

**Centro de Investigación Científica y de Educación  
Superior de Ensenada, Baja California**



---

**Maestría en Ciencias  
en Óptica con orientación en Optoelectrónica**

---

**Experimentos de coherencia espacial con una fuente formada  
por un láser y un difusor giratorio**

Tesis  
para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Maestro en Ciencias

Presenta:

**Samuel Silván Gallegos**

Ensenada, Baja California, México  
2017

Tesis defendida por  
**Samuel Silván Gallegos**

y aprobada por el siguiente Comité

---

**Dr. Héctor Manuel Escamilla Taylor**  
Codirector de Tesis

---

**Dra. Alma Georgina Navarrete Alcalá**  
Codirector de Tesis

**Dr. Santiago Camacho López**

**Dr. Víctor Ruiz Cortés**

**Dr. José Luis Medina Monroy**



---

**Dr. Pedro Negrete Regagnon**  
Coordinador del Posgrado en Óptica

---

**Dra. Rufina Hernández Martínez**  
Directora de Estudios de Posgrado

*Samuel Silván Gallegos © 2017*

*Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor y director de la tesis.*

Resumen de la tesis que presenta **Samuel Silván Gallegos** como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Óptica con orientación en Optoelectrónica.

### **Experimentos de coherencia espacial con una fuente formada por un láser y un difusor giratorio**

Resumen aprobado por:

---

Dr. Héctor Manuel Escamilla Taylor  
Codirector de tesis

---

Dra. Alma Georgina Navarrete Alcalá  
Codirector de tesis

En esta tesis se lleva a cabo un estudio experimental y teórico de dos configuraciones ópticas que utilizan iluminación parcialmente coherente provista por una fuente artificial formada por un láser y un difusor giratorio. La coherencia tratada es la espacial. En la primera etapa del trabajo se realizó el experimento de Young de la doble rendija para controlar la visibilidad de las franjas variando los parámetros de la fuente. Se hizo también un estudio teórico del patrón de difracción obtenido al variar el tamaño de la fuente. El método utilizado en el análisis teórico difiere del tratamiento clásico basado en la teoría de coherencia parcial. En el trabajo experimental realizado se varió la coherencia espacial de la iluminación sobre un rango muy amplio que permitió obtener desde franjas con máxima visibilidad hasta lograr la desaparición de las franjas. En la segunda etapa del trabajo se llevó a cabo un estudio del fenómeno de retroesparcimiento reforzado con iluminación parcialmente coherente (coherencia espacial) en una configuración de doble paso formada por un difusor y un espejo. Se hizo también un análisis teórico del fenómeno con esta configuración utilizando la teoría escalar del difracción, así como la teoría de la pantalla de fase aleatoria para describir la propagación de la luz de ida y regreso a través del difusor. Se realizaron experimentos para estudiar la evolución de la señal de retroesparcimiento reforzado al variar el tamaño de la fuente y se obtuvo una señal que variaba desde la forma obtenida con una fuente puntual hasta que prácticamente se extinguía. Al aumentar el diámetro de la fuente secundaria la señal se iba ensanchando e iba disminuyendo en altura. En general, los resultados teóricos describen bien el comportamiento experimental observado, aunque con diferencias cuantitativas en algunos casos.

**Palabras clave:** Coherencia espacial, experimento de Young, esparcimiento de luz, retroesparcimiento reforzado, configuración de doble paso, pantalla de fase aleatoria.

Abstract of the thesis presented by **Samuel Silván Gallegos** as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Optics with orientation in Optoelectronics.

### **Experiments on spatial coherence using a source consisting in a laser and a rotating diffuser**

Abstract approved by:

---

Dr. Héctor Manuel Escamilla Taylor  
Thesis codirector

---

Dra. Alma Georgina Navarrete Alcalá  
Thesis codirector

In this thesis, an experimental and theoretical study of two optical configurations that employ spatially partially coherent illumination is carried out using an artificial source formed by a laser and a rotating diffuser. In the first part of this work, Young's double slit experiment is carried out to control the fringe visibility by varying the parameters of the source. A theoretical study of the diffraction pattern observed is also made. The method employed in the theoretical analysis differs from the classical one based on the theory of partial coherence. In the experimental work, the spatial coherence of the illumination was varied over an extended range, allowing for the observation of fringes ranging from those with maximum visibility to vanishing ones. In the second part of this work, a study of the phenomenon of enhanced backscattering with spatially partially coherent illumination, in a double-passage configuration consisting in a diffuser and a mirror, is carried out. A theoretical analysis of this phenomenon in this configuration is also made, using scalar diffraction theory, as well as random-phase screen theory to describe the forward and backward propagation through the diffuser. Experiments were carried out to study the evolution of the enhanced-backscattered signal as the size of the source varied, obtaining a signal that changed from the one obtained with a point source to one that was practically extinguished. As the size of the source increased, the signal widened and lost height. In general, the experimental behavior observed is well described by the theory, although not with accurate agreement in some cases.

**Keywords:** Spatial coherence, Young's experiment, light scattering, enhanced backscattering, double-passage configuration, random-phase screen

**Dedicatoria**

*a Dios y a mi familia*

## Agradecimientos

A Dios, primeramente, por iluminar mi camino, por permitirme empezar y concluir este proyecto y esta etapa de mi vida.

A mi familia por su apoyo moral a pesar de la distancia.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por otorgarme esta beca que me permitió empezar y concluir mi maestría y al CICESE por abrirme sus puertas.

A la Dra. Alma Georgina Navarrete Alcalá por aceptarme como su tesista. Le agradezco sus consejos, sus críticas constructivas y por asesorarme en el laboratorio.

Al Dr. Héctor Manuel Escamilla Taylor, por aceptarme también como su tesista y guiarme en la parte teórica de este tema, por corregir mis ideas al escribir esta tesis, por sus consejos y por compartir sus conocimientos.

Al Dr. Eugenio Méndez por proponer el tema de investigación sobre la configuración de doble paso. También por su permiso para usar la figura 1 que aparece en esta tesis.

Al Dr. Santiago Camacho López por formar parte de mis sinodales, por sus correcciones, sus consejos y su tiempo invertido al revisar esta tesis. También le agradezco por prestarme un divisor de haz y otros materiales para mis experimentos.

Al Dr. Víctor Ruiz Cortés por formar parte de mis sinodales, por sus sugerencias para mejorar este trabajo, sobre todo con la caracterización del difusor y por su tiempo al revisar este trabajo.

Al Dr. José Luis Medina Monroy por las correcciones hechas a este tesis y también por formar parte de los miembros del comité.

Al Dr. Pedro Negrete Regagnon por creer en mí y por sus charlas motivacionales.

Al M. C. Ricardo Núñez por su asesoría en el ámbito electrónico para diseñar los circuitos para construir el controlador del difusor.

Al Ing. René Torres Lira por permitirme trabajar en el taller de electrónica de Física Aplicada y por las herramientas prestadas y materiales proporcionados para este proyecto.

A Francisco Javier Dávalos Gutiérrez por ayudarme a construir los difusores que hicieron posible los experimentos.

A Isaac Fimbres, técnico de mantenimiento de informática del departamento de Óptica, por auxiliarme en las dificultades técnicas con el equipo de cómputo.

A la M. C. Avril Alicia Meza Olivo, por su amistad, su ayuda y el tiempo que me proporcionó en los momentos que más lo necesité.

Al Oc. Miguel Farfán por haberme prestado varios elementos ópticos para los experimentos.

Al Ing. Francisco García Lucatero, jefe del taller de metalmecánica del CICESE por ayudarme en fabricar las piezas metálicas requeridas para mis experimentos y a sus muchachos que contribuyeron con la mano de obra: Octavio Magaña Molina, Francisco Nicolás Ramos Hernández y José Andrés Carrasco Avendaño.

Un agradecimiento especial al M. I. Humberto Fabián Alonso Cordero, técnico del laboratorio de óptica estadística quien me ayudó a construir los orificios en placas de aluminio que hicieron posible la segunda parte de mis experimentos.

## Tabla de contenido

	Página
Resumen en español.....	ii
Resumen en inglés.....	iii
Dedicatoria.....	iv
Agradecimientos.....	v
Lista de figuras.....	ix
Lista de tablas.....	xiv
<b>Capítulo 1. Introducción</b>	
1.1 Fenómeno de retroesparcimiento reforzado.....	1
1.2 Experimento de Young con iluminación parcialmente coherente.....	3
1.3 Objetivos de la tesis.....	4
1.3.1 Objetivos generales.....	4
1.3.2 Objetivos particulares.....	4
1.4 Estructura de la tesis.....	4
<b>Capítulo 2. Experimento de Young con una fuente extendida</b>	
2.1 Descripción breve del experimento de Young.....	6
2.2 Análisis teórico.....	7
2.2.1 Consideraciones iniciales: Expresión para una onda plana debida a una fuente puntual .....	7
2.2.2 Derivación del patrón de difracción producido por una fuente puntual.....	10
2.2.3 Derivación del patrón de difracción producido por una fuente extendida.....	14
2.3 Resultados experimentales.....	19
<b>Capítulo 3. Teoría de la pantalla de fase aleatoria</b>	
3.1 Difusores.....	26
3.2 Patrones de speckle.....	28
3.3 La pantalla de fase aleatoria.....	29
3.4 Difusores con fluctuaciones de altura Gaussianas.....	32
3.4.1 Función de densidad de probabilidad de alturas y fase.....	32



3.4.2 Función de autocorrelación de la transmitancia de amplitud compleja del difusor.....	33
<b>Capítulo 4. Retroesparcimiento reforzado en una configuración de doble paso: teoría</b>	
4.1 Descripción breve de la configuración de doble paso.....	38
4.2 Análisis teórico: Expresiones generales para la intensidad promedio.....	39
4.2.1. Derivación de la intensidad promedio para una fuente puntual.....	39
4.2.1.1 Amplitud compleja en el plano de observación.....	39
4.2.1.2 Intensidad promedio en el plano de observación.....	43
4.2.2 Intensidad promedio para una fuente extendida.....	47
4.3 Cálculos de retroesparcimiento reforzado con el modelo de la pantalla de fase aleatoria.....	47
4.3.1 Evaluación analítica de las distintas integrales para el caso de una fuente puntual..	47
4.3.2 Intensidad promedio para una fuente puntual.....	56
4.3.3 Intensidad promedio para una fuente extendida.....	57
<b>Capítulo 5. Retroesparcimiento reforzado en una configuración de doble paso: experimentos</b>	
5.1 Medición de la intensidad promedio para una fuente puntual.....	63
5.2 Medición de la intensidad promedio para una fuente extendida.....	66
<b>Capítulo 6. Conclusiones</b>	
6.1 Contribuciones principales del presente trabajo.....	77
6.2 Trabajo futuro.....	78
<b>Literatura citada.....</b>	<b>80</b>
<b>Apéndice A. Evaluación de tres integrales del capítulo 2.....</b>	<b>82</b>
<b>Apéndice B. Caracterización del difusor utilizado en los experimentos de doble paso.....</b>	<b>87</b>

## Lista de figuras

Figura	Página
1 a) Distribución angular de esparcimiento para un medio no homogéneo consistente en una colección de partículas. b) Dos trayectorias recíprocas iguales (Méndez, 2015).....	2
2 Retroesparcimiento reforzado en una configuración de doble paso consistente en un difusor y un espejo.....	3
3 Diagrama esquemático del arreglo utilizado para el experimento de Young con fuente extendida.....	7
4 Diagrama esquemático para el análisis teórico mostrando los tres planos coordenados relevantes. $z = 0$ corresponde al plano de las aberturas.....	7
5 Fuente puntual que envía rayos de luz a una lente colimadora. Dicha lente genera ondas planas.....	8
6 Pantalla de difracción utilizada en el experimento de Young.....	10
7 Diagrama mostrando los componentes del arreglo experimental. $M_1$ : objetivo de microscopio x4, $M_2$ : objetivo de microscopio x10, $L_1$ : lente colimadora de distancia focal $f_0 = 500$ mm, $L_2$ : lente condensadora de distancia focal $f = 1000$ mm.....	19
8 Perfil Gaussiano de intensidad del haz que ilumina el orificio de la fuente secundaria. Semiancho del haz Gaussiano $w_i = 0.13$ mm. La intensidad del haz en el extremo del orificio cae al 92 % de su valor en el centro del orificio.....	20
9 Conjunto de gráficas que muestra el patrón de difracción usando una pantalla de difracción de distancia $d = 1.87$ mm de separación entre sus aberturas circulares de radio $a = 0.274$ mm. Gráficas teóricas calculadas con $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	21
10 Patrones de difracción usando una pantalla de difracción de distancia $d = 4.89$ mm de separación entre sus aberturas circulares de radio $a = 0.293$ mm. Gráficas teóricas calculadas con $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	22
11 Patrones de difracción usando una pantalla de difracción de distancia $d = 9.97$ mm de separación entre sus aberturas circulares de radio $a = 0.282$ mm. Gráficas teóricas calculadas con $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	23
12 Gráfica que muestra el grado de coherencia que determina la visibilidad de las franjas para distintos valores del argumento $v$ de la función Bessel.....	24
13 a) Gráficas del patrón de difracción teórico y experimental usando fuente de diámetro de 45.2 $\mu\text{m}$ y pantalla de difracción con separación entre sus aberturas circulares de 9.97 mm. En la parte superior derecha se muestra una ampliación del máximo de la señal. b) Gráfica que muestra el valor $\mu$ . Gráficas teóricas calculadas con $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	25
14 Transmisión de luz por un medio transparente con una frontera rugosa.....	26

15	Tipos de reflexión: especular y difusa. ....	27
16	Luz retroesparcida por reflexión en una superficie ligeramente rugosa.....	27
17	Esquema donde se muestra un frente de onda plano incidente en un difusor y la luz transmitida. En difusores débiles se obtiene luz difusa y luz transmitida directamente.....	27
18	Esquema donde se muestra un difusor que forma un patrón de speckle en un plano de observación.....	28
19	Patrón de speckle tomado con una cámara CCD.....	29
20	La función de transmitancia de amplitud compleja de un difusor $D(x, y)$ representa la relación entre la amplitud compleja incidente y la transmitida.....	29
21	Placa de vidrio de índice de refracción $n$ rodeada por aire. $h_0$ es el grueso promedio de la placa, $h_1$ es la profundidad de la depresión y $h_2$ es la altura del escalón.....	30
22	Frente de onda de luz que atraviesa un difusor de fase. El frente de onda saliente adopta el perfil de la superficie rugosa del difusor de forma invertida.....	32
23	Gráficas de la función de autocorrelación dada por la ecuación (66) para varios valores de $\sigma_\phi$ .....	36
24	Esquema donde se muestra el arreglo experimental de doble paso formado por diversos elementos.....	38
25	Sistema de doble paso “desdoblado” utilizado en el análisis teórico.....	39
26	Intensidad promedio para iluminación por una fuente puntual en eje, $x_0 = y_0 = 0$ . Parámetros utilizados: $w=5$ mm, $\sigma_\phi=2\pi$ , $\xi=0.020$ mm, $f=300$ mm, $d=10$ mm, $\lambda=0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	56
27	Señal de retroesparcimiento reforzado correspondiente al segundo término de la ecuación (131). Parámetros utilizados: $w=5$ mm, $\sigma_\phi=2\pi$ , $\xi=0.020$ mm, $f=300$ mm, $d=10$ mm, $\lambda=0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	57
28	Cortes de las funciones $h(x_0, y_0)$ y $I_0(x_0, y_0)$ sobre el eje $x_0$ para una fuente circular uniforme con $b=0.016$ mm. Parámetros utilizados: $w=2$ mm, $\sigma_\phi=2\pi$ , $\xi=0.025$ mm, $f_0=300$ mm, $d=10$ mm, $\lambda=0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	59
29	Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con $b=0.016$ mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 28, además $f=500$ mm.....	59
30	Cortes de las funciones $h(x_0, y_0)$ y $I_0(x_0, y_0)$ sobre el eje $x_0$ para una fuente circular uniforme con $b=0.032$ mm. Parámetros utilizados: $w=2$ mm, $\sigma_\phi=2\pi$ , $\xi=0.025$ mm, $f_0=300$ mm, $d=10$ mm, $\lambda=0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	59

31	Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con $b=0.032$ mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 30, además $f = 500$ mm.....	59
32	Cortes de las funciones $h(x_0, y_0)$ y $I_0(x_0, y_0)$ sobre el eje $x_0$ para una fuente circular uniforme con $b = 0.080$ mm. Parámetros utilizados: $w=2$ mm, $\sigma_\phi = 2\pi$ , $\xi=0.025$ mm, $f_0 = 300$ mm, $d=10$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	60
33	Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con $b=0.080$ mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 32, además $f = 500$ mm.....	60
34	Cortes de las funciones $h(x_0, y_0)$ y $I_0(x_0, y_0)$ sobre el eje $x_0$ para una fuente circular uniforme con $b = 0.160$ mm. Parámetros utilizados: $w=2$ mm, $\sigma_\phi = 2\pi$ , $\xi=0.025$ mm, $f_0 = 300$ mm, $d=10$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	60
35	Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con $b = 0.160$ mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 34, además $f = 500$ mm.....	60
36	Cortes de las funciones $h(x_0, y_0)$ y $I_0(x_0, y_0)$ sobre el eje $x_0$ para una fuente circular uniforme con $b = 0.263$ mm. Parámetros utilizados: $w=2$ mm, $\sigma_\phi = 2\pi$ , $\xi=0.025$ mm, $f_0 = 300$ mm, $d=10$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	61
37	Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con $b=0.263$ mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 36, además $f = 500$ mm.....	61
38	Cortes de las funciones $h(x_0, y_0)$ y $I_0(x_0, y_0)$ sobre el eje $x_0$ para una fuente circular uniforme con $b = 0.350$ mm. Parámetros utilizados: $w=2$ mm, $\sigma_\phi = 2\pi$ , $\xi=0.025$ mm, $f_0 = 300$ mm, $d = 10$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	61
39	Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con $b=0.350$ mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 38, además $f = 500$ mm.....	61
40	Cambios de ancho de la función $h(x_0, 0)$ para distintos valores de la distancia focal de $f_0$ de la lente colimadora, para $d = 10$ mm. Parámetros utilizados: $w=2$ mm, $\sigma_\phi = 2\pi$ , $\xi=0.025$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	62
41	Cambios de ancho de la función $h(x_0, 0)$ para distintos valores de la distancia $d$ entre el difusor y el espejo para $f_0=100$ mm. Parámetros utilizados: $w=2$ mm, $\sigma_\phi = 2\pi$ , $\xi=0.025$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	62
42	Arreglo experimental utilizado para medir la intensidad promedio de la luz retroesparcida para iluminación por una fuente puntual. Distancia focal de la lente colimadora $f_0 = 100$ mm, distancia focal de la lente condensadora $f = 500$ mm, distancia del difusor al espejo $d = 30$ mm.....	64

43	Gráficas de intensidad promedio para iluminación por una fuente puntual. Parámetros usados: $f_0 = 100$ mm, $f = 500$ mm, $d = 30$ mm, $w = 2$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	65
44	Imagen obtenida con una cámara CCD en el laboratorio. La mancha del centro es la señal de retroesparcimiento para iluminación por una fuente puntual.....	65
45	Arreglo experimental utilizado para medir la intensidad promedio de la luz retroesparcida para iluminación por una fuente extendida.....	66
46	Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 18.4 $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados: $f_0 = 100$ mm, $f = 500$ mm, $d = 30$ mm, $w = 2$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	67
47	Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 29.6 $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados: $f_0 = 100$ mm, $f = 500$ mm, $d = 30$ mm, $w = 2$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	68
48	Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 45.2 $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados: $f_0 = 100$ mm, $f = 500$ mm, $d = 30$ mm, $w = 2$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	68
49	Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 50.7 $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados: $f_0 = 100$ mm, $f = 500$ mm, $d = 30$ mm, $w = 2$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	69
50	Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 76.4 $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados: $f_0 = 100$ mm, $f = 500$ mm, $d = 30$ mm, $w = 2$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	69
51	Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 18.4 $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados: $f_0 = 300$ mm, $f = 500$ mm, $d = 10$ mm, $w = 2$ mm, $w_i = 0.13$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	71
52	Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 76.4 $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados: $f_0 = 300$ mm, $f = 500$ mm, $d = 10$ mm, $w = 2$ mm, $w_i = 0.13$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	71
53	Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 347 $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados: $f_0 = 300$ mm, $f = 500$ mm, $d = 10$ mm, $w = 2$ mm, $w_i = 0.13$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	72
54	Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 499 $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados: $f_0 = 300$	

	mm, $f = 500$ mm, $d = 10$ mm, $w = 2$ mm, $w_i = 0.13$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	72
55	Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 704 $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados: $f_0 = 400$ mm, $f = 500$ mm, $d = 10$ mm, $w = 2$ mm, $w_i = 1.2324$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	74
56	Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 794 $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados: $f_0 = 400$ mm, $f = 500$ mm, $d = 10$ mm, $w = 2$ mm, $w_i = 1.2324$ mm, $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$ mm, $\lambda = 0.6328$ $\mu\text{m}$ .....	74
57	Arreglo experimental utilizado para medir la distribución espacial de intensidad promedio en el patrón de difracción de Fraunhofer del difusor. Distancia focal de la lente colimadora $f_0 = 200$ mm, distancia focal de la lente condensadora $f = 1000$ mm.....	87
58	Distribución espacial de intensidad promedio en el plano focal de la lente condensadora.....	89

## Lista de tablas

Tabla		Página
1	Comparación de los anchos teóricos y experimentales entre los puntos $1/e$ para fuentes secundarias con diámetros entre 18.4 y 76.4 $\mu\text{m}$ .....	67
2	Comparación de los anchos teóricos y experimentales entre los puntos $1/e$ para fuentes secundarias con diámetros entre 18.4 y 499 $\mu\text{m}$ .....	73

## Capítulo 1. Introducción

---

Los sistemas ópticos que operan con iluminación parcialmente coherente (coherencia espacial) utilizan fuentes térmicas de dimensiones finitas. La coherencia espacial de la iluminación producida por estas fuentes disminuye cuando el tamaño de la fuente aumenta. La función de coherencia espacial se obtiene a partir del Teorema de Van Cittert Zernike y está dada por la transformada de Fourier de la distribución de intensidad sobre la fuente (Goodman, 1985, pág. 210).

Una lámpara de mercurio es utilizada a menudo en experimentos con iluminación parcialmente coherente. Se puede, sin embargo, utilizar iluminación láser para simular una fuente incoherente, si se emplea un haz láser para iluminar un difusor y se promedia la intensidad observada a la salida del sistema sobre un gran número de experimentos similares, en los cuales, la luz proviene de distintas regiones iluminadas del difusor. En la práctica, un haz de luz atraviesa un difusor que gira y se obtiene un promedio temporal de la intensidad a la salida del sistema. Este método fue propuesto por Martienssen and Spiller (Martienssen y Spiller, 1964) quienes denominaron a este tipo de fuente “pseudo-térmica.” La ventaja de usar esta fuente artificial, en lugar de una fuente térmica, estriba en la mayor potencia luminosa obtenida con la luz láser, lo cual es importante en experimentos donde las pérdidas de luz a través del sistema constituyen un problema.

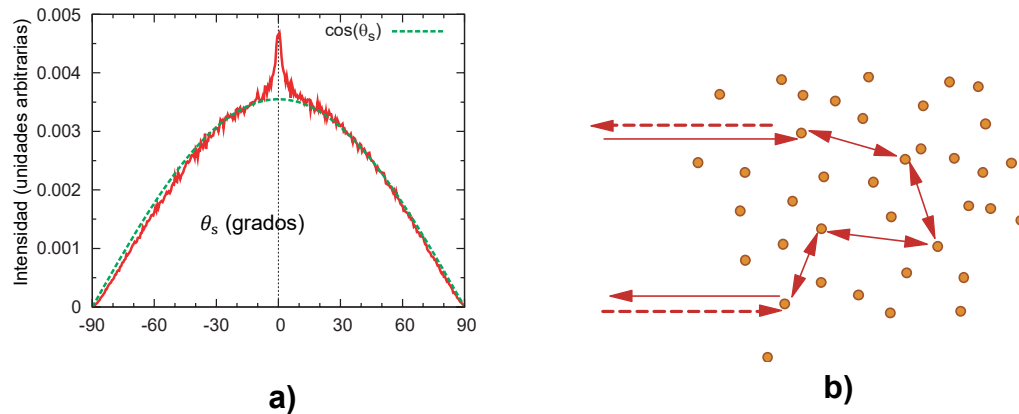
### 1.1 Fenómeno de retroesparcimiento reforzado

Desde hace aproximadamente una década se han hecho estudios en los que se busca obtener información de estructuras de volumen que producen esparcimiento utilizando iluminación parcialmente coherente (Kim et al., 2005, 2006; Hariharan et al., 2006). Lo anterior se refiere a la coherencia espacial de la iluminación. Estos estudios hacen uso del fenómeno de retroesparcimiento reforzado, EBS, por sus siglas en inglés, en los cuales la señal de EBS es obtenida con luz parcialmente coherente, a diferencia de los experimentos clásicos con iluminación coherente (Tsang and Ishimaru, 1984; Van Albada y Langendijk, 1985).

En la figura 1 se da una breve explicación del origen del fenómeno de retroesparcimiento reforzado para el caso de iluminación coherente y un medio dispersor formado por una colección de partículas. En la figura 1 a) se ve que el patrón de intensidad de la luz retroesparcida muestra un comportamiento Lambertiano, excepto en la vecindad de la dirección de retroesparcimiento, en la que se observa un aumento



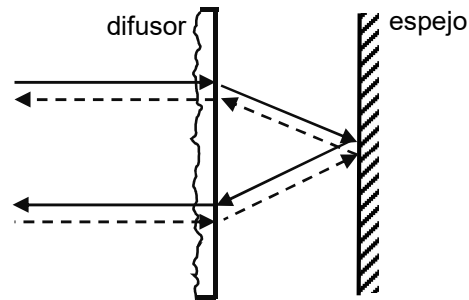
pronunciado de la intensidad. La figura 1 b) muestra la existencia de dos trayectorias ópticas recíprocas iguales, es decir, los dos rayos de la figura recorren la misma trayectoria óptica, pero en direcciones opuestas. Esto implica que los cambios de fase sufridos por los dos rayos son iguales y que presentan una alta interferencia constructiva en la vecindad de la dirección de retroesparcimiento.



**Figura 1. a) Distribución angular de esparcimiento para un medio no homogéneo consistente en una colección de partículas. b) Dos trayectorias recíprocas iguales (Méndez, 2015).**

Regresando al caso de los trabajos llevados a cabo con iluminación parcialmente coherente, este tema de investigación es conocido como EBS de baja coherencia o LC-EBS, por sus siglas en inglés. En dichos estudios, se busca aplicar esta metodología para obtener información a partir de la luz retroesparcida por tejido biológico. El medio biológico se ha simulado utilizando una distribución volumétrica de partículas y se ha logrado obtener información sobre la trayectoria libre media de la luz en el medio (Kim et al., 2005; Subramanian et al., 2006). El uso de iluminación de baja coherencia espacial produce un ensanchamiento de la señal de EBS que permite extraer información de esta señal (Kim et al., 2005; Subramanian et al., 2006; Okamoto y Asakura, 1996).

En la figura 2 se muestra una estructura de esparcimiento alternativa que produce una señal de EBS en una configuración de doble paso, en la cual la luz atraviesa un difusor, se refleja en un espejo, y cruza nuevamente el mismo difusor en su viaje de regreso (Jakeman, 1998; Maradudin y Méndez, 2002). Se observan dos trayectorias recíprocas que atraviesan las mismas zonas del difusor adquiriendo iguales cambios de fase.



**Figura 2. Retroesparcimiento reforzado en una configuración de doble paso consistente en un difusor y un espejo.**

En el presente trabajo se hace un estudio del fenómeno de retroesparcimiento reforzado con esta segunda estructura controlando la coherencia espacial de la iluminación para producir un ensanchamiento de la señal de EBS, utilizando la fuente formada por un láser y un difusor giratorio.

Se hace también un análisis teórico del fenómeno para esta configuración utilizando la teoría escalar de difracción, así como la teoría de la pantalla de fase aleatoria (Maradudin y Méndez, 2002) para describir la propagación de la luz de ida y regreso a través del difusor, y se obtiene una fórmula para la intensidad promedio de la luz retroesparcida para el caso de iluminación temporal y espacialmente coherente. El caso de iluminación parcialmente coherente se resuelve integrando la señal obtenida en el caso coherente sobre la distribución espacial de intensidad de la fuente extendida.

