

Tesis defendida por  
Almendra Villela y Mendoza  
y aprobada por el siguiente Comité

---

Dr. José Manuel Romo Jones  
Director del Comité

---

Dra. Miriam Stock Joann  
Miembro del Comité

---

Dr. Antonio González Fernández  
Miembro del Comité

---

Dr. Mario González Escobar  
Director del Comité

---

Dr. Antonio González Fernández  
Coordinador Programa de Posgrado  
en Ciencias de la Tierra

---

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales  
Director  
Dirección de Estudios de Posgrado

*13 de Marzo de 2013*

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR  
DE ENSENADA**



---

Programa de Posgrado en Ciencias  
En Ciencias de la Tierra

---

Análisis y aplicación de las propiedades de polarización de la señal del georadar

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de  
Doctor en Ciencias de la Tierra

Presenta:

Almendra Villela y Mendoza

Ensenada, Baja California, México  
2013

Resumen de la tesis de Almendra Villela y Mendoza, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Doctor en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

Análisis y aplicación de las propiedades de polarización de la señal del georadar.

Resumen aprobado por:

---

José Manuel Romo Jones  
Director de Tesis

Las antenas transmisoras usadas en el método de georadar producen un campo bipolar que actúa direccionalmente, las antenas receptoras también actúan direccionalmente. Esto nos permite usar una serie de configuraciones diferentes para “iluminar” el objetivo con distintas polarizaciones. Las propiedades del objetivo pueden ser descritas por una matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  de  $2 \times 2$ . En este trabajo medimos las componentes de la matriz de dispersión tomando datos con cuatro configuraciones distintas de antenas. La información de los cuatro elementos de  $\mathbf{S}$  se utiliza en conjunto para mejorar la interpretación del objetivo en el subsuelo. Por otra parte, la orientación de objetos alargados puede estimarse rotando la matriz de dispersión hasta encontrar el ángulo que minimiza la anti-diagonal.

En este trabajo exploramos distintas maneras de combinar los elementos de la matriz de dispersión para obtener mejores imágenes del subsuelo. Usamos cantidades invariantes a la rotación como la traza, el determinante y la norma de Frobenius, las cuales producen respuestas libres del efecto direccional del campo dipolar y de esta forma permiten utilizar procesos estándar diseñados para aplicarse a campos escalares como el usado en el método de reflexión sísmica. Por otro lado nos permite combinar en una sola imagen la información contenida en los cuatro elementos de la matriz de dispersión.

La estimación del ángulo de orientación de objetos alargados se hace utilizando una transformación por rotación que maximiza ya sea la diagonal o la anti-diagonal de la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$ . La estimación del ángulo es un proceso inestable particularmente para amplitudes pequeñas y datos ruidosos. Nosotros aplicamos la Norma de Frobenius como un criterio de selección de las mejores amplitudes para una estimación más estable y significativa del ángulo. Los métodos propuestos se prueban con datos sintéticos producidos con simulaciones en 3D y se aplican también a datos reales obtenidos en dos sitios de prueba.

Palabras Clave: **Matriz de dispersión GPR, multipolarización GPR, propiedades invariantes.**

Abstract of the thesis presented by Almendra Villela y Mendoza as a partial requirement to obtain the Doctor in Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics.

Analysis and application of the polarization properties of georadar signals

Abstract approved by:

---

Dr. José Manuel Romo Jones  
Thesis director

The transmitting antennas used in GPR produce a bipolar field that behave directionally, the receiving antennas behave also directionally. This fact allows to use a number of different configurations to "illuminate" the target with different field polarizations. The properties of the targets can be described by a 2x2 scattering matrix  $\mathbf{S}$ . In this work we measure the components of the scattering matrix taking data with four different antenna's configurations. The information of the four elements of  $\mathbf{S}$  is used together to improve the interpretation of the subsurface target. Moreover, the orientation of elongated objects can be estimated by rotating the scattering matrix to find the angle that minimizes the anti-diagonal.

In this work we explore different ways to combine the elements of the scattering matrix for a better imaging of the subsurface. We use rotation invariant quantities as the trace, the determinant and the Frobenius norm, which produce responses that are free of directional effects caused by the dipolar field and thus allowing the use of standard processes designed for scalar fields as the used in seismic reflection method. Moreover these new responses allows us to combine into a single image information contained in the four elements of the scattering matrix.

The orientation angle of elongated objects is estimated using a rotation transformation which maximizes either the diagonal or the anti-diagonal of the scattering matrix  $\mathbf{S}$ . The angle estimation process is particularly unstable for small amplitudes and noisy data. We used the Frobenius norm as a criterion for selecting the best amplitudes for a more stable and significative angle estimation. The proposed methods are tested with synthetic data produced by 3D simulations and also applied to real data sets from two test sites.

**Keywords: GPR scattering matrix, multi-polarization GPR, Invariant properties.**

## Dedicatoria

A MIS PADRES:

QUIENES SIEMPRE ME APOYARON E  
IMPULSARON A SEGUIR ADELANTE.

A QUIENES LES BEBO TODOS LOS LOGROS  
OBTENIDOS EN MI VIDA, GRACIAS A SUS  
ENSEÑANZAS, RESPALDO Y AMOR QUE  
SIEMPRE ME BRINDARON.

## Agradecimientos

A mis hermanos, por contar siempre con su apoyo y cariño.

A mis angelitos (Hilary, Keidi, Danielin y Melisa), quienes con sus sonrisas iluminan cualquier momento.

A mi director de tesis el Dr. Romo, quien confió y me dio la oportunidad de trabajar con este tema. Por el tiempo, paciencia y dedicación invertido para la realización de este trabajo.

A mis sinodales, Dra. Joann Stock, Mario González y Antonio González, por sus comentarios, tiempo dedicado y actitud positiva hacia este trabajo.

Así mismo agradezco a todas las personas que me ayudaron en la realización de este trabajo, los técnicos Jaime Calderón Fernando quienes me apoyaron en el levantamiento de datos, José Mojarro, Humberto Benítez y Luis Gradilla con apoyo en el mantenimiento y reparaciones de mi computadora, Bárbara Uribe, Martita Barrera y Lupita Zepeda quienes me apoyaron con los trámites administrativos.

A mis amigos con quienes he compartido toda clase de momentos tanto buenos como no tan buenos, mis amigas del básquet (Tania, Isa, Lolis, Liz), del CICESE (Adriana, Olga, Ale, Biri, Nancy, Xochilt, Yesi y Fabio, Mine, Rosi y Orlando), a las vecinas (Dulce, Idalmis, Gema y Selene) y de antaño (Selene y Carpio, Melba, Juank's, Bertha, Maricela, Estibaliz y Daniel).

A CONACYT por la beca (17176) que me otorgo para la realización de este trabajo de tesis. Al proyecto de CONACYT # 133042 Ciencia Básica SEP-CONACYT 2009 "Estudio Geofísico Multidisciplinario y riesgo sísmico del margen tectónico en el norte de Baja California", por financiamiento al trabajo de campo y complementario de beca.

## Contenido

	Página
Resumen .....	i
Abstract .....	ii
Dedicatorias .....	iii
Agradecimientos .....	iv
Lista de figuras .....	vii
Lista de tablas .....	xiii
Capítulo I.- Introducción .....	1
I.1 Motivación .....	1
I.2 Objetivo .....	2
I.3 Principios básicos del GPR .....	2
I.4 Teoría .....	5
I.5 Propiedades electromagnéticas de las rocas .....	11
I.6 Propiedades de la onda .....	14
I.7 Coeficientes de reflexión .....	16
I.8 Problema directo, cálculo de un radagrama sintético .....	20
Capítulo II.- Análisis de polarización .....	22
II.1 Arreglos de antenas comúnmente usados .....	22
II.2 Patrón de radiación de las antenas .....	25
II.3 Polarización .....	28
II.4 Matriz de dispersión .....	30
II.5 Invariantes de la matriz de dispersión .....	34
II.6 Estimación del rumbo .....	35
II.7 Procesamiento convencional de datos .....	37
Capítulo III.- Experimentos con datos sintéticos .....	43
III.1 Simulación de datos .....	43
III.2 Efecto por cambio en la permitividad del subsuelo .....	45
III.3 Efecto por cambio en la conductividad del subsuelo .....	47
III.4 Respuesta de un dispersor puntual .....	48
III.5 Simulación 3D de un tubo .....	51
III.6 Simulación de un tanque cilíndrico 3D .....	54

Capítulo IV.- Experimentos con datos reales .....	61
IV.1 Prueba preliminar .....	61
IV.2 Sección sobre una zona de falla activa .....	63
IV.3 Experimentos en un sitio de prueba .....	66
IV.4 Invariantes y cálculo de la orientación del tanque vacío .....	73
IV.5 Experimento en un acueducto .....	79
Capítulo V.- Remoción del primer arribo y procesos para mejorar la estimación angular .....	87
V.1 Introducción .....	87
V.2 Descomposición en valores singulares .....	88
V.2.1 Remoción del primer arribo con SVD .....	89
V.2.2 Utilización de SVD para resaltar anomalías .....	90
V.2.3 Utilización de SVD para filtrar ruido .....	93
V.3 Procesos para mejorar la estimación angular .....	94
V.3.1 Filtro de Kalman .....	95
V.3.2. Ejemplos de la aplicación del filtro de Kalman ..	100
V.4 Cálculo de la envolvente .....	104
V.4.1 Ejemplos de la aplicación de la envolvente .....	105
V.5 Norma de Frobenius como filtro de amplitudes .....	111
V.5.1 Ejemplos de la aplicación de la norma de Frobenius.....	111
V.6 Norma de Frobenius como filtro de amplitudes en el cálculo de la envolvente .....	115
Capítulo VI.- Conclusiones .....	120
Referencias bibliográficas .....	123
Apéndice A .....	126
Apéndice B .....	133
Apéndice C .....	138

## Lista de figuras

		Pág.
Figura 1.	Esquema de la base del método del georadar. Modificado de Annan (2009, p. 12).....	4
Figura 2.	Se muestra cómo se atenúa la señal conforme va penetrando (a), esquema de las resoluciones radial y lateral (b). Modificado de Annan, (2005, p. 381).....	11
Figura 3.	Gráfica de atenuación vs. frecuencia, para diferentes resistividades.....	14
Figura 4.	Gráfica de velocidad vs. frecuencia, para diferentes resistividades en un terreno con $\epsilon_r = 4$ .....	15
Figura 5.	Coefficiente de reflexión de ambas polarizaciones para una onda que viaja de un medio de alta velocidad (aire) a uno de baja velocidad. ....	18
Figura 6.	Coefficientes de reflexión de ambas polaridades para una onda que viaja de un medio de baja velocidad a uno de alta velocidad. ....	19
Figura 7.	Se muestran los coeficientes de reflexión del modelo (a), ondícula de Ricker (b), radagrama sintético (c).....	21
Figura 8.	Modos de polarización TM o polarización H y TE o polarización E.....	22
Figura 9.	Cuatro tipos de configuraciones de antenas.....	23
Figura 10.	Patrón de radiación de un dipolo eléctrico. Tomada de Annan (2005, p. 400).....	25
Figura 11.	Patrones de radiación TE y TM para un medio homogéneo. Tomada de Annan (2005, p. 400).....	26
Figura 12.	Patrones de radiación en la interfaz aire-tierra para modos TE y TM. Tomada de Annan (2005, p. 401).....	26
Figura 13.	a) Muestra como varía el patrón de radiación para diferentes permitividades relativa. b) Lo muestra para diferentes elevaciones (metros) de antenas. Tomada de Annan (2005, p. 402).....	28
Figura 14.	Se muestran cuatro radagramas, de un mismo punto pero con diferentes arreglos de antenas, esto para formar la matriz de dispersión .....	33
Figura 15.	Del lado izquierdo se muestra el ángulo calculado para toda la sección de datos y del lado derecho la misma sección pero filtrada .....	37
Figura 16.	Figura 16.- Muestra la traza original (gráfica superior) y la traza después del “dewow” (gráfica inferior).....	38

Figura 17.	a) Sección corregida por tiempo cero; b) Espectro f-k, con las amplitudes máximas en k=0; c) Espectro después de eliminar la amplitud en k=0; d) Filtro paso bajo (ventana de Parzen); e) Espectro filtrado; f) Sección filtrada; las unidades de frecuencia y número de onda son MHz y ciclos/km respectivamente.....	42
Figura 18.	Esquema del modelo sintético.....	46
Figura 19.	Para una misma sección se muestran las amplitudes correspondientes para diferentes permitividades del subsuelo.....	47
Figura 20.	Para una misma sección se muestran las amplitudes correspondientes para diferentes conductividades del subsuelo.....	48
Figura 21.	Se muestra el campo dispersado por una esfera metálica localizada a 3.0 m por debajo de la línea de adquisición en un volumen homogéneo de aire.....	50
Figura 22.	(a) Esquema del modelo 3D de un tubo metálico, enterrado en un medio homogéneo. (b) Secciones transversales de los cuatro elementos de la matriz de dispersión. (c) Secciones transversales de los invariantes.....	52
Figura 23.	Estimación del ángulo para el modelo descrito en la Figura 22 obtenido maximizando las componentes cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ .....	53
Figura 24.	Esquema del modelo sintético, simulando un tanque de plástico vacío enterrado.....	54
Figura 25.	Secciones longitudinales al tanque con cuatro diferentes configuraciones de antenas (elementos de la matriz de dispersión).....	55
Figura 26.	Secciones con el cálculo de los diferentes invariantes: traza (S), determinante (S) y norma de Frobenius (S)....	56
Figura 27.	Secciones con la estimación del ángulo, obtenido maximizando las componentes cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ , respectivamente.....	57
Figura 28.	Secciones transversales al tanque con cuatro diferentes configuraciones de antenas.....	58
Figura 29.	Secciones con el cálculo de los diferentes invariantes: traza (S), determinante (S) y norma de Frobenius (S)....	59
Figura 30.	Secciones con la estimación del ángulo, obtenido maximizando las componentes cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ , respectivamente.....	60
Figura 31.	Sección de datos tomados en la planta baja de un edificio con el fin de delimitar el sótano., .....	62

Figura 32.	De lado izquierdo se muestra la ubicación de las trincheras con respecto a una cerca de árboles, la cual fue desplazada 5 m en el temblor de 1940, y la ubicación del perfil de GPR. Modificado de Thomas and Rockwell (1996, p. 5994).....	64
Figura 33.	Perfil de datos tomado en dirección perpendicular a la rumbo de la falla, con arreglo de antenas Syy y antenas de 100 MHz.....	65
Figura 34.	Perfil de datos tomado en dirección perpendicular a la rumbo de la falla, con arreglo de antenas Sxx y antenas de 100 MHz.....	66
Figura 35.	El diagrama muestra una vista en planta del sitio de pruebas. Las líneas azules corresponden a secciones tomadas con los arreglos Sxx y Syy.....	67
Figura 36.	Secciones usando arreglo Syy de antenas de 200 MHz perpendiculares al perfil.....	70
Figura 37.	Secciones usando arreglo Sxx de antenas de 200 MHz paralelas al perfil.....	70
Figura 38.	Secciones longitudinales L1, L2 y L3 sobre el tanque de plástico vacío. Tomadas con cuatro diferentes configuraciones y antenas de 200 MHz.....	71
Figura 39.	Secciones transversales T2, T3 y T4 sobre el tanque de plástico vacío. Tomadas con cuatro diferentes configuraciones y antenas de 200 MHz.....	72
Figura 40.	Secciones tomadas con cuatro configuraciones de antenas que forman la matriz de dispersión. ....	74
Figura 41.	Secciones de los tres invariantes (traza (S), determinante (S) , norma de Frobenius (S) ) y de la suma de la antidiagonal maximizada $S'_{xy}+S'_{yx}$ .....	75
Figura 42.	Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ de la matriz de dispersión.....	76
Figura 43.	Secciones tomadas con cuatro configuraciones de antenas que forman la matriz de dispersión.....	77
Figura 44.	Secciones de los tres invariantes (traza (S), determinante (S) y norma de Frobenius (S)) y de la suma de la antidiagonal maximizada $S'_{xy}+S'_{yx}$ .....	78
Figura 45.	Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ de la matriz de dispersión.....	79
Figura 46.	Esquema del acueducto y su orientación respecto a dos perfiles, el acueducto está enterrado a un profundidad aproximada de 1.0 m.....	80

Figura 47.	Secciones de los cuatro elementos de la matriz de dispersión del perfil I. Este perfil corta al acueducto en diagonal.....	81
Figura 48.	Secciones de los tres invariantes (traza (S), determinante (S) y norma de Frobenius (S)) y de la suma de la antidiagonal maximizada $S'_{xy}+S'_{yx}$ .....	82
Figura 49.	Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ de la matriz de dispersión.....	83
Figura 50.	Secciones de los cuatro elementos de la matriz de dispersión del perfil II. Este perfil corta al acueducto en forma perpendicular.....	84
Figura 51.	Secciones de los tres invariantes (traza (S), determinante (S) y norma de Frobenius (S)) y de la suma de la antidiagonal maximizada $S'_{xy}+S'_{yx}$ .....	85
Figura 52.	Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ de la matriz de dispersión.....	86
Figura 53.	Sección original y eigenvalores respectivos. Abajo: sección reconstruida eliminando el primer eigenvalor.....	90
Figura 54.	Panel superior: sección original y sus eigenvalores. Panel intermedio: ventana que incluye solamente el medio homogéneo y sus respectivos eigenvalores. Panel inferior: sección reconstruida con la diferencia de eigenvalores.....	92
Figura 55.	Panel superior: sección original con sus eigenvalores. Panel inferior: sección construida solamente con el segundo eigenvalor.....	93
Figura 56.	Aplicación típica del filtro de Kalman. Tomado de Maybeck (1979, p.5).....	97
Figura 57.	Ángulos calculados con datos filtrados del perfil longitudinal del tanque vacío.....	102
Figura 58.	Ángulos calculados con datos filtrados del perfil transversal del tanque vacío.....	102
Figura 59.	Ángulos calculados con los datos filtrados del perfil que cruza en forma diagonal al acueducto, .....	103
Figura 60.	Ángulos calculados con los datos filtrados del perfil que cruza en forma perpendicular al acueducto, la sección de la izquierda está sin filtrar, el resto de las secciones son filtradas con diferentes valores de R .....	104
Figura 61.	Envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión, tomados sobre el tanque de plástico vacío.....	106

Figura 62.	Secciones con la estimación del ángulo a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ , respectivamente.....	106
Figura 63.	Envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión, tomados sobre el tanque de plástico vacío.....	107
Figura 64.	Secciones con la estimación del ángulo a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ , respectivamente.....	108
Figura 65.	Envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión del perfil I.....	109
Figura 66.	Secciones con la estimación del ángulo obtenido a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ .....	109
Figura 67.	Envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión del perfil II.....	110
Figura 68.	Secciones con la estimación del ángulo obtenido a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ .....	111
Figura 69.	Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cros-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ de la matriz de dispersión.....	112
Figura 70.	Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ de la matriz de dispersión.....	113
Figura 71.	Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ de la matriz de dispersión.....	114
Figura 72.	Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ de la matriz de dispersión.....	115
Figura 73.	Secciones con la estimación del ángulo a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ .....	116
Figura 74.	Figura 74.- Secciones con la estimación del ángulo a partir de la envolvente, maximizando las componentes cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ .....	117

Figura 75.	Figura 75 Secciones con la estimación del ángulo obtenido a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ .....	118
Figura 76.	Figura 76.- Secciones con la estimación del ángulo obtenido a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol $\theta_{\perp}$ y co-pol $\theta_{\parallel}$ .....	118

## Lista de tablas

	Pág.
Tabla 1	13

Valores típicos de constante dieléctrica, conductividad, velocidad y atenuación observados en materiales geológicos comunes (Tomada de Davis and Annan 1989).

# Capítulo I

---

## Introducción

---

### I.1 Motivación

La práctica común del radar de terreno o GPR, por sus siglas en inglés (Ground Penetrating Radar) consiste en registrar el campo eléctrico reflejado a lo largo de un perfil utilizando un arreglo de antenas paralelas entre sí y perpendiculares a la dirección del perfil. Los datos se procesan generalmente utilizando algoritmos importados del método de sísmica de reflexión. La propagación y reflexión de ondas elásticas, como las usadas en sísmica de reflexión, tienen muchas similitudes con la propagación y reflexión de las ondas electromagnéticas utilizadas en el GPR, pero también existe una diferencia fundamental. El campo de ondas generalmente utilizado en sísmica de reflexión (ondas P) es un campo escalar, mientras que las ondas electromagnéticas forman un campo vectorial. La fuente utilizada en el GPR es un dipolo eléctrico polarizado en una dirección particular, mientras que la antena receptora es otro dipolo eléctrico. Ambas antenas pueden disponerse en el terreno de manera que transmitan y reciban ondas polarizadas en distintas direcciones. La principal motivación de este trabajo es aprovechar esta naturaleza vectorial del campo electromagnético (en el futuro EM) usado en GPR, experimentando con diferentes arreglos de antenas para “iluminar” el terreno con distintas polarizaciones y procesar conjuntamente esta información, con la intención de producir mejores imágenes del terreno.

## **I.2 Objetivo**

El principal objetivo de este trabajo es aprovechar la naturaleza vectorial de los campos EM utilizados en el radar de terreno o GPR, experimentando con diferentes arreglos de antenas para “iluminar” el terreno con distintas polarizaciones y procesar conjuntamente esta información, para producir mejores imágenes del terreno.

## **I.3 Principios básicos del GPR**

El GPR (georadar) es una técnica geofísica relativamente nueva no destructiva (Annan, 2002), que permite investigar las propiedades electromagnéticas (permitividad dieléctrica  $\epsilon$ , permeabilidad magnética  $\mu$  y conductividad eléctrica  $\sigma$ ) de los primeros metros del subsuelo. El principio físico de esta técnica es similar al de sísmica de reflexión y está basada en la emisión y propagación de ondas electromagnéticas de alta frecuencia 25 a 1000 MHz. Una antena transmite pulsos electromagnéticos (EM) al interior de la tierra y otra antena recibe la señal reflejada. Las reflexiones EM dependen de las propiedades electromagnéticas del subsuelo mencionadas anteriormente. Según el rango de frecuencia de las antenas las aplicaciones del georadar se pueden dividir en dos: 1) aplicaciones geológicas, donde la profundidad de penetración es más importante que la resolución, para lo cual se utilizan frecuencias menores a 500 MHz, y 2) aplicaciones de ingeniería civil, arqueología o geotecnia en donde se utilizan frecuencias entre 500 MHz a 1GHz.

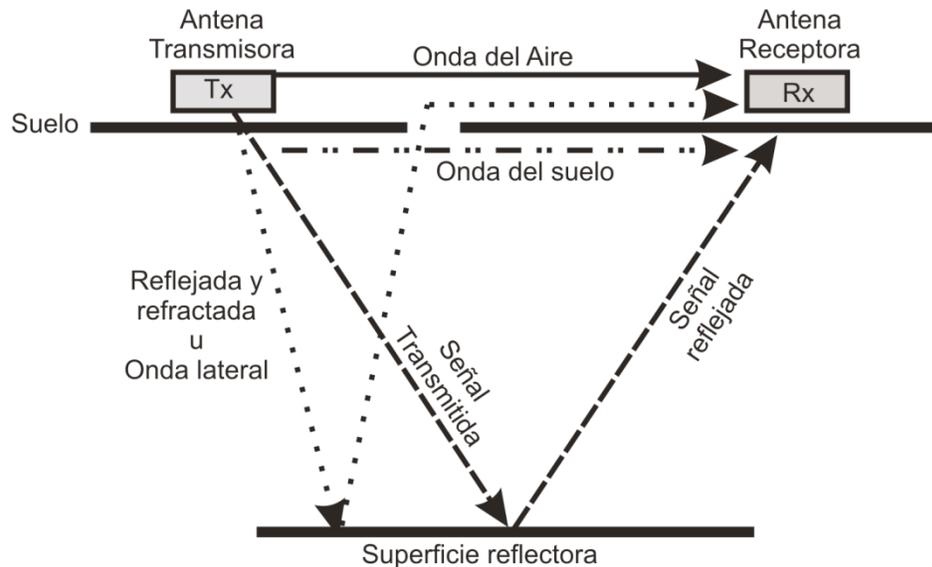
Una breve historia del desarrollo del georadar se puede encontrar en Annan (2002), de donde tomamos la siguiente descripción. Las primeras investigaciones acerca de la propagación de ondas de radio en el aire y en la superficie de la Tierra se dieron en la primera mitad del siglo pasado (1900-1950). El primer

trabajo que trata de utilizar ondas de radio reflejadas en el interior de la Tierra es el reportado por El Said (1956) para localizar el nivel freático. En 1961 Waite y Schmidt (1961) reportan indicaciones confiables de que las ondas de radio penetran en el subsuelo en la capa helada de Groenlandia. En la década 1960-1970 se realizan experimentos principalmente sobre hielo y comienzan las aplicaciones en ambientes geológicos esencialmente en exploración en minas de carbón y de sal, ya que ambos materiales poseen propiedades dieléctricas particulares. El programa Apollo de la NASA para la investigación de la Luna fue fundamental para el desarrollo del GPR, las investigaciones asociadas a este programa permitieron entender mejor la propagación de ondas de radiofrecuencia y se desarrollaron mejores antenas para transmisión y recepción de señales (Annan, 1973). En el periodo 1970-1975 se entendieron mejor las propiedades eléctricas de los materiales geológicos y la relación entre conductividad eléctrica y polarización dieléctrica (Oloheft, 1975; 1987). A partir de entonces el desarrollo de esta técnica ha continuado y las aplicaciones han ido en aumento, ahora se aplica en numerosas áreas como en geología, ingeniería civil, hidrogeología, arqueología e incluso en investigaciones forenses.

El GPR y el método sísmico de reflexión (RS) tienen mucho en común, por esta razón la mayor parte de los procesos que se utilizan en RS para tratar las trazas sísmicas se usan también en GPR para tratar los radagramas (registro del tiempo transcurrido desde que las ondas salieron de la antena transmisora hasta que llegaron a la receptora y de la intensidad de la señal recibida tras atravesar los materiales del subsuelo). Sin embargo existen diferencias notables, a diferencia de la fuente puntual utilizada en RS, la antena transmisora del GPR tiene el patrón de radiación característico de un dipolo eléctrico, el cual puede orientarse de distintas maneras respecto al receptor, el cual también es un dipolo eléctrico. Una de las consecuencias de esta característica es que se puede investigar el efecto de la polarización de la señal EM en el medio. Este es un tema de investigación actual, hay varios trabajos al respecto (Ramirez-Mejía y Young, 2007; Tsofilias et al.,

2004; van Gestel y Stoffa, 2001, entre otros). El tema es interesante porque hay objetivos en el subsuelo cuya respuesta depende de su orientación respecto a las antenas transmisora y receptora, de manera que “iluminar” el mismo objetivo con distintas polarizaciones puede resultar en mejores imágenes del mismo. Una de las aplicaciones de esto es la detección de fracturas verticales (Tsoflias et al., 2004; van Gestel y Stoffa, 2001).

El sistema de georadar mostrado en la (Figura 1) consiste en dos antenas, una transmisora y la otra receptora. La primera genera un pulso electromagnético, el cual penetra y viaja por el subsuelo y posteriormente es captado por la antena receptora después de reflejarse en interfases con contrastes de propiedades electromagnéticas ( $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $\epsilon$ ).



**Figura 1.- Esquema de la base del método del georadar. Modificado de Annan (2009, p. 12).**

Es interesante notar en la Figura 1 que hay dos ondas directas, una de ellas viaja por el aire y otra por el subsuelo. Además, debido a que la velocidad de viaje en el

aire (velocidad de la luz) es siempre mayor que la del subsuelo, se genera una onda críticamente refractada que viaja por el aire. Estas tres ondas llegan al receptor antes de las ondas reflejadas y podemos denominarlas como el “primer arribo”. En ocasiones esta señal, generalmente de mucha amplitud, oscurece los reflejos de objetos cercanos a la superficie.

Las antenas se pueden usar de modo monoestático o biestático. El primero usa una sola antena, la cual es transmisora y receptora a la vez. El modo biestático utiliza dos antenas separadas, una para cada función, como se muestra en la Figura 1, cabe mencionar que nuestro equipo usa el modo biestático.

La antena transmisora (Tx) genera un pulso de ondas de radio de frecuencia determinada (25 MHz hasta 2000 MHz, dependiendo de la aplicación) y el receptor (Rx) registra durante un intervalo de tiempo determinado, típicamente decenas de nanosegundos. La antena transmisora emite repetitivamente el pulso y el sistema va apilando la señal recibida en el receptor, esto permite mejorar la calidad del radagrama.

Hay varios arreglos para la toma de datos. Se puede fijar la distancia Tx-Rx y mover el arreglo a lo largo de un perfil (modo reflexión), se puede fijar un punto de medida y medir con distintas aperturas Tx-Rx (modo CMP, Punto Medio Común); también se puede fijar el Tx y mover solamente el Rx a lo largo del perfil (modo reflexión de gran ángulo).

## **I.4 Teoría**

Los fundamentos de GPR se basan en la teoría de campos electromagnéticos. Las ecuaciones de Maxwell describen matemáticamente la física de los campos electromagnéticos, mientras que las ecuaciones constitutivas cuantifican las

propiedades del material. La combinación de ambas sienta las bases para describir cuantitativamente las señales GPR.

Partiendo de las ecuaciones de Maxwell, las cuales contienen las leyes del electromagnetismo y son las que rigen la propagación tenemos:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad \text{y} \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

donde:

$E$  = Intensidad del campo eléctrico ( V/m )

$B$  = Inducción magnética ( T )

$H$  = Intensidad del campo magnético ( A/m )

$D$  = Desplazamiento eléctrico ( C/m<sup>2</sup> )

$J$  = Densidad de corriente eléctrica ( A/m<sup>2</sup> )

$\rho$  = Densidad de carga ( C/m<sup>3</sup> )

Las ecuaciones constitutivas relacionan los campos electromagnéticos con las propiedades intrínsecas del medio donde actúan, las cuales son las siguientes:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (6)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (7)$$

donde:

$\sigma$  = Conductividad eléctrica ( mS/m )

$\mu$  = Permeabilidad magnética ( H/m )

$\varepsilon$  = Permitividad dieléctrica ( F/m )

Combinando las ecuaciones de Maxwell se puede deducir que el campo eléctrico satisface la siguiente ecuación de onda con un término disipativo.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \quad (8)$$

Si consideramos campos armónicos  $\mathbf{E} = |\mathbf{E}| e^{i\omega t}$  la ecuación anterior se reduce, en el dominio de la frecuencia, a

$$\nabla^2 \mathbf{E} + (\mu\epsilon\omega^2 - i\mu\sigma\omega) \mathbf{E} = 0 \quad (9)$$

$$\omega = 2\pi f \text{ (frecuencia angular)} \quad (10)$$

Esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera, conocida también como la ecuación de Helmholtz.

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \gamma^2 \mathbf{E} = 0 \quad (11)$$

$$\gamma^2 = \epsilon\mu\omega^2 \left( 1 - i \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right) \quad (12)$$

Donde  $\gamma$  es la constante de propagación.

Una solución de la ecuación de Helmholtz puede escribirse en términos de ondas planas del tipo

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 e^{i(\gamma z - \omega t)} + \mathbf{E}_2 e^{-i(\gamma z + \omega t)} \quad (13)$$

La constante de propagación es una cantidad compleja que podemos escribir como

$$\gamma = \alpha + i\beta \quad (14)$$

donde:

$\alpha$  = constante de fase

$\beta$  = constante de atenuación

Las constantes de fase y de atenuación dependen de las propiedades del medio,

$$\alpha = \omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (15)$$

$$\beta = \omega \left\{ \frac{\mu\epsilon}{2} \left[ \left( 1 + \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \omega^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2} \quad (16)$$

La representación en ondas planas se puede escribir en términos de las constantes de fase y de atenuación como

$$\begin{aligned} \mathbf{E} e^{i(\gamma z - \omega t)} &= \mathbf{E} e^{i(\alpha + i\beta)z} e^{-i\omega t} \\ &= \mathbf{E} e^{i\alpha z} e^{-\beta z} e^{-i\omega t} \\ &= \mathbf{E} e^{-\beta z} e^{i(\alpha z - \omega t)} \end{aligned} \quad (17)$$

en donde puede observarse el papel de la constante de fase en el comportamiento armónico de la onda y el de la constante de atenuación en la amplitud.

### **Constante de atenuación y el *skin depth***

La atenuación describe cómo se pierde la energía o se disipa a medida que la onda viaja por el medio. Una parte de la energía se transforma en calor, es el costo de mover las cargas. Otra parte de la atenuación se debe a la divergencia geométrica. Un parámetro comúnmente utilizado en la propagación electro-

magnética es la distancia a la cual la amplitud de la onda se ha atenuado un factor de  $e^{-1}$  respecto a la amplitud inicial. Esta distancia es conocida como el “skin depth”  $\delta$

$$e^{-\beta\delta} = e^{-1} \quad (18)$$

$$\delta = \frac{1}{\beta} \quad (19)$$

### Constante de fase y velocidad

La velocidad con que se propaga el frente de onda puede derivarse considerando que en una onda plana los frentes de onda son planos de igual fase, es decir

$$\alpha z - \omega t = \alpha(z + \Delta z) - \omega(t + \Delta t) \quad (20)$$

$$\alpha \Delta z - \omega \Delta t = 0 \quad (21)$$

la velocidad de fase es entonces

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\alpha} \quad (22)$$

En el espacio libre la velocidad de la onda es igual a la velocidad de la luz

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ . La velocidad de fase en el medio depende de las propiedades

electromagnéticas y siempre es menor que  $c$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right)^2}}{2}}} \quad (23)$$

En donde  $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  y  $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$  son propiedades relativas.  $\epsilon_r$  es también conocida como la constante dieléctrica.

El factor  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon}$  es conocido como el factor de pérdidas y es el causante de la atenuación y del decremento de velocidad de la onda. En el GPR es común considerar que el medio tiene pocas pérdidas  $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \lll 1$  lo que equivale a decir que casi no hay atenuación y que la velocidad de la onda es casi la misma que la de la luz. Esta suposición puede ser muy restrictiva ya que sabemos que los materiales del subsuelo pueden tener conductividades relativamente altas, dependiendo del grado de humedad y de su composición.

Otro parámetro relacionado con la constante de fase es la longitud de la onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha} \quad (24)$$

Por otro lado la longitud de onda también se puede relacionar con la velocidad y la frecuencia de la siguiente manera:

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad (25)$$

Aparte de la longitud de onda, otro aspecto importante para el método de GPR es la atenuación del pulso conforme va penetrando en el subsuelo, esto debido a que el área que ilumina el pulso va aumentando conforme va profundizando en el subsuelo, el pulso se dispersa en una región de forma aproximadamente cónica que se proyecta por debajo del emisor, como se observa en la Figura 2a. A mayor profundidad la intensidad del pulso se dispersa en un área mayor, la tasa de decaimiento de la señal es de  $1/a^2$  donde  $a$  es profundidad. Aunado a esto debemos considerar la resolución radial (vertical) y lateral como se ilustra en la Figura 2b, estas resoluciones nos darán una idea del tamaño mínimo de los objetivos a detectar, la resolución vertical ( $\Delta_r$ ) está en función del ancho de pulso  $W$  y la velocidad  $V$ , y en el caso teórico es independiente de la distancia a la fuente. Aunque en la práctica, a mayores distancias la dispersión del pulso y la atenuación afectará la resolución, como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\Delta_r \approx \frac{Wv}{4} \quad (26)$$

Mientras que la resolución lateral ( $\Delta_l$ ) está en función del ancho del pulso, de la velocidad y de la distancia entre el objetivo y la fuente.

$$\Delta_l \approx \sqrt{\frac{v d W}{2}} \quad (27)$$

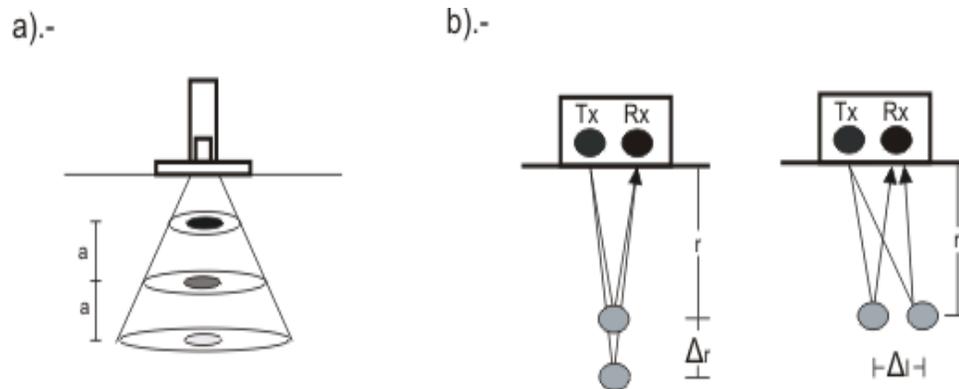


Figura 2.- Se muestra cómo se atenúa la señal conforme va penetrando (a), esquema de las resoluciones radial y lateral (b), modificado de Annan, (2005, p. 381).

## I.5 Propiedades electromagnéticas de las rocas

En la mayoría de las aplicaciones de georadar las variaciones en la permitividad y conductividad del subsuelo son las más importantes, mientras que las variaciones en la permeabilidad magnética raramente son significantes ya que la mayoría de los materiales tienen la misma permeabilidad magnética que el vacío.

La permitividad eléctrica  $\epsilon$  describe la habilidad de un material de almacenar y liberar energía en forma de carga eléctrica. Por otro lado esto puede ser descrito

como la habilidad de impedir el flujo de cargas libres o el grado de polarización exhibido por un material que está bajo la influencia de un campo eléctrico. La permitividad del espacio libre o constante de permitividad es igual a  $8.8542 \times 10^{-12}$  F/m y difiere insignificamente de la permitividad del aire. La permitividad de los materiales del subsuelo puede variar enormemente, especialmente en la presencia de agua. Comúnmente se utiliza la razón adimensional  $\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0$ , (donde  $\epsilon_0$  es la permitividad del vacío), conocida como constante dieléctrica K o permitividad relativa  $\epsilon_r$ .

La conductividad eléctrica  $\sigma$  describe la habilidad de un material para dejar pasar las cargas eléctricas libres bajo la influencia de un campo eléctrico. En los metales estas cargas se relacionan a los electrones libres de los átomos, mientras que en fluidos están representadas por las cargas de los aniones y cationes disueltos. En la ausencia de un campo eléctrico, las cargas libres iónicas permanecen estáticas en el fluido y no interactúan, por otro lado cuando un pulso electromagnético viaja a través del material la energía es transferida a las cargas iónicas, estas cargas se aceleran rápidamente durante el pulso, al momento de moverse las partículas colisionan e interactúan produciendo calor, lo cual resulta en pérdida de energía.

