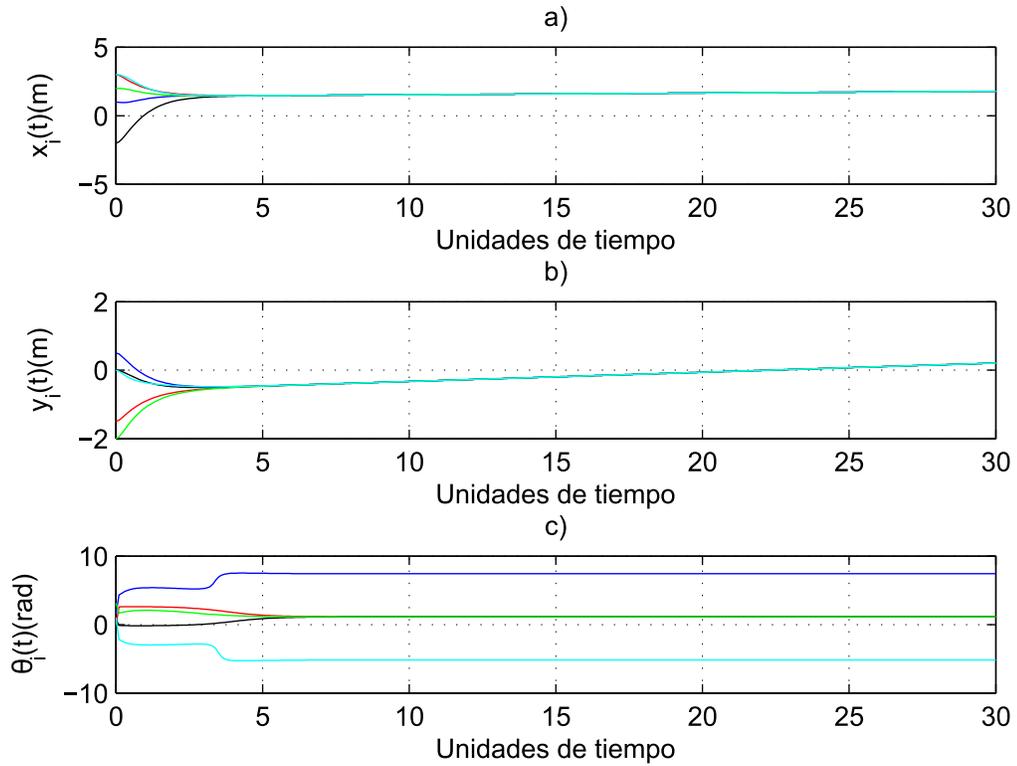


Figura 27: Red con topología en anillo, trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$.

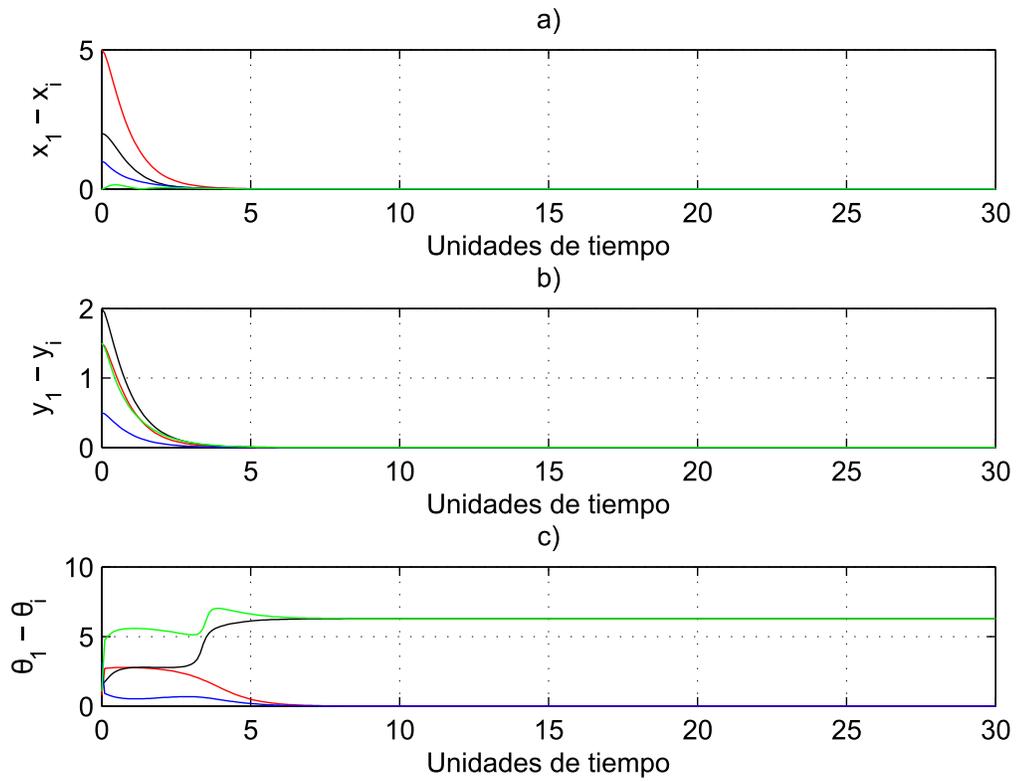


Figura 28: Red con topología en anillo, dinámicas del error: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$.

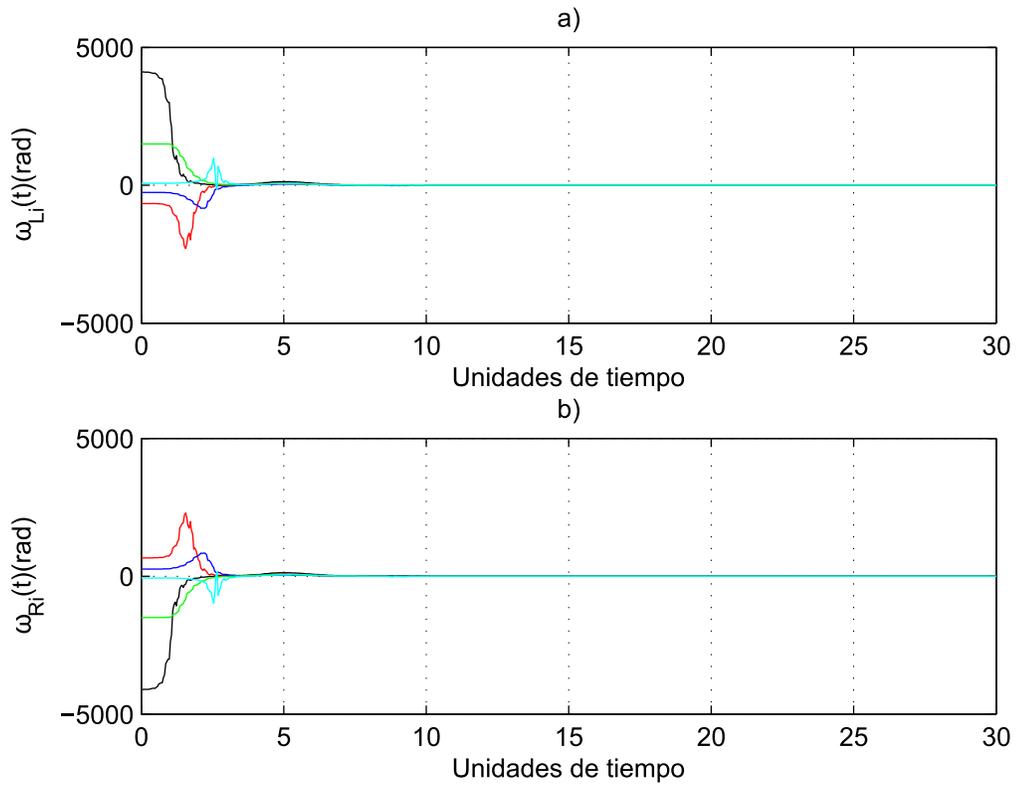


Figura 29: Red con topología en anillo, entradas: a) ω_{L_i} y b) ω_{R_i} , con $i = 1, 2, \dots, 5$.

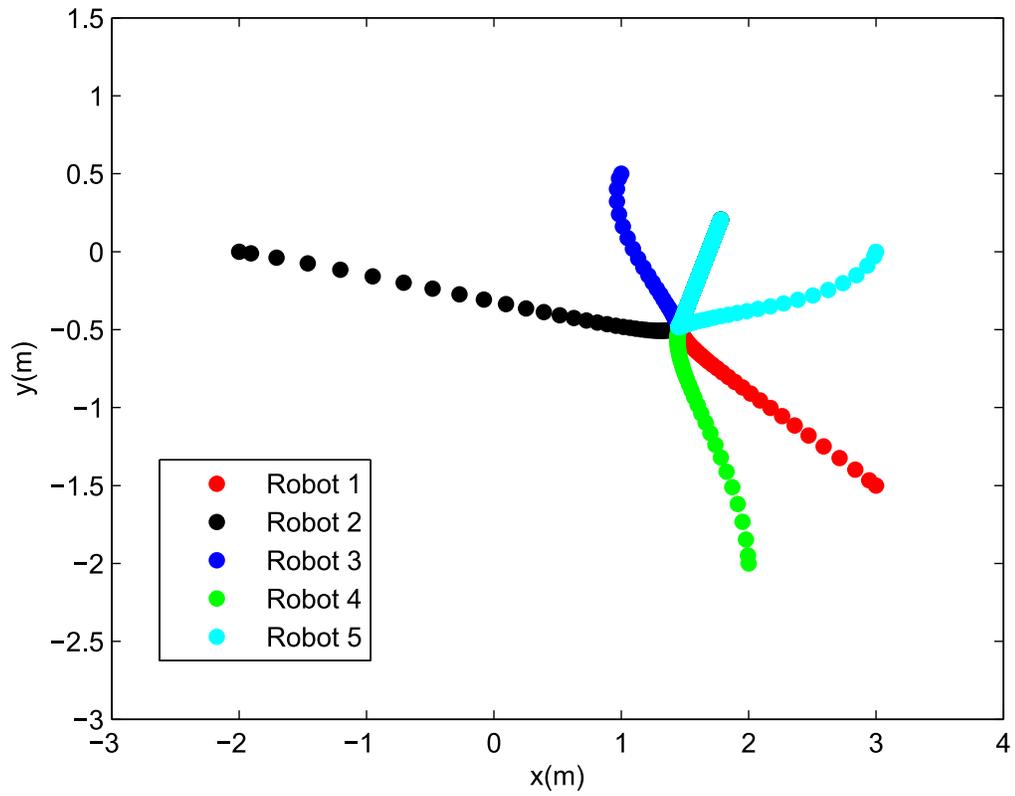


Figura 30: Red con topología en anillo: movimiento en el plano x-y.

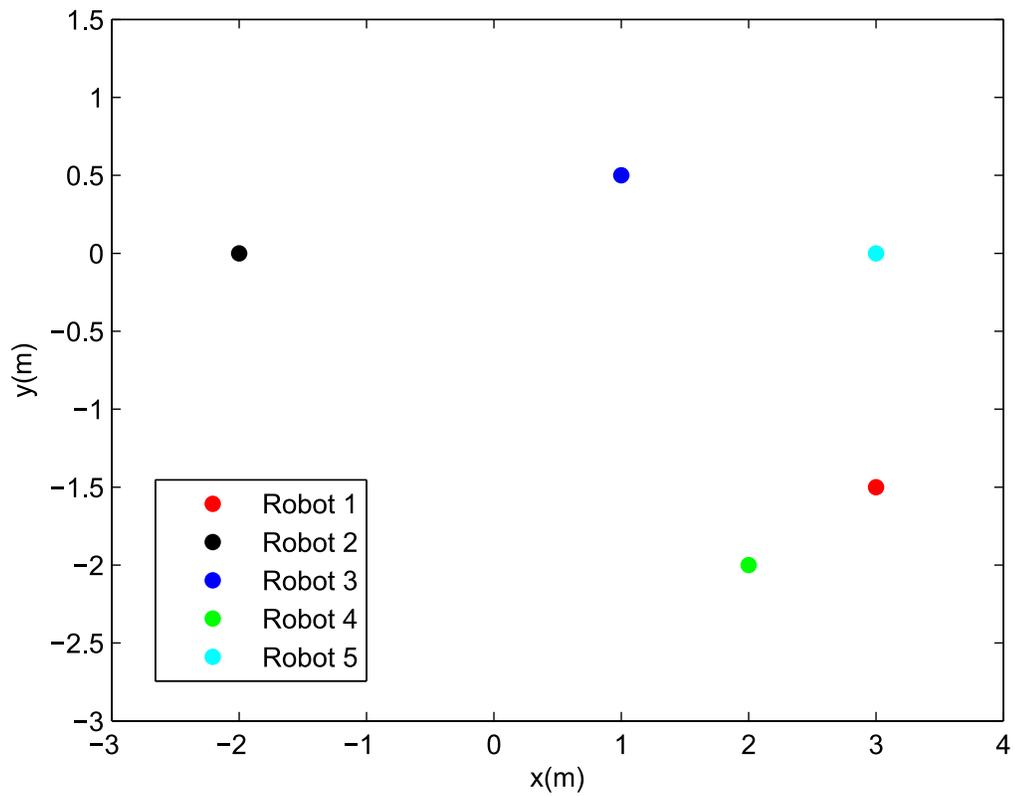


Figura 31: Red con topología en anillo, posición inicial de los robots.

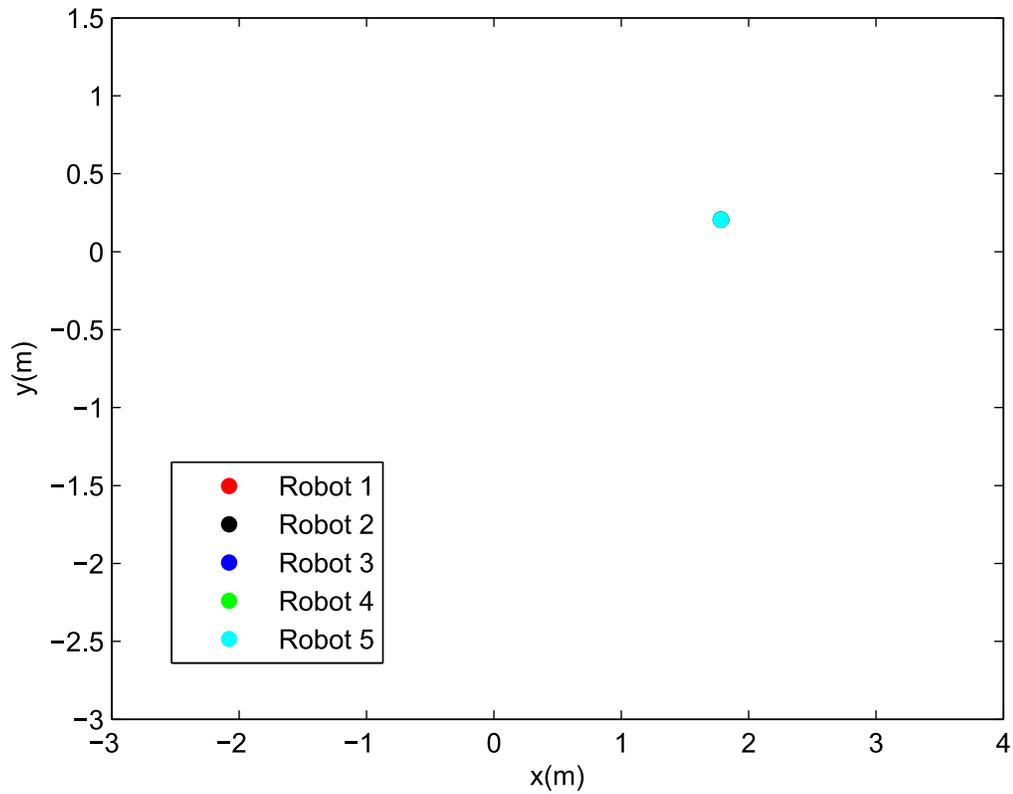


Figura 32: Red con topología en anillo, posición final de los robots.

4.6.3 Grupo de robots móviles con topología en estrella

Para el grupo en topología en estrella los cinco robots móviles se conectaron como se observa en la figura 9. En este caso la matriz de acoplamiento queda de la siguiente forma,

$$A(G)_{estrella} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (73)$$

Las ecuaciones de estado que describen el movimiento del robot i ($i = 1, 2, \dots, 5$) son descritas

en la ecuación (60), mientras que las ecuaciones de cada entrada quedan de la siguiente manera:

$$R_1 \begin{cases} u_{11}^* = c_{11}(x_2 - 4x_1 + x_3 + x_4 + x_5) + c_{12}(\dot{x}_2 - 4\dot{x}_1 + \dot{x}_3 + \dot{x}_4 + \dot{x}_5), \\ u_{12}^* = c_{21}(y_2 - 4y_1 + y_3 + y_4 + y_5) + c_{22}(\dot{y}_2 - 4\dot{y}_1 + \dot{y}_3 + \dot{y}_4 + \dot{y}_5), \end{cases} \quad (74)$$

$$R_2 \begin{cases} u_{21}^* = c_{11}(x_1 - x_2) + c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), \\ u_{22}^* = c_{21}(y_1 - y_2) + c_{22}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2), \end{cases} \quad (75)$$

$$R_3 \begin{cases} u_{31}^* = c_{11}(x_1 - x_3) + c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3), \\ u_{32}^* = c_{21}(y_1 - y_3) + c_{22}(\dot{y}_1 - \dot{y}_3), \end{cases} \quad (76)$$

$$R_4 \begin{cases} u_{41}^* = c_{11}(x_1 - x_4) + c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_4), \\ u_{42}^* = c_{21}(y_1 - y_4) + c_{22}(\dot{y}_1 - \dot{y}_4), \end{cases} \quad (77)$$

$$R_5 \begin{cases} u_{51}^* = c_{11}(x_1 - x_5) + c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_5), \\ u_{52}^* = c_{21}(y_1 - y_5) + c_{22}(\dot{y}_1 - \dot{y}_5). \end{cases} \quad (78)$$

Los resultados numéricos obtenidos se describen a continuación. En la figura 33 se observa que debido a la acción de los controladores, los robots convergen a una misma posición en “x”, “y”. La diferencia con respecto a las topologías anteriores son los tiempos en los que llegan a sincronizarse. En la topología de estrella se logra la sincronización más rápido debido a que la información sólo es necesario transmitirla a lo máximo por un robot para llegar a cualquier otro robot. En esta red de robots los comportamientos de θ como se observa en la figura 33 c) no llegan exactamente a un mismo punto, pero están separados por 2π . En la figura 34 se ve que conforme avanza el tiempo los errores de sincronía $x_1 - x_i$, $y_1 - y_i$ con $i = 2, 3, 4, 5$ son cero, mientras que en el error del ángulo de orientación $\theta_1 - \theta_i$ existe una diferencia de un múltiplo de 2π . En la figura 35 se tienen las entradas para cada una de las ruedas. En la figura 36 se tiene el rastro del movimiento que siguieron los robots hasta llegar a sincronizarse, mientras que en las figuras 37 y 38 se tiene la posición inicial y final de los robots.

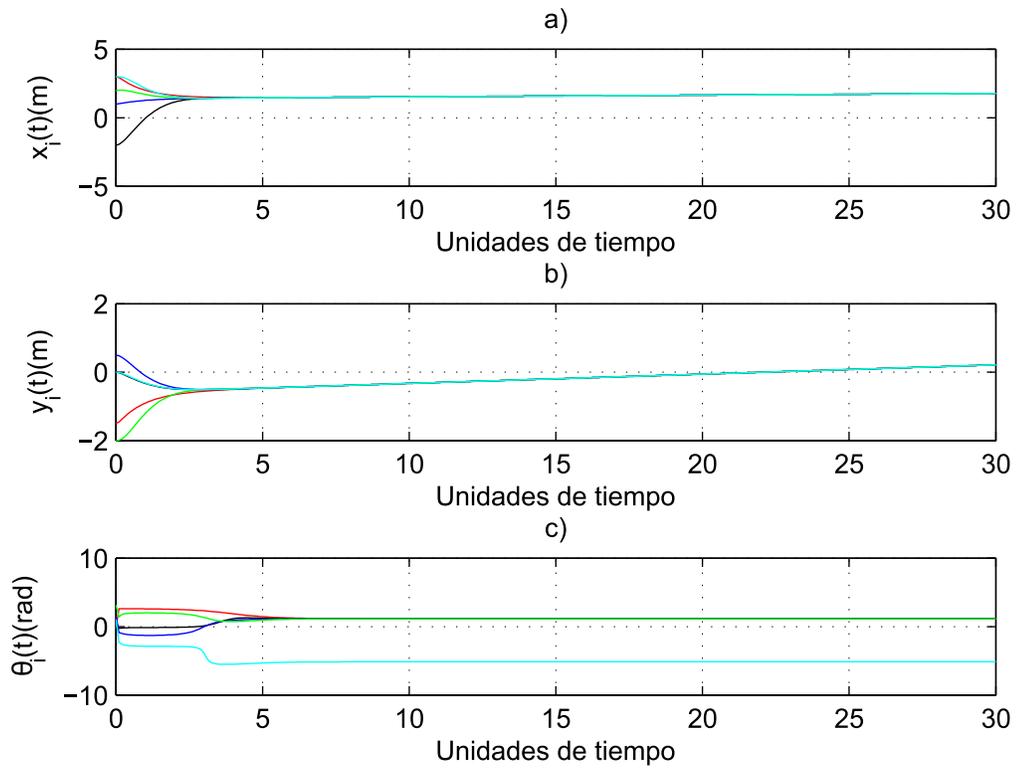


Figura 33: Red en topología estrella, trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$.

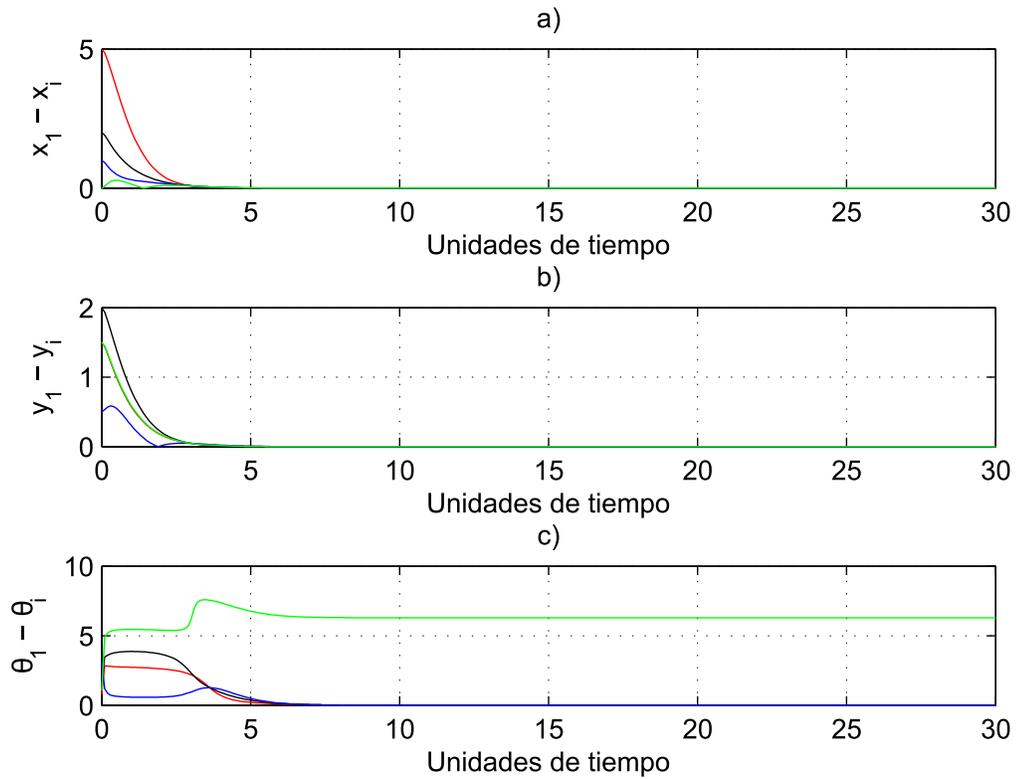


Figura 34: Red en topología estrella, dinámicas del error: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$.

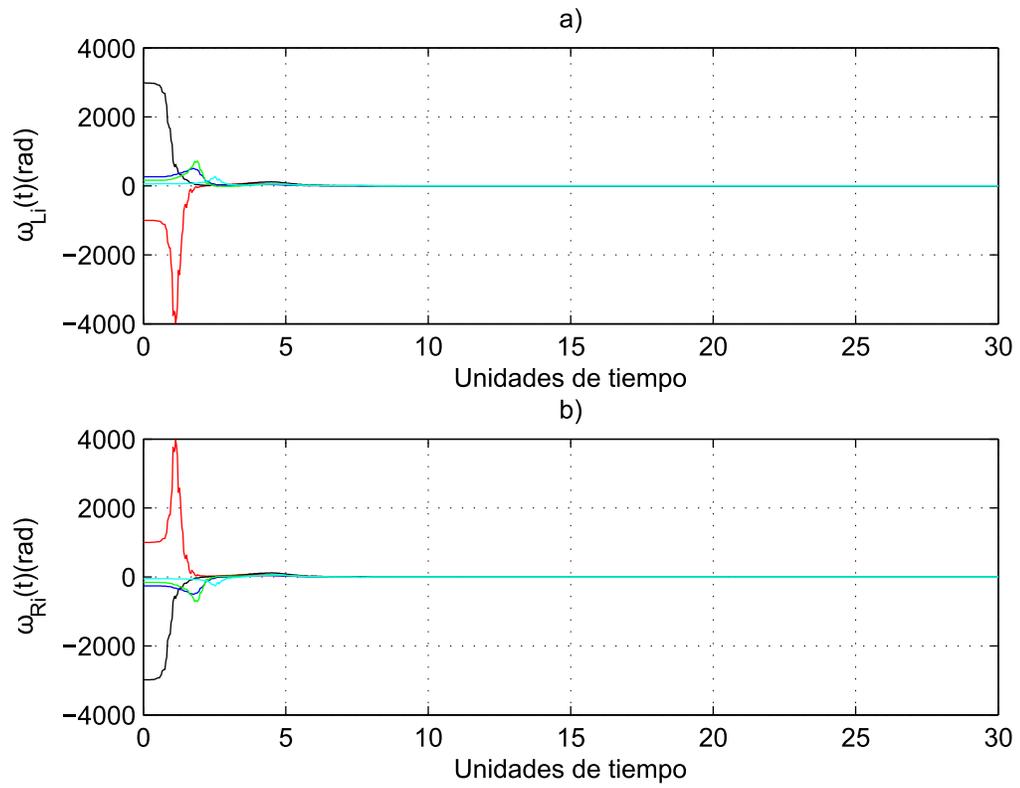


Figura 35: Red en topología estrella, entradas: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$.