## **1.2 Experimento de Young con iluminación parcialmente coherente**

En el laboratorio de esparcimiento de luz del Departamento de Óptica del CICESE se habían llevado a cabo experimentos previos para observar el ensanchamiento de la señal de retroesparcimiento, utilizando una fuente compuesta por un láser y un difusor giratorio, pero no se había podido observar el fenómeno. Debido a esto, en el presente trabajo se decidió llevar a cabo experimentos más simples que permitieran asegurar en forma cuantitativa que la coherencia espacial de la iluminación producida por este tipo de fuente estaba siendo controlada apropiadamente.

El experimento clásico con iluminación parcialmente coherente es el experimento de la doble rendija de Young utilizando una fuente térmica (Thompson y Wolf, 1957). En la primera etapa de este trabajo se lleva

a cabo este experimento con la fuente láser más un difusor y se hacen las comparaciones necesarias con evaluaciones numéricas de las fórmulas teóricas.

## **1.3 Objetivos de la tesis**

### **1.3.1 Objetivos generales**

- 1) Implementar una fuente que produzca iluminación parcialmente coherente (coherencia espacial) utilizando luz láser para llevar a cabo experimentos con iluminación de baja coherencia espacial
- 2) Estudiar el fenómeno de retroesparcimiento reforzado con luz de baja coherencia espacial en una configuración de doble paso.

### **1.3.2 Objetivos particulares**

- 1) Estudiar la influencia de los distintos parámetros experimentales sobre la coherencia espacial de la iluminación producida por la fuente propuesta hasta lograr un buen acuerdo entre los resultados experimentales y cálculos numéricos basados en la teoría.
- 2) Lograr controlar el ancho de la señal de EBS en una configuración de doble paso variando las características de la fuente incoherente.
- 3) Desarrollar una teoría que explique el ensanchamiento de la señal de EBS para la configuración propuesta y llevar a cabo cálculos numéricos para obtener curvas que muestren al menos semicuantitativamente el comportamiento observado.

## **1.4 Estructura de la tesis**

La tesis está dividida en seis capítulos. En el capítulo 1 se describe la motivación del tema de tesis, el fenómeno de retroesparcimiento reforzado y los objetivos del trabajo desarrollado, tanto generales como particulares.

En el capítulo 2 se estudia el experimento de Young, tanto de forma teórica como experimental, utilizando iluminación parcialmente coherente, con el propósito de comprobar la variación de coherencia producida al cambiar el tamaño de la fuente que se utilizó en los experimentos. Tradicionalmente, para obtener teóricamente el patrón de difracción de este experimento se utiliza la teoría de coherencia parcial, pero en este capítulo se utiliza un método alternativo para la obtención del patrón que no hace uso de dicha teoría.

En el capítulo 3 se exponen conceptos básicos sobre difusores y los efectos que provocan cuando la luz se transmite a través de éstos. También se presenta la teoría de la pantalla de fase aleatoria, una teoría que permite estudiar analíticamente el fenómeno de retroesparcimiento reforzado. Esta teoría es de importancia porque el trabajo central de esta tesis está basado en ésta.

En el capítulo 4 se analiza teóricamente la configuración de doble paso formada por un difusor y un espejo para la obtención de la señal de retroesparcimiento reforzado, tanto para una fuente puntual como para una fuente extendida. En este análisis se utiliza la teoría de la pantalla de fase aleatoria. Se muestran también las gráficas teóricas que describen el fenómeno de retroesparcimiento reforzado, variando diferentes parámetros del sistema.

En el capítulo 5 se describen los experimentos realizados y se muestran los resultados experimentales obtenidos con el arreglo de doble paso. Dichos resultados están descritos por gráficas y éstas son comparadas con gráficas teóricas.

En el capítulo 6 se proporciona un breve resumen del trabajo realizado, se presentan las conclusiones de la tesis, y se mencionan aspectos a desarrollar como trabajo futuro.

## Capítulo 2. Experimento de Young con una fuente extendida

---

En este capítulo se presenta el trabajo teórico y experimental desarrollado en relación con el experimento de Young, o experimento de la doble rendija utilizando iluminación parcialmente coherente. Se presenta un análisis matemático de este experimento que nos permite hacer una comparación con los resultados experimentales. El método utilizado en el análisis teórico difiere del tratamiento clásico basado en la teoría de coherencia parcial (Born y Wolf, 1970, pág. 513). En el presente trabajo se calcula primero el patrón de difracción en intensidad producido por un solo punto de la fuente extendida y después se hace una superposición de los patrones producidos por todos los puntos de la fuente integrando sobre la distribución espacial de intensidad de la fuente. Esto es posible debido a que la luz que proviene de distintos puntos de la fuente no interfiere en el caso de una fuente extendida incoherente (Goodman, 1985, pág. 303). Hasta donde se sabe, un análisis con este método para el experimento de Young no ha sido reportado en la literatura.

Con respecto a la pantalla de difracción, en lugar de una doble rendija se utilizó una placa de aluminio con dos aberturas circulares. La distancia entre las dos aberturas se varió utilizando diferentes placas de aluminio para observar el patrón de difracción producido en el plano de detección.

### 2.1 Descripción breve del experimento de Young

En la figura 3 se ilustra de manera simplificada el sistema óptico que se implementó para el experimento de Young. La figura muestra un haz divergente de luz láser que ilumina un difusor que gira. El objetivo de microscopio forma una imagen de la zona central del difusor sobre una placa que tiene un pequeño orificio circular. Este orificio constituye la fuente extendida secundaria. La descripción del sistema utilizado para implementar esta fuente secundaria se presenta en la sección 2.3. El tamaño del orificio circular se varió en los experimentos utilizando radios de diferentes valores. La intención de estos orificios es limitar la luz que enfoca el objetivo de microscopio, que después viaja hacia la lente L1. La lente L1 colima la luz recibida y la envía sobre una placa de aluminio que tiene dos aberturas circulares que están separadas lateralmente. Inmediatamente después de ésta, la lente L2 enfoca la luz difractada por las aberturas hacia el plano de observación, donde se encuentra un arreglo bidimensional de detectores.

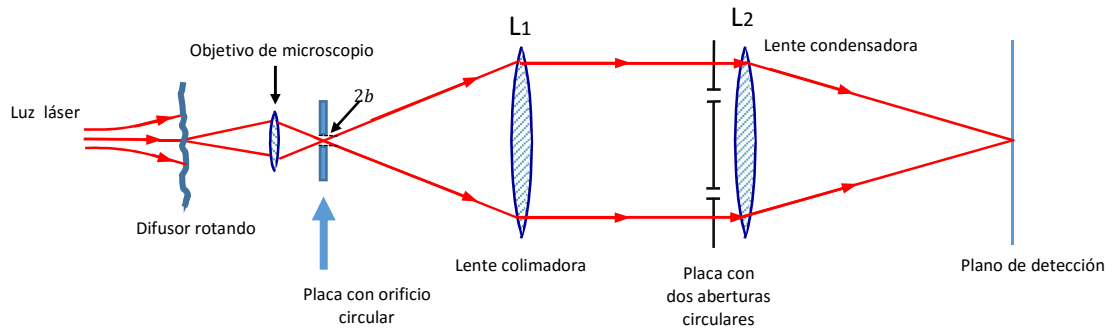


Figura 3. Diagrama esquemático del arreglo utilizado para el experimento de Young con fuente extendida.

## 2.2 Análisis teórico

### 2.2.1 Consideraciones iniciales: Expresión para una onda plana debida a una fuente puntual

Para efectuar el análisis matemático se parte del plano de la fuente secundaria, considerando que hay una fuente puntual  $P_0$  ubicada fuera del eje  $z$  en las coordenadas de  $(x_0, y_0)$  del plano de la fuente.

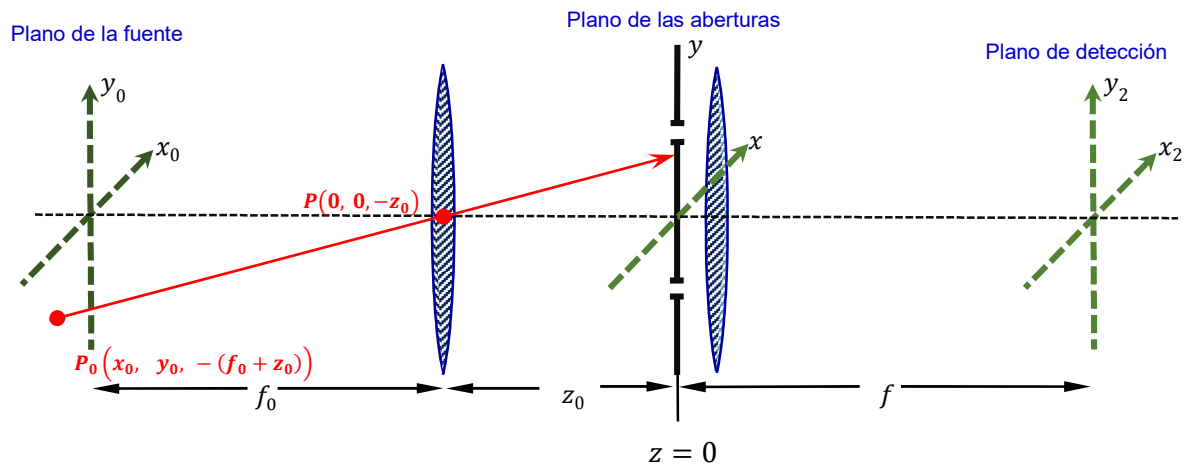


Figura 4. Diagrama esquemático para el análisis teórico mostrando los tres planos coordenados relevantes.  $z = 0$  corresponde al plano de las aberturas.

En la figura 4 se ilustra lo mencionado anteriormente. Se puede apreciar un esquema general donde se ubica el punto  $P_0$  que es una fuente puntual que ilumina la primera lente, que tiene el propósito de colimar la luz que recibe para generar ondas planas. Se observa que hay una distancia entre el punto  $P_0$  y el punto  $P$  que es el centro de la primera lente. Dicha distancia la consideramos una distancia vectorial denominada  $\overline{P_0P}$ . En la figura 5 se puede apreciar un esquema que involucra solamente el análisis del vector  $\overline{P_0P}$  y describe la primera mitad del diagrama anterior.

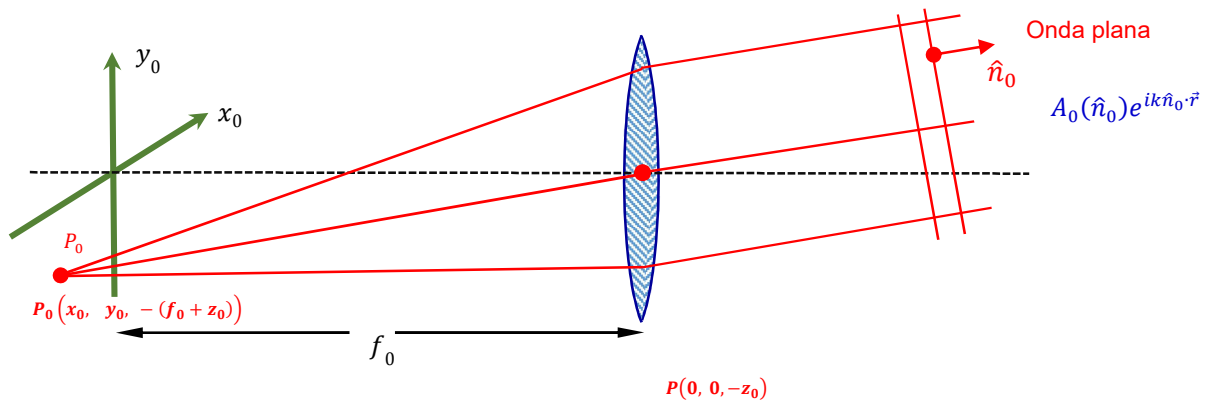


Figura 5. Fuente puntual que envía rayos de luz a una lente colimadora. Dicha lente genera ondas planas.

Tomando en cuenta las ilustraciones ya descritas, el vector  $\overline{P_0P}$  está dado por

$$\overline{P_0P} = (0,0,-z_0) - [x_0, y_0, -(f_0 + z_0)] = (-x_0, -y_0, f_0), \quad (1)$$

y su módulo por

$$|\overline{P_0P}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + f_0^2}. \quad (2)$$

El vector unitario correspondiente a la onda plana debida a la fuente puntual colocada en  $P_0$  está dado por

$$\hat{n}_0 = \frac{\overrightarrow{P_0P}}{|\overrightarrow{P_0P}|} = (n_x, n_y, n_z), \quad (3)$$

donde

$$n_x = \frac{-x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + f_0^2}}; \quad n_y = \frac{-y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + f_0^2}}; \quad n_z = \frac{f_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + f_0^2}}. \quad (4)$$

En la práctica,

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{f_0^2} \ll 1, \quad (5)$$

y por lo tanto se puede hacer la aproximación

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + f_0^2} = \sqrt{f_0^2 \left[ 1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{f_0^2} \right]} = f_0 \sqrt{1 + \frac{x_0^2 + y_0^2}{f_0^2}} \approx f_0, \quad (6)$$

que resulta

$$n_x \approx -\frac{x_0}{f_0}; \quad n_y \approx -\frac{y_0}{f_0}. \quad (7)$$

En el plano  $z = 0$

$$\begin{aligned} \exp(ik\hat{n}_0 \cdot \vec{r}) &= \exp[ik(n_x x + n_y y + n_z z)] = \exp[ik(n_x x + n_y y)] \\ &= \exp \left\{ ik \left[ \left( -\frac{x_0}{f_0} \right) x + \left( -\frac{y_0}{f_0} \right) y \right] \right\} = \exp \left[ -i \frac{k}{f_0} (x_0 x + y_0 y) \right] = \exp \left( -i \frac{k}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \vec{r} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$  es un vector en el plano  $(x_0, y_0)$  y  $\vec{r} = (x, y)$  es un vector en el plano  $(x, y)$ , y



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (9)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda de la luz en el vacío.

### 2.2.2 Derivación del patrón de difracción producido por una fuente puntual

Considérese una pantalla de difracción consistente de dos aberturas circulares de radio  $a$  en un plano opaco, separadas por una distancia  $d$  en la dirección vertical, como se muestra en la figura 6.

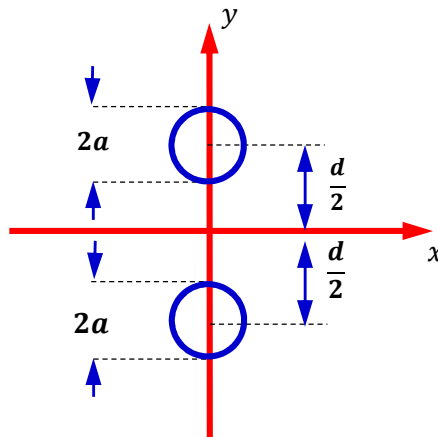


Figura 6. Pantalla de difracción utilizada en el experimento de Young.

La función de transmitancia de amplitud compleja de la pantalla de difracción, está dada por

$$t(x, y) = \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2}}{a}\right) + \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2}}{a}\right), \quad (10)$$

donde

$$\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq a \\ 0 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} > a. \end{cases} \quad (11)$$

Utilizando la integral de difracción en la aproximación de Fresnel, la amplitud compleja en el plano de observación  $(x_2, y_2)$  está dada por (Goodman, 1996, pág. 103)

$$U(x_2, y_2; x_0, y_0) = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(x_0, y_0) \exp\left[-i\frac{k}{f_0}(x_0x + y_0y)\right] \\ \times t(x, y) \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right] \exp\left\{i\frac{k}{2f}[(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2]\right\} dx dy, \quad (12)$$

donde  $A_0(x_0, y_0) \exp\left[-i\frac{k}{f_0}(x_0x + y_0y)\right]$  representa la onda plana y  $\exp\left[-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right]$  es la función de transmitancia de amplitud compleja de la lente.

Entonces,

$$U(x_2, y_2; x_0, y_0) = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} A_0(x_0, y_0) \exp\left[i\frac{k}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\frac{k}{f_0}(x_0x + y_0y)\right] t(x, y) \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x^2 + y^2)\right] dx dy, \quad (13)$$

y utilizando la ecuación (10) se obtiene

$$U(x_2, y_2; x_0, y_0) = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} A_0(x_0, y_0) \exp\left[i\frac{k}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right]$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[ \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ} \left( \frac{\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2}}{a} \right) \exp \left\{ -ik \left[ \left( \frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f} \right) x + \left( \frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f} \right) y \right] \right\} dx dy \right. \\
& \left. + \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ} \left( \frac{\sqrt{x^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2}}{a} \right) \exp \left\{ -ik \left[ \left( \frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f} \right) x + \left( \frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f} \right) y \right] \right\} dx dy \right]. \quad (14)
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables

$$x' = x, \quad y' = y - \frac{d}{2}, \quad (15)$$

en la primera integral en el lado derecho de la ecuación (14), y el cambio de variables

$$x' = x, \quad y' = y + \frac{d}{2}, \quad (16)$$

en la segunda integral, se tiene que

$$\begin{aligned}
U(x_2, y_2; x_0, y_0) &= \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} A_0(x_0, y_0) \exp \left[ i \frac{k}{2f} (x_2^2 + y_2^2) \right] \\
& \times \left\{ \exp \left[ -i \frac{kd}{2} \left( \frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f} \right) \right] + \exp \left[ i \frac{kd}{2} \left( \frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f} \right) \right] \right\} \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ} \left( \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{a} \right) \\
& \times \exp \left\{ -ik \left[ \left( \frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f} \right) x' + \left( \frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f} \right) y' \right] \right\} dx' dy'. \quad (17)
\end{aligned}$$

La integral en la ecuación anterior corresponde al patrón de difracción de Fraunhofer de una abertura circular (Born y Wolf, 1970, págs. 385 y 395). En el apéndice A se demuestra que

$$\begin{aligned}
& \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{a}\right) \exp\left\{-ik\left[\left(\frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f}\right)x' + \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right)y'\right]\right\} dx' dy' \\
&= \pi a^2 \frac{2J_1\left(ka\sqrt{\left(\frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right)^2}\right)}{ka\sqrt{\left(\frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right)^2}}, \tag{18}
\end{aligned}$$

donde  $J_1(\ )$  es una función Bessel de primera clase de orden uno. La función de la derecha de la igualdad (sin el factor  $\pi a^2$ ) es llamada la función de Airy.

Para simplificar la notación se pone

$$Q\left(ka\sqrt{\left(\frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right)^2}\right) = \frac{2J_1\left(ka\sqrt{\left(\frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right)^2}\right)}{ka\sqrt{\left(\frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right)^2}}. \tag{19}$$

Regresando a la ecuación (17), se tiene que

$$\begin{aligned}
U_2(x_2, y_2; x_0, y_0) &= \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} A_o(x_0, y_0) \exp\left[i\frac{k}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \pi a^2 Q\left(ka\sqrt{\left(\frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right)^2}\right) \\
&\quad \times 2\cos\left[\frac{kd}{2}\left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right)\right]. \tag{20}
\end{aligned}$$

Este es el patrón de difracción de Fraunhofer en amplitud compleja en el plano  $(x_2, y_2)$  debido a una fuente puntual en coordenadas  $(x_0, y_0)$  en el plano de la fuente extendida.

La distribución de intensidad en el patrón de difracción está dada por

$$I(x_2, y_2; x_0, y_0) = |U(x_2, y_2; x_0, y_0)|^2$$

$$= \left(\frac{2\pi a^2}{\lambda f}\right)^2 |A_0(x_0, y_0)|^2 Q^2 \left( ka \sqrt{\left(\frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right)^2} \right) \cos^2 \left[ \frac{kd}{2} \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right) \right]. \quad (21)$$

### 2.2.3 Derivación del patrón de difracción producido por una fuente extendida

Supongamos que  $|A_0(x_0, y_0)|^2 = \text{constante} = I_0$  dentro de un círculo del radio  $b$ . Esta fuente incoherente circular de radio  $b$  de intensidad uniforme se representa por la función

$$I_0(x_0, y_0) = |A_0(x_0, y_0)|^2 = I_0 \text{circ} \left( \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b} \right). \quad (22)$$

Para superponer los patrones de difracción de intensidad producidos por todos los puntos de la fuente debemos calcular la integral

$$I(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} I(x_2, y_2; x_0, y_0) dx_0 dy_0. \quad (23)$$

Sustituyendo la ecuación (21) en esta última ecuación y utilizando la ecuación (22) se tiene que

$$I(x_2, y_2) = \left(\frac{2\pi a^2}{\lambda f}\right)^2 I_0 \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ} \left( \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b} \right) Q^2 \left( ka \sqrt{\left(\frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right)^2} \right)$$

$$\times \cos^2 \left[ \frac{kd}{2} \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}\right) \right] dx_0 dy_0$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2\pi a^2}{\lambda f}\right)^2 I_0 \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b}\right) Q^2 \left(\frac{ka}{f_0} \sqrt{\left(x_0 + \frac{f_0 x_2}{f}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{f_0 y_2}{f}\right)^2}\right) \\
&\quad \cos^2 \left[\frac{kd}{2f_0} \left(y_0 + \frac{f_0 y_2}{f}\right)\right] dx_0 dy_0. \tag{24}
\end{aligned}$$

En el integrando de la ecuación anterior, si el ancho del lóbulo principal de la función de Airy es mucho mayor que el ancho  $2b$  de la función  $\text{circ}(\cdot)$ , se puede hacer la aproximación

$$\begin{aligned}
I(x_2, y_2) &\approx \left(\frac{2\pi a^2}{\lambda f}\right)^2 I_0 Q^2 \left(\frac{ka}{f_0} \sqrt{\left(\frac{f_0}{f} x_2\right)^2 + \left(\frac{f_0}{f} y_2\right)^2}\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b}\right) \\
&\quad \times \cos^2 \left[\frac{kd}{2f_0} \left(y_0 + \frac{f_0 y_2}{f}\right)\right] dx_0 dy_0. \tag{25}
\end{aligned}$$

Utilizando la ecuación (19) se tiene que

$$\begin{aligned}
I(x_2, y_2) &= \left(\frac{2\pi a^2}{\lambda f}\right)^2 I_0 \left[ \frac{2J_1\left(\frac{ka}{f} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)}{\frac{ka}{f} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \right]^2 \\
&\quad \times \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b}\right) \cos^2 \left[\frac{kd}{2f_0} \left(y_0 + \frac{f_0 y_2}{f}\right)\right] dx_0 dy_0. \tag{26}
\end{aligned}$$

Se compara ahora el ancho del lóbulo central de la función de Airy en el integrando de la ecuación (24), con el ancho de la función (22) correspondiente a la fuente. El radio de la zona central de la función de Airy está dado por (Goodman, 1996, pág. 77)

$$\rho_o = 0.61 \frac{\lambda f_o}{a}. \quad (27)$$

Recordemos que  $a$  es el radio de los orificios circulares de la pantalla de difracción,  $f_o$  es la distancia focal de la lente colimadora y  $b$  es el radio de la fuente uniforme. Tomando  $\lambda = 0.6328 \times 10^{-3}$  mm,  $f_o = 0.5 \times 10^3$  mm y  $a = 0.31$  mm, obtenemos para el diámetro de la zona central  $D_o = 2\rho_o = 1.245$  mm.

Considerando que el radio  $b$  de la fuente secundaria es igual a  $40 \mu\text{m}$ , entonces

$$\frac{D_o}{2b} = \frac{1.245}{0.08} = 15.56. \quad (28)$$

El cociente de las áreas de los dos círculos es:

$$\left(\frac{\rho_o}{b}\right)^2 = 242.26. \quad (29)$$

En el trabajo experimental no se utilizaron valores del radio de la fuente secundaria mayores a  $40 \mu\text{m}$ , por lo que consideramos que la aproximación obtenida por la ecuación (25) es adecuada.

Utilizando la identidad  $\cos^2\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\phi$ , la integral en la ecuación (26) se puede escribir como

$$\begin{aligned} J &= \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}{b}\right) \frac{1}{2} \left\{ 1 + \cos\left[\frac{kd}{f_o}\left(y_o + \frac{f_o}{f}y_2\right)\right] \right\} dx_o dy_o \\ &= \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}{b}\right) dx_o dy_o + \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_o^2 + y_o^2}}{b}\right) \cos\left[\left(\frac{kd}{f_o}y_o + \frac{kd}{f}y_2\right)\right] dx_o dy_o. \quad (30) \end{aligned}$$

Además,

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b}\right) dx_0 dy_0 = \pi b^2, \quad (31)$$

y

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b}\right) \cos\left[\left(\frac{kd}{f_0} y_0 + \frac{kd}{f} y_2\right)\right] dx_0 dy_0 &= \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b}\right) \\ &\times \left[ \cos\left(\frac{kd}{f_0} y_0\right) \cos\left(\frac{kd}{f} y_2\right) - \text{sen}\left(\frac{kd}{f_0} y_0\right) \text{sen}\left(\frac{kd}{f} y_2\right) \right] dx_0 dy_0, \end{aligned} \quad (32)$$

donde utilizamos la igualdad  $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \text{sen}\alpha\text{sen}\beta$ .

Entonces

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \pi b^2 + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{kd}{f} y_2\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b}\right) \cos\left(\frac{kd}{f_0} y_0\right) dx_0 dy_0 \\ &- \frac{1}{2} \text{sen}\left(\frac{kd}{f} y_2\right) \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b}\right) \text{sen}\left(\frac{kd}{f_0} y_0\right) dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (33)$$

En el apéndice A se demuestra que

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b}\right) \cos\left(\frac{kd}{f_0} y_0\right) dx_0 dy_0 = \pi b^2 \frac{2J_1\left(\frac{kdb}{f_0}\right)}{\frac{kdb}{f_0}}, \quad (34)$$

y que

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b}\right) \text{sen}\left(\frac{kd}{f_0} y_0\right) dx_0 dy_0 = 0; \quad (35)$$

por lo tanto,



$$J = \frac{\pi b^2}{2} \left[ 1 + \frac{2J_1\left(\frac{kdb}{f_0}\right)}{\frac{kdb}{f_0}} \cos\left(\frac{kd}{f} y_2\right) \right]. \quad (36)$$

Sustituyendo esta última expresión en lugar de la integral de la ecuación (26) se puede escribir

$$I(x_2, y_2) = \left(\frac{2\pi a^2}{\lambda f}\right)^2 I_0 \left[ \frac{2J_1\left(k\frac{a}{f}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)}{k\frac{a}{f}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \right]^2 \frac{\pi b^2}{2} \left[ 1 + \frac{2J_1\left(\frac{kdb}{f_0}\right)}{\frac{kdb}{f_0}} \cos\left(\frac{kd}{f} y_2\right) \right]. \quad (37)$$

Finalmente, normalizando este resultado por su valor en  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = 0$ , se obtiene

$$I_N(x_2, y_2) = \frac{I(x_2, y_2)}{2\left(\frac{\pi a^2}{\lambda f}\right)^2 \pi b^2 I_0 B} = \left[ \frac{2J_1\left(k\frac{a}{f}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}\right)}{k\frac{a}{f}\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \right]^2 \left[ 1 + \frac{2J_1\left(\frac{kdb}{f_0}\right)}{\frac{kdb}{f_0}} \cos\left(\frac{kd}{f} y_2\right) \right], \quad (38)$$

donde

$$B = 1 + \frac{2J_1\left(\frac{kdb}{f_0}\right)}{\left(\frac{kdb}{f_0}\right)}. \quad (39)$$

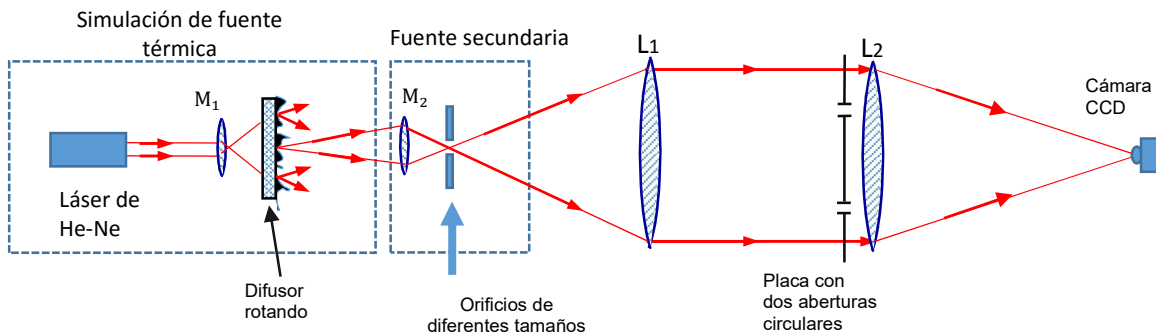
El resultado de la ecuación (38) coincide con el obtenido por Thompson y Wolf (1957), que fue derivado utilizando la teoría de coherencia parcial (ver también Born y Wolf, 1970, pág. 515). El efecto de la fuente extendida aparece a través de la función de Airy que multiplica a la función coseno correspondiente a las franjas de interferencia, y determina el contraste o visibilidad de las franjas. En la teoría de coherencia parcial este factor es llamado el grado complejo de coherencia y se denota por  $\mu$  (Born y Wolf, 1970, pág. 514):

$$\mu = \frac{2J_1\left(\frac{kdb}{f_0}\right)}{\frac{kdb}{f_0}}. \quad (40)$$

Se puede observar que es función de la distancia  $d$  entre las aberturas, el radio  $b$  de la fuente extendida y la distancia focal  $f_0$  de la lente colimadora. Esta función toma valores entre 1.0 y -0.13 y se discute en la próxima sección.