La permeabilidad magnética  $\mu$  es la capacidad de una sustancia o medio para atraer y hacer pasar a través de sí los campos magnéticos. En la mayoría de las circunstancias, la permeabilidad magnética de los materiales (diamagnéticos, paramagnéticos y superparamagnéticos) tiene poco efecto en la propagación de la onda de GPR y se considerada como el valor de la permeabilidad magnética del espacio libre  $1.26 \times 10^{-6}$  H/m. Sin embargo los minerales ferromagnéticos tienen un efecto considerable en cuanto a la velocidad y atenuación de la onda EM.

Podría esperarse que las propiedades eléctricas de las rocas fueran una combinación de las propiedades eléctricas de los minerales constituyentes. Sin embargo la presencia de sustancias no minerales como el agua o contaminantes las modifica sustancialmente. La siguiente Tabla I tomada de Davis y Annan (1989), muestra valores típicos de la conductividad eléctrica  $\sigma$ , velocidad de fase  $V$ , constante dieléctrica  $\epsilon_r$  (K en la tabla) y constante de atenuación  $\beta$ .

**Tabla 1.- Valores típicos de constante dieléctrica, conductividad eléctrica, velocidad y atenuación observadas en materiales geológicos comunes. Tomada de Davis and Annan (1989, p. 535).**

MATERIAL	Constante dieléctrica K	Conductividad $\sigma$ (mS/m)	Velocidad V (m/ns)	Atenuación $\alpha$ (dB/m)
Aire	1	0	0.30	0
Agua destilada	80	0.01	0.033	0.002
Agua dulce	80	0.5	0.033	0.1
Agua salada	80	30000	0.01	1000
Arena seca	3-5	0.01	0.15	0.01
Arena saturada	20-30	0.1-1	0.06	0.03-0.3
Caliza	4-8	0.5-2	0.12	0.4-1
Lutitas	5-15	1-100	0.09	1-100
Limo	5-30	1-100	0.07	1-100
Arcilla	5-40	2-1000	0.06	1-300
Granito	4-6	0.01-1	0.13	0.01-1
Sal seca	5-6	0.01-1	0.13	0.01-1
Hielo	3-4	0.01	0.16	0.01

## I.6 Propiedades de la onda

Cuando el campo EM viaja por un medio con permitividad, conductividad y permeabilidad dadas, su comportamiento depende de la frecuencia. A bajas frecuencias presenta un comportamiento de difusión y dispersivo, lo cual se debe a la dependencia que hay de la atenuación y la velocidad con la frecuencia. A altas frecuencias el campo electromagnético se propaga como una onda a través del medio, todas las componentes de la frecuencia viajan a la misma velocidad y sufren la misma atenuación, es decir la señal viaja con su forma intacta. Esto lo podemos observar en las Figuras 3 y 4 donde graficamos la atenuación y velocidad en función de la frecuencia.

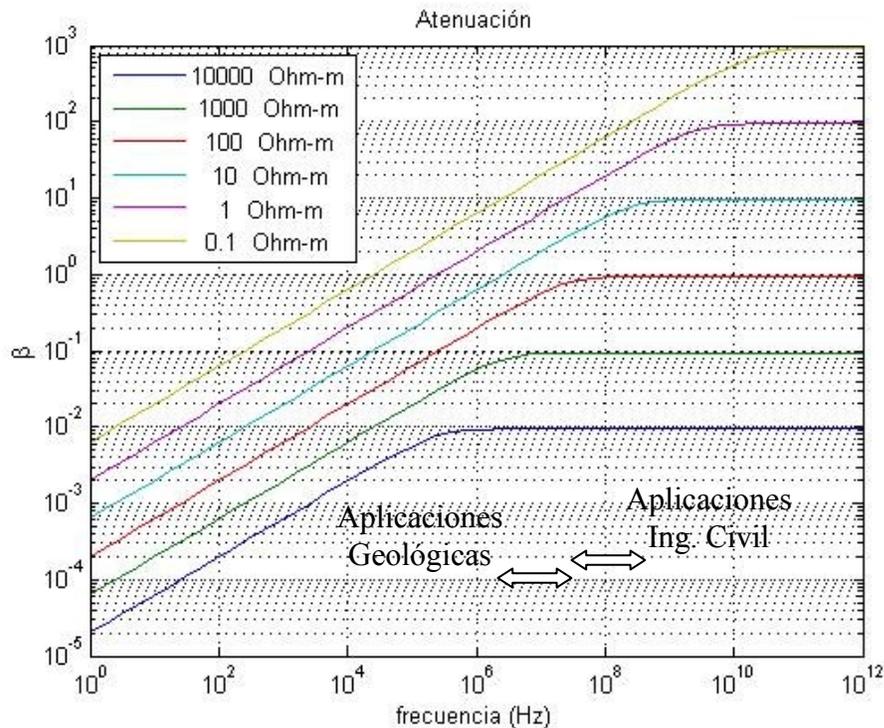
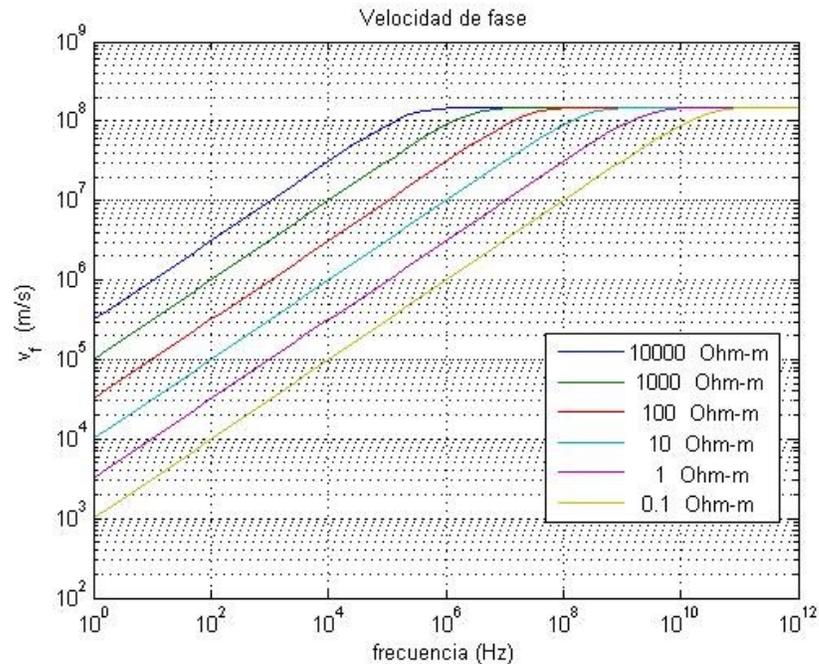


Figura 3.- Gráfica de atenuación vs. frecuencia, para diferentes resistividades.

En la Figura 3 se observa cómo se atenúa la onda electromagnética con respecto a la frecuencia en materiales con distinta resistividad eléctrica. La atenuación

aumenta logarítmicamente con la frecuencia hasta llegar a un punto en donde se hace independiente de ella.



**Figura 4.- Gráfica de velocidad vs. frecuencia, para diferentes resistividades en un terreno con  $\epsilon_r = 4$ .**

En la banda de frecuencias utilizada en el GPR (> 10 MHz) puede verse que si la resistividad es mayor de 1000 Ohm-m la atenuación es constante, esto ocurre normalmente en rocas ígneas o muy secas. Para rocas con resistividades menores a 1000 Ohm-m o para frecuencias menores a 10 MHz, tanto la atenuación como la velocidad de la onda dependen de la frecuencia, es decir los campos son de carácter difusivo, lo cual significa que los pulsos del GPR se dispersan. Debe mencionarse que para frecuencias mayores a 1 GHz ocurren fenómenos de resonancia molecular que aumentan la absorción de la señal. Estos efectos no se incluyen en las figuras anteriores.

La velocidad de la onda también aumenta logarítmicamente con la frecuencia hasta llegar a un límite dado por  $\frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$  como se muestra la Figura 4. En terrenos llamados de “poca pérdida” ( $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \lll 1$ ) y a las frecuencias usadas en GPR (>50 MHz), la propagación de las ondas del campo electromagnético es esencialmente no dispersiva, la señal emitida no se deforma cuando viaja a través del material y es reflejada y/o esparcida (“scattered”) por cambios de la impedancia.

## I.7 Coeficientes de reflexión

Los coeficientes de reflexión y transmisión, así como la relación entre el ángulo incidente, el ángulo de reflexión y el ángulo de transmisión, pueden obtenerse aplicando las condiciones de frontera para campos eléctricos y magnéticos. En una frontera las componentes tangenciales son continuas, esto es:

$$E_t^i + E_t^r = E_t^t \quad (28)$$

$$H_t^i + H_t^r = H_t^t \quad (29)$$

donde:

$E_t^i, H_t^i$  son componentes tangenciales del campo incidente

$E_t^r, H_t^r$  son componentes tangenciales del campo reflejado

$E_t^t, H_t^t$  son componentes tangenciales del campo transmitido

asumiendo que los campos eléctricos y magnéticos de una onda plana inciden en una interfase plana con cierto ángulo, en un medio con pérdidas y sustituyendo en las ecuaciones 28 y 29, el campo incidente, reflejado y transmitido en función de

las polarizaciones paralela y perpendicular (Balanis, 1989), obtendríamos para cada una de las polarizaciones dos ecuaciones con cuatro incógnitas que son dos coeficientes y dos ángulos, ambos de transmisión y reflexión  $(\Gamma^b, \Gamma^b, \theta_r, \theta_t)$ , sin embargo el número de incógnitas las podemos reducir a dos, utilizando las relaciones de la ley de Snell de reflexión y refracción (ecuaciones 30 y 31):

$$\theta_r = \theta_i \quad (30)$$

$$\beta_1 \sin \theta_i = \beta_2 \sin \theta_t \quad (31)$$

sustituyendo las relaciones 30 y 31 en las ecuaciones 28 y 29 (ya habiendo considerado el campo incidente, reflejado y transmitido), posteriormente resolviendo por simultáneas obtendríamos los coeficientes de reflexión y transmisión para ambas polarizaciones, en nuestro caso son de interés los coeficientes de reflexión, los cuales mostramos en las ecuaciones 32 y 33 para polarización perpendicular y paralela respectivamente.

$$\Gamma_{\perp} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (32)$$

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (33)$$

donde :

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left( \frac{\alpha_1 + j\beta_1}{\alpha_1 + j\beta_1} \right)^2 \sin^2 \theta_i} \quad (34)$$

$$n = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}} \quad (35)$$

Considerando una onda que viaja de un medio de alta velocidad (en este caso el aire) a uno de baja velocidad, los coeficientes de reflexión en función del ángulo de incidencia, quedarían como se muestra en la Figura 5.

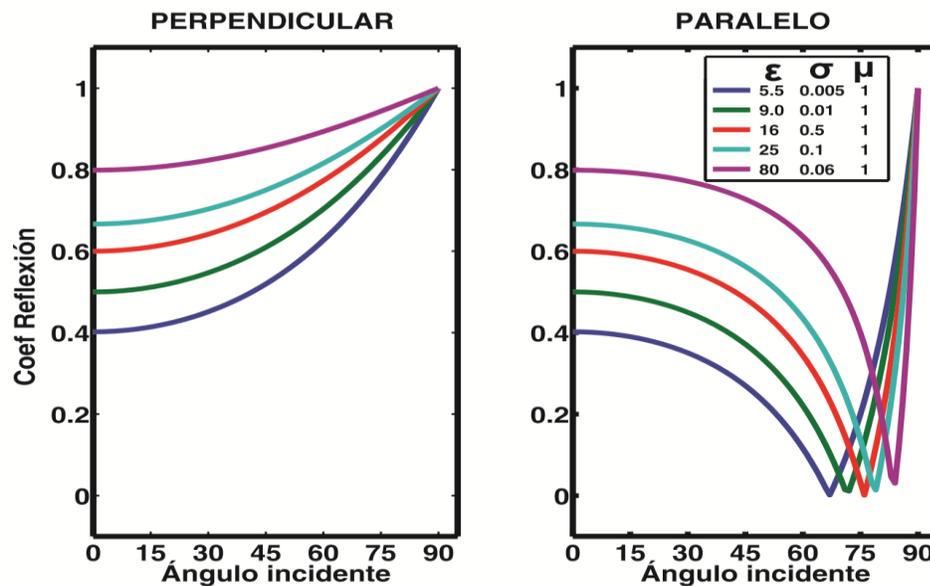


Figura 5.- Coeficiente de reflexión de ambas polarizaciones para una onda que viaja de un medio de alta velocidad (aire) a uno de baja velocidad. En el recuadro de la gráfica en paralelo se muestran las propiedades del medio de baja velocidad, la primer columna corresponde a permitividad relativa (adimensional), segunda conductividad eléctrica (mS/m) y tercera permeabilidad magnética relativa (adimensional).

En ambas polarizaciones podemos observar que el coeficiente de reflexión está en función a las propiedades del medio y al ángulo que mantiene el vector del campo eléctrico con un vector unitario normal a la interfase, los cuales forman el plano de incidencia. Podemos concluir que el coeficiente de reflexión es máximo cuando el vector del campo eléctrico es perpendicular a la interfase y es mínimo cuando el

campo es paralelo. Por otro lado se observa que los coeficientes de reflexión para ambas polarizaciones son iguales cuando el ángulo de incidencia es cero o noventa.

La Figura 6 muestra los coeficientes de reflexión para el caso en que la onda viaja de un medio de baja velocidad a uno de alta velocidad (en este caso el aire) obtenemos:

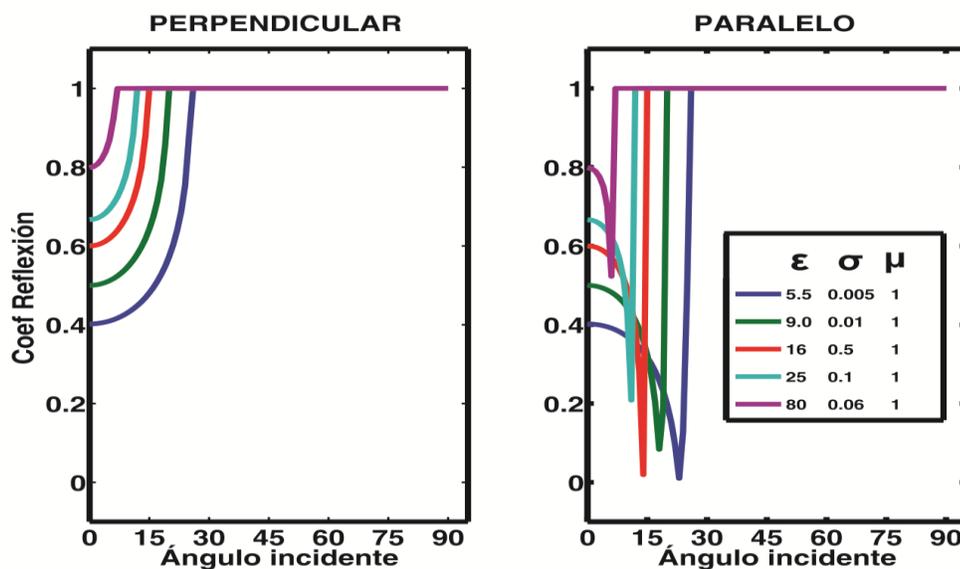


Figura 6.- Coeficientes de reflexión de ambas polaridades para una onda que viaja de un medio de baja velocidad a uno de alta velocidad. En el recuadro de la gráfica de coeficientes en paralelo se muestran las propiedades del medio de baja velocidad, la primer columna corresponde a permitividad relativa (adimensional), segunda conductividad eléctrica (mS/m) y tercera permeabilidad magnética relativa (adimensional).

Se obtiene un comportamiento parecido al anterior caso pero en un rango más pequeño de ángulos. Este comportamiento es debido a que los campos que inciden con un ángulo mayor al ángulo crítico, al llegar a la interfase con el aire viajarán horizontalmente es decir paralelos a la interfase aire-tierra.

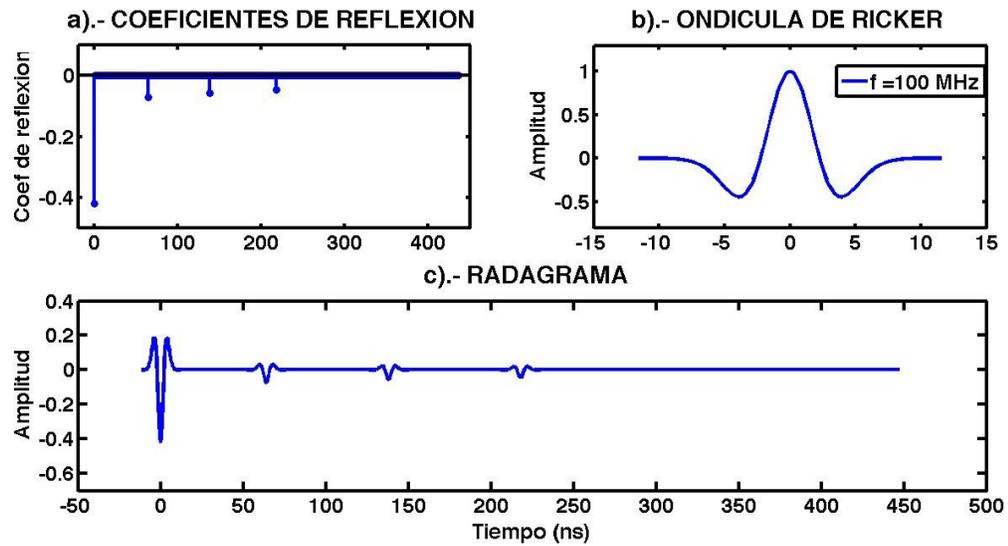
## I.8 Problema directo, cálculo de un radagrama sintético

Una forma sencilla y rápida de calcular un radagrama sintético es proponer una onda plana incidiendo normalmente sobre un medio estratificado. Bajo estas condiciones y basándonos en la ley de Snell y las ecuaciones de Fresnel calculamos los índices de reflexión con la siguiente ecuación:

$$C_{ref} = \frac{\mu_2 \gamma_1 - \mu_1 \gamma_2}{\mu_2 \gamma_1 + \mu_1 \gamma_2} \quad (36)$$

Una vez teniendo la serie de índices de reflexión del modelo se convoluciona con la ondícula de Ricker obteniendo el radagrama sintético.

A continuación mostramos un radagrama sintético (Figura 7), calculado con un algoritmo programado en Matlab (Apéndice A), siguiendo el proceso antes descrito. El modelo de capas consiste en cuatro capas. Para la capa de aire se asignó conductividad cero y los valores de permeabilidad y permitividad del vacío. Para las cuatro capas del subsuelo se utilizó una conductividad constante de 0.001 mS/m, una permeabilidad constante igual a la del vacío y solo se hizo variar la permitividad relativa de cada capa: 6, 8, 10 y 12. Las profundidades a las interfases fueron 4, 10 y 20 m. En la Figura 7a mostramos los coeficientes de reflexión, en la Figura 7b la ondícula de Ricker y en Figura 7c el radagrama sintético que resulta de la convolución de la serie de coeficientes de reflexión con la ondícula de Ricker.



**Figura 7.-** Se muestran los coeficientes de reflexión del modelo (a), ondícula de Ricker (b), radagrama sintético (c).

Esta modelación simple nos permite predecir la resolución en tiempo, con base en la frecuencia del pulso, el espesor de las capas y las propiedades EM de las diferentes capas del medio. Este ejercicio nos permite visualizar las respuestas que obtendríamos a diferentes tipos y contrastes de suelos en forma de radagramas, lo cual como primer paso nos ayuda a formar una idea de lo que obtendríamos en los datos de campo.

## Capítulo II

---

### Análisis de polarización

---

#### II.1 Arreglos de antenas comúnmente usados

La fuente usada en el método del GPR es una antena dipolar, este tipo de fuente tiene dirección y el campo de ondas registrado depende del ángulo entre el transmisor y el receptor, así como de la orientación del objeto de estudio en el subsuelo.

El campo eléctrico del pulso de ondas electromagnéticas emitido por la antena transmisora se polariza paralelamente al eje largo de las antenas, por lo cual contamos con dos polarizaciones distintas: modo TE o polarización E (el campo eléctrico es perpendicular al perfil) y modo TM o polarización H (el campo eléctrico es paralelo al perfil), como se muestra en la Figura 8.

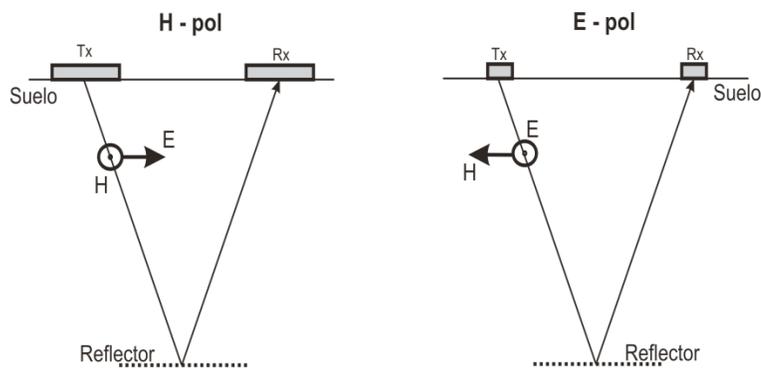
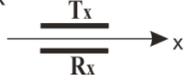
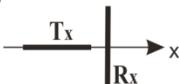
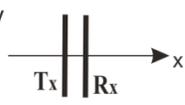
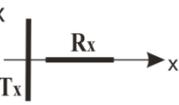


Figura 8.- Modos de polarización TM o polarización H y TE o polarización E.

Por otro lado la antena receptora también actúa direccionalmente, por lo que podemos hacer diferentes configuraciones de antenas, como se muestra en la Figura 9.

CO-POLARIZADA	POLARIZACION CRUZADA
$S_{xx}$ 	$S_{xy}$ 
$S_{yy}$ 	$S_{yx}$ 

**Figura 9.-** Cuatro tipos de configuraciones de antenas. El eje x es la dirección del perfil. En los arreglos co-pol el transmisor (Tx) y el receptor (Rx) son paralelos, mientras que en los arreglos cross-pol son perpendiculares entre sí.

Un arreglo co-pol recibe energía reflejada y dispersada que tiene la misma polarización que la energía incidente, mientras que en el arreglo cross-pol la polarización de la energía que se recibe es ortogonal a la del transmisor. Por lo general se utiliza la configuración  $S_{yy}$  para levantamiento de datos pero en ocasiones es mejor utilizar la configuración  $S_{xx}$ , esto dependiendo de la orientación y material del objetivo. Las configuraciones cruzadas  $S_{xy}$  o  $S_{yx}$  son equivalentes, debido al principio de reciprocidad, se recomienda utilizarlas cuando el subsuelo es heterogéneo o cuando el objeto reflector modifica la polarización incidente (fenómeno conocido como despolarización).

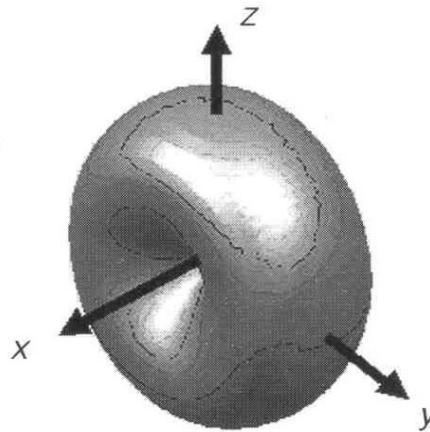
La naturaleza vectorial de los campos electromagnéticos generados y medidos con el georadar (GPR) permite el estudio con diferentes polarizaciones de la respuesta de objetivos enterrados (Roberts, 1994; Roberts y Daniels, 1996). Una serie de experimentos han tratado de explorar el uso de mediciones con múltiples polarizaciones para diferentes objetivos del subsuelo. Se ha demostrado que el uso de diferentes polarizaciones puede ayudar a definir mejor el tamaño, forma y

orientación del objetivo. Por ejemplo, Guy et al. (1999) encontraron que los objetos no planos o rugosos son mejor definidos utilizando un receptor de antena perpendicular a la polarización de la fuente (polarización cruzada); Radzevicius y Daniels (2000) estudiaron los campos dispersados por cilindros con propiedades de polarización diferentes, encontraron que las tuberías de alta impedancia (materiales dieléctricos) están mejor reflejados con el eje largo de los dipolos orientados. Se ha observado que para lograr mejores imágenes del subsuelo es importante un acoplamiento óptimo entre la orientación de las antenas y la geometría y material del objetivo a estudiar.

Por otro lado se ha encontrado que las tuberías o los objetivos alargados de baja impedancia (conductores) están mejor reflejados con los datos tomados con la configuración co-pol en paralelo a los ejes longitudinales del objetivo, mientras que los datos tomados con la configuración co-pol perpendicular a los ejes del objetivo son mejores para las tuberías de alta impedancia (Capizzi and Cosentino, 2008, Radzevicius and Daniels, 2000). Por otro lado otros experimentos explican el uso de diferentes polarizaciones para iluminar distintos tipos de objetivos como Ramirez Mejia y Young (2007), para determinar la orientación de fractura, Tsoflias et al., (2004), para detectar fracturas verticales y Orlando y Slob (2009), usaron antenas de 2.0 GHz y datos multicomponente para detectar fisuras en un edificio histórico, encontrando que la migración vectorial 3D produce mejor resolución que las imágenes obtenidas con un algoritmo estándar de migración escalar 2D.

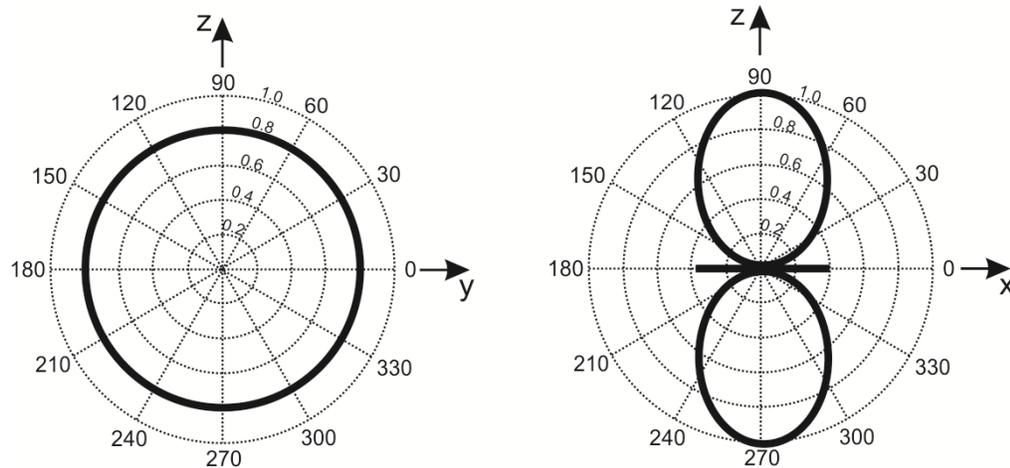
## II.2 Patrón de radiación de las antenas

Para entender el patrón de radiación de las antenas del georadar, comencemos con el patrón de radiación de un dipolo eléctrico en un medio homogéneo. Después de un cierto tiempo de ser radiado, el campo tendría la forma de una dona simétrica alrededor de la antena paralelo al eje X, como se muestra en la Figura 10.



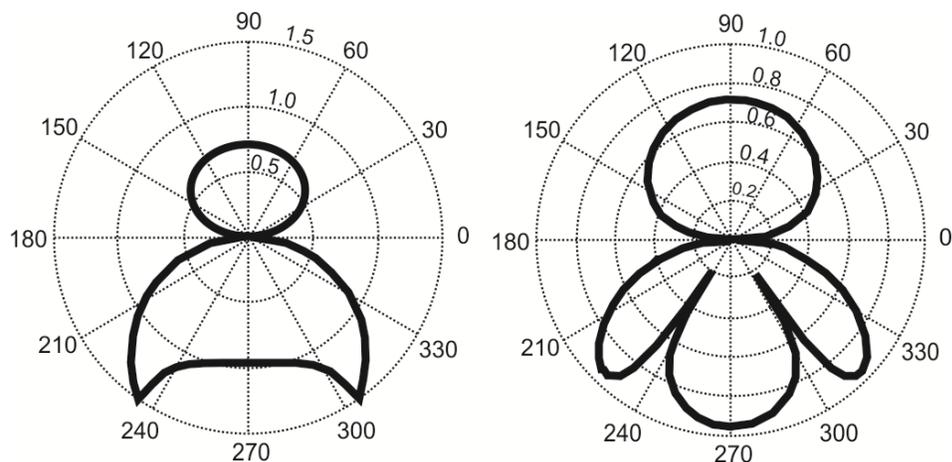
**Figura 10.- Patrón de radiación de un dipolo eléctrico paralelo al eje X. Tomada de Annan (2005, p. 400).**

En el caso del georadar los extremos de las antenas no emiten energía, la energía es radiada desde el centro de la antena viajando uniformemente en el plano perpendicular al eje del dipolo. Si hacemos un corte transversal y otro longitudinal al patrón de radiación del dipolo eléctrico (la dona), tendríamos los patrones de radiación TE y TM, como se muestran en la Figura 11 para un medio homogéneo.



**Figura 11.- Patrones de radiación TE y TM para un medio homogéneo. Tomada de Annan (2005, p. 400).**

Estos patrones cambian drásticamente cuando los dipolos de la antenas son puestos en el suelo es decir en la interfaz aire-suelo, lo cual podemos observar en la Figura 12. El cambio en la directividad es causado por las refracciones ocasionadas por el cambio de impedancia en la interfaz aire-tierra. Cabe mencionar que estos patrones de radiación se presentan en el campo lejano, mientras que cerca de las antenas no se presentan los picos ni los valores nulos.



**Figura 12.- Patrones de radiación en la interfaz aire-tierra para modos TE y TM, con una permitividad de 3.2 del subsuelo. Tomada de Annan (2005, p. 401).**

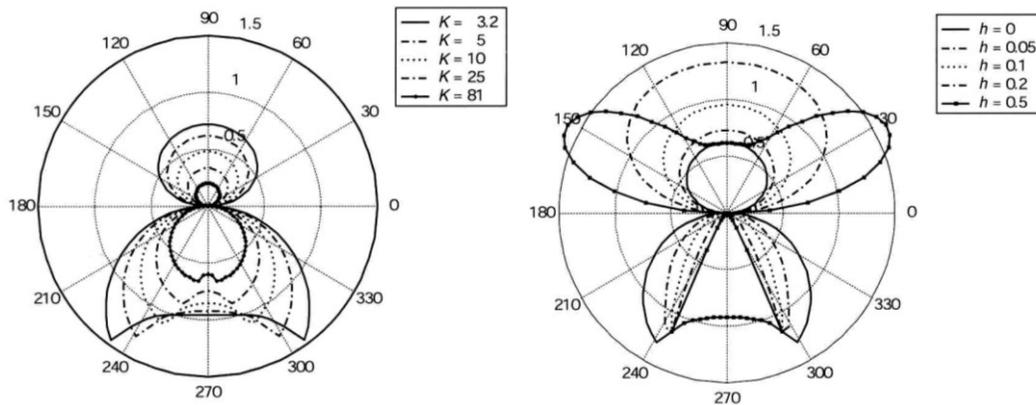
Se puede observar que en el ángulo crítico se presentan unos picos en el modo TE, mientras que en el modo TM se tienen valores nulos. El ángulo crítico está dado por:

$$\theta_c = \sin^{-1}\left(\frac{v}{c}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad (37)$$

donde:

- $v$       velocidad en el subsuelo
- $K$       permitividad relativa del subsuelo
- $c$       velocidad en el aire (velocidad de la luz)

Otro aspecto que influye en la directividad de la radiación es la permitividad del suelo, la cual, como se demuestra en la Figura 13a, guarda una relación con el tamaño del área cubierta por la energía radiada por la antena: A mayor valor de permitividad del subsuelo el área cubierta por el patrón de radiación es menor y a menor valor de permitividad el área cubierta es mayor. Otro factor que afecta es la elevación de las antenas sobre el suelo o el acoplamiento entre antena y suelo. Este factor afecta fuertemente la directividad como se muestra en la Figura 13b, mientras más separada se encuentre la antena del suelo la eficiencia de la antena es reducida debido a que la velocidad en el aire es alta lo cual ocasiona que se disipe mayor energía y con esto la cantidad de energía que penetra al suelo disminuye.



**Figura 13.- a) Muestra como varía el patrón de radiación TE para diferentes permitividades relativas (constante) desde un valor bajo como la del hielo de 3.2 hasta una alta como del agua 81. b) Lo muestra para diferentes elevaciones (metros) de antenas, en el recuadro son las diferentes alturas de las antenas normalizadas con la longitud de onda. Tomada de Annan (2005, p. 402).**

## II.3 Polarización

Las ecuaciones de Maxwell pueden describir matemáticamente la propagación de una onda plana electromagnética. Esta onda propagándose en un medio homogéneo e isotrópico contiene vectores de campo eléctrico y magnético orientados transversalmente a la dirección de propagación y perpendiculares entre ellos. La trayectoria seguida por un vector unitario describiendo la orientación del campo eléctrico determina la polarización de la onda electromagnética.

La polarización de una onda radiada se define por Balanis (1989) en base a *IEEE standard definitions for antennas*, como la trayectoria trazada, en función del tiempo, por la extremidad del vector de campo eléctrico, en un punto fijado en el espacio. La polarización puede ser clasificada en tres categorías: lineal, circular y elíptica. Si la dirección del campo permanece fija durante la propagación de la onda en el espacio, es decir que el vector de campo mantiene una sola dirección,

normal a la dirección de propagación, se dice que es linealmente polarizada. Si el campo rota alrededor del eje paralelo a la dirección de propagación, durante la propagación de la onda, entonces la onda está elípticamente polarizada. La polarización circular es un caso especial de la polarización elíptica.

Las antenas de georadar radian ondas linealmente polarizadas, orientadas paralelamente al eje largo de la antena, las cuales penetran en el subsuelo. Al ser reflejadas por un objeto pueden cambiar su polarización (lo que se conoce como depolarización). La antena receptora solo registra las ondas que llegan polarizadas con una dirección igual al eje de la antena.

### **Sensibilidad a la polarización del dipolo**

El teorema de reciprocidad aplicado a las antenas establece que el patrón captado por una antena es idéntico al patrón transmitido por la misma antena y la relación entre causa y efecto es la misma independientemente de cuál antena se use como fuente y cuál como receptor (Balanis, 1989). Es decir, que el campo medido en una antena receptora es idéntico al campo que se mediría en la antena transmisora y viceversa.

Por otro lado Balanis (1989) define el factor de pérdida de polarización (PLF) cuantitativamente para expresar la sensibilidad de las antenas a polarizarse:

$$PLF = (\hat{a} \bullet \hat{e}^i)^2 \quad (38)$$

donde:

$\hat{a}$  vector unitario representando la polarización del campo eléctrico en la antena

$\hat{e}^i$  polarización del campo incidente

lo cual significa que la corriente en la antena receptora es proporcional al producto punto de un vector unitario paralelo al dipolo y la polarización del campo incidente. Si el valor del PLF es igual a uno, significa que la antena receptora capta la energía máxima del campo incidente polarizado. Si el ángulo formado por la polarización de la onda plana incidente y el eje del dipolo de la antena es  $45^\circ$ , el PLF será igual a 0.5. Esto significa que solo la mitad de la energía es recibida por la antena receptora.

## II.4 Matriz de dispersión

La respuesta de los cuatro arreglos de antenas diferentes es representada por la matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  en el dominio del tiempo (Chen et al., 2001; Sassen and Everett, 2009),

$$\mathbf{s}(t) = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix} \quad (39)$$

donde cada uno de los elementos  $S_{ij}$  de  $\mathcal{S}$  representan radagramas generados por un campo transmitido en la dirección  $i$  y recibido en dirección  $j$ , es decir la orientación del transmisor es el eje  $i$ , mientras que la orientación del receptor es el eje  $j$ .

Para dispersores horizontales y planos, los elementos co-pol son idénticos ( $S_{xx} = S_{yy}$ ), mientras que las respuestas x-pol o polarización cruzada son nulas ( $S_{xy} = S_{yx} = 0$ ). En contraste, en el caso de objetivos alargados las respuestas co-pol son diferentes y las respuestas x-pol no son nulas, sino que tienen amplitudes relativas en función de la geometría y las propiedades eléctricas del objetivo (Radzevicius y Daniels, 2000). En el dominio del tiempo  $\mathcal{S}$  es una matriz real y simétrica con  $S_{xy} =$

$S_{yx}$  esto debido al principio de reciprocidad. Cada uno de los elementos de  $S$  representa una variable en el tiempo (radagrama) en un lugar determinado. También puede representar un conjunto de radagramas (sección GPR con offset común) a lo largo de un determinado perfil.