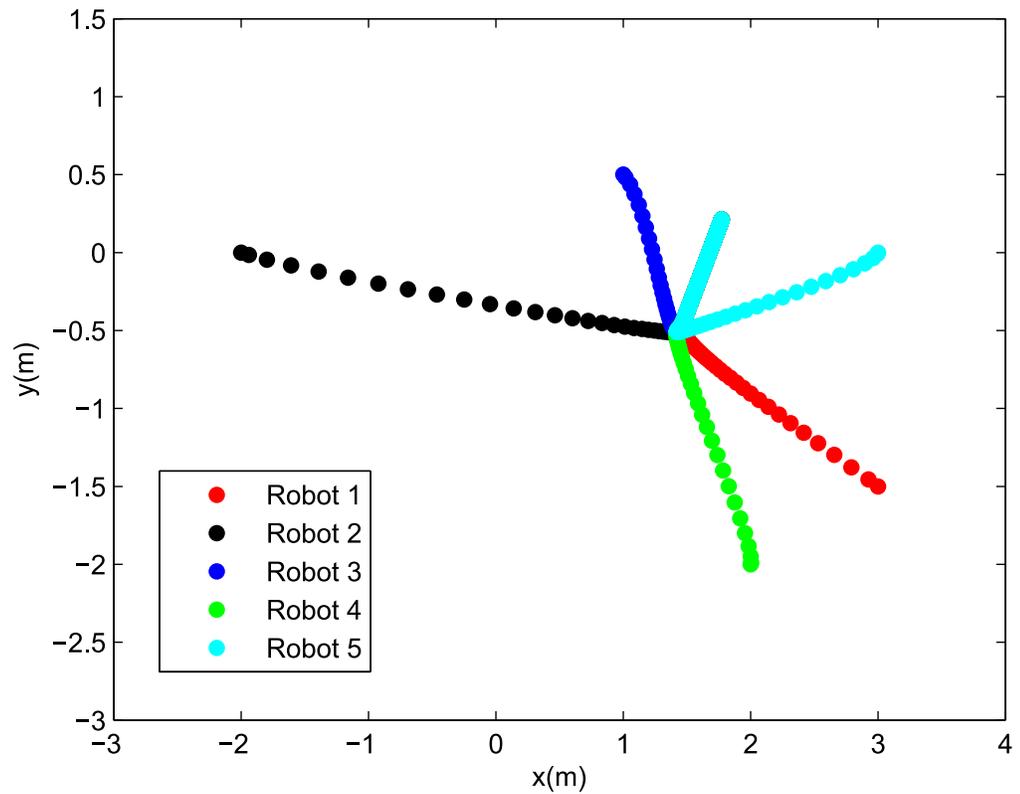


Figura 36: Red en topología estrella, movimiento en el plano x-y.

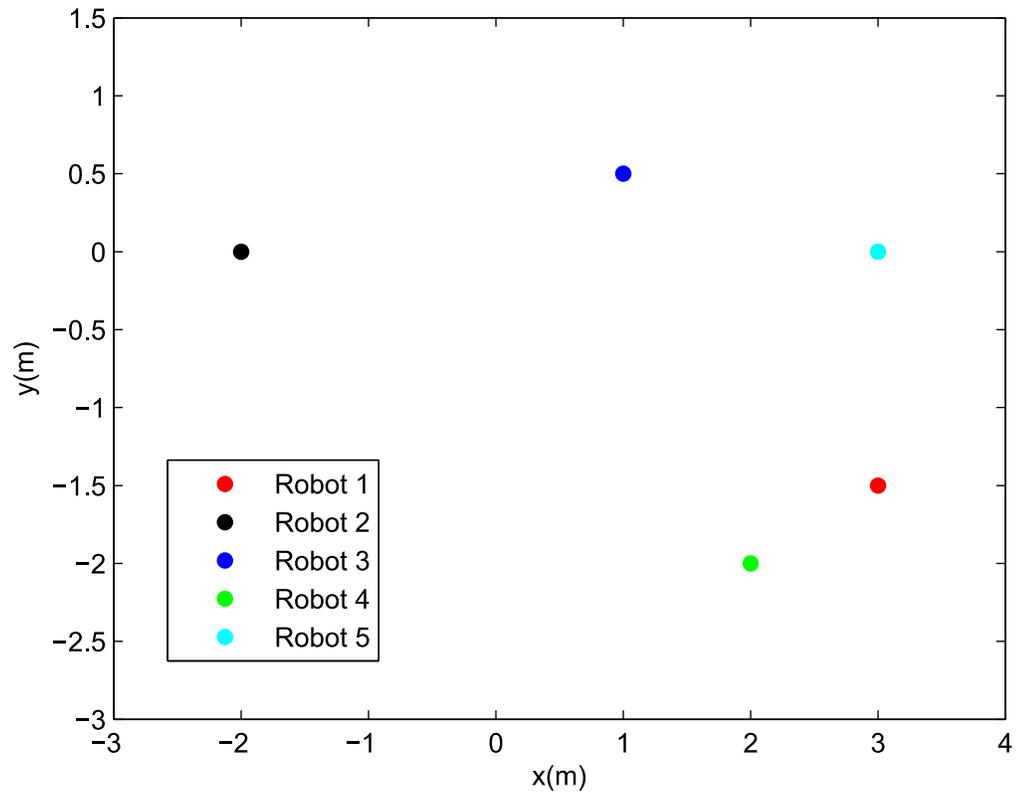


Figura 37: Red en topología estrella, posición inicial de los robots.

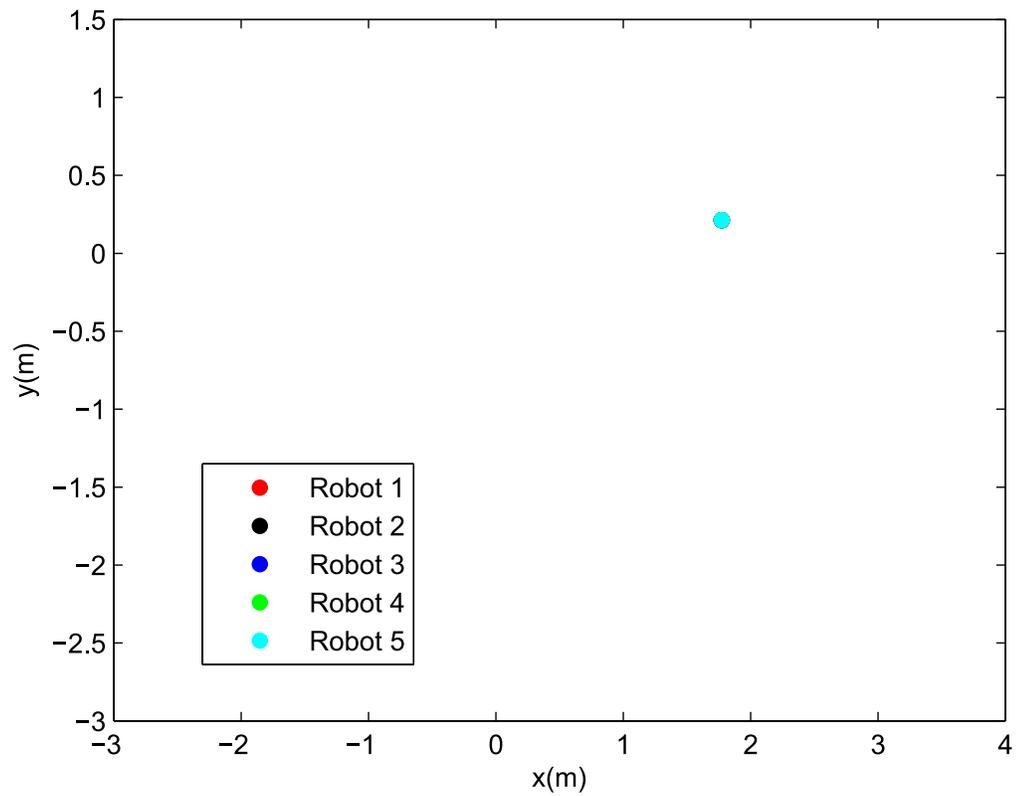


Figura 38: Red en topología estrella, posición final de los robots.

4.6.4 Grupo de robots móviles con topología en mundo pequeño

Para el grupo de robots en topología de *mundo pequeño* se conectaron los cinco robots móviles siguiendo el modelo propuesto por Watts y Strogatz (Watts y Strogatz, 1998) como se observa en la figura 10. Para este caso, la correspondiente matriz de acoplamiento queda de la siguiente forma,

$$A(G)_{mp} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (79)$$

Las ecuaciones que describen el movimiento del robot i ($i = 1, 2, \dots, 5$) son descritas en la ecuación (60), mientras que las ecuaciones de cada entrada son:

$$R_1 \begin{cases} u_{11}^* = c_{11}(x_2 - 3x_1 + x_3 + x_5) + c_{12}(\dot{x}_2 - 3\dot{x}_1 + \dot{x}_3 + \dot{x}_5), \\ u_{12}^* = c_{21}(y_2 - 3y_1 + y_3 + y_5) + c_{22}(\dot{y}_2 - 3\dot{y}_1 + \dot{y}_3 + \dot{y}_5), \end{cases} \quad (80)$$

$$R_2 \begin{cases} u_{21}^* = c_{11}(x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4) + c_{12}(\dot{x}_1 - 3\dot{x}_2 + \dot{x}_3 + \dot{x}_4), \\ u_{22}^* = c_{21}(y_1 - 3y_2 + y_3 + y_4) + c_{22}(\dot{y}_1 - 3\dot{y}_2 + \dot{y}_3 + \dot{y}_4), \end{cases} \quad (81)$$

$$R_3 \begin{cases} u_{31}^* = c_{11}(x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4) + c_{12}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 - 3\dot{x}_3 + \dot{x}_4), \\ u_{32}^* = c_{21}(y_1 + y_2 - 3y_3 + y_4) + c_{22}(\dot{y}_1 + \dot{y}_2 - 3\dot{y}_3 + \dot{y}_4), \end{cases} \quad (82)$$

$$R_4 \begin{cases} u_{41}^* = c_{11}(x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5) + c_{12}(\dot{x}_2 + \dot{x}_3 - 3\dot{x}_4 + \dot{x}_5), \\ u_{42}^* = c_{21}(y_2 + y_3 - 3y_4 + y_5) + c_{22}(\dot{y}_2 + \dot{y}_3 - 3\dot{y}_4 + \dot{y}_5), \end{cases} \quad (83)$$

$$R_5 \begin{cases} u_{51}^* = c_{11}(x_1 + x_4 - 2x_5) + c_{12}(\dot{x}_1 + \dot{x}_4 - 2\dot{x}_5), \\ u_{52}^* = c_{21}(y_1 + y_4 - 2y_5) + c_{22}(\dot{y}_1 + \dot{y}_4 - 2\dot{y}_5). \end{cases} \quad (84)$$

Los resultados numéricos obtenidos se describen a continuación. En la figura 39 se observa que debido a las acciones de los controladores, los robots convergen a una misma posición en “x”, “y”. Los comportamientos del ángulo de orientación θ no van a un mismo punto, sin embargo, están separados por un múltiplo de 2π . Cabe mencionar que aunque se esperaba que la red de mundo pequeño sincronizase más rápido, el resultado fue más lento que la red en topología

estrella y anillo, pero más rápida que la red en topología cadena. La explicación es que en el grupo de robots conectados en estrella se tiene que pasar a lo máximo por un sólo robot para que la información llegue a su destino, mientras que en la topología en mundo pequeño puede pasar hasta por dos robots. En la figura 40 se ve que conforme avanza el tiempo los errores de sincronía $x_1 - x_i$, $y_1 - y_i$ con $i = 2, 3, 4, 5$ son cero, mientras que en el error del ángulo de orientación $\theta_1 - \theta_i$ existe una diferencia de un múltiplo de 2π . En la figura 41 se muestran las entradas para cada una de las ruedas. En la figura 42 se tiene el rastro del movimiento que siguieron los robots hasta llegar a sincronizar, mientras que en las figuras 43 y 44 se tiene la posición inicial y final de los robots.

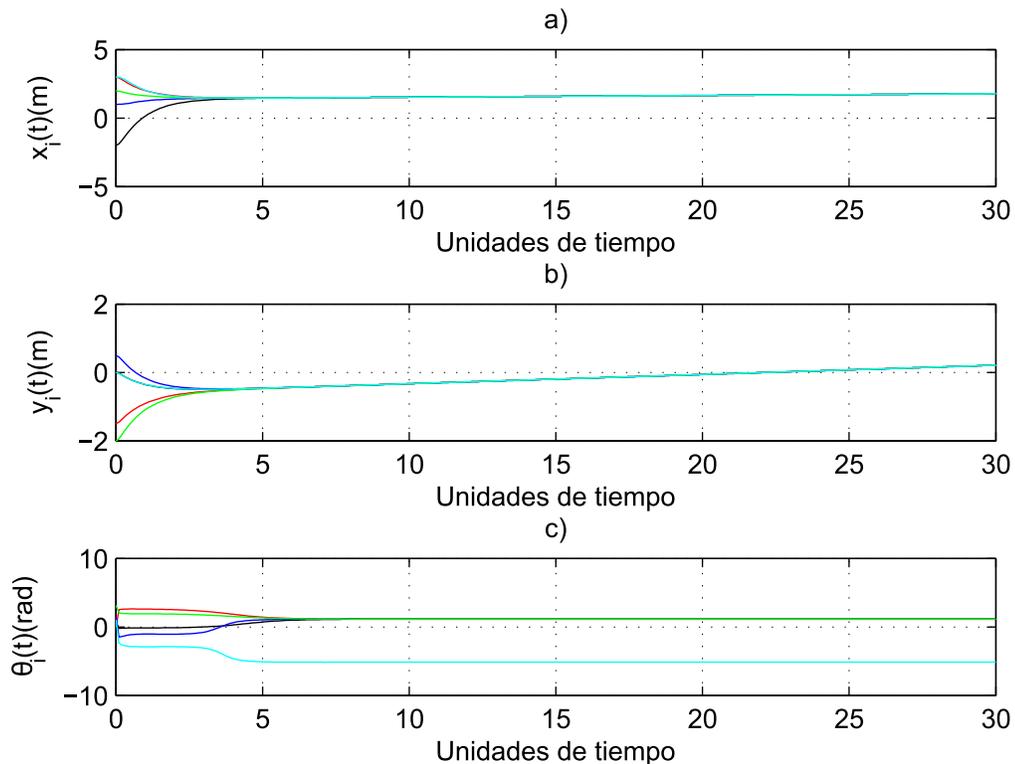


Figura 39: Red con topología en mundo pequeño, trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$.

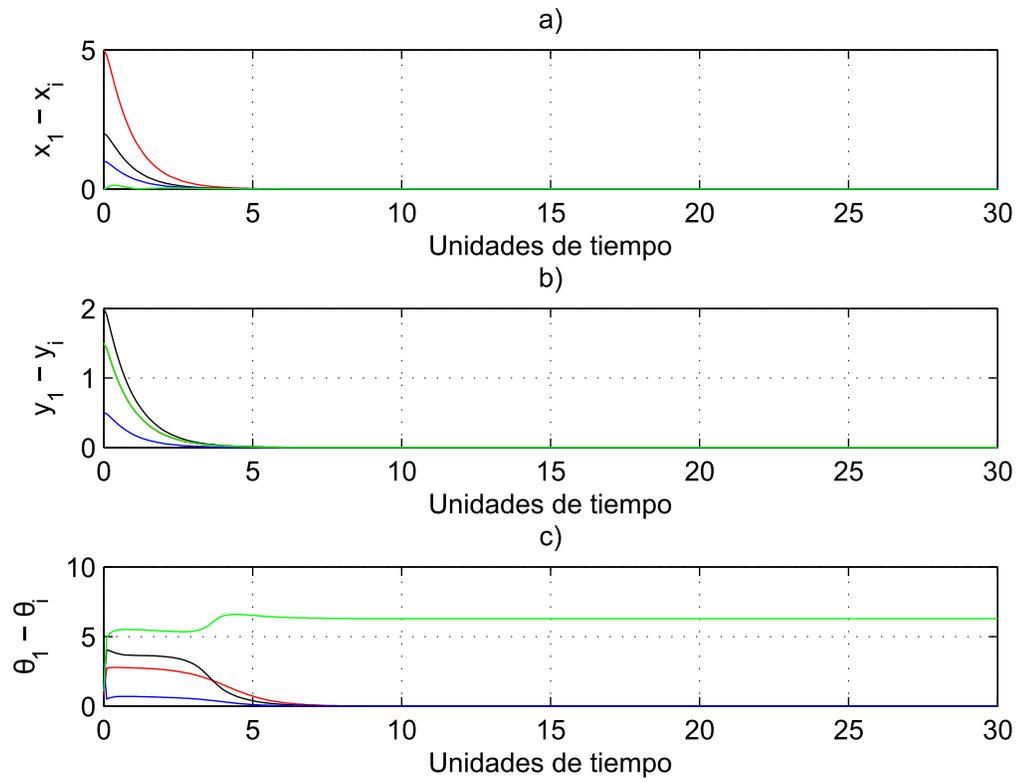


Figura 40: Red con topología en mundo pequeño, dinámicas del error: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, para $i = 2, 3, 4, 5$.

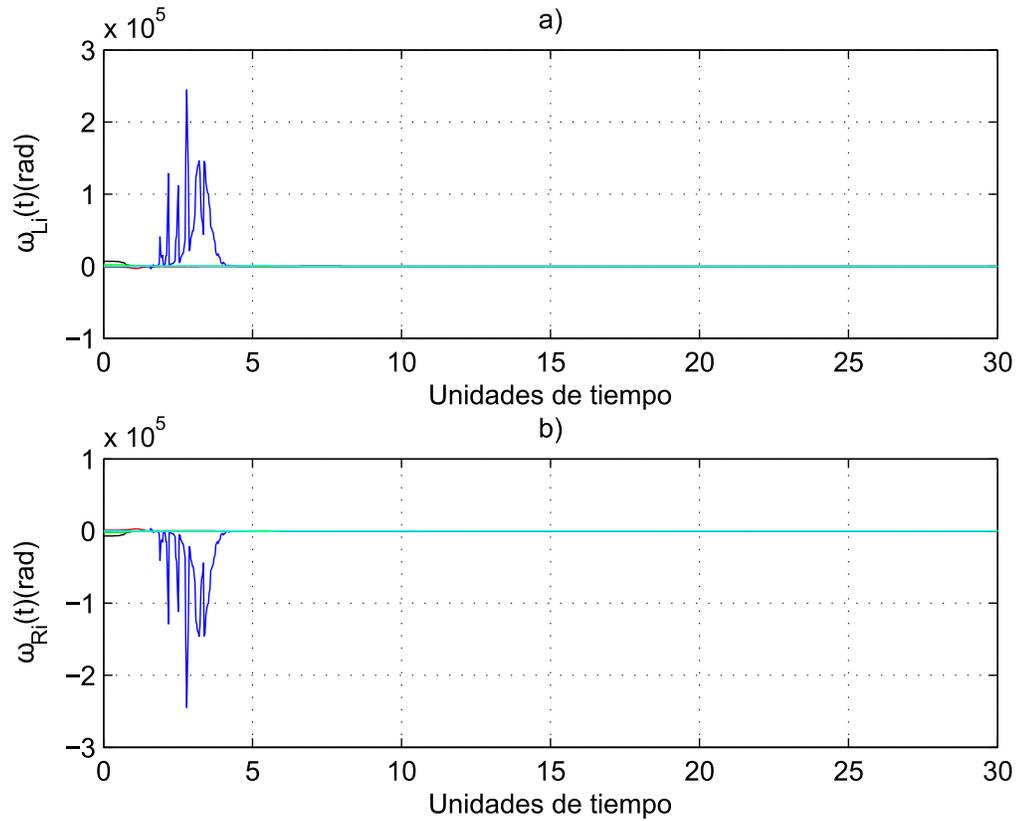


Figura 41: Red con topología en mundo pequeño, entradas: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$.

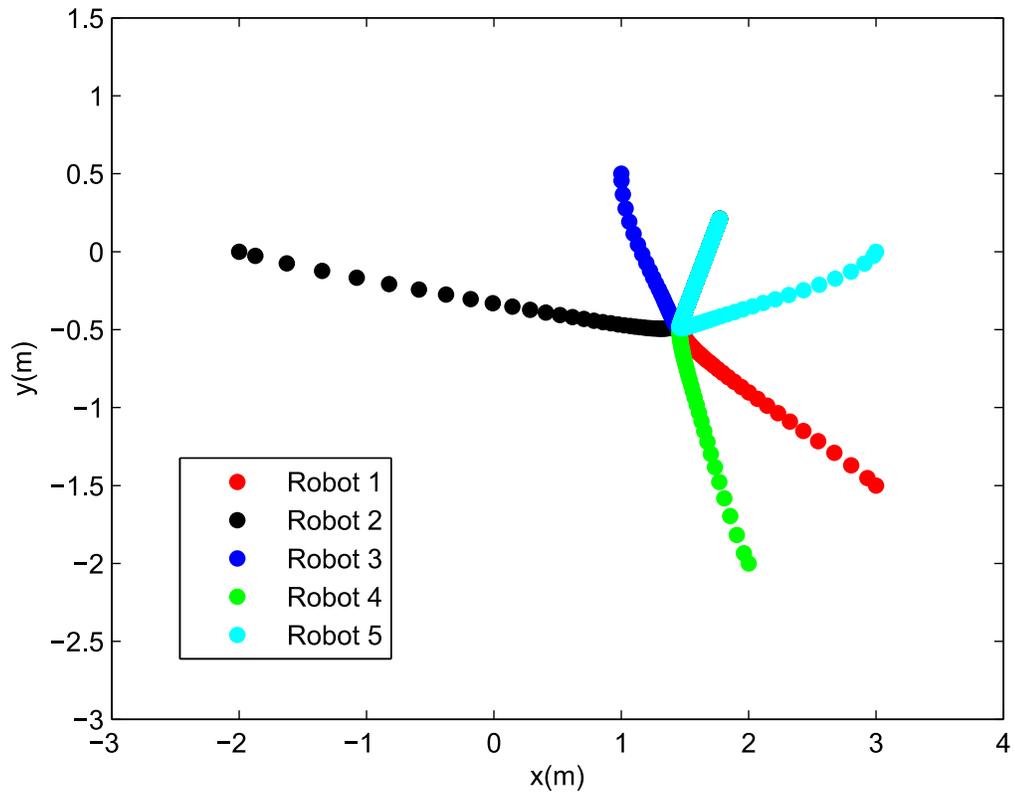


Figura 42: Red con topología en mundo pequeño, movimiento en el plano x-y.

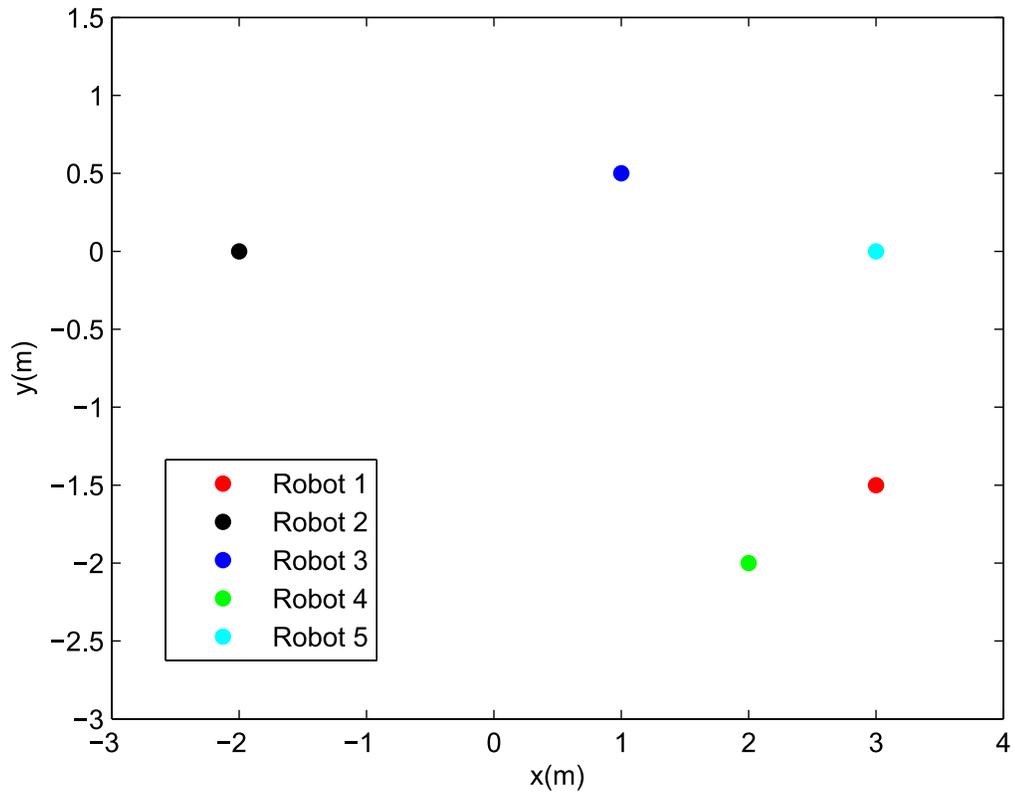


Figura 43: Red con topología en mundo pequeño, posición inicial de los robots.