### 2.3 Resultados experimentales

En la figura 7 se muestra el arreglo experimental utilizado con sus diferentes componentes.



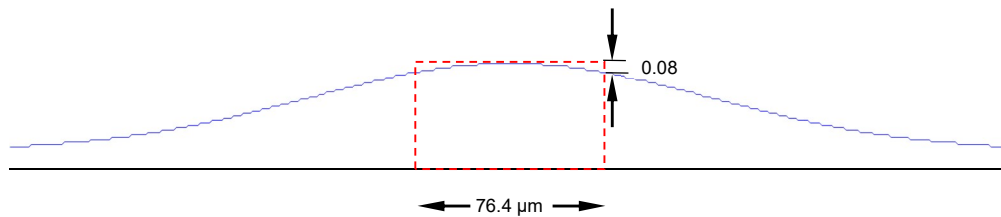
**Figura 7.** Diagrama mostrando los componentes del arreglo experimental.  $M_1$ : objetivo de microscopio x4,  $M_2$ : objetivo de microscopio x10,  $L_1$ : lente colimadora de distancia focal  $f_0 = 500$  mm,  $L_2$ : lente condensadora de distancia focal  $f = 1000$  mm.

Además de los elementos mostrados en la figura 3, se muestra un láser de Helio-Neón ( $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ ), una cámara CCD (por sus siglas en inglés) y un objetivo de microscopio  $M_1$  de amplificación x4 utilizado para hacer divergir el haz proveniente del láser. Este haz tiene un perfil de intensidad Gaussiano en el plano del difusor y el segundo objetivo  $M_2$  de amplificación x10 forma una imagen de este perfil Gaussiano en el plano del orificio de la fuente secundaria. El conjugado largo de  $M_2$  se encuentra hacia el difusor, de manera que opera con una amplificación  $m = 1/10$ . En el plano del orificio se tiene también un perfil de intensidad Gaussiano dado por

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_i^2}\right), \quad (41)$$

donde  $r$  es la coordenada radial en el plano de la abertura,  $w_i$  es el semiancho de la distribución de intensidad en el punto  $1/e$  e  $I_0$  es una constante.

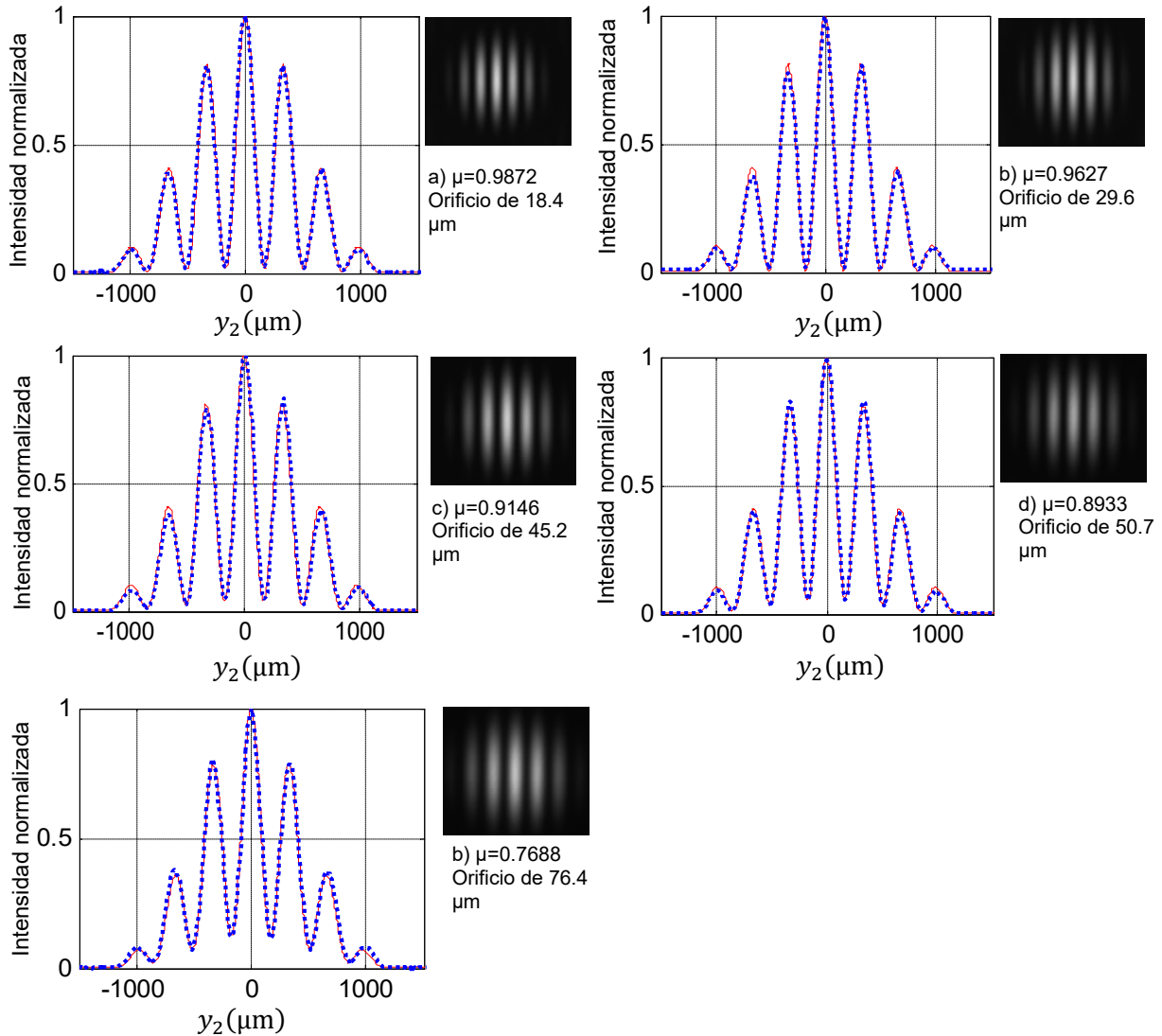
El criterio utilizado para considerar que la fuente secundaria tenía una intensidad uniforme fue que la intensidad en la orilla del orificio no cayera a menos del 90% de su valor en el centro del orificio. Esto se ilustra en la figura 8. Para los parámetros utilizados en el experimento se calculó un valor de  $w_i = 0.13$  mm. Por otro lado, el orificio circular más grande utilizado tenía un radio  $b = 0.0382$  mm.



**Figura 8. Perfil Gaussiano de intensidad del haz que ilumina el orificio de la fuente secundaria. Semiancho del haz Gaussiano  $w_i = 0.13$  mm. La intensidad del haz en el extremo del orificio cae al 92 % de su valor en el centro del orificio.**

La ecuación (38) es la expresión para la intensidad normalizada que se utilizó para obtener las gráficas teóricas que fueron comparadas con los resultados experimentales. Se utilizaron tres pantallas de difracción con diferentes distancias entre sus aberturas. La primera pantalla tiene orificios de 0.274 mm de radio separados por una distancia de 1.87 mm. Se varió el diámetro de la fuente secundaria empleando valores de 18.4, 29.6, 45.2, 50.7 y 76.4  $\mu\text{m}$ . Las gráficas de la figura 9 muestran los resultados para cada caso. Las de línea continua representan los resultados teóricos mientras que las de línea punteada representan los resultados experimentales. Ambas gráficas (teórica y experimental) fueron superpuestas para cada valor del radio de la fuente para propósitos de comparación. Se utilizó para este experimento una lente colimadora de distancia focal  $f_0 = 500$  mm y una lente condensadora de distancia focal  $f = 1000$  mm. (Ver figura 7 del inicio de esta sección).

Cada gráfica muestra dos parámetros que se describen a continuación. Primero, el valor  $\mu$  o grado complejo de coherencia, luego el diámetro del orificio que se usó como fuente secundaria para iluminar la pantalla de difracción. Como se aprecia en las fotografías del lado derecho de cada gráfica, hay un patrón de difracción grabado, y con un algoritmo de Matlab para cada fotografía, se obtuvo una traza transversal que muestra la intensidad normalizada de cada una.



**Figura 9. Conjunto de gráficas que muestra el patrón de difracción usando una pantalla de difracción de distancia  $d = 1.87$  mm de separación entre sus aberturas circulares de radio  $a = 0.274$  mm. Gráficas teóricas calculadas con  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .**

Lo que se puede distinguir en estas gráficas con sus imágenes es que si se aumenta el tamaño de la fuente secundaria, los mínimos de la gráfica se alejarán del eje horizontal  $y_2$  y el grado complejo de coherencia  $\mu$  irá disminuyendo, es decir, las franjas irán perdiendo contraste donde se observa que  $\mu$  va desde 0.9872

hasta 0.7688. Para incrementar este efecto se usó otra pantalla con valor de separación de 4.89 mm entre sus aberturas circulares. Esto aumentó el número de franjas.

En la figura 10 se aprecian las gráficas que muestran estos cambios. Se puede observar que si se aumenta la distancia entre las aberturas el número de franjas aumenta. También es fácil notar que si se incrementa el tamaño de la fuente secundaria, el valor de  $\mu$  va disminuyendo así como la visibilidad de las franjas.

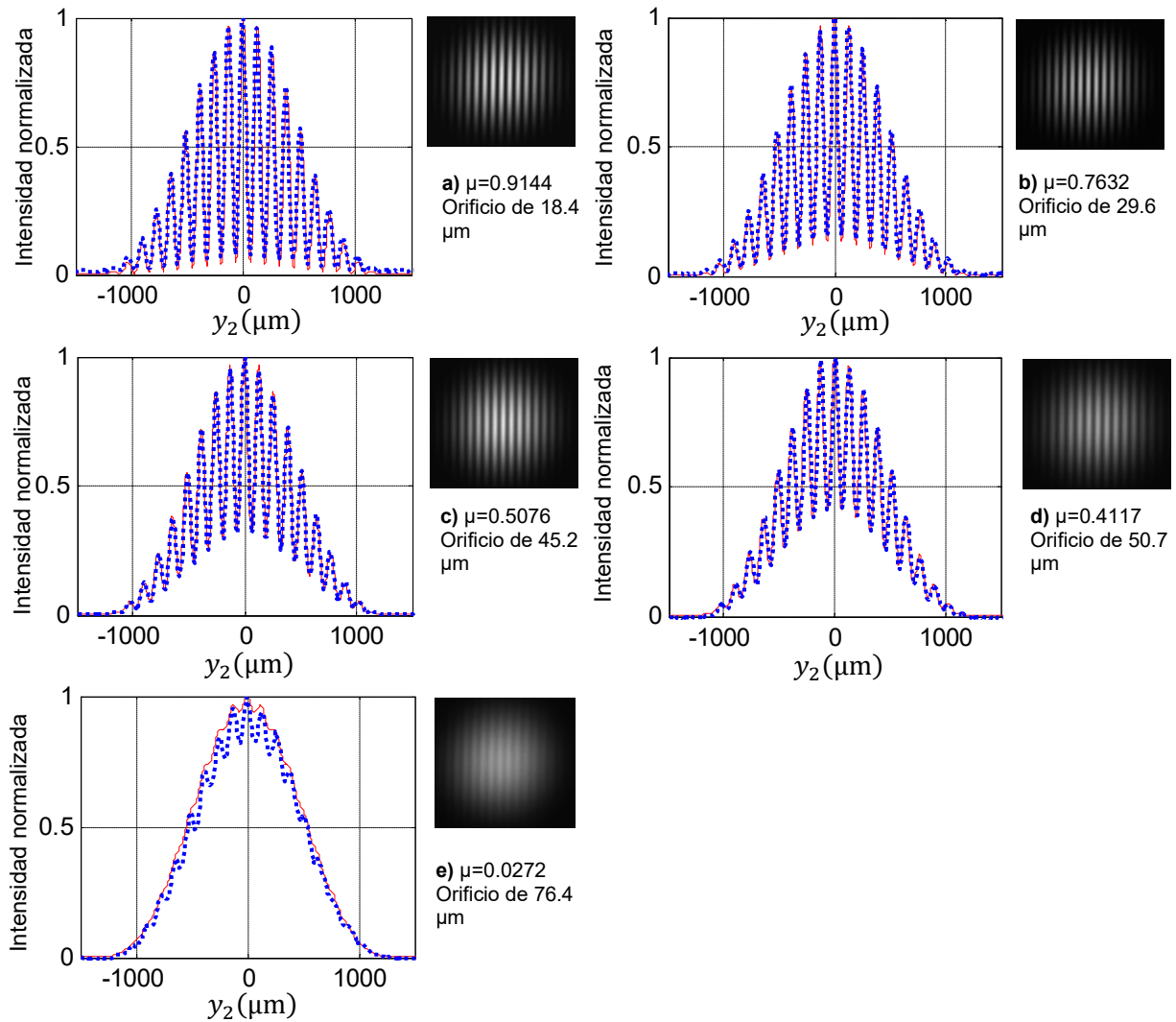


Figura 10. Patrones de difracción utilizando una pantalla de difracción de distancia  $d = 4.89$  mm de separación entre sus aberturas circulares de radio  $a = 0.293$  mm. Gráficas teóricas calculadas con  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

Como se puede observar, las gráficas teóricas en línea continua y las gráficas experimentales en línea punteada tienen un buen empatamiento, es decir la teoría concuerda con el experimento. Para las dos pantallas de difracción existe buen acuerdo al variar los parámetros mencionados.

Ahora bien, se consideró una pantalla de difracción con separación  $d = 9.97$  mm, es decir, aumentamos la separación entre las aberturas comparado con las pantallas anteriores (ver figura 11).

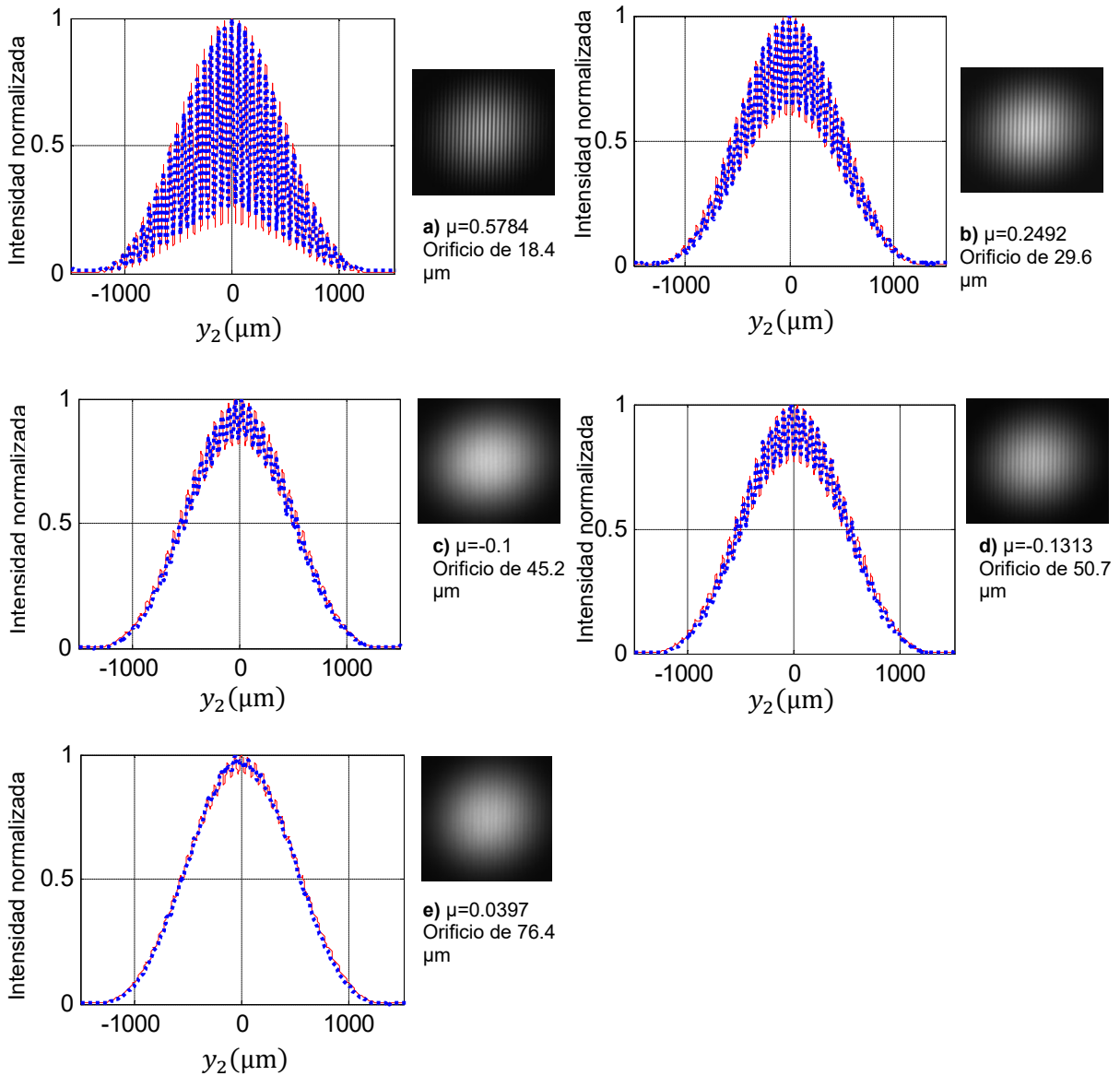


Figura 11. Patrones de difracción usando una pantalla de difracción de distancia  $d = 9.97$  mm de separación entre sus aberturas circulares de radio  $\alpha = 0.282$  mm. Gráficas teóricas calculadas con  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ .

Se aprecia que la cantidad de franjas se incrementa y al aumentar el diámetro de la fuente secundaria, el grado complejo de coherencia disminuye. En el inciso 11 a) se observa que el grado de coherencia tiene un valor de 0.5784 y se pueden apreciar franjas, mientras que en el inciso e) el valor de grado de coherencia es de 0.0397 por lo que las franjas no se distinguen.

Considerando el grado complejo de coherencia  $\mu$  de la ecuación (40), dicha ecuación está constituida por una función Bessel multiplicada por 2 y dividida entre su argumento. Dicho argumento de la función Bessel se le denomina  $v$ , es decir,

$$v = \frac{kdb}{f_0}, \quad (42)$$

y tomando en cuenta la ecuación (40) se puede escribir que

$$\mu = \frac{2J_1(v)}{v}. \quad (43)$$

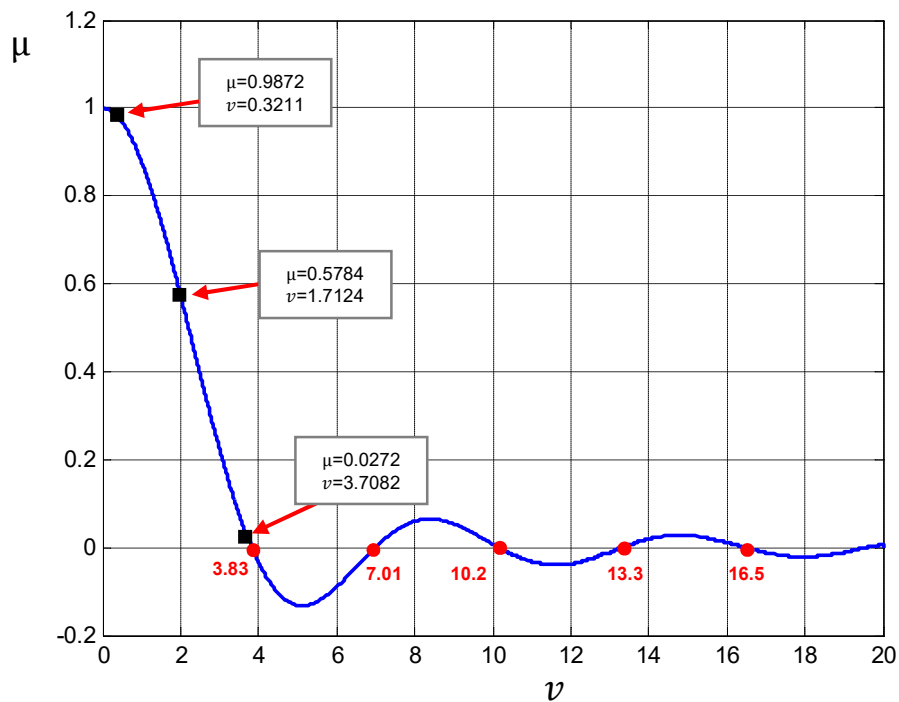


Figura 12. Gráfica que muestra el grado de coherencia que determina la visibilidad de las franjas para distintos valores del argumento  $v$  de la función Bessel.

Se puede apreciar en la gráfica de la figura 12 que en el punto máximo la función es igual a uno, es decir  $\mu=1$ , lo que significa que las franjas tendrán máxima visibilidad. Si la función Bessel disminuye, la visibilidad de las franjas disminuirá. Al llegar a  $\mu=0$  las franjas no se distinguirán. Estos cambios se pueden apreciar de forma progresiva en los resultados ya mostrados.

Si el grado de coherencia  $\mu$  tiene un valor negativo, la gráfica de la izquierda de la figura 13 muestra el comportamiento del patrón de difracción para este caso. En el punto central de la gráfica,  $y_2 = 0$ , el patrón de difracción muestra un mínimo. Para este ejemplo mostrado, el valor del grado de coherencia es  $\mu = -0.1$  y se puede localizar este punto en la gráfica de la parte derecha. Se nota que este punto está en función de los valores dados por las ecuaciones (42) y (43).

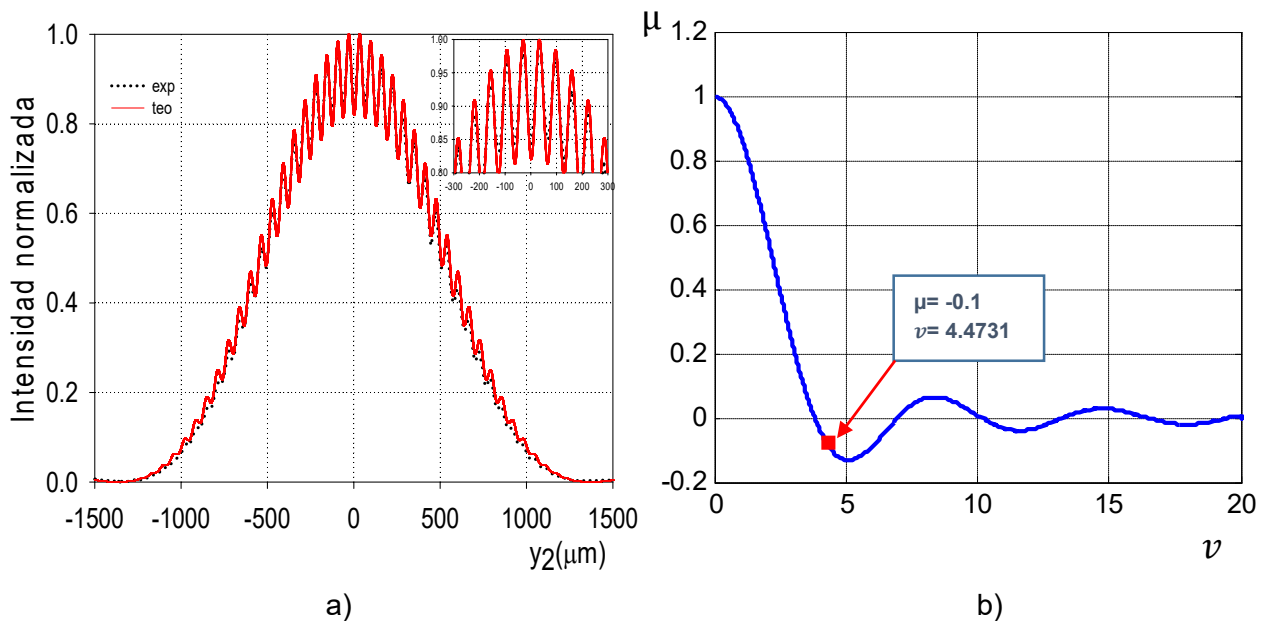


Figura 13. a) Gráficas del patrón de difracción teórico y experimental usando fuente de diámetro de  $45.2 \mu\text{m}$  y pantalla de difracción con separación entre sus aberturas circulares de  $9.97 \text{ mm}$ . En la parte superior derecha se muestra una ampliación del máximo de la señal. b) Gráfica que muestra el valor  $\mu$ . Las Gráficas teóricas fueron calculadas con  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ .



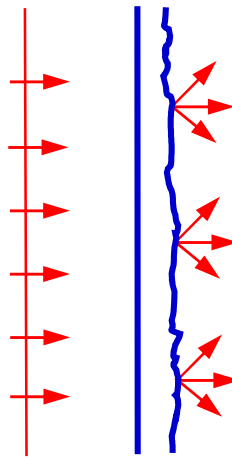
## Capítulo 3. Teoría de la pantalla de fase aleatoria

---

En este capítulo se presentan los conceptos básicos sobre difusores y el efecto que provocan cuando la luz pasa a través de éstos. También se incluye la teoría de la pantalla de fase aleatoria y sus aspectos matemáticos que influyen en la obtención de la señal de retroesparcimiento reforzado (SSR) de acuerdo a las condiciones o parámetros del experimento de doble paso. Dicho experimento se analiza en el siguiente capítulo.

### 3.1 Difusores

La mayoría de los difusores utilizados en transmisión son placas de vidrio que presentan en una de sus caras una frontera lisa y en la opuesta tienen una frontera rugosa. Considerando la figura 14 donde se ilustra un difusor y sus dos tipos superficie, se puede apreciar una placa de vidrio que es atravesada por un haz de luz, primeramente en su parte lisa y luego sale por la frontera rugosa transmitiéndose al otro lado produciendo luz difusa.



**Figura 14. Transmisión de luz por un medio transparente con una frontera rugosa.**

Para el caso de reflexión, la figura 15 muestra los distintos tipos de reflexión que existen. En la ilustración del inciso a) se aprecia una superficie lisa donde la luz incide y luego es reflejada a un ángulo igual al de incidencia de acuerdo a la Ley de Snell. Dicha reflexión es conocida como “especular.” Si la superficie es rugosa, como se ilustra en la figura 15 b), la luz que se refleja es “difusa”, debido a que no salen los rayos con el mismo ángulo de reflexión sino en direcciones diferentes. En la figura 16 se muestra el caso de reflexión por una superficie ligeramente rugosa que presenta los dos tipos de reflexión.



Figura 15. Tipos de reflexión: especular y difusa

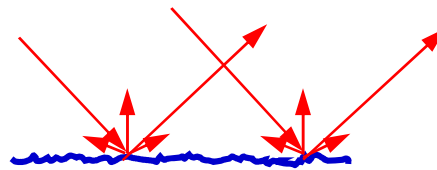


Figura 16. Luz esparcida por reflexión en una superficie ligeramente rugosa.

Los difusores fuertes transmiten o reflejan sólo luz difusa. Los difusores débiles, además de producir luz difusa transmiten o reflejan un haz especular. Esto se muestra en la figura 17 para el caso de luz transmitida. En un difusor fuerte las variaciones de altura de la superficie rugosa son mayores que la longitud de onda de la luz. La luz que lo atraviesa adquiere cambios de fase mayores a  $2\pi$ . Un difusor es débil cuando las variaciones de altura son menores que aproximadamente  $\lambda$ .