Aplicando una transformación lineal a la matriz de dispersión, la orientación del sistema coordinado de referencia se puede girar en diferentes rumbos a fin de investigar la respuesta en función de la orientación. La matriz de dispersión en un nuevo sistema de referencia está dada por

$$\mathbf{S}' = \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{R}^T \quad (40)$$

Donde:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (41)$$

$\mathbf{R}$  es la matriz de rotación y  $\theta$  es el ángulo de rotación medido en contra de las manecillas del reloj. Los elementos de la nueva matriz de dispersión, en términos de los elementos originales y del ángulo de rotación, son:

$$\begin{aligned} S'_{xx} &= S_{xx} \cos^2 \theta + S_{yy} \sin^2 \theta + (S_{yx} + S_{xy}) \sin \theta \cos \theta \\ S'_{xy} &= S_{xy} \cos^2 \theta - S_{yx} \sin^2 \theta + (S_{yy} - S_{xx}) \sin \theta \cos \theta \\ S'_{yx} &= S_{yx} \cos^2 \theta - S_{xy} \sin^2 \theta + (S_{yy} - S_{xx}) \sin \theta \cos \theta \\ S'_{yy} &= S_{yy} \cos^2 \theta + S_{xx} \sin^2 \theta - (S_{yx} + S_{xy}) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (42)$$

La transformación anterior transforma la matriz de dispersión original en otra que se mediría en un sistema rotado un cierto ángulo conocido. El problema inverso es más útil, por ejemplo encontrar un ángulo que transforme la matriz de dispersión en una cuyos elementos x-pol ( $S'_{xy}$  ó  $S'_{yx}$ ) tengan máxima amplitud. Este ángulo se puede encontrar haciendo cero la derivada con respecto a  $\theta$  de  $S'_{xy}$  ó  $S'_{yx}$ , en la ecuación 8, quedándonos:

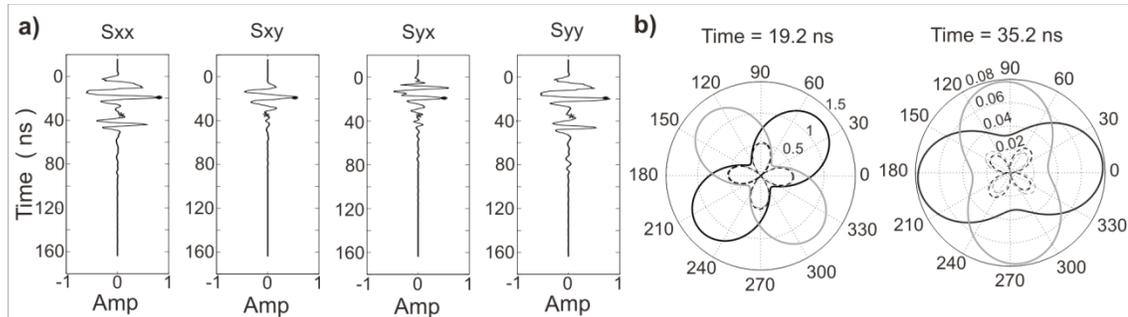
$$\theta_{\perp} \pm n\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{atan}^{-1} \left( \frac{S_{yy} - S_{xx}}{S_{xy} + S_{yx}} \right) \quad (43)$$

Este resultado tiene una ambigüedad de  $90^\circ$  debido al comportamiento armónico de los elementos de  $\mathbf{S}$  el cual es evidente como se verá más adelante en el diagrama dipolar de la Figura 14b. Similarmente, el ángulo que maximiza una de las componentes co-pol se puede encontrar haciendo cero la derivada de  $S_{xx}$  o  $S_{yy}$ , el resultado es:

$$\theta_{\parallel} \pm n\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{atan}^{-1} \left( \frac{S_{xy} + S_{yx}}{S_{xx} - S_{yy}} \right) \quad (44)$$

Para un tiempo determinado, uno puede dibujar los cuatro elementos de la matriz de dispersión en función del ángulo de rotación, en forma de diagrama polar. La Figura 14b muestra los diagramas polares obtenidos en  $t = 19.2$  ns y  $t = 35.2$  ns de los cuatro radagramas de la Figura 14a. Los diagramas muestran las amplitudes de los cuatro elementos de  $S'$  para ángulos de rotación en un rango de  $0^\circ < \theta < 360^\circ$ . En el diagrama polar son evidentes varias propiedades de la matriz de dispersión. Las amplitudes co-pol se relacionan por una diferencia de  $90^\circ$ , es decir  $S'_{xx}(\theta) = S'_{yy}(\theta \pm 90^\circ)$ , mientras las amplitudes de polarización cruzada (x-pol), aunque deben de ser iguales por el principio de reciprocidad, son muy parecidas, esta discrepancia se debe a imprecisiones al momento de medirlas. Una propiedad importante es que el rumbo que hace máximo a  $S'_{xx}$  también hace mínimo a  $S'_{yy}$  y hace cero a  $S'_{xy}$  y  $S'_{yx}$ . Por otro lado el rumbo que hace máximo a  $S'_{xy}$  y  $S'_{yx}$  también hace  $S'_{xx} = S'_{yy}$  y el ángulo entre ambos rumbos es  $45^\circ$ .

Como se mencionó antes, la diferencia entre  $\theta_{\perp}$  y  $\theta_{\parallel}$  es  $45^{\circ}$ , por ejemplo como se muestra en el diagrama polar de la Figura 14b, para un  $t = 19.2$  ns,  $\theta_{\perp} = -2.4^{\circ}$  y  $\theta_{\parallel} = 42.6^{\circ}$ .



**Figura 14.-** Se muestran cuatro radagramas, de un mismo punto pero con diferentes configuraciones de antenas, esto para formar la matriz de dispersión (a) diagramas polares calculados para  $t=19.2$  ns y  $t=35.2$  ns. Las magnitudes de  $S_{xx}(\theta)$  y  $S_{yy}(\theta)$  son mostradas como líneas negras y grises respectivamente, mientras que los elementos x-pol  $S_{xy}(\theta)$  y  $S_{yx}(\theta)$  son mostrados con líneas punteadas de color negro y gris respectivamente (b).

El campo dispersado por un objeto plano no presenta depolarización mientras que el dispersado por un objeto cilíndrico alargado es depolarizado dependiendo de la orientación del cilindro en relación a la polarización incidente. El grado de depolarización del campo dispersado está en relación al contraste de amplitud entre los coeficientes de polarización paralela y perpendicular, es decir a mayor contraste entre las amplitudes de los coeficientes de polarización mayor es el potencial de depolarización (Roberts y Daniels, 1996).

## II.5 Invariantes de la matriz de dispersión

Otras propiedades importantes de  $\mathbf{S}$  que se obtienen fácilmente de la ecuación (42) son los invariantes a la rotación: traza, determinante y norma de Frobenius.

$$\begin{aligned}\text{trace}(\mathbf{S}') &= \text{trace}(\mathbf{S}) \\ \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S}_{yy} &= \mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S}_{yy}\end{aligned}\quad (45)$$

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{S}') &= \det(\mathbf{S}) \\ \mathbf{S}_{xx}\mathbf{S}_{yy} - \mathbf{S}_{xy}\mathbf{S}_{yx} &= \mathbf{S}_{xx}\mathbf{S}_{yy} - \mathbf{S}_{xy}\mathbf{S}_{yx}\end{aligned}\quad (46)$$

y

$$\begin{aligned}\text{norm}(\mathbf{S}') &= \text{norm}(\mathbf{S}) \\ |\mathbf{S}_{xx}|^2 + |\mathbf{S}_{yy}|^2 + |\mathbf{S}_{xy}|^2 + |\mathbf{S}_{yx}|^2 &= |\mathbf{S}_{xx}|^2 + |\mathbf{S}_{yy}|^2 + |\mathbf{S}_{xy}|^2 + |\mathbf{S}_{yx}|^2\end{aligned}\quad (47)$$

Los invariantes pueden ser de ayuda para construir mejores imágenes del subsuelo, ya que utilizan la información dada por los cuatro elementos de la matriz de dispersión y al mismo tiempo eliminan el carácter direccional del campo bipolar del GPR. Lehman et al. (2000) muestran que al sumar las componentes co-pol de la matriz de dispersión se produce una imagen “pseudo-escalar”, la cual es comparable a una producida por un campo de onda escalar, como el usado en reflexión sísmica. Nosotros demostramos aquí que esto es así, porque esta suma de los elementos co-pol de la matriz  $\mathbf{S}$  es invariante a la rotación (ecuación 45).

Similarmente el determinante y la norma de la matriz de dispersión (ecuaciones 46 Y 47) eliminan la directividad natural de los elementos de la matriz de dispersión GPR produciendo respuestas similares a las producidas por un campo escalar. Cabe mencionar que en el capítulo de Experimentos, con datos sintéticos de este trabajo, se reproduce el experimento numérico de Lehmann et al. (2000).

## II.6 Estimación del rumbo

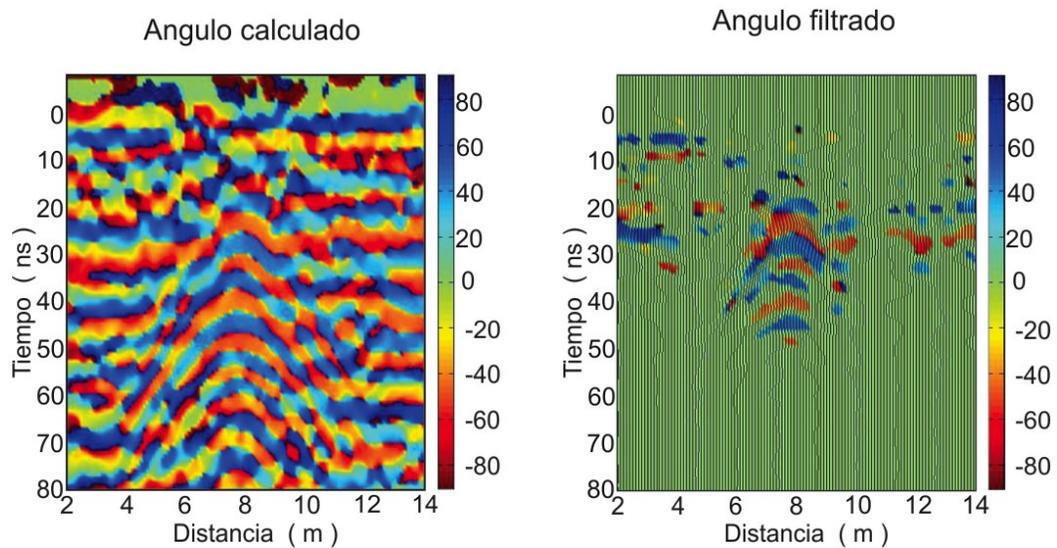
Algunos autores han utilizado la matriz de dispersión para extraer información direccional del objetivo. Por ejemplo, Chen et al. (2001) usaron los eigenvalores de la matriz de dispersión para caracterizar minas sin estallar. Tsoflias et al. (2004) comparan datos de campo tomados con diferentes configuraciones de antenas sobre una falla vertical y demuestran que la capacidad de detección de la falla es mejor con la configuración “broadside” (antenas paralelas a lo largo de su eje largo) que con “enfite” (antenas colineales) y cruzada. Van Gestel y Stoffa (2001) utilizaron la transformación de rotación propuesta por Alford (1986) para investigar las propiedades direccionales de objetivos diferentes, tales como capas inclinadas, cilindros y fracturas. Cabe mencionar que ellos utilizan la transformación (ecuación 42) en una forma “directa”, es decir, calculan  $S'$  para un conjunto de ángulos en el rango de  $0 < \theta < 180^\circ$  y buscan los valores máximos y mínimos que resultan en las componentes rotadas. Seol et al. (2001) proponen el ángulo que minimiza la energía de las componentes x-pol como una manera de identificar el rumbo de fracturas verticales. Seo et al. (2001) utilizan la optimización que hace cero la derivada de la energía x-pol  $|S'_{xy}|^2$ , resultando un ángulo.

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left[ \frac{-\left(\frac{1}{2}A^2 - 2B^2\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}A^2 - 2B^2\right)^2 + 4(AB)^2}}{2AB} \right] \quad (48)$$

Donde  $A = S_{yy} - S_{xx}$  y  $B = S_{yx}$ . Nótese que la ecuación (48) proporciona dos valores, ya que es una solución cuadrática. Uno de ellos es el rumbo del objetivo y el otro ángulo es perpendicular al primero.

Por otro lado, Capizzi y Cosentino (2008) usan el ángulo que maximiza las componentes x-pol, tal como se propone en (ecuación 43), excepto que calculan dos casos, uno suponiendo que  $S_{xy} + S_{yx} = 2S_{xy}$  y otro para  $S_{xy} + S_{yx} = 2S_{yx}$ , esto en base al principio de reciprocidad. Ellos proponen un promedio aritmético de ambas estimaciones como un indicativo del rumbo del objetivo.

En principio, los ángulos perpendicular y paralelo propuestos por nosotros y calculados con las ecuaciones (43 y 44), el promedio propuesto por Capizzi y Cosentino (2008), o cualquier otra estimación similar, pueden ser calculados en cualquier punto  $(x,t)$  en una sección de GPR. Sin embargo, la estimación solo será significativa si son calculados en los tiempos de llegada y en la ubicación espacial de buenos reflectores, esto debido a que las formulaciones propuestas son muy inestables cuando las amplitudes son pequeñas o los datos son ruidosos y por lo tanto el resultado no es significativo, como puede observarse en la sección de la izquierda de la Figura 15. Por este motivo nosotros utilizamos la norma de Frobenius (ecuación 47) como "filtro" para seleccionar (por ensayo y error) las mayores amplitudes de una sección y calcular el ángulo solamente para amplitudes mayores que un cierto umbral, como se muestra en la sección de la derecha de la Figura 15, donde observamos estimaciones más significativas y estables utilizando en este caso solo las amplitudes mayores a 0.2 en una escala de 0 a 1 en base a amplitudes normalizadas.



**Figura 15.-** Del lado izquierdo se muestra el ángulo calculado para toda la sección de datos y del lado derecho la misma sección pero filtrada (Esta figura se elaboró con una sección de datos de campo que se usarán más adelante).

## II.7 Procesamiento convencional de datos

Para procesar los datos colectados en el campo se sigue un procedimiento convencional el cual consta de varios pasos.

### Dewow

Primeramente se aplica un filtro pasa altas para eliminar bajas frecuencias producidas por interferencia instrumental debida a la cercanía de las antenas. Este filtro es conocido como “dewow” en el léxico de los especialistas en GPR. Dependiendo de la proximidad entre el transmisor y el receptor, así como de las propiedades eléctricas del suelo, la señal transmitida induce bajas frecuencias (wow) en el receptor, lo cual se observa en la traza como una variación lenta que se superpone a las reflexiones, las cuales contienen más alta frecuencia (Figura 16). Este proceso de “dewow” lo aplicamos con un programa comercial “Ekko View deluxe”, que se distribuye con el equipo Ekko-Pro.

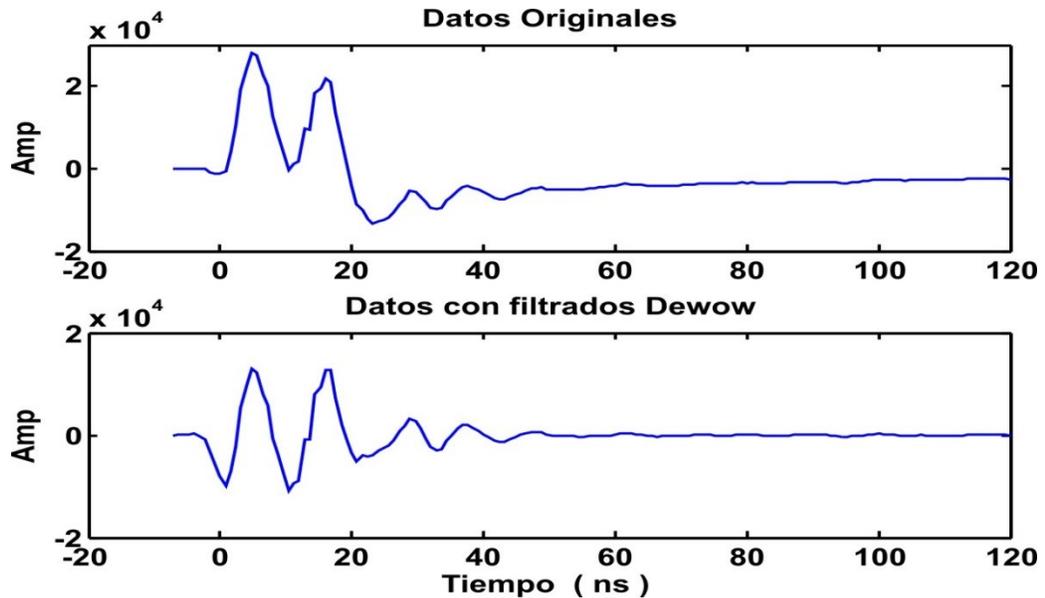


Figura 16.- Muestra la traza original (gráfica superior) y la traza después del “dewow” (gráfica inferior).

Posteriormente exportamos los datos a formato ASCII, para poderlos leer en Matlab y seguir con el procesamiento de datos utilizando nuestros propios algoritmos desarrollados como parte de este trabajo. El siguiente proceso que aplicamos es la corrección del tiempo cero.

### Ajuste de tiempo cero

Hay ciertos factores como los espacios vacíos entre la antena y el terreno, la deriva instrumental debida a la temperatura y cierta inestabilidad electrónica que ocasionan retrasos o adelantos en tiempo de los primeros arribos de la señal. Esto implica un desfaseamiento entre las trazas, por lo tanto se requiere de un corrimiento de las trazas a un tiempo cero común antes de aplicar cualquier procesamiento.

Para determinar el tiempo cero en una sección, se puede escoger entre varios puntos de la traza (Yelf y Yelf, 2006): a) primer quiebre del radagrama, b) primer pico negativo, c) primer pico positivo, d) punto de amplitud cero y e) punto de amplitud media. Este procedimiento si se hace manualmente puede consumir mucho tiempo. Para hacerlo automáticamente elaboramos un algoritmo en Matlab (Apéndice A) basado en la correlación cruzada entre trazas. El algoritmo localiza el tiempo en que se encuentra la correlación máxima entre trazas, la cual generalmente corresponde al primer arribo (onda directa) y lo utiliza para ajustar el inicio de todas las trazas de la sección. El proceso funciona satisfactoriamente quedando alineado el primer arribo, que es el más energético, ya que es la superposición de la onda directa que viaja en el aire con la onda directa que viaja por el subsuelo.

Una breve explicación del programa elaborado para la corrección del tiempo cero es la siguiente: primero escogemos una ventana de datos (la cual abarca la onda directa) y una traza de referencia (en base a la cual se alinearán las demás trazas), una vez teniendo definida la ventana y la traza de referencia calculamos la correlación entre la traza de referencia con cada una del resto de las trazas (solo en la ventana de tiempo definida anteriormente). Una vez teniendo la correlación procedemos a mover las trazas alineando el tiempo en el cual ocurre el valor máximo de las correlaciones, con esto obtenemos una sección con el mismo tiempo cero en todas las trazas.

### **Supresión de la onda directa**

Como se comentó antes, parte de la energía emitida por la antena transmisora viaja por el aire y es lo primero que capta la antena receptora. Esta energía se observa en la sección de datos como un reflector continuo, de gran amplitud al inicio del radagrama. Comúnmente este arribo tiene superpuesta otra onda directa, la que viaja por el subsuelo arribando casi al mismo tiempo que la del aire.

Así mismo, puede haber refracciones críticas que llegan al receptor también casi simultáneamente con el primer arribo. Este primer arribo se denomina onda directa.

En muchas ocasiones es conveniente eliminar la onda directa. Para ello hay varias alternativas. Entre los usuarios de georadar es común utilizar una traza promedio la cual es restada a las demás, lo que se conoce como substracción de fondo (*background subtraction*), el inconveniente de este proceso es la posible remoción de reflectores continuos y horizontales que sean de interés. Otra forma de proceder, es como lo reporta en su artículo Shahbaz y Al-Nuamy (2009), utilizando los eigen valores. En esta técnica la sección GPR se descompone en sus valores principales (SVD) y se elimina el valor principal más significativo, el cual corresponde con la zona de mayor energía en la sección, es decir el primer arribo. Por otro lado en una aplicación para reflexión sísmica, Gómez Londono y otros (2005) utiliza la transformada de Karhunen-Loeve (K-L) la cual está basada en la descomposición de valores singulares y la utiliza para suprimir el “ground roll”, aunque “ground roll” y onda directa que aunque no son iguales tienen la misma propiedad de que su amplitud son mayores que la amplitud de la señal de interés, por lo cual al utilizar la transformada K-L se tiene éxito en suprimirlo sin causar distorsión en las señales de reflexión. Por último otro método que se ha utilizado para la supresión de la onda directa es aplicar un filtro paso alto en el dominio f-k. Los datos se transforman del dominio t-x (tiempo - Distancia) al dominio f-k (frecuencia – número de onda), en donde el número de onda más bajo y la frecuencia más baja pueden removerse fácilmente antes de regresar al dominio tx.

En nuestro trabajo probamos eliminar la onda directa de tres formas: la primera con la traza promedio, después eliminando componentes principales partiendo de la descomposición en valores singulares y la tercera aplicando el filtro f-k. De estos tres métodos el que mostró mejor resultado para nuestros datos, en el sentido que distorsiona menos los reflectores de interés, fue el filtro f-k.

Para aplicar este filtro elaboramos un programa en Matlab (Apéndice A) el cual tiene como entrada los datos corregidos por tiempo cero (Figura 17a), aplica la transformada de Fourier en 2D a los datos para pasarlos del dominio del tiempo y espacio (t-x) al de frecuencia y número de onda (f-k) (Figura 17b), una vez en el dominio f-k hacemos cero la amplitud espectral correspondiente a  $k=0$  (Figura 17c). Adicionalmente estando en el dominio f-k aprovechamos para aplicar también un filtro pasa bajas (Figura 17d), con objeto de eliminar ruido de alta frecuencia y alto número de onda. La Figura 17e muestra el espectro f-k filtrado y la Figura 17f la sección ya filtrada nuevamente en el dominio t-x.

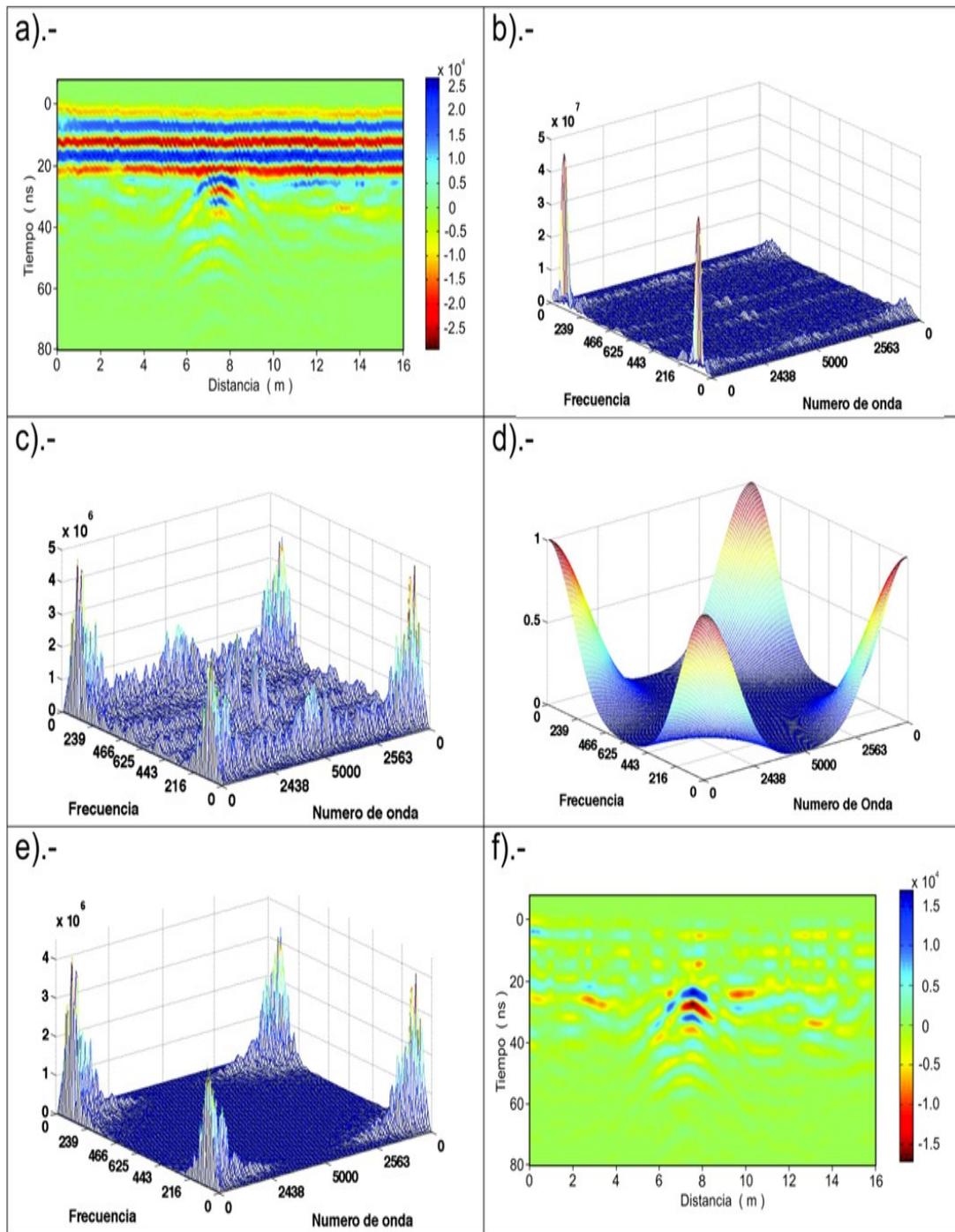


Figura 17.- a) Sección corregida por tiempo cero; b) Espectro f-k, con las amplitudes máximas en  $k=0$ ; c) Espectro después de eliminar la amplitud en  $k=0$ ; d) Filtro paso bajo (ventana de Parzen); e) Espectro filtrado; f) Sección filtrada; las unidades de frecuencia y número de onda son MHz y ciclos/km respectivamente.

## Capítulo III

---

### Experimentos con datos sintéticos

---

#### III.1 Simulación de datos

Para la simulación de datos sintéticos utilizamos el programa GprMax, el cual es un simulador numérico de propagación de ondas electromagnéticas escrito para GPR por Giannopoulos (2005). Este programa está disponible en la red en forma gratuita y puede simular casos en 2D y 3D. Algunas propiedades del programa son: interfase de fácil utilización mediante comandos que permiten definir los parámetros del modelo, habilidad para modelar materiales dispersivos, modelación de objetivos con formas complejas y simulación de espacios sin fronteras mediante el uso de condiciones de absorción en las fronteras. GprMax3D a diferencia de GprMax2D permite la simulación de diferentes configuraciones de antenas. Por otro lado el GprMax3D modela la antena transmisora como un dipolo ideal, mientras que GprMax2D modela la antena de transmisión como una fuente lineal.

Para simular datos 3D con los cuatro arreglos usados en la matriz de dispersión, ejecutamos el programa dos veces, una para obtener las componentes  $S_{xx}$  y  $S_{xy}$  y otra para obtener  $S_{yy}$  y  $S_{yx}$ .

El problema directo de GPR se clasifica como un problema de valores iniciales con frontera abierta. Esto significa que, con el fin de obtener una solución, uno tiene

que definir una condición inicial (es decir la excitación de la antena transmisora del GPR) y permitir que el campo resultante se propague a través del espacio hasta alcanzar un valor de cero en el infinito, ya que no hay un límite específico que limite la geometría del problema y donde los campos electromagnéticos puedan tener un valor predeterminado. Aunque la primera parte es fácil de simular numéricamente (la especificación de la fuente), la segunda parte requiere introducir condiciones de absorción en las fronteras del espacio computacional finito.

El método de diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) es una manera de obtener la solución numérica de las ecuaciones de Maxwell discretizando tanto el espacio como el tiempo. La discretización espacial ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$  y  $\Delta z$ ) y temporal ( $\Delta t$ ) desempeñan un papel muy importante, ya que mientras más fina sea, el modelo será una representación más real del problema. Sin embargo no deja de ser un modelo que representa una versión discretizada y de tamaño limitado del problema real. La construcción del modelo se basa en la celda Yee, nombrada en honor de Kane Yee quien fue el pionero en el método FDTD. La asignación de los parámetros constitutivos en cada celda se hace fácilmente. Los objetos con curvas limítrofes se representan mediante una aproximación de tipo escalera.

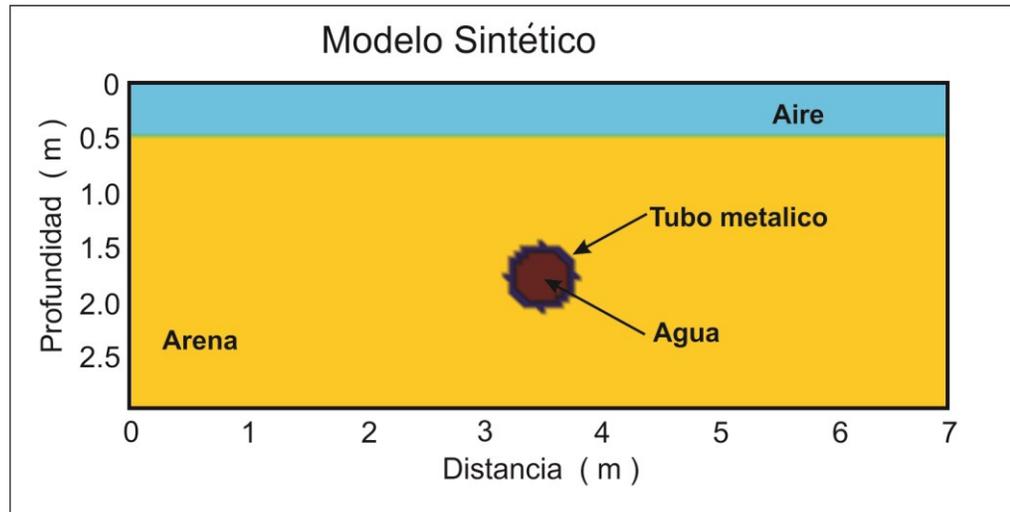
La solución numérica se obtiene directamente en el dominio de tiempo mediante el uso de una versión discretizada de las ecuaciones de Maxwell que se aplica en cada celda del modelo. Estas ecuaciones son discretizadas tanto en el espacio como en el tiempo, la solución se obtiene en forma iterativa. En cada iteración los campos electromagnéticos avanzan (se propagan) en la malla FDTD, cada iteración corresponde a un tiempo  $\Delta t$  simulado. Por lo tanto, especificando el número de iteraciones uno puede formar la solución FDTD para simular la distribución de los campos después de una ventana de tiempo dado.

El precio que uno tiene que pagar para obtener una solución directamente en el dominio del tiempo utilizando el método FDTD es que los valores de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  y  $\Delta t$  no se pueden asignar independientemente. FDTD es un proceso numérico condicionalmente estable. La condición de estabilidad se conoce como condición CFL dada por las iniciales de Courant, Freidrichs y Lewy, posteriormente de su publicación en 1928.

Uno de los problemas más importantes de modelar una frontera abierta, como lo es el problema de GPR, es la limitación del espacio computacional (finito), ya que las fronteras producen efectos indeseables en los valores de los campos dentro del dominio del modelo. Por lo tanto, una condición conocida como condición de absorción aproximada (ABC) se aplica a una distancia prudente de la fuente para truncar y, por lo tanto, limitar el espacio computacional. El papel de esta condición ABC consiste en absorber cualquier onda que incida e impedir su reflexión, por lo tanto simula un espacio ilimitado. El espacio computacional (es decir, del modelo) limitado por condiciones ABC debe contener todas las características importantes del modelo tales como fuentes, puntos de observación y objetivos.

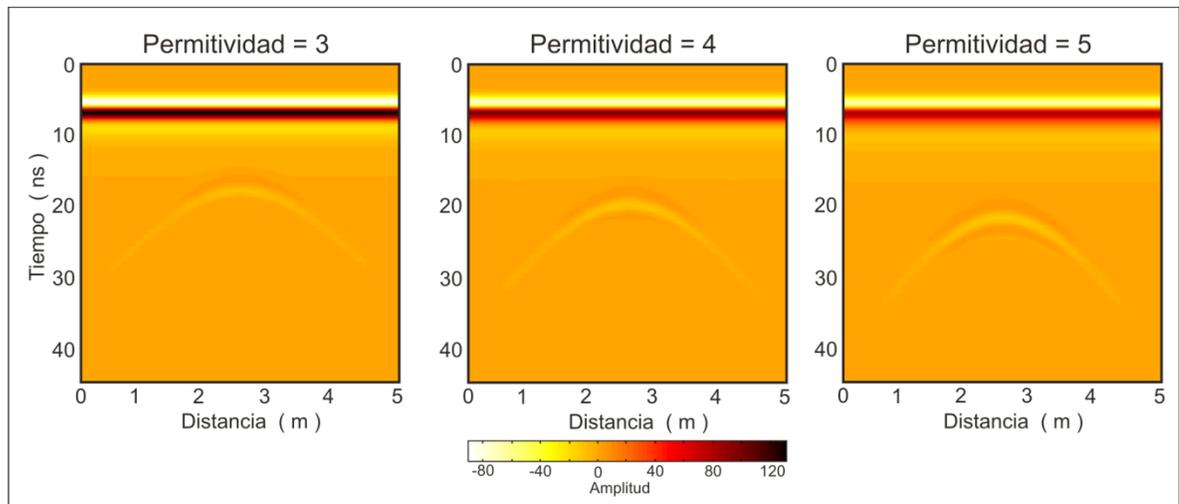
### **III.2 Efecto por cambio en la permitividad del subsuelo**

Para analizar los efectos que produce un cambio de permitividad en el subsuelo, se propuso un modelo 2D de dos capas (aire-suelo), con 3 m de profundidad por 7 m de largo, la capa de aire tiene un espesor de 0.5 m y la de suelo de 2.5 m. En el centro del modelo colocamos un reflector, en este caso simulamos un tubo metálico relleno de agua con un radio de 0.3 m como se muestra en el esquema de la Figura 18. Los datos se simularon con antenas perpendiculares al perfil, con una frecuencia de 200 MHz y se obtuvo una sección a lo largo de un perfil de 7 m de longitud con observaciones cada 0.1 m.



**Figura 18.- Esquema del modelo sintético.**

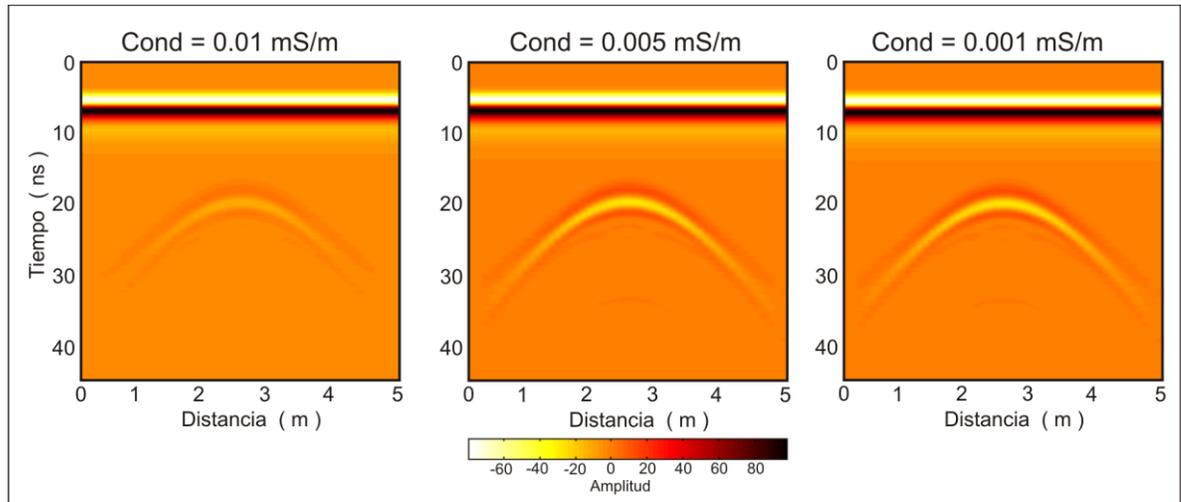
En la capa de aire los parámetros ( $\mu$  y  $\varepsilon$  adimensionales) que utilizamos fueron  $\mu=1$ ,  $\sigma=0$  mS/m y  $\varepsilon=1$ , mientras que en la capa inferior, supusimos un suelo de arena seca con permeabilidad magnética y conductividad constante de  $\mu=1$ ,  $\sigma=0.01$  mS/m, hicimos variar la permitividad relativa entre constantes de 3, 4 y 5. Las secciones resultantes se muestra en la Figura 19, en la cual podemos observar que conforme aumenta la permitividad en el suelo, la hipérbola que produce el objeto se define un poco mejor. Con permitividad de 3 se forma la hipérbola con un máximo positivo y un máximo negativo, mientras que con permitividad de 5 la hipérbola se forma con dos máximos positivos y en medio un máximo negativo. Por otro lado, se observa que mientras mayor es la permitividad la onda viaja más lenta y la hipérbola aparece a tiempos mayores.



**Figura 19.- Para una misma sección se muestran las amplitudes correspondientes para diferentes permitividades del subsuelo**

### III.3 Efecto por cambio en la conductividad del subsuelo

Utilizando el mismo modelo anterior, para un suelo de arena seca pero con propiedades de permitividad y permeabilidad magnética constantes  $\epsilon=4$  y  $\mu=1$ , variando ahora la conductividad del modelo de 0.01, 0.005 y 0.001 mS/m, obtenemos las secciones de la Figura 20. En esta figura podemos ver que no hay cambio en el tiempo de arribo de la hipérbola, en los tres casos su vértice aparece a los  $\sim 20$  ns. Lo que sí observamos es que hay atenuación en la amplitud de la hipérbola, a mayor conductividad mayor es la atenuación.



**Figura 20.-** Para una misma sección se muestran las amplitudes correspondientes para diferentes conductividades del subsuelo.

### III.4 Respuesta de un dispersor puntual

Es interesante analizar la respuesta de un objetivo dispersor puntual. Para simularlo usamos el algoritmo GprMax3D, colocando una pequeña esfera metálica de radio 0.1 m en un volumen homogéneo de aire, la esfera se ubica a 3 m por debajo del plano de observación. En la Figura 21a mostramos la amplitud máxima del campo ocasionada por el dispersor puntual. Las medidas de los cuatro elementos de la matriz de dispersión fueron simuladas en el plano X-Y usando una fuente dipolar de 200 MHz y posteriormente a los datos se les eliminó la onda directa restando una traza promedio.