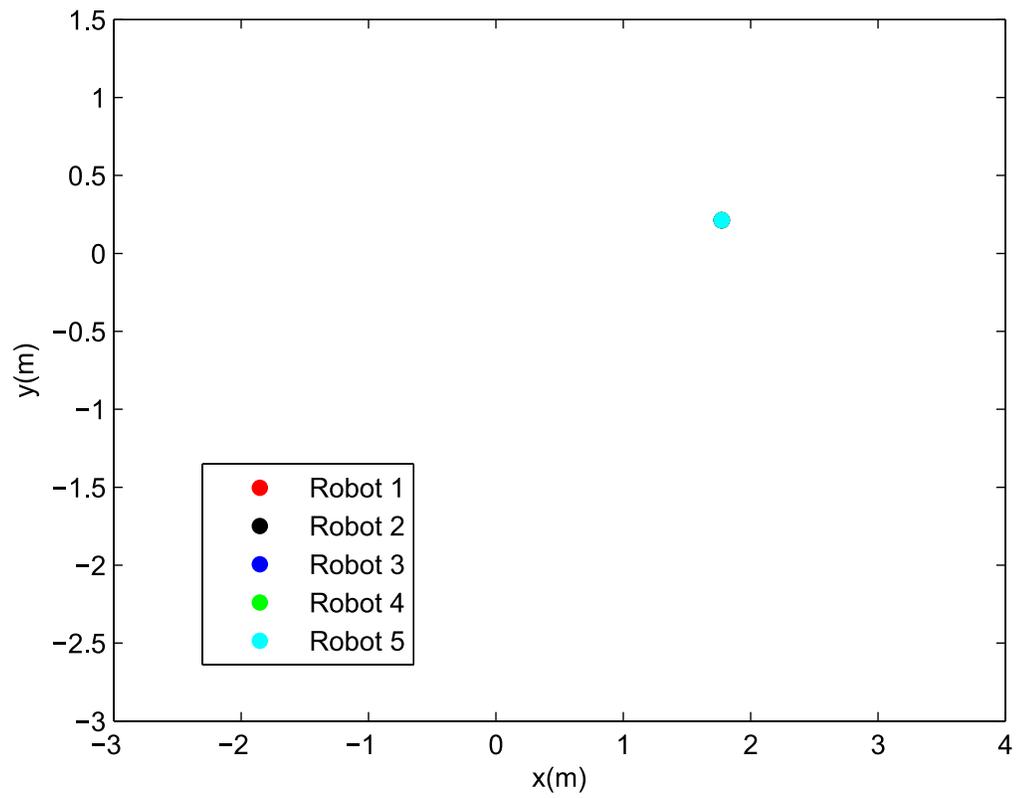


Figura 44: Red con topología en mundo pequeño, posición final de los robots.

4.7 Constantes de sincronización para el grupo con topología en estrella

A través de análisis numérico, se determinaron los valores de las constantes c_{11} , c_{21} , c_{12} , c_{22} que son válidos para sincronizar los cinco robots móviles en la topología estrella (que será utilizada de forma unidireccional en las simulaciones de formación). En la figura 45 se observa que la zona roja se compone de los valores válidos para sincronizar, por el contrario, la zona azul son los valores que no producen sincronización en los robots. Para hacer la gráfica se variaron los valores de las constantes c_{11} , c_{21} , c_{12} , c_{22} dando un tiempo límite de sincronización de 30 unidades de tiempo y un error permitido. Si con el valor de las constantes los robots llegaban a una misma posición x , y (con cierto error permitido de $0.001 m$ para cada robot respecto al robot 1, $|x_1 - x_i|$, $|y_1 - y_i|$, ($i = 2, 3, 4, 5$) en menos del límite de tiempo, entonces existía sincronización entre los cinco robots.

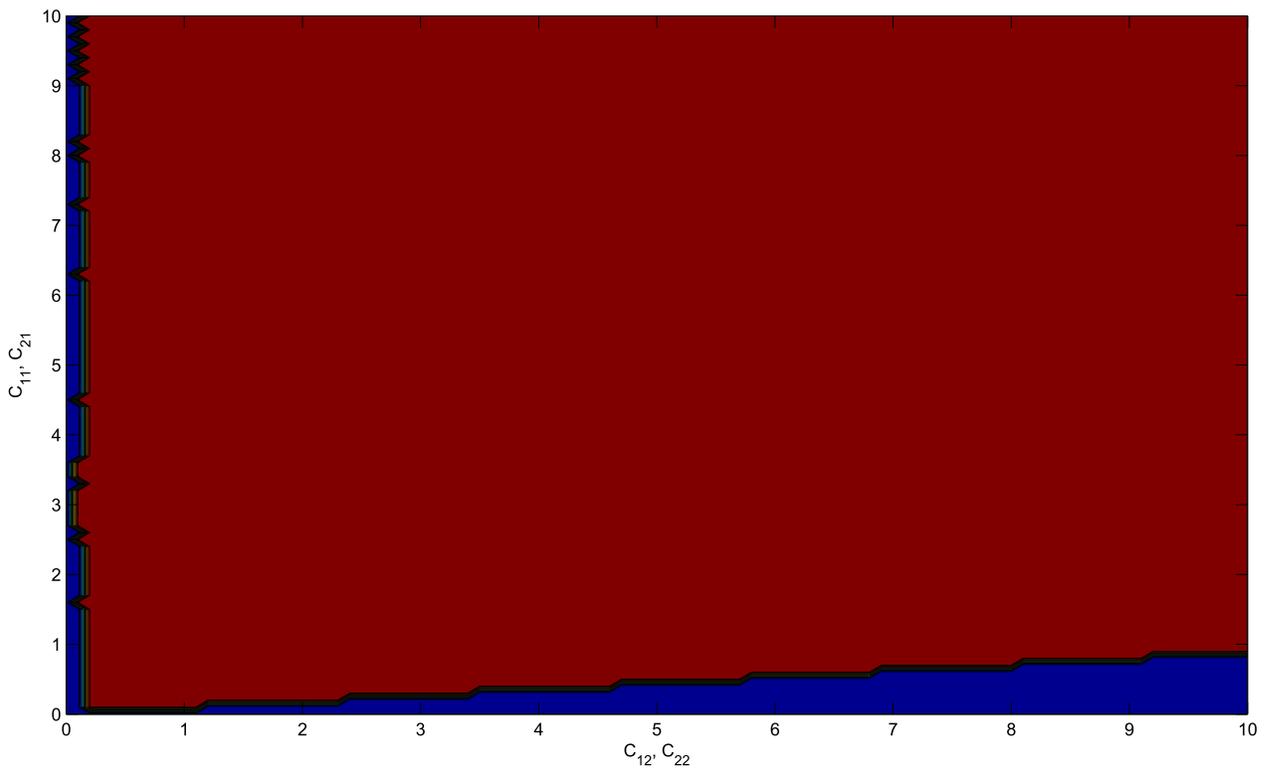


Figura 45: Valores de las constantes de sincronización validas en la red en topología estrella.

4.8 Comparación entre la sincronización de los grupos de acuerdo a la topología

Analizando las respuestas temporales y los errores de sincronización de los resultados numéricos obtenidos para “ x ”, “ y ” y θ , bajo las mismas circunstancias, se puede concluir que el grupo que alcanzó sincronización en menor tiempo fue el grupo con topología en estrella seguido por el de anillo, mundo pequeño y cadena, respectivamente. Aunque la topología en estrella fue la más rápida, se tienen que tomar en cuenta las ventajas y desventajas que tiene cada topología de conexión y el propósito para el que se va a usar el grupo de robots. En el grupo conectado en estrella, por ejemplo, la gran desventaja es que posee un robot central. Esto implica que si alguna falla pasara en este robot el grupo quedaría desconectado y como consecuencia sin funcionamiento todo el grupo (grupo de robots aislados). En otros términos, el tener un robot central requiere de un mayor procesamiento de datos, requiriendo más recursos para este robot. Como era de esperarse, con la topología en estrella, la información se transmite con mayor facilidad entre los robots que componen el grupo debido a que no es necesario pasar por muchos robots antes de llegar a cualquiera de éstos, al contrario de la topología en cadena, para la que es necesario pasar por todos los robots intermedios si la información quiere ir de un extremo a otro. Cabe mencionar que con fines comparativos, las condiciones iniciales y todas las constantes utilizadas en las simulaciones de las cuatro topologías fueron las mismas. En la tabla 1 se tienen las unidades de tiempo que le tomó a cada grupo de robots con las diferentes topologías. Estos tiempos fueron obtenidos de Matlab tomando en cuenta los errores de posición en “ x ” y “ y ” de cada uno de los robots respecto al robot 1. Si todos los errores son menores a $0.001m$ entonces se considera que los cinco robots se encuentran sincronizados.

Topología en el grupo	Unidades de tiempo
Cadena	5.39
Anillo	4.19
Estrella	4.09
Mundo pequeño	4.49

Tabla 1: Tiempos de sincronización de los grupos de robots con diferentes topologías.

Conclusiones del capítulo

A través de los resultados numéricos expuestos en este capítulo, se puede concluir que en el modelo linealizado es posible implementar el controlador de sincronización. Con el estudio y análisis de la sincronización de grupos de robots con diferentes topologías (cadena, vecino cercano, estrella y mundo pequeño) se puede deducir que el tiempo de sincronización será menor

si la topología en la que están los robots conectados tiene una forma eficiente de distribuir la información. El peor de los casos lo presentó el grupo con topología de conexión en cadena debido a que la información debe pasar por todos los robots que están en el centro para llegar de un extremo a otro. En cambio, el grupo de robots con topología de conexión en estrella fue el mejor de los casos, ya que sólo es necesario pasar por 1 agente (en el peor de los casos) para distribuir la información a cualquier robot de la red.

Capítulo 5. Formación en grupos de robots móviles

Este capítulo está dedicado al problema de formación en un grupo de robots móviles, en el cual, para alcanzar este objetivo, se propone una solución utilizando un controlador con evasión de colisiones. Se reportan resultados numéricos y se limitan además, las velocidades máximas y mínimas que puede adquirir cada uno de los robots. De forma natural, varias especies de animales recurren al comportamiento de formación para aumentar su eficiencia en grupos. Se piensa que las aves vuelan en formación “V” (como se observa en la figura 46) para ahorrar energía al volar, aprovechando el empuje generado por los vórtices del extremo alar generado por el ave que vuela delante de ellas en la formación. También se ha demostrado que los patos ahorran energía al nadar en una formación en fila.



Figura 46: Vuelo en formación de aves en “V”.

5.1 Formación

El problema de formación de robots consiste en establecer el movimiento de un grupo de robots, para que de una manera coordinada o colaborativa, lleven a cabo una tarea específica. Como ejemplos de esas tareas se mencionan: vigilancia, búsqueda de objetos, exploración, rescate y transporte de objetos, las cuales pueden realizarse en ambientes diversos utilizando grupos de robots móviles terrestres, aéreos, espaciales, marinos o submarinos (Couzin *et al.*, 2002).

Para el problema de formación de grupos de robots móviles, las leyes de control del robot

i-ésimo para lograr el comportamiento colectivo definidas para las entradas u_{i1}^* y u_{i2}^* , quedan de la siguiente forma:

$$u_{i1}^* = \sum_{j=1}^N c_{ij} a_{ij} x_j + \delta_{ijx} (a_{ij} x_j + \Delta_{ijx}) + c_{ij} a_{ij} \dot{x}_j, \quad (85)$$

$$u_{i2}^* = \sum_{j=1}^N c_{ij} a_{ij} y_j + \delta_{ijy} (a_{ij} y_j + \Delta_{ijy}) + c_{ij} a_{ij} \dot{y}_j, \quad (86)$$

donde c_{ij} es la fuerza de acoplamiento entre los robots i y j , a_{ij} es un elemento de la matriz de acoplamiento $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, Δ_{ijx} y Δ_{ijy} son las distancias esperadas en "x" y "y" respectivamente entre los robots i y j , δ_{ijx} y δ_{ijy} son los coeficientes de repulsión, los cuales pueden tomar los siguientes valores,

$$\delta_{ijx,y} = \begin{cases} 0, & \text{si } |x_{i1} - x_{j1}| > \Delta_{ijx,y}, \\ \delta, & \text{si } |x_{i1} - x_{j1}| \leq \Delta_{ijx,y}. \end{cases} \quad (87)$$

5.2 Evasión de colisiones

Los controladores propuestos en (85) y (86) son suficientes para lograr el objetivo de control de formación de los cinco robots, sin embargo, debido a que los robots obtienen información sólo de los vecinos con los que están conectados y no con los demás robots del grupo, es necesario modificar los controladores para evitar que se presenten colisiones entre los robots que conforman el grupo. Se recurre a la siguiente modificación a las dos entradas disponibles, como en (Martínez Clark, 2014; Martínez Clark *et al.*, 2015a,b):

$$u_{i1}^* = \sum_{j=1}^N c_{ij} a_{ij} x_j + \delta_{ijx} (a_{ij} x_j + \Delta_{ijx}) - r_{ij} \text{sign}(x_j - x_i) + c_{ij} a_{ij} \dot{x}_j, \quad (88)$$

$$u_{i2}^* = \sum_{j=1}^N c_{ij} a_{ij} y_j + \delta_{ijy} (a_{ij} y_j + \Delta_{ijy}) - r_{ij} \text{sign}(y_j - y_i) + c_{ij} a_{ij} \dot{y}_j, \quad (89)$$

r_{ij} es el *coeficiente anticollisiones*, el cual puede tomar los siguientes valores:

$$r_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } \|\vec{l}_{ij}\| > m, \\ r, & \text{si } \|\vec{l}_{ij}\| \leq m, \end{cases} \quad (90)$$

donde m es el *umbral de colisión* en metros, el cual se ajusta a las dimensiones de los robots

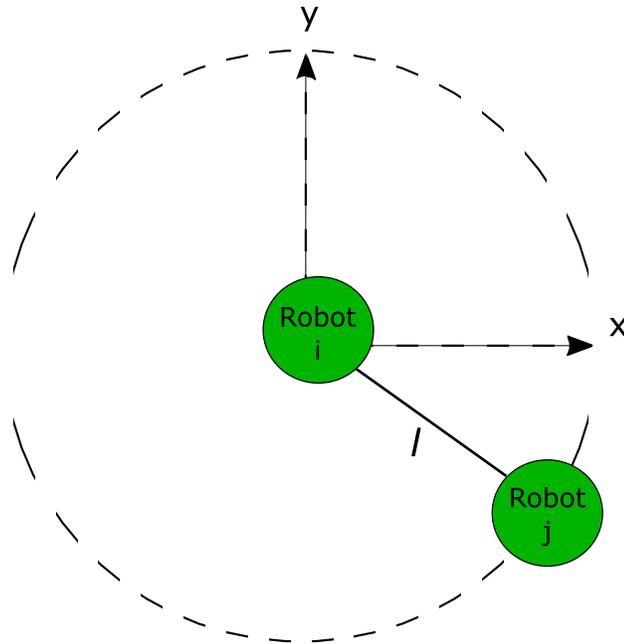


Figura 47: Vector l formado entre los robots i, j .

y/o la distancia que se desee mantener entre éstos. $\|\vec{l}_{ij}\|$ es la *norma euclidiana* formada por las posiciones en cada eje (como se aprecia en la figura 47), esto es,

$$\|\vec{l}_{ij}\| = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \quad (91)$$

y $sign(k)$ es la *función signo*. En este trabajo de tesis se utiliza la definición dada en (Kwakernaak et al., 1991),

$$sign(k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k > 0, \\ 0, & \text{si } k = 0, \\ -1, & \text{si } k < 0. \end{cases} \quad (92)$$

5.3 Simulaciones de formación de robots

5.3.1 Tarea de punto deseado para el grupo de robots

Retomando los resultados obtenidos de la sincronización de grupos de robots móviles, para el caso de formación se hará uso de la topología estrella, debido a que presentó los menores tiempos de sincronización. Sin embargo, se usarán conexiones dirigidas para tener un mejor funcionamiento del controlador como se plantea en (Martínez Clark, 2014). La figura 48 muestra el grafo utilizado, donde se tiene un maestro ($R1$) y cuatro esclavos ($R2, \dots, R5$).

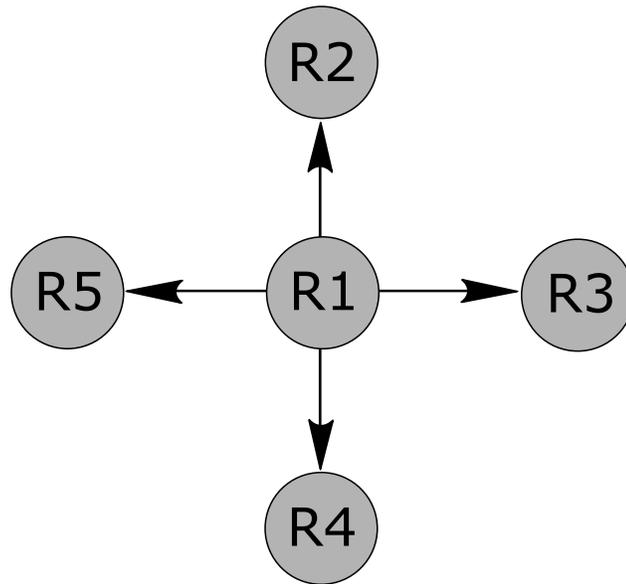


Figura 48: Grafo de conexiones dirigido utilizado para formación de 5 robots.

Para este caso, la matriz de acoplamiento correspondiente queda de la siguiente forma:

$$A(G)_{formacion} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (93)$$

Por otro lado, las ecuaciones de cada entrada son:

$$R_1 \begin{cases} u_{11}^* = c_{12}(\dot{x}_d - \dot{x}_1) + c_{11}(x_d - x_1) - r_{12}\text{sign}(x_2 - x_1) - r_{13}\text{sign}(x_3 \\ -x_1) - r_{14}\text{sign}(x_4 - x_1) - r_{15}\text{sign}(x_5 - x_1), \\ u_{12}^* = c_{22}(\dot{y}_d - \dot{y}_1) + c_{21}(y_d - y_1) - r_{12}\text{sign}(y_2 - y_1) - r_{13}\text{sign}(y_3 - y_1) \\ -r_{14}\text{sign}(y_4 - y_1) - r_{15}\text{sign}(y_5 - y_1), \end{cases} \quad (94)$$

$$R_2 \begin{cases} u_{21}^* = c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_{11}(x_1 - x_2) + \delta_{12x}(x_1 - x_2 + \Delta_{12x}) - r_{21}\text{sign}(x_1 - x_2) \\ -r_{23}\text{sign}(x_3 - x_2) - r_{24}\text{sign}(x_4 - x_2) - r_{25}\text{sign}(x_5 - x_2), \\ u_{22}^* = c_{22}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + c_{21}(y_1 - y_2) + \delta_{12y}(y_1 - y_2 + \Delta_{12y}) - r_{21}\text{sign}(y_1 - y_2) \\ -r_{23}\text{sign}(y_3 - y_2) - r_{24}\text{sign}(y_4 - y_2) - r_{25}\text{sign}(y_5 - y_2), \end{cases} \quad (95)$$

$$R_3 \begin{cases} u_{31}^* = c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + c_{11}(x_1 - x_3) + \delta_{13x}(x_1 - x_3 + \Delta_{13x}) - r_{31}\text{sign}(x_1 - x_3) \\ -r_{32}\text{sign}(x_2 - x_3) - r_{34}\text{sign}(x_4 - x_3) - r_{35}\text{sign}(x_5 - x_3), \\ u_{32}^* = c_{22}(\dot{y}_1 - \dot{y}_3) + c_{21}(y_1 - y_3) + \delta_{13y}(y_1 - y_3 + \Delta_{13y}) - r_{31}\text{sign}(y_1 - y_3) \\ -r_{32}\text{sign}(y_2 - y_3) - r_{34}\text{sign}(y_4 - y_3) - r_{35}\text{sign}(y_5 - y_3), \end{cases} \quad (96)$$

$$R_4 \begin{cases} u_{41}^* = c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_4) + c_{11}(x_1 - x_4) + \delta_{14x}(x_1 - x_4 + \Delta_{14x}) - r_{41}\text{sign}(x_1 - x_4) \\ -r_{42}\text{sign}(x_2 - x_4) - r_{43}\text{sign}(x_3 - x_4) - r_{45}\text{sign}(x_5 - x_4), \\ u_{42}^* = c_{22}(\dot{y}_1 - \dot{y}_4) + c_{21}(y_1 - y_4) + \delta_{14y}(y_1 - y_4 + \Delta_{14y}) - r_{41}\text{sign}(y_1 - y_4) \\ -r_{42}\text{sign}(y_2 - y_4) - r_{43}\text{sign}(y_3 - y_4) - r_{45}\text{sign}(y_5 - y_4), \end{cases} \quad (97)$$

$$R_5 \begin{cases} u_{51}^* = c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_5) + c_{11}(x_1 - x_5) + \delta_{15x}(x_1 - x_5 + \Delta_{15x}) - r_{51}\text{sign}(x_1 - x_5) \\ -r_{52}\text{sign}(x_2 - x_5) - r_{53}\text{sign}(x_3 - x_5) - r_{54}\text{sign}(x_4 - x_5), \\ u_{52}^* = c_{22}(\dot{y}_1 - \dot{y}_5) + c_{21}(y_1 - y_5) + \delta_{15y}(y_1 - y_5 + \Delta_{15y}) - r_{51}\text{sign}(y_1 - y_5) \\ -r_{52}\text{sign}(y_2 - y_5) - r_{53}\text{sign}(y_3 - y_5) - r_{54}\text{sign}(y_4 - y_5). \end{cases} \quad (98)$$

En las simulaciones que se reportan a continuación se variaron solamente las distancias esperadas entre los robots, obteniéndose diferentes formaciones. se utilizó una $X_d = 5$ y $Y_d = 3$, y para este caso se utilizaron las condiciones iniciales y constantes siguientes:

$$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (3, -1.5, 0, 0.01), (x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (-2, 0, \frac{\pi}{4}, 0.01), (x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (4, 2, \pi, 0.01), (x_4(0), y_4(0), \theta_4(0), \xi_4(0)) = (2, -2, \pi, 0.01), (x_5(0), y_5(0), \theta_5(0), \xi_5(0)) = (3, 0, \frac{\pi}{3}, 0.01), c_{11} = c_{21} = 0.3, c_{12} = c_{22} = 3, \delta_{12x} = \delta_{13x} = \delta_{14x} = \delta_{15x} = 50, \delta_{12y} = \delta_{13y} =$$

$\delta_{14y} = \delta_{15y} = 50$, $r_{21} = r_{31} = r_{41} = r_{51} = r_{12} = r_{32} = r_{42} = r_{52} = r_{13} = r_{23} = r_{43} = r_{53} = r_{14} = r_{24} = r_{34} = r_{54} = r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45} = 10$, $m = 0.5$, $r = 0.0205$, $p = 0.08841$, con $(X_d, Y_d) = (6, 3)$.

Distancias esperadas para la formación de los cinco robots en V o flock:

$$\Delta_{12x} = -1, \Delta_{13x} = -2, \Delta_{14x} = -1, \Delta_{15x} = -2, \Delta_{12y} = 1, \Delta_{13y} = 2, \Delta_{14y} = -1, \Delta_{15y} = -2.$$

De los resultados numéricos obtenidos, en la figura 49 se observan como los robots convergen a las distancias propuestas, por lo que existirá una separación entre éstos en las posiciones “x” y “y” como se muestra en la figura 50. En la figura 51 se muestran las entradas para cada una de las llantas. En la figura 52 se tiene el movimiento de los robots en el plano x-y. En las figuras 53 y 54 se observa como los robots siguen al robot maestro (rojo) en su trayectoria por alcanzar el punto deseado $X_d = 6$, $Y_d = 3$ (marcado con un cuadrado), respetando el umbral de distancia propuesto. En la evolución de la simulación, es posible observar como los robots convergen a las distancias esperadas entre éstos, logrando una formación en “flock” o en forma de “v”, evitando las posibles colisiones que pudiesen darse.

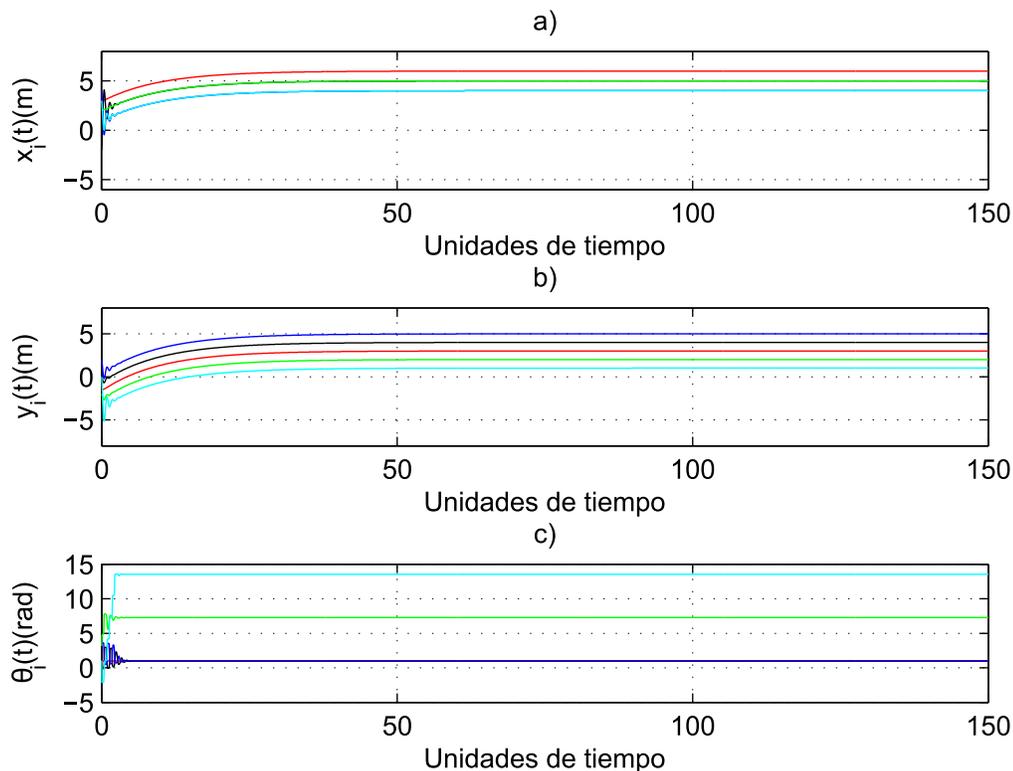


Figura 49: Trayectorias dinámicas para formación: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$.