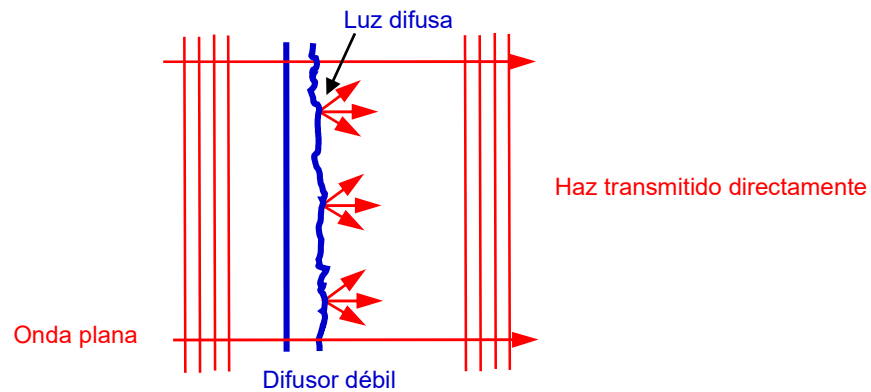
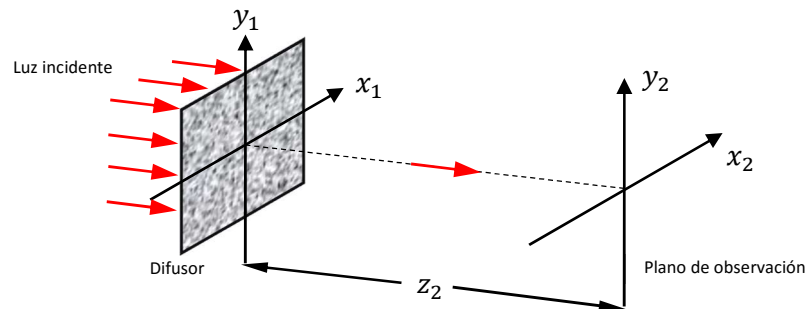


Figura 17. Esquema donde se muestra un frente de onda plano incidente en un difusor y la luz transmitida. En difusores débiles se obtiene luz difusa y luz transmitida directamente.

### 3.2 Patrones de speckle

Ahora imaginemos que después del difusor ilustrado en la figura 14 se coloca un plano de observación que puede ser un papel o una lámina de cartón y que el difusor es iluminado por un haz de luz láser (figura 18).



**Figura 18.** Esquema donde se muestra un difusor que forma un patrón de speckle en un plano de observación.

Si se observa la distribución de intensidad en una región alejada del difusor se obtiene un patrón de interferencia donde la intensidad varía al azar con la posición. En el caso del visible, tal patrón está constituido por una cantidad muy grande de manchas luminosas y oscuras de intensidad variable (figura 19). A esta forma de patrón de interferencia se le conoce como patrón de moteado, granulado o speckle. La amplitud compleja en un punto  $(x_2, y_2, z_2)$  en la zona de observación está dada por una gran suma de ondas con fases al azar, cada una proveniente de un elemento dispersor distinto:

$$A(x_2, y_2, z_2) = \sum_{k=1}^N a_k \exp(i\phi_k). \quad (44)$$

Los patrones de speckle más comunes llamados “clásicos” o “normales” son producidos por difusores fuertes (no hay un haz directo transmitido) y además el haz que incide sobre el difusor ilumina muchos centros dispersores (irregularidades de la superficie). Se dice que cada punto de la región de observación recibe luz de un gran número de elementos dispersores. También recibe el nombre de “speckle Gaussiano” porque la amplitud compleja en el plano de observación constituye un proceso aleatorio Gaussiano complejo. (Goodman, 1984, pág. 15; Dainty, 1976, págs. 1-44).

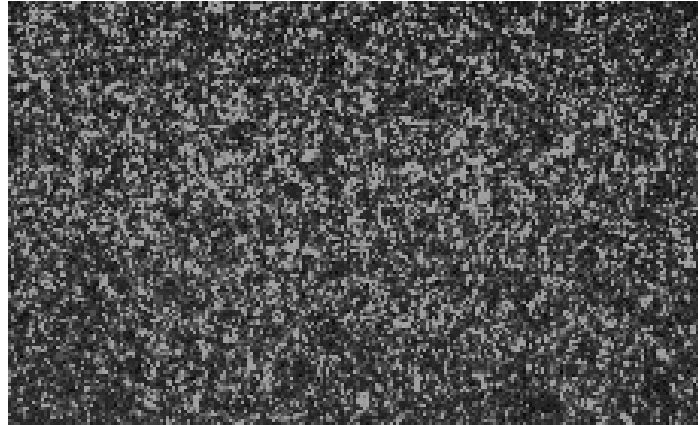


Figura 19. Patrón de speckle tomado con una cámara CCD.

### 3.3 La pantalla de fase aleatoria

Con referencia a la figura 20, considérese un difusor que es iluminado con un haz representado por la amplitud compleja incidente  $A_0(x, y)$ .

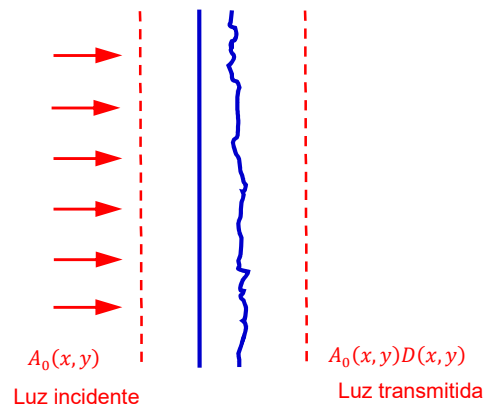


Figura 20. La función de transmitancia de amplitud compleja de un difusor  $D(x, y)$  representa la relación entre la amplitud compleja incidente y la transmitida.

La amplitud compleja  $U_t(x, y)$  transmitida por el difusor está dada por

$$U_t(x, y) = A_0(x, y)D(x, y), \quad (45)$$

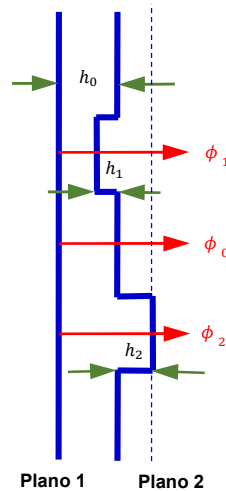
donde  $D(x, y)$  es la función de transmitancia de amplitud compleja del difusor (Goodman, 1996. Pág. 78).

Para un difusor de fase, la transmitancia de amplitud compleja del difusor  $D(x, y)$  está dada por

$$D(x, y) = \exp[i\phi(x, y)]; \quad (46)$$

el difusor introduce sólo cambios de fase sobre la luz incidente, no introduce cambios de amplitud. Los cambios de fase varían al azar sobre el plano del difusor; a estos difusores de fase se les llama “pantalla de fase aleatoria” o “lámina de fase aleatoria”.

En la figura 21 se ilustra la relación entre las variaciones de fase y las variaciones de altura de la superficie rugosa de un cierto difusor con zonas planas de diferentes alturas.



**Figura 21.** Placa de vidrio de índice de refracción  $n$  rodeada por aire.  $h_0$  es el grueso promedio de la placa,  $h_1$  es la profundidad de la depresión y  $h_2$  es la altura del escalón.

Los cambios de fase adquiridos por los tres rayos de la figura 21 al pasar del plano 1 al plano 2 están dados por

$$\phi_1 = kn(h_0 - h_1) + k(h_1 + h_2), \quad (47)$$

$$\phi_0 = knh_0 + kh_2, \quad (48)$$

y

$$\phi_2 = kn(h_0 + h_2). \quad (49)$$

Las variaciones de fase con respecto al nivel medio  $\phi_0$ , están dadas por

$$\phi_1 - \phi_0 = -k(n - 1)h_1, \quad (50)$$

$$\phi_2 - \phi_0 = k(n - 1)h_2. \quad (51)$$

Para una placa de vidrio de índice de refracción  $n$  rodeada por aire, con una superficie rugosa con variaciones de altura  $h(x, y)$  continuas al azar, tenemos que los cambios de fase introducidos por la placa están dados por

$$\phi(x, y) = k(n - 1)h(x, y). \quad (52)$$

La figura 22 muestra cómo cambia el frente de onda incidente al atravesar un difusor de fase.

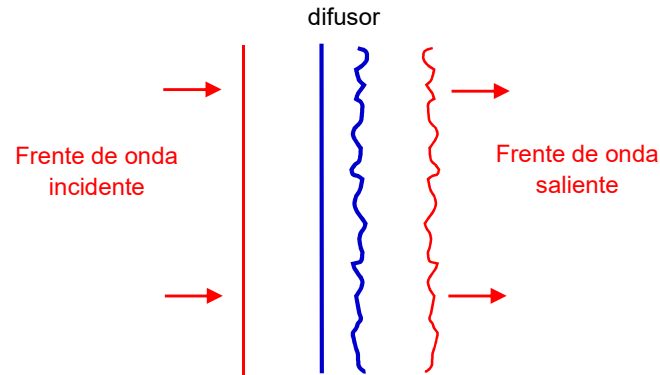


Figura 22. Frente de onda de luz que atraviesa un difusor de fase. El frente de onda saliente adopta el perfil de la superficie rugosa del difusor de forma invertida.

### 3.4 Difusores con fluctuaciones de altura Gaussianas

Las fluctuaciones de fase están relacionadas con las fluctuaciones de altura a través de la constante  $\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)$ , por lo tanto, las fluctuaciones de fase obedecen la misma estadística que las fluctuaciones de altura. Por ejemplo, si  $h(x, y)$  obedece una distribución Gaussiana,  $\phi(x, y)$  también.

El modelo de la pantalla de fase aleatoria se utiliza cuando la escala lateral de las fluctuaciones de la superficie es varias veces mayor que la longitud de onda. Si la escala lateral es comparable con la longitud de onda, se requiere un tratamiento más sofisticado.

#### 3.4.1 Función de densidad de probabilidad de alturas y fase

Si las fluctuaciones de altura de la superficie obedecen la estadística Gaussiana se tiene que

$$p(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_h} \exp(-h^2/2\sigma_h^2), \quad (53)$$

donde  $h = h(x, y)$ ,  $p(h)$  es la función de densidad de probabilidad de las alturas y  $\sigma_h^2$  es la varianza de las alturas, que expresada en términos de la desviación estándar de las alturas está dada por

$$\sigma_h = [\langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2]^{1/2} = \langle h^2 \rangle^{1/2}, \quad (54)$$

si las fluctuaciones de altura tienen media cero, es decir,  $\langle h \rangle = 0$ .

Como las fluctuaciones de fase y altura difieren sólo por una constante multiplicativa la fase aleatoria también obedece la estadística Gaussiana:

$$p(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\phi} \exp\left(\frac{-\phi^2}{2\sigma_\phi^2}\right), \quad (55)$$

donde  $\phi = \phi(x, y)$  y  $p(\phi)$  es la función de densidad de probabilidad de la fase. Además  $\sigma_\phi^2 = \langle \phi^2 \rangle$  y  $\langle \phi \rangle = 0$ .

### 3.4.2 Función de autocorrelación de la transmitancia de amplitud compleja del difusor

La función de autocorrelación  $C_D(x, y; x', y')$  de la función de transmitancia de amplitud compleja del difusor para el caso de la pantalla de fase aleatoria, definida por

$$\begin{aligned} C_D(x, y; x', y') &= \langle D(x, y)D^*(x', y') \rangle = \langle \exp [i\phi(x, y)] \exp [-i\phi(x', y')] \rangle \\ &= \langle \exp\{i[\phi(x, y) - \phi(x', y')]\} \rangle, \end{aligned} \quad (56)$$

es una función muy importante en problemas de esparcimiento de luz por una pantalla de fase aleatoria.

Para calcularla es necesario utilizar una función conjunta de densidad de probabilidades  $p(\phi, \phi')$ :



$$\langle \exp[i(\phi - \phi')] \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} p(\phi, \phi') \exp[i(\phi - \phi')] d\phi d\phi', \quad (57)$$

donde  $\phi = \phi(x, y)$  y  $\phi' = \phi(x', y')$ .

Si  $\phi(x, y)$  es un proceso Gaussiano con  $\langle \phi(x, y) \rangle = 0$ , es decir, media cero, y varianza  $\sigma_\phi^2 = \langle \phi^2(x, y) \rangle$ ,  $p(\phi, \phi')$  está dada por (Davenport y Root, 1958, pág. 148)

$$p(\phi, \phi') = \frac{1}{2\pi\sigma_\phi^2(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\left[\frac{\phi^2 - 2\rho\phi\phi' - \phi'^2}{2\sigma_\phi^2(1-\rho^2)}\right]\right\}, \quad (58)$$

donde

$$\rho = \rho(x, y; x', y') = \rho(x - x', y - y') = \frac{\langle \phi(x, y)\phi(x', y') \rangle}{\sigma_\phi^2} \quad (59)$$

es la función de autocorrelación normalizada de las fluctuaciones de fase. Esta función depende sólo de diferencias de coordenadas si  $\phi(x, y)$  es un proceso estacionario. Dado que  $\phi(x, y)$  y  $h(x, y)$  difieren sólo por una constante multiplicativa, se tiene que

$$\rho(x - x', y - y') = \frac{\langle \phi(x, y)\phi(x', y') \rangle}{\sigma_\phi^2} = \frac{\langle h(x, y)h(x', y') \rangle}{\sigma_h^2}, \quad (60)$$

es decir, la función de autocorrelación normalizada de la fase es igual a la función de autocorrelación normalizada de las alturas.

Sustituyendo la ecuación (58) en la ecuación (57) y evaluando la integral se puede demostrar que (Goodman, 1984, pág.65)

$$\langle \exp\{i[\phi(x, y) - \phi(x', y')]\} \rangle = \exp\{-\sigma_\phi^2[1 - \rho(x - x', y - y')]\}, \quad (61)$$

donde también se utilizó la ecuación (59).

Es común utilizar una función de autocorrelación de fase de forma Gaussiana:

$$\rho(x - x', y - y') = \exp\left\{-\left[\frac{[(x - x')^2 + (y - y')^2]}{\xi^2}\right]\right\}, \quad (62)$$

donde el parámetro  $\xi$  es llamado la longitud de correlación. Es conveniente poner

$$R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}, \quad (63)$$

de manera que

$$\rho(x - x', y - y') = \exp\left\{-\left[\frac{[(x - x')^2 + (y - y')^2]}{\xi^2}\right]\right\} = \exp\left(-\frac{R^2}{\xi^2}\right). \quad (64)$$

Esta función cae al valor  $\exp(-1) = 0.368$  para  $R = \xi$  y  $\xi$  es una medida del ancho de la función de autocorrelación de la fase. De las ecuaciones (56) y (61) tenemos que

$$\begin{aligned} C_D(x, y; x', y') &= \langle D(x, y)D^*(x', y') \rangle = \langle \exp\{i[\phi(x, y) - \phi(x', y')]\} \rangle \\ &= \exp\{-\sigma_\phi^2[1 - \rho(x - x', y - y')]\}, \end{aligned} \quad (65)$$

y utilizando las ecuaciones (61) y (64) se puede escribir

$$C_D(x - x', y - y') = C_D(R) = \exp \left\{ -\sigma_\phi^2 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{R^2}{\xi^2} \right) \right] \right\}. \quad (66)$$

En la figura 23 se muestran gráficas de esta función para varios valores de  $\sigma_\phi$ . Se observa que ésta se hace más angosta según  $\sigma_\phi$  aumenta.

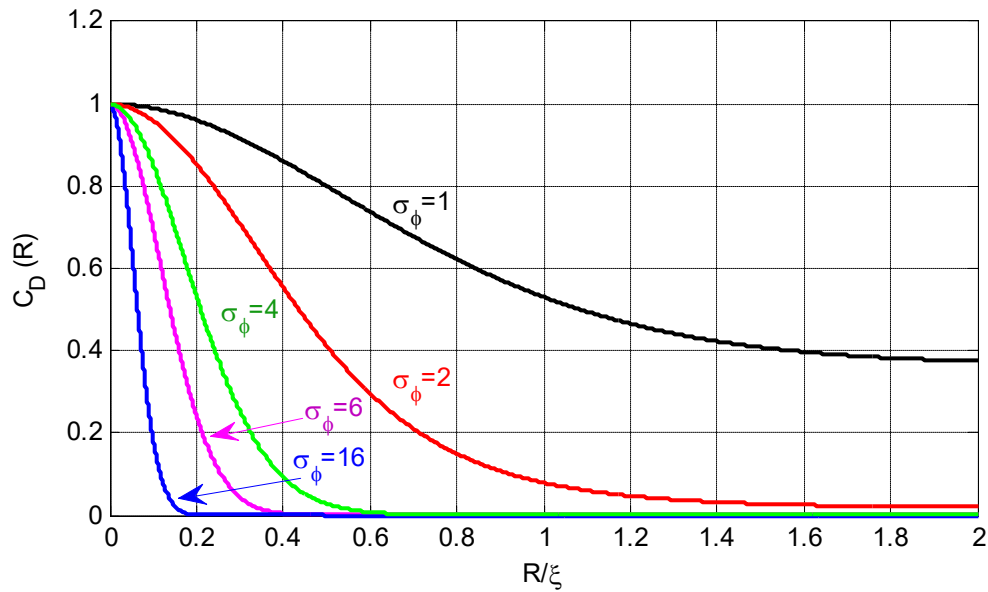


Figura 23. Gráficas de la función de autocorrelación dada por la ecuación (66) para varios valores de  $\sigma_\phi$ .

Utilizando el desarrollo en serie

$$\exp \left( -\frac{R^2}{\xi^2} \right) = 1 - \frac{R^2}{\xi^2} + \frac{1}{2!} \frac{R^4}{\xi^4} - \frac{1}{3!} \frac{R^6}{\xi^6} + \dots, \quad (67)$$

para difusores fuertes con  $\sigma_\phi^2 \gg 1$  se puede hacer la aproximación

$$C_D(R) = \exp \left\{ -\sigma_\phi^2 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{R^2}{\xi^2} + \frac{1}{2!} \frac{R^4}{\xi^4} - \dots \right) \right] \right\} \approx \exp \left[ -\sigma_\phi^2 \left( \frac{R^2}{\xi^2} \right) \right], \quad (68)$$

(Beckmann y Spizzichino, 1963, págs. 85-87), y como  $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$  se tiene que

$$C_D(x - x', y - y') = \exp \left\{ -\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} [(x - x')^2 + (y - y')^2] \right\}. \quad (69)$$

Esta es la función de autocorrelación de la transmitancia de amplitud compleja de la pantalla de fase aleatoria que será utilizada en el siguiente capítulo para llevar a cabo cálculos analíticos de la intensidad promedio de la luz retroesparcida por una configuración de doble paso.

## Capítulo 4. Retroesparcimiento reforzado en una configuración de doble paso: teoría

En este capítulo se analizará la configuración de doble paso formado por un difusor y un espejo que permite obtener la señal de retroesparcimiento reforzado (SRR) para una fuente extendida. En este arreglo se varía el tamaño de la fuente secundaria, lo que permite observar cambios en esta señal. Primeramente se discutirá dicho arreglo y sus partes, luego se analizará teóricamente todo el sistema y se obtendrán fórmulas que nos generarán gráficas de la señal de retroesparcimiento reforzado.

En el análisis teórico se seguirá el mismo procedimiento utilizado en el capítulo 2. Primero se obtendrá la SRR en el caso coherente (iluminación por una fuente puntual), y después se integrará este resultado sobre la distribución de intensidad espacial de una fuente extendida para obtener la SRR para el caso de iluminación parcialmente coherente.

### 4.1 Descripción breve de la configuración de doble paso

Considérese la figura 24 donde se muestra un diagrama del arreglo experimental. Se puede observar que una fuente secundaria extendida ilumina una lente colimadora que generará ondas planas que iluminan un divisor de haz. Este elemento dejará pasar la luz recibida hacia el difusor, que luego llegará al espejo. El espejo reflejará la luz recibida y el frente de onda luminoso volverá a transmitirse por el difusor, después el divisor de haz recibe esa luz para desviarla hacia una lente que la enfocará en el plano de detección, donde se encuentra un arreglo bidimensional de detectores.

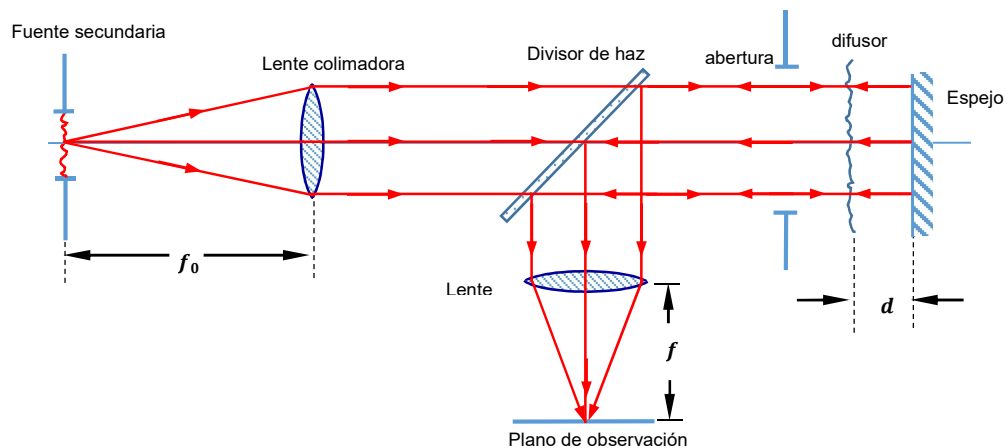


Figura 24. Esquema donde se muestra el arreglo experimental de doble paso formado por diversos elementos.

## 4.2 Análisis teórico: Expresiones generales para la intensidad promedio

Considérese la figura 25 que muestra el sistema de doble paso de la figura 24 “desdoblado” para facilitar el análisis matemático de cada etapa en orden de izquierda a derecha.

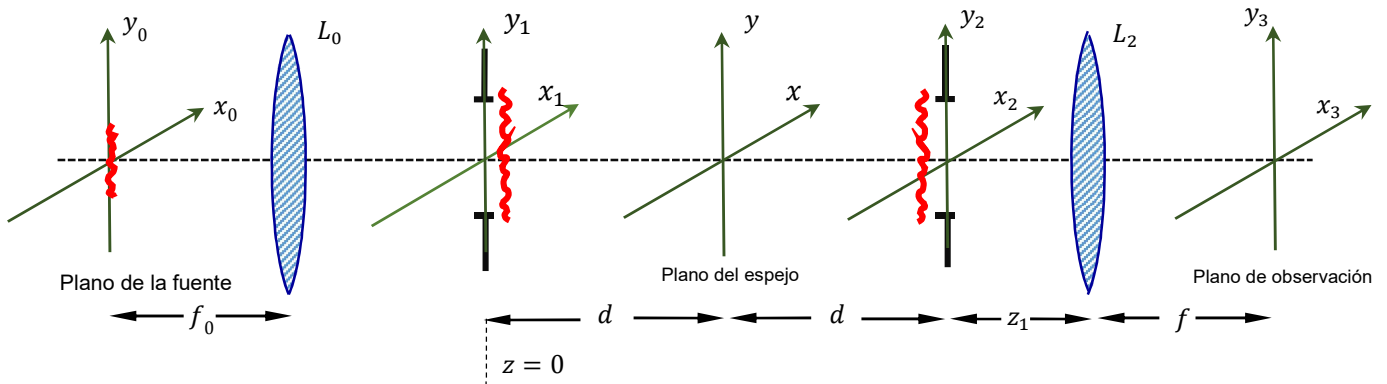


Figura 25. Sistema de doble paso “desdoblado” utilizado en el análisis teórico.

### 4.2.1 Derivación de la intensidad promedio para una fuente puntual

#### 4.2.1.1 Amplitud compleja en el plano de observación

Considérese una fuente puntual colocada en un punto  $(x_0, y_0)$  del plano de la fuente. La primera lente  $L_0$  colimará la luz recibida enviando una onda plana hacia la abertura y el difusor que se encuentra en el plano  $(x_1, y_1)$ . Este sistema de iluminación es igual al descrito en la sección 2.2.1, y de acuerdo con la ecuación (8), el plano  $(x_1, y_1)$  en  $z = 0$  se ilumina por una onda plana de la forma

$$A_1(x_1, y_1) = A(x_0, y_0) \exp \left[ -\frac{ik}{f_0} (x_0 x_1 + y_0 y_1) \right], \quad (70)$$

que utilizando vectores se puede escribir como

$$A_1(\vec{r}_1) = A(\vec{r}_0) \exp \left[ -\frac{k}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1 \right], \quad (71)$$

donde  $\bar{r}_0 = (x_0, y_0)$  es el vector de posición en el plano de la fuente,  $\bar{r}_1 = (x_1, y_1)$  es el vector de posición en el plano del difusor, y  $f_0$  es la distancia focal de la lente colimadora  $L_0$ .

La amplitud compleja inmediatamente después del primer difusor está dada por

$$U_t(x_1, y_1) = A_1(x_1, y_1)P_1(x_1, y_1)D(x_1, y_1), \quad (72)$$

que se puede expresar como

$$U_t(\bar{r}_1) = A_1(\bar{r}_1)P_1(\bar{r}_1)D(\bar{r}_1), \quad (73)$$

donde  $P_1(x_1, y_1)$  es la función de transmitancia de amplitud compleja de la abertura frente al difusor y  $D(x_1, y_1)$  es la función de transmitancia de amplitud compleja del difusor.

Utilizando la integral de difracción en la aproximación de Fresnel, la amplitud compleja  $A_E(x, y)$  en el plano del espejo  $(x, y)$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} A_E(x, y) &= \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \iint_{-\infty}^{\infty} U_t(x, y) \exp\left\{\frac{ik}{2d}[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1 \\ &= \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \iint_{-\infty}^{\infty} A_1(x_1, y_1)P_1(x_1, y_1)D(x_1, y_1) \exp\left\{\frac{ik}{2d}[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1. \end{aligned} \quad (74)$$

Para hacer más compacta la notación se empleará notación vectorial,

$$A_E(x, y) = A_E(\bar{r}) = \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} A_1(\bar{r}_1)P_1(\bar{r}_1)D(\bar{r}_1) \exp\left[\frac{ik}{2d}|\bar{r} - \bar{r}_1|^2\right] d^2\bar{r}_1, \quad (75)$$

donde  $\bar{r} = (x, y)$  es el vector de posición en el plano del espejo,  $d^2\bar{r}_1 = dx_1 dy_1$  y se sobreentiende que se trata de una integral doble sobre el plano  $(x_1, y_1)$ . Utilizando la ecuación (71) se puede escribir

$$A_E(\vec{r}) = \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} A_0(\vec{r}_0) \exp\left[-\frac{ik}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1\right] P_1(\vec{r}_1) D(\vec{r}_1) \exp\left[\frac{ik}{2d} |\vec{r} - \vec{r}_1|^2\right] d^2\vec{r}_1. \quad (76)$$

Para propagar la amplitud compleja del plano del espejo al plano inmediatamente antes del segundo difusor, se utiliza de nuevo la integral de difracción de aproximación de Fresnel:

$$A_2(\vec{r}_2) = \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} A_E(\vec{r}) \exp\left[\frac{ik}{2d} |\vec{r}_2 - \vec{r}|^2\right] d^2\vec{r}, \quad (77)$$

donde  $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$  es el vector de posición en el plano del segundo difusor.

La amplitud compleja inmediatamente después del segundo difusor y la segunda abertura está dada por

$$U_t(\vec{r}_2) = A_2(\vec{r}_2) D(\vec{r}_2) P_2(\vec{r}_2), \quad (78)$$

donde  $D(\vec{r}_2)$  es la función de transmitancia de amplitud compleja del difusor y  $P_2(\vec{r}_2)$  es la función de transmitancia de amplitud compleja de la abertura. Finalmente, la amplitud compleja en el plano de observación (plano de detección) puede escribirse como (Goodman, 1996, pág. 104)

$$\begin{aligned} A(\vec{r}_3; \vec{r}_0) &= \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f} \left(1 - \frac{z_1}{f}\right) r_3^2\right] \int_{-\infty}^{\infty} U_t(\vec{r}_2) \exp\left[-i\frac{k}{f} \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2\right] d^2\vec{r}_2 \\ &= \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} \exp\left[i\frac{k}{2f} \left(1 - \frac{z_1}{f}\right) r_3^2\right] \int_{-\infty}^{\infty} P_2(\vec{r}_2) D(\vec{r}_2) A_2(\vec{r}_2) \exp\left[-i\frac{k}{f} \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2\right] d^2\vec{r}_2, \end{aligned} \quad (79)$$

donde  $r_3^2 = |\vec{r}_3|^2 = x_3^2 + y_3^2$ , y  $\vec{r}_3 = (x_3, y_3)$  es el vector de posición en el plano de observación,  $z_1$  es la distancia del plano del segundo difusor a la segunda lente y  $f$  la distancia focal de esta lente. Esta última



integral es una integral de difracción de Fraunhofer, debido a que el plano de observación se encuentra en el plano focal de la lente.