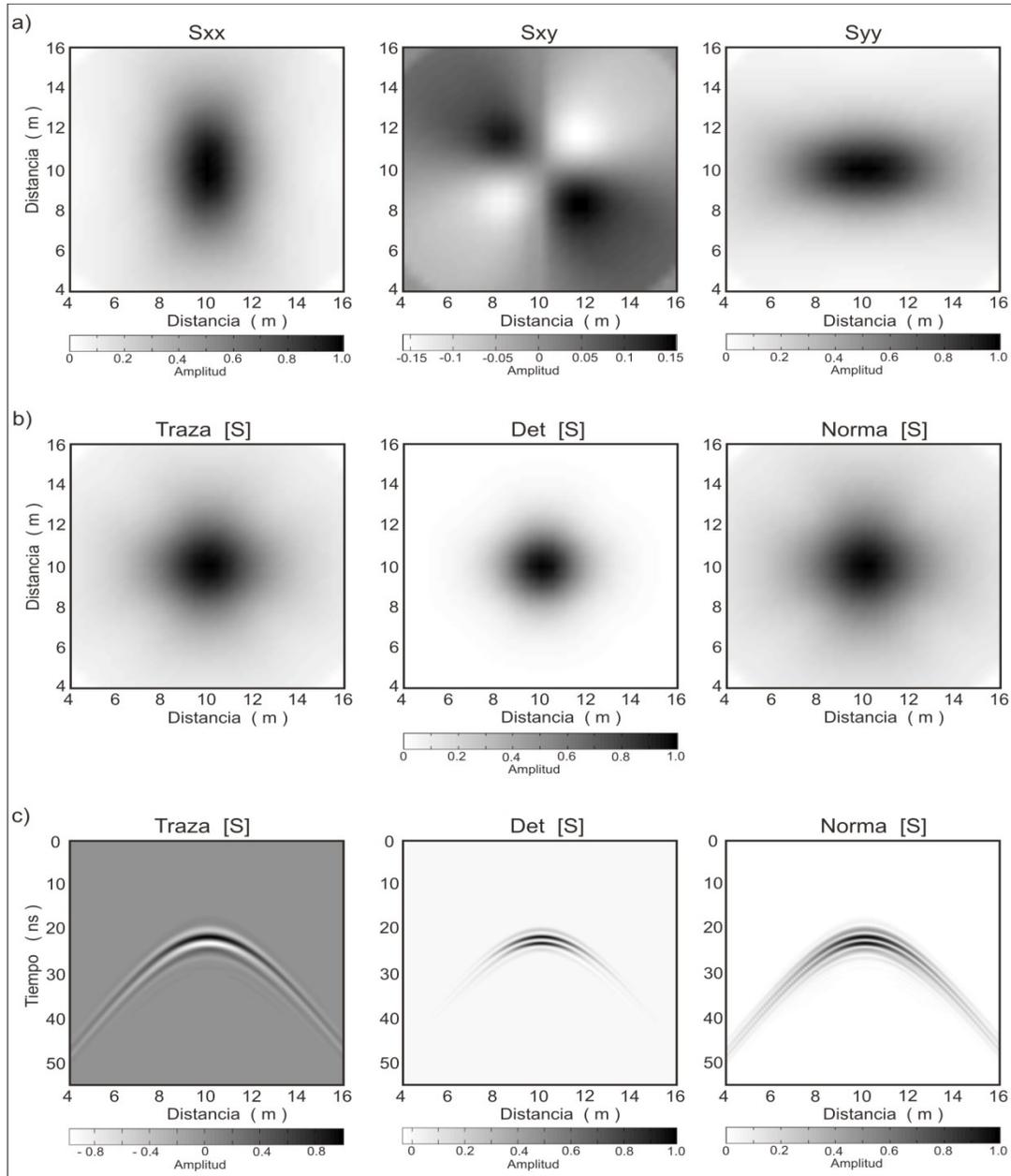
En la Figura 21a se muestra una vista en planta de las amplitudes máximas de tres componentes de la matriz dispersión:  $S_{xx}$ ,  $S_{xy}$ ,  $S_{yy}$  ( $S_{yx}$  es idéntico a  $S_{xy}$ ). El punto difractor está situado en el centro de la placa ( $x=10$  m,  $y=10$  m). El efecto direccional es evidente en las componentes co-pol; mientras la componente cross-pol tiene una respuesta nula en el centro del plano y a lo largo de dos ejes

perpendiculares  $x=10$  m,  $y=10$  m, así como un máximo y un mínimo anti-simétricos, ubicados en los cuatro cuadrantes. Las amplitudes de las tres respuestas están normalizadas por el valor máximo de cada una de ellas. Las respuestas de tres invariantes (traza, determinante y norma) se ilustran en la Figura 21b y la difracción correspondiente a las secciones transversales se muestra en la Figura 21c. En la Figura 21b se puede observar, además de la simetría circular, que el determinante produce una respuesta más compacta, mientras que las respuestas de la norma y la traza son similares entre sí, en cuanto a su extensión lateral. La traza permite valores negativos y positivos, de manera que la forma de la ondícula no es distorsionada como puede observarse en la hipérbola de difracción correspondiente. En contraste, la norma muestra el valor absoluto de la respuesta de la ondícula. Una ventaja relativa de la traza sobre la norma es que se necesitan únicamente los elementos co-pol de la matriz de dispersión, por lo que el esfuerzo extra en la adquisición de las componentes cross-pol se puede ahorrar, esto si el objetivo que se está estudiando no tiene propiedades de depolarización.

La conclusión más importante de este experimento numérico es que nos muestra gráficamente cómo los invariantes remueven el efecto direccional inherente en los datos GPR por la naturaleza vectorial del campo electromagnético. Los invariantes producen imágenes similares a las que produciría un campo escalar como el utilizado en reflexión sísmica. Esto explica el resultado de Lehmann *et al.* (2000) quienes afirman que la suma de las componentes co-pol (es decir la traza de  $\mathbf{S}$ ) produce una imagen “seudo-escalar” comparable a la producida por una onda escalar.

Por tanto, podemos afirmar que los invariantes son respuestas idóneas para procesarse con algoritmos comúnmente usados en sísmica de reflexión, como es la migración. Estrictamente, si se requiere aplicar uno de estos procesos a datos comunes de GPR es necesario modificar los algoritmos para tomar en cuenta la

direccionalidad de los campos vectoriales electromagnéticos, lo cual resulta complicado (Lehman et al., 2000).



**Figura 21.-** Se muestra el campo dispersado por una esfera metálica localizada a 3.0 m por debajo de la línea de adquisición en un volumen homogéneo de aire. a) Amplitudes máximas para las componentes  $S_{xx}$ ,  $S_{xy}$  y  $S_{yy}$  (vistas en planta). b) Amplitudes máximas de los invariantes (vista en planta). c) Sección transversal mostrando las hipérbolas de difracción correspondientes a los invariantes.

### III.5 Simulación 3D de un tubo

En la Figura 22a se muestra un esquema del modelo de un tubo metálico de 0.60 m de diámetro, enterrado a 0.95 m de la superficie en un medio homogéneo ( $\epsilon=4$ ,  $\sigma = 0.01$  ,  $\mu=\mu_0$ ). El perfil atraviesa el tubo en un ángulo de  $63^\circ$  como se muestra en el esquema de la Figura 22a. Las cuatro componentes de la matriz de dispersión se simularon a lo largo de un perfil de 10 m de longitud, calculando a cada 0.1 m. Para este ejemplo utilizamos el código GprMax3D. En la Figura 22b se muestran las secciones transversales de los cuatro elementos de la matriz de dispersión. La hipérbola de difracción provocada por el tubo se muestra claramente en las cuatro respuestas: las componentes de la diagonal tienen amplitud máxima en la parte superior del tubo, mientras que los cross-pol o polarizaciones cruzadas muestran pequeñas amplitudes en la parte superior y amplitudes grandes a los lados de la hipérbola. Cabe mencionar que la onda directa fue eliminada sustrayendo una traza tomada al inicio de la sección, fuera de la zona de la anomalía. Los invariantes (Figura 22c) producen imágenes mejoradas al combinar la información de los cuatro elementos de la matriz de dispersión. Debido a la propiedad de invariancia ante rotación, las imágenes producidas por cada una de estas tres respuestas han perdido cualquier preferencia direccional y pueden estar sujetos a procesamientos escalares, tales como los utilizados para el procesamiento de secciones de reflexión sísmica.

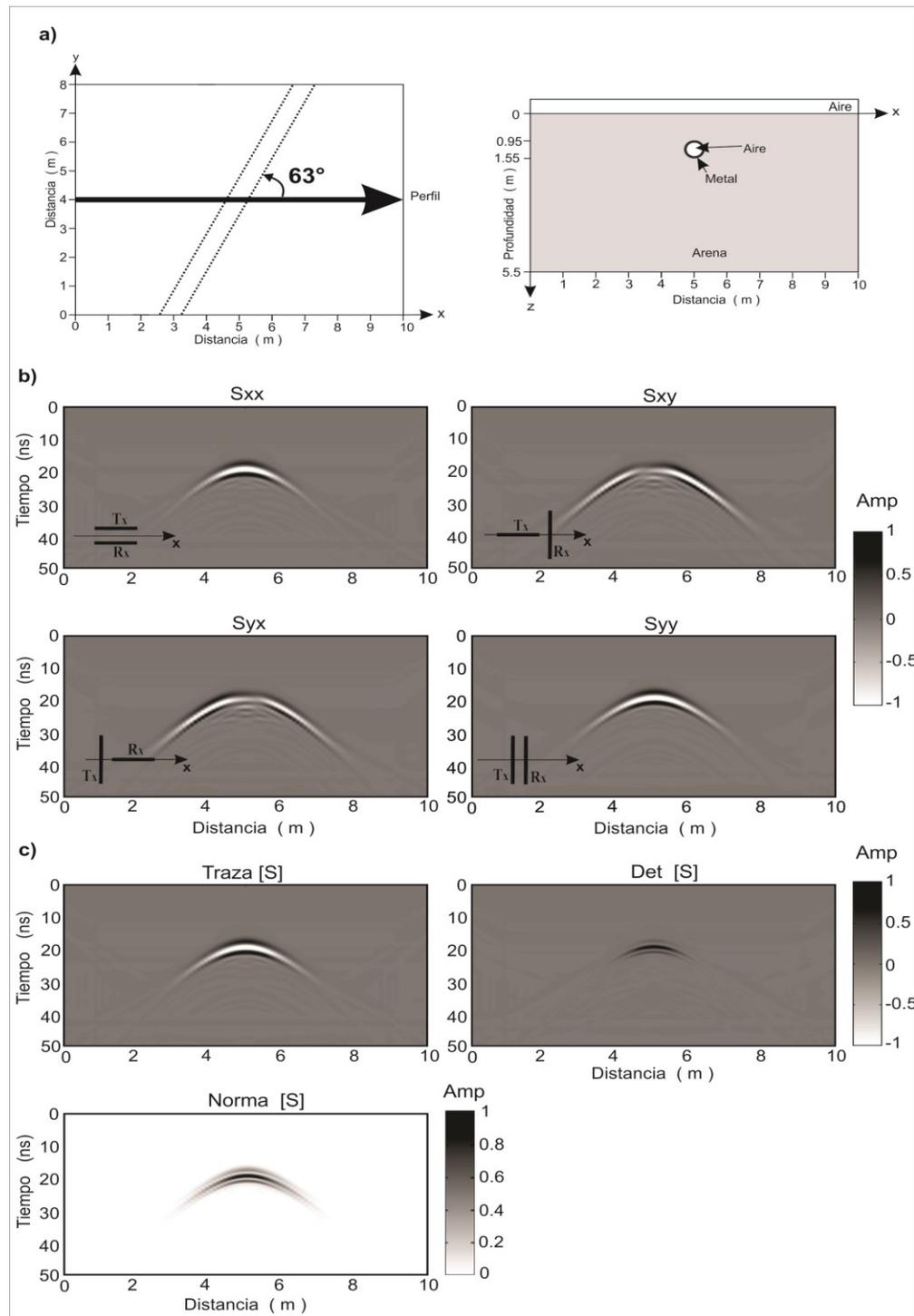
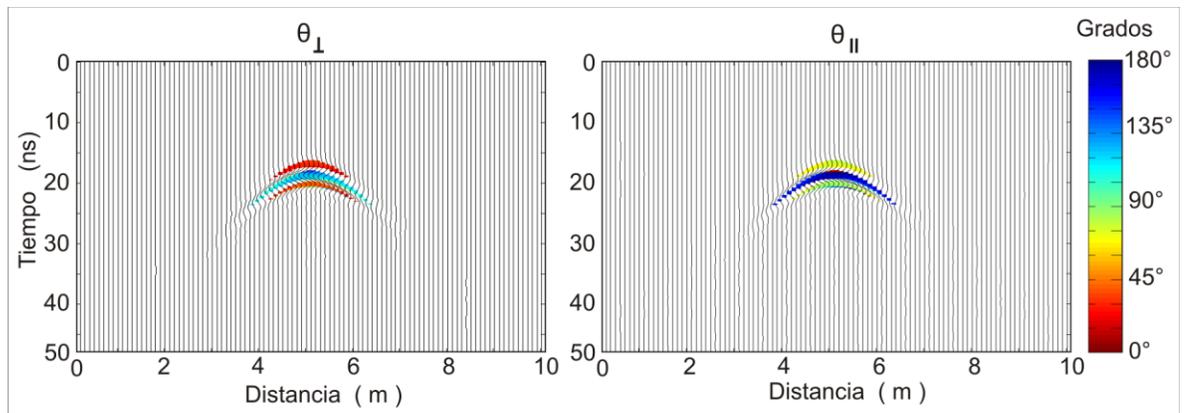


Figura 22.- (a) Esquema del modelo 3D de un tubo metálico, enterrado en un medio homogéneo y formando un ángulo de 63° respecto a la línea del perfil. (b) Secciones transversales de los cuatro elementos de la matriz de dispersión (amplitudes normalizadas). (c) Secciones transversales de los invariantes (amplitudes normalizadas).

Para este ejemplo, calculamos los ángulos  $\theta_{\perp}$  y  $\theta_{\parallel}$  definidos en las ecuaciones 43 y 44 respectivamente. La Figura 23 muestra los ángulos calculados usando solamente las amplitudes que cumplen con la condición  $\|S\|_F > 0.2$ , con  $\|S\|_F$  normalizada en el intervalo  $0 < \|S\|_F < 1$ . Las líneas continuas en el fondo de la figura son radagramas obtenidos con la traza de  $S$ . Puede observarse que la magnitud del ángulo se mantiene a lo largo de la hipérbola dando una estimación muy consistente. Como se esperaba en nuestro ejemplo,  $\theta_{\parallel}$  es cercano a  $63^{\circ}$  (medido en contra de las manecillas del reloj) en la parte superior de la difracción, de acuerdo con el azimut del tubo, y  $\theta_{\perp}$  es aproximadamente  $18^{\circ}$ , esto es,  $45^{\circ}$  de diferencia con  $\theta_{\parallel}$ . Ambos ángulos muestran un cambio de  $90^{\circ}$  cuando la polaridad de la onda cambia con el tiempo.



**Figura 23.- Estimación del ángulo para el modelo descrito en la Figura 22 obtenido maximizando las componentes cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$ .**

### III.6 Simulación de un tanque cilíndrico 3D

Otro modelo sintético que se generó fue suponer un tanque cilíndrico de plástico, lleno de aire, con dimensiones de 0.6 m de diámetro y 1 m de alto, enterrado con su eje horizontal a 1.3 m de profundidad, como se muestra en el esquema de la Figura 24. A partir de este modelo se generaron dos perfiles que pasan por la mitad del tanque uno cortándolo de forma longitudinal y otro transversalmente. Se simularon antenas de 200 MHz, separadas 0.5 m y observaciones cada 0.1 m a lo largo de dos perfiles: uno de ellos alineado con el eje del tanque cilíndrico y el otro transversal al mismo. Se obtuvieron los cuatro elementos de la matriz de dispersión utilizando GprMax3D.

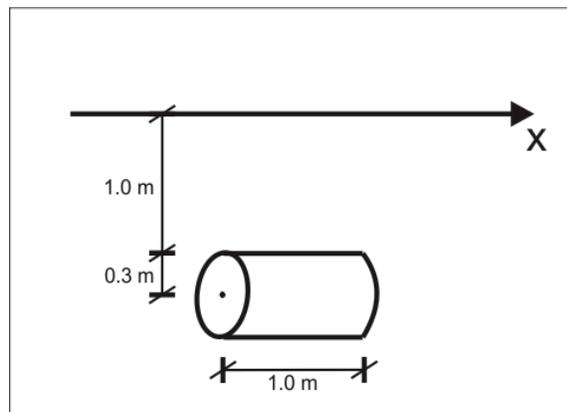
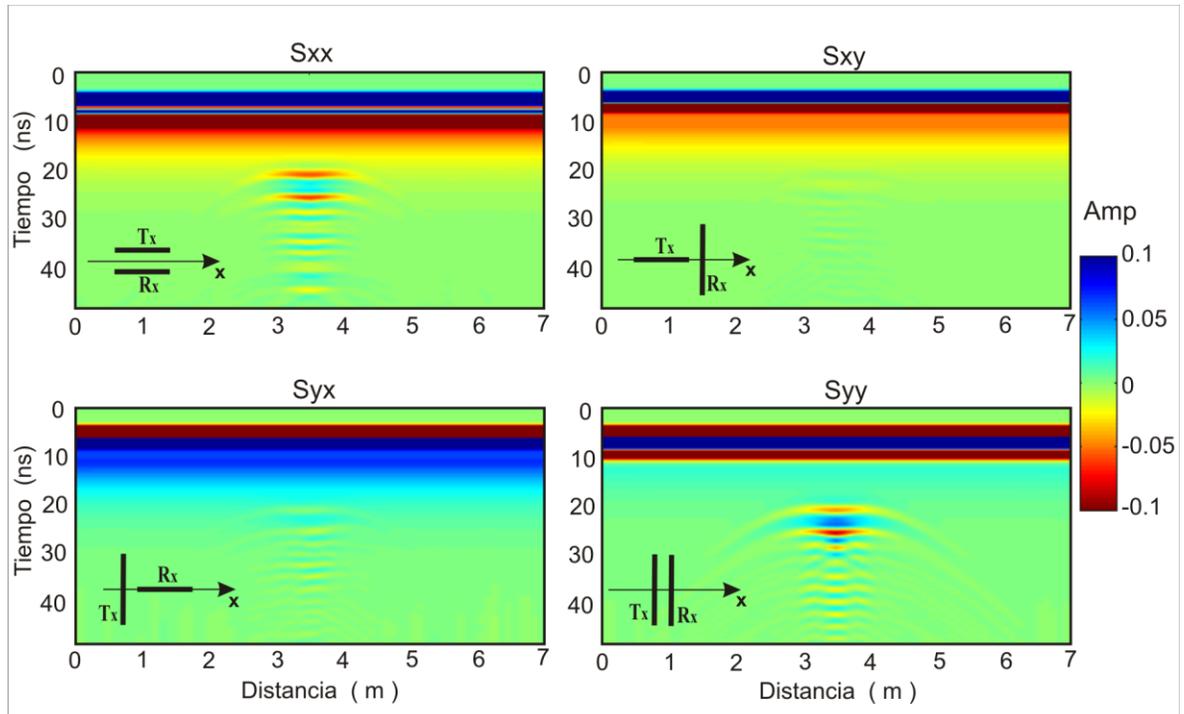


Figura 24.- Esquema del modelo sintético, simulando un tanque de plástico vacío enterrado.

#### Perfil longitudinal

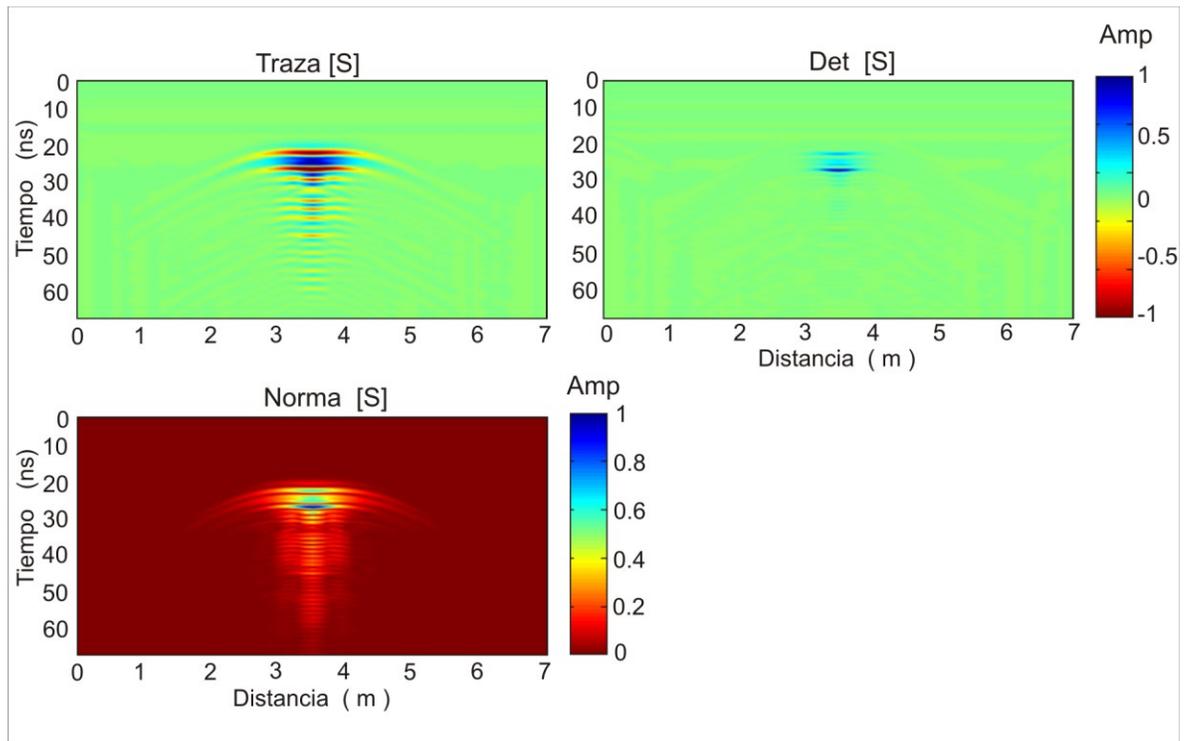
El perfil que se generó longitudinalmente al tanque tiene una longitud de 7 m, los datos que forman la matriz de dispersión se muestran en la Figura 25. Se puede observar que en las componentes co-pol aparece una anomalía fuerte a los 20 ns y a tiempos mayores aparecen sus reflexiones múltiples. En cambio en las secciones con polarizaciones cruzadas  $S_{xy}$  y  $S_{yx}$  no se observan claramente estas reflexiones múltiples. Otro detalle a observar es la intensidad de la anomalía,

comparando  $S_{xx}$  y  $S_{yy}$  vemos que la anomalía mostrada en los datos  $S_{xx}$  es más alargada que la mostrada con los datos  $S_{yy}$ , pero la anomalía es más fuerte y mejor definida con  $S_{yy}$ , lo cual está de acuerdo con la teoría que predice que un cilindro de alta impedancia produce mejor respuesta con antenas perpendiculares al eje largo del cilindro.



**Figura 25.- Secciones longitudinales al tanque con cuatro diferentes configuraciones de antenas (elementos de la matriz de dispersión).**

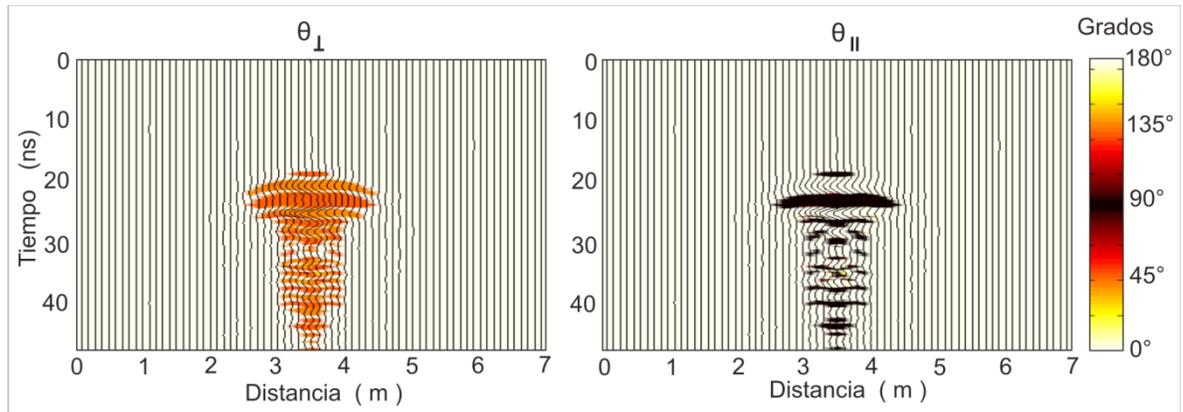
En la Figura 26 presentamos las secciones de los invariantes, cabe mencionar que antes de calcular los invariantes hemos eliminado la onda directa restando una traza lejana al efecto de la anomalía, como se hizo en el ejemplo anterior. Los invariantes producen imágenes mejoradas al combinar la información de los cuatro elementos de la matriz de dispersión. Comparando la secciones de los invariantes podemos decir que tanto la traza como la norma definen mejor la anomalía mientras que el determinante colapsa un poco la información.



**Figura 26.-** Secciones con el cálculo de los diferentes invariantes: traza (S), determinante (S) y norma de Frobenius (S).

Por último mostramos en la Figura 27 los ángulos calculados con nuestras formulas  $\theta_{\parallel}$  y  $\theta_{\perp}$ . En este caso los ángulos se calculan solamente para amplitudes que cumplen con  $\|\mathbf{S}\|_F > 0.4$ . Las líneas continuas en el fondo de la figura son radagramas obtenidos con la traza de  $\mathbf{S}$ . Puede observarse en la figura que la magnitud del ángulo se mantiene a lo largo de la hipérbola dando una estimación muy consistente. La estimación del ángulo  $\theta_{\parallel}$  es cercano a  $90^{\circ}$ . Nosotros esperábamos como resultado un ángulo cercano a  $0^{\circ}$  considerando que el perfil se alinea con el eje del tanque, pero sabemos que nuestra fórmula tiene una ambigüedad de  $\pm 90^{\circ}$  con lo cual podemos dar por correcta la estimación. Por otra

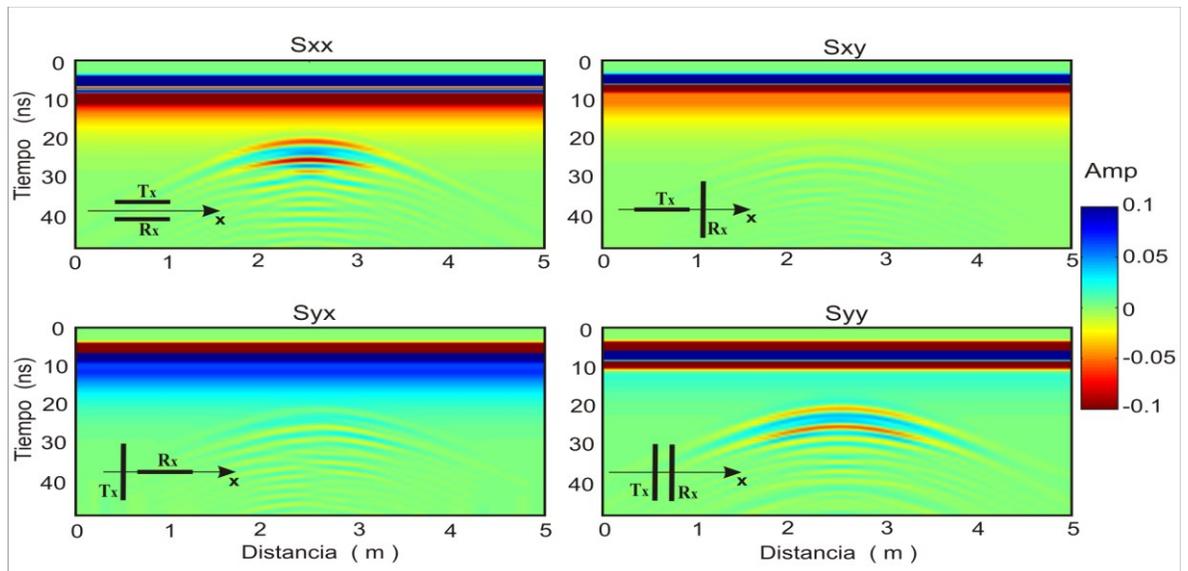
parte,  $\theta_{\perp}$  es aproximadamente  $45^{\circ}$  y  $135^{\circ}$ , esto es,  $45^{\circ}$  de diferencia con  $\theta_{\parallel}$ . Ambos ángulos muestran un cambio de  $90^{\circ}$  cuando la polaridad de la onda cambia con el tiempo.



**Figura 27.-** Secciones con la estimación del ángulo, obtenido maximizando las componentes cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$ , respectivamente, mostrándose en escala de colores. En el fondo se muestra la traza (S) de la matriz de dispersión.

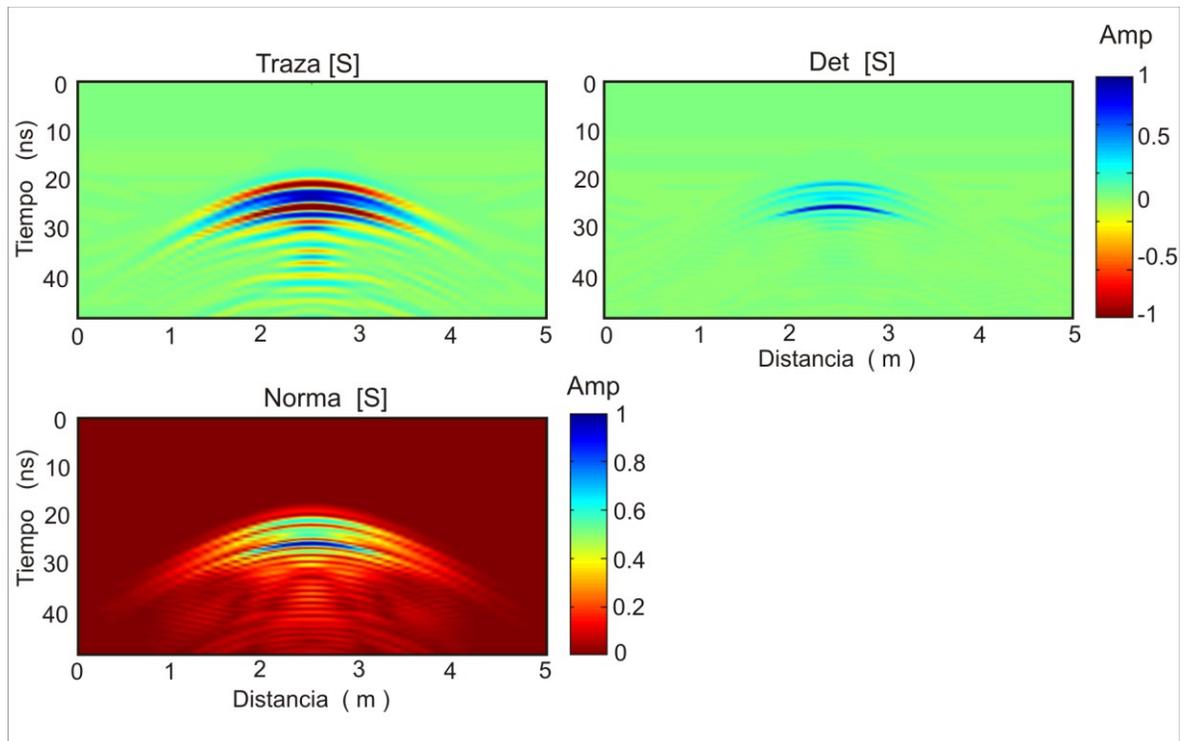
### Perfil transversal

El perfil transversal al tanque tiene una longitud de 5 m, las secciones generadas se muestran en la Figura 28. Al igual que en el caso anterior se observa que en los datos  $S_{xx}$  y  $S_{yy}$  aparece una anomalía fuerte a los 20 ns y a tiempos mayores aparecen reflexiones múltiples. En cambio, la magnitud en las secciones con polarizaciones cruzadas  $S_{xy}$  y  $S_{yx}$  se observan muy atenuadas. Al contrario del caso anterior, al comparar  $S_{xx}$  con  $S_{yy}$  vemos que la anomalía obtenida en  $S_{xx}$  es más fuerte que la obtenida con  $S_{yy}$ , lo cual también está de acuerdo con la teoría que predice que un cilindro de alta impedancia dieléctrica será mejor detectado por antenas orientadas perpendiculares al eje largo del objetivo.



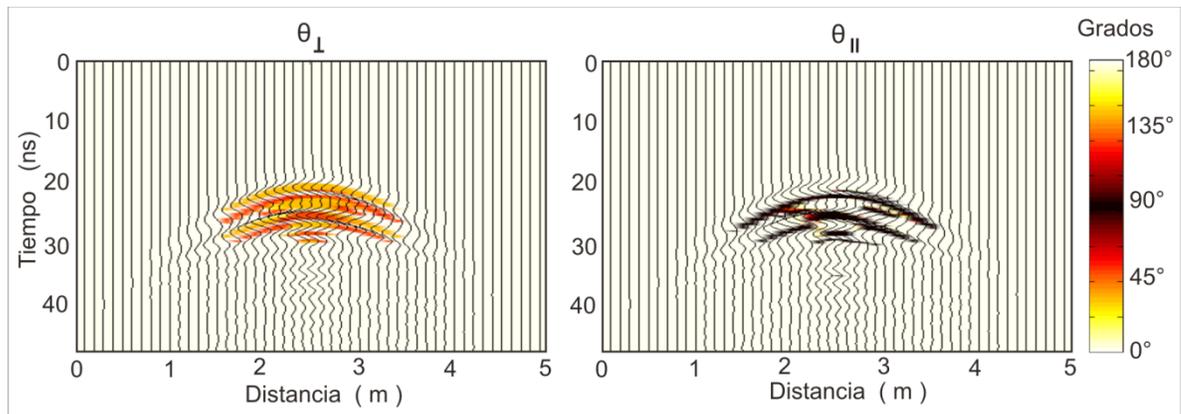
**Figura 28.- Secciones transversales al tanque con cuatro diferentes configuraciones de antenas (elementos de la matriz de dispersión).**

En la Figura 29 presentamos las secciones correspondientes a los invariantes. Podemos observar resultados similares a los del perfil longitudinal, la traza y la norma producen una mejor anomalía y el determinante colapsa la información.



**Figura 29.- Secciones con el cálculo de los diferentes invariantes: traza (S), determinante (S) y norma de Frobenius (S).**

En la Figura 30 mostramos las estimaciones de los ángulos  $\theta_{\parallel}$  y  $\theta_{\perp}$  calculados con nuestras fórmulas. Se muestran los ángulos calculados solo para  $\|S\|_F > 0.4$ , las líneas continuas en el fondo de la figura son radagramas obtenidos con la traza de S. Aunque la magnitud del ángulo no se mantiene tan uniforme como en el perfil longitudinal, la estimación es muy consistente. Como se esperaba,  $\theta_{\parallel}$  es cercano a  $90^\circ$ , esto es el ángulo entre el eje del tanque y nuestro perfil. El ángulo  $\theta_{\perp}$  es aproximadamente  $45^\circ$  y  $135^\circ$ , esto es,  $45^\circ$  de diferencia con  $\theta_{\parallel}$ . Ambos ángulos muestran un cambio de  $90^\circ$  cuando la polaridad de la onda cambia con el tiempo.



**Figura 30.-** Secciones con la estimación del ángulo, obtenido maximizando las componentes cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$ , respectivamente, mostrándose en escala de colores. En el fondo se muestra la traza (S) de la matriz de dispersión.

Como se puede observar en los ejemplos simulados (tanque y cilindro), los invariantes calculados muestran el mismo comportamiento en ambos casos, el determinante es el que colapsa mayormente la reflexión de interés, sucede lo contrario con la traza de la matriz, la cual se refuerza, ya que es la suma de las componentes principales ( $S_{xx}$  y  $S_{yy}$ ) y por último en el caso de la norma, al igual que la traza, se presenta un reforzamiento de la reflexión, pero difiere en que solo consta de valores positivos. En cuanto al ángulo calculado observamos que se obtiene de forma correcta, es decir en ambos casos obtuvimos el valor esperado. Por último el uso de la norma de Frobenius como filtro muestra muy buenos resultados, ya que nos ayuda a no mostrar los ángulos calculados con amplitudes pequeñas, las cuales solo representan ruido y no reflexiones de interés.

## Capítulo IV

---

### Experimentos con datos reales

---

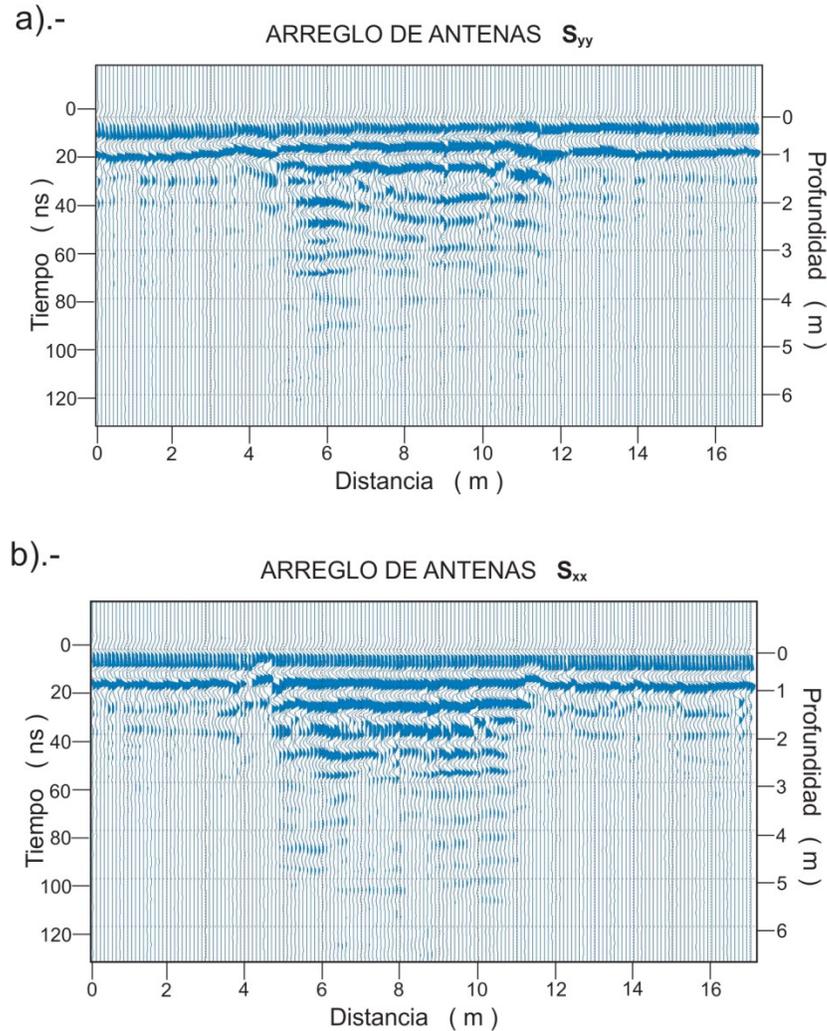
#### IV.1 Prueba preliminar

El equipo con el que contamos al inicio de este trabajo es un PulseEkko IV de Sensors and Software Inc., adquirido en 1994. El sistema de adquisición de datos se actualizó adquiriendo el DVL (digital video logger) que ofrece la misma compañía con los equipos más modernos, se contaba con dos juego de antenas, uno de 100 MHz (longitud de antena de 1 m) y otro de 50 MHz (longitud de antena de 2 m), además se adquirió un juego de antenas de 200 MHz (longitud de antena 0.5 m). Mientras que el transmisor y el receptor son los originales del Ekko IV.