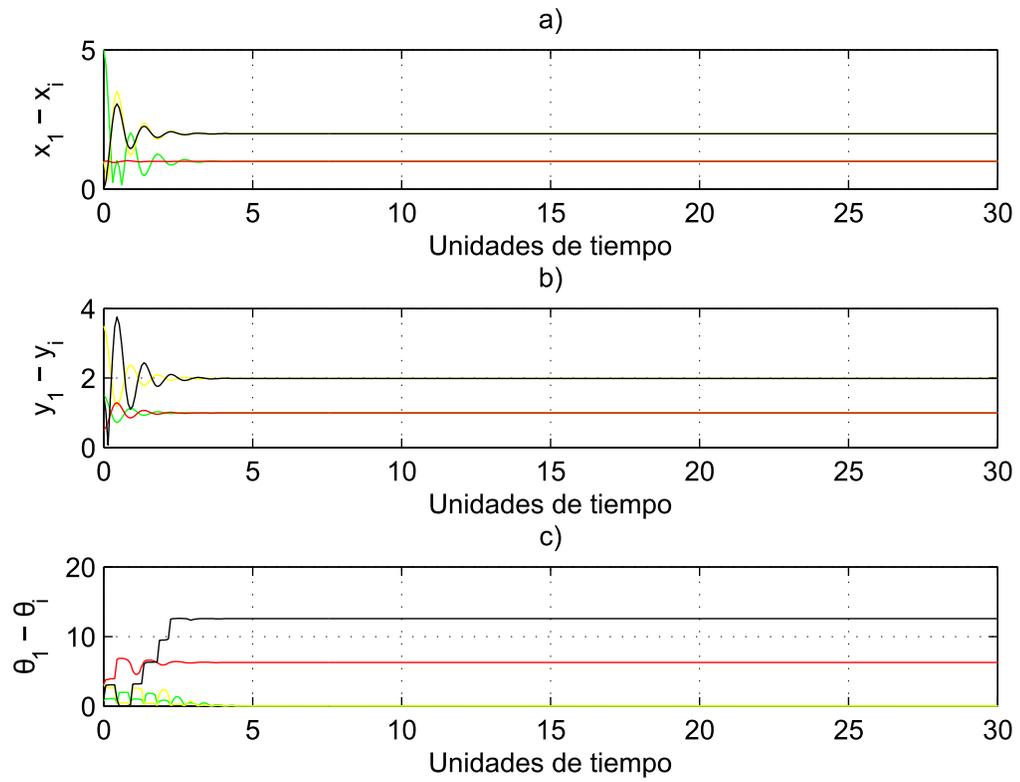


Figura 50: Dinámicas del error para formación: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$.

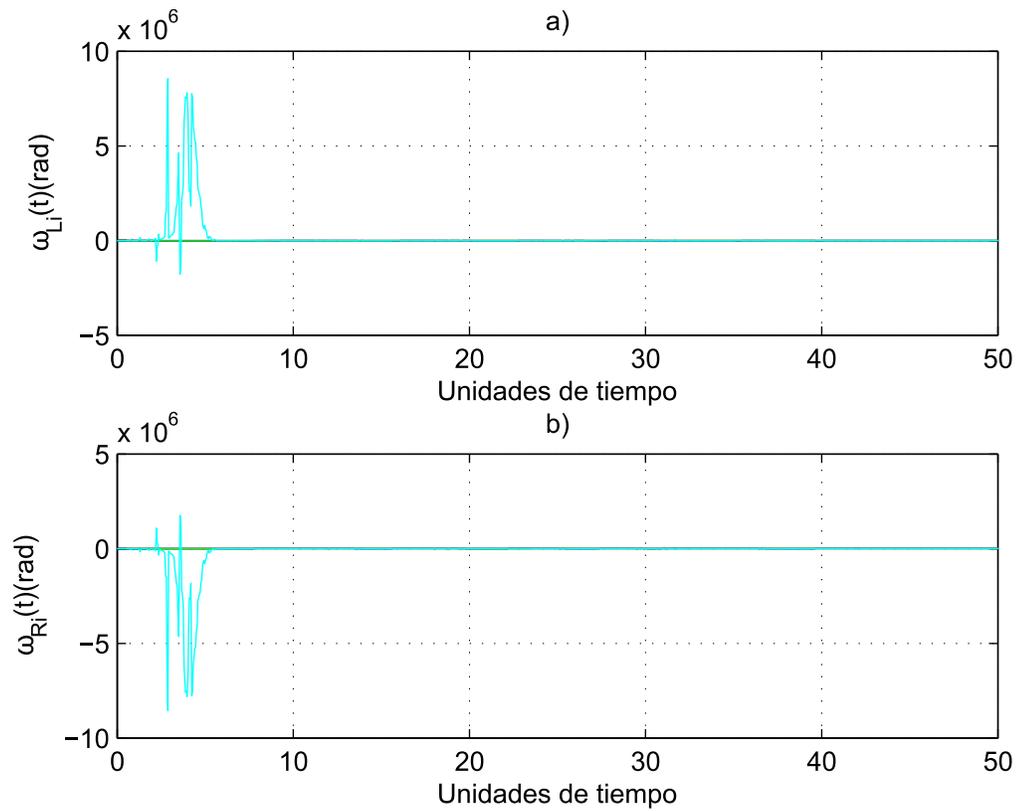


Figura 51: Entradas para formación: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$.

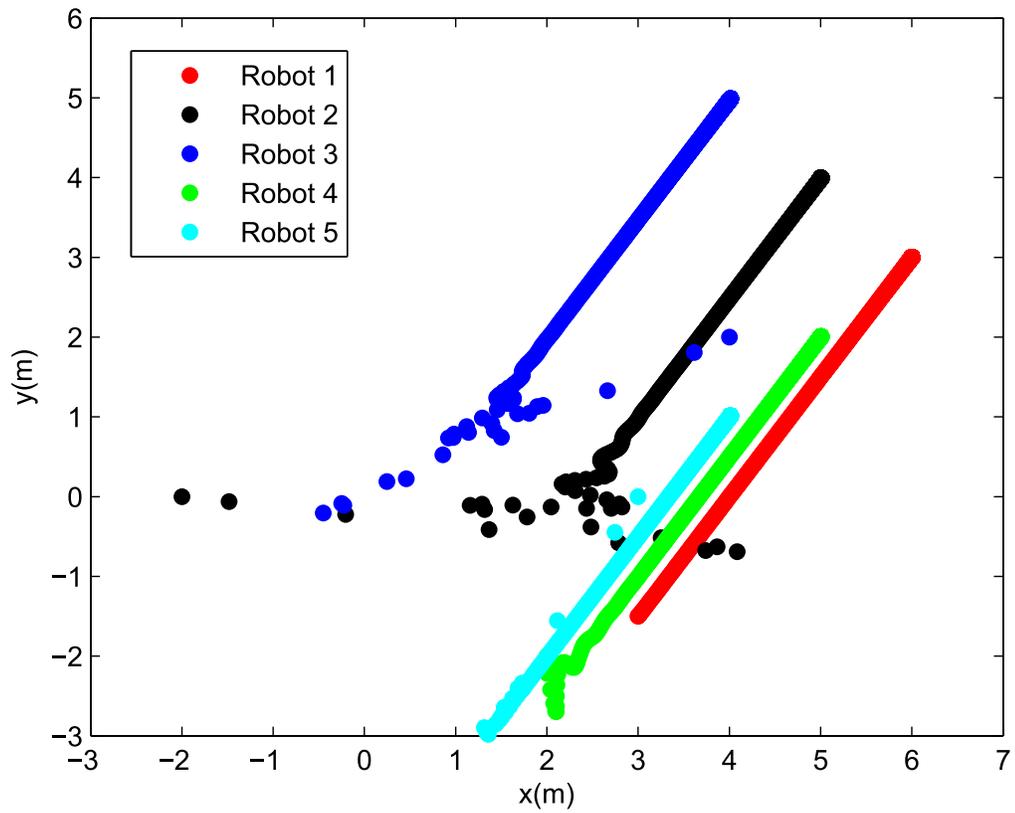


Figura 52: Movimiento de los robots en el plano x-y.

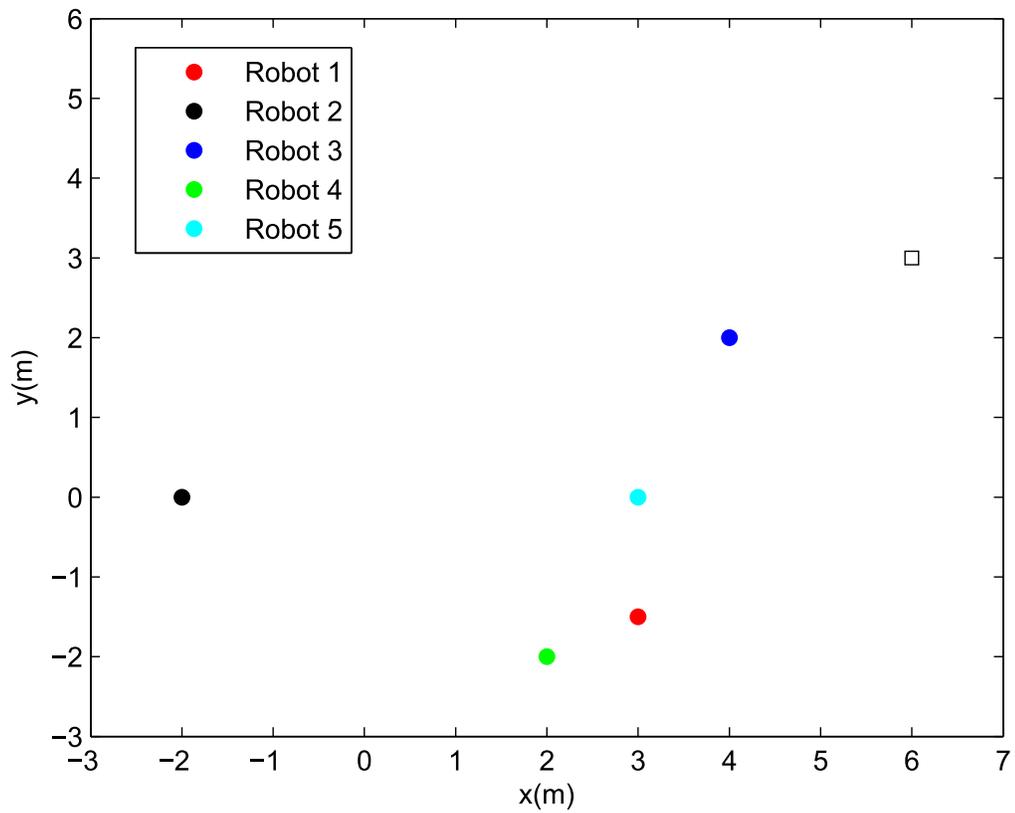


Figura 53: Posición inicial del grupo robots y posición final deseada.

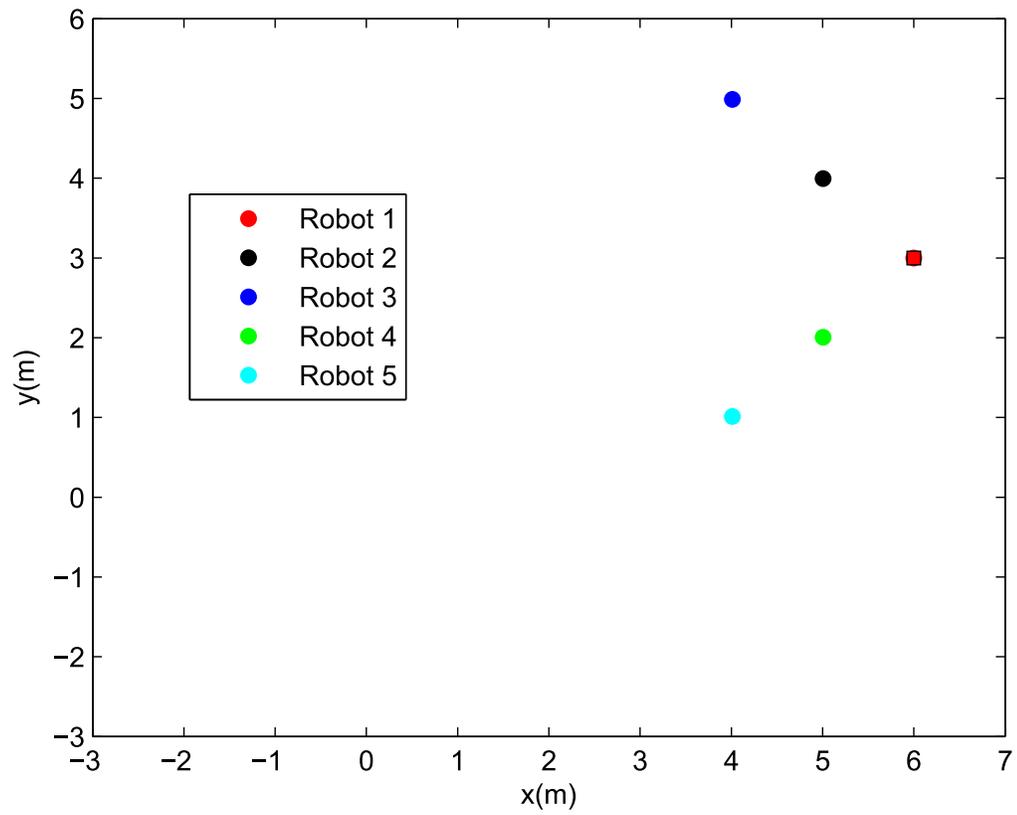


Figura 54: Posición final del grupo de robots, formación en "V".

5.3.2 Ruta circular

Como se mostró en la sección anterior, el grupo de robots móviles es capaz de ir a un punto deseado siguiendo a un nodo maestro y quedar formados. En las simulaciones siguientes se le dará una ruta deseada en forma circular al robot maestro, esto da la posibilidad de aplicaciones como búsqueda y patrullaje. Las ecuaciones de las entradas están descritas en (94)-(98), mientras que los parámetros y condiciones iniciales son:

$$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (3, -1.5, 0, 0.01), (x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (-2, 0, \frac{\pi}{4}, 0.01), (x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (4, 2, \pi, 0.01), (x_4(0), y_4(0), \theta_4(0), \xi_4(0)) = (2, -2, \pi, 0.01), (x_5(0), y_5(0), \theta_5(0), \xi_5(0)) = (3, 0, \frac{\pi}{3}, 0.01), c_{11} = c_{21} = 0.3, c_{12} = c_{22} = 3, \delta_{12x} = \delta_{13x} = \delta_{14x} = \delta_{15x} = 50, \delta_{12y} = \delta_{13y} = \delta_{14y} = \delta_{15y} = 50, r_{21} = r_{31} = r_{41} = r_{51} = r_{12} = r_{32} = r_{42} = r_{52} = r_{13} = r_{23} = r_{43} = r_{53} = r_{14} = r_{24} = r_{34} = r_{54} = r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45} = 10, m = 0.5, r = 0.0205, p = 0.08841, \text{ con } (X_d, Y_d) = (4\text{sen}(\frac{t}{10}), 4\text{sen}(\frac{t}{20})).$$

En este caso se cambiará la formación deseada por una en forma cuadrada, y para este caso, las distancias esperadas son como se describen a continuación:

$$\Delta_{12x} = -1, \Delta_{13x} = 1, \Delta_{14x} = -1, \Delta_{15x} = 1, \Delta_{12y} = 1, \Delta_{13y} = 1, \Delta_{14y} = -1, \Delta_{15y} = -1.$$

Los resultados numéricos obtenidos se reportan a continuación. En la figura 55 se observa como los robots convergen a las distancias propuestas, por lo que existirá una separación entre éstos en las posiciones “x” y “y” como se tiene en la figura 56. En la figura 57 se muestran las entradas para cada una de las ruedas. En la figura 58 se tiene el movimiento de los robots en el plano x-y. En las figuras 59 y 60 se observa como los robots siguen al robot maestro (rojo) en su trayectoria circular, respetando el umbral de distancia propuesto. En la evolución de la simulación es posible observar como los robots tienen a las distancias esperadas entre éstos llegando a una formación cuadrada, evitando las posibles colisiones que pudiesen presentarse.

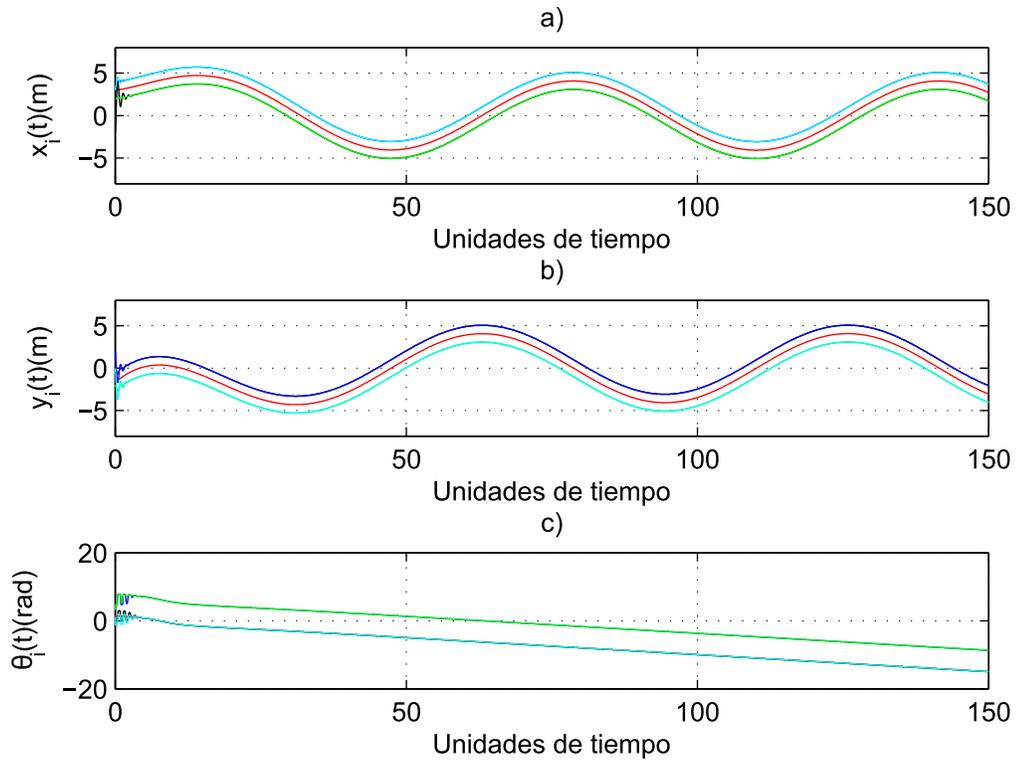


Figura 55: Trayectorias dinámicas para formación: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$.

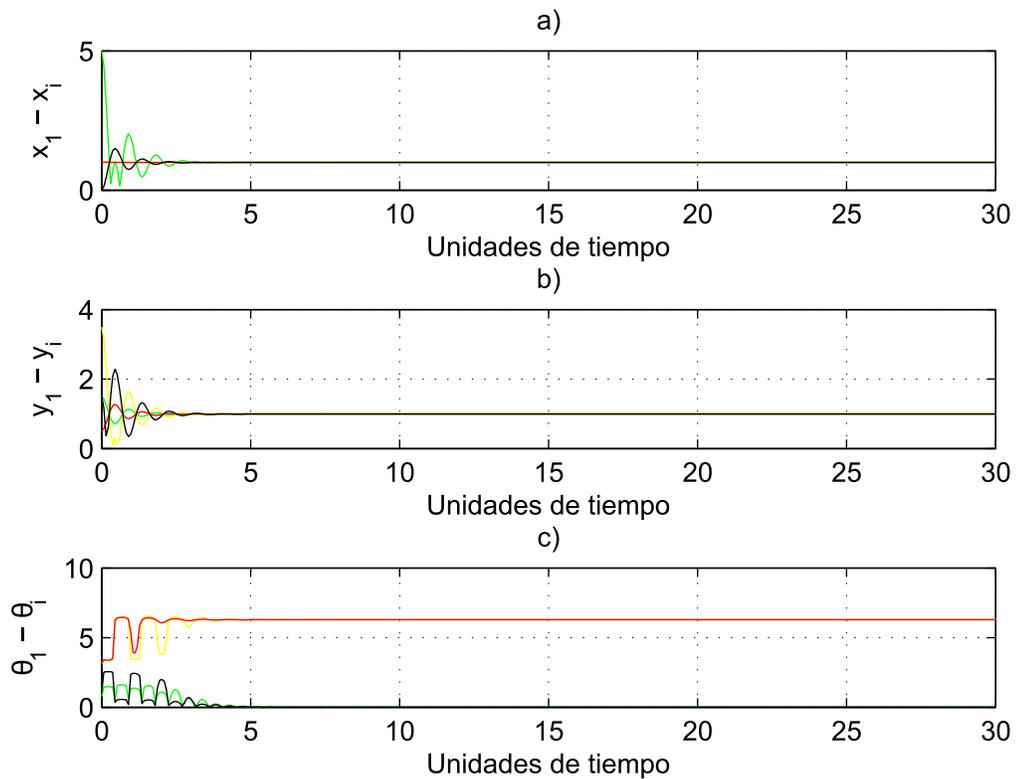


Figura 56: Dinámicas del error para formación: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$.

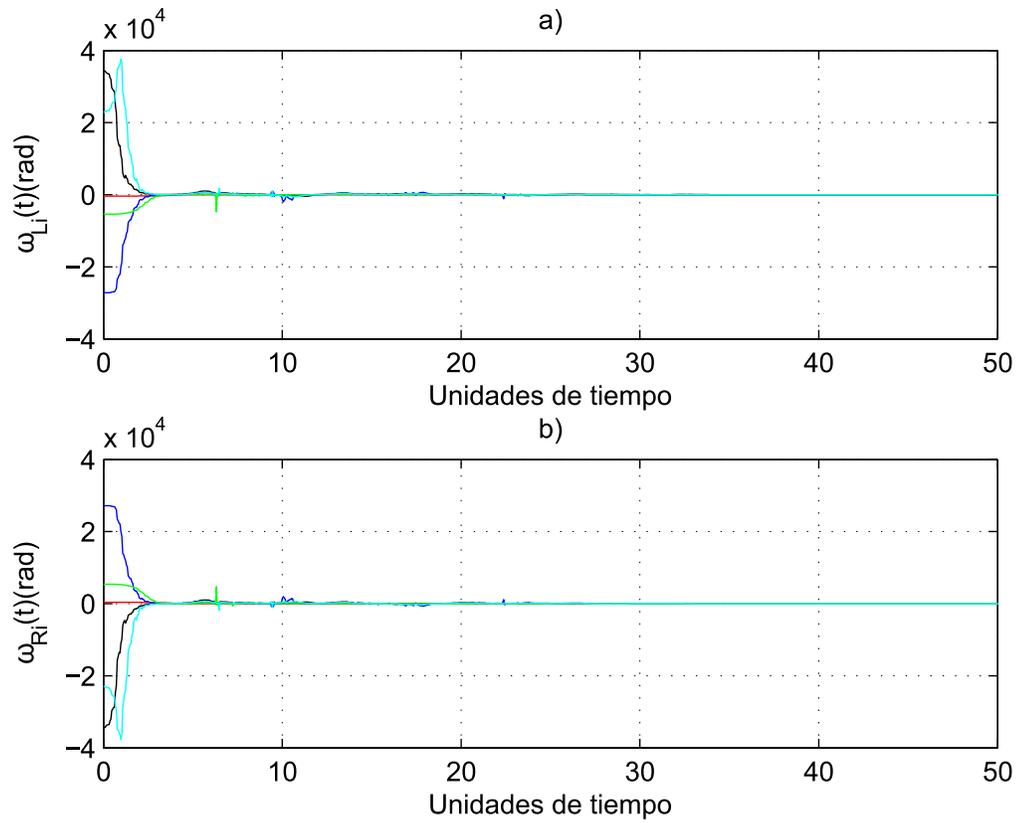


Figura 57: Entradas para formación: a) ω_{L_i} y b) ω_{R_i} , con $i = 1, 2, \dots, 5$.

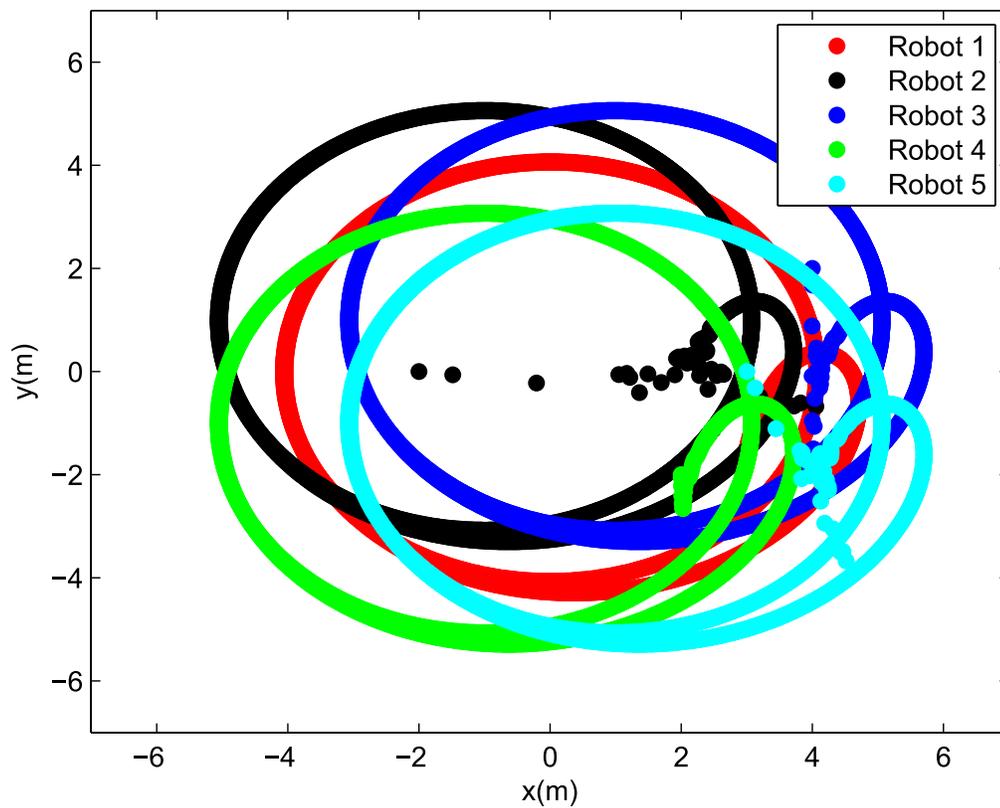


Figura 58: Movimiento de los robots en el plano x-y.