Sustituyendo la ecuación (77) en la ecuación (79) se tiene que

$$A(\vec{r}_3, \vec{r}_0) = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} \exp\left[i\frac{k}{2f}\left(1 - \frac{z_1}{f}\right)r_3^2\right] \times \int_{-\infty}^{\infty} P_2(\vec{r}_2)D(\vec{r}_2) \left\{ \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} A_E(\vec{r}) \exp\left[\frac{ik}{2d}|\vec{r}_2 - \vec{r}|^2\right] d^2\vec{r} \right\} \exp\left[-i\frac{k}{f}\vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2\right] d^2\vec{r}_2, \quad (80)$$

y utilizando la ecuación (76) se tiene que

$$A(\vec{r}_3; \vec{r}_0) = \frac{\exp(ikf)}{i\lambda f} \exp\left[\frac{ik}{2f}\left(1 - \frac{z_1}{f}\right)r_3^2\right] \int_{-\infty}^{\infty} P_2(\vec{r}_2)D(\vec{r}_2) \left\{ \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikd)}{i\lambda d} \times \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\vec{r}_1)D(\vec{r}_1) A_0(\vec{r}_0) \exp\left[-\frac{ik}{f_0}\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1\right] \exp\left[\frac{ik}{2d}|\vec{r} - \vec{r}_1|^2\right] d^2\vec{r}_1 \right] \exp\left[\frac{ik}{2d}|\vec{r}_2 - \vec{r}|^2\right] d^2\vec{r} \right\} \times \exp\left[-\frac{ik}{f}\vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2\right] d^2\vec{r}_2. \quad (81)$$

Intercambiando los órdenes de integración y sacando de las integrales los términos que no dependen de las variables de integración, se tiene que

$$A(\vec{r}_3; \vec{r}_0) = -\frac{\exp[ik(2d + f)]}{i\lambda^3 d^2 f} \exp\left[\frac{ik}{2f}\left(1 - \frac{z_1}{f}\right)r_3^2\right] A(\vec{r}_0) \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\vec{r}_1)D(\vec{r}_1) \exp\left[-\frac{ik}{f_0}\vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1\right] \exp\left[\frac{ik}{2d}|\vec{r} - \vec{r}_1|^2\right] d^2\vec{r}_1 \right\}$$

$$\times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} P_2(\vec{r}_2) D(\vec{r}_2) \exp \left[ -\frac{ik}{f} \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2 \right] \exp \left[ \frac{ik}{2d} |\vec{r}_2 - \vec{r}|^2 \right] d^2 \vec{r}_2 \right\} d^2 \vec{r}. \quad (82)$$

Poniendo

$$A(\vec{r}_0; \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\vec{r}_1) D(\vec{r}_1) \exp \left[ -\frac{ik}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1 \right] \exp \left[ \frac{ik}{2d} |\vec{r} - \vec{r}_1|^2 \right] d^2 \vec{r}_1, \quad (83)$$

y

$$A(\vec{r}_3; \vec{r}) = \int_{-\infty}^{\infty} P_2(\vec{r}_2) D(\vec{r}_2) \exp \left[ -\frac{ik}{f} \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2 \right] \exp \left[ \frac{ik}{2d} |\vec{r}_2 - \vec{r}|^2 \right] d^2 \vec{r}_2; \quad (84)$$

con estas definiciones se tiene que

$$A(\vec{r}_3; \vec{r}_0) = -\frac{\exp[ik(2d + f)]}{i\lambda^3 d^2 f} \exp \left[ \frac{ik}{2f} \left( 1 - \frac{z_1}{f} \right) r_3^2 \right] A_0(\vec{r}_0) \int_{-\infty}^{\infty} A(\vec{r}_0; \vec{r}) A(\vec{r}_3; \vec{r}) d^2 \vec{r}. \quad (85)$$

De la ecuación (83) se puede apreciar que  $A(\vec{r}_0; \vec{r})$  representa la amplitud compleja correspondiente a un patrón de speckle en el plano del espejo producido por un difusor iluminado por una onda plana originada por una fuente puntual colocada en el punto  $(x_0, y_0)$  del plano de la fuente extendida. De manera similar, de la ecuación (84) se aprecia que  $A(\vec{r}_3; \vec{r})$  representa la amplitud compleja correspondiente a un patrón de speckle en el plano del espejo producido por un difusor iluminado por una onda plana originada por una fuente puntual ficticia colocada en el punto  $(x_3, y_3)$  del plano de observación.

#### 4.2.1.2 Intensidad promedio en el plano de observación

La intensidad en el plano de observación está dada por

$$I(\bar{r}_3; \bar{r}_0) = A(\bar{r}_3, \bar{r}_0)A^*(\bar{r}_3, \bar{r}_0) = \frac{|A_0(\bar{r}_0)|^2}{[\lambda^3 d^2 f]^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} A(\bar{r}_0; \bar{r})A(\bar{r}_3; \bar{r})d^2\bar{r} \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} A(\bar{r}_0; \bar{r})A(\bar{r}_3; \bar{r})d^2\bar{r} \right]^*, \quad (86)$$

y la intensidad promedio por

$$\langle I(\bar{r}_3; \bar{r}_0) \rangle = \frac{|A_0(\bar{r}_0)|^2}{[\lambda^3 d^2 f]^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle A(\bar{r}_0; \bar{r})A(\bar{r}_3; \bar{r})A^*(\bar{r}_0; \bar{r}')A^*(\bar{r}_3; \bar{r}') \rangle d^2\bar{r}d^2\bar{r}'. \quad (87)$$

Suponiendo que un gran número de áreas de correlación independientes del difusor son iluminadas por las ondas planas, la amplitud compleja en un punto del plano del espejo es el resultado de un gran número de contribuciones independientes. Si además el difusor es fuerte, las amplitudes complejas representadas por las ecuaciones (83) y (84) son aproximadamente variables aleatorias Gaussianas, complejas, circulares con media cero (Goodman, 1984, pág. 15). Estas variables tienen la siguiente propiedad de factorización de momentos (Goodman, 1985, pág. 44):

$$\begin{aligned} \langle A(\bar{r}_0; \bar{r})A(\bar{r}_3; \bar{r})A^*(\bar{r}_0; \bar{r}')A^*(\bar{r}_3; \bar{r}') \rangle &= \langle A(\bar{r}_0; \bar{r})A^*(\bar{r}_0; \bar{r}') \rangle \langle A(\bar{r}_3; \bar{r})A^*(\bar{r}_3; \bar{r}') \rangle \\ &+ \langle A(\bar{r}_0; \bar{r})A^*(\bar{r}_3; \bar{r}') \rangle \langle A(\bar{r}_3; \bar{r})A^*(\bar{r}_0; \bar{r}') \rangle. \end{aligned} \quad (88)$$

Sustituyendo esta última ecuación en la ecuación (87) se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{r}_3; \bar{r}_0) \rangle &= \frac{|A_0(\bar{r}_0)|^2}{[\lambda^3 d^2 f]^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle A(\bar{r}_0; \bar{r})A^*(\bar{r}_0; \bar{r}') \rangle \langle A(\bar{r}_3; \bar{r})A^*(\bar{r}_3; \bar{r}') \rangle d^2\bar{r}d^2\bar{r}' \\ &+ \frac{|A_0(\bar{r}_0)|^2}{[\lambda^3 d^2 f]^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \langle A(\bar{r}_0; \bar{r})A^*(\bar{r}_3; \bar{r}') \rangle \langle A(\bar{r}_3; \bar{r})A^*(\bar{r}_0; \bar{r}') \rangle d^2\bar{r}d^2\bar{r}'. \end{aligned} \quad (89)$$

Los integrandos de la ecuación (89), contienen cuatro funciones de correlación que conviene escribir de manera explícita para su evaluación posterior.

Utilizando la ecuación (83) se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle A(\bar{r}_0; \bar{r}) A^*(\bar{r}_0; \bar{r}') \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\bar{r}_1) D(\bar{r}_1) \exp \left[ -\frac{ik}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1 \right] \exp \left[ \frac{ik}{2d} |\bar{r} - \bar{r}_1|^2 \right] d^2 \bar{r}_1 \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\bar{r}_1) D(\bar{r}_1) \exp \left[ -\frac{ik}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1 \right] \exp \left[ \frac{ik}{2d} |\bar{r}' - \bar{r}_1|^2 \right] d^2 \bar{r}_1 \right\}^* \right\rangle \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} P_1(\bar{r}_1) P_1^*(\bar{r}_1') \langle D(\bar{r}_1) D^*(\bar{r}_1') \rangle \exp \left[ -\frac{ik}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1 \right] \exp \left[ \frac{ik}{2d} |\bar{r} - \bar{r}_1|^2 \right] \\
&\quad \times \exp \left[ \frac{ik}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \bar{r}_1' \right] \exp \left[ -\frac{ik}{2d} |\bar{r}' - \bar{r}_1'|^2 \right] d^2 \bar{r}_1 d^2 \bar{r}_1'.
\end{aligned} \tag{90}$$

De la ecuación (84) se tiene

$$\begin{aligned}
\langle A(\bar{r}_3; \bar{r}) A^*(\bar{r}_3; \bar{r}') \rangle &= \left\langle \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P_2(\bar{r}_2) D(\bar{r}_2) \exp \left[ -\frac{ik}{f} \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2 \right] \exp \left[ \frac{ik}{2d} |\bar{r}_2 - \bar{r}|^2 \right] d^2 \bar{r}_2 \right] \right. \\
&\quad \times \left. \left[ \int_{-\infty}^{\infty} P_2(\bar{r}_2) D(\bar{r}_2) \exp \left[ -\frac{ik}{f} \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2 \right] \exp \left[ \frac{ik}{2d} |\bar{r}_2 - \bar{r}'|^2 \right] d^2 \bar{r}_2 \right]^* \right\rangle \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} P_2(\bar{r}_2) P_2^*(\bar{r}_2') \langle D(\bar{r}_2) D^*(\bar{r}_2') \rangle \exp \left[ -\frac{ik}{f} \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2 \right] \exp \left[ \frac{ik}{2d} |\bar{r}_2 - \bar{r}|^2 \right] \\
&\quad \times \exp \left[ \frac{ik}{f} \vec{r}_3 \cdot \bar{r}_2' \right] \exp \left[ -\frac{ik}{2d} |\bar{r}_2' - \bar{r}'|^2 \right] d^2 \bar{r}_2 d^2 \bar{r}_2'.
\end{aligned} \tag{91}$$

De las ecuaciones (83) y (84)

$$\begin{aligned}
\langle A(\vec{r}_0; \vec{r}) A^*(\vec{r}_3; \vec{r}') \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} P(\vec{r}_1) D(\vec{r}_1) \exp\left[-\frac{ik}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1\right] \exp\left[\frac{ik}{2d} |\vec{r} - \vec{r}_1|^2\right] d^2\vec{r}_1 \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} P_2(\vec{r}_2) D(\vec{r}_2) \exp\left[-\frac{ik}{f} \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2\right] \exp\left[\frac{ik}{2d} |\vec{r}_2 - \vec{r}'|^2\right] d^2\vec{r}_2 \right\}^* \right\rangle \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} P_1(\vec{r}_1) P_2^*(\vec{r}_2) \langle D(\vec{r}_1) D^*(\vec{r}_2) \rangle \exp\left[-\frac{ik}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1\right] \exp\left[\frac{ik}{2d} |\vec{r} - \vec{r}_1|^2\right] \\
&\quad \times \exp\left[\frac{ik}{f} \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2\right] \exp\left[-\frac{ik}{2d} |\vec{r}_2 - \vec{r}'|^2\right] d^2\vec{r}_1 d^2\vec{r}_2.
\end{aligned} \tag{92}$$

Utilizando de nuevo las ecuaciones (83) y (84)

$$\begin{aligned}
\langle A(\vec{r}_3; \vec{r}) A^*(\vec{r}_0; \vec{r}') \rangle &= \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} P_2(\vec{r}_2) D(\vec{r}_2) \exp\left[-\frac{ik}{f} \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2\right] \exp\left[\frac{ik}{2d} |\vec{r}_2 - \vec{r}|^2\right] d^2\vec{r}_2 \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} P_1(\vec{r}_1) D(\vec{r}_1) \exp\left[-\frac{ik}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1\right] \exp\left[\frac{ik}{2d} |\vec{r}_1 - \vec{r}'|^2\right] d^2\vec{r}_1 \right\}^* \right\rangle \\
&= \iint_{-\infty}^{\infty} P_2(\vec{r}_2) P_1^*(\vec{r}_1) \langle D(\vec{r}_2) D^*(\vec{r}_1) \rangle \exp\left[-\frac{ik}{f} \vec{r}_3 \cdot \vec{r}_2\right] \exp\left[\frac{ik}{2d} |\vec{r}_2 - \vec{r}|^2\right] \\
&\quad \times \exp\left[\frac{ik}{f_0} \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_1\right] \exp\left[-\frac{ik}{2d} |\vec{r}_1 - \vec{r}'|^2\right] d^2\vec{r}_2 d^2\vec{r}_1.
\end{aligned} \tag{93}$$

### 4.2.2 Intensidad promedio para una fuente extendida

La expresión para la intensidad promedio en el caso de una fuente extendida se obtiene integrando la expresión (89) sobre el área de la fuente. La distribución espacial de intensidad sobre la fuente está dada por

$$I_0(x_0, y_0) = |A_0(x_0, y_0)|^2. \quad (94)$$

La intensidad promedio en el caso de la fuente extendida se obtiene de

$$\langle I(x_3, y_3) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle I(x_3, y_3; x_0, y_0) \rangle dx_0 dy_0. \quad (95)$$

Para el caso de una fuente circular de intensidad uniforme de radio  $b$ ,  $I_0(x_0, y_0)$  está dada por la ecuación (22) del capítulo 2.

En general, la integración en la ecuación (95) produce un ensanchamiento de la señal de retroesparcimiento reforzado en comparación con la obtenida en el caso de una fuente puntual, así como una reducción en su altura.

## 4.3 Cálculos de retroesparcimiento reforzado con el modelo de la pantalla de fase aleatoria

### 4.3.1 Evaluación analítica de las distintas integrales para el caso de una fuente puntual

En este caso la función de autocorrelación del difusor está dada por la ecuación (69) del capítulo 3.

En el siguiente desarrollo se considera que la función de transmitancia de amplitud compleja de la abertura frente al primer difusor de la figura 25 está dada por

$$P_1(x_1, y_1) = \exp \left[ -\frac{(x_1^2 + y_1^2)}{w^2} \right], \quad (96)$$

donde  $w$  es el radio de la abertura en el punto  $1/e$ . Esta adopción se hace por conveniencia matemática debido a que no es posible obtener una solución analítica para las integrales de las ecuaciones (90) a (93), si se utiliza la función de transmitancia de amplitud compleja para una abertura circular dada por la ecuación (11) del capítulo 2. También resultaría muy difícil evaluar las integrales numéricamente, pues tomando en cuenta las integraciones adicionales indicadas en la ecuación (89), se necesitaría hacer integraciones numéricas en ocho dimensiones.

Asimismo, se considera que la abertura junto al segundo difusor de la figura 24 no existe. Esto se toma en cuenta utilizando la siguiente expresión para la función de transmitancia de amplitud compleja de la abertura:

$$P_2(x_2, y_2) = 1. \quad (97)$$

Se hace notar que si el primer difusor de la figura (25) se ilumina por un haz Gaussiano que viaja inclinado con respecto al eje  $z$ , representado por una amplitud compleja dada por la expresión

$$A_1(x_1, y_1) = A_0(x_0, y_0) \exp \left[ -i \frac{k}{f_0} (x_0 x_1 + x_0 y_1) \right] \exp \left[ -\frac{(x_1^2 + y_1^2)}{w^2} \right], \quad (98)$$

donde  $w$  es el radio del haz Gaussiano en el punto  $1/e$  y si además la abertura junto al segundo difusor no existe, las formas matemáticas dadas por las expresiones (96) y (97) permiten resolver este caso de iluminación por un haz Gaussiano.

Para ilustrar el método utilizado para evaluar las correlaciones indicadas en las ecuaciones (90) a (93) a continuación se evalúa la correlación correspondiente a la ecuación (91). Escribiendo esta última ecuación en coordenadas cartesianas y utilizando la ecuación (69) del capítulo 3 y las ecuaciones (96) y (97) se tiene que

$$\begin{aligned}
& \langle A(\bar{r}_3; \bar{r}) A^*(\bar{r}_3; \bar{r}') \rangle = \langle A(x_3, y_3; x, y) A^*(x_3, y_3; x', y') \rangle \\
& = \exp \left\{ \left[ i \frac{k}{2d} [(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] \right] \right\} \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} [(x_2 - x'_2)^2 + (y_2 - y'_2)^2] \right\} \\
& \quad \times \exp \left\{ -i \frac{k}{f} (x_3 x_2 + y_3 y_2) \right\} \exp \left\{ i \frac{k}{2d} (x_2^2 + y_2^2) - i \frac{k}{d} (x x_2 + y y_2) \right\} \\
& \quad \times \exp \left\{ i \frac{k}{f} (x_3 x'_2 + y_3 y'_2) \right\} \exp \left\{ -i \frac{k}{2d} (x_2'^2 + y_2'^2) - i \frac{k}{d} (x' x'_2 + y' y'_2) \right\} dx_2 dy_2 dx'_2 dy'_2. \tag{99}
\end{aligned}$$

La integral en la ecuación (99) puede escribirse como el producto de dos integrales:

$$\begin{aligned}
J_x = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} - \frac{ik}{2d} \right) x_2^2 - 2 \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} x_2 x'_2 + \left( \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} + \frac{ik}{2d} \right) x_2'^2 + 2 \left( \frac{ik}{2f} x_3 + \frac{ik}{2d} x \right) x_2 \right. \right. \\
\left. \left. + 2 \left( -\frac{ik}{2f} x_3 - \frac{ik}{2d} x' \right) x'_2 \right] \right\} dx_2 dx'_2, \tag{100}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_y = \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} - \frac{ik}{2d} \right) y_2^2 - 2 \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} y_2 y'_2 + \left( \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} + \frac{ik}{2d} \right) y_2'^2 + 2 \left( \frac{ik}{2f} y_3 + \frac{ik}{2d} y \right) y_2 \right. \right. \\
\left. \left. + 2 \left( -\frac{ik}{2f} y_3 - \frac{ik}{2d} y' \right) y'_2 \right] \right\} dy_2 dy'_2. \tag{101}
\end{aligned}$$

Estas dos integrales se pueden resolver utilizando la siguiente identidad (Bramley, 1967):

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \exp[-(ax^2 - 2\beta xx' + \gamma x'^2 + 2\delta x + 2\epsilon x')] dx' dy' \tag{102}$$



$$= \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}} \exp\left(\frac{\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2}{\alpha\gamma - \beta^2}\right),$$

donde  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  y  $\varepsilon$  son constantes complejas y la parte real de  $\alpha\gamma - \beta^2$  es mayor que cero.

Evaluando la integral de la ecuación (100), los coeficientes que multiplican a las diferentes potencias de  $x_2$  y  $x_2'$  en la exponencial dentro del integrando en la ecuación (100) son:

$$\alpha = \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} - \frac{ik}{2d}, \quad (103)$$

$$\beta = -\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2}, \quad (104)$$

$$\gamma = \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} + \frac{ik}{2d}, \quad (105)$$

$$\delta = i\frac{k}{2}\left(\frac{x_3}{f} + \frac{x}{d}\right), \quad (106)$$

$$\varepsilon = -i\frac{k}{2}\left(\frac{x_3}{f} + \frac{x'}{d}\right). \quad (107)$$

Se tiene entonces que

$$\alpha\gamma - \beta^2 = \left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} - \frac{ik}{2d}\right)\left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} + \frac{ik}{2d}\right) - \left(-\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2}\right)^2 = \frac{\sigma_\phi^4}{\xi^4} + \frac{k^2}{4d^2} - \frac{\sigma_\phi^4}{\xi^4} = \frac{k^2}{4d^2}. \quad (108)$$

Asimismo, se tiene que

$$\begin{aligned}
\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2 &= \left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} - \frac{ik}{2d}\right) \left[-i\frac{k}{2}\left(\frac{x_3}{f} + \frac{x'}{d}\right)\right]^2 - 2\left(-\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2}\right) \left[i\frac{k}{2}\left(\frac{x_3}{f} + \frac{x}{d}\right)\right] \left[-i\frac{k}{2}\left(\frac{x_3}{f} + \frac{x'}{d}\right)\right] \\
&\quad + \left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} + \frac{ik}{2d}\right) \left[i\frac{k}{2}\left(\frac{x_3}{f} + \frac{x}{d}\right)\right]^2 \\
&= -\frac{k^2}{4} \left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} + \frac{ik}{2d}\right) \frac{x^2}{d^2} + \frac{2k^2}{4} \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} \frac{xx'}{d^2} - \frac{k^2}{4} \left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} - \frac{ik}{2d}\right) \frac{x'^2}{d^2} - \frac{2k^2}{4} \left(\frac{ik}{2d}\right) \frac{x_3 x}{f d} - \frac{2k^2}{4} \left(-\frac{ik}{2d}\right) \frac{x_3 x'}{f d} \\
&= -\frac{k^2}{4d^2} \left[ \left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} + \frac{ik}{2d}\right) x^2 - 2\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} xx' + \left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} - \frac{ik}{2d}\right) x'^2 + i\frac{k}{f} x_3 x - i\frac{k}{f} x_3 x' \right], \tag{109}
\end{aligned}$$

y utilizando la ecuación (108) se tiene que

$$\frac{\alpha\varepsilon^2 - 2\beta\delta\varepsilon + \gamma\delta^2}{\alpha\gamma - \beta^2} = - \left[ \left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} + \frac{ik}{2d}\right) x^2 - 2\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} xx' + \left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} - \frac{ik}{2d}\right) x'^2 + i\frac{k}{f} x_3 x - i\frac{k}{f} x_3 x' \right]. \tag{110}$$

Utilizando de nuevo la ecuación (108) se puede escribir

$$\frac{\pi}{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{k^2}} = \pi \frac{2d}{k}, \tag{111}$$

y se tiene que

$$J_x = \pi \frac{2d}{k} \exp \left\{ - \left[ \left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} + \frac{ik}{2d}\right) x^2 - 2\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} xx' + \left(\frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} - \frac{ik}{2d}\right) x'^2 + i\frac{k}{f} x_3 x - i\frac{k}{f} x_3 x' \right] \right\}. \tag{112}$$

Dada la similitud entre las integrales  $J_x$  y  $J_y$ , se puede escribir

$$J_y = \pi \frac{2d}{k} \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} + \frac{ik}{2d} \right) y^2 - 2 \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} yy' + \left( \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} - \frac{ik}{2d} \right) y'^2 + i \frac{k}{f} y_3 y - i \frac{k}{f} y_3 y' \right] \right\}. \quad (113)$$

Multiplicando estos dos últimos resultados y sustituyendo en la ecuación (99) se obtiene

$$\begin{aligned} \langle A(\bar{r}_3; \bar{r}) A^*(\bar{r}_3; \bar{r}') \rangle &= \langle A(x_3, y_3; x, y) A^*(x_3, y_3; x', y') \rangle \\ &= \pi^2 \frac{4d^2}{k^2} \exp \left\{ \frac{ik}{2d} [(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] \right\} \\ &\times \exp \left\{ - \left[ \left( \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} + i \frac{k}{2d} \right) (x^2 + y^2) - \frac{2\sigma_\phi^2}{\xi^2} (xx' + yy') + \left( \frac{\sigma_\phi^2}{\xi^2} - i \frac{k}{2d} \right) (x'^2 + y'^2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \frac{k}{f} (x_3 x + y_3 y) - i \frac{k}{f} (x_3 x' + y_3 y') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (114)$$

Siguiendo el mismo procedimiento se demuestra que

$$\begin{aligned} \langle A(\bar{r}_0; \bar{r}) A^*(\bar{r}_0; \bar{r}') \rangle &= \langle A(x_0, y_0; x, y) A^*(x_0, y_0; x', y') \rangle \\ &= \frac{\pi w^4}{\left[ 1 + 2\sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} + \left( \frac{kw^2}{2d} \right)^2 \right]} \exp \left\{ -2P \frac{(x_0^2 + y_0^2)}{f_0^2} \right\} \exp \left\{ i \frac{k}{2d} [(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] \right\} \\ &\times \exp \left\{ -P \left[ Z_1 \frac{(x^2 + y^2)}{d^2} - 2\sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} \frac{(xx' + yy')}{d^2} + Z_1^* \frac{(x'^2 + y'^2)}{d^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2Z_0 \frac{(x_0 x + y_0 y)}{f_0 d} + 2Z_0^* \frac{(x_0 x' + y_0 y')}{f_0 d} \right] \right\} \end{aligned} \quad (115)$$

donde

$$P = \frac{\left(\frac{kW}{2}\right)^2}{1 + 2\sigma_\phi^2 \frac{W^2}{\xi^2} + \left(\frac{kW^2}{2d}\right)^2}, \quad (116)$$

$$Z_0 = 1 + i \frac{kW^2}{2d}, \quad (117)$$

$$Z_1 = 1 + \sigma_\phi^2 \frac{W^2}{\xi^2} + i \frac{kW^2}{2d}. \quad (118)$$

De manera similar, se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \langle A(\bar{r}_0; \bar{r}) A^*(\bar{r}_3; \bar{r}') \rangle &= \langle A(x_0, y_0; x, y) A^*(x_3, y_3; x', y') \rangle \\ &= \frac{\pi^2 W^4}{\left[Z_2 + \left(\frac{kW^2}{2d}\right)^2\right]} \exp\left\{-Q \left[ Z_2 \frac{(x_0^2 + y_0^2)}{f_0^2} - 2\sigma_\phi^2 \frac{W^2}{\xi^2} \frac{(x_0 x_3 + y_0 y_3)}{f_0 f} + Z_1^* \frac{(x_3^2 + y_3^2)}{f^2} \right]\right\} \\ &\times \exp\left\{\frac{ik}{2d} [(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)]\right\} \exp\left\{-Q \left[ Z_2 \frac{(x^2 + y^2)}{d^2} - 2\sigma_\phi^2 \frac{W^2}{\xi^2} \frac{(xx' + yy')}{d^2} \right. \right. \\ &\left. \left. + Z_1^* \frac{(x'^2 + y'^2)}{d^2} + 2C_x \frac{x}{d} + 2C'_x \frac{x'}{d} + 2C_y \frac{y}{d} + 2C'_y \frac{y'}{d} \right]\right\}, \quad (119) \end{aligned}$$

donde

$$Q = \frac{\left(\frac{kW}{2}\right)^2}{Z_2 + \left(\frac{kW^2}{2d}\right)^2}, \quad (120)$$

$$Z_2 = \sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} + i \frac{k w^2}{2d}, \quad (121)$$

$$C_x = Z_2 \frac{x_0}{f_0} - \sigma_\phi^2 \frac{w^2 x_3}{\xi^2 f} \quad (122)$$

$$C'_x = Z_1^* \frac{x_3}{f} - \sigma_\phi^2 \frac{w^2 x_0}{\xi^2 f_0}, \quad (123)$$

$$C_y = Z_2 \frac{y_0}{f_0} - \sigma_\phi^2 \frac{w^2 y_3}{\xi^2 f}, \quad (124)$$

$$C'_y = Z_1^* \frac{y_3}{f} - \sigma_\phi^2 \frac{w^2 y_0}{\xi^2 f_0}. \quad (125)$$

Asimismo, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle A(\bar{r}_3; \bar{r}) A^*(\bar{r}_0; \bar{r}') \rangle &= \langle A(x_3, y_3; x, y) A^*(x_0, y_0; x', y') \rangle \\ &= \frac{\pi^2 w^4}{\left[ Z_2^* + \left( \frac{k w^2}{2d} \right)^2 \right]} \exp \left\{ -Q^* \left[ Z_2^* \frac{(x_0^2 + y_0^2)}{f_0^2} - 2\sigma_\phi^2 \frac{w^2 (x_0 x_3 + y_0 y_3)}{\xi^2 f_0 f} + Z_1 \frac{(x_3^2 + y_3^2)}{f^2} \right] \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{ik}{2d} [(x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] \right\} \exp \left\{ -Q^* \left[ Z_1 \frac{(x^2 + y^2)}{d^2} - 2\sigma_\phi^2 \frac{w^2 (xx' + yy')}{\xi^2 d^2} \right. \right. \\ &\left. \left. + Z_2^* \frac{(x'^2 + y'^2)}{d^2} + 2E_x \frac{x}{d} + 2E'_x \frac{x'}{d} + 2E_y \frac{y}{d} + 2E'_y \frac{y'}{d} \right] \right\}, \quad (126) \end{aligned}$$

donde

$$E_x = Z_1 \frac{x_3}{f} - \sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} \frac{x_0}{f_0}, \quad (127)$$

$$E'_x = Z_2^* \frac{x_0}{f_0} - \sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} \frac{x_3}{f}, \quad (128)$$

$$E_y = Z_1 \frac{y_3}{f} - \sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} \frac{y_0}{f_0}, \quad (129)$$

$$E'_y = Z_2^* \frac{y_0}{f_0} - \sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} \frac{y_3}{f}. \quad (130)$$

Sustituyendo las ecuaciones (114), (115), (119) y (126) en los integrandos de la ecuación (89), y utilizando de nuevo la fórmula (102) para llevar a cabo las integraciones restantes, después de largos desarrollos algebraicos, finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \langle I(\bar{r}_3; \bar{r}_0) \rangle = \langle I(x_3, y_3; x_0, y_0) \rangle &= \frac{|A(x_0, y_0)|^2 \left(\frac{kw^2}{2f}\right)^2}{\left[1 + 4\sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2}\right]} \exp\left\{-F \left[\left(\frac{x_0}{f_0} + \frac{x_3}{f}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_3}{f}\right)^2\right]\right\} \\ &+ \frac{|A(x_0, y_0)|^2 \left(\frac{kw^2}{2f}\right)^2 \left(\frac{kw^2}{2d}\right)^2}{\left\{4\sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} \left[\sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} + \left(\frac{kw^2}{2d}\right)^2\right] + \left(\frac{kw^2}{2d}\right)^2\right\}} \exp\left\{-G \left[\left(\frac{x_0}{f_0} + \frac{x_3}{f}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{f_0} + \frac{y_3}{f}\right)^2\right]\right\}, \end{aligned} \quad (131)$$

donde

$$F = \frac{2 \left(\frac{kw}{2}\right)^2}{1 + 4\sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2}} \quad (132)$$

y

$$G = \frac{2 \left(\frac{kw}{2}\right)^2 \sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} \left[ \sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} + \left(\frac{kw^2}{2d}\right)^2 \right]}{\left\{ \left[ \sigma_\phi^2 \frac{w^2}{\xi^2} + \left(\frac{kw^2}{2d}\right)^2 \right]^2 + \left(\frac{kw^2}{2d}\right)^2 \right\}} \quad (133)$$

La ecuación (131) proporciona la intensidad promedio para una fuente puntual colocada en el punto  $(x_0, y_0)$  del plano de la fuente extendida.