La primera prueba del equipo se realizó en el pasillo de la planta baja del edificio de Ciencias de la Tierra de CICESE. Se escogió este lugar ya que bajo una sección limitada del pasillo se encuentra un sótano el cual es usado como laboratorio de sismología. La intención era detectar el contraste de propiedades electromagnéticas entre el hueco correspondiente al sótano y el resto del basamento sólido del edificio. Se realizaron dos perfiles de 17 m de longitud, con antenas de 200 MHz y configuración de antenas de tipo co-pol orientadas en forma paralela y perpendicular al perfil ( $S_{xx}$  y  $S_{yy}$ ).

En la Figura 31 se muestran las secciones  $S_{yy}$  (Figura 31a) y  $S_{xx}$  (Figura 31b), podemos observar que con ambas configuraciones de antenas se delimita el

huevo del sótano el cual tiene una longitud de  $\sim 6.5$  m y se encuentra entre las distancias aproximadas a 5 y 11 m respecto al perfil. Puede observarse que con el arreglo  $S_{xx}$  (Figura 31b) se observa una mejor definición de las paredes laterales del sótano, a 5 y 11 m.

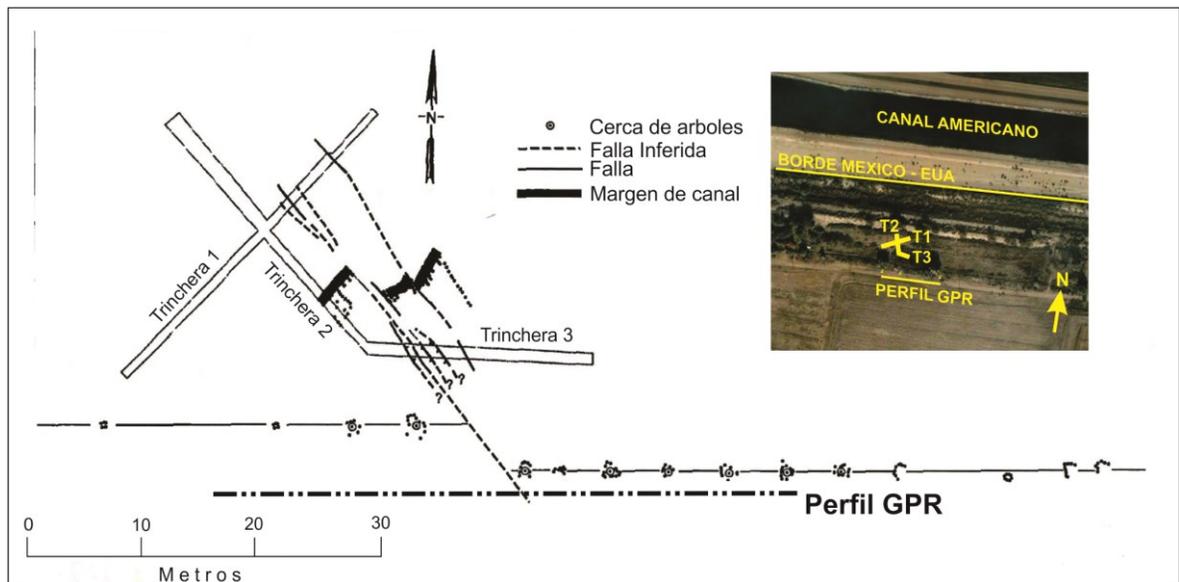


**Figura 31.-** Sección de datos tomados en la planta baja de un edificio con el fin de delimitar el sótano, se tomaron dos perfiles uno (a) con arreglo  $S_{yy}$ , es decir antenas orientadas perpendicularmente al perfil, y otro (b) con arreglo  $S_{xx}$  antenas orientadas paralelamente al perfil. Se usaron antenas de 200 MHz.

La escala de profundidad está determinada con una velocidad de 0.10 m/ns la cual correspondería a un suelo arenoso seco, por lo cual la escala de profundidad solo valdría para la parte externa del laboratorio. Por otro lado si se quisiera ubicar el piso del laboratorio se tendría que calcular con la velocidad del aire. Por otro lado en la sección se pueden apreciar muchos reflectores en el área del laboratorio, esto lo atribuimos a reflexiones múltiples entre las paredes, piso y objetos que se encuentran en el laboratorio.

## **IV.2 Sección sobre una zona de falla activa**

Se tomaron datos de georadar sobre una zona de desplazamiento de la falla Imperial en el Valle de Mexicali (Lat 32° 40' 27.45" N y Long 115° 21' 24.40" O), la ubicación fue tomada del artículo de Thomas y Rockwell (1996). Estos autores realizaron tres trincheras para estudiar la paleosismicidad de la falla. En la Figura 32 se muestra un esquema de la ubicación de las trincheras así como de la falla localizada y de fallas inferidas. Al momento del levantamiento de georadar no se pudo encontrar la localización exacta de las trincheras, las cuales se encontraban cubiertas de suelo, hierba y árboles, que crecieron con el paso del tiempo. Sin embargo se encontró rastro del desplazamiento de la cerca de árboles, el cual también es mostrado en la Figura 32 y en base al cual fue ubicado el perfil de GPR.

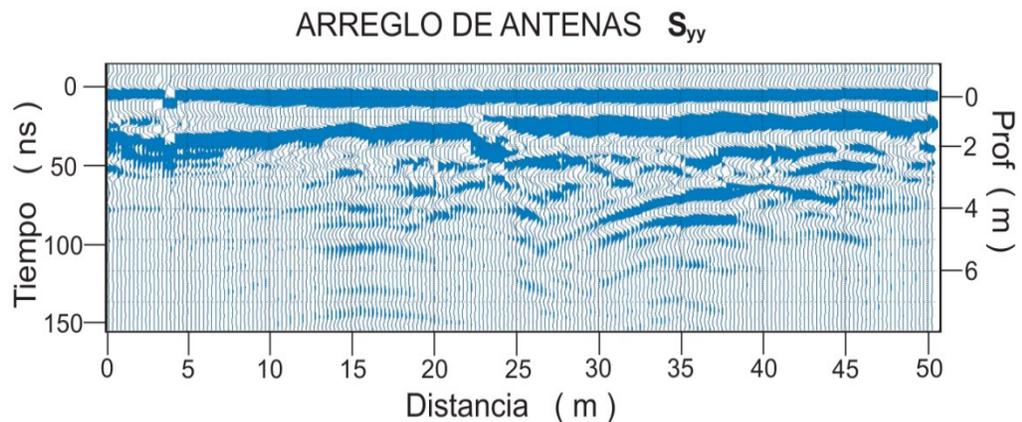


**Figura 32.-** De lado izquierdo se muestra la ubicación de las trincheras con respecto a una cerca de árboles, la cual fue desplazada 5 m en el temblor de 1940, y la ubicación del perfil de GPR. Sobre las trincheras se muestran con línea punteada y continua las fallas inferidas y las fallas encontradas, respectivamente. Del lado derecho se muestra el mismo esquema pero respecto al borde internacional México-EUA y el canal americano. Modificado de Thomas and Rockwell (1996, 5994).

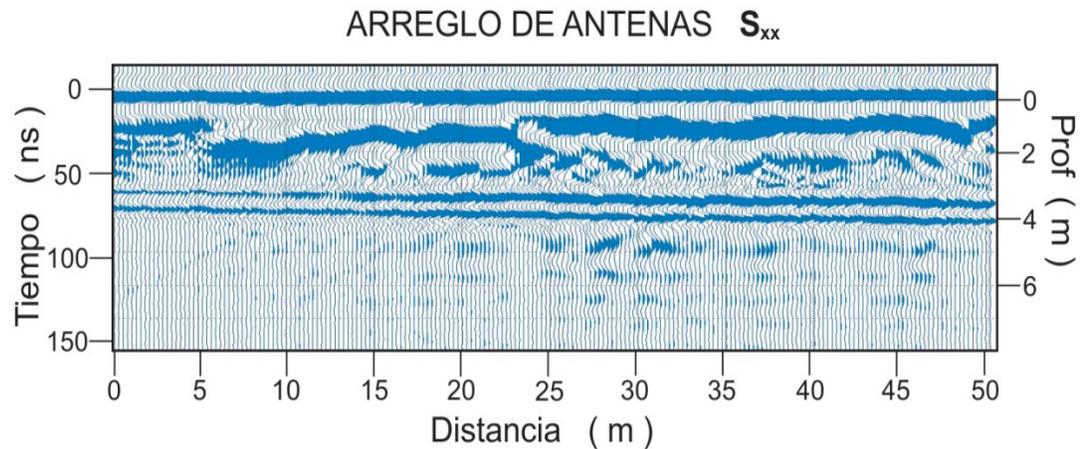
El interés en esta zona fue el probar el equipo sobre una falla geológica, con el fin de observar qué alcance podemos obtener con el equipo y con multi-configuraciones de antenas. Para esto levantamos un perfil de 50 m de longitud utilizando dos configuraciones  $S_{xx}$  y  $S_{yy}$  y una frecuencia de 100 MHz.

Con ambas configuraciones podemos observar un reflector continuo que aparece a los 30 ns. Entre los 23 y 25 m de distancia el reflector muestra una interrupción, la cual asociamos a la presencia de una falla. En el perfil correspondiente al arreglo  $S_{yy}$  (Figura 33) observamos dos hipérbolas asociadas a difracciones puntuales, las cuales podrían estar asociadas a efectos laterales, posiblemente raíces de árboles. En cambio con la configuración  $S_{xx}$  (Figura 34) no se observan las hipérbolas pero aparece un reflector casi horizontal constante a los 70 ns. Inicialmente pensamos que podría deberse al nivel freático pero esto fue

descartado debido a que se observa con una sola configuración ( $S_{xx}$ ). Posteriormente pensamos en un efecto lateral que podrían ser el cerco metálico que divide la línea internacional (que corre paralelo al perfil a 50 m de distancia), o a un canal de riego que se encuentra paralelo al perfil GPR separado por aproximadamente 130 m, pero ambas posibilidades fueron descartadas debido a que tanto el cerco como el canal se encuentran muy lejanos (30 y 50 m) y por lo tanto el reflector debería de aparecer a tiempos más tardíos. Por otro lado Thomas y Rockwell (1996) muestran el margen de un canal enterrado aproximadamente a 20 m de nuestro perfil, como se muestra en el esquema de la Figura 32, posiblemente este canal es la causa del reflector horizontal que aparece a los 70 ns.



**Figura 33.- Perfil de datos tomado en dirección perpendicular a la rumbo de la falla, con arreglo de antenas  $S_{yy}$  y antenas de 100 MHz**



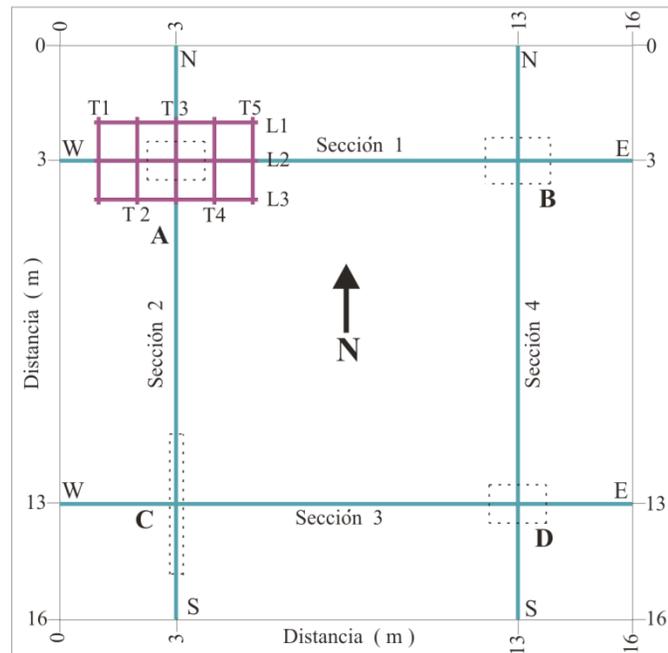
**Figura 34.- Perfil de datos tomado en dirección perpendicular a la rumbo de la falla, con arreglo de antenas  $S_{xx}$  y antenas de 100 MHz.**

Con este ejercicio podemos decir que el georadar sí es capaz de detectar fallas, sin embargo en general las fallas detectadas con georadar están en función del tamaño de éstas y la frecuencia de las antenas utilizadas. Por otro lado observamos que el uso de dos configuraciones de antenas diferentes, como en este caso, nos ayuda en el momento de la interpretación de las imágenes.

### **IV.3 Experimentos en un sitio de prueba**

Con objeto de realizar un experimento controlado adquiriendo datos de un sitio en donde los objetivos se encontraran definidos y ubicados a-priori, decidimos hacer pruebas en el campo de pruebas de la Facultad de Ciencias de la Tierra de la Universidad Autónoma de Nuevo León en Linares, N.L., al cual tuvimos acceso gracias al apoyo de los Drs. Sóstenes Méndes y Daniel Garza, investigadores de esa institución.

Este campo tiene un área de 16 x 16 m y se tienen enterrados 4 objetos como se muestra en esquema de la Figura 35. El objeto A corresponde a un tanque de plástico vacío, enterrado a 1 m de profundidad, con diámetro de 0.6 m y longitud de 1 m. El objeto B es un tanque metálico relleno de chatarra de hierro. El objeto C es una lámina acanalada de metal de 1.7 m de largo x 1 m de ancho, enterrada con cierta inclinación, a una profundidad de 1 m. Y el objeto D es un tanque de plástico de las mismas dimensiones del objeto A pero relleno de agua y espuma de polietileno (foam).



**Figura 35.- El diagrama muestra una vista en planta del sitio de pruebas. Las líneas azules corresponden a secciones tomadas con los arreglos Sxx y Syy. Las líneas rojas el mallado de secciones sobre el tanque de plástico. Los objetos enterrados se muestran con líneas punteadas (los objetos A, B, C y D son descritos en el texto).**

### Perfiles o secciones

Se realizaron cuatro secciones marcadas con líneas azules en la Figura 35. Cada una de estas secciones se levantó con las dos configuraciones  $S_{xx}$  y  $S_{yy}$ . Para este levantamiento se utilizó un georadar de Sensor & Software, con antenas de 200 MHz, separadas 0.5 m entre sí y observaciones cada 0.1 m.

Las secciones fueron procesadas con el software Ekkoview deluxe y el procesamiento aplicado fue el siguiente: un filtro pasa altas (dewow), corrección del tiempo cero y ganancia constante con un factor de 20. Cabe mencionar que la escala de tiempo corresponden a tiempos dobles es decir el tiempo (ns) que tarda la onda en viajar de la antena transmisora al objetivo y regresar a la superficie donde es captada por la antena receptora. Por otro lado la velocidad del subsuelo que se consideró para la escala de profundidad es de 0.09 m/ns. Esto quiere decir que: si el objetivo se encuentra a 1 m. de profundidad, aplicando la fórmula: tiempo es igual a la razón de distancia entre velocidad ( $1\text{m} / 0.09 \text{ m/ns} = 11 \text{ ns}$ ) y considerando tiempos dobles como se explicó anteriormente la anomalía la esperaríamos a los 22 ns, en el caso de que el objetivo fuera un tanque vacío y se quisiera conocer el tiempo hasta la parte inferior del mismo, se tendría que sumar a los 22 ns, el tiempo que se requiere para que la onda viaje de la parte superior a la inferior del tanque pero considerando la velocidad de la luz, suponiendo que la distancia entre la parte superior e inferior del tanque es 1m, siguiendo la misma fórmula de tiempo tendríamos ( $1\text{m} / 0.3\text{ns/m} = 3.3 \text{ ns}$ ), de igual forma considerando tiempo doble serian 6.6 ns, más los 22ns tendríamos que la anomalía que corresponde a la parte inferior aparecería a los 28.6 ns. En la Figura 36 y en la Figura 37 se muestran las secciones obtenidas a lo largo de las cuatro líneas.

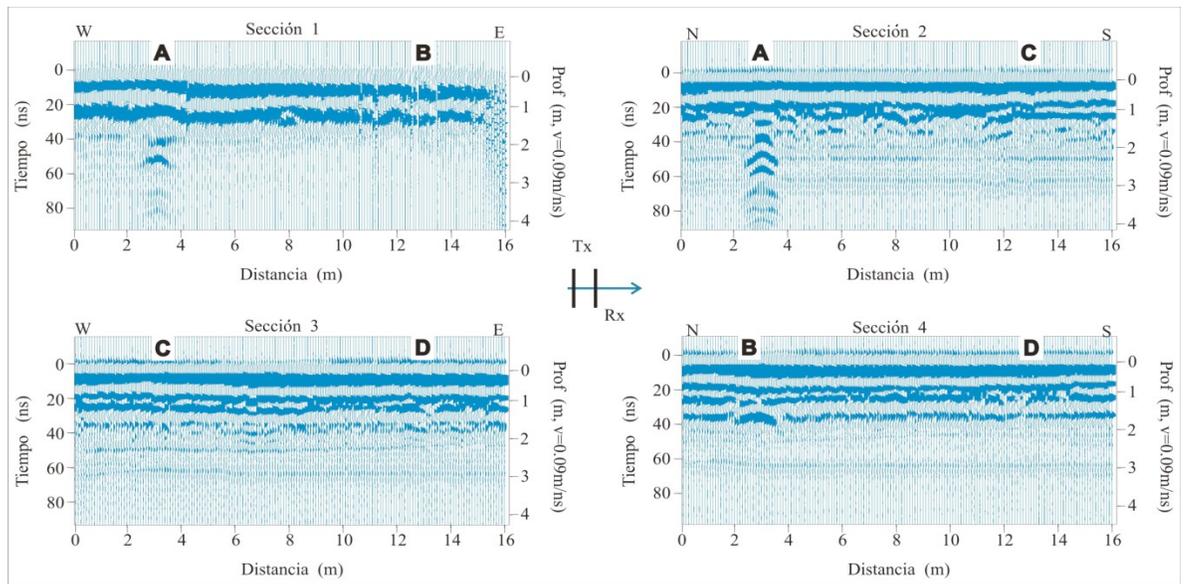
El objeto A (tanque de plástico vacío) que se muestra en las secciones 1 y 2 de las Figuras 36 y 37 produce una respuesta fuerte (20 ns) seguida por reflexiones múltiples (a partir de los 40 ns), con ambas configuraciones, tanto en la sección 1

como en la sección 2. Aunque se muestra un efecto más fuerte en la sección 2 cuando el perfil cruza el tanque de manera transversal.

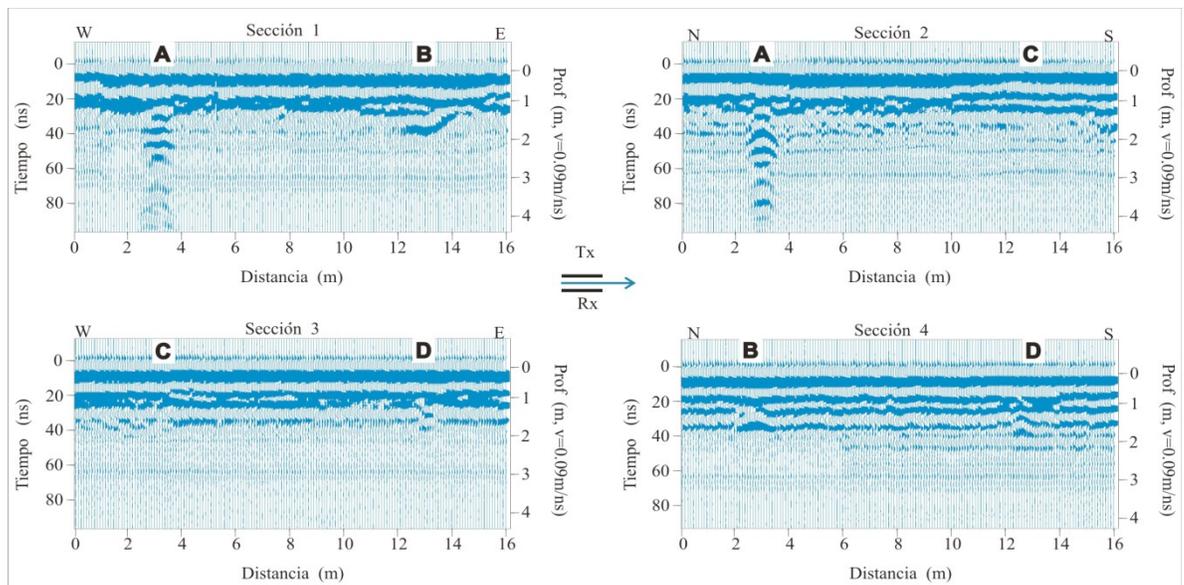
El objeto B (tanque de metal) produce una mejor respuesta en las secciones 1 y 4 con la configuración  $S_{xx}$  (Figura 37). En contraste con la configuración  $S_{yy}$  (Figura 36) la respuesta se observa solo en la sección 4, es decir cuando la orientación de la antena coincide con el eje largo del barril.

El objeto C (lámina metálica) no produce anomalía con polarización paralela al rumbo de la placa (Figura 36 sección 3 y Figura 37 sección 2). Cuando la polarización es perpendicular a la placa se produce una pequeña anomalía (Figura 36 sección 2 y Figura 37 sección 3), lo cual es contrario a lo esperado, ya que se esperaría un mejor acoplamiento entre el campo de onda y el objetivo cuando el campo eléctrico está polarizado paralelo a la lámina. Una posible explicación puede ser una fuerte depolarización debido a la superficie corrugada de la lámina.

El objeto D (tanque de plástico relleno de agua y foam) no produce respuesta cuando el campo está polarizado perpendicular al perfil ( $S_{yy}$ ), sin importar la orientación del tanque, como se muestra en la sección 3 y 4 de la Figura 36. Por otra parte, cuando la polarización es paralela al perfil ( $S_{xx}$ ) se produce una respuesta débil, independientemente de la orientación del tanque (Figura 37, secciones 3 y 4). Estos resultados contrastan con los obtenidos con el tanque de plástico vacío. Esto puede ser atribuido a las diferentes propiedades electromagnéticas del material de relleno, el cual es aire en el objeto A y en el objeto D es agua y foam.



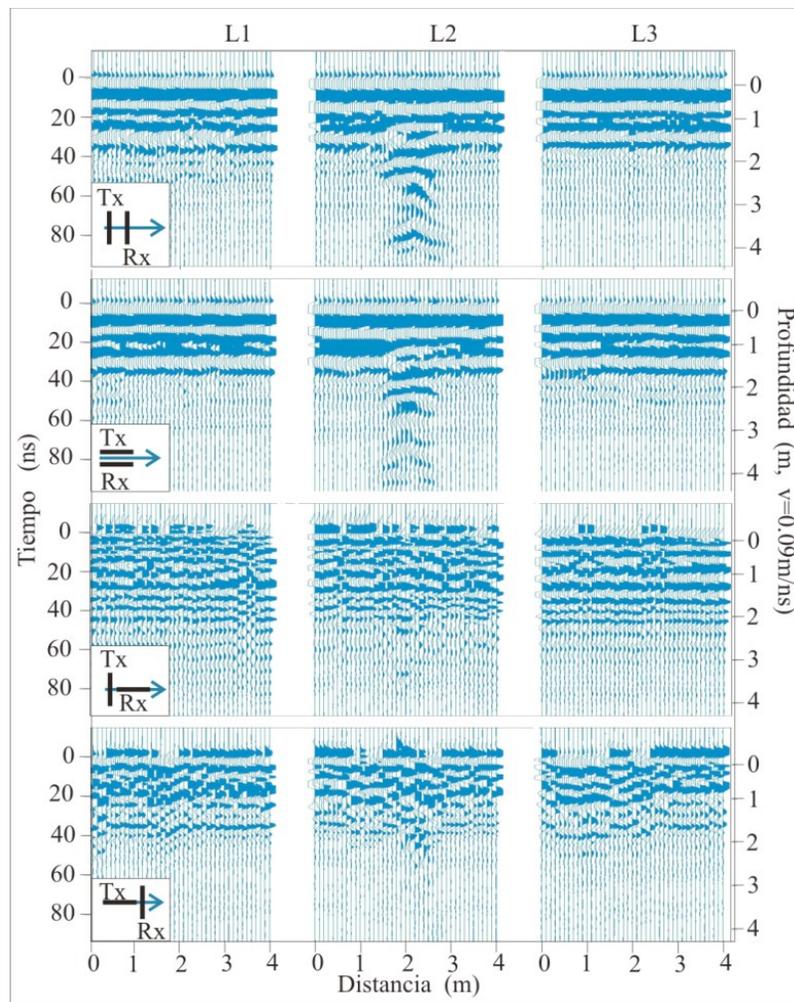
**Figura 36.-** Secciones usando arreglo Syy de antenas de 200 MHz perpendiculares al perfil. La posición de los objetos es mostrada con letras negras mayúsculas. A es un barril de plástico vacío, B barril metálico relleno de metales, C laminas metálicas inclinadas, D barril de plástico relleno de agua y foam. La escala de profundidad fue estimada con una velocidad 0.09 m/ns.



**Figura 37.-** Secciones usando arreglo Sxx de antenas de 200 MHz paralelas al perfil. La posición de los objetos es mostrada con letras negras mayúsculas. A es un barril de plástico vacío, B barril metálico relleno de metales, C laminas metálicas inclinadas, D barril de plástico relleno de agua y foam. La profundidad fue estimada con una velocidad 0.09 m/ns.

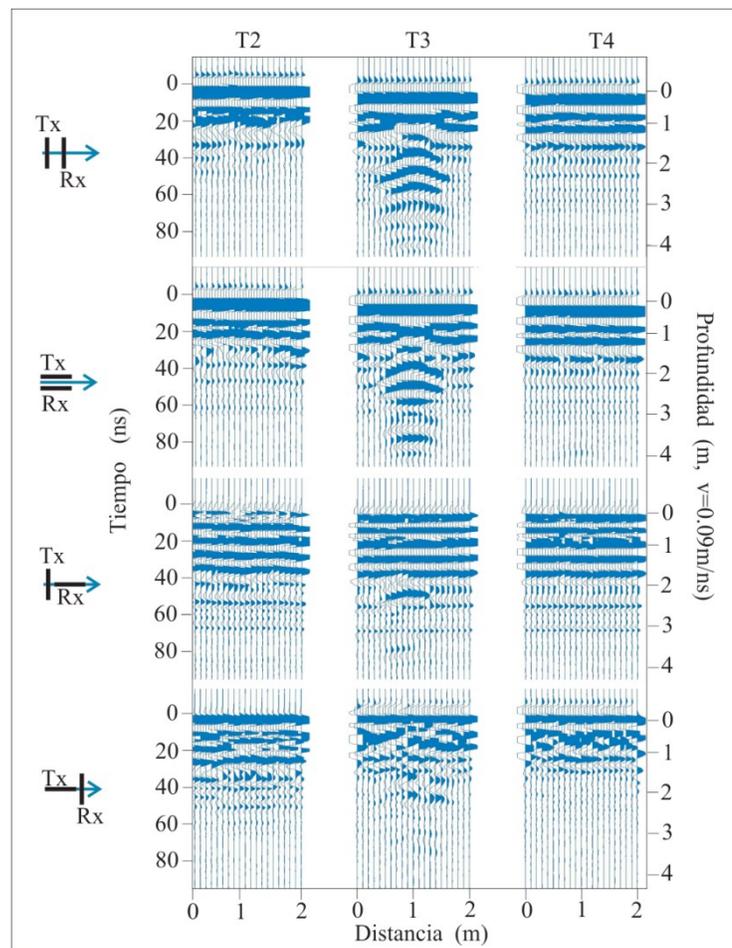
## Mallado

Se realizó un mallado de observaciones sobre el tanque de plástico vacío (objeto A). Como se muestra en la Figura 35, la malla cubre un área de 2 x 4 m, se compone de 8 perfiles de los cuales 5 perfiles son transversales al tanque y los otros tres son longitudinales, separados 1 m de distancia entre uno y otro. Se hicieron observaciones con las cuatro configuraciones  $S_{xx}$ ,  $S_{xy}$ ,  $S_{yx}$  y  $S_{yy}$ . La Figura 38 muestra las tres secciones longitudinales L1, L2 y L3, mientras que la Figura 39 muestra las secciones transversales T2, T3 y T4.



**Figura 38.- Secciones longitudinales L1, L2 y L3 sobre el tanque de plástico vacío. Tomadas con cuatro diferentes configuraciones y antenas de 200 MHz.**

Como podemos observar en el esquema de la Figura 35, las secciones L1 y L3 no pasan por encima del tanque y no muestran su efecto, en cambio en la sección L2, la cual cruza a lo largo del tanque, es visible la reflexión ocasionada por éste así como algunas reflexiones múltiples. Las configuraciones co-pol producen una mejor respuesta que las cross-pol.



**Figura 39.- Secciones transversales T2, T3 y T4 sobre el tanque de plástico vacío. Tomadas con cuatro diferentes configuraciones y antenas de 200 MHz.**

En las secciones transversales mostradas en la Figura 39, se observa que en las secciones T2 y T4, las cuales pasan por un lado del tanque, no muestran respuesta, excepto por la sección T2 con la configuración cross-pol que se muestra en la esquina inferior izquierda, en la cual se observa cierto efecto lateral, el cual no se observa en la sección T4. Por otro lado en la sección T3, que cruza al tanque transversalmente por la mitad se observa una fuerte reflexión así como las múltiples en ambas configuraciones co-pol, mientras que las cross-pol muestran algo de respuesta, sin embargo no tan clara como las co-pol. La imagen para el arreglo cross-pol con el transmisor perpendicular al perfil muestra una múltiple a 50 ns, la cual también se alcanza a observar aunque muy débil en la configuración cross-pol con transmisor paralelo al perfil.

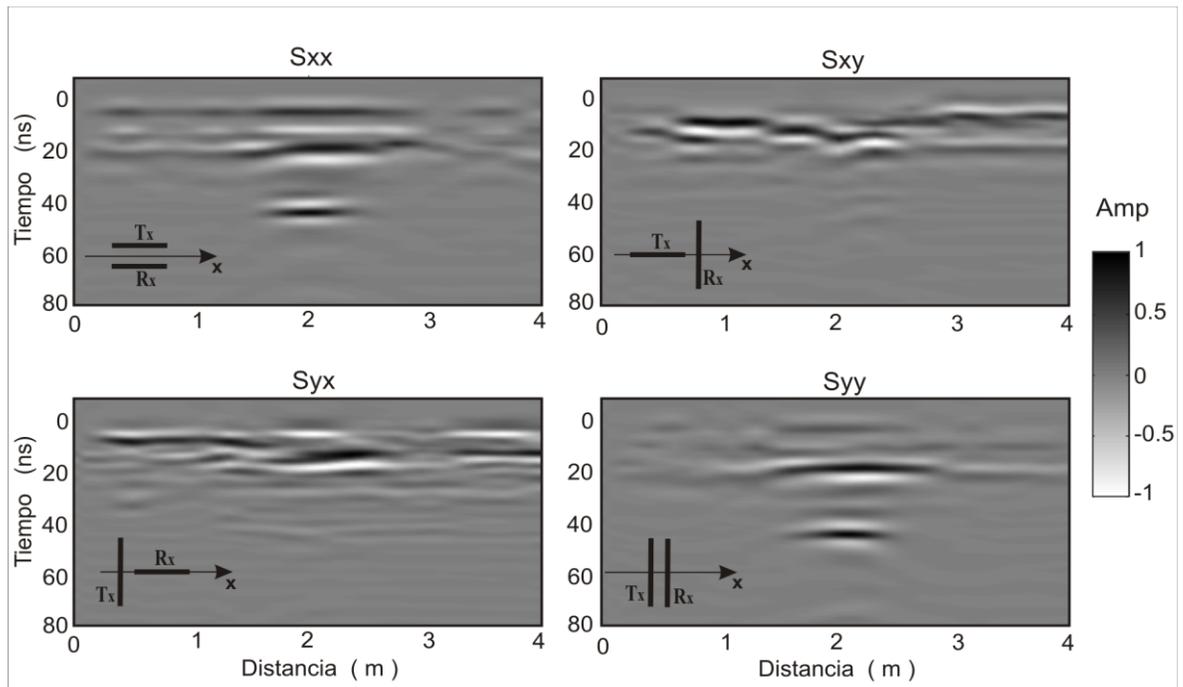
#### **IV.4 Invariantes y cálculo de la orientación del tanque vacío**

Los datos para este experimento corresponden a las secciones tomadas sobre el objeto A localizado en el esquema de la Figura 35. Como ya se mencionó se trata de un tanque de plástico vacío, a una profundidad de 1 m, con un diámetro de 60 cm y longitud de 1 m. Se adquirieron datos con las cuatro configuraciones  $S_{xx}$ ,  $S_{xy}$ ,  $S_{yx}$  y  $S_{yy}$  y antenas de 200 MHz, a lo largo de dos secciones, una longitudinal al tanque y la otra transversal.

##### **Perfil longitudinal (L2)**

Las secciones tomadas con las cuatro diferentes configuraciones a lo largo del perfil longitudinal se muestran en la Figura 40. A estos datos le aplicamos un filtro pasa altas (dewow), luego la corrección del tiempo cero en cada una de las secciones y en conjunto, es decir que las cuatro tuvieran el mismo tiempo cero. Para eliminar la onda directa se aplicó el filtro f-k y también se restó una traza promedio. Se puede apreciar que las configuraciones co-pol detectan el tanque

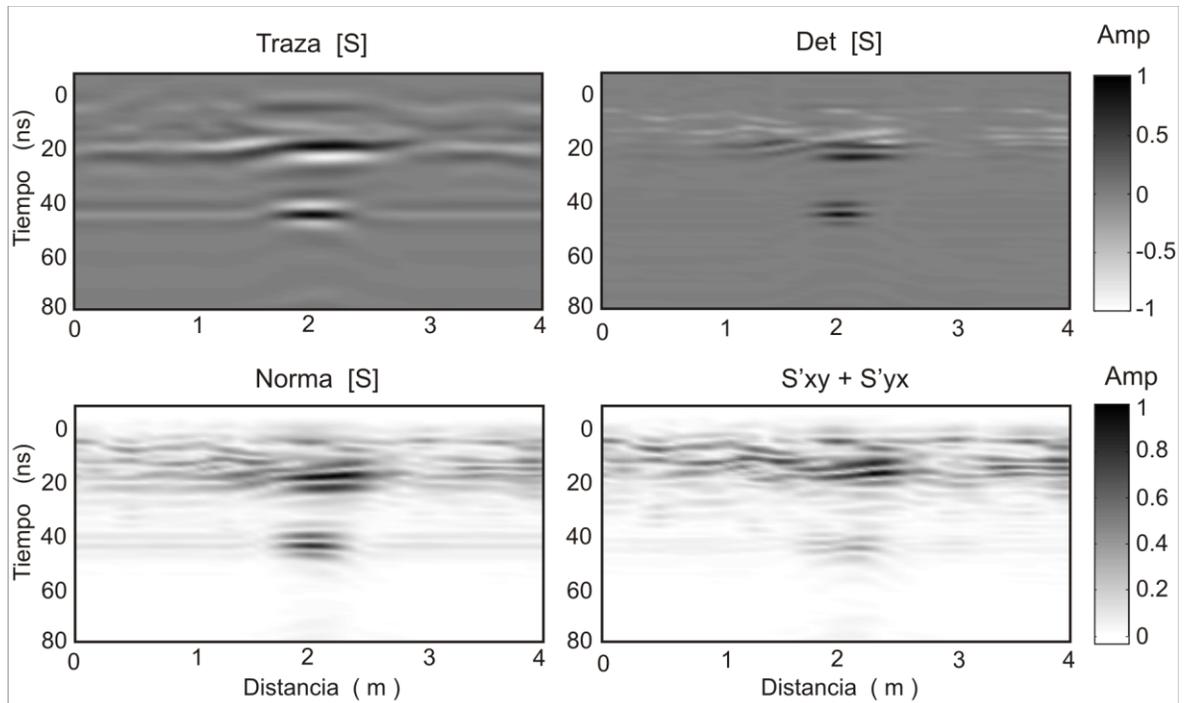
mostrando un reflector a 20 ns y una múltiple a 40 ns, mientras que las configuraciones cross-pol muestran ruido encimado al reflector, el cual además tiene poca intensidad.



**Figura 40.- Secciones tomadas con cuatro configuraciones de antenas que forman la matriz de dispersión. La amplitud de las componentes se muestran normalizadas solo por fines de graficado.**

En la Figura 41 se muestran los tres invariantes calculados con los datos de la matriz de dispersión. La traza combina la información de las componentes co-pol produciendo una mejor imagen del objetivo. Con el determinante obtenemos una imagen no tan buena como con la traza. La mejor imagen se obtuvo con la norma de Frobenius, la cual combina las cuatro componentes de la matriz, el ruido es reducido y la señal es aumentada, esto como resultado de utilizar la raíz cuadrada de las amplitudes, además por la misma razón la imagen contiene solamente amplitudes positivas las cuales aumentan el contraste entre la respuesta del objetivo y el ruido. La Figura 41 contiene una cuarta sección que corresponde a la

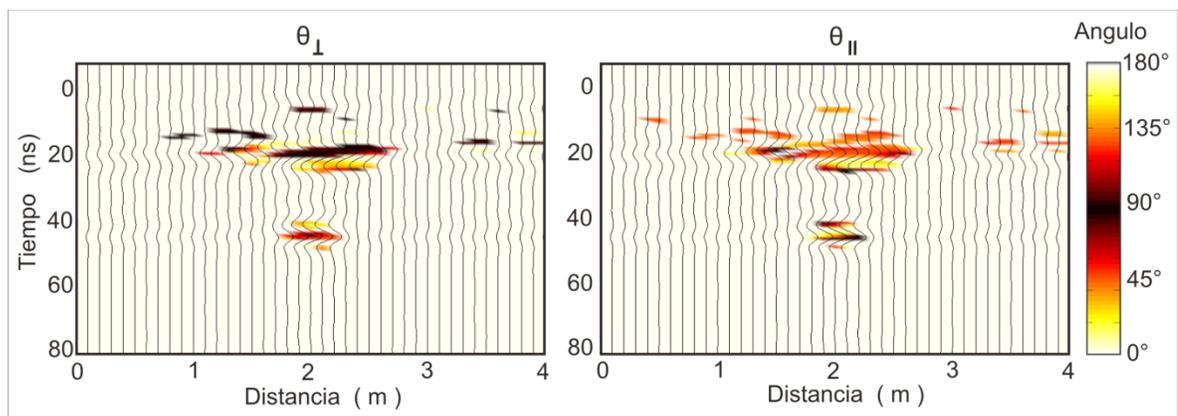
suma de los elementos cruzados de la matriz  $S'_{xy}$ ,  $S'_{yx}$  una vez rotados al ángulo que los maximiza. En esta imagen se puede apreciar más claramente el reflector que produce el objetivo y se observan reflexiones múltiples las cuales no se observaban en los datos originales  $S_{xy}$  y  $S_{yx}$ .