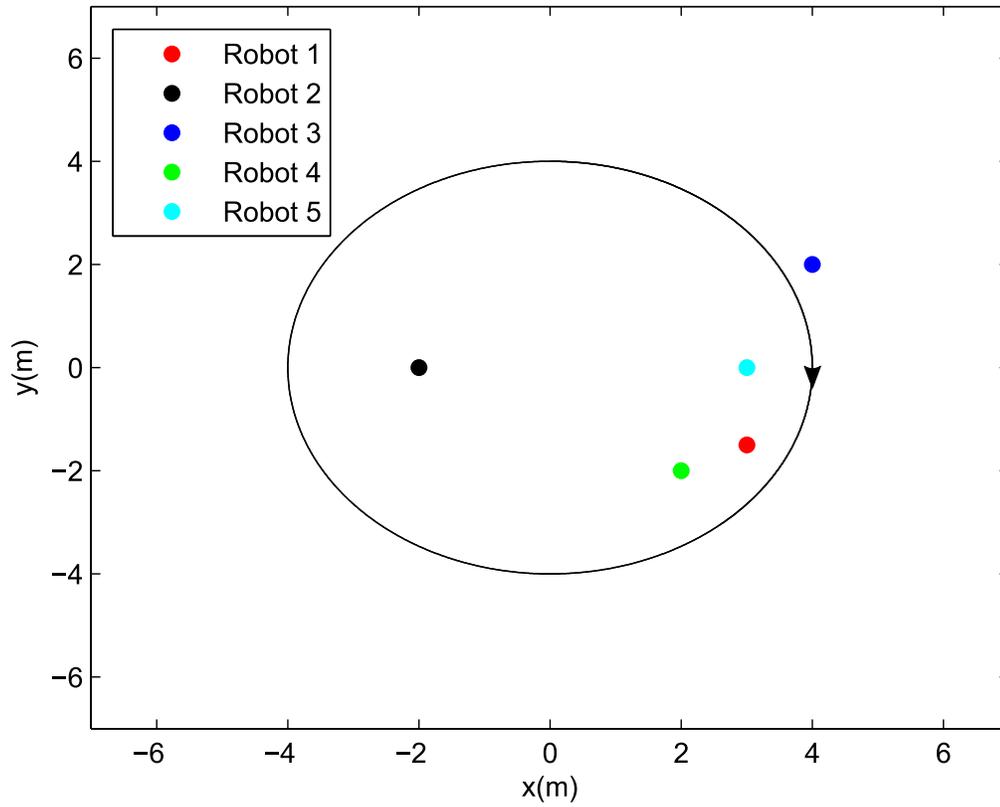


Figura 59: Posición inicial del grupo de robots.

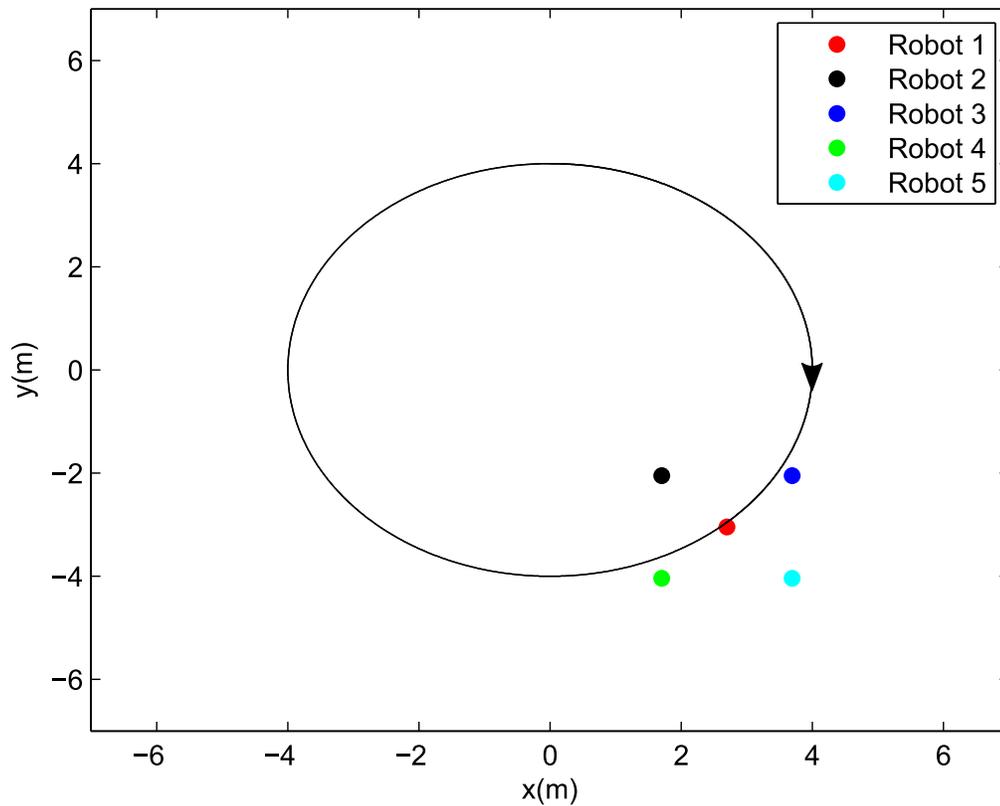


Figura 60: Posición final del grupo de robots siguiendo la ruta deseada.

5.4 Límites de velocidad

5.4.1 Cálculo de los límites de velocidad

Las simulaciones anteriores fueron de utilidad para analizar las topologías de conexión en los grupos, los tiempos de sincronización y el funcionamiento del controlador, sin embargo, las entradas que estas simulaciones arrojan, no son posibles de implementar físicamente en algún robot. De acuerdo al manual (Lambercy y Bureau, 2007) el robot móvil Khepera III tiene una velocidad lineal máxima alcanzable de $V_{max} = 0.196 \frac{m}{s}$ y una mínima de $V_{min} = 0.009 \frac{m}{s}$ (note que esto es en ambos sentidos, es decir, tanto hacia enfrente como hacia atrás). De acuerdo a las ecuaciones (18) y (19) existe una relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular de la siguiente manera,

$$\omega_{L,R} = \frac{V_{L,R}}{\rho}. \quad (99)$$

Por lo que la velocidad angular máxima alcanzable por el robot será,

$$\omega_{L,R}max = \frac{0.196 \frac{m}{s}}{0.0205m} = 9.56 \frac{rad}{s}. \quad (100)$$

Mientras que la velocidad angular mínima es,

$$\omega_{L,R}min = \frac{0.009 \frac{m}{s}}{0.0205m} = 0.43 \frac{rad}{s}. \quad (101)$$

Para acotar los valores en la simulación se tomaron en cuenta las siguientes consideraciones:

- Si el valor de la entrada ($\omega_{L,R}$) es mayor al valor máximo de velocidad angular ($\omega_{L,R}max$), éste se acotará al valor máximo, es decir, $\omega_{L,R}sat = \omega_{L,R}max$.
- Si el valor de la entrada ($\omega_{L,R}$) está en el rango entre el valor mínimo ($\omega_{L,R}min$) y el valor máximo ($\omega_{L,R}max$), éste quedará igual, es decir, $\omega_{L,R}sat = \omega_{L,R}$.
- Si el valor de entrada ($\omega_{L,R}$) se encuentra entre cero y el valor mínimo ($\omega_{L,R}min$), éste se acotará al valor mínimo, es decir, $\omega_{L,R}sat = \omega_{L,R}min$.

Esto puede expresarse matemáticamente como

$$\omega_{L,R}sat = sat_{lim}(\omega_{L,R}), \quad (102)$$

donde la función saturación (ver figura 61) sat_{lim} está definida como sigue,

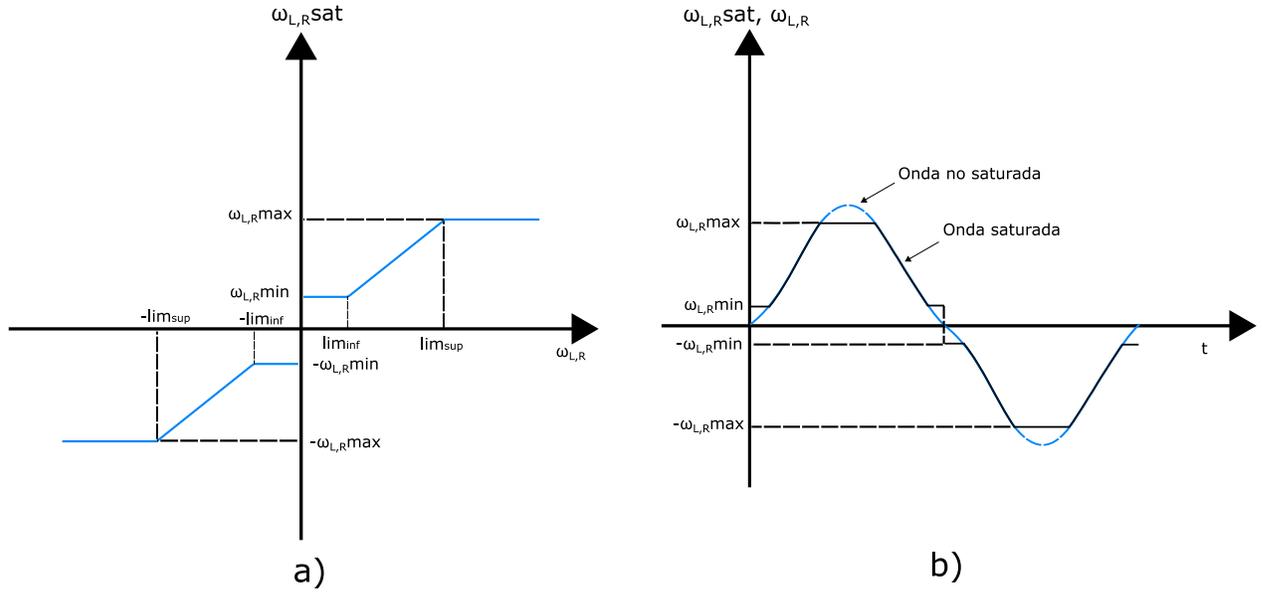


Figura 61: a) Función saturación, b) Ejemplo del recorte de onda de la función saturación.

$$sat_{lim}(\omega_{L,R}) = \begin{cases} \omega_{L,R}max, & \text{si } \omega_{L,R} \geq \omega_{L,R}max, \\ \omega_{L,R}, & \text{si } \omega_{L,R}min < \omega_{L,R} < \omega_{L,R}max, \\ \omega_{L,R}min, & \text{si } 0 \leq \omega_{L,R} \leq \omega_{L,R}min, \\ -\omega_{L,R}min, & \text{si } 0 > \omega_{L,R} \geq -\omega_{L,R}min, \\ -\omega_{L,R}, & \text{si } -\omega_{L,R}min > \omega_{L,R} > -\omega_{L,R}max, \\ -\omega_{L,R}max, & \text{si } \omega_{L,R} \leq -\omega_{L,R}max. \end{cases} \quad (103)$$

5.5 Simulación con valores reales

Para las simulaciones con valores reales, las ecuaciones que describen el movimiento del robot i ($i = 1, 2, \dots, 5$) son descritas en (60), mientras que las ecuaciones de cada entrada están descritas en (94)-(98). En este caso será usada una ruta con forma circular. Los parámetros y condiciones iniciales son las siguientes:

$$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (3, -1.5, 0, 0.01), (x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (2.5, 0, \frac{\pi}{4}, 0.01), (x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (3.5, 0, \pi, 0.01), (x_4(0), y_4(0), \theta_4(0), \xi_4(0)) = (2.5, -2, \frac{\pi}{3}, 0.01), (x_5(0), y_5(0), \theta_5(0), \xi_5(0)) = (3, 0, \frac{\pi}{3}, 0.01), c_{11} = c_{21} = 0.28, c_{12} = c_{22} = 3, \delta_{12x} = \delta_{13x} = \delta_{14x} = \delta_{15x} = 50, \delta_{12y} = \delta_{13y} = \delta_{14y} = \delta_{15y} = 6, r_{21} = r_{31} = r_{41} = r_{51} = r_{12} = r_{32} = r_{42} = r_{52} = r_{13} = r_{23} = r_{43} = r_{53} = r_{14} = r_{24} = r_{34} = r_{54} = r_{15} = r_{25} = r_{35} = r_{45} = 10, m = 0.15, r = 0.0205, p = 0.08841, \text{ con } (X_d, Y_d) = (1.5\text{sen}(\frac{t}{10}), 1.5\text{cos}(\frac{t}{10})).$$

En esta simulación se cambiará la formación deseada por una en forma de línea. Para alcanzar este objetivo las distancias esperadas se especifican a continuación:

$$\Delta_{12x} = -0.4, \Delta_{13x} = -0.2, \Delta_{14x} = 0.4, \Delta_{15x} = 0.2, \Delta_{12y} = 0, \Delta_{13y} = 0, \Delta_{14y} = -0, \Delta_{15y} = 0.$$

Usando los límites de velocidades determinados en la sección anterior, los resultados numéricos obtenidos fueron los siguientes: En la figura 62 se observa como los robots tienden a las distancias propuestas, por lo que existirá una separación entre éstos en las posiciones “x” y “y” como se tiene en la figura 63, sin embargo, es posible notar que en esta ocasión no llegan exactamente a las distancias planteadas y tardan más tiempo que en las simulaciones sin límites de velocidad. En la figura 64 se tienen las entradas para cada una de las ruedas con los límites de velocidad planteados y se observa que es una señal de alta frecuencia debido a las saturaciones que produce el controlador, mientras que en la figura 65 se tiene el movimiento de los robots en el plano x-y. En las figuras 66 y 67 se observa como los robots siguen al robot maestro (rojo) en su trayectoria circular con una formación en cadena. En la evolución de la simulación es posible observar como los robots tienden a las distancias esperadas entre éstos (con cierto error) llegando a una formación en cadena, evitando las posibles colisiones que pudiesen darse. En estas simulaciones con valores de velocidad reales se puede concluir que existe un compromiso entre qué tan bien se quiere que se siga la ruta, la precisión de la formación en cuanto a las distancias esperadas y la entrada. Es importante sintonizar los parámetros para obtener una respuesta en la que se tenga una salida satisfactoria, según a lo que se desee dar prioridad.

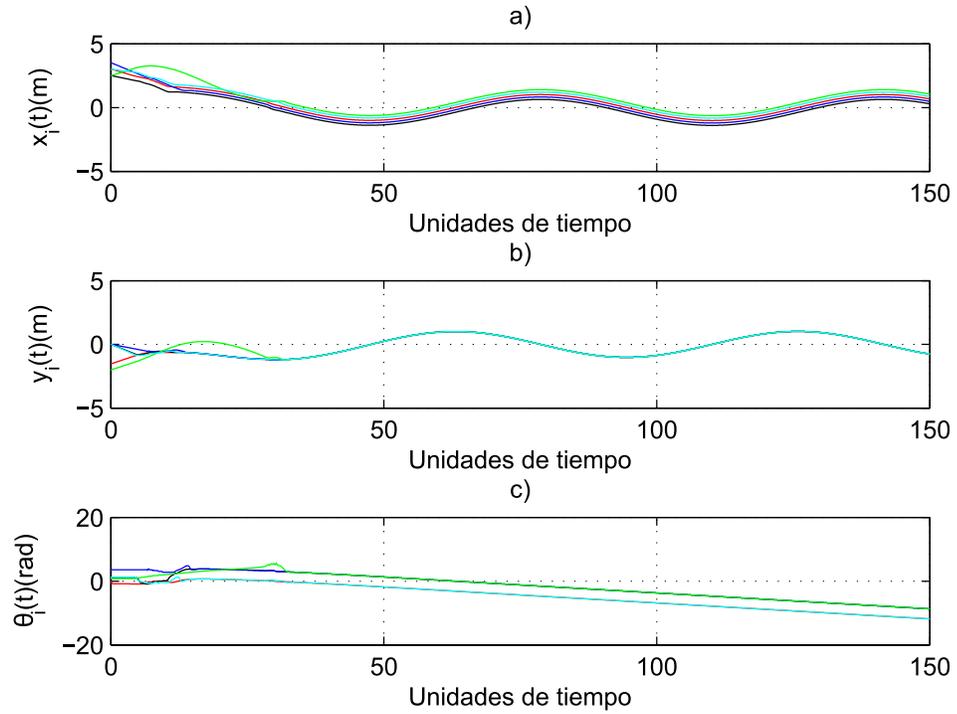


Figura 62: Trayectorias dinámicas para formación: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, \dots, 5$.

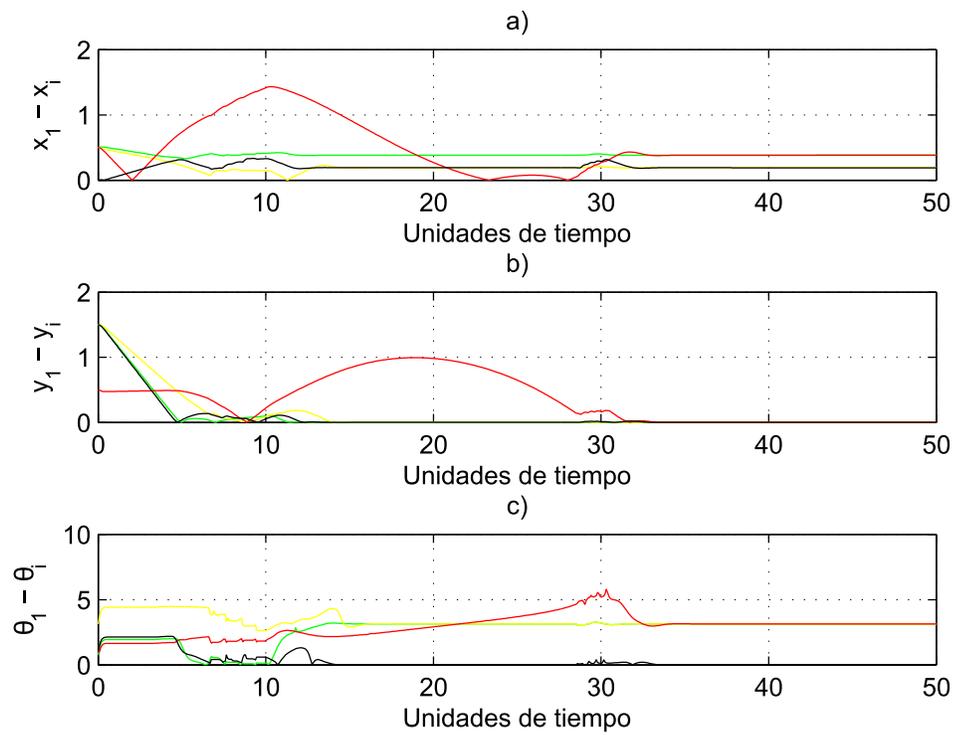


Figura 63: Dinámicas del error para formación: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3, 4, 5$.

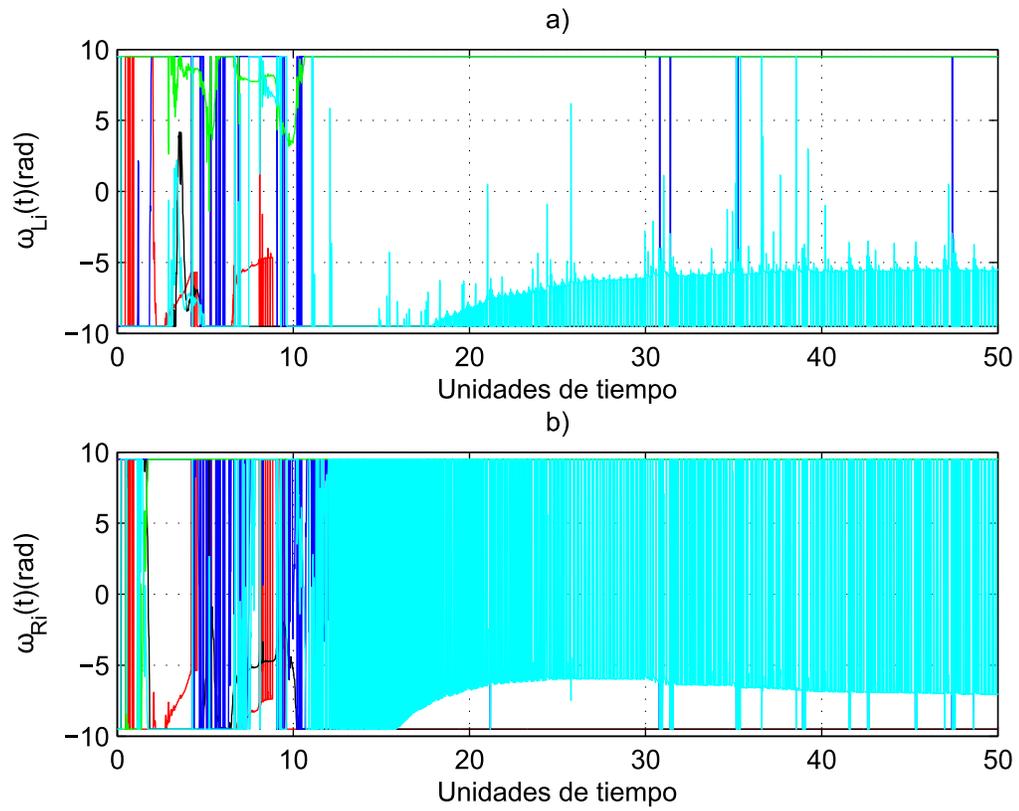


Figura 64: Entradas para formación: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, \dots, 5$.

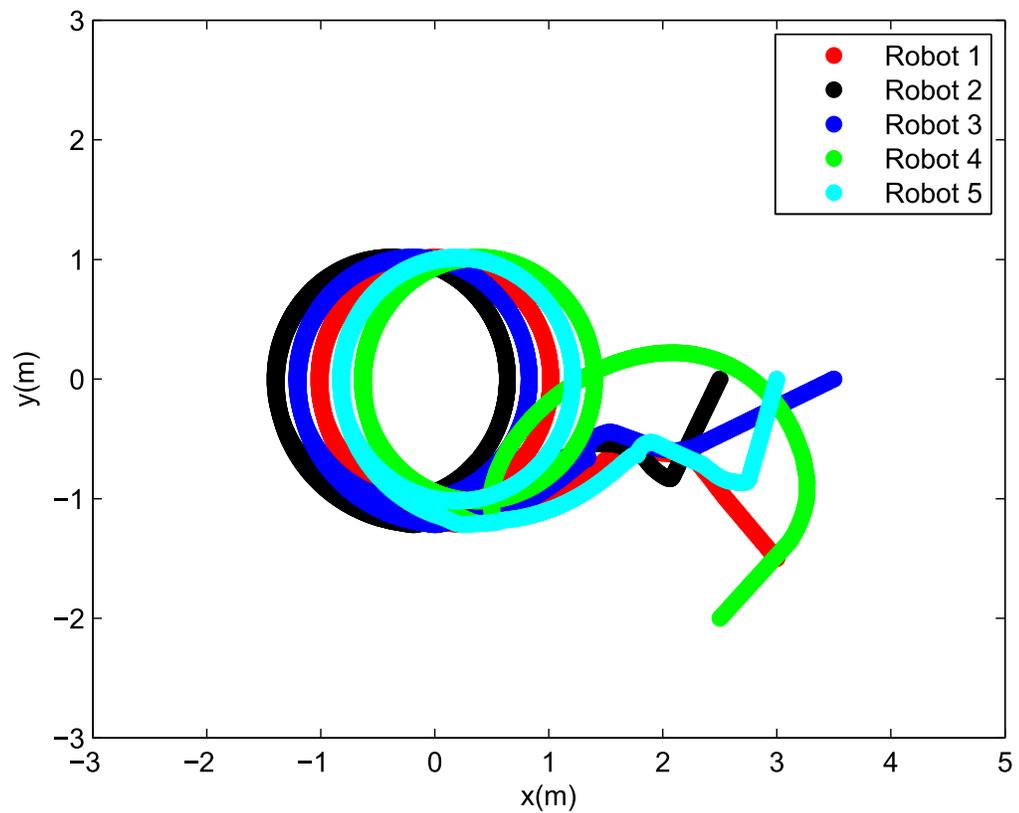


Figura 65: Movimiento del grupo de robots en el plano x-y.

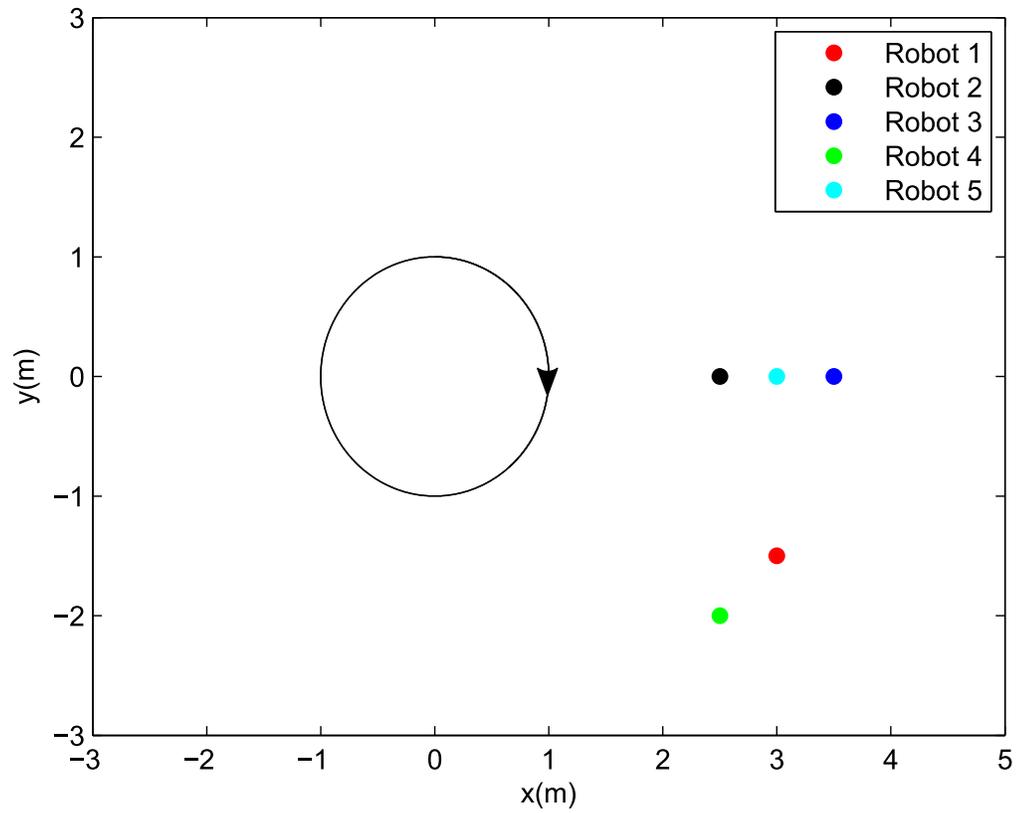


Figura 66: Posición inicial de los robots.