#### 4.3.2 Intensidad promedio para una fuente puntual

La figura 26 muestra una gráfica de la ecuación (131) para el caso de una fuente puntual en eje, es decir,  $x_0 = y_0 = 0$ , y  $|A(x_0, y_0)|^2 = 1$ . Ambos términos del lado derecho de la ecuación se dividieron por el factor que precede a la primera exponencial. Los parámetros utilizados para obtener esta gráfica se indican en el pie de figura. La figura 27 muestra la gráfica del segundo término del lado derecho de la ecuación (131), dividido por el factor antes mencionado. Este término corresponde a la señal de retroesparcimiento reforzado (SRR). El primer término del lado derecho de la ecuación da origen a una función muy ancha a la que se llamará de aquí en adelante la componente difusa (CD). Puede verificarse, que para los parámetros utilizados en la gráfica, la CD es aproximadamente 350 veces más ancha que la SRR.

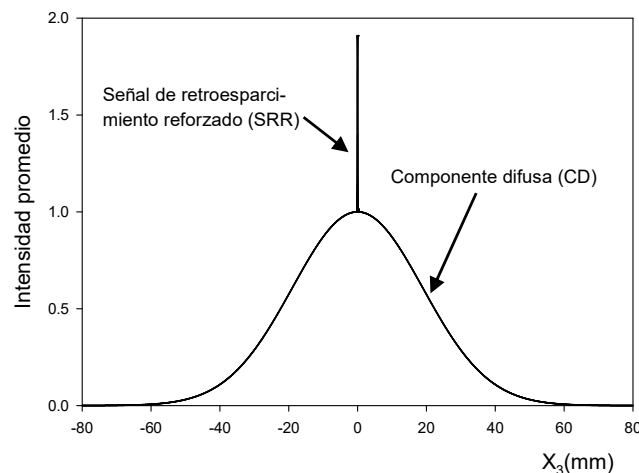


Figura 26. Intensidad promedio para iluminación por una fuente puntual en eje,  $x_0 = y_0 = 0$ . Parámetros utilizados:  $w = 5$  mm,  $\sigma_\phi = 2\pi$ ,  $\xi = 0.020$  mm,  $f = 300$  mm,  $d = 10$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

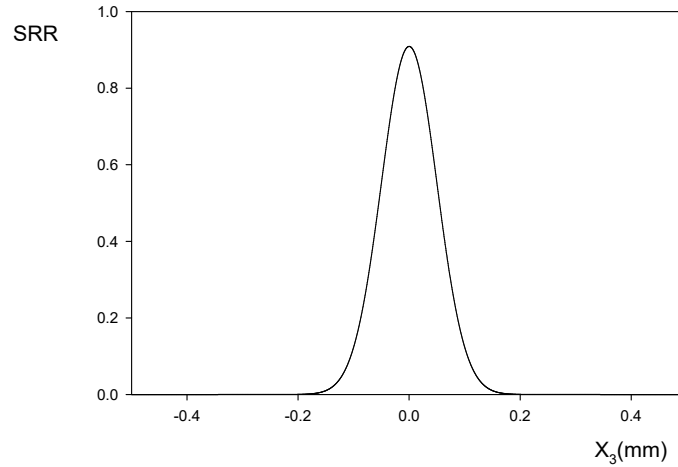


Figura 27. Señal de retroesparcimiento reforzado correspondiente al segundo término de la ecuación (131). Parámetros utilizados:  $w = 5$  mm,  $\sigma_\phi = 2\pi$ ,  $\xi = 0.020$  mm,  $f = 300$  mm,  $d = 10$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

### 4.3.3 Intensidad promedio para una fuente extendida

Como se mencionó en la sección 4.2.2, en el caso de una fuente extendida es necesario substituir  $|A_0(x_0, y_0)|^2$  en la ecuación (131) por la distribución espacial de intensidad de la fuente extendida y evaluar la integral indicada en la ecuación (95). Esta doble integral fue evaluada numéricamente en el presente trabajo.

El ensanchamiento de la SRR en el caso de una fuente extendida proviene de la integración del segundo término del lado derecho de la ecuación (131). Dejando a un lado los términos constantes y utilizando la distribución espacial de intensidad para una fuente circular uniforme dada por la ecuación (22), esta integral se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{\infty} |A(x_0, y_0)|^2 \exp \left\{ -G \left[ \left( \frac{x_0}{f_0} + \frac{x_3}{f} \right)^2 + \left( \frac{y_0}{f_0} + \frac{y_3}{f} \right)^2 \right] \right\} dx_0 dy_0 \\ &= I_0 \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ} \left( \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b} \right) \exp \left\{ -\frac{G}{f_0^2} \left[ \left( x_0 + \frac{f_0}{f} x_3 \right)^2 + \left( y_0 + \frac{f_0}{f} y_3 \right)^2 \right] \right\} dx_0 dy_0 \end{aligned}$$



$$= I_0 C \left( \frac{f_0}{f} x_3, \frac{f_0}{f} y_3 \right). \quad (134)$$

Esta integral es la correlación de la distribución de intensidad de la fuente con la función

$$h(x_0, y_0) = \exp \left\{ -\frac{G}{f_0^2} [x_0^2 + y_0^2] \right\}. \quad (135)$$

Esta función puede ser vista como la proyección sobre el plano de la fuente extendida de la SRR producida por una fuente puntual.

En las gráficas que se presentan en las figuras 28 a la 41 se muestra que si la distribución espacial de intensidad de la fuente es una función mucho más angosta que la función  $h(x_0, y_0)$  la SRR obtenida con una fuente extendida casi no difiere de la SRR obtenida con una fuente puntual. También se muestra, que si la función que describe la distribución de intensidad es más ancha que la función  $h(x_0, y_0)$ , la SRR obtenida en una fuente extendida prácticamente se extingue, pues se desparrama y se reduce mucho su altura.

Para discutir los cambios producidos en la SRR, es necesario hacer una comparación entre el diámetro de la fuente y el ancho de la función  $h(x_0, y_0)$ . Para esto, se tomará el ancho de la base de esta última función como cuatro veces el semiancho de la función en el punto  $1/e$  y se denotará por  $W$ . Este valor fue  $W = 348 \mu\text{m}$  para la curva Gaussiana de la figura 28. Para una fuente de diámetro  $2b = 32 \mu\text{m}$  el cociente de los anchos es  $\frac{2b}{W} = \frac{0.032}{0.348} = 0.092$ . Se observa que la señal de retroesparcimiento para la fuente puntual y para la fuente extendida son iguales (ver figura 29).

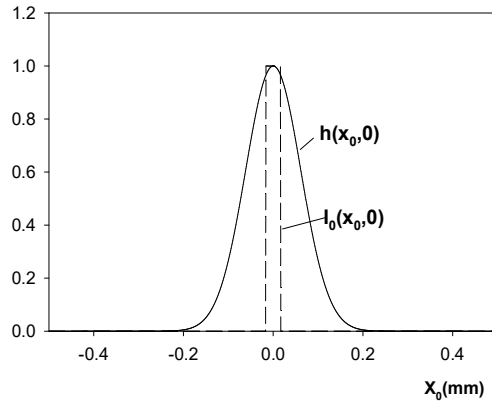


Figura 28. Cortes de las funciones  $h(x_0, y_0)$  y  $I_0(x_0, y_0)$  sobre el eje  $x_0$  para una fuente circular uniforme con  $b = 0.016$  mm. Parámetros utilizados:  $w=2$  mm,  $\sigma_\phi = 2\pi$ ,  $\xi=0.025$  mm,  $f_0=300$  mm,  $d=10$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

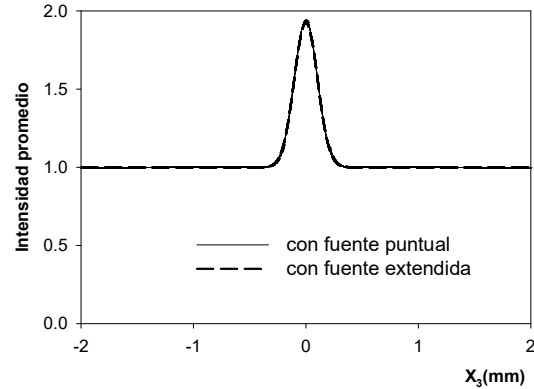


Figura 29. Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con  $b=0.016$  mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 28, además  $f=500$  mm.

Para la figura 30 se tiene que  $\frac{2b}{W} = \frac{0.064}{0.348} = 0.184$ , donde tampoco se observa un cambio significativo entre la señal de retroesparcimiento para la fuente puntual y la correspondiente a la fuente extendida (ver figura 31).

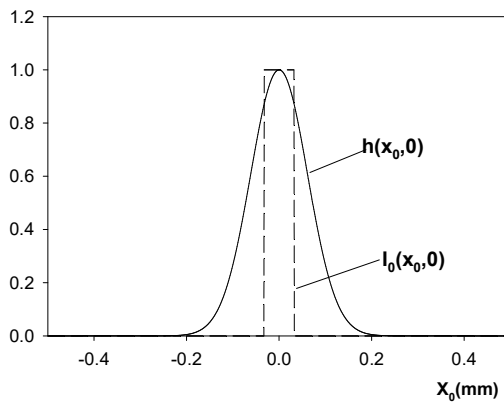


Figura 30. Cortes de las funciones  $h(x_0, y_0)$  y  $I_0(x_0, y_0)$  sobre el eje  $x_0$  para una fuente circular uniforme con  $b = 0.032$  mm. Parámetros utilizados:  $w=2$  mm,  $\sigma_\phi = 2\pi$ ,  $\xi=0.025$  mm,  $f_0=300$  mm,  $d=10$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

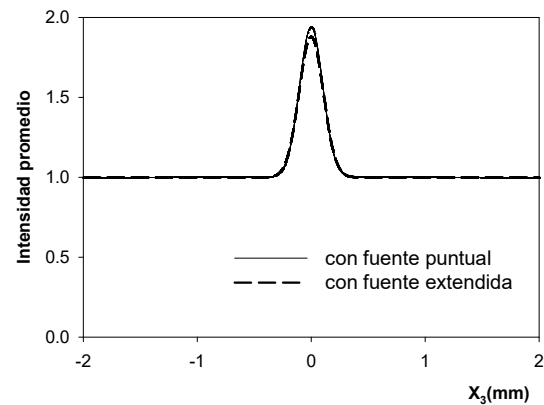


Figura 31. Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con  $b=0.032$  mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 30, además  $f=500$  mm.

Para el caso en el que  $\frac{2b}{W} = \frac{0.160}{0.348} = 0.460$ , mostrado en la figura 32, se puede observar que aunque la señal para la fuente extendida tiene menor altura, el ancho permanece igual, comparado con el caso de la fuente puntual (ver figura 33).

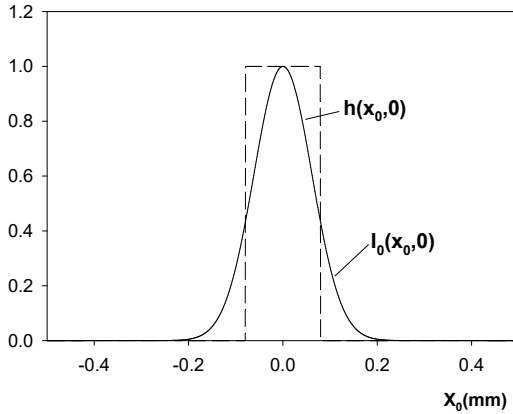


Figura 32. Cortes de las funciones  $h(x_0, y_0)$  y  $I_0(x_0, y_0)$  sobre el eje  $x_0$  para una fuente circular uniforme con  $b = 0.080$  mm. Parámetros utilizados:  $w=2$  mm,  $\sigma_\phi = 2\pi$ ,  $\xi=0.025$  mm,  $f_0 = 300$  mm,  $d = 10$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

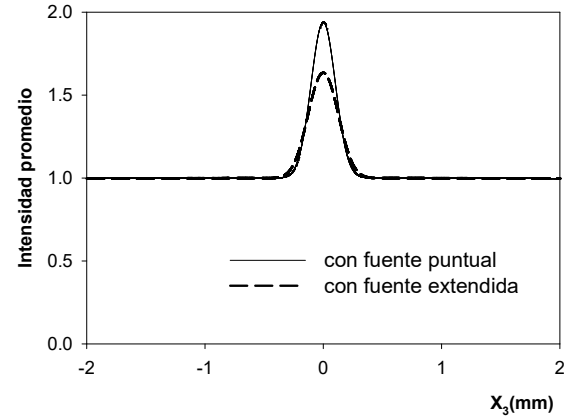


Figura 33. Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con  $b=0.080$  mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 32, además  $f = 500$  mm.

Ahora bien, en la figura 34 se tiene  $\frac{2b}{W} = \frac{0.320}{0.348} = 0.92$ , donde el ancho de la fuente empieza a parecerse al de la función  $h(x_0, y_0)$  en la base. Se observa en la figura 35, que la señal de retroesparcimiento ha caído y se ha ensanchado.

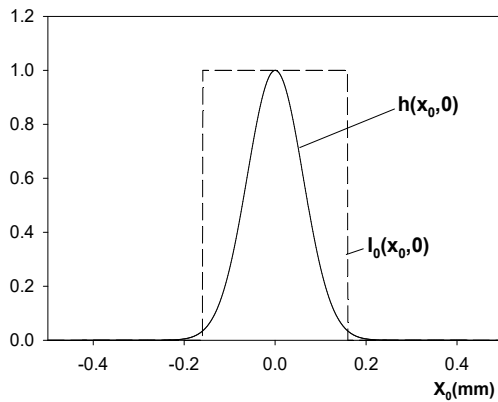


Figura 34. Cortes de las funciones  $h(x_0, y_0)$  y  $I_0(x_0, y_0)$  sobre el eje  $x_0$  para una fuente circular uniforme con  $b = 0.160$  mm. Parámetros utilizados:  $w=2$  mm,  $\sigma_\phi = 2\pi$ ,  $\xi=0.025$  mm,  $f_0 = 300$  mm,  $d = 10$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

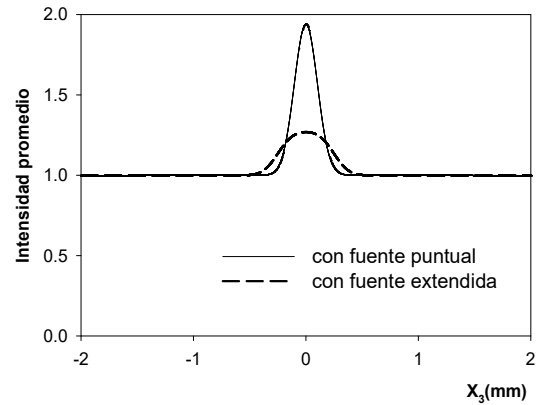


Figura 35. Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con  $b=0.160$  mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 34, además  $f = 500$  mm.

El mismo caso se tiene en la figura 36, cuando  $\frac{2b}{W} = \frac{0.526}{0.348} = 1.511$ , y cuando  $\frac{2b}{W} = \frac{0.700}{0.348} = 2.01$  (figura 38), donde la señal de retresparcimiento para la fuente extendida ha caído aún más y se ha ensanchado más conforme la razón  $2b/W$  aumenta (Ver figuras 37 y 39).

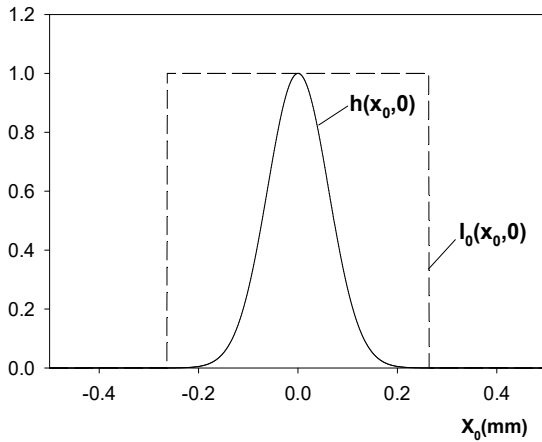


Figura 36. Cortes de las funciones  $h(x_0, y_0)$  y  $I_0(x_0, y_0)$  sobre el eje  $x_0$  para una fuente circular uniforme con  $b = 0.263$  mm. Parámetros utilizados:  $w=2$  mm,  $\sigma_\phi = 2\pi$ ,  $\xi=0.025$  mm,  $f_0=300$  mm,  $d=10$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

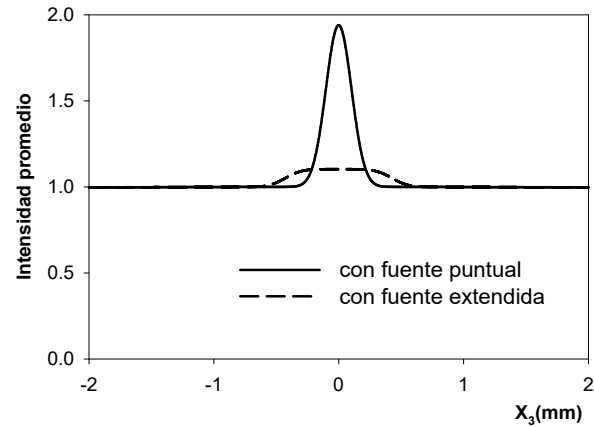


Figura 37. Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con  $b=0.263$  mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 36, además  $f=500$  mm.

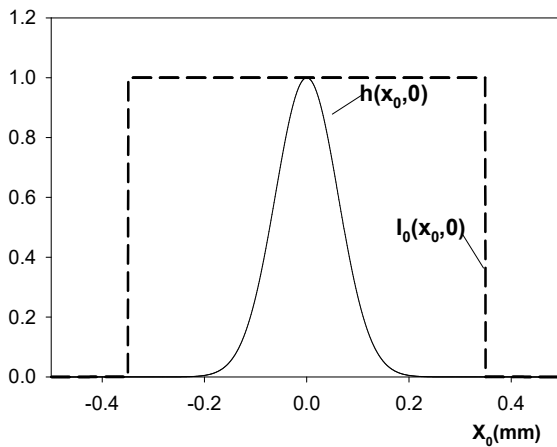


Figura 38. Cortes de las funciones  $h(x_0, y_0)$  y  $I_0(x_0, y_0)$  sobre el eje  $x_0$  para una fuente circular uniforme con  $b = 0.350$  mm. Parámetros utilizados:  $w=2$  mm,  $\sigma_\phi = 2\pi$ ,  $\xi=0.025$  mm,  $f_0=300$  mm,  $d=10$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

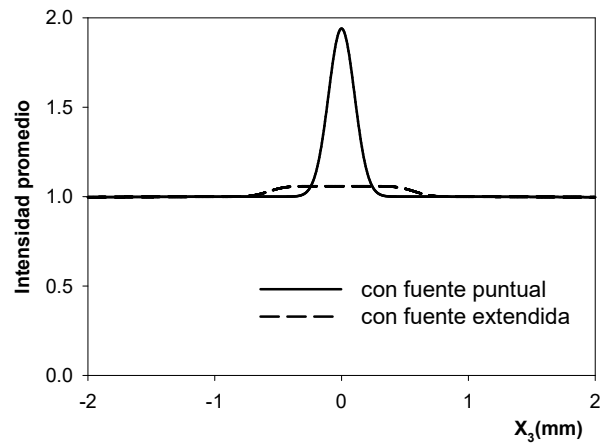


Figura 39. Comparación de la intensidad promedio obtenida con una fuente puntual con la intensidad promedio obtenida con una fuente extendida con  $b=0.350$  mm. Se utilizaron los mismos parámetros de la figura 38, además  $f=500$  mm.

Por último, es conveniente analizar cómo cambia el ancho de la función  $h(x_0, y_0)$  con la distancia focal  $f_0$  (figura 40) y con la expresión para G dada por la ecuación (133). G depende fuertemente de la distancia  $d$  entre el difusor y el espejo y en la figura 41 se muestra cómo cambia el ancho de  $h(x_0, y_0)$  con  $d$ .

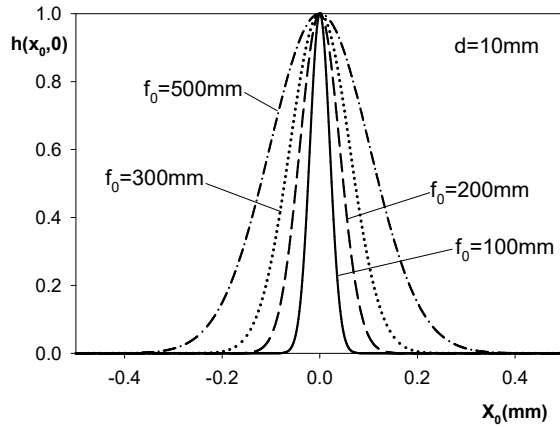


Figura 40. Cambios de ancho de la función  $h(x_0, 0)$  para distintos valores de la distancia focal de  $f_0$  de la lente colimadora, para  $d=10$  mm. Parámetros utilizados:  $w=2$  mm,  $\sigma_\phi = 2\pi$ ,  $\xi=0.025$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

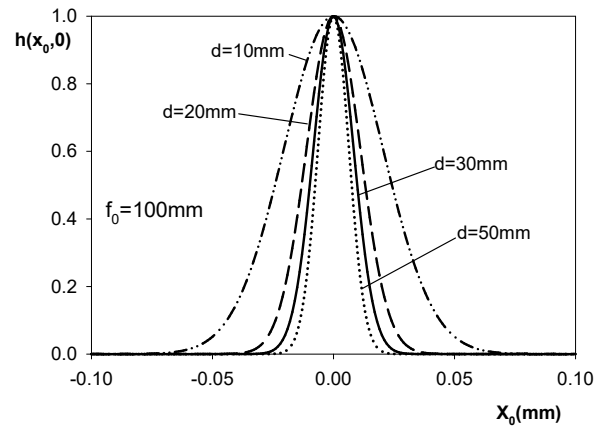


Figura 41. Cambios de ancho de la función  $h(x_0, 0)$  para distintos valores de la distancia  $d$  entre el difusor y el espejo para  $f_0=100$  mm. Parámetros utilizados:  $w=2$  mm,  $\sigma_\phi = 2\pi$ ,  $\xi=0.025$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

## Capítulo 5. Retroesparcimiento reforzado en una configuración de doble paso: experimentos

---

En el capítulo 4 se obtuvo de forma matemática la señal de retroesparcimiento, SRR, para la configuración de doble paso formada por el difusor y el espejo. El resultado de este análisis fue la ecuación que describe esta señal para una fuente puntual. El caso de iluminación por una fuente extendida fue tratado multiplicando la solución obtenida para el caso de la fuente puntual por la distribución espacial de intensidad de la fuente extendida y llevando a cabo una integración numérica. Se obtuvieron gráficas que describen los resultados teóricos donde se observaron los cambios que ocurren en la SRR cuando la fuente secundaria va cambiando de tamaño.

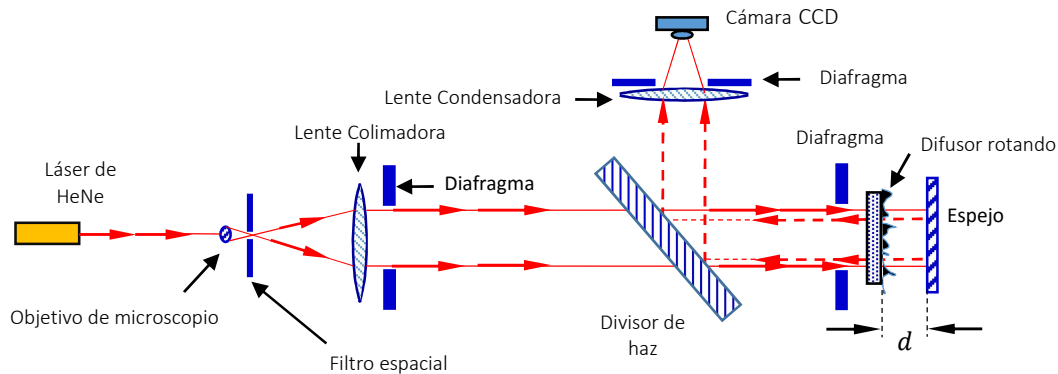
En el presente capítulo se proporciona una breve explicación del arreglo experimental de doble paso para iluminación por una fuente puntual, caso coherente, y se describe el arreglo para el caso de una fuente extendida o caso parcialmente coherente. En los experimentos se variaron los diámetros de la fuente secundaria y se observaron los cambios producidos en la SRR. Las gráficas experimentales fueron comparadas con las gráficas teóricas para observar la similitud entre éstas.

### 5.1 Medición de la intensidad promedio para fuente puntual

Para hacer los experimentos con una fuente extendida se contaba con los orificios con diámetros de 18.4, 29.6, 45.2, 50.7 y 76.4  $\mu\text{m}$ , que fueron utilizados para implementar la fuente secundaria en el experimento de Young con una fuente extendida del capítulo 2.

De las figuras 28 a la 39 se puede observar el ensanchamiento de la SRR al aumentar el diámetro de la fuente, siendo necesario utilizar una función  $h(x_0, y_0)$  que tenga un ancho comparable al diámetro de la fuente. De la figura 40 se aprecia que con una lente colimadora de distancia focal  $f_0 = 100$  mm y distancias del difusor al espejo de 30 y 50 mm se obtiene una función  $h(x_0, y_0)$  suficientemente angosta. De hecho, si consideramos el ancho de la función en la base como cuatro veces el semiancho de la función en el punto  $1/e$ , la curva para  $d = 30$  mm de la figura 41 tiene un ancho en la base de aproximadamente 47  $\mu\text{m}$ . Este valor está dentro del rango de los diámetros especificados arriba.

Con el fin de hacer una comparación de la SRR obtenida en el caso de una fuente puntual con las SRR's obtenidas con las fuentes extendidas, en primer lugar se mide la intensidad promedio de la luz retroesparcida para el caso coherente, es decir, para una fuente puntual. En la figura 42 se muestra el arreglo experimental utilizado para este experimento.