**Figura 41.- Secciones de los tres invariantes (traza (S), determinante (S) , norma de Frobenius (S) ) y de la suma de la antidiagonal maximizada  $S'_{xy}+S'_{yx}$ . Las amplitudes se muestran normalizadas solo por fines de graficado.**

Se calcularon los ángulos con las ecuaciones 43 y 44, utilizando la norma de Frobenius para elegir solamente amplitudes que cumplen la condición  $\|S\|_F > 0.4$ , con  $\|S\|_F$  normalizada entre 0 y 1. La Figura 42 muestra los ángulos calculados, en líneas continuas se muestran los radagramas obtenidos con la suma de los elementos co-pol (traza). La estimación del ángulo es muy consistente a lo largo del reflector a 20 ns, así como en las múltiples a 40 ns. Los ángulos obtenidos son

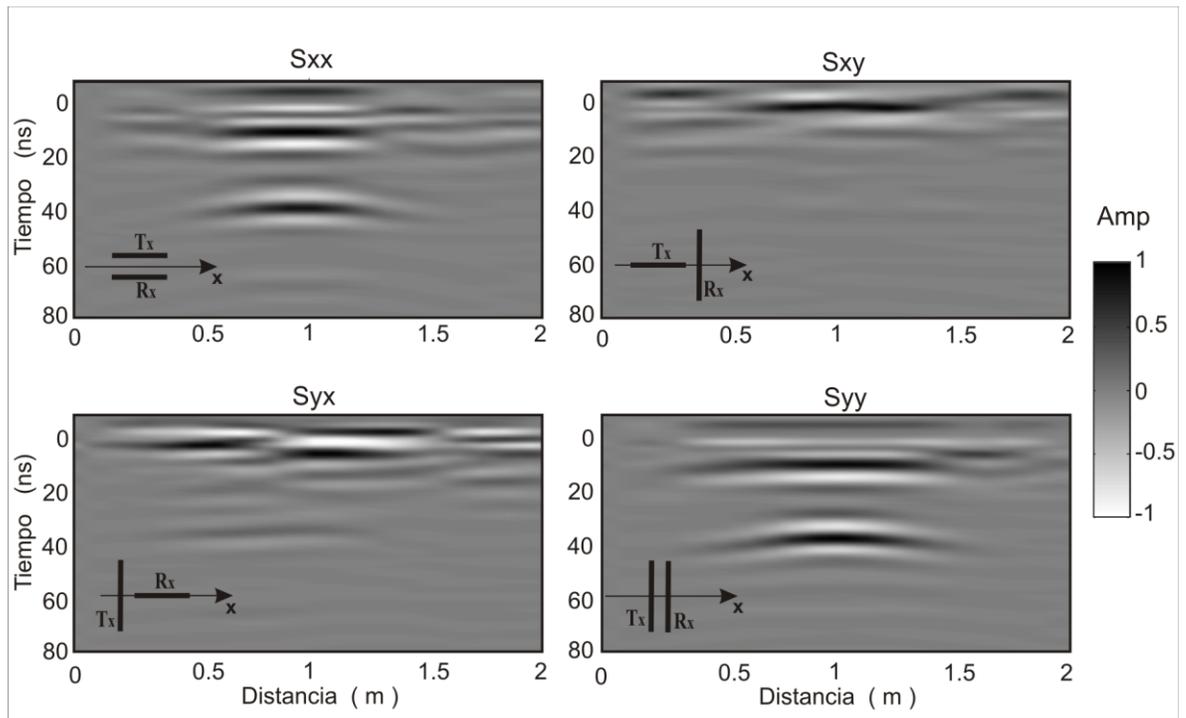
$\theta_{\parallel} \sim 45^\circ$  y  $\theta_{\perp} \sim 90^\circ$ , lo cual es contrario a lo esperado. Sin embargo, si observamos las múltiples a 40 ns tenemos para  $\theta_{\parallel} \sim 90^\circ$  y  $\theta_{\perp} \sim 45^\circ$ , los cuales parecen los ángulos correctos. El error en los ángulos calculados en el reflector a 20 ns se lo podemos atribuir a dos motivos, el primero que el perfil no esté exactamente perpendicular al eje largo del tanque y el segundo a efectos de tridimensionalidad, es decir que debido al tamaño del tanque y la cercanía de éste con la superficie donde se tomaron los datos, no se alcance a apreciar como un objeto alargado.



**Figura 42.-** Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$  de la matriz de dispersión, mostrándose en escala de color. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.

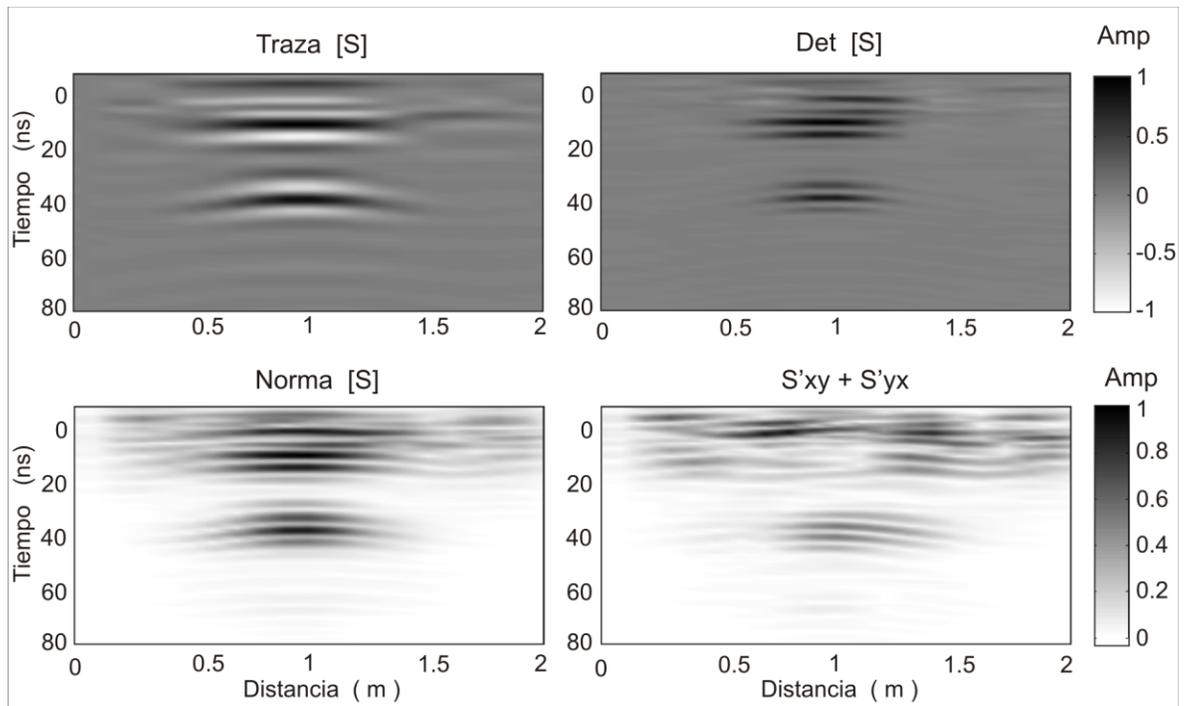
### Perfil transversal (T3)

Las secciones tomadas a lo largo del perfil transversal se muestran en la Figura 43. Estos datos fueron procesados de igual forma que los del perfil longitudinal descrito previamente. Se puede apreciar que las configuraciones co-pol detectaron el tanque mostrando un reflector a 10 ns y una múltiple a 40 ns, mientras que las configuraciones cross-pol muestran ruido encimado al reflector el cual además tiene poca intensidad.



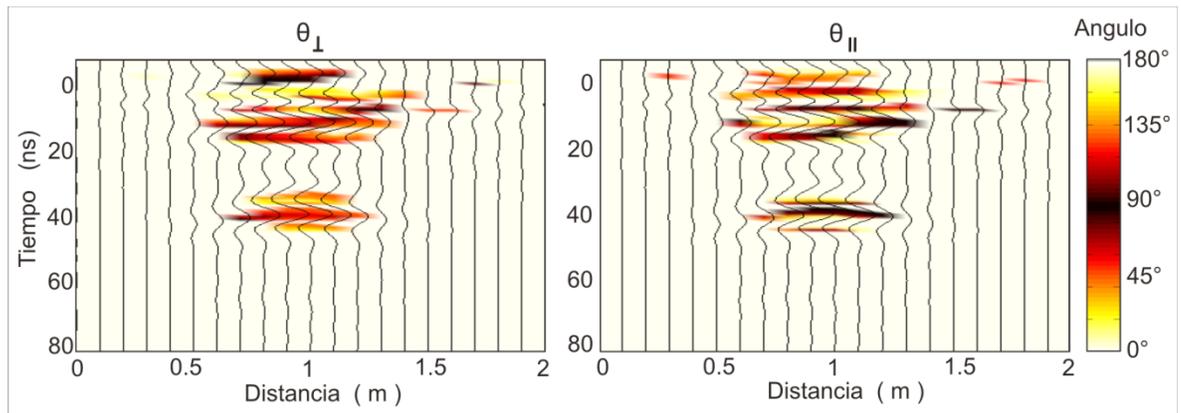
**Figura 43.-** Secciones tomadas con cuatro configuraciones de antenas que forman la matriz de dispersión. Las amplitudes de las componentes se muestran normalizadas solo por fines de graficado.

En la Figura 44 se muestran los tres invariantes calculados con los datos de la matriz de dispersión, la traza sigue produciendo una mejor imagen del objetivo. Con el determinante obtenemos las mismas difracciones pero colapsadas. La mejor imagen se obtuvo con la norma de Frobenius. Por último se muestra la sección que corresponde a la suma de los elementos cruzados de la matriz una vez rotados al ángulo que los maximiza. En esta sección se puede apreciar que el reflector asociado con el objetivo se encuentra atenuado y disperso.



**Figura 44.-** Secciones de los tres invariantes (traza (S), determinante (S) y norma de Frobenius (S)) y de la suma de la antidiagonal maximizada  $S'_{xy}+S'_{yx}$ . Las amplitudes se muestran normalizadas solo por fines de graficado.

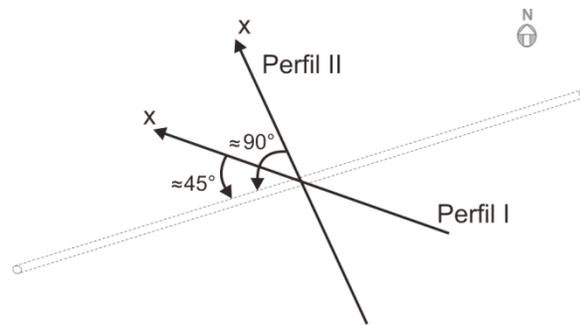
De igual forma que en el caso anterior, se calcularon los ángulos  $\theta_{\parallel}$  y  $\theta_{\perp}$ . En la Figura 45 se muestran dos secciones de ángulos estimados con amplitudes que cumplen con la condición de  $\|S\|_F > 0.4$ , con  $\|S\|_F$  normalizada entre 0 y 1. En el fondo las líneas continuas corresponden a radagramas obtenidos con la traza. La estimación del ángulo es muy consistente a lo largo del reflector a 10 ns y a lo largo del múltiple a 40 ns. El ángulo  $\theta_{\perp}$  que se obtienen es  $\sim 45^\circ$ , la estimación de  $\theta_{\parallel}$  con el reflector primario no es muy estable mientras que cuando se estima con la múltiple resulta más consistentemente  $\theta_{\parallel} \sim 90^\circ$ .



**Figura 45.-** Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$  de la matriz de dispersión, mostrándose en escala de color. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.

## IV.5 Experimento en un acueducto

Los datos de este ejemplo se tomaron en el Valle de Guadalupe en el municipio de Ensenada, Baja California, sobre un acueducto en funcionamiento, el cual es parte de un sistema de pozos conectados para la conducción de agua a la ciudad de Ensenada. El acueducto se encuentra a una profundidad de 1 m bajo la superficie y tiene un diámetro de 45 cm, tubería de PVC y una cubierta metálica. En el punto donde se realizó el experimento la orientación del acueducto se puede inferir con certeza, ya que sigue un camino que conecta la batería de pozos. Se tomaron dos secciones, la primera perpendicular al acueducto con una longitud de 16 m y la segunda haciendo un ángulo de  $45^{\circ}$  con la supuesta dirección del acueducto, como se muestran en el esquema de la Figura 46. En ambas secciones se adquirieron datos de las cuatro componentes con antenas de 200 MHz.

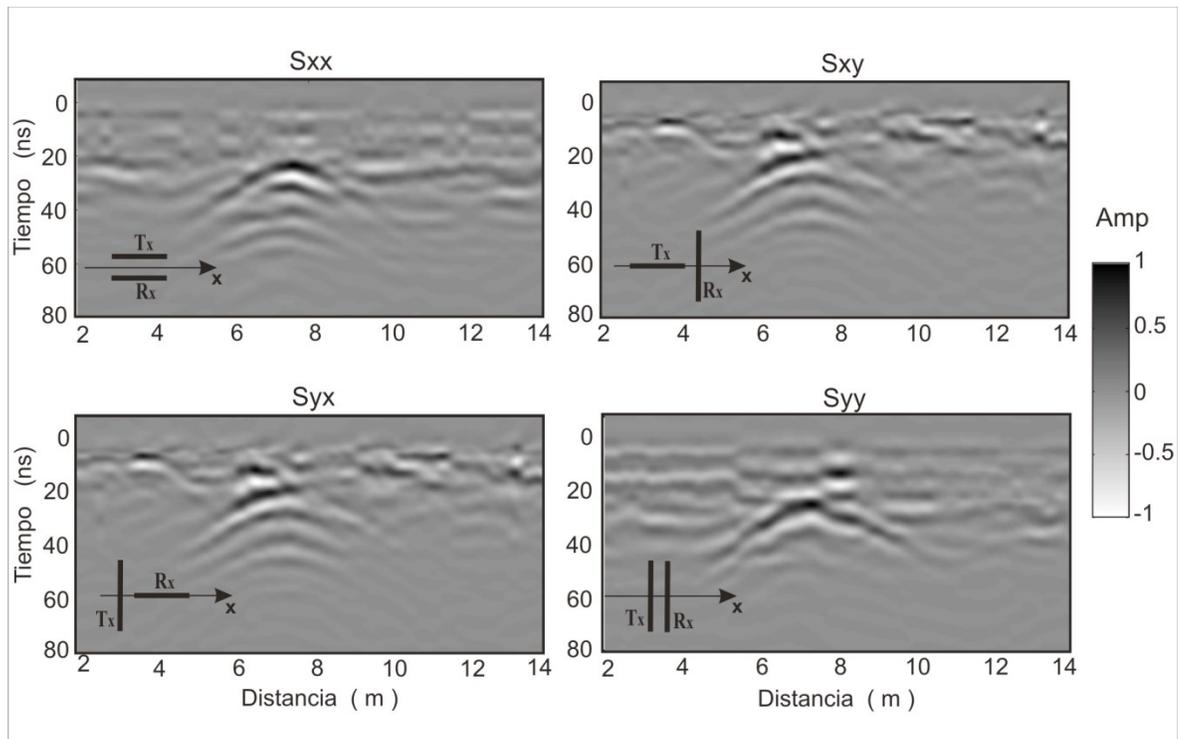


**Figura 46.- Esquema del acueducto y su orientación respecto a dos perfiles, el acueducto está enterrado a un profundidad aproximada de 1.0 m.**

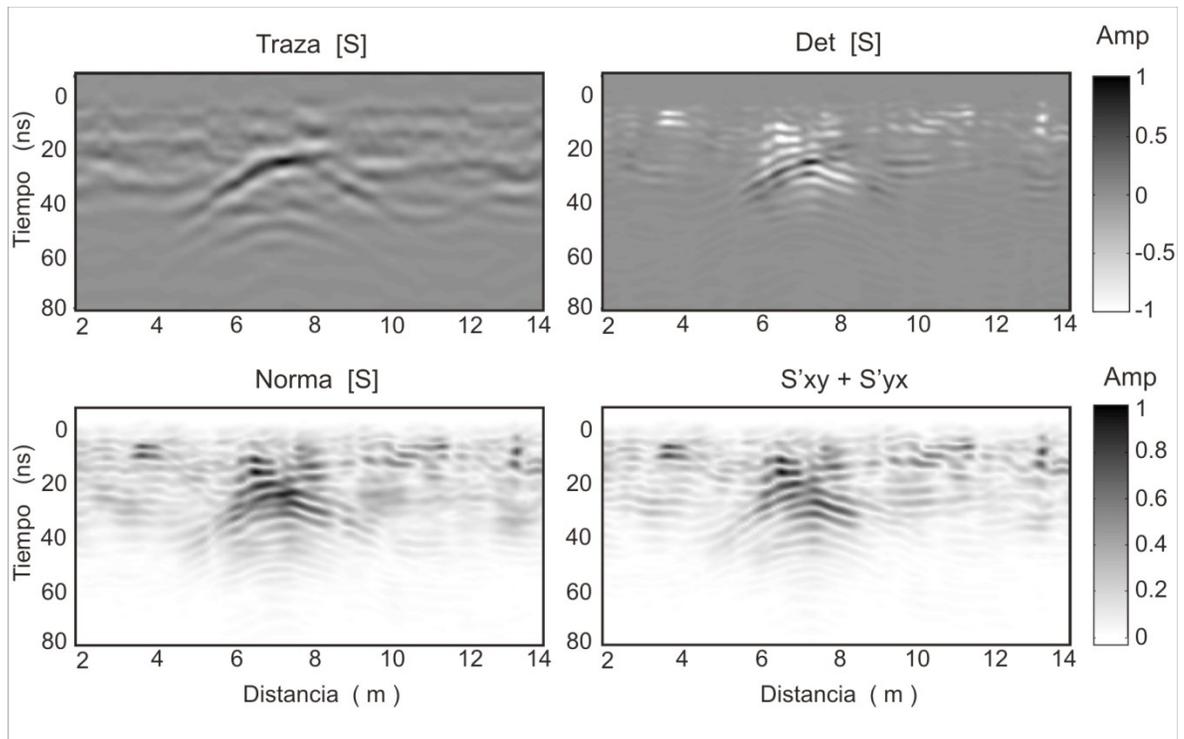
### **Perfil I**

Las secciones de los cuatro elementos de la matriz de dispersión tomadas a lo largo del perfil I se muestran en la Figura 47, para este ejemplo solo utilizamos los datos de la componente cross-pol YX. Estos datos fueron procesados primeramente aplicando un filtro pasa altas (dewow), luego la corrección del tiempo cero en cada sección y en conjunto, es decir que las cuatro tuvieran el mismo tiempo cero. Por último aplicamos el filtro f-k para eliminar la onda directa. En las secciones se puede apreciar que las cuatro configuraciones de antenas detectaron el acueducto reflejándolo como una hipérbola de difracción.

La Figura 48 muestra los tres invariantes calculados a partir de la matriz de dispersión, así como la suma de los elementos cruzados maximizados. En este caso las cuatro secciones tienen la misma calidad y muestran la difracción del acueducto con similar claridad.



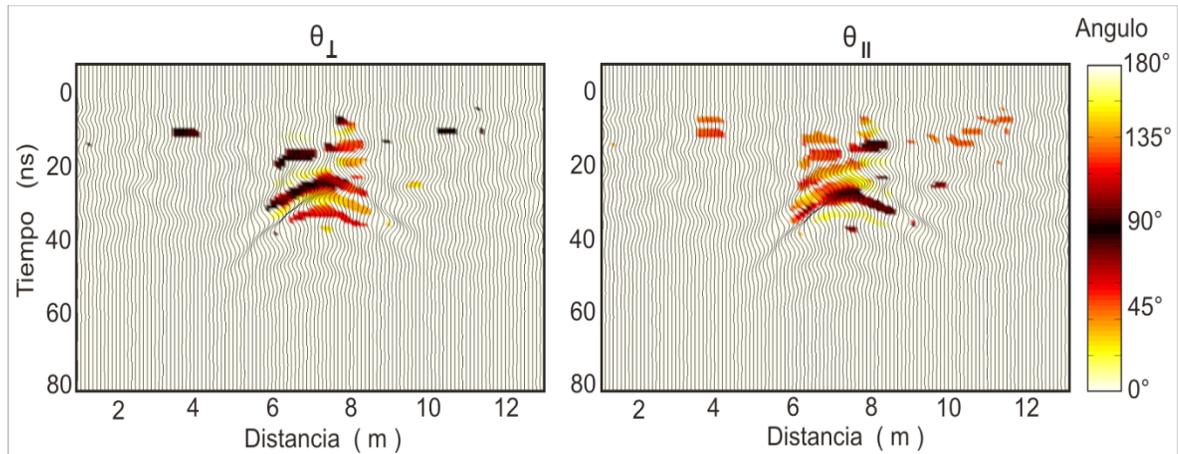
**Figura 47.-** Secciones de los cuatro elementos de la matriz de dispersión del perfil I. Este perfil corta al acueducto en diagonal. La onda directa fue eliminada y las amplitudes están normalizadas solo con fines de graficado.



**Figura 48.-** Secciones de los tres invariantes (traza (S), determinante (S) y norma de Frobenius (S)) y de la suma de la antidiagonal maximizada  $S'_{xy}+S'_{yx}$ . Las amplitudes se muestran normalizadas solo por fines de graficado.

En la Figura 49 mostramos los ángulos  $\theta_{\parallel}$  y  $\theta_{\perp}$  calculados solamente con amplitudes que cumplen con la condición  $\|S\|_F > 0.4$ , con  $\|S\|_F$  normalizada entre 0 y 1. En ambas secciones podemos observar en el fondo radagramas estimados con la traza de la matriz. Para mostrar el ángulo se escogió una escala de color simétrica centrada en  $90^\circ$  y con extremos idénticos en  $0^\circ$  y  $180^\circ$ . Esto por la ambigüedad de los  $\pm 90^\circ$  mencionada en el capítulo II. La imagen de  $\theta_{\parallel}$  muestra un valor cercano a  $45^\circ$  en la parte superior de la difracción de la hipérbola, el cual es el ángulo esperado y conocido de la orientación del acueducto. En la parte media de la difracción de la hipérbola muestra un valor de  $\sim 45^\circ$  de lado izquierdo

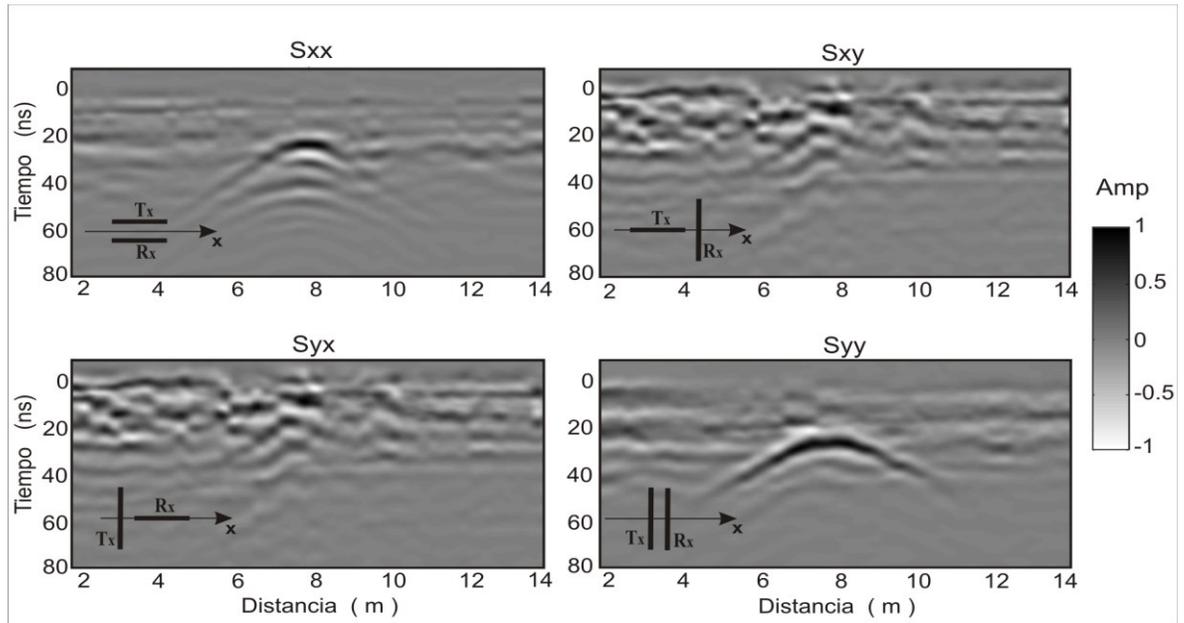
mientras que de lado derecho cambia a  $0^\circ$  o  $180^\circ$ . La imagen para  $\theta_{\perp}$  muestra el mismo comportamiento excepto por la diferencia de  $45^\circ$  predicha por nuestras ecuaciones 43 y 44.



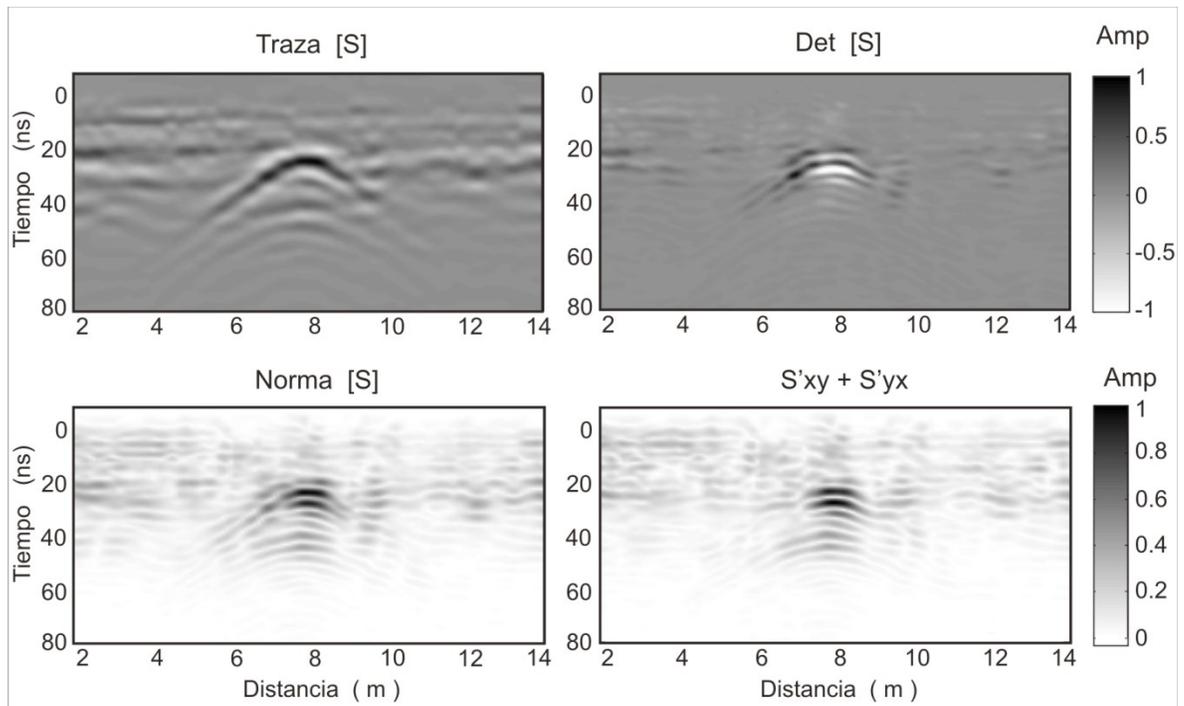
**Figura 49.-** Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$  de la matriz de dispersión, mostrándose en escala de color. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.

## Perfil II

Para la línea perpendicular al acueducto se realizó el mismo procedimiento. En la Figura 50 mostramos los elementos de la matriz de dispersión. Podemos observar que los datos tomados con los arreglos co-pol son buenos ya que se alcanzan a observar claramente las difracciones ocasionadas por el acueducto en especial los datos tomados con antenas perpendiculares al perfil, mientras que en la componente cross-pol no se observa la hipérbola completa y muestra ruido. Los invariantes y la suma de las componentes cruzadas maximizados se muestran en la Figura 51, con estos datos se obtienen mejores resultados que con los datos del perfil I, la hipérbola de difracción causada por el acueducto es observada claramente en las cuatro secciones.

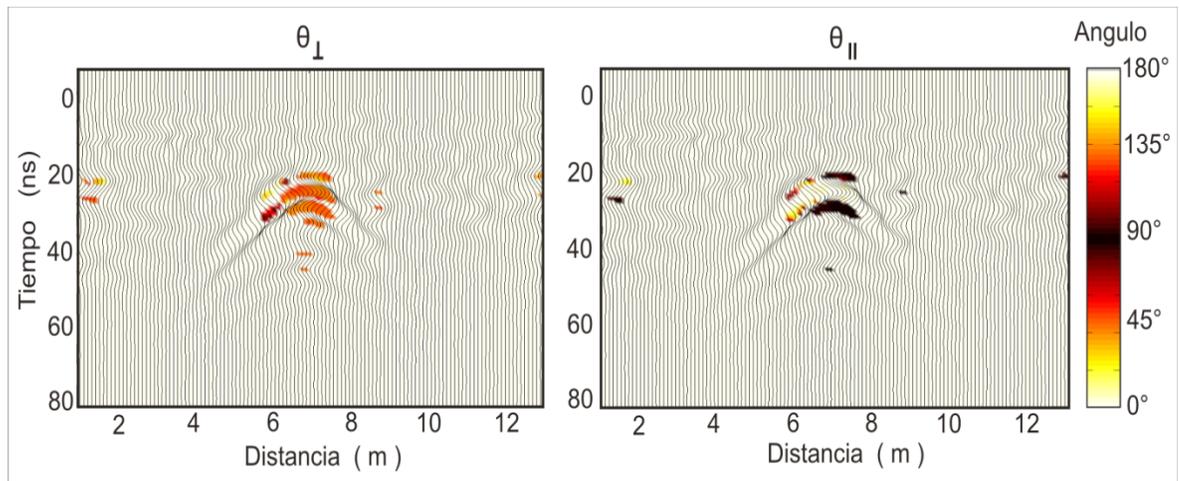


**Figura 50.-** Secciones de los cuatro elementos de la matriz de dispersión del perfil II. Este perfil corta al acueducto en forma perpendicular. La onda directa fue eliminada y las amplitudes están normalizadas solo con fines de graficado.



**Figura 51.-** Secciones de los tres invariantes (traza (S), determinante (S) y norma de Frobenius (S)) y de la suma de la antidiagonal maximizada  $S'_{xy}+S'_{yx}$ . Las amplitudes se muestran normalizadas solo por fines de graficado.

Los ángulos  $\theta_{\parallel}$  y  $\theta_{\perp}$  se calcularon solamente con amplitudes que cumplen con la condición  $\|S\|_F > 0.4$ , con  $\|S\|_F$  normalizada entre 0 y 1 (Figura 52). La imagen de  $\theta_{\parallel}$  muestra consistentemente un valor de  $90^\circ$  mientras que  $\theta_{\perp} \sim 45^\circ$ , de acuerdo a los valores esperados.



**Figura 52.-** Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$  de la matriz de dispersión, mostrándose en escala de color. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.

## Capítulo V

---

### Remoción del primer arribo y procesos para mejorar la estimación angular

---

#### V.1 Introducción

En este capítulo analizamos algunas técnicas utilizadas durante el procesamiento de datos GPR para resolver dos problemas. El primero de ellos es la remoción del primer arribo, compuesto por la onda directa y posiblemente rebotes en la interfaz aire-tierra. Esta señal es de gran amplitud y puede esconder reflexiones de objetivos que se encuentran cercanos a la superficie. El segundo problema consiste en identificar las zonas dentro de una sección de datos, en donde la estimación de los ángulos propuestos en este trabajo (ecuaciones 43 y 44) sea significativa. Como se menciona en el capítulo II, las ecuaciones anteriores se pueden aplicar en toda la sección, sin embargo solo producen estimaciones significativas de la orientación del objetivo en sitios en donde las amplitudes corresponden a reflexiones claras y consistentes de dicho objetivo.

Entre las técnicas usadas para la supresión del primer arribo se probó la descomposición en valores singulares (SVD) y el filtraje en el dominio f-k (frecuencia-número de onda). Usamos también la SVD como una herramienta para separar anomalías oscurecidas por el primer arribo y para eliminar ruido no correlacionado.

Las técnicas probadas para aislar o separar las amplitudes que producen estimaciones angulares significativas fueron el filtro de Kalman, la envolvente de las trazas y finalmente el uso de la norma de Frobenius como filtro de amplitudes.

## V.2 Descomposición en valores singulares

La descomposición en valores singulares es un método matemático que consiste en la factorización de una matriz y que tiene innumerables aplicaciones en distintos campos de la ciencia, por ejemplo en el tratamiento de imágenes y en el procesamiento sísmico, entre otras. En particular se aplica en el procesamiento de datos de georadar, para remover señales correlacionadas espacialmente, como la onda directa del aire y para remover ruido (Khan and Al-Nuamy (2009).

Una matriz de datos  $\mathbf{X}$  (sección GPR) de dimensión  $m \times n$ , puede descomponerse en,

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \boldsymbol{\lambda} \mathbf{V}^T \quad (49)$$

donde el super-índice T significa el transpuesto conjugado y :

$\mathbf{X}$  = matriz de datos de  $m \times n$  datos

$\mathbf{U}$  = matriz de eigenvectores de  $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$  de  $m \times m$

$\mathbf{V}^T$  = matriz de eigenvectores de  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  de  $n \times n$

$\boldsymbol{\lambda}$  = matriz diagonal con los eigenvalores de  $\mathbf{X}$  de  $n \times n$ .

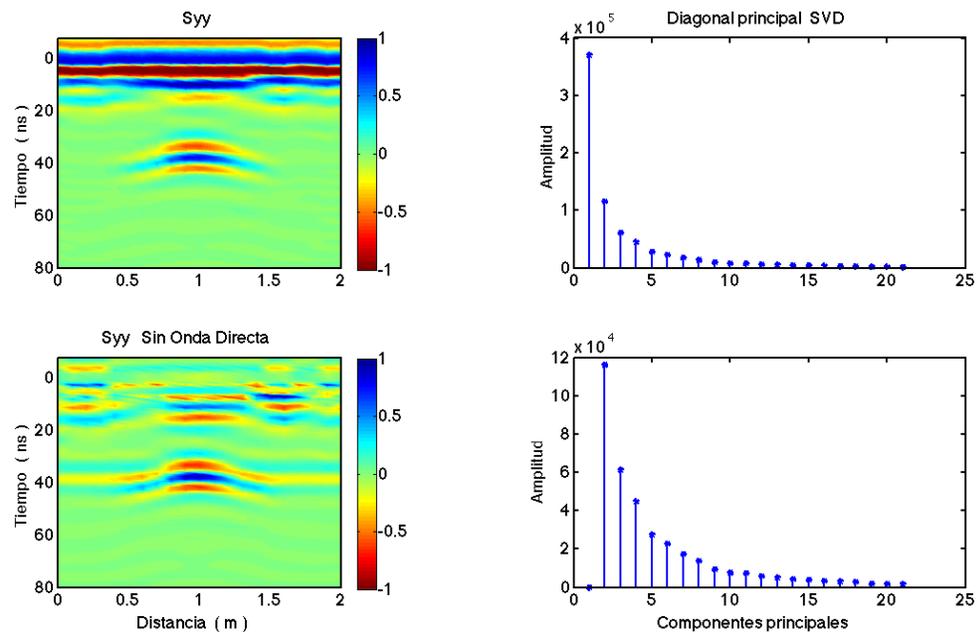
La matriz diagonal  $\boldsymbol{\lambda}$  contiene los eigenvalores de  $\mathbf{X}$  ordenados de mayor a menor. La ecuación anterior puede interpretarse como una descomposición espectral que ordena las componentes principales de la matriz  $\mathbf{X}$  de acuerdo a su "importancia"

(correlación espacial). De este modo, en el caso de las secciones GPR, la componente más importante (con el eigenvalor mayor) corresponde a la señal más energética (mayor amplitud) y con mayor correlación espacial, la cual corresponde al primer arribo, mientras que los eigenvalores menores tienen que ver con pequeños pulsos de energía no correlacionados (ruido) que aparecen en la sección.

La SVD puede usarse para modificar la sección  $\mathbf{X}$  suprimiendo algunas de sus componentes espectrales para eliminar algunas señales indeseables como el primer arribo o el ruido. El proceso consiste en hacer cero uno o varios eigenvalores en la diagonal de  $\boldsymbol{\lambda}$  y recalculamos  $\mathbf{X}$  usando la misma ecuación (49).

### **V.2.1 Remoción del primer arribo con SVD**

Para mostrar un ejemplo usamos los datos de la sección transversal sobre el tanque de plástico vacío (Figura 43, capítulo IV). Para eliminar el primer arribo hacemos la descomposición SVD, eliminamos la componente principal haciendo cero el primer elemento de la diagonal de  $\boldsymbol{\lambda}$  y por último calculamos la sección (matriz  $\mathbf{X}$ ) con la nueva diagonal. En la Figura 53 mostramos en la parte superior la sección original junto con sus eigenvalores, en la parte inferior se observa la sección reconstruida excluyendo el primer eigenvalor. Como se puede observar en esta última, se logra remover la onda directa, sin embargo aparecen ciertos reflectores horizontales y continuos a los lados de la reflexión múltiple a 40 ns. Por otra parte, queda claro que las amplitudes se ven modificadas, por lo cual esta metodología no será útil si se desean estimar ángulos, ya que las ecuaciones (43 y 44) para la estimación angular dependen de relaciones de amplitudes entre las cuatro componentes de la matriz de dispersión.