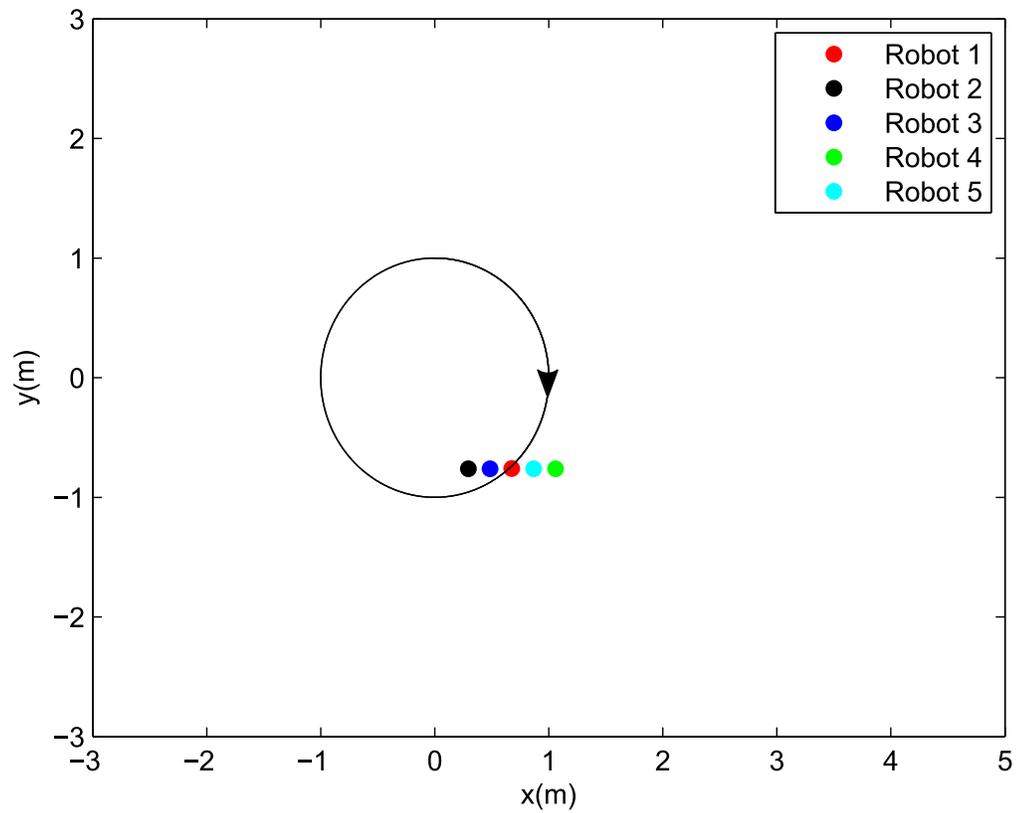


Figura 67: Posición final del grupo de robots siguiendo la ruta deseada.

Conclusiones del capítulo

A través de los resultados numéricos expuestos en este capítulo, se puede concluir que en el modelo linealizado es posible implementar el controlador de formación. Con el estudio y análisis de la formación de grupos de robots se puede deducir que es posible lograr varios objetivos de control cambiando las rutas y formaciones deseadas. En las simulaciones con valores reales de velocidad, se tiene un compromiso entre seguir la ruta deseada, tener precisión en las distancias esperadas y las entradas. Es importante tener en cuenta la aplicación, para darle prioridad a alguno de éstos.

Capítulo 6. Experimentos

En este capítulo se describe la metodología empleada para realizar los experimentos, así como la descripción del equipo de laboratorio utilizado y los cálculos necesarios para la implementación, además se analizan los resultados experimentales del comportamiento colectivo de formación con un grupo de robots móviles tipo Khepera III.

6.1 Equipo de laboratorio y herramientas utilizadas en los experimentos

Para la implementación de los experimentos se utilizaron cámaras, una computadora, un router, los robots Khepera III (habilitados con tarjeta wifi) e infraestructura disponible en el laboratorio de sincronización y sistemas complejos del departamento de Electrónica y Telecomunicaciones del CICESE.

6.1.1 Robot móvil diferencial Khepera III

El robot móvil Khepera III tiene un mecanismo diferencial, basado en dos ruedas independientes con un mismo eje de rotación. La estabilidad del robot se completa con un soporte que rota en todas las direcciones. En la parte experimental se hará uso de este robot para validar los resultados obtenidos numéricamente. La figura 68 muestra una vista general del robot.

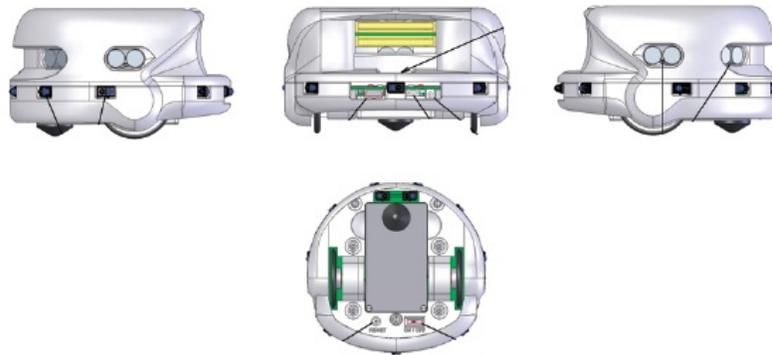


Figura 68: Vista general del robot Khepera III. Fuente: Lambercy y Bureau (2007).

6.1.2 Cámaras Optitrack

Con el fin de realizar el censado de la posición y ángulo de orientación de cada robot, se utilizaron ocho cámaras Flex 13. Cada una de estas cámaras tiene la capacidad de tomar un máximo de 120 fotos por segundo con 1.3 megapíxeles, cuenta con 56 grados de campo de visión

y un error (según la calibración) de hasta 0.5mm en objetos en movimiento (Optitrack, 2012). Para la detección de objetos, se utilizaron diferentes patrones de marcas reflejantes en la parte superior de cada robot móvil como se observa en la figura 69. La información censada por las cámaras se obtiene en la computadora vía cable USB, se procesa y se envía inalámbricamente por medio de un módem a otros dispositivos.



Figura 69: Marcas reflejantes colocadas en los robots para detección de posición.

6.1.3 Comunicación TCP/IP

TCP/IP es un conjunto de protocolos. TCP/IP significa “Protocolo de control de transmisión o protocolo de Internet”. Proviene de los nombres de dos protocolos importantes del conjunto de protocolos, es decir, del protocolo TCP y del protocolo IP. TCP/IP representa todas las reglas de comunicación para Internet y se basa en la noción de dirección IP, es decir, en la idea de brindar una dirección IP a cada equipo de la red para poder enrutar paquetes de datos. Para distribuir la información entre la computadora y los robots se utilizan tarjetas de red wifi, implementando un protocolo TCP/IP. Cada uno de los componentes de la red (computadora y grupo de robots) tiene asignado un IP único que los identifica. La computadora se encarga de realizar los cálculos del controlador simulando una topología en estrella dirigida y envía los resultados del algoritmo a cada robot de manera secuencial a través de un módem inalámbrico.

6.2 Cálculo del ángulo de orientación

El software de las cámaras crea un punto medio en el patrón de marcas reflejantes de cada robot como se observa en la figura 70. Es posible obtener la posición de cada una de las marcas que posee cada robot. Utilizando esta información se calcula la pendiente del vector que va desde la marca del punto medio del patrón a la marca frontal del robot. De esta forma es posible calcular el ángulo de orientación como sigue:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (104)$$

$$\theta = \tan^{-1}(m). \quad (105)$$

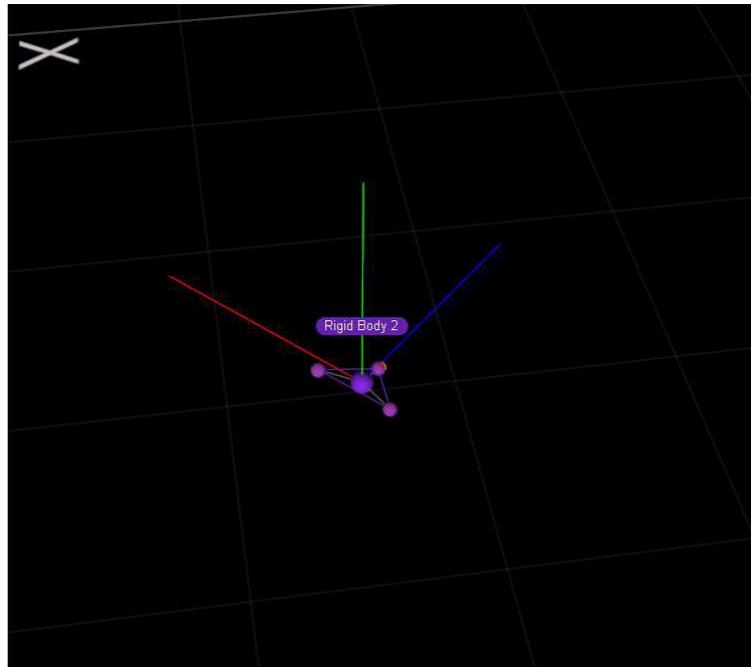


Figura 70: Robot en el software Motive.

6.3 Experimentos

6.3.1 Metodología para realizar los experimentos

A partir del análisis de los resultados numéricos reportados en Matlab en capítulos previos, se optó por implementar los siguientes experimentos en una topología estrella dirigida utilizando tres robots móviles tipo Khepera III. El diagrama a bloques de los experimentos se puede observar en la figura 71. El sensado de posición lo hacen ocho cámaras Flex 3 instaladas en el laboratorio configuradas para tomar 30 fotos por segundo, con lo que se obtiene una posición “ x ”, “ y ” y un ángulo de orientación θ de cada uno de los robots. Esta información es utilizada por el algoritmo propuesto implementado en Matlab donde se encuentra el controlador de formación, calculando una velocidad V_L y V_R para cada uno de los agentes. Las velocidades son enviadas inalámbricamente a los robots y éstos se encargan de implementarlas. El algoritmo que utiliza Matlab se describe a continuación:

- Se da como entrada la posición “ x ”, “ y ” de cada robot del grupo.
- Se calcula el ángulo θ a partir de las posiciones y los marcadores frontales de cada robot.
- Se calcula la velocidad adquirida en el eje “ x ” y el eje “ y ” con el ángulo de inclinación.
- Se implementa el controlador utilizando la posición “ x ”, “ y ”, el ángulo θ y las velocidades calculadas, obteniendo las velocidades de cada rueda para cada uno de los robots.
- Se envían las velocidades a cada robot del grupo inalámbricamente utilizando comunicación TCP/IP.

El proceso desde obtener las posiciones de las cámaras hasta enviar los cambios de velocidades a los robots toma aproximadamente 0.09s.

6.3.2 Punto deseado

En el experimento que se presenta a continuación se conectaron tres robots móviles tipo Khepera III, conectados con topología en estrella dirigida como se observa en la figura 72, es decir, se cuenta con un grupo conformado por un robot maestro $R1$ y dos robots esclavos $R2$ y $R3$. Se tiene como objetivo de control alcanzar el punto deseado dado por las coordenadas $X_d = -0.3$ $Y_d = 0$, llegar a una formación en forma de “V” o “flock” y evitar colisiones manteniendo un radio

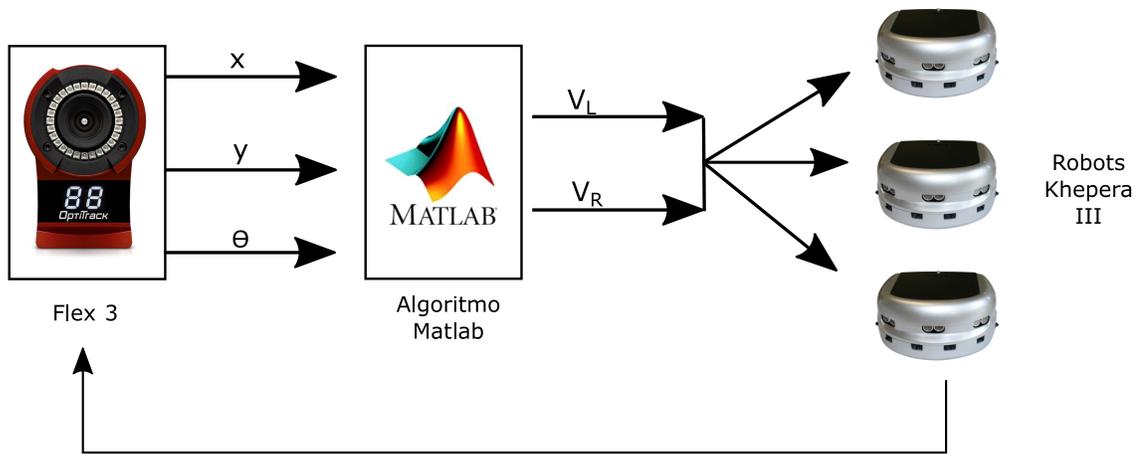


Figura 71: Diagrama a bloques para la realización de los experimentos.

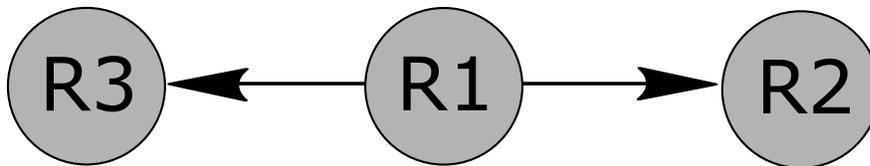


Figura 72: Topología utilizada en los experimentos.

de separación de $0.3m$. Para el experimento se utilizaron condiciones iniciales arbitrarias y las siguientes constantes:

$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (-0.4568, 0.7102, 5.8814, 0.005)$, $(x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (-0.4064, -0.6331, 1.0696, 0.005)$, $(x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (0.2982, 0.9044, 4.2111, 0.005)$, $c_{11} = c_{21} = 0.5$, $c_{12} = c_{22} = 3$, $\delta_{12x} = \delta_{13x} = 1.5$, $\delta_{12y} = \delta_{13y} = 1.5$, $r_{21} = r_{31} = r_{12} = r_{32} = r_{13} = r_{23} = 1.3$, $m = 0.3$, $r = 0.0205$, $p = 0.08841$, con $(X_d, Y_d) = (-0.3, 0)$.

Las distancias esperadas para la formación en "V" o "flock" se establecen como sigue:

$\Delta_{12x} = 0.8$, $\Delta_{13x} = 0.8$, $\Delta_{12y} = -0.8$, $\Delta_{13y} = 0.8$.

Las ecuaciones que describen el movimiento del robot i ($i = 1, 2, 3$) están descritas en (60),

mientras que las ecuaciones de cada entrada son:

$$R_1 \begin{cases} u_{11} = c_{12}(\dot{x}_d - \dot{x}_1) + c_{11}(x_d - x_1) - r_{12}\text{sign}(x_2 - x_1) - r_{13}\text{sign}(x_3 - x_1), \\ u_{12} = c_{22}(\dot{y}_d - \dot{y}_1) + c_{21}(y_d - y_1) - r_{12}\text{sign}(y_2 - y_1) - r_{13}\text{sign}(y_3 - y_1), \end{cases} \quad (106)$$

$$R_2 \begin{cases} u_{21} = c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_{11}(x_1 - x_2) + \delta_{12x}(x_1 - x_2 + \Delta_{12x}) - r_{21}\text{sign}(x_1 - x_2) \\ - r_{23}\text{sign}(x_3 - x_2), \\ u_{22} = c_{22}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + c_{21}(y_1 - y_2) + \delta_{12y}(y_1 - y_2 + \Delta_{12y}) - r_{21}\text{sign}(y_1 - y_2) \\ - r_{23}\text{sign}(y_3 - y_2), \end{cases} \quad (107)$$

$$R_3 \begin{cases} u_{31} = c_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + c_{11}(x_1 - x_3) + \delta_{13x}(x_1 - x_3 + \Delta_{13x}) - r_{31}\text{sign}(x_1 - x_3) \\ - r_{32}\text{sign}(x_2 - x_3), \\ u_{32} = c_{22}(\dot{y}_1 - \dot{y}_3) + c_{21}(y_1 - y_3) + \delta_{13y}(y_1 - y_3 + \Delta_{13y}) - r_{31}\text{sign}(y_1 - y_3) \\ - r_{32}\text{sign}(y_2 - y_3). \end{cases} \quad (108)$$

Los resultados obtenidos en el experimento se describen a continuación. En la figura 73 se observa como los robots tienden a las distancias propuestas en un tiempo de aproximadamente 20 segundos, por lo que existirá una separación entre éstos en las posiciones “x” y “y” como se tiene en la figura 74, sin embargo, es posible notar que en esta ocasión no llegan exactamente a las distancias planteadas. En la figura 75 se presentan las entradas para cada una de las ruedas donde se observa que la entrada de control sufre saturación debido al límite de velocidad que impusimos. En las figuras 77 y 78 se observa como los robots siguen al robot maestro (rojo) cuando tiende al punto deseado manteniendo un margen de distancia. En la figura 76 se tiene el movimiento que siguieron los robots en el plano x-y. En la evolución del experimento es posible observar como los robots tienden a las distancias esperadas entre ellos (con cierto error) llegando a una formación en flock, evitando las posibles colisiones que pudiesen darse. En este experimento es posible deducir que existe un compromiso entre qué tan bien se quiere que se siga la ruta, la precisión de la formación en cuanto a las distancias esperadas y la saturación de las entradas. Es importante sintonizar los parámetros para obtener una respuesta en la que se tenga una salida satisfactoria, según a lo que se desee dar prioridad.

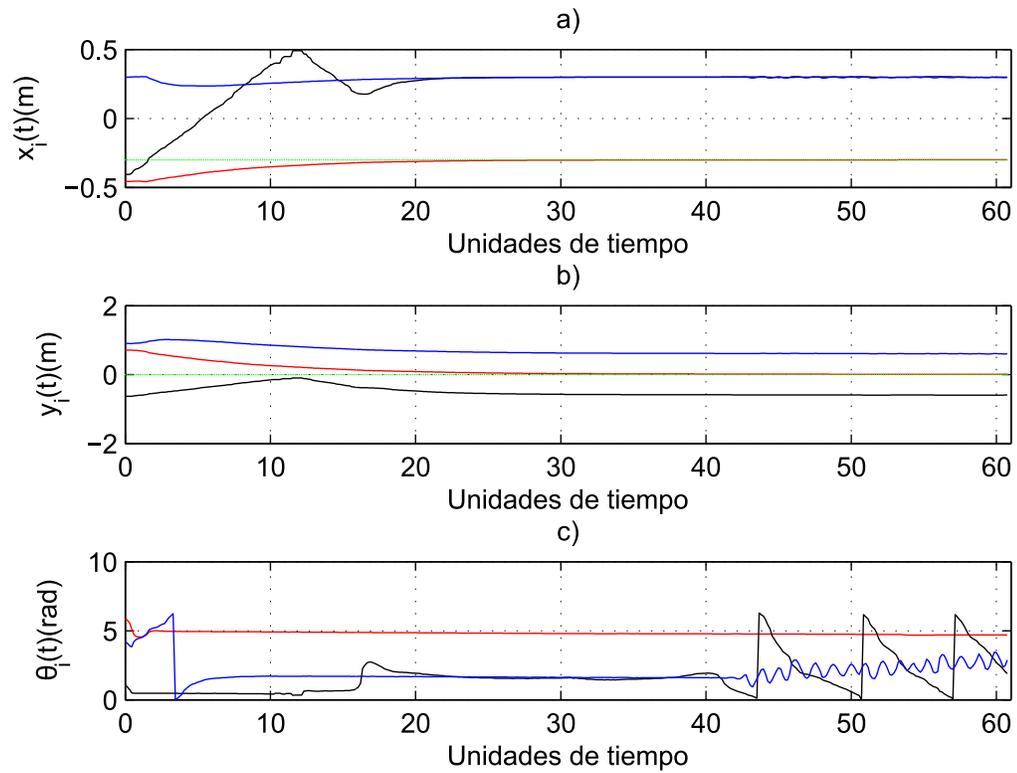


Figura 73: Trayectorias dinámicas para formación: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, 3$.

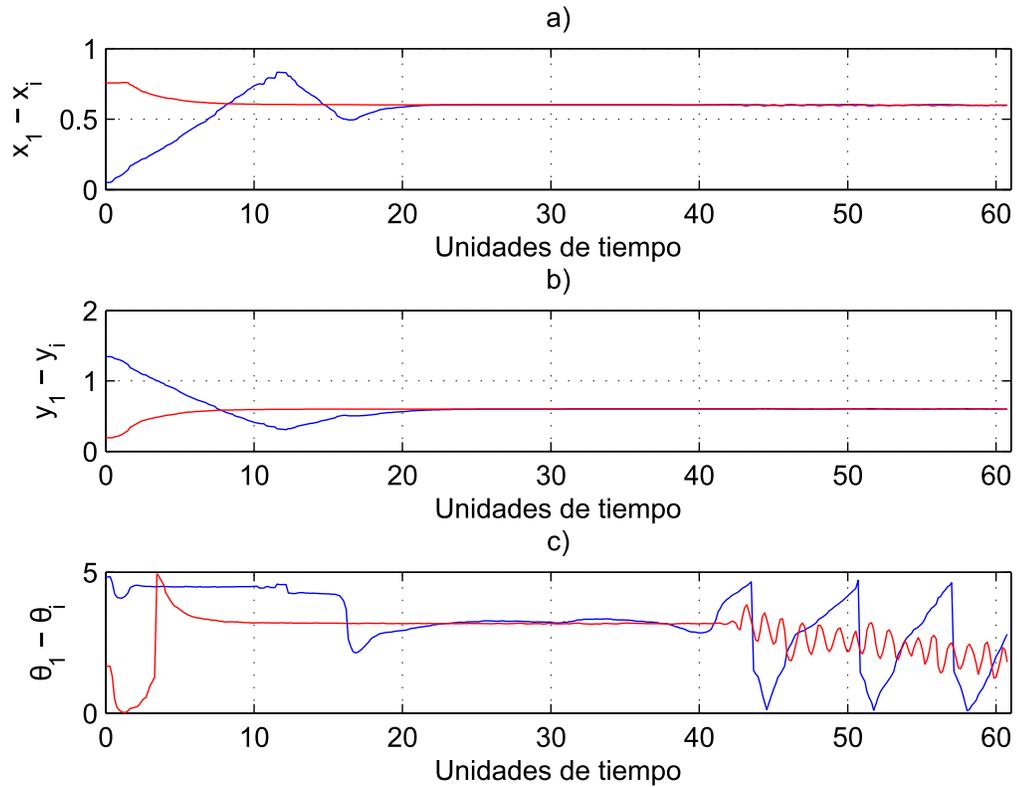


Figura 74: Dinámicas del error para formación: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3$.

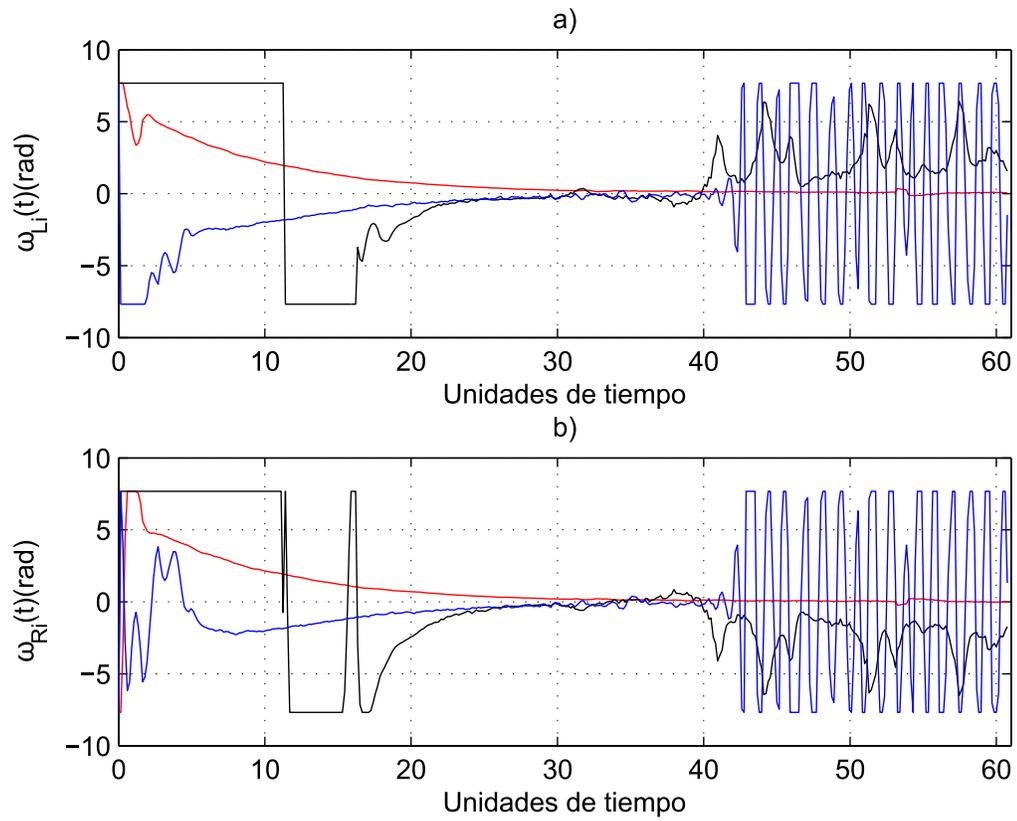


Figura 75: Entradas para formación: a) ω_{L_i} y b) ω_{R_i} , con $i = 1, 2, 3$.