**Figura 42. Arreglo experimental utilizado para medir la intensidad promedio de la luz retroesparcida para iluminación por una fuente puntual. Distancia focal de la lente colimadora  $f_0 = 100$  mm, distancia focal de la lente condensadora  $f = 500$  mm, distancia del difusor al espejo  $d = 30$  mm.**

Analizando la figura de izquierda a derecha, se muestra un láser He-Ne ( $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ ) que envía un haz de luz a un objetivo de microscopio y luego es filtrado por un orificio de  $25 \mu\text{m}$  que actúa como fuente puntual. La luz es colimada por una lente y atraviesa un divisor de haz para después pasar por un difusor giratorio y reflejarse en el espejo. La luz reflejada pasa de nuevo por el difusor y llega de nuevo al divisor de haz. Éste la refleja enviándola a una lente condensadora para luego proyectarla a la cámara CCD. Como se mencionó en el capítulo 1, el difusor giratorio y el espejo son los que producen la SRR debido a las trayectorias recíprocas que se generan en la propagación de la luz del difusor al espejo de ida y vuelta.

En la figura 43 se aprecian dos gráficas superpuestas, la teórica trazada con línea continua y la experimental trazada con línea punteada. Ambas muestran la intensidad promedio para el caso coherente o fuente puntual y ambos resultados se asemejan tanto en ancho como en altura. Debe mencionarse que las curvas experimentales presentaban mucho ruido debido a que la promediación no era lo suficientemente buena para compensar la presencia del speckle. Para reducir el ruido de los datos, las curvas fueron sometidas a un proceso de suavizado utilizando un paquete de software disponible para este propósito (Press, W. H. y Flannery, B. P., 1992, pág. 644). Esto fue hecho para todas las curvas experimentales reportadas en el presente capítulo.

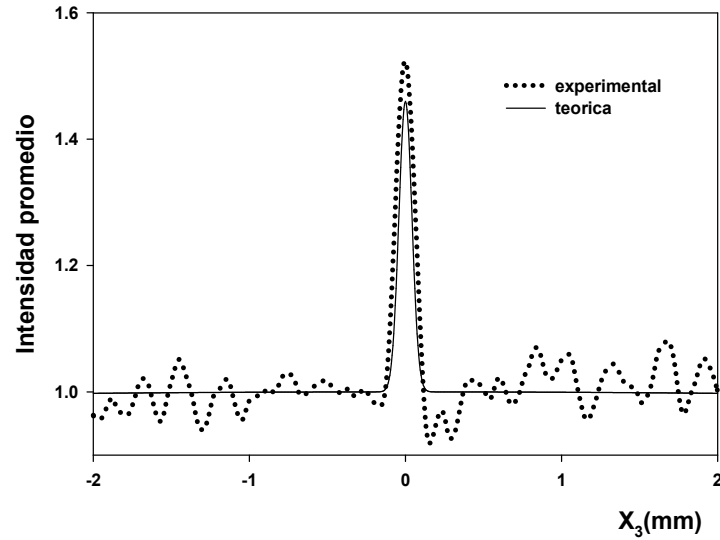


Figura 43. Gráficas de intensidad promedio para iluminación por una fuente puntual. Parámetros utilizados:  $f_0 = 100$  mm,  $f = 500$  mm,  $d = 30$  mm,  $w = 2$  mm,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

En la figura 44 se muestra la imagen que se obtiene directamente del CCD, donde los ejes están dados en pixeles. En la figura 43 se muestra un corte transversal con el eje horizontal en milímetros.

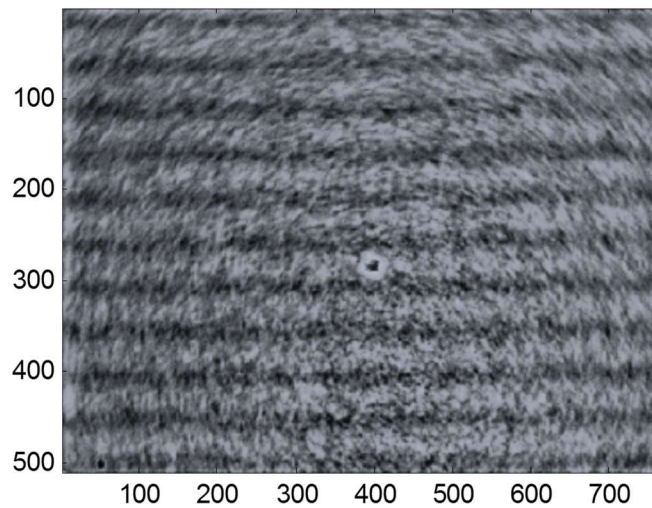


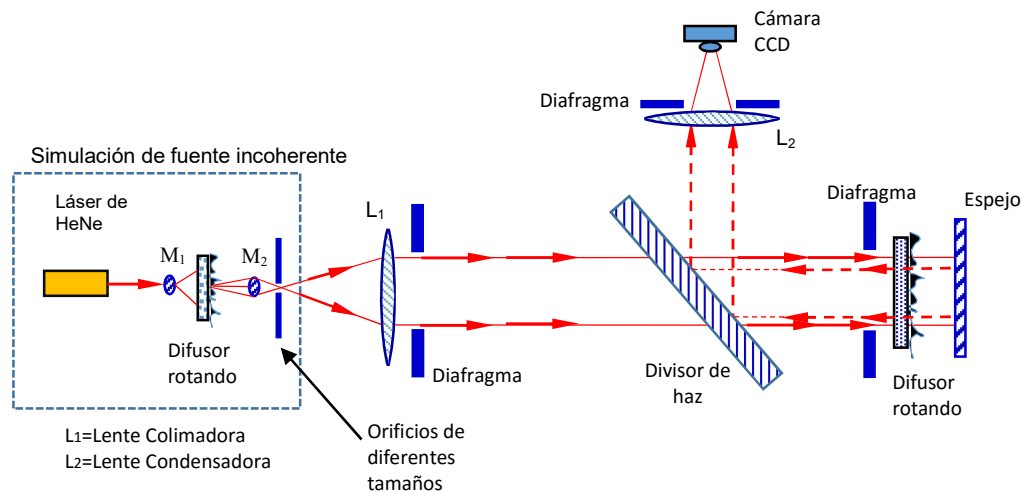
Figura 44. Imagen obtenida con una cámara CCD en el laboratorio. La mancha del centro es la señal de retroesparcimiento para iluminación por una fuente puntual.



En el modelo de la pantalla de fase aleatoria, el difusor está caracterizado por los parámetros  $\sigma_\phi$  y  $\xi$  que son, respectivamente, la desviación estándar y la longitud de correlación de las fluctuaciones de fase. De acuerdo con la ecuación (69) del capítulo 3 y la ecuación (131) del capítulo 4, estos dos parámetros aparecen a través del cociente  $\sigma_\phi/\xi$ . Para conocer el valor de este cociente para el difusor utilizado en los experimentos fue necesario medir la distribución espacial de intensidad promedio en el campo de difracción del difusor. El experimento hecho para medir este cociente se describe en el apéndice B. El valor medido para el inverso de este cociente fue  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$  mm.

## 5.2 Medición de la intensidad promedio para fuente extendida

En la figura 45 se muestra el arreglo experimental de doble paso para obtener la señal de retroesparcimiento reforzado para una fuente extendida. La diferencia con la figura 41 es que se simula una fuente incoherente, como se puede apreciar en el esquema. El arreglo para implementar esta fuente es igual al descrito en relación con la figura 7 del capítulo 2 y es la parte del sistema dentro del rectángulo limitado por líneas punteadas de la figura 45.



**Figura 45. Arreglo experimental utilizado para medir la intensidad promedio de la luz retroesparcida para iluminación por una fuente extendida.**

En este arreglo el único parámetro que se varió fue el diámetro del orificio que precede a la lente colimadora  $L_1$ . Se utilizaron orificios de diferentes tamaños que fueron clasificados en dos grupos: los orificios pequeños con tamaños de 18.4, 29.6, 45.2, 50.7 y 76.4  $\mu\text{m}$  que se utilizaron en el experimento de Young y un segundo grupo con orificios de diámetros más grande cuyos valores se mencionan más adelante. De las figuras 46 a la 50 se puede observar como la SRR aumenta su ancho y disminuye su altura al ir aumentando el diámetro de la fuente secundaria. La última figura muestra el ancho más grande para la señal. En

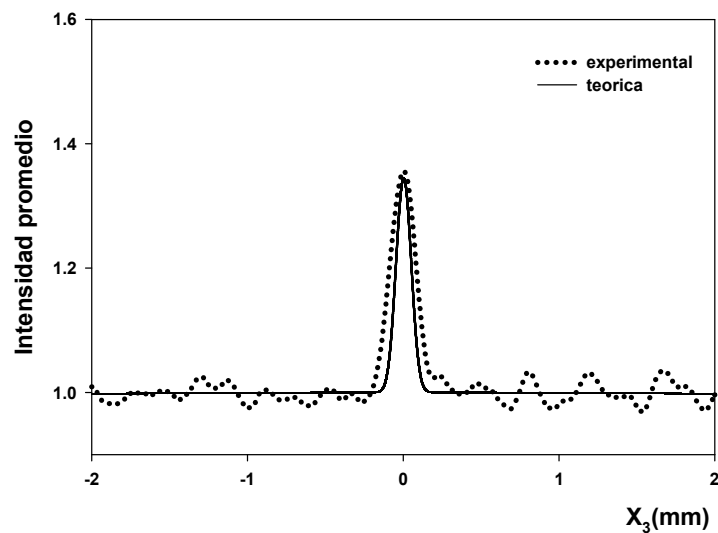
cada figura hay dos gráficas superpuestas, una teórica y otra experimental, donde se puede apreciar que la teoría basada en el modelo de la pantalla de fase aleatoria y el experimento presentan una buena aproximación.

En la tabla 1 se muestra una comparación de los anchos teóricos y experimentales entre los puntos  $1/e$  para diámetros de 18.4 y 76.4  $\mu\text{m}$ .

**Tabla 1. Comparación de los anchos teóricos y experimentales entre los puntos  $1/e$  para fuentes secundarias con diámetros entre 18.4 y 76.4  $\mu\text{m}$ .**

Diámetro del orificio de la fuente secundaria ( $\mu\text{m}$ )	Ancho experimental ( $\mu\text{m}$ )	Ancho teórico ( $\mu\text{m}$ )
18.4	198	138
26.9	216	171
45.2	234	239
50.7	252	267
76.4	356	397

En el caso de la figura 46 se utilizó una fuente circular de diámetro igual a 18.4  $\mu\text{m}$ . Al incrementar este valor a 29.6  $\mu\text{m}$ , la altura de la SRR disminuye, como se aprecia en la figura 47.



**Figura 46. Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 18.4  $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados:  $f_0 = 100$  mm,  $f = 500$  mm,  $d = 30$  mm,  $w = 2$  mm,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .**

El ensanchamiento de la señal no es tan notorio, aparentemente. Pero si se aumenta más el diámetro de la fuente secundaria se obtendrán resultados más claros. En la figura 48 el diámetro de la fuente se aumentó a  $45.2 \mu\text{m}$ . Se puede ver que la SRR disminuyó en altura y se ensanchó, comparado con la figura 46.

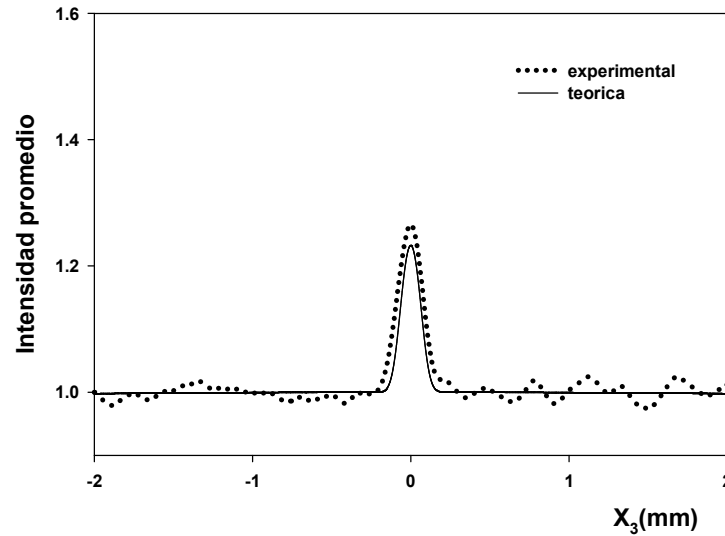


Figura 47. Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de  $29.6 \mu\text{m}$ . Parámetros utilizados:  $f_0 = 100 \text{ mm}$ ,  $f = 500 \text{ mm}$ ,  $d = 30 \text{ mm}$ ,  $w = 2 \text{ mm}$ ,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ .

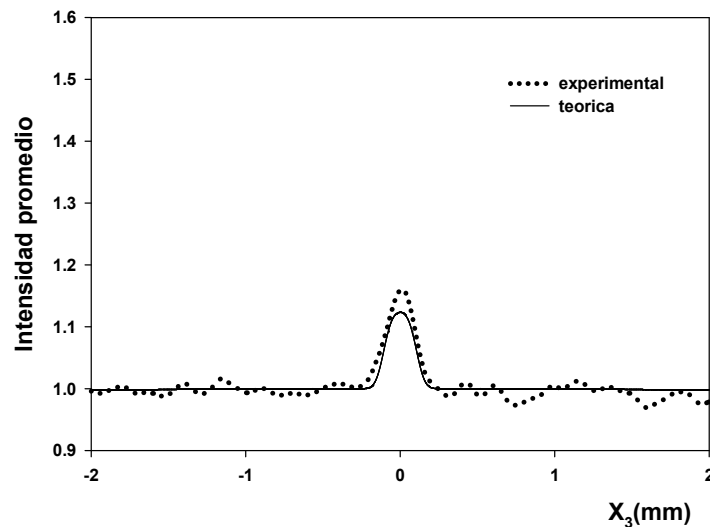


Figura 48. Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de  $45.2 \mu\text{m}$ . Parámetros utilizados:  $f_0 = 100 \text{ mm}$ ,  $f = 500 \text{ mm}$ ,  $d = 30 \text{ mm}$ ,  $w = 2 \text{ mm}$ ,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ .

El ensanchamiento de la señal y su disminución de altura se hacen más evidentes en las figuras 49 y 50 donde se utilizaron diámetros para la fuente secundaria de 50.7 y de 76.4  $\mu\text{m}$ , respectivamente.

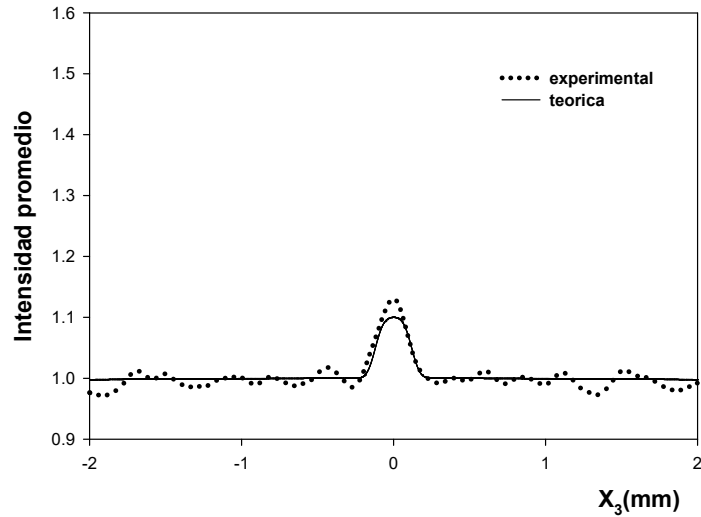


Figura 49. Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 50.7  $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados:  $f_0 = 100$  mm,  $f = 500$  mm,  $d = 30$  mm,  $w = 2$  mm,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

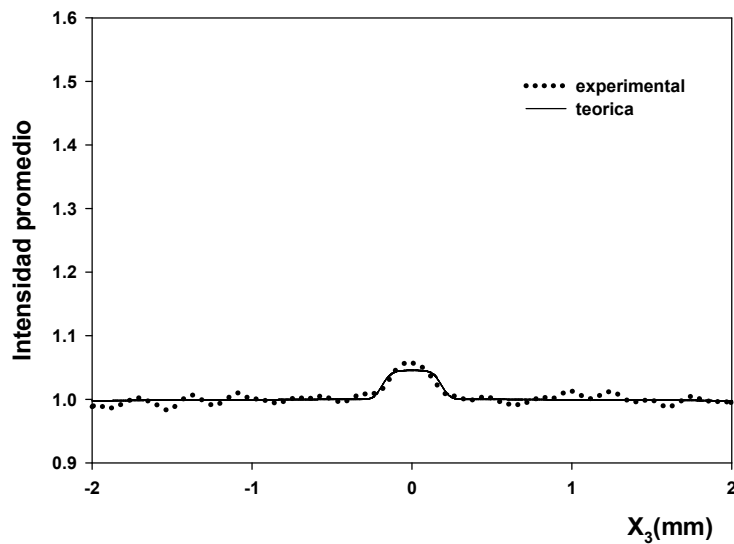


Figura 50. Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 76.4  $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados:  $f_0 = 100$  mm,  $f = 500$  mm,  $d = 30$  mm,  $w = 2$  mm,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

Con el fin de complementar el trabajo hecho con las fuentes extendidas de diámetros entre 18.2 y 76.4  $\mu\text{m}$ , se procedió a fabricar una nueva serie de orificios circulares de diámetros mayores. Estos fueron fabricados perforando láminas obtenidas de latas de aluminio. Los diámetros de los orificios generados en esas placas fueron de 347, 499, 704 y 794  $\mu\text{m}$ . Además, se utilizaron los orificios de 18.4 y 76.4  $\mu\text{m}$  utilizados en la serie de experimentos anteriores con el fin de usar también fuentes con diámetros mucho menores que el ancho de la función  $h(x_0, y_0)$  a utilizarse en la nueva serie de experimentos. Para estos experimentos se utilizó una lente colimadora de distancia focal  $f_0 = 300$  mm y una distancia del difusor al espejo  $d = 10$  mm, y de la curva Gaussiana de la figura 28 se encontró que el ancho de la función  $h(x_0, y_0)$  en la base es de 0.348 mm.

En la sección 2.3 se discutió que para obtener una fuente de intensidad aproximadamente uniforme sobre todo el orificio de la fuente secundaria fue necesario hacer que el perfil de intensidad Gaussiano del haz que iluminaba el orificio tuviera un ancho lo suficientemente grande para que la intensidad en la orilla del orificio no cayera a menos del 90% de su valor en el centro del orificio. Para el orificio de 76.4  $\mu\text{m}$  de diámetro, el semiancho en el punto  $1/e$  del perfil Gaussiano de intensidad es de  $w_i = 0.13$  mm, según se menciona en la figura 8.

El mismo arreglo utilizado para implementar la fuente extendida en el caso del experimento de Young fue utilizado, tanto en la serie de experimentos reportados en las figuras 46 a la 50, como en la serie de experimentos reportados en las figuras 51 a la 54, por lo que el semiancho  $w_i$  del perfil de intensidad Gaussiano del haz que iluminaba los orificios de la fuente secundaria era también de 0.13 mm. Para los orificios de diámetros de 347 a 499  $\mu\text{m}$  la forma Gaussiana del perfil de intensidad debe ser tomada en cuenta, y la distribución de intensidad de la fuente toma la forma

$$I_0(x_0, y_0) = I_0 \text{circ} \left( \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{b} \right) \exp \left[ - \frac{(x_0^2 + y_0^2)}{w_i^2} \right], \quad (136)$$

donde el primer término corresponde al orificio circular de la fuente secundaria con radio  $b$ , y el segundo término a la señal de perfil Gaussiano proveniente del objetivo x10 proyectado en el plano de la fuente.  $w_i$  es el semiancho de esta señal con valor de 0.13 mm. El producto de estos dos términos proporciona la distribución de intensidad para la fuente extendida. A continuación, en las figuras 51 a la 54, se muestran las gráficas teóricas y experimentales para cada fuente secundaria según su diámetro.

En las figuras 51 y 52 se muestra la intensidad promedio generada con las fuentes secundarias de diámetros de 18.4 y 76.4  $\mu\text{m}$ , respectivamente.

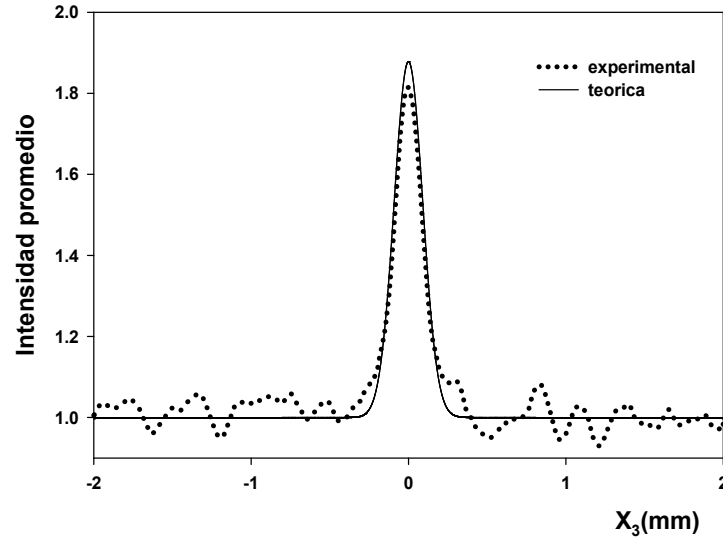


Figura 51. Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 18.4  $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados:  $f_0 = 300$  mm,  $f = 500$  mm,  $d = 10$  mm,  $w = 2$  mm,  $w_i = 0.13$  mm,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

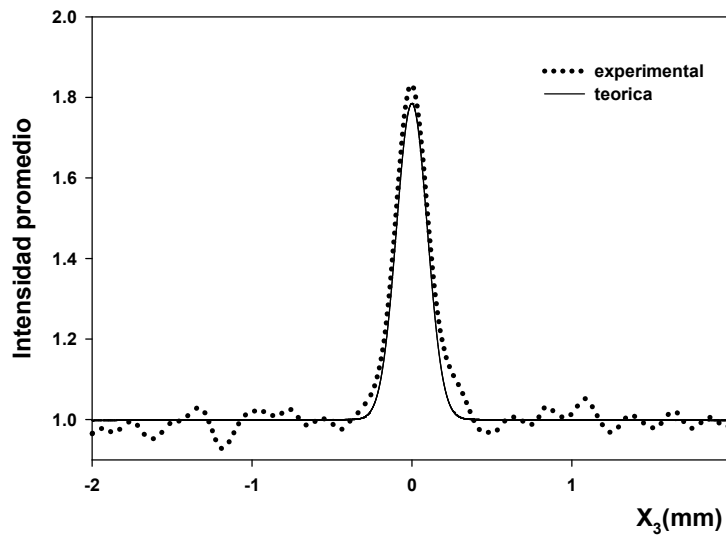


Figura 52. Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de 76.4  $\mu\text{m}$ . Parámetros utilizados:  $f_0 = 300$  mm,  $f = 500$  mm,  $d = 10$  mm,  $w = 2$  mm,  $w_i = 0.13$  mm,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034$  mm,  $\lambda = 0.6328$   $\mu\text{m}$ .

En las figuras 53 y 54 se muestran las gráficas obtenidas usando orificios con diámetros mayores a  $76.4 \mu\text{m}$ . Los parámetros que se utilizaron para estas gráficas se mencionan en los pies de figura. Obsérvese que las gráficas teóricas y experimentales están superpuestas para su comparación.

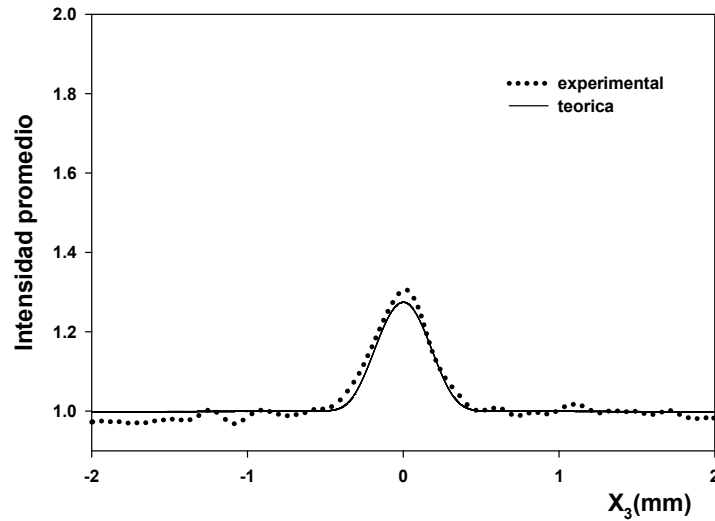


Figura 53. Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de  $347 \mu\text{m}$ . Parámetros utilizados:  $f_0 = 300 \text{ mm}$ ,  $f = 500 \text{ mm}$ ,  $d = 10 \text{ mm}$ ,  $w = 2 \text{ mm}$ ,  $w_i = 0.13 \text{ mm}$ ,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ .

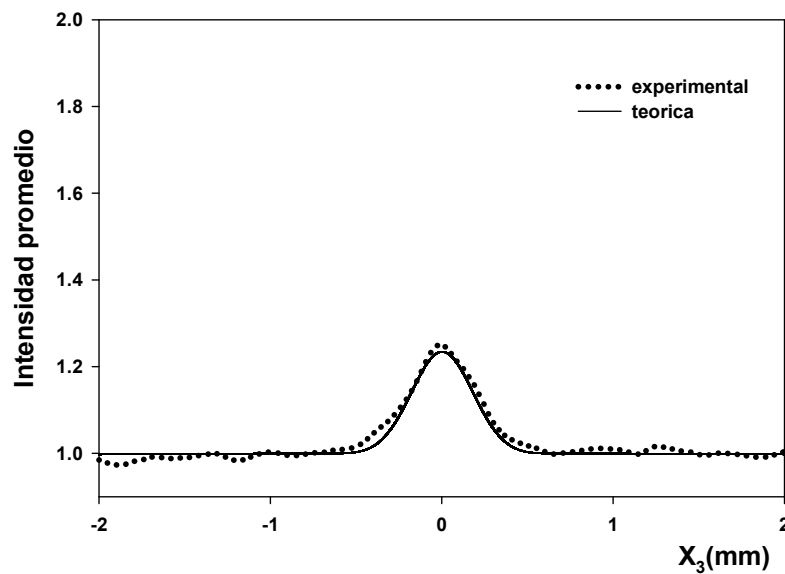


Figura 54. Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de  $499 \mu\text{m}$ . Parámetros utilizados:  $f_0 = 300 \text{ mm}$ ,  $f = 500 \text{ mm}$ ,  $d = 10 \text{ mm}$ ,  $w = 2 \text{ mm}$ ,  $w_i = 0.13 \text{ mm}$ ,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ .

De la figura 51 hasta la 54, el tamaño de la fuente va aumentando como en el caso de las fuentes empleadas en los experimentos de las figuras 46 a la 50. Se puede observar que las gráficas teóricas y las experimentales presentan un comportamiento muy aproximado. Se puede notar que si se aumenta el tamaño de la fuente, la SRR se ensancha y se reduce su altura. Una comparación de los anchos teóricos y experimentales entre los puntos  $1/e$  se muestra en la tabla 2.

**Tabla 2. Comparación de los anchos teóricos y experimentales entre los puntos  $1/e$  para fuentes secundarias con diámetros entre 18.4 y 499  $\mu\text{m}$ .**

Diámetro del orificio de la fuente secundaria ( $\mu\text{m}$ )	Ancho experimental ( $\mu\text{m}$ )	Ancho teórico ( $\mu\text{m}$ )
18.4	256	257
76.4	288	273
347	456	475
499	562	503

De manera adicional, se llevaron a cabo otros experimentos en los que el diámetro de la fuente secundaria era mayor que el ancho en la base de la función  $h(x_0, y_0)$ , como en el caso de las figuras 35 y 37 del capítulo 4. En esta ocasión, la distribución de intensidad Gaussiana que iluminaba el orificio de la fuente secundaria tenía un ancho mucho mayor que el utilizado en las dos series de experimentos anteriores con fuentes extendidas. El ancho  $w_i$  que aparece en la función Gaussiana en la ecuación (136) fue  $w_i = 1.2324$  mm, y los diámetros de los orificios utilizados para la fuente secundaria fueron  $2b = 0.704$  mm y  $2b = 0.794$  mm. Con estos valores se cumple el criterio especificado en la figura 8 del capítulo 2 para considerar una fuente extendida circular de intensidad uniforme. Se utilizó una lente colimadora de distancia focal  $f_0 = 400$  mm, para la cual, el ancho en la base de la función  $h(x_0, y_0)$  de la ecuación (135) es de 0.512 mm. Los resultados se muestran en las figuras 55 y 56. Se puede apreciar que para estos diámetros de las fuentes extendidas la SRR se desparrama y se reduce mucho su altura.