**Figura 53.- Sección original y eigenvalores respectivos. Abajo: sección reconstruida eliminando el primer eigenvalor.**

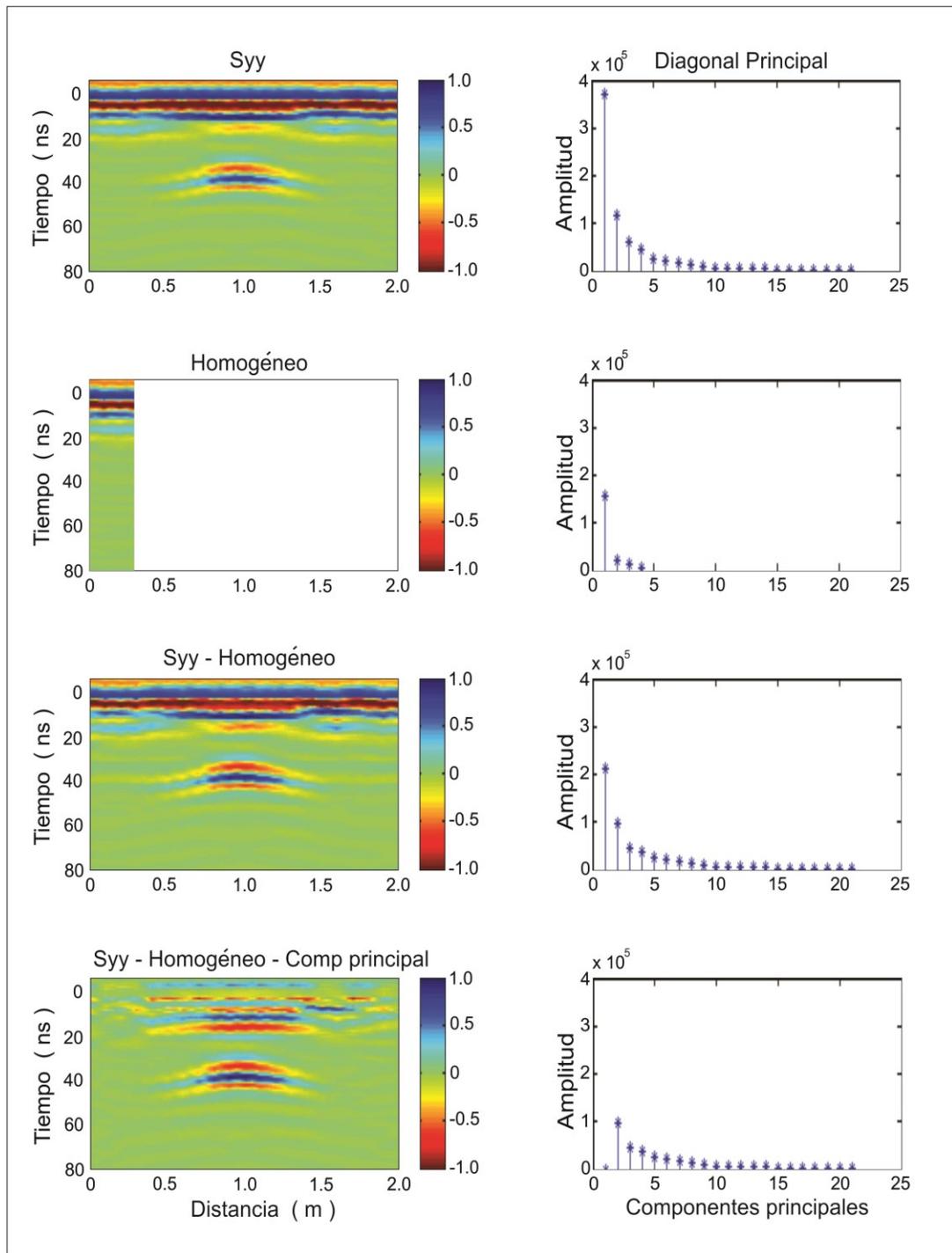
## V.2.2 Utilización de SVD para resaltar anomalías

La descomposición SVD nos permite tratar de separar las anomalías deseadas del resto en una sección GPR. El procedimiento que seguimos fue realizar la descomposición SVD de dos ventanas diferentes en la sección, una de ellas utilizando toda la sección y la otra en una zona que no incluye la anomalía (parte homogénea). Los eigenvalores de la segunda sección se substraen de los eigenvalores de la primera sección y con el resultado se construye una nueva sección, la cual debe representar solamente la anomalía ya que se le ha substraído el medio homogéneo en el que se encontraba imbuida.

La Figura 54 muestra en su panel superior la sección original junto con sus eigenvalores; en el segundo panel se presenta la sección correspondiente al medio homogéneo junto con sus eigenvalores (en el cual se tomaron las primeras

cuatro trazas de la sección), en el tercer panel muestra la sustracción de eigenvalores junto con la sección reconstruida con estos eigenvalores finalmente, en el panel inferior se presenta la sección reconstruida anteriormente pero sin la componente principal.

Con la sustracción de eigenvalores esperábamos eliminar la componente principal y disminuir la amplitud del resto. En la sección reconstruida se observa que el primer arribo no es eliminado, solo se atenúa, por lo cual posteriormente eliminamos la componente principal quedándonos una imagen sin el primer arribo y sin los rasgos horizontales a los lados de la anomalía, como sucede cuando solo se elimina la componente principal (ejemplo anterior). Por otro lado es interesante notar que la reflexión primaria del tanque que se encontraba totalmente oscurecida por el primer arribo aparece entre los 15 y 20 ns, Con esto podemos concluir que este procesamiento es una buena forma para extraer anomalías.



**Figura 54.-** Panel superior: sección original y sus eigenvalores. Panel intermedio: ventana que incluye solamente el medio homogéneo y sus respectivos eigenvalores. Panel inferior: sección reconstruida con la diferencia de eigenvalores.

### V.2.3 Utilización de SVD para filtrar ruido

La descomposición SVD se puede utilizar para eliminar ruido de la sección, es decir zonas con amplitudes relativamente grandes pero no correlacionadas espacialmente. Estas componentes no correlacionadas corresponden a los eigenvalores más pequeños.

La Figura 55 muestra en el panel superior la sección original con sus eigenvalores y en el panel inferior se presenta la sección construida solamente con la segunda componente, la cual contiene la información de la anomalía de interés. Puede observarse que los reflectores de interés se mantienen pero se alargan y se aplanan perdiendo la forma de hipérbola, además la sección muestra a los lados de la anomalía reflectores horizontales atenuados. Para obtener un mejor resultado es posible que se requiera agregar otras componentes.

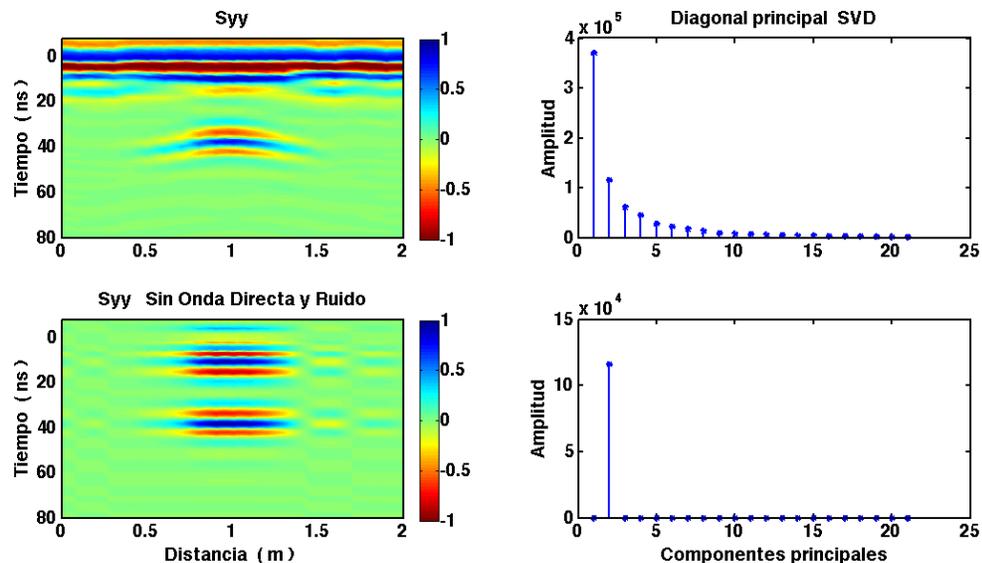


Figura 55.- Panel superior: sección original con sus eigenvalores. Panel inferior: sección construida solamente con el segundo eigenvalor.

La descomposición en valores singulares produce relativamente buenos resultados en las tres aplicaciones que probamos (eliminación de onda directa, eliminación de ruido y resaltar anomalías). Podemos resumir que al eliminar solo la primer componente (caso eliminación de onda directa) se elimina la onda directa pero también se modifica el resto de los datos e incluso aparecen reflectores espurios. En el segundo caso, al dejar solamente la componente principal del reflector de interés, obtenemos que se elimina la onda directa y ruido de los datos, manteniendo solo los reflectores principales, sin embargo estos reflectores se ven distorsionados con respecto a los originales apareciendo planos. Si se elimina la primera componente junto con las más pequeñas podemos mejorar la forma de los reflectores pero la magnitud de las amplitudes se ve modificada y dependiendo de qué componentes se eliminan aparecen reflectores laterales. En el tercer caso eliminamos la onda directa, no aparecen reflectores laterales y se mantienen los reflectores de interés pero estos reflectores son afectados en su amplitud. Por lo cual concluimos que estas aplicaciones son buenas solo para resaltar los reflectores de interés y obtener una mejor visualización de las imágenes, pero no se recomienda este proceso para el cálculo de ángulos ya que las amplitudes se ven modificadas.

### **V.3 Procesos para mejorar la estimación angular**

Las fórmulas propuestas en este trabajo para estimar la orientación de objetos alargados (ecuaciones 43 y 44, capítulo II), al igual que las propuestas por otros autores, son muy susceptibles a las incertidumbres en las amplitudes de las cuatro componentes de la matriz de dispersión. Por esta razón, aunque pueden usarse con los valores de amplitud de cualquier punto de una sección GPR, las estimaciones solo son significativas cuando las amplitudes son consistentes. Por tal razón, durante la realización de este trabajo probamos diferentes alternativas para aplicar las estimaciones angulares de forma tal que produjeran valores significativos. Utilizamos tres aproximaciones que describimos enseguida: el filtro

de Kalman, la envolvente de las amplitudes y la norma de Frobenius como un filtro de amplitudes.

### V.3.1 Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es un algoritmo recursivo que permite predecir el estado de un sistema lineal dinámico a partir de observaciones presentes (Kalman, 1960). Es ampliamente utilizado en el campo de estimación y control (Maybeck, 1979). Para comprender algunas de las ideas básicas del filtro de Kalman es conveniente describir un problema simple. Supongamos un sistema lineal con una sola variable que hemos medido en pasos de tiempo sucesivos:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , y que nuestro objetivo es calcular el promedio  $\mu_n$  de la serie de  $n$  datos. La solución por supuesto es

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (50)$$

Si se mide un nuevo punto  $x_{n+1}$ , podemos calcular  $\mu_{n+1}$ , pero es más eficiente utilizar la estimación que conocemos  $\mu_n$  y hacer una pequeña corrección usando la medición  $x_{n+1}$ .

Esta corrección se puede derivar fácilmente, considerando

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{n} x_{n+1} \right) \\ &= \frac{n}{n+1} \mu_n + \frac{1}{n+1} x_{n+1} \end{aligned} \quad (51)$$

de manera que

$$\mu_{n+1} = \mu_n + K(x_{n+1} - \mu_n) \quad (52)$$

donde  $K = \frac{1}{n+1}$

La nueva estimación  $\mu_{n+1}$  es un promedio pesado de la estimación anterior  $\mu_n$  y de la nueva medición  $x_{n+1}$ . El factor de peso se conoce también como la ganancia. En este caso es claro que confiamos más en el valor estimado  $\mu_n$ , por lo que la nueva medición  $x_{n+1}$  tiene menor peso. La ecuación recursiva (51) se puede interpretar también como un término “predictivo” (la estimación anterior  $\mu_n$ ) más un término “correctivo” (que depende de la nueva medición y de la ganancia K).

Para completar el ejemplo podemos estimar la incertidumbre de la estimación,

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_n)^2 \quad (53)$$

Si se agrega una nueva medición  $x_{n+1}$  la varianza se modifica como,

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} (x_i - \mu_{n+1})^2 \quad (54)$$

Esto puede escribirse, utilizando (51), como

$$\sigma_{n+1}^2 = (1-K) \left( \sigma_n^2 + K (x_{n+1} - \mu_n)^2 \right) \quad (55)$$

En resumen, una vez establecida la ganancia de Kalman K (en nuestro ejemplo  $K = 1/(n+1)$ ), las estimaciones de la variable de interés se hacen recursivamente a partir de estimaciones anteriores y de nuevas mediciones. Este tipo de procedimiento es básicamente lo que se conoce como filtro de Kalman. En general pueden considerarse sistemas de varias variables, incorporar mediciones de distinto tipo y considerar incertidumbres tanto en las mediciones como en el modelo (en nuestro ejemplo el modelo es el promedio aritmético  $\mu$  o la varianza  $\sigma^2$ ).

La Figura 56 muestra un esquema de la aplicación típica del filtro de Kalman. El sistema puede ser influenciado tanto por fuentes de ruido o de error, como por dispositivos de control (acciones que buscan un comportamiento específico del sistema). Por otro lado tenemos dispositivos de observación que permiten medir alguna(s) de las variables del sistema y que también son susceptibles a fuentes de ruido o errores de medición. El filtro de Kalman incorpora el conocimiento disponible del sistema, junto con sus incertidumbres, para estimar de una manera óptima (mínimo error o máxima probabilidad) el estado del sistema.

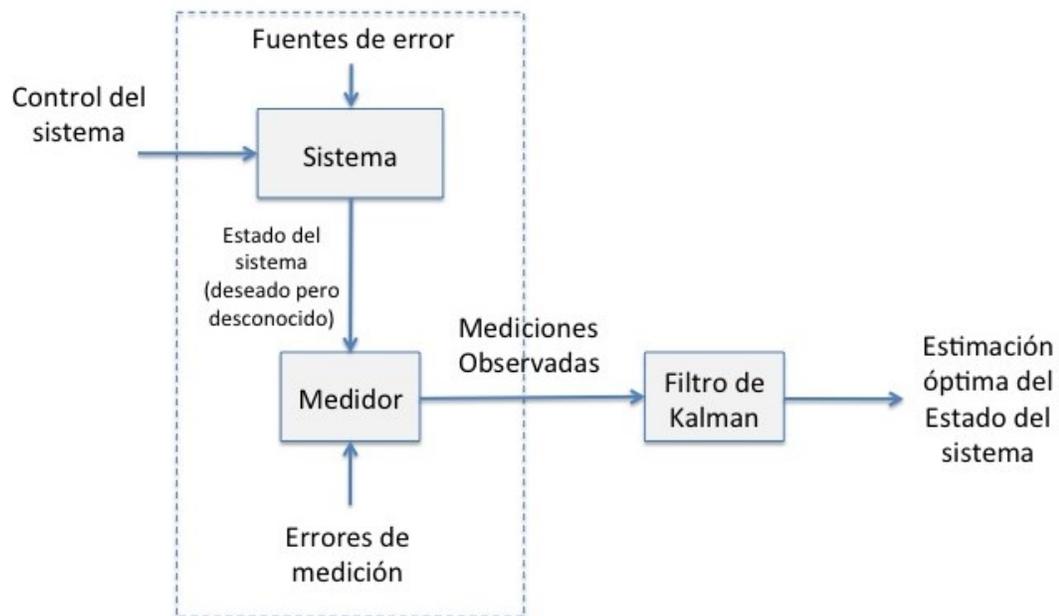


Figura 56.- Aplicación típica del filtro de Kalman. Tomado de Maybeck (1979, p. 5).

El sistema lineal de la figura 56 puede describirse con la ecuación

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_{k-1} \quad (56)$$

donde  $\mathbf{x}$  es un vector conteniendo las variables de estado del sistema, la matriz  $\mathbf{A}$  relaciona el estado anterior del sistema  $k-1$  con el estado actual  $k$ . La matriz  $\mathbf{B}$  y el

vector  $\mathbf{u}$  incorporan las variables de control al sistema, y  $\mathbf{w}$  representa ruido gaussiano en el proceso (con media nula y covarianza  $\mathbf{Q}$ ).

Por otra parte, los dispositivos de medición pueden describirse con,

$$\mathbf{z}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (57)$$

la matriz  $\mathbf{H}$  relaciona las variables de estado del sistema  $\mathbf{x}_k$  con las mediciones  $\mathbf{z}_k$ . El vector  $\mathbf{v}_k$  representa ruido gaussiano en las mediciones (con media nula y covarianza  $\mathbf{R}$ ).

Definamos  $\hat{\mathbf{x}}_k^-$  como la estimación *a priori* del estado del sistema en el paso  $k$ , dado el conocimiento del proceso antes del paso  $k$ , y sea  $\hat{\mathbf{x}}_k$  la estimación *a posteriori* del sistema en el paso  $k$ , una vez conocida la medición  $\mathbf{z}_k$ . Los errores en las estimaciones *a priori* y *a posteriori* se pueden definir como

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^- &\equiv \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^- \quad \text{y} \\ \mathbf{e}_k &\equiv \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k \end{aligned} \quad (58)$$

las respectivas covarianzas de la estimación son

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^- &= E \left[ \mathbf{e}_k^- \mathbf{e}_k^{-T} \right] \quad \text{y} \\ \mathbf{P}_k &= E \left[ \mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T \right] \end{aligned} \quad (59)$$

La ecuación básica del filtro de Kalman calcula la estimación *a posteriori* del sistema como una combinación lineal de la estimación *a priori* y una diferencia pesada entre la nueva medición y una medición predicha,

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (60)$$

el término  $(\mathbf{z}_k - \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-)$  es conocido como la “innovación” o “residual”, y representa la discrepancia entre la medición predicha  $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}_k^-$  y la medición observada  $\mathbf{z}_k$ . La matriz  $\mathbf{K}$  o ganancia de Kalman es la que minimiza la covarianza del error *a posteriori*  $\mathbf{P}_k$ . Esta minimización se obtiene sustituyendo (Ec. 60) en (Ec. 58), luego

calculando el valor esperado indicado en (Ec. 59) e igualando a cero la derivada de la traza respecto a  $\mathbf{K}$ , el resultado puede escribirse como

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \\ &= \frac{\mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{H}^T}{\mathbf{H} \mathbf{P}_k^{-1} \mathbf{H}^T + \mathbf{R}}\end{aligned}\quad (61)$$

donde  $\mathbf{R}$  es la covarianza del error en la medición. Puede verse en (60) que si  $\mathbf{R}$  tiende a cero, el peso del “residual” es mayor (es decir la medición es muy confiable). Por otra parte, cuando la varianza de la estimación a priori  $\mathbf{P}_k^{-1}$  tiende a cero, la ganancia tiende a cero también y la “innovación” o “residual” no participa en la nueva estimación.

El filtro de Kalman estima el estado de un sistema usando retroalimentación: el filtro estima el estado del sistema en un tiempo dado y obtiene información a partir de nuevas mediciones (posiblemente con ruido) que usa como retroalimentación para una siguiente estimación del estado del sistema. Hay entonces dos grupos de ecuaciones: 1) para la actualización en tiempo y 2) para la actualización de las mediciones. Las primeras proyectan hacia delante (en tiempo) el estado del sistema y la covarianza de la estimación, mientras que las segundas se encargan de la retroalimentación del filtro, agregando la información de nuevas mediciones. La actualización en tiempo también se conoce como “predicción” mientras que la actualización de la medición es una “corrección”, por lo que el filtro de Kalman se describe frecuentemente como un algoritmo predictor-corrector.

Las ecuaciones que actualizan en tiempo, “predicción”, son:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1} \quad (62)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (63)$$

Las ecuaciones que actualizan la medición, “corrección”, son:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (64)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad (65)$$

$$\mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}^T) \mathbf{P}_k^- \quad (66)$$

El proceso se inicia con valores iniciales de  $\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-$ ,  $\mathbf{u}_{k-1}$  y  $\mathbf{P}_{k-1}$ , las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son parte del modelo lineal y  $\mathbf{Q}$  es la covarianza de los errores del sistema, la cual también se supone conocida. Por otro lado también se suponen conocidas la matriz  $\mathbf{H}$  y la covarianza de los errores de medición  $\mathbf{R}$ .

La actualización en tiempo seguida por la actualización de la medición se efectúan en forma recursiva a partir de estos valores iniciales.

### V.3.2. Ejemplos de la aplicación del filtro de Kalman

En nuestro caso utilizamos una sola variable de estado por lo que las ecuaciones son escalares, además consideramos  $A=1$ , es decir que la estimación *a priori* para el paso  $k$  es igual a la estimación obtenida en el paso anterior  $k-1$ ; y  $H=1$ , es decir que la medición  $z$  coincide con la variable de estado  $x$ . No tenemos variables de control, así que  $B = 0$ ,  $u = 0$ .

Las ecuaciones que actualizan en tiempo son:

$$\hat{x}_k^- = \hat{x}_{k-1} \quad (67)$$

$$P_k = P_{k-1} + Q \quad (68)$$

Las ecuaciones que actualizan la medición son:

$$K_k = P_k^- (P_k^- + R)^{-1} \quad (69)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - \hat{x}_k^-) \quad (70)$$

$$P_k = (1 - K_k) P_k^- \quad (71)$$

Los valores iniciales fueron  $\hat{x}_{k-1} = 0$  y  $P_{k-1} = 0$ , y probamos distintos valores de Q y R. El ángulo se calculó para toda la sección (x,t), una vez después de que a los datos se les aplicara el dewow, la corrección tiempo cero, y después de eliminar la onda directa con el filtro FK. Al ángulo calculado se le aplico el filtro de Kalman con la intención de filtrar la sección de ángulos, quedándonos solo con los ángulos que fueran correlacionados espacialmente.

### **Tanque de plástico perfil longitudinal**

La Figura 57 corresponde al perfil longitudinal del tanque vacío, en la cual observamos que conforme aumentamos el coeficiente R, el filtro elimina ruido pero también afecta las reflexiones manteniendo al final una reflexión principal ~20 ns y una múltiple a ~45 ns. El ángulo calculado con los datos filtrados es mejor en la múltiple ~90°, mientras que para la reflexión primaria el ángulo se subestima ~60°.

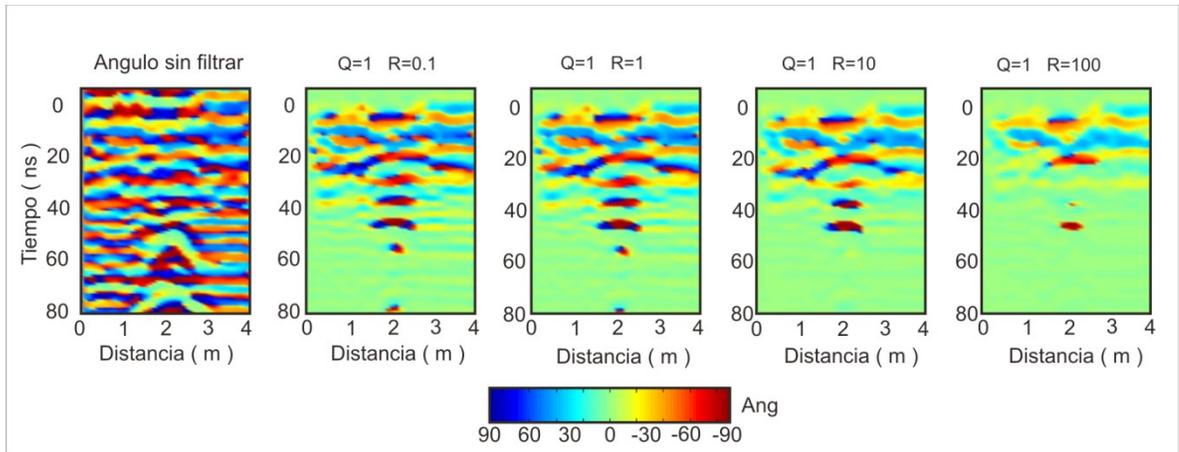


Figura 57.- Ángulos calculados con datos filtrados del perfil longitudinal del tanque vacío, la sección de la izquierda está sin filtrar, el resto de las secciones fueron filtradas con diferentes valores de R (0.1, 1, 10 y 100) y Q=1 constante.

### Tanque de plástico perfil transversal

Los resultados correspondientes al perfil transversal se muestran en la Figura 58. Podemos decir que el filtro mantiene varias reflexiones. La estimación del ángulo en las secciones filtradas produce valores dentro de lo esperado  $\sim 90^\circ$ , es decir que en este caso el filtro produjo buenos resultados.

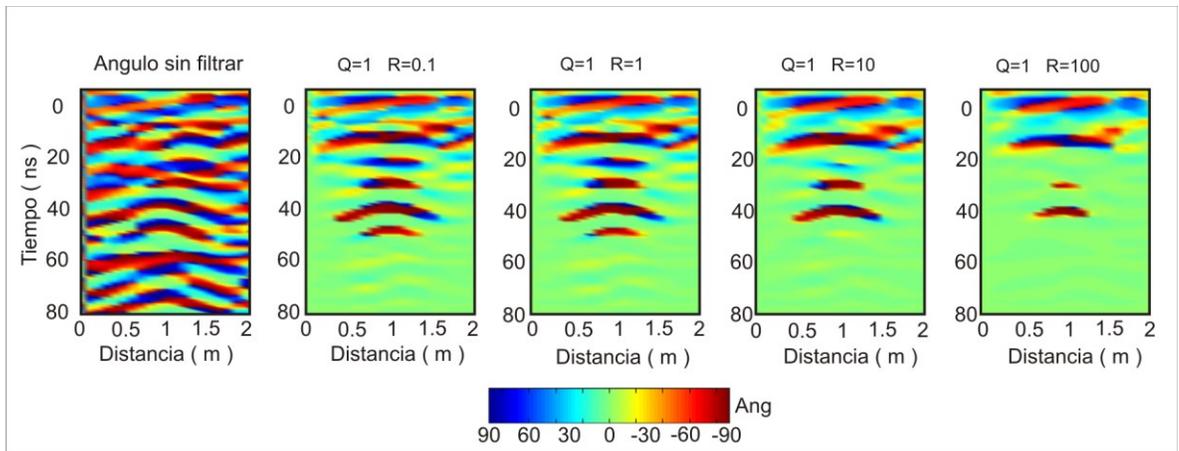
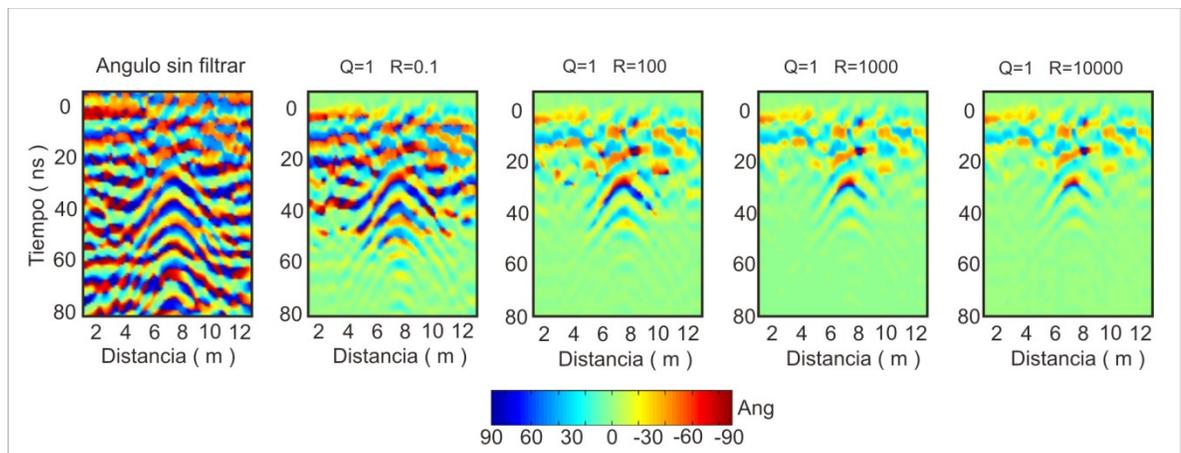


Figura 58.- Ángulos calculados con datos filtrados del perfil transversal del tanque vacío, la sección de izquierda está sin filtrar, el resto de las secciones fueron filtradas con diferentes valores de R (0.1, 1, 10 y 100) y Q=1 constante.

### Acueducto perfil diagonal

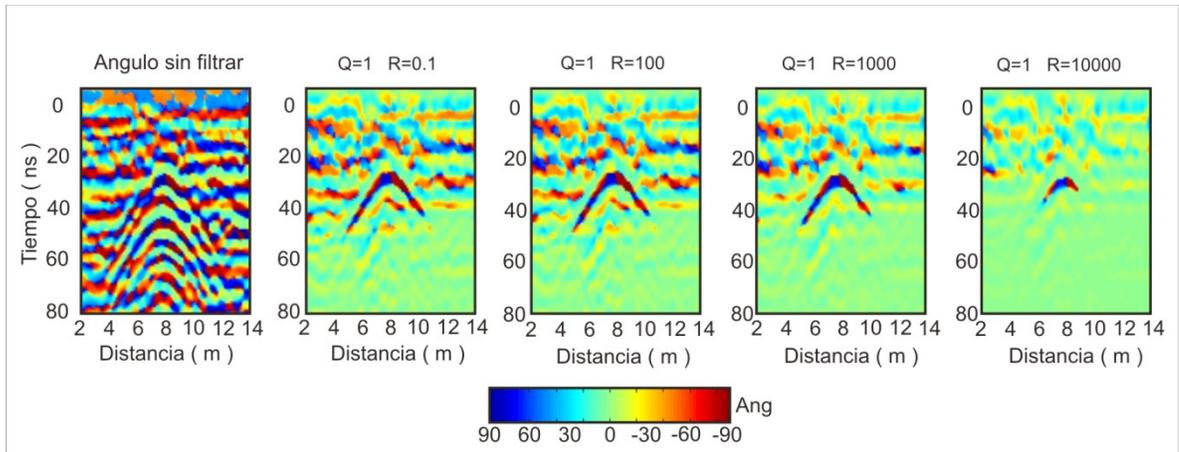
La Figura 59 corresponde al perfil que cruza en forma diagonal al acueducto. En este caso el filtro mantiene la hipérbola de difracción junto con pequeñas reflexiones a tiempos más cortos. La estimación del ángulo con las amplitudes de la difracción produce valores dentro de lo esperado  $\sim 45^\circ$  en la cima de la hipérbola.



**Figura 59.- Ángulos calculados con los datos filtrados del perfil que cruza en forma diagonal al acueducto, la sección de la izquierda está sin filtrar, el resto de las secciones son filtradas con diferentes valores de R (0.1, 100, 1000 y 10000) y Q=1 constante.**

### Acueducto perfil perpendicular

Por último, la Figura 60 corresponde al perfil que cruza en forma perpendicular al acueducto. En este caso el filtro mantiene solo la difracción, el ángulo estimado con estas amplitudes muestra un cambio de polaridad de  $180^\circ$ .



**Figura 60.- Ángulos calculados con los datos filtrados del perfil que cruza en forma perpendicular al acueducto, la sección de la izquierda está sin filtrar, el resto de las secciones son filtradas con diferentes valores de R (0.1, 100, 1000 y 10000) y Q=1 constante.**

Los ejemplos anteriores producen resultados medianamente satisfactorios por lo que decidimos explorar otras alternativas.

## V.4 Cálculo de la envolvente

Otro experimento que se hizo con el objetivo de mejorar la estimación del ángulo, fue estimar dicho ángulo con la envolvente de las trazas en vez de utilizar las amplitudes. La idea es que la envolvente tiende a ser más suave y sus variaciones pueden ser más consistentes espacialmente entre traza y traza.

La envolvente  $e(t)$  de una señal  $x(t)$  se define matemáticamente como la amplitud de la señal analítica (compleja)

$$y(t) = x(t) + ih(t) \quad (72)$$

$$y(t) = e(t) \exp\{i\psi(t)\} \quad (73)$$

donde la envolvente  $e(t)$  es la amplitud de  $y(t)$  y  $\psi(t)$  es la fase de  $y(t)$ . La derivada de  $\psi(t)$  se conoce como la frecuencia instantánea.

Por otro lado,  $h(t)$  es la parte imaginaria de  $y(t)$  y está dada por la transformada de Hilbert de la señal  $x(t)$ ,

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (74)$$

lo que puede escribirse también como la convolución

$$h(t) = \frac{1}{\pi t} * x(t) \quad (75)$$

o, usando el teorema de la convolución, la transformada de Fourier de  $h(t)$  se puede poner como un producto de transformadas de Fourier

$$\begin{aligned} F\{h(t)\} &= F\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} \cdot F\{x(t)\} \\ H\{\omega\} &= -i \operatorname{sgn}(\omega) \cdot X(\omega) \end{aligned} \quad (76)$$

Para calcular la envolvente de una señal  $x(t)$  se calcula primero la transformada de Hilbert  $h(t)$ , se forma la señal analítica compleja  $y(t)$  y finalmente se calcula el valor absoluto (es decir la amplitud) de  $y(t)$ .

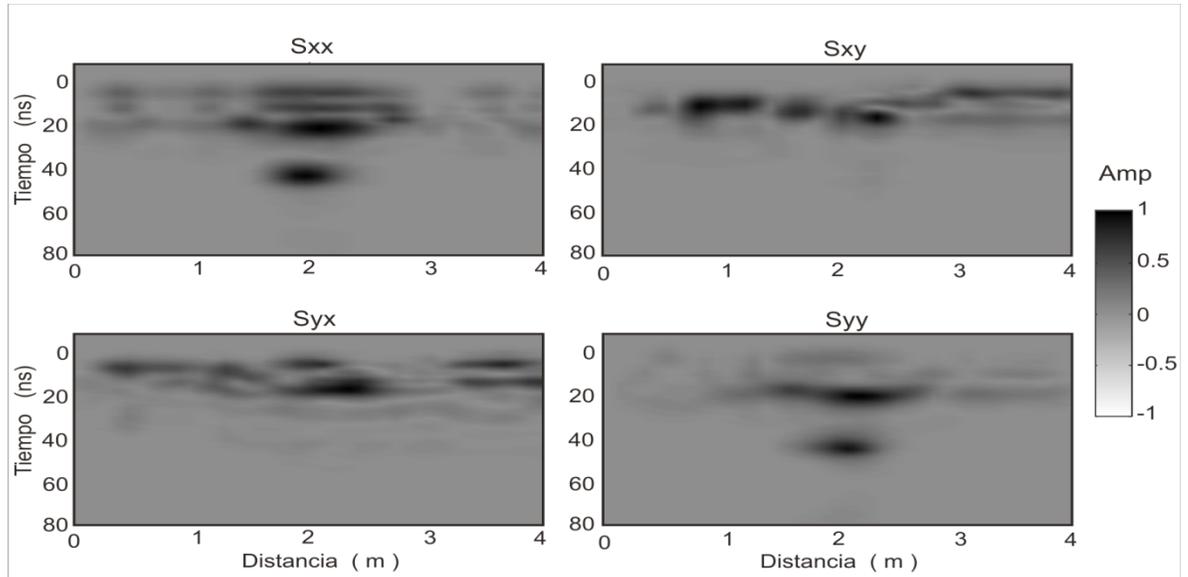
#### V.4.1 Ejemplos de la aplicación de la envolvente

##### Tanque de plástico perfil longitudinal

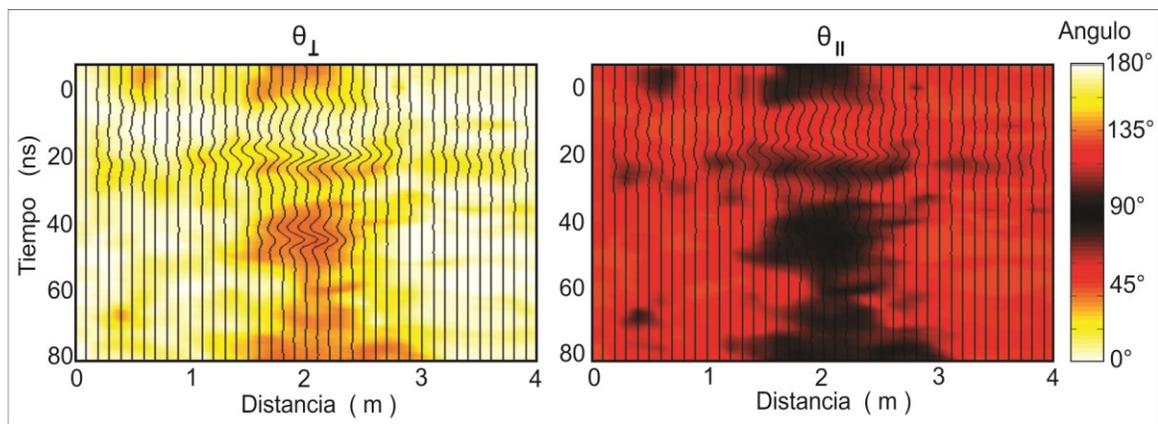
La Figura 61 muestra la envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión. Puede observarse que en las configuraciones co-pol ( $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$ ) se mantiene claramente la anomalía, el reflector primario a 20 ns y su múltiple a los 50 ns, mientras que en las polarizaciones cruzadas ( $S_{xy}$ ,  $S_{yx}$ ) las reflexiones no se distinguen claramente. Las amplitudes se muestran normalizadas solo con fines de comparación en la Figura 61. Para calcular los ángulos se usan las amplitudes relativas de los cuatro elementos de  $\mathbf{S}$  sin ninguna normalización.

La Figura 62 muestra la estimación del ángulo, se observa una mancha muy congruente con el ángulo esperado ( $\theta_{\parallel} \sim 90^\circ$  y  $\theta_{\perp} \sim 45^\circ$ ) en las reflexiones múltiples,

mientras que a los 20 ns en el reflector primario, no se define claramente y el ángulo se obtiene subestimado.



**Figura 61.-** Envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión, tomados sobre el tanque de plástico vacío, este perfil corta al tanque de forma longitudinal.