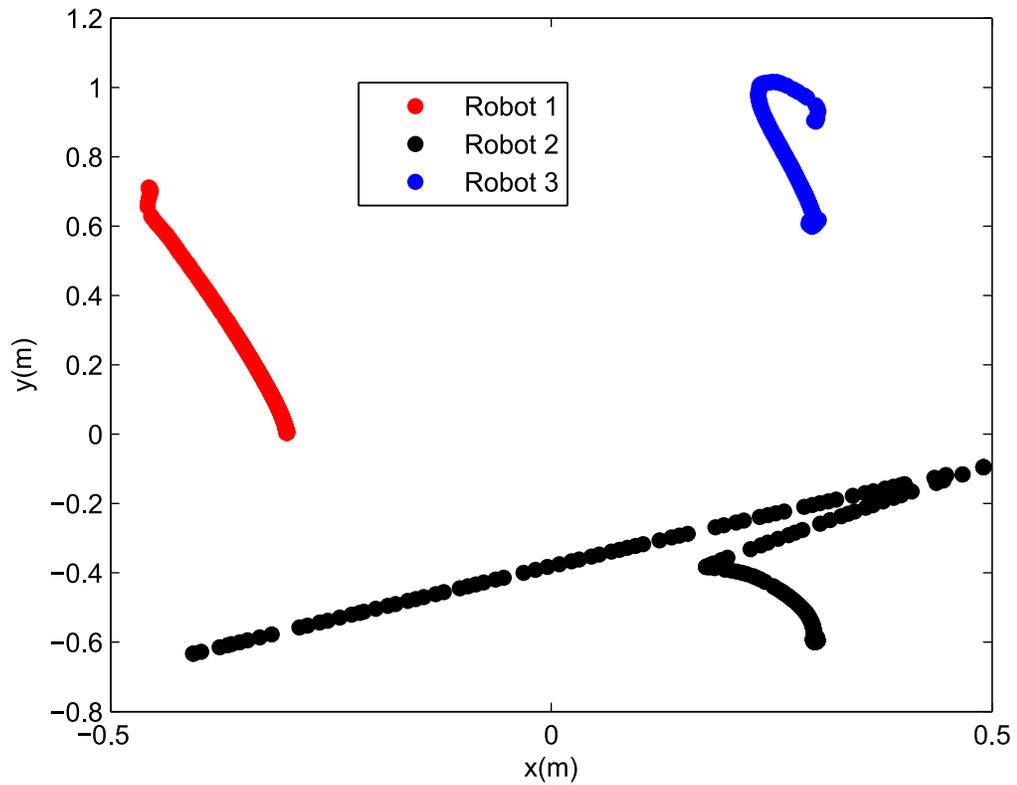


Figura 76: Movimiento realizado por cada robot en el plano x - y .

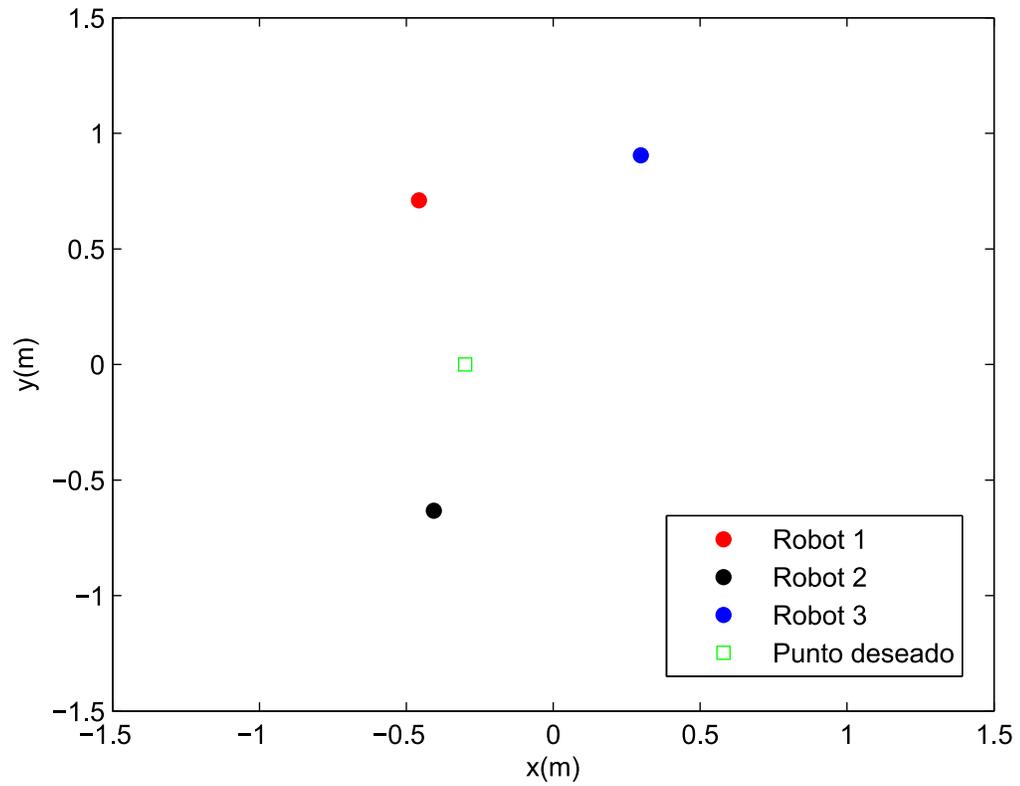


Figura 77: Posición inicial y posición deseada del grupo de robots.

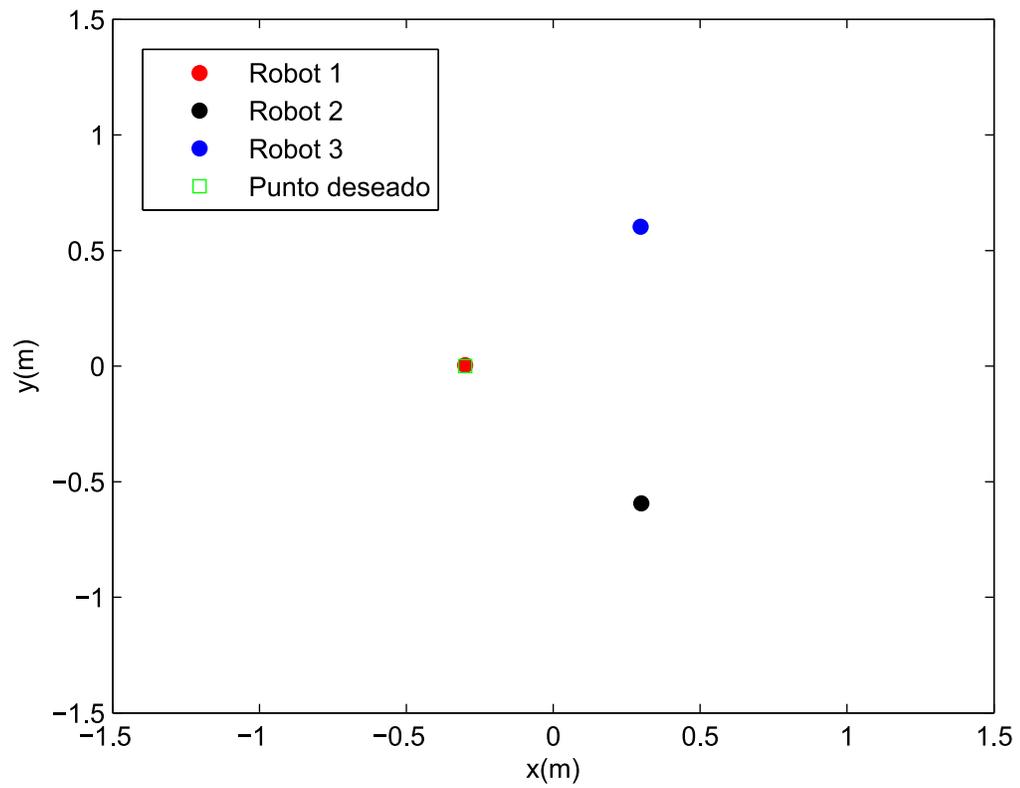


Figura 78: Posición final del grupo de robots en forma de "V" llegando al punto deseado.

6.3.3 Ruta circular

En el experimento que se presenta a continuación se conectaron tres robots en una topología en estrella dirigida como se observa en la figura 72. Se tiene como objetivo de control seguir una trayectoria circular (para el robot maestro $R1$), llegar a una formación en línea y evitar colisiones manteniendo un radio de $0.3m$. Para el experimento se utilizaron condiciones iniciales arbitrarias y las siguientes constantes:

$$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (-0.2079, 0.0282, 0.5232, 0.005), (x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (0.4501, -0.5702, 2.7861, 0.005), (x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (0.3226, 0.8259, 3.4099, 0.005), c_{11} = c_{21} = 1.2, c_{12} = c_{22} = 3.5, \delta_{12x} = \delta_{13x} = 2.5, \delta_{12y} = \delta_{13y} = 2.5, r_{21} = r_{31} = r_{12} = r_{32} = r_{13} = r_{23} = 1.3, m = 0.3, r = 0.0205, p = 0.08841, \text{ con } (X_d, Y_d) = (0.3\text{sen}(\frac{t}{10}), 0.4\text{cos}(\frac{t}{10})).$$

Distancias esperadas para una formación en línea:

$$\Delta_{12x} = 0, \Delta_{13x} = 0, \Delta_{12y} = -0.8, \Delta_{13y} = 0.8.$$

Las ecuaciones que describen el movimiento del robot i ($i = 1, 2, 3$) están descritas en (60), mientras que las entradas se definen en las ecuaciones (106)-(108).

Los resultados obtenidos en el experimento se describen a continuación. En la figura 79 se observa como los robots tienden a las distancias propuestas en “x”, “y”, sin embargo en la gráfica del ángulo se observa que uno de los robots está desfasado 180 grados. Esto es debido a la saturación que se produce al iniciar el controlador, los robots tienden a las posiciones deseadas sin llegar a sincronizar el ángulo de orientación. El error en las posiciones x y y se observa en la figura 80, el error en el ángulo de orientación se tiene en la figura c) donde se pueden ver unos picos en la gráfica. Esto es causado por el desfase que existe en el movimiento de los robots, cuando uno pasa de 2π a 0, el otro robot aún se encuentra antes de 2π por lo que existe un error entre éstos que posteriormente se vuelve cero. En la figura 81 se presentan las entradas para cada una de las ruedas donde se observa saturación al inicio del experimento. En la figura 82 se tiene el movimiento que siguieron los robots en el plano “x”, “y”. En las figuras 83 y 84 se observa como los robots siguen al robot maestro (rojo) cuando tiende a la trayectoria circular. En la evolución del experimento es posible observar como los robots tienden a las distancias esperadas entre éstos (con cierto error) llegando a una formación en línea evitando las posibles colisiones que pudiesen darse y siguiendo una ruta circular como se observa en las figuras 83 y 84. Cabe mencionar que el parámetro que controla la precisión en las distancias propuestas es el parámetro δ . Esta constante controla la prioridad de los robots en cuanto a la formación a la que deben llegar.

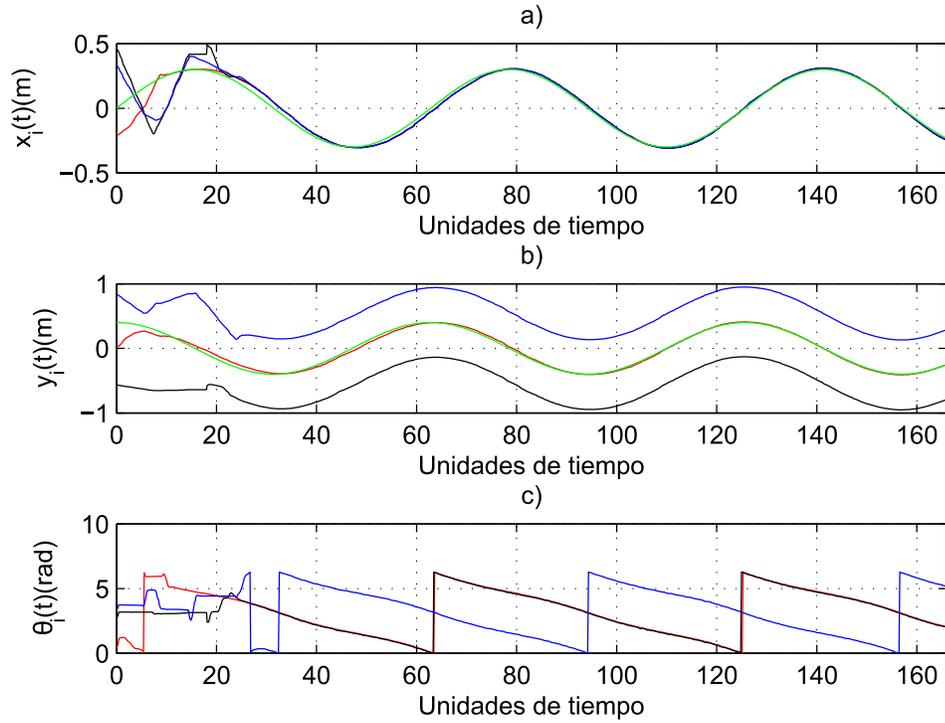


Figura 79: Trayectorias dinámicas para formación: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, 3$.

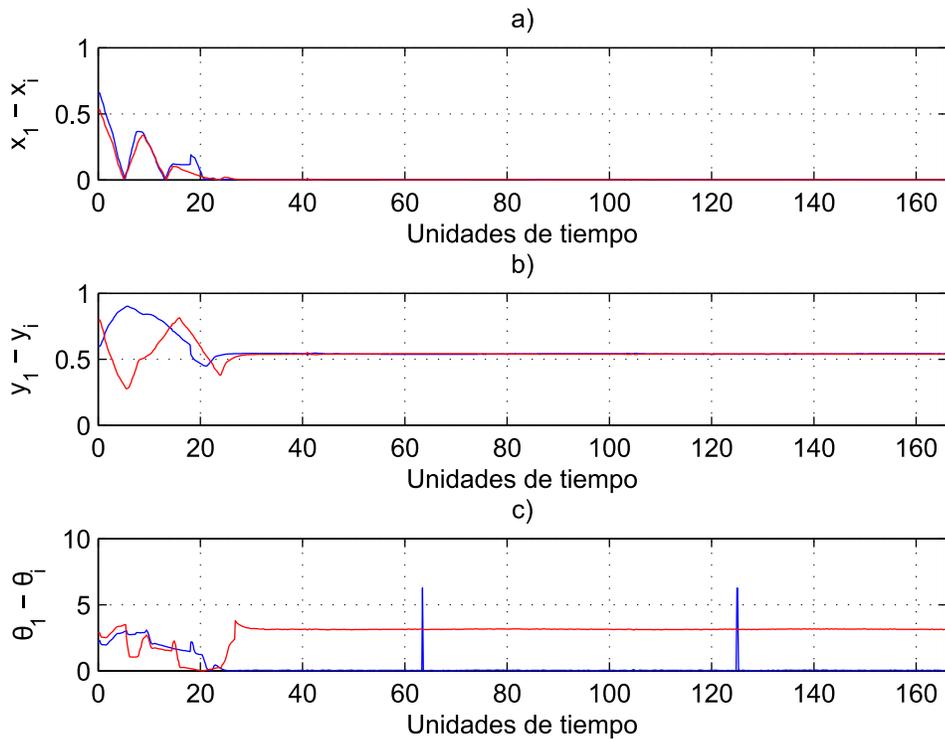


Figura 80: Dinámicas del error para formación: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3$.

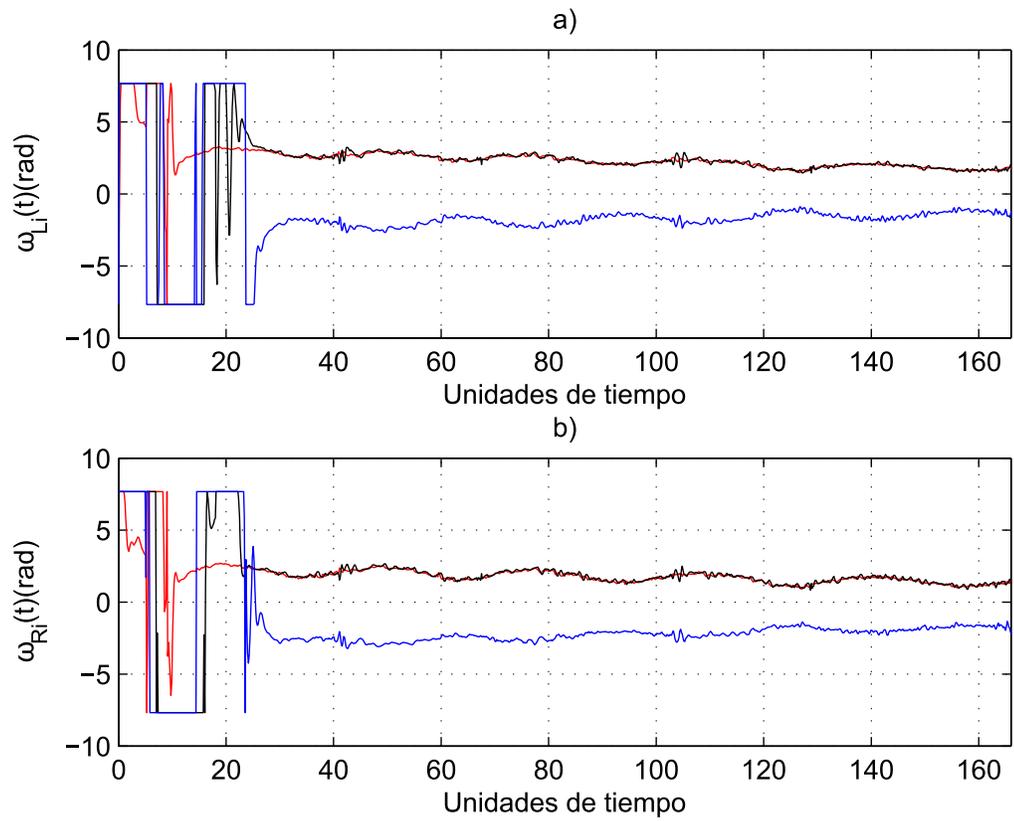


Figura 81: Entradas para formación: a) ω_{Li} y b) ω_{Ri} , con $i = 1, 2, 3$.

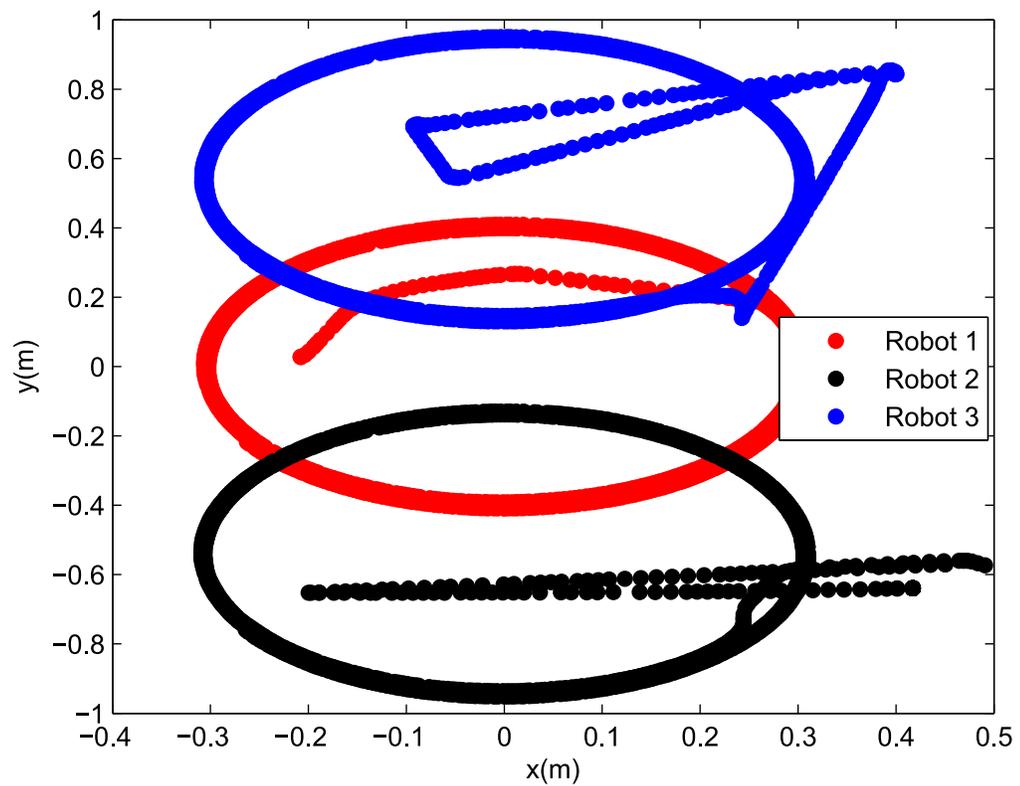


Figura 82: Movimiento realizado por cada robot en el plano x-y.

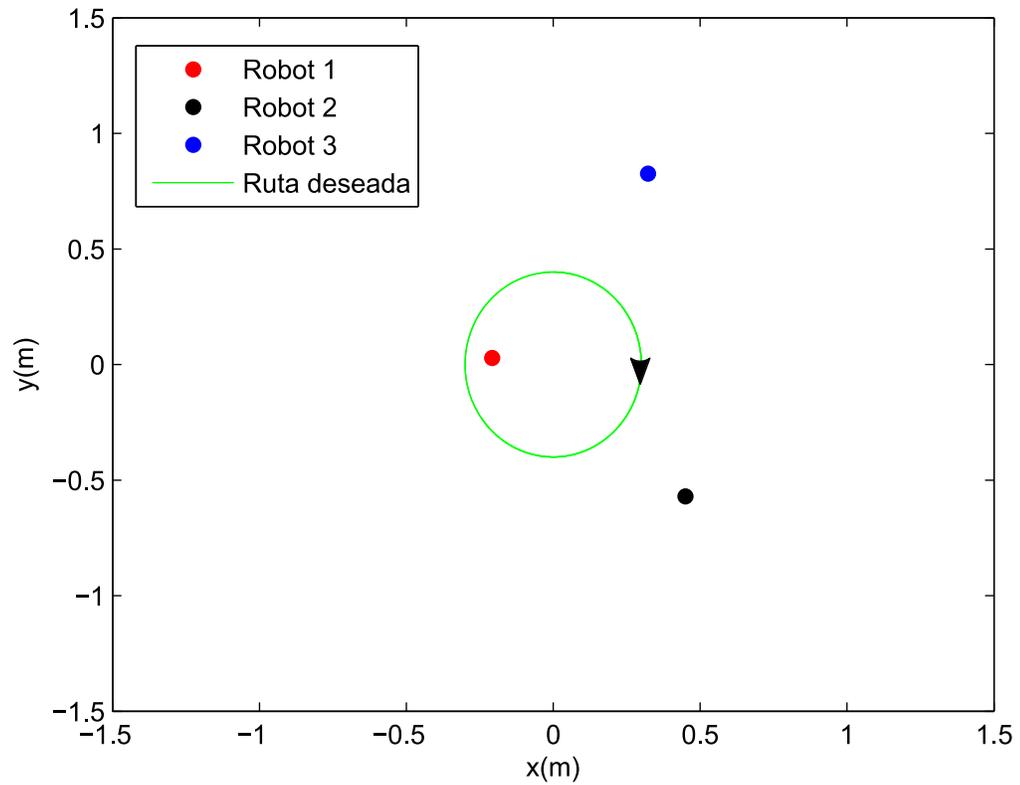


Figura 83: Posición inicial del grupo de robots.

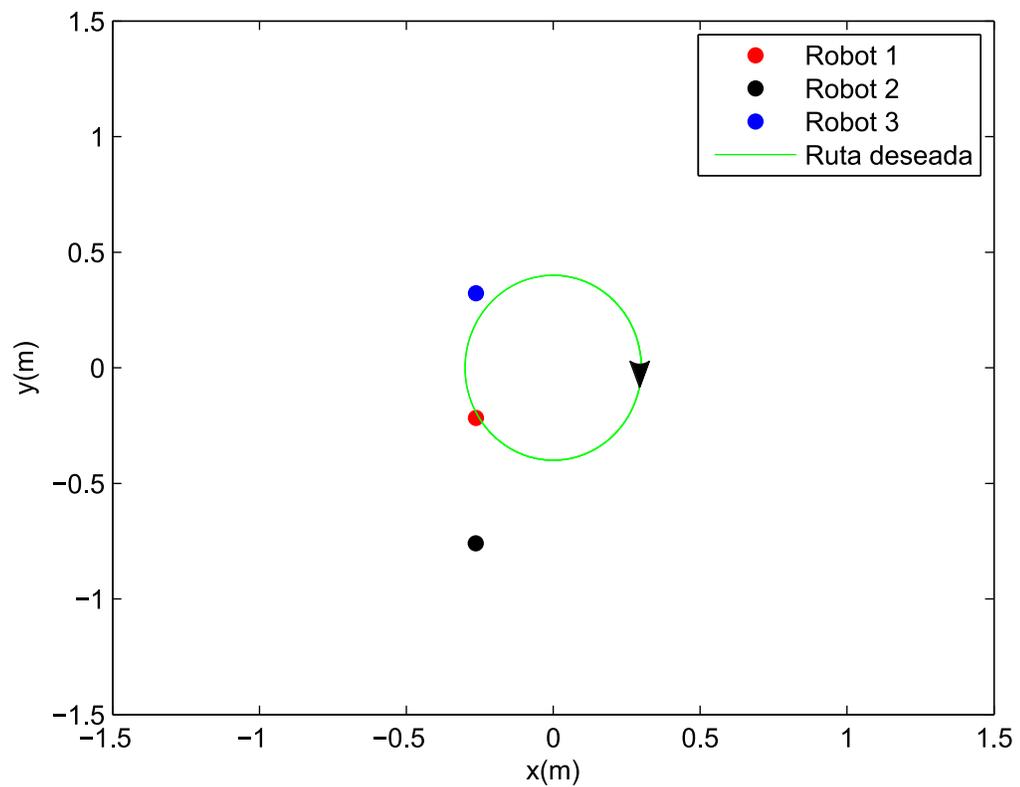


Figura 84: Posición final del grupo de robots formados siguiendo la trayectoria circular.

6.3.4 Ruta de exploración

En el experimento que se presenta a continuación se conectaron tres robots en una topología en estrella dirigida como se observa en la figura 72. Se tiene como objetivo de control seguir una trayectoria que simula una ruta de exploración, llegar a una formación en línea y evitar colisiones manteniendo un radio de $0.3m$. Para el experimento se utilizaron condiciones iniciales arbitrarias y las siguientes constantes:

$$(x_1(0), y_1(0), \theta_1(0), \xi_1(0)) = (-0.5993, 0.2728, 6.2130, 0.005), (x_2(0), y_2(0), \theta_2(0), \xi_2(0)) = (-0.4765, -0.6981, 0.8066, 0.005), (x_3(0), y_3(0), \theta_3(0), \xi_3(0)) = (0.3629, 0.8110, 4.1021, 0.005), c_{11} = c_{21} = 1.2, c_{12} = c_{22} = 3.5, \delta_{12x} = \delta_{13x} = 1.2, \delta_{12y} = \delta_{13y} = 1.2, r_{21} = r_{31} = r_{12} = r_{32} = r_{13} = r_{23} = 0.8, m = 0.3, r = 0.0205, p = 0.08841, \text{ con } (X_d, Y_d) = (0.3\text{sen}(\frac{t}{9}), 0.3\text{sen}(\frac{t}{6})).$$

Distancias esperadas para una formación en línea:

$$\Delta_{12x} = 0, \Delta_{13x} = 0, \Delta_{12y} = -0.8, \Delta_{13y} = 0.8.$$

Las ecuaciones que describen el movimiento del robot i ($i = 1, 2, 3$) están descritas en (60), mientras que las entradas se definen en las ecuaciones (106)-(108).