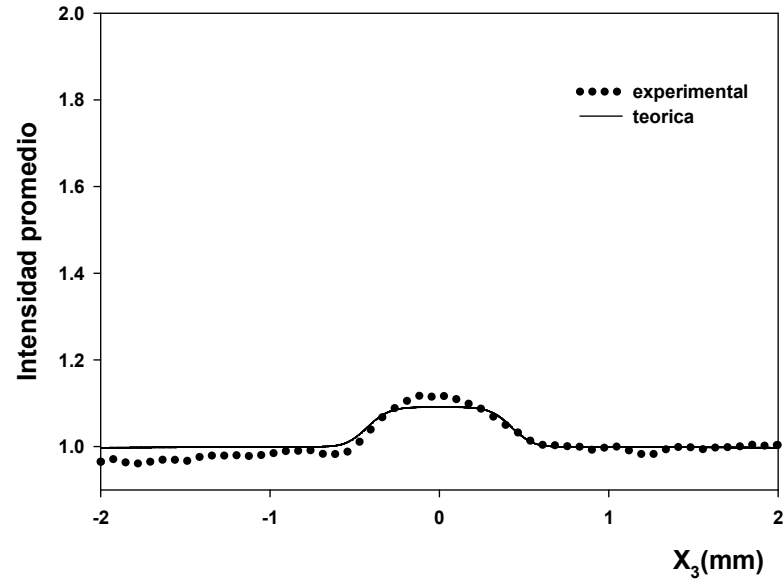


Figura 55. Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de  $704 \mu\text{m}$ . Parámetros utilizados:  $f_0 = 400 \text{ mm}$ ,  $f = 500 \text{ mm}$ ,  $d = 10 \text{ mm}$ ,  $w = 2 \text{ mm}$ ,  $w_i = 1.2324 \text{ mm}$ ,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ .

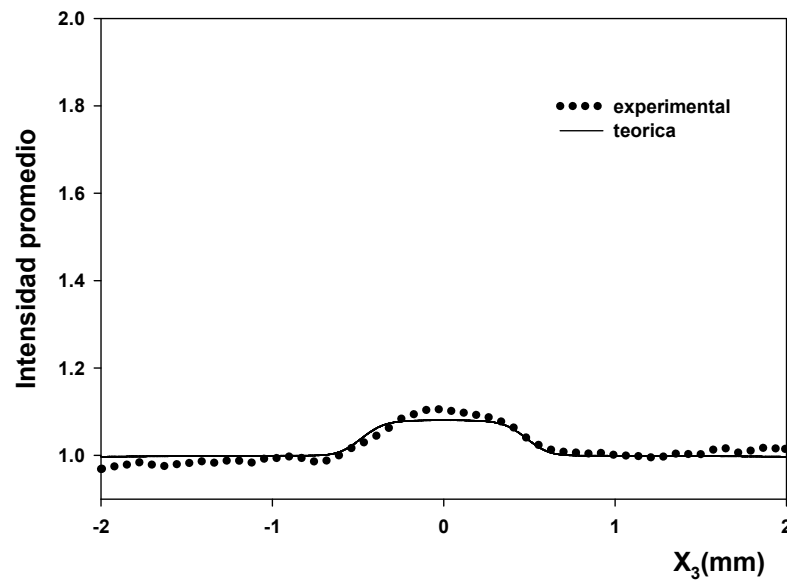


Figura 56. Gráficas teórica y experimental de la intensidad promedio para una fuente extendida. El diámetro de la fuente circular secundaria es de  $794 \mu\text{m}$ . Parámetros utilizados:  $f_0 = 400 \text{ mm}$ ,  $f = 500 \text{ mm}$ ,  $d = 10 \text{ mm}$ ,  $w = 2 \text{ mm}$ ,  $w_i = 1.2324 \text{ mm}$ ,  $\xi/\sigma_\phi = 0.0034 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ .

Por último, conviene resaltar que el ancho y la altura de la SRR son muy sensibles al valor del cociente  $\xi/\sigma_\phi$ . Un cambio de 15% en el valor de este cociente produce un cambio notorio en esas dos cantidades. El valor de este cociente utilizado en los cálculos numéricos fue estimado a partir del experimento simple que se describe en el apéndice B. Sería conveniente estimar el valor de este cociente utilizando un esparcómetro y promediando los valores obtenidos de varios experimentos. Esto daría mayor confiabilidad al valor utilizado en los cálculos.

## Capítulo 6. Conclusiones

---

En este trabajo se llevó a cabo un estudio experimental y teórico de dos configuraciones ópticas que utilizan iluminación parcialmente coherente provista por una fuente artificial formada por un láser (fuente coherente) y un difusor giratorio.

Para variar el tamaño de la fuente, con un objetivo de microscopio, se formó una imagen reducida del difusor giratorio sobre orificios circulares de diferentes diámetros. Estos orificios constituyen una fuente secundaria incoherente.

En la primera etapa del trabajo se realizó el experimento de Young de la doble rendija para controlar la visibilidad de las franjas variando los parámetros de la fuente. Se utilizaron tres placas metálicas con dos orificios circulares, en lugar de dos rendijas.

Se hizo un estudio teórico del patrón de difracción obtenido variando el tamaño de la fuente secundaria. El método utilizado en el análisis teórico difiere del tratamiento clásico basado en la teoría de coherencia parcial. En el presente trabajo se calculó primero el patrón de difracción en intensidad producido por un solo punto de la fuente y después se hizo una superposición de los patrones producidos por todos los puntos de la fuente integrando sobre la distribución espacial de intensidad de la fuente. Se obtuvo la misma fórmula para el patrón de intensidad resultante que se obtiene con el tratamiento clásico.

En el trabajo experimental realizado, utilizando fuentes secundarias de diferentes diámetros (entre 18.4 y 76.4  $\mu\text{m}$ ) y placas de difracción con distintas distancias entre sus dos orificios circulares (1.87, 4.89 y 9.97 mm), se varió la coherencia espacial de la iluminación sobre un rango muy amplio que permitió obtener desde franjas con máxima visibilidad hasta lograr la desaparición de las franjas.

A diferencia del trabajo previo de Thompson y Wolf (1957), se hizo una comparación cuantitativa entre las curvas teóricas y las experimentales, aprovechando que las franjas fueron grabadas con una cámara CCD, a diferencia del trabajo citado, donde se utilizó fotografía convencional para obtener los patrones y la comparación se hizo de forma visual.

En la segunda etapa del trabajo se llevó a cabo un estudio del fenómeno de retroesparcimiento reforzado con iluminación parcialmente coherente en una configuración de doble paso formada por un difusor y un espejo.

Se realizó también un análisis teórico del fenómeno con esta configuración utilizando la teoría escalar de difracción, así como la teoría de la pantalla de fase aleatoria para describir la propagación de la luz de ida y regreso a través del difusor, y se obtuvo una fórmula para la intensidad promedio de la luz retroesparcida para el caso de iluminación temporal y espacialmente coherente, es decir, para una fuente puntual. El caso de iluminación parcialmente coherente se resolvió integrando la señal obtenida en el caso coherente sobre la distribución espacial de intensidad de la fuente extendida.

Se realizaron experimentos para estudiar el ensanchamiento de la señal de retroesparcimiento reforzado al variar el tamaño de la fuente secundaria. Se utilizaron dos conjuntos de orificios con diferentes rangos de tamaños: el primero, entre 18.4 y 76.4  $\mu\text{m}$ , y el segundo, entre 76.4 y 499  $\mu\text{m}$ . Se pudo obtener una señal de retroesparcimiento reforzado que variaba desde la forma obtenida con una fuente puntual hasta que prácticamente se extinguía la señal. Al aumentar el diámetro de la fuente secundaria, se observó que la señal se ensanchaba y disminuía en altura.

Las curvas teóricas predicen muy bien el comportamiento experimental, aunque, en algunos casos, no se obtuvo un acuerdo cuantitativo muy cercano. Esto puede deberse, en parte, a simplificaciones hechas en el modelo teórico para poder obtener una expresión analítica en el caso de iluminación por una fuente puntual. Parece que una evaluación numérica utilizando un modelo diferente resultaría muy complicada debido a la necesidad de evaluar integrales numéricas en varias dimensiones. Otra fuente importante de discrepancia se debe a la presencia del ruido de speckle en las mediciones, el cual sólo se reduce cuando la coherencia espacial de la iluminación es suficientemente baja, es decir, para las fuentes secundarias de mayor diámetro.

## **6.1 Contribuciones principales del presente trabajo**

- 1) Se implementó, mediante el uso de un láser y un difusor giratorio, una fuente extendida que permite llevar a cabo experimentos variando la coherencia espacial de la iluminación sobre un rango muy extendido. Se realizaron experimentos que muestran el buen funcionamiento de la fuente.
- 2) Se hizo un análisis teórico del experimento de Young para iluminación por una fuente extendida, utilizando un método alternativo al tratamiento clásico que utiliza la teoría de coherencia parcial. Se obtuvo la misma fórmula para la intensidad promedio en el patrón de difracción que se obtiene con el tratamiento clásico.

- 3) Se llevó a cabo un análisis teórico de la luz retroesparcida por una configuración de doble paso y se obtuvo una fórmula para la intensidad promedio de la luz retroesparcida para el caso de iluminación temporal y espacialmente coherente, es decir, para una fuente puntual. El caso de iluminación por una fuente extendida se resolvió integrando la señal obtenida en el caso coherente sobre la distribución espacial de intensidad de la fuente extendida.
- 4) Se llevaron a cabo experimentos de retroesparcimiento en la configuración de doble paso utilizando iluminación provista por una fuente extendida. Se estudió la evolución de la señal de retroesparcimiento reforzado al variar el tamaño de la fuente. En general, los resultados teóricos reproducen muy bien a los experimentales, aunque con diferencias cuantitativas en algunos casos.

## 6.2 Trabajo futuro

Se sugiere el siguiente trabajo sobre el fenómeno de retroesparcimiento reforzado en la configuración de doble paso utilizada en la tesis:

- 1) Llevar a cabo un estudio detallado de la solución teórica obtenida para el caso de iluminación coherente y realizar los experimentos correspondientes. Esto podría ayudar a explicar las diferencias observadas entre la teoría y el experimento.
- 2) Llevar a cabo experimentos con fuentes secundarias con perfil Gaussiano y comparar con la teoría. Este caso de iluminación por una fuente extendida se puede tratar sin realizar una integración numérica.
- 3) Implementar una mejor manera de obtener promedios en el trabajo experimental, desplazando los difusores lateralmente en lugar de rotándolos, pues el realizar los promedios utilizando sólo una zona del difusor contenida entre dos círculos no permite hacer una promediación suficientemente buena para reducir el ruido inherente a las mediciones. Esto es particularmente importante en el caso del segundo difusor que simula la pantalla de fase aleatoria en el sistema de doble paso, ya que la presencia del speckle reduce mucho la calidad de la señal de retroesparcimiento reforzado, excepto en los casos en que la fuente extendida es lo suficientemente grande para producir iluminación de baja coherencia espacial.

También sería conveniente llevar a cabo experimentos de doble paso con una fuente térmica, por ejemplo, una lámpara de mercurio. Esto podría contribuir a disminuir el speckle que afecta la calidad de la señal de retroesparcimiento reforzado. Asimismo, podría iniciarse una serie de experimentos de retroesparcimiento reforzado con otros medios que producen esparcimiento de luz, tales como colecciones de partículas y tejido biológico.

## Literatura citada

---

- Beckman, P. y Spizzichino, A. (1963). *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*. Pergamon Press. Oxford.
- Born, M. y Wolf, E. (1970). *Principles of Optics*. Pergamon Press, Oxford, 4a. ed.
- Bramley, E. N. Diffraction of an electromagnetic spectrum of waves by a phase-changing screen. *J. Atmos. Terrestr. Phys.* **29**:(1) 1-28.
- Dainty, J. C. (1976). The statistics of speckle patterns, en *Progress in Optics XIV*, E. Wolf, Ed., North-Holland, Amsterdam.
- Davenport, W. B. y Root, W. L. (1958). *An introduction to the theory of random signals and noise*. Mc-Graw Hill, New York.
- Goodman, J. W. (1984). Statistical properties of laser speckle patterns, en *Laser Speckle and Related Phenomena*, J. C. Dainty, Ed., Springer-Verlag, Berlin, 2a. ed.
- Goodman, J. W. (1985) *Statistical Optics*. Wiley, New York.
- Goodman, J. W. (1996) *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, New York. 2a. ed.
- Jakeman, E. (1988). Enhanced backscattering through a deep random phase screen. *J. Opt. Soc. Am. A*, **5**(10): 1638-1648.
- Kim, Y. L., Liu, Y., Wali, R. K., H. K. Roy, H. K. y Backman, V. (2005). Low-coherent backscattering spectroscopy for tissue characterization. *Appl. Opt.*, **44**(3): 366-377.
- Kim, Y. L., Pradhan, P., Subramanian, H., Liu, Y., Kim, H. M. y Backman, V. (2006). Origin of low-coherence enhanced backscattering, *Opt. Lett.*, **31**(10): 1459-1461.
- Maradudin, A. A. y Méndez, E. R. (2002). Scattering by surfaces and phase screens, en *Scattering*, R. Pike and P. Sabatier, Eds., Academic Press, New York.
- Martienssen, W. y Spiller, E. (1964). Coherence and Fluctuations in Light Beams. *Am. J. Phys.* **32**(1): 919-926.
- Méndez, E. R. (2015). Comunicación personal.
- Okamoto, T. y Asakura, T. (1996). Enhanced backscattering of partially coherent light. *Opt. Lett.*, **21**(6): 369-371.
- Press, W. H. y Flannery, B. P. (1992). *Numerical recipes in Fortran 77: The art of scientific computing*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Subramanian, H., S., Pradhan, P., Kim, Y. L., Liu, Y., Li, X. y Backman, V. (2006). Modeling low-coherence enhanced backscattering using Monte Carlo simulation. *Appl. Opt.*, **45**(24): 6292-6300.

- Thompson, B. J. y Wolf, E. (1957). Two-Beam Interference with Partially Coherent Light, *J. Opt. Soc. Am.* **47**(10): 895-902.
- Tsang, L. e Ishimaru, A. (1984). Backscattering enhancement of random discrete scatterers. *J. Opt. Soc. Am. A.*, **1**(8): 836-839.
- Van Albada, M. P. y Langendijk, A. (1985). Observation of weak localization of light in a random medium, *Phys. Rev. Lett.* **55**(24): 2692-2695.



## Apéndice A. Evaluación de tres integrales del capítulo 2

---

Poniendo

$$X = \frac{x_0}{f_0} + \frac{x_2}{f}, \quad Y = \frac{y_0}{f_0} + \frac{y_2}{f}, \quad (137)$$

la integral de la ecuación (18) queda como

$$J_0 = \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{a}\right) \exp[-ik(Xx' + Yy')] dx' dy'. \quad (138)$$

Utilizando coordenadas polares  $(R, \psi)$  y  $(r', \phi')$  se puede escribir

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \psi = \arctan \frac{Y}{X}, \quad X = R \cos \psi, \quad Y = R \sin \psi, \quad (139)$$

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}, \quad \phi' = \arctan \frac{y'}{x'}, \quad x' = r' \cos \phi', \quad y' = r' \sin \phi', \quad (140)$$

con lo que se obtiene

$$Xx' + Yy' = R \cos \psi r' \cos \phi' + R \sin \psi r' \sin \phi' = Rr' \cos (\psi - \phi'), \quad (141)$$

y

$$\text{circ}\left(\frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{a}\right) = \text{circ}\left(\frac{r'}{a}\right), \quad (142)$$

donde

$$\text{circ}\left(\frac{r'}{a}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } r' \leq a \\ 0 & \text{si } r' > a. \end{cases} \quad (143)$$

Con los cambios anteriores la ecuación (138) se transforma en

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_0 &= \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \text{circ}\left(\frac{r'}{a}\right) \exp[-ikRr' \cos(\psi - \phi')] r' dr' d\phi' \\
&= \int_0^a \int_0^{2\pi} \exp[-ikRr' \cos(\psi - \phi')] d\phi' r' dr'.
\end{aligned} \tag{144}$$

Utilizando la siguiente igualdad (Goodman, 1996, pág. 12):

$$\int_0^{2\pi} \exp[-ikRr' \cos(\psi - \phi')] d\phi' = 2\pi J_0(kRr'), \tag{145}$$

donde  $J_0(\ )$  es una función Bessel de primera clase de orden cero.

Entonces,

$$\mathcal{J}_0 = 2\pi \int_0^a J_0(kRr') r' dr' = \frac{2\pi}{(kR)^2} \int_0^a J_0(kRr') (kRr') (kR dr') = \frac{2\pi}{(kR)^2} \int_0^{kRa} J_0(x) x dx, \tag{146}$$

donde se utilizó el cambio de variable  $x = kRr'$ , que implica  $dx = kR dr'$ .

Se conoce que (Goodman, 1996, pág.14)

$$\int_0^c J_0(x) x dx = c J_1(c), \tag{147}$$

donde  $J_1(\ )$  es una función Bessel de primera clase de orden uno.

Por lo tanto,

$$\mathcal{J}_0 = \frac{2\pi}{(kR)^2} (kRa) J_1(kRa) = 2\pi a \frac{J_1(kRa)}{kR} = \pi a^2 \frac{2J_1(kRa)}{kRa}. \tag{148}$$

Substituyendo el valor de  $R$  dado en la ecuación (139) y usando las ecuaciones (137) se obtiene el resultado de la ecuación (18) del capítulo 2.

Se evaluarán ahora las integrales de las ecuaciones (34) y (35) del capítulo 2.

$$J_1 = \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b}\right) \cos\left(\frac{kd}{f_0}y\right) dy, \quad (149)$$

y

$$J_2 = \iint_{-\infty}^{\infty} \text{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{b}\right) \text{sen}\left(\frac{kd}{f_0}y\right) dy. \quad (150)$$

Cambiando a coordenadas polares,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arctan\phi = \frac{y}{x}, \quad x = r \cos\phi, \quad y = r \text{sen}\phi, \quad (151)$$

se puede escribir

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \text{circ}\left(\frac{r}{b}\right) \cos\left(\frac{kd}{f_0}r \text{sen}\phi\right) r dr d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^b \cos\left(\frac{kd}{f_0}r \text{sen}\phi\right) r dr d\phi \\ &= \int_0^b \left[ \int_0^{2\pi} \cos\left(\frac{kd}{f_0}r \text{sen}\phi\right) d\phi \right] r dr, \end{aligned} \quad (152)$$

y

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \text{circ}\left(\frac{r}{b}\right) \text{sen}\left(\frac{kd}{f_0}r \text{sen}\phi\right) r dr d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^b \text{sen}\left(\frac{kd}{f_0}r \text{sen}\phi\right) r dr d\phi \\ &= \int_0^b \left[ \int_0^{2\pi} \text{sen}\left(\frac{kd}{f_0}r \text{sen}\phi\right) d\phi \right] r dr. \end{aligned} \quad (153)$$

Para evaluar las integrales sobre la coordenada angular conviene poner  $q = \frac{kd}{f_0} r$  y considerar la siguiente igualdad:

$$\int_0^{2\pi} \exp(iq \operatorname{sen} \phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \cos(q \operatorname{sen} \phi) d\phi + i \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(q \operatorname{sen} \phi) d\phi. \quad (154)$$

Utilizando la fórmula (Goodman, 1996, pág. 77)

$$\exp(iq \operatorname{sen} \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(q) \exp(in\phi), \quad (155)$$

donde las  $J_n(\ )$  son funciones Bessel de primera clase, tenemos que

$$\int_0^{2\pi} \exp(iq \operatorname{sen} \phi) d\phi = \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(q) \exp(in\phi) \right] d\phi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(q) \int_0^{2\pi} \exp(in\phi) d\phi. \quad (156)$$

Si  $n = 0$ ,

$$\int_0^{2\pi} \exp(in\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi, \quad (157)$$

y si  $n \neq 0$

$$\int_0^{2\pi} \exp(in\phi) d\phi = \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} [\exp(in\phi)](in d\phi) = \frac{1}{in} \exp(in\phi) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{in} |\exp(in2\pi) - 1| = 0. \quad (158)$$

En consecuencia,

$$\int_0^{2\pi} \exp(iq \operatorname{sen} \phi) d\phi = 2\pi J_0(q). \quad (159)$$

Como el lado derecho de la ecuación anterior es puramente real, de la ecuación (154) se ve que

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}(q\text{sen}\phi) d\phi = 0, \quad (160)$$

y

$$\int_0^{2\pi} \cos(q\text{sen}\phi) d\phi = 2\pi J_0(q). \quad (161)$$

Sustituyendo estos dos últimos resultados en las ecuaciones (152) y (153) se observa que

$$\mathcal{J}_1 = 2\pi \int_0^b J_0\left(\frac{kd}{f_0}r\right) r dr, \quad (162)$$

y

$$\mathcal{J}_2 = 0. \quad (163)$$

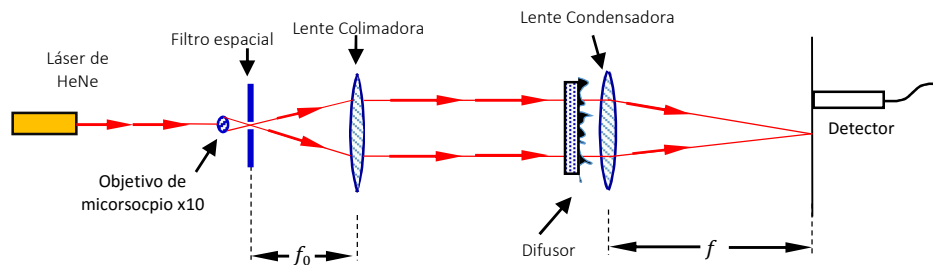
Como la integral de la ecuación (162) tiene la misma forma que la primera integral de la ecuación (146), y siguiendo los pasos utilizados para pasar de la ecuación (146) a la ecuación (148) se puede ver que

$$\mathcal{J}_1 = \pi b^2 \frac{2J_1\left(\frac{kd}{f_0}b\right)}{\frac{kd}{f_0}b}, \quad (164)$$

es el resultado dado en la ecuación (34) del capítulo 2.

## Apéndice B. Caracterización del difusor utilizado en los experimentos de doble paso

La figura 57 muestra el arreglo utilizado para medir la distribución espacial de intensidad promedio en el patrón de difracción de Fraunhofer del difusor. Un detector marca Newport, modelo 818-SL, de silicio, con una abertura circular de diámetro 1 mm al frente, es trasladado manualmente a lo largo de una línea recta en el plano focal de la lente condensadora. Para cada posición del detector se toman varias mediciones de intensidad, rotando el difusor a una posición distinta entre mediciones y promediando los valores obtenidos.



**Figura 57. Arreglo experimental utilizado para medir la distribución espacial de intensidad promedio en el patrón de difracción de Fraunhofer del difusor. Distancia focal de la lente colimadora  $f_0 = 200$  mm, distancia focal de la lente condensadora  $f = 1000$  mm.**

En la aproximación de Fresnel, y utilizando el modelo de la pantalla de fase aleatoria, la amplitud compleja en el plano focal  $(x_2, y_2)$  de la lente condensadora se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 U(x_2, y_2) &= C_0 \frac{\exp(i\lambda f)}{i\lambda f} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_1^2 + y_1^2}{w^2}\right) \exp[i\phi(x_1, y_1)] \\
 &\times \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x_1^2 + y_1^2)\right] \exp\left\{i\frac{k}{2f}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]\right\} dx_1 dy_1 \\
 &= C_0 \frac{\exp(i\lambda f)}{i\lambda f} \exp\left[i\frac{k}{2f}(x_2^2 + y_2^2)\right] \iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_1^2 + y_1^2}{w^2}\right) \exp[i\phi(x_1, y_1)] \\
 &\times \exp\left[-i\frac{k}{2f}(x_1 x_2 + y_1 y_2)\right] dx_1 dy_1,
 \end{aligned} \tag{165}$$

donde  $w$  es el radio en el punto  $1/e$  del haz Gaussiano colimado que ilumina el difusor,  $\phi(x_1, y_1)$  es la fase aleatoria introducida por el difusor,  $\exp\left[-i\frac{k}{2f}(x_1^2 + y_1^2)\right]$  la transmitancia de amplitud compleja de la lente condensadora,  $f$  la distancia focal de esta lente,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$  la longitud de onda de la luz y  $C_0$  es una constante compleja.

Utilizando los métodos empleados en el capítulo 4 para evaluar las correlaciones de las ecuaciones (90) a (93), la función de autocorrelación de la transmitancia de amplitud compleja del difusor dada por la ecuación (69) del capítulo 3 y la ecuación (102) del capítulo 4, es fácil demostrar que la distribución espacial de intensidad promedio en el plano focal de la lente condensadora está dada por

$$\langle I(x_2, y_2) \rangle = \langle A(x_2, y_2) A^*(x_2, y_2) \rangle = \frac{|C_0|^2}{\lambda^2 f^2} \frac{\pi^2 w^4}{\left(1 + \frac{2\sigma_\phi^2}{\xi^2} w^2\right)} \exp\left\{-\frac{k^2 w^2}{2f^2} \frac{(x_2^2 + y_2^2)}{\left(1 + \frac{2\sigma_\phi^2}{\xi^2} w^2\right)}\right\}. \quad (166)$$

En la práctica

$$\frac{2\sigma_\phi^2}{\xi^2} w^2 \gg 1, \quad (167)$$

y podemos escribir

$$\langle I(x_2, y_2) \rangle = \frac{|C_0|^2}{2} \left(\frac{\pi w \xi}{\lambda f \sigma_\phi}\right)^2 \exp\left[-\frac{(x_2^2 + y_2^2)}{\left(\frac{\lambda f \sigma_\phi}{\pi \xi}\right)^2}\right]. \quad (168)$$

La curva medida se muestra en el figura 58. Se ve que se aproxima a una función Gaussiana. El semiancho en el punto  $1/e$  obtenido de esta curva es  $\Delta = 59.3 \text{ mm}$ , e igualando al valor del semiancho correspondiente de la función Gaussiana de la ecuación (168) tenemos que

$$\frac{\lambda f \sigma_\phi}{\pi \xi} = \Delta, \quad (169)$$

de donde

$$\frac{\xi}{\sigma_\phi} = \frac{\lambda f}{\pi \Delta}. \quad (170)$$

Dado que  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$  y  $f = 1 \text{ m}$ , obtenemos un valor  $\frac{\xi}{\sigma_\phi} = 0.0034 \text{ mm}$ , que es el valor utilizado para obtener las curvas teóricas que aparecen en el capítulo 5.

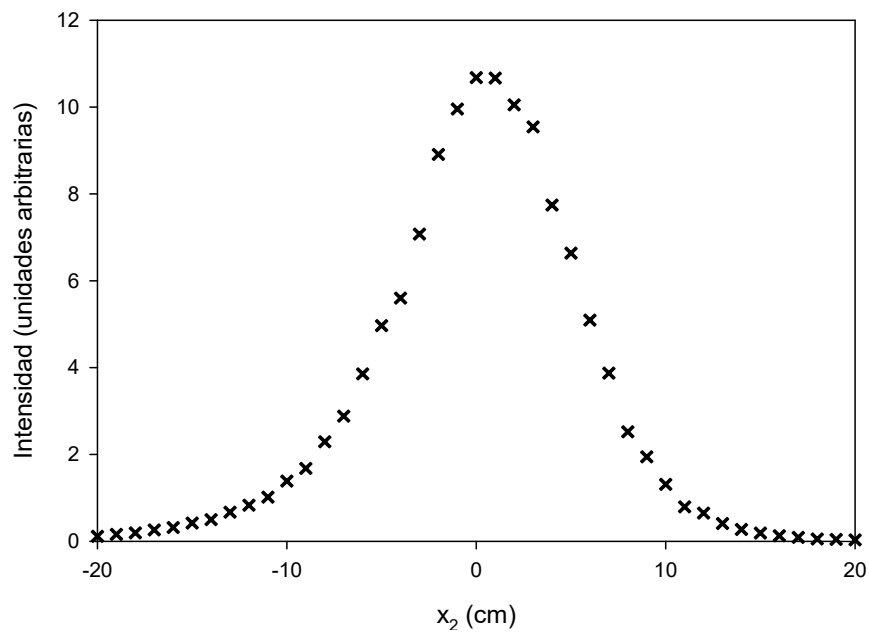


Figura 58. Distribución espacial de intensidad promedio medida en el plano focal de la lente condensadora.