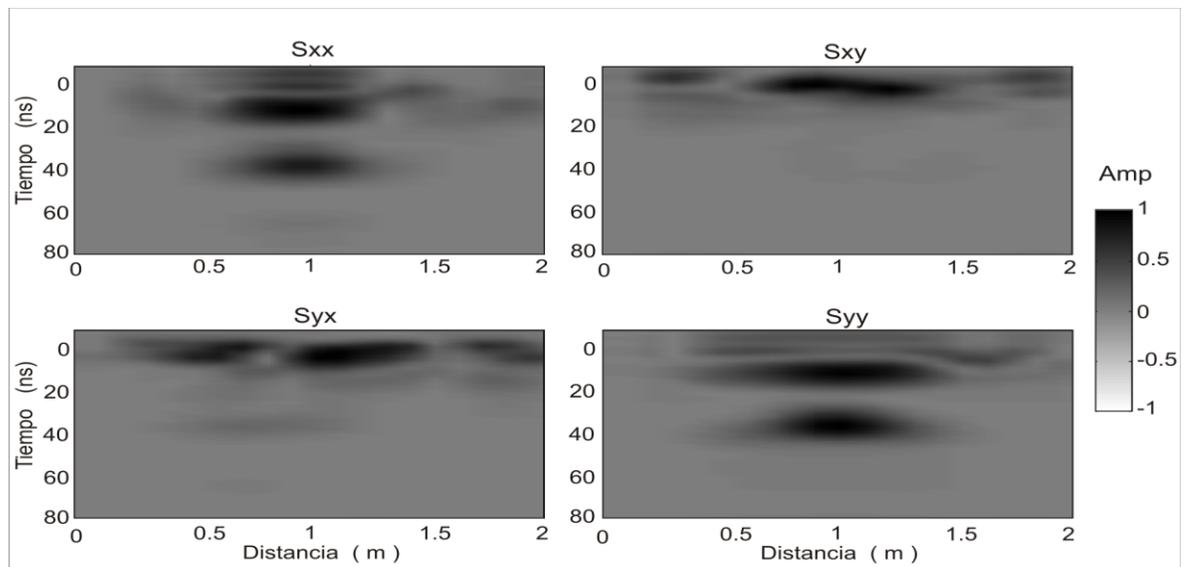


**Figura 62.-** Secciones con la estimación del ángulo a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$ , respectivamente. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión.

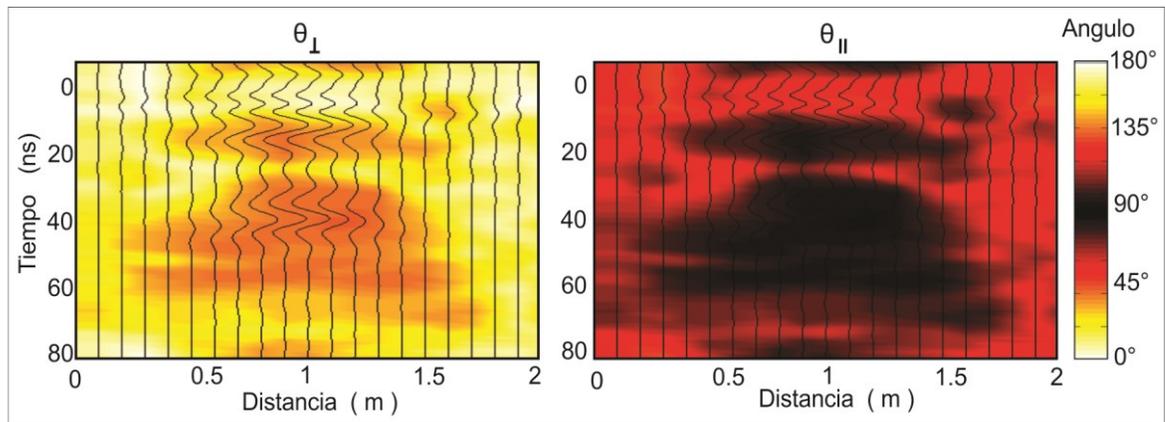
### Tanque de plástico perfil transversal

La Figura 63 muestra la envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión. Puede observarse que en las configuraciones co-pol ( $S_{xx}$ ,  $S_{yy}$ ) se mantiene claramente la anomalía mostrando el reflector primario a 15 ns y su reflexión múltiple a los 40 ns, mientras que en las polarizaciones cruzadas ( $S_{xy}$ ,  $S_{yx}$ ) no se distingue la reflexión. Al igual que en el caso anterior para el cálculo del ángulo se usaron las amplitudes relativas de los cuatro elementos de  $\mathbf{S}$  sin ninguna normalización.

La Figura 64 muestra la estimación del ángulo, en ambos casos tanto perpendicular como paralelo, se observan dos manchas, una cubre el reflector primario y otra las reflexiones múltiples, ambas manchas muestran el mismo ángulo, siendo este ángulo calculado el esperado ( $\theta_{\parallel}=90^{\circ}$  y  $\theta_{\perp}=45^{\circ}$ ).



**Figura 63.-** Envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión, tomados sobre el tanque de plástico vacío, este perfil corta al tanque de forma transversal.

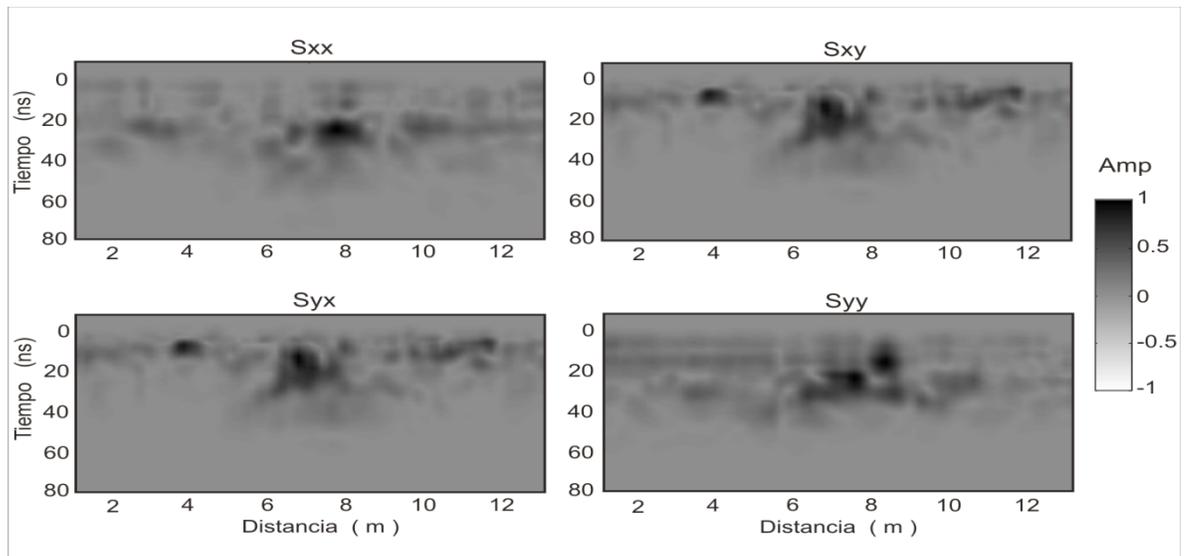


**Figura 64.-** Secciones con la estimación del ángulo a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$ , respectivamente. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión.

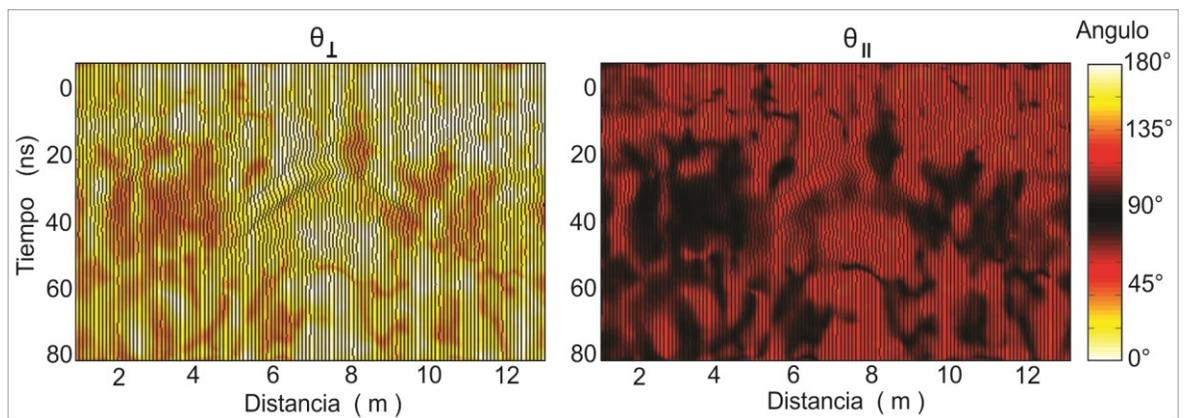
### Acueducto perfil diagonal

La Figura 65 muestra la envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión para el perfil diagonal al acueducto. Puede observarse que las cuatro componentes muestran de manera muy difusa la hipérbola de difracción.

La estimación del ángulo se muestra en la Figura 66. Puede observarse que tanto el ángulo que maximiza la componente cross-pol ( $\theta_{\perp}$ ) y el que maximiza las componentes co-pol no se define claramente.



**Figura 65.-** Envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión del perfil I. Este perfil corta al acueducto en diagonal.

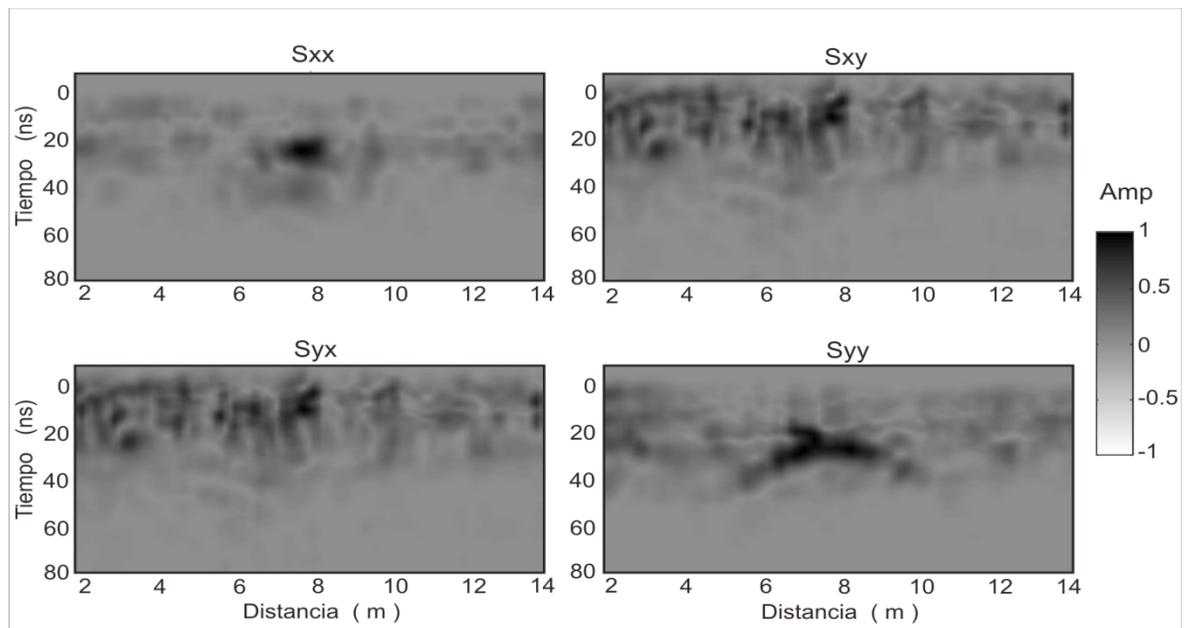


**Figura 66.-** Secciones con la estimación del ángulo obtenido a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$ , respectivamente. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión.

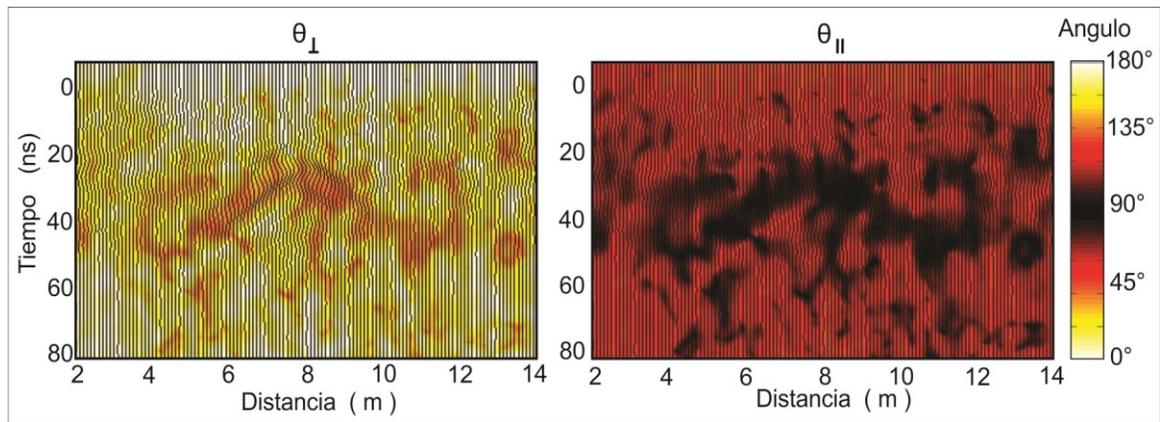
### Acueducto perfil Perpendicular

La Figura 67 muestra la envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión para el perfil perpendicular al acueducto. La hipérbola de difracción puede distinguirse claramente solo en la componente  $S_{yy}$  y de manera más difusa en  $S_{xx}$ .

La estimación del ángulo se muestra en la Figura 68. Puede observarse que al centro aparece una hipérbola mostrando un ángulo con un valor cercano al esperado,  $\theta_{\parallel}=90^{\circ}$  y  $\theta_{\perp}=45^{\circ}$ , sin embargo las imágenes son muy difusas y no se delimita claramente la hipérbola.



**Figura 67.- Envolvente calculada para los cuatro elementos de la matriz de dispersión del perfil II. Este perfil corta al acueducto en forma perpendicular.**



**Figura 68.-** Secciones con la estimación del ángulo obtenido a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$ , respectivamente. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión.

## V.5 Norma de Frobenius como filtro de amplitudes

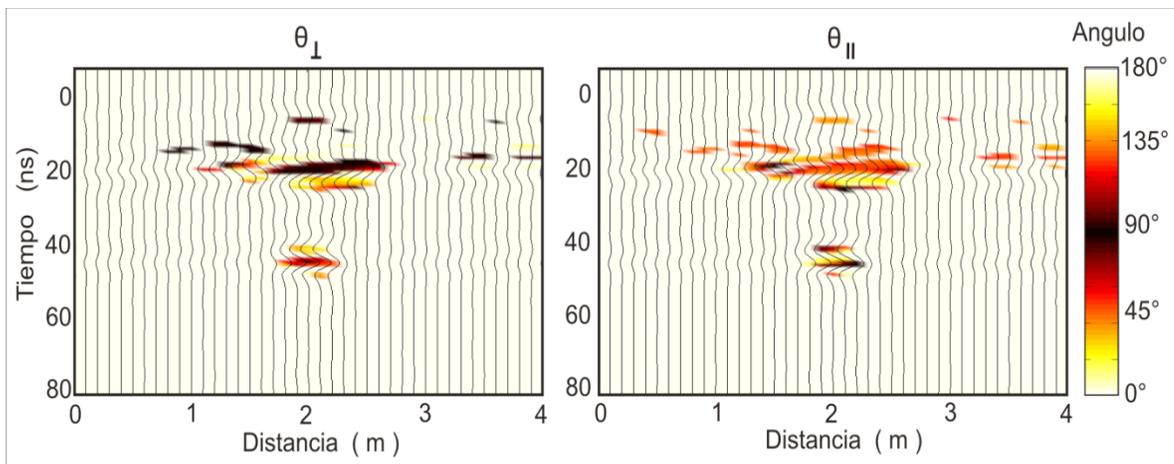
Finalmente mostramos los resultados de calcular el ángulo con las amplitudes de las cuatro componentes de la matriz de dispersión pero utilizando la norma de Frobenius como un filtro de amplitud. Es decir el ángulo se calcula solamente en los sitios de la sección en donde la norma de Frobenius está por encima de un umbral dado. El valor del umbral se define por ensayo y error de acuerdo a los resultados observados.

### V.5.1 Ejemplos de la aplicación de la norma de Frobenius

#### Tanque de plástico perfil longitudinal

Utilizamos la norma de Frobenius para elegir solamente amplitudes que cumplen la condición  $\|S\|_F > 0.4$ , con  $\|S\|_F$  normalizada entre 0 y 1. La Figura 69 muestra los ángulos calculados, en líneas continuas se muestran los radagramas obtenidos con la suma de los elementos co-pol (traza). La estimación del ángulo es muy consistente a lo largo del reflector a 20 ns, así como en las múltiples a 40 ns. Los

ángulos obtenidos en el reflector a 20 ns son  $\theta_{\parallel} \sim 45^\circ$  y  $\theta_{\perp} \sim 90^\circ$ , lo cual es contrario a lo esperado. Sin embargo, si observamos las múltiples a 40 ns tenemos para  $\theta_{\parallel} \sim 90^\circ$  y  $\theta_{\perp} \sim 45^\circ$ , los cuales parecen los ángulos correctos. El error en los ángulos calculados en el reflector a 20 ns se lo podemos atribuir a dos motivos, el primero que el perfil no esté exactamente perpendicular al eje largo del tanque y el segundo a efectos de tridimensionalidad es decir que debido al tamaño del tanque y la cercanía de éste con la superficie donde se tomaron los datos, no se alcance apreciar como un objeto alargado.



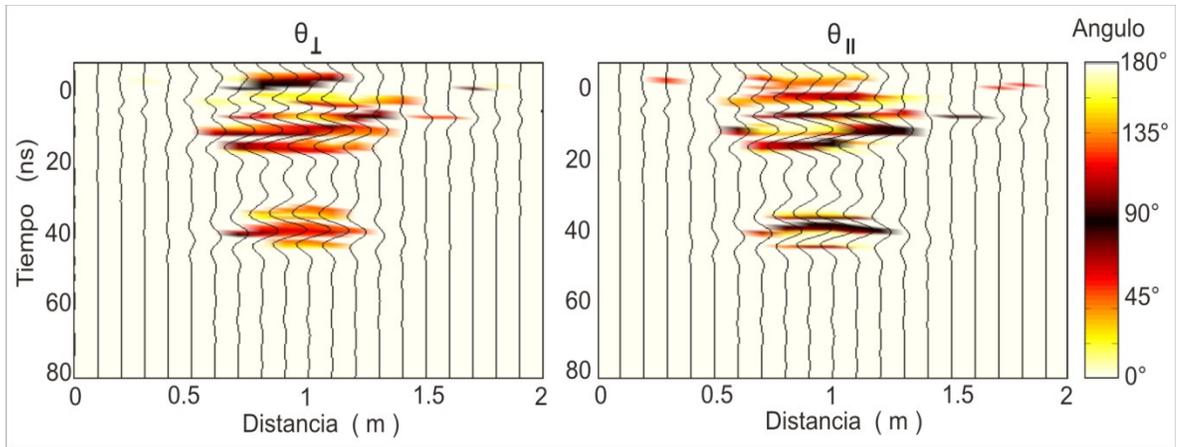
**Figura 69.-** Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$  de la matriz de dispersión, mostrándose en escala de color. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.

### Tanque de plástico perfil transversal

De igual forma que en el caso anterior, se calcularon los ángulos  $\theta_{\parallel}$  y  $\theta_{\perp}$ . En la

Figura 70 se muestran dos secciones de ángulos estimados con amplitudes que

cumplen con la condición de  $\|S\|_F > 0.4$ , con  $\|S\|_F$  normalizada entre 0 y 1. En el fondo las líneas continuas corresponden a radagramas obtenidos con la traza. La estimación del ángulo es muy consistente a lo largo del reflector a 10 ns y a lo largo del múltiple a 40 ns. El ángulo  $\theta_{\perp}$  que se obtiene es  $\sim 45^{\circ}$ , la estimación de  $\theta_{\parallel}$  con el reflector primario no es muy estable, mientras que cuando se estima con la múltiple resulta más consistentemente  $\theta_{\parallel} \sim 90^{\circ}$ .

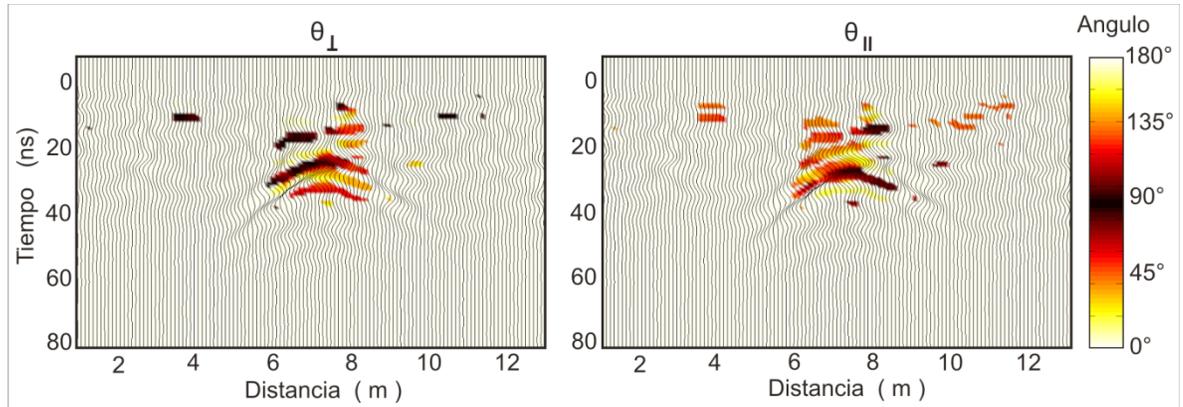


**Figura 70.- Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$  de la matriz de dispersión, mostrándose en escala de color. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.**

### Acueducto perfil diagonal

En la Figura 71 mostramos los ángulos  $\theta_{\parallel}$  y  $\theta_{\perp}$  calculados solamente con amplitudes que cumplen con la condición  $\|S\|_F > 0.4$ , con  $\|S\|_F$  normalizada entre 0 y 1. La imagen de  $\theta_{\parallel}$  muestra un valor cercano a  $45^{\circ}$  en la parte superior de la difracción de la hipérbola, el cual es el ángulo esperado y conocido de la

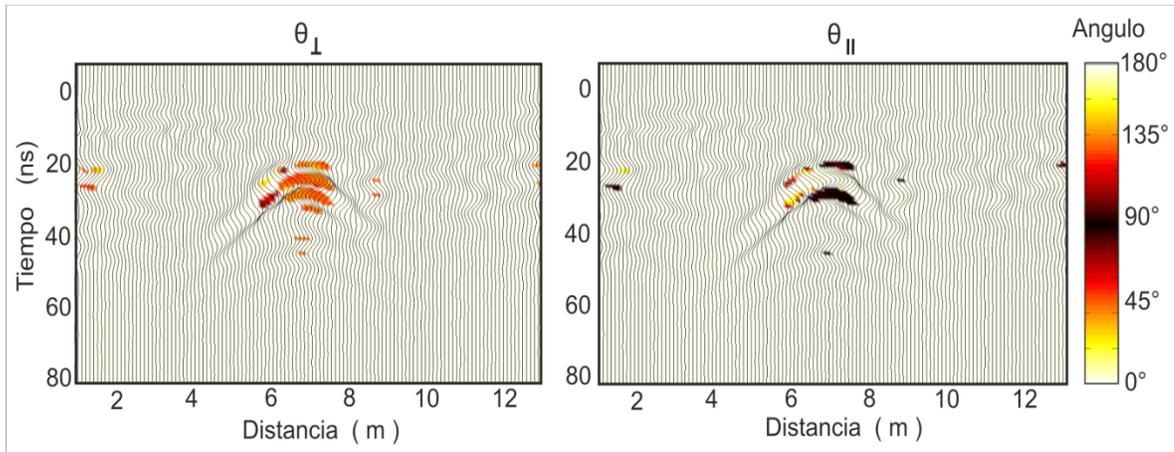
orientación del acueducto. En la parte media de la difracción de la hipérbola muestra un valor de  $\sim 45^\circ$  de lado izquierdo mientras que del lado derecho cambia a  $0^\circ$  o  $180^\circ$ . La imagen para  $\theta_\perp$  muestra el mismo comportamiento excepto por la diferencia de  $45^\circ$  predicha por nuestras ecuaciones 43 y 44.



**Figura 71.-** Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol  $\theta_\perp$  y co-pol  $\theta_\parallel$  de la matriz de dispersión, mostrándose en escala de color. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.

### Acueducto perfil perpendicular

Los ángulos  $\theta_\parallel$  y  $\theta_\perp$  se calcularon solamente con amplitudes que cumplen con la condición  $\|S\|_F > 0.4$ , con  $\|S\|_F$  normalizada entre 0 y 1 (Figura 72). La imagen de  $\theta_\parallel$  muestra consistentemente un valor de  $90^\circ$  mientras que  $\theta_\perp \sim 45^\circ$ , de acuerdo a los valores esperados.



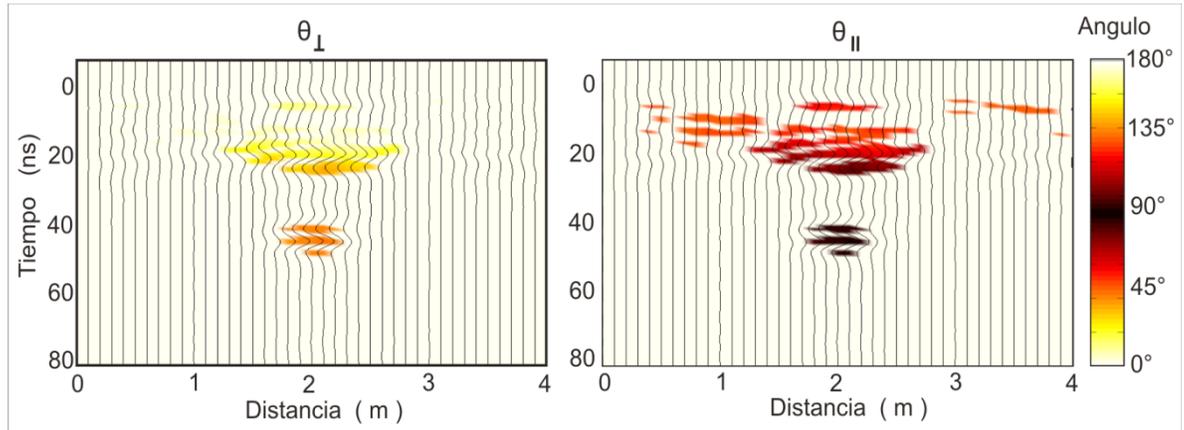
**Figura 72.-** Secciones con la estimación del ángulo obtenido maximizando la componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$  de la matriz de dispersión, mostrándose en escala de color. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.

## V.6 Norma de Frobenius como filtro de amplitudes en el cálculo de la envolvente

A continuación, como un último experimento, mostramos los mismos ejemplos pero combinando los resultados del cálculo de la envolvente y el filtrado en base a la norma de Frobenius.

### Tanque de plástico perfil longitudinal

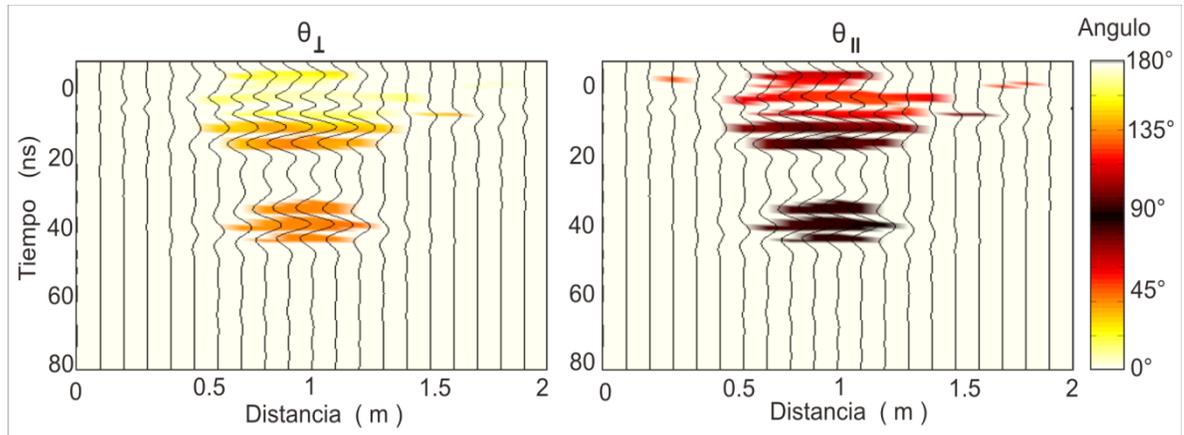
La Figura 73 muestra la estimación del ángulo, se observa que los resultados esperados solo se obtienen en las reflexiones múltiples, obteniendo  $\theta_{\parallel} \sim 90^{\circ}$  y  $\theta_{\perp} \sim 45^{\circ}$ , mientras que la estimación del ángulo en el reflector primario que aparece a los 20 ns es subestimado alrededor de  $20^{\circ}$ .



**Figura 73.-** Secciones con la estimación del ángulo a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$ , respectivamente. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.

### Tanque de plástico perfil transversal

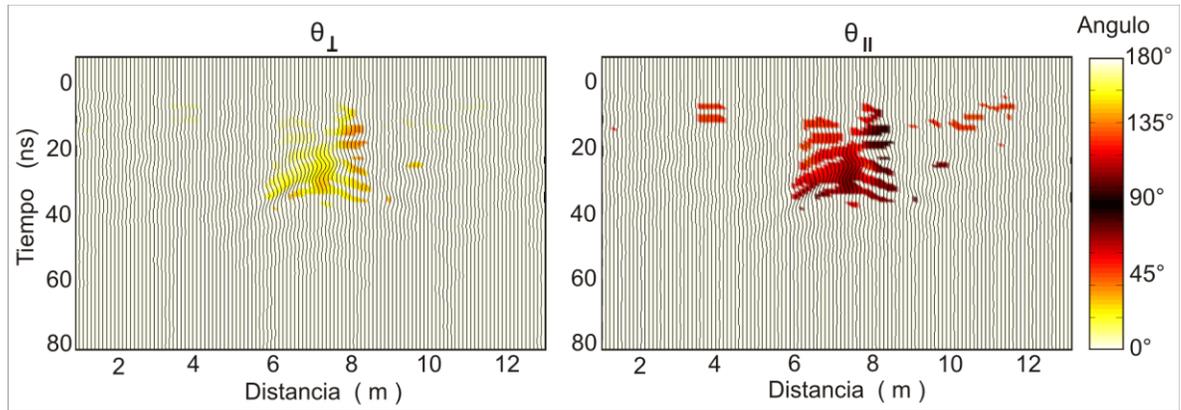
La Figura 74 muestra la estimación del ángulo, al igual que en el perfil longitudinal del tanque se observa que los resultados esperados solo se obtienen en las reflexiones múltiples, obteniendo  $\theta_{\parallel}=90^{\circ}$  y  $\theta_{\perp}=45^{\circ}$ , mientras que la estimación del ángulo en el reflector primario que aparece a los 15 ns se estima muy cerca de lo esperado  $\sim 90^{\circ}$  y  $\sim 45^{\circ}$  a diferencia del caso anterior.



**Figura 74.-** Secciones con la estimación del ángulo a partir de la envolvente, maximizando las componentes cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$ , respectivamente. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.

#### Acueducto perfil diagonal

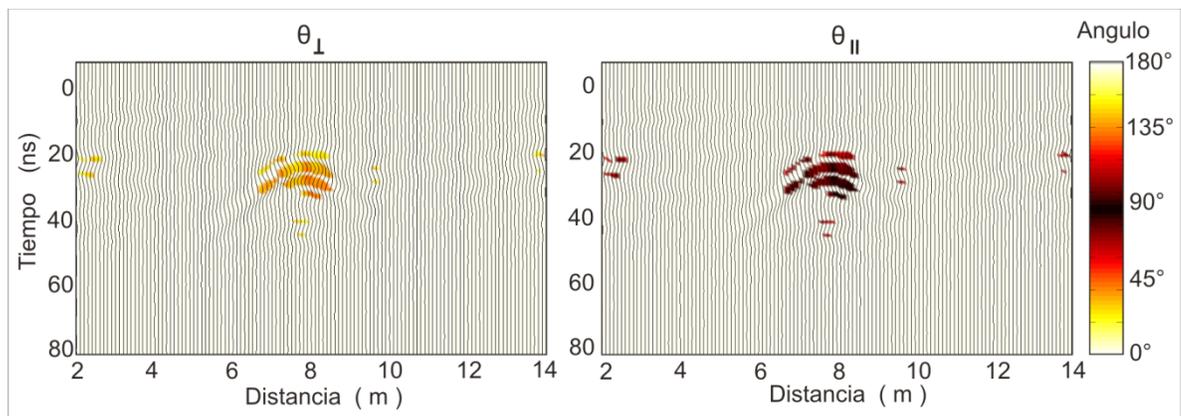
La estimación del ángulo se muestra en la Figura 75. Puede observarse que en la mitad izquierda de la hipérbola el ángulo estimado está dentro de lo esperado  $\theta_{\parallel}=45^{\circ}$  mientras que en la mitad derecha se sobreestima  $\sim 15^{\circ}$ ; por su parte el ángulo  $\theta_{\perp}=15^{\circ}$ , en la mitad izquierda y también se sobreestima en la mitad derecha de la hipérbola de difracción.



**Figura 75** Secciones con la estimación del ángulo obtenido a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$ , respectivamente. En el fondo se muestra el radagrama de la traza de la matriz de dispersión. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.

### Acueducto perfil perpendicular

La estimación del ángulo se muestra en la Figura 76. Puede observarse que al centro de la hipérbola el ángulo estimado tiene un valor cercano al esperado,  $\theta_{\parallel}=90^{\circ}$  y  $\theta_{\perp}=45^{\circ}$ , aunque a lo largo de la hipérbola se muestra cierta variación en bandas.



**Figura 76.-** Secciones con la estimación del ángulo obtenido a partir de la envolvente, maximizando las componente cross-pol  $\theta_{\perp}$  y co-pol  $\theta_{\parallel}$ , respectivamente. Se muestran solo los ángulos donde la norma de Frobenius es mayor a 0.4.

Comparando las imágenes del cálculo del ángulo utilizando la envolvente, el filtro en base a la norma de Frobenius y la envolvente filtrada podemos concluir:

a).- Perfiles sobre el tanque vacío

Los ángulos estimados con la envolvente, tanto para el perfil longitudinal como para el transversal, fueron los esperados tanto en el reflector primario como en las múltiples. Aplicando la norma como filtro, se obtuvo buen resultado en las múltiples mientras que en los reflectores primarios fueron erróneos. En cuanto a los ángulos calculados con la envolvente y después filtrados por la norma, el ángulo se calculó correctamente en ambos perfiles, excepto en la reflexión primaria del perfil longitudinal, en donde se subestimó.

b).- Perfiles sobre el acueducto

En este caso la envolvente produce imágenes muy difusas de la hipérbola de difracción producida por el acueducto, por lo que la estimación del acimut no es buena. Por su parte las estimaciones a partir solamente de amplitudes y usando la norma de Frobenius como filtro producen buenas estimaciones del acimut, con excepción del perfil diagonal en donde el ángulo está bien estimado solamente en la mitad de la hipérbola de difracción.

## Capítulo VI

---

### Conclusiones

---

Las propiedades del objetivo en el subsuelo pueden ser descritas por una matriz de dispersión  $\mathbf{S}$  de  $2 \times 2$ . En este trabajo medimos las componentes de la matriz de dispersión tomando datos con cuatro configuraciones distintas de antenas. La información de los cuatro elementos de  $\mathbf{S}$  se utiliza en conjunto para mejorar la interpretación del objetivo en el subsuelo. Por otra parte, la orientación de objetos alargados puede estimarse rotando la matriz de dispersión hasta encontrar el ángulo que minimiza la anti-diagonal.

Los métodos propuestos se prueban con datos sintéticos producidos con simulaciones en 3D y se aplican también a datos reales obtenidos en dos sitios de prueba.

En esta tesis mostramos que los invariantes de la matriz de dispersión son útiles para construir mejores imágenes de objetivos en el subsuelo, al incorporar, de una manera simple, toda la información contenida en los cuatro elementos de la matriz  $\mathbf{S}$ . En particular, la traza y la norma de Frobenius mejoran las imágenes, mientras que el determinante tiene además el atributo particular de que produce difracciones más compactas.

Los invariantes de  $\mathbf{S}$  remueven la información direccional contenida en los elementos de la matriz de dispersión, lo que puede verse como una pérdida de información. Esta pérdida de información se convierte en una ventaja, cuando se

requiere aplicar a los datos de GPR procesos o algoritmos diseñados para campos escalares, como es el caso de los utilizados en el método de reflexión sísmica.

La estimación del acimut de objetos alargados es un problema difícil, puesto que la estimación angular es muy inestable, particularmente con datos ruidosos o con amplitudes pequeñas. Es muy importante que los cuatro elementos de la matriz de dispersión estén en el mismo marco de referencia temporal, puesto que un pequeño desplazamiento en tiempo de alguna de las componentes afecta significativamente el cálculo del ángulo. Lo mismo pasa si ocurren cambios relativos en las amplitudes de las componentes de  $\mathbf{S}$ , por lo que cualquier proceso que afecte la amplitud impide la estimación correcta del acimut. La norma de Frobenius resultó una buena herramienta para utilizarse como filtro de amplitudes, que permite seleccionar solamente las amplitudes más adecuadas para una estimación significativa y segura del acimut. Sin embargo la envolvente mostró muy buen resultado en el caso del tanque, especialmente en el reflector primario, el cual estaba encimado con la onda directa, por lo cual es una alternativa que no hay que descartar y seguir probando con otros datos, para definir en qué casos se mejora el resultado.

El georadar es capaz de detectar fallas geológicas, sin embargo se debe tomar en cuenta la relación que hay entre la resolución (el tamaño de las fallas y la profundidad de observación) y la frecuencia de las antenas a utilizar. Por otro lado observamos que el uso de dos configuraciones de antenas nos ayuda en el momento de la interpretación de las imágenes.

La utilización de la descomposición en valores singulares (SVD) para eliminar la onda directa, así como para resaltar anomalías de interés y atenuar ruido produce buenos resultados y mejora las imágenes, sin embargo las amplitudes de las anomalías se modifican, por lo que no se puede utilizar para estimar el ángulo de orientación de objetivos enterrados.

La aplicación del filtro de Kalman, para “limpiar” una sección de estimaciones angulares, nos muestra buenos resultados en cuanto a eliminar los ángulos no correlacionados espacialmente y dejar solamente los ángulos de interés, pero los valores de los ángulos muestran cambios de  $180^\circ$ , por lo cual son resultados que consideramos como medianamente satisfactorios.

## Referencias bibliográficas

---

- Alford, R.M., 1986. Shear data in the presence of azimuthal anisotropy. In 56th Annual International Meeting, SEG, pp. 476-479.
- Annan, A.P., 2002. GPR—History, Trends, and Future Developments. *Subsurface Sensing Technologies and Applications*, Vol 3, pp. 253-267.
- Annan, A.P. 2005. Ground penetration radar. In: Dwain K. Butler (ed.), *Near-Surface Geophysics*, SEG, Tulsa