Los resultados obtenidos en el experimento fueron los siguientes. En la figura 85 se observa como los robots tienden a las distancias propuestas después de unos segundos; en este experimento todos los robots llegan a sincronizar el ángulo de orientación. El error en las posiciones “x” y “y” se tiene en la figura 86, sin embargo, es posible notar que en esta ocasión no llegan exactamente a las distancias planteadas. Para este experimento el parámetro delta δ se bajó a $\delta = 1.2$ debido a que si la constante es muy alta se tienen transitorios durante más tiempo y éstos no permitían a los robots moverse sin chocar con la mesa. Los picos que se observan en la figura del ángulo de orientación c) son a causa del desfase de movimiento que existe entre los robots. El robot maestro siempre gira primero y cuando éste da una vuelta completa (al pasar de 2π a cero) los demás robots aún se encuentran antes de 2π , por lo que se produce un pico en el error, que posteriormente se va a cero. En la figura 87 se presentan las entradas para cada una de las ruedas. En las figuras 89 y 90 se observa como los robots siguen al robot maestro (rojo) mientras siguen la trayectoria propuesta. En la figura 88 se tiene el movimiento que siguieron los robots en el plano “x”, “y”. En la evolución del experimento es posible observar como los robots tienden a las distancias esperadas entre éstos (con cierto error) llegando a una formación en línea evitando las posibles colisiones que pudiesen darse y siguiendo la ruta de exploración propuesta como se observa en las figuras 89 y 90.

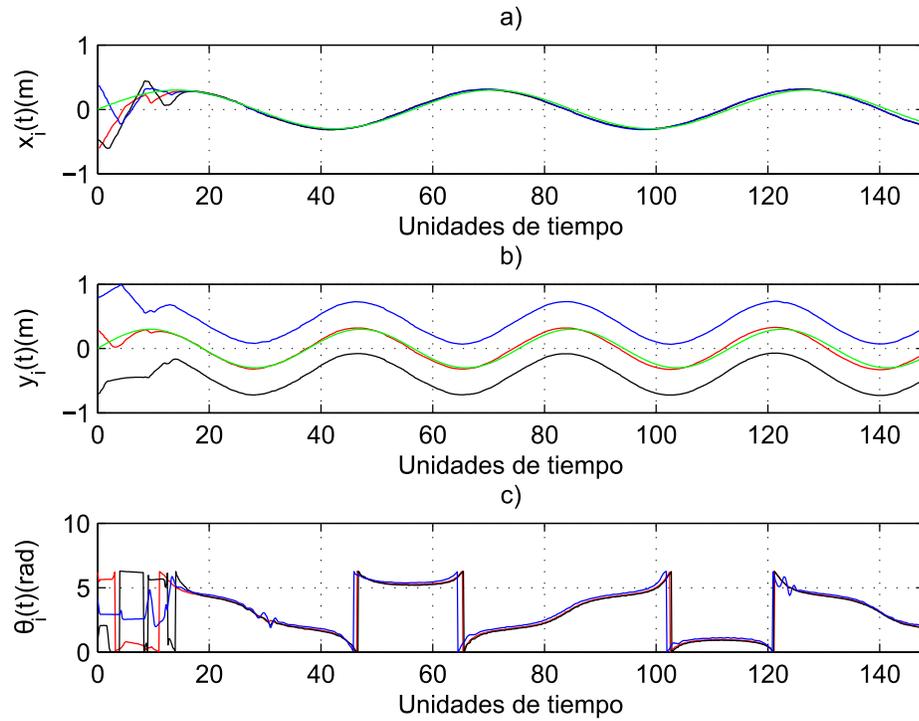


Figura 85: Trayectorias dinámicas para: a) x_i , b) y_i y c) θ_i con $i = 1, 2, 3$.

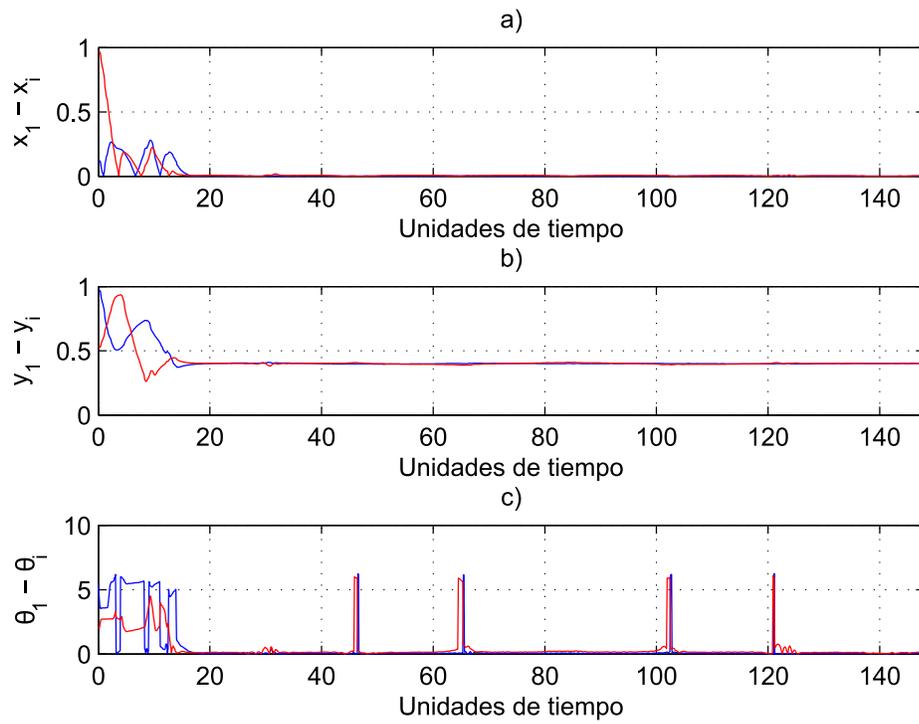


Figura 86: Dinámicas del error: a) $x_1 - x_i$, b) $y_1 - y_i$, c) $\theta_1 - \theta_i$, con $i = 2, 3$.

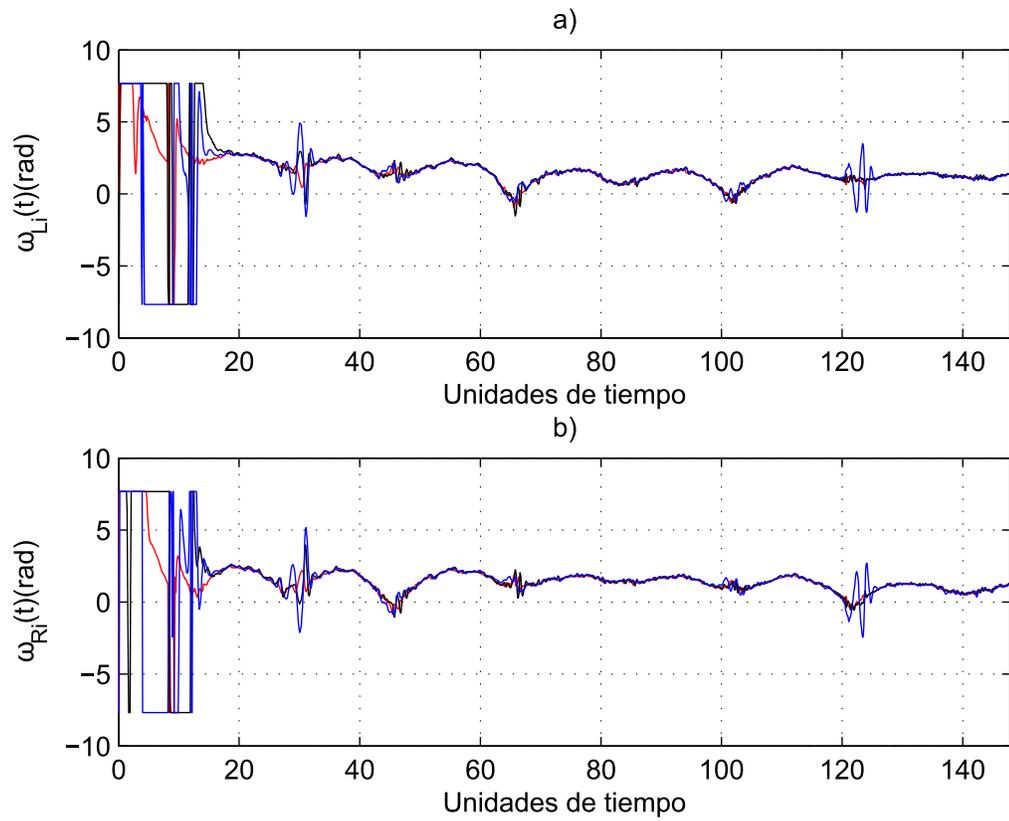


Figura 87: Entradas: a) ω_{L_i} y b) ω_{R_i} , con $i = 1, 2, 3$.

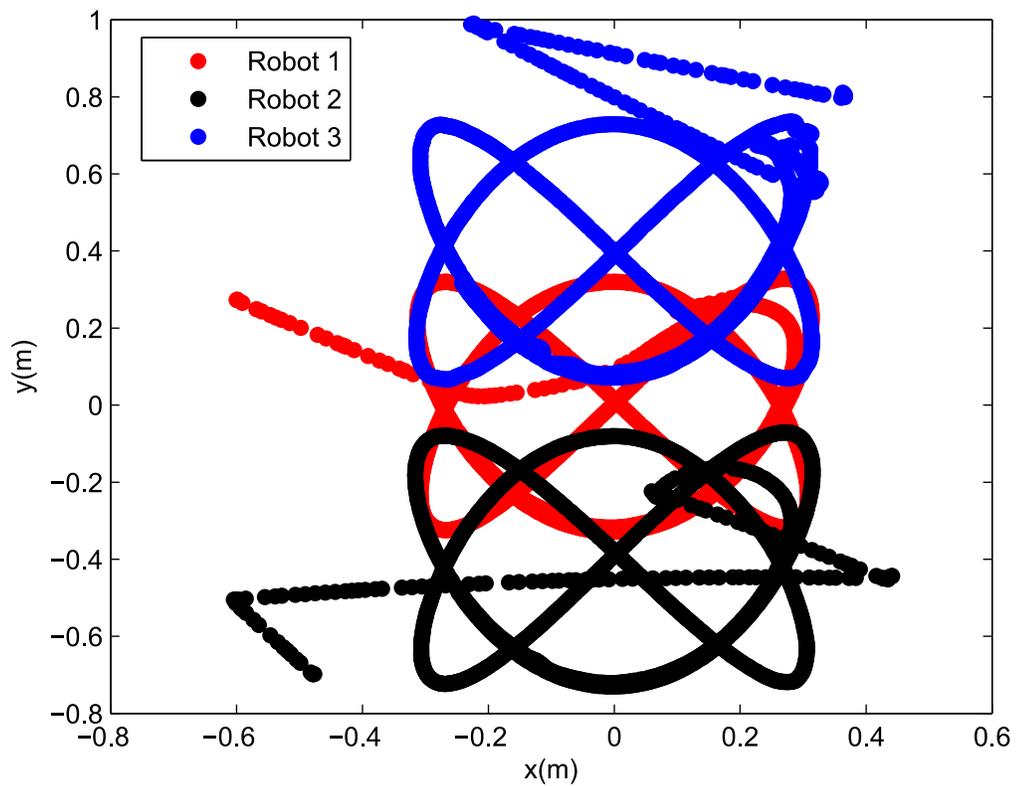


Figura 88: Movimiento realizado por cada robot en el plano x,y .

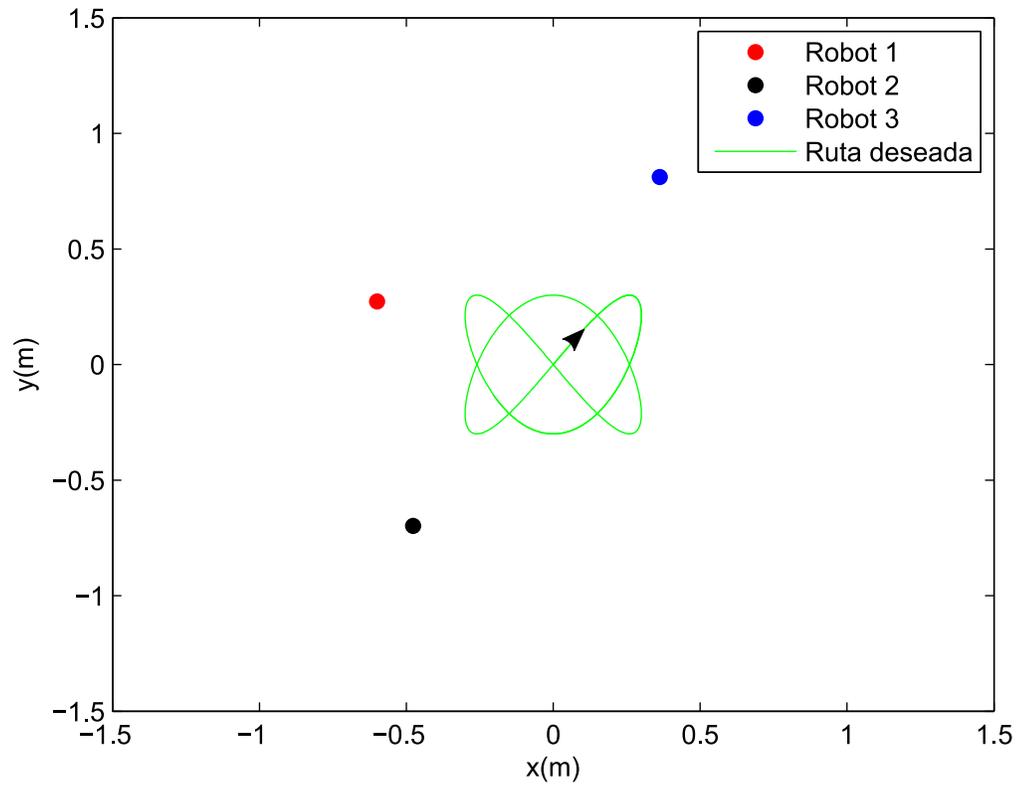


Figura 89: Posición inicial de los robots.

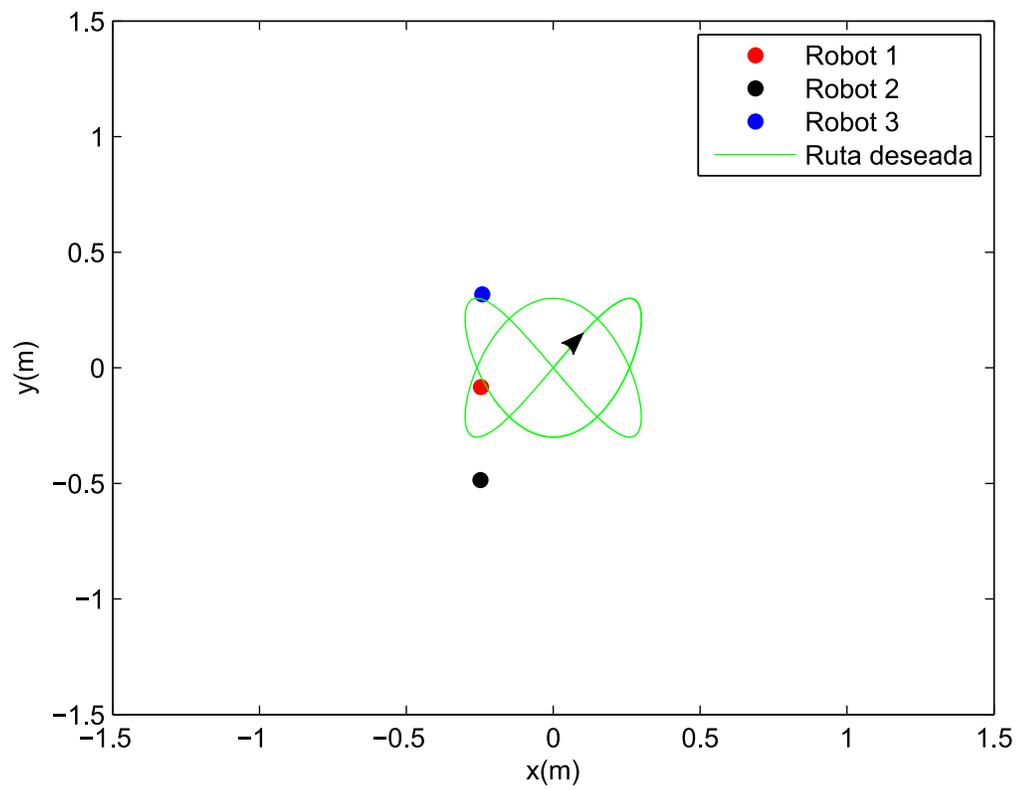


Figura 90: Posición final de los robots siguiendo la trayectoria de barrido.

Conclusiones del capítulo

En este capítulo se reportaron los datos experimentales de formación. Analizando los resultados, se puede concluir que la implementación de los controladores de formación en un grupo de robots tipo Khepera III es posible. Probando diferentes parámetros se llegó a las siguientes conclusiones: si el parámetro de acoplamiento c_{11} es bajo se produce error en el seguimiento de la ruta deseada. Si el parámetro de acoplamiento c_{12} es muy bajo se produce mucha oscilación al iniciar y tratar de tomar la ruta, pero el error al seguirla es muy poco, por el contrario si el parámetro c_{12} es alto se produce una mínima oscilación al iniciar pero comienza la ruta con cierto error que va disminuyendo conforme avanza el tiempo. Aumentar δ aumenta la etapa transitoria pero disminuye el error en las distancias esperadas en la formación, por el contrario, si δ es muy bajo, el transitorio es poco pero hay un error considerable en las distancias esperadas. Es importante tomar en cuenta la aplicación o la tarea que estarán desempeñando los robots, ya que dependiendo de esto se podrá dar prioridad al seguimiento de la ruta, a la formación, al tiempo del transitorio o a la saturación de las entradas.

Capítulo 7. Conclusiones

En este capítulo final de la tesis, se reportan las principales conclusiones que arrojan los resultados tanto numéricos como experimentales. También, se habla sobre algunos trabajos futuros que se desprenden de la realización de este trabajo. Con los resultados obtenidos en las simulaciones de sincronización y formación en grupos de robots móviles, se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- Para poder llegar a sincronizar los cinco robots es necesario aplicar un controlador del tipo proporcional-derivativo para disminuir el error en las posiciones. De no hacerlo se obtienen errores grandes en las simulaciones.
- El tiempo de sincronización será menor si la topología en la que están los agentes tiene una forma eficiente de distribuir la información. El peor de los casos fue la topología en cadena debido a que la información debe pasar por todos los nodos que están en el centro para llegar de un extremo a otro. En cambio, la topología de estrella fue el mejor de los casos, ya que sólo es necesario pasar por un agente (en el peor de los casos) para distribuir la información a cualquier nodo de la red.
- En la parte experimental es necesario tomar en cuenta que debido a la linealización dinámica aplicada al modelo del robot diferencial, la velocidad no debe empezar en cero, ni debe irse a cero en ningún momento, por lo que será necesario acotar una velocidad mínima en la implementación.
- A la hora de aplicar el controlador para formación debe tenerse en cuenta que el umbral de distancia anticollisiones siempre debe ser menor a las distancias esperadas, ya que, si este caso se da, la constante anticollisiones nunca dejará llegar a los robots a las distancias propuestas en la formación.
- En las simulaciones con valores reales de velocidad, se tiene un compromiso entre seguir la ruta deseada, tener precisión en las distancias esperadas y las entradas. Es importante tener en cuenta la aplicación, para darle prioridad a alguno de éstos.

A través de la implementación experimental del controlador de formación se llegó a las siguientes conclusiones:

- Si el parámetro de acoplamiento c_{11} es bajo se produce error en el seguimiento de la ruta deseada.
- Si el parámetro de acoplamiento c_{12} es muy bajo se produce mucha oscilación al iniciar y tratar de tomar la ruta, pero el error al seguirla es muy poco; por el contrario si el parámetro c_{12} es alto se produce una mínima oscilación al iniciar pero comienza la ruta con cierto error que va disminuyendo conforme avanza el tiempo.
- Aumentar δ aumenta la etapa transitoria pero disminuye el error en las distancias esperadas en la formación; por el contrario si δ es muy bajo el transitorio es corto pero hay error considerable en las distancias esperadas.
- Es importante tomar en cuenta la aplicación o la tarea que estarán desempeñando los robots, ya que dependiendo de esto se podrá dar prioridad al seguimiento de la ruta, a la formación, al tiempo del transitorio o a la saturación de las entradas.

7.1 Trabajos futuros

Este trabajo de tesis fue enfocado en el estudio de la sincronización y formación de robots móviles, sin embargo, existen otras líneas de investigación posibles relacionadas con el uso de estos controladores y su aplicación, algunas de ellas son:

- Aumentar el número de robots tanto en simulaciones como en experimentos.
- Estudiar la robustez de las redes en cuanto a fallas de comunicación y/o fallas en los robots móviles.
- Aplicar formación a algunas tareas de interés como búsqueda y rescate de objetos pequeños, vigilancia, etc.
- Analizar topologías diferentes tanto regulares como irregulares.
- Realizar los experimentos de forma descentralizada.
- Realizar pruebas formales para mostrar convergencia de los errores.

Literatura citada

- Abbaspour, A., Alipour, K., Jafari, H. Z., y Moosavian, S. A. A. (2015). Optimal formation and control of cooperative wheeled mobile robots. *Comptes Rendus Mécanique*, **343**(5): 307–321.
- Acosta Del Campo, O., Cruz Hernández, C., López Gutiérrez, R., Arellano Delgado, A., Cardoza Avendano, L., y Chávez Pérez, R. (2011). Complex network synchronization of coupled time-delay chua oscillators in different topologies. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, **11**(4): 341–372.
- Aguilar, J., Bolivar, A. R., Hidrobo, F., y Cerrada, M. (2012). *Sistemas MultiAgentes y sus Aplicaciones en Automatización Industrial*. Universidad de los Andes Venezuela.
- Couzin, I. D., Krause, J., James, R., Ruxton, G. D., y Franks, N. R. (2002). Collective memory and spatial sorting in animal groups. *Journal of theoretical biology*, **218**(1): 1–11.
- Dai, Y., Kim, Y., Wee, S., Lee, D., y Lee, S. (2015). A switching formation strategy for obstacle avoidance of a multi-robot system based on robot priority model. *ISA transactions*, **56**: 123–134.
- De Luca, A., Oriolo, G., y Vendittelli, M. (2001). Control of wheeled mobile robots: An experimental overview. páginas 181–226.
- Deisboeck, T. S. y Couzin, I. D. (2009). Collective behavior in cancer cell populations. *Bioessays*, **31**(2): 190–197.
- Diestel, R. (2005). *Graph theory*. Springer-Verlag Heidelber.
- Harary, F. (1969). *Graph theory*. Addison-Wesley Reading, MA.
- Kwakernaak, H., Sivan, R., y Srijbos, R. C. (1991). *Modern signals and systems*. Prentice-Hall, Inc.
- Lamercy, F. y Bureau, P. (2007). Khepera iii user manual. *User manual, K-Team*.
- López Parra, A., Arellano-Delgado, A., Cruz-Hernández, C., Martínez Clark, R., y Cetina Denis, J. (2016a). Formación en grupos de robots móviles. *Latin American Conference on Automatic Control CLCA, Medellín, Colombia del 12 al 15 de octubre*.
- López Parra, A., Cetina Denis, J., Rubio Pecasso, W., y Cosío, E. (2016b). Sincronización de robots móviles. *Sexto simposium internacional regional de ingeniería industrial, 12-15 de abril, Puerto Peñasco, Sonora*.
- Martínez Clark, R. (2014). Control de comportamientos colectivos en grupos de robots móviles. *Tesis de maestría, Posgrado en Electrónica y Telecomunicaciones, CICESE*.
- Martínez Clark, R., Cruz Hernández, C., Reyes De la Cruz, D., Arellano Delgado, A., y Pinedo Lomelí, L. (2015a). Formación de agentes: una aplicación al patrullaje. *Congreso Nacional de Control Automático AMCA, Cuernavaca, Morelos, del 14 al 16 de octubre*.
- Martínez Clark, R., Reyes de la Cruz, D., Cruz-Hernández, C., y López Gutiérrez, R. (2015b). Synchronization of mobile robots in deterministic small-world networks. *SIAM Conference on Control and Its Applications, 8 al 12 de julio, Paris Francia*.
- Munné, F. (2005). ¿qué es la complejidad? what's complexity? *Encuentros de psicología social*, **3**(2): 6–17.

- Ollero Baturone, A. (2005). *Robótica: manipuladores y robots móviles*. Marcombo.
- Optitrack (2012). Flex 13l. *Natural Point Inc.*.
- Otiino, J. (2003). Complex systems. *AIChE Journal*, **49**(2): 292–299.
- Pikovsky, A., Rosenblum, M., y Kurths, J. (2003). *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, Vol. 12. Cambridge University Press.
- Posadas-Castillo, C., Cruz-Hernández, C., y López-Gutiérrez, R. (2007). Synchronization in arrays of chaotic neural networks. páginas 743–754.
- Posadas-Castillo, C., Cruz-Hernández, C., y López-Gutiérrez, R. (2009). Experimental realization of synchronization in complex networks with chua's circuits like nodes. *Chaos, Solitons & Fractals*, **40**(4): 1963–1975.
- Sumpter, D. J. (2010). *Collective animal behavior*. Princeton University Press.
- Suster, P. y Jadlovská, A. (2010). Neural tracking trajectory of the mobile robot khepera ii internal model control structure. páginas 1–13.
- Tian-Tian, Y., Zhi-Yuan, L., Hong, C., y Run, P. (2008). Formation control and obstacle avoidance for multiple mobile robots. *Acta Automatica Sinica*, **34**(5): 588–593.
- Wang, X. F. (2002). Complex networks: topology, dynamics and synchronization. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **12**(05): 885–916.
- Watts, D. J. y Strogatz, S. H. (1998). Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, **393**(6684): 440–442.
- Wu, C. W. y Chua, L. O. (1995). Application of graph theory to the synchronization in an array of coupled nonlinear oscillators. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **42**(8): 494–497.
- Wu, C. W. y Chua, L. O. (1996). On a conjecture regarding the synchronization in an array of linearly coupled dynamical systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, **43**(2): 161–165.
- Zhu, S., Xie, L., Chen, C., y Guan, X. (2015). Collective behavior of mobile agents with state-dependent interactions. *Automatica*, **51**: 394–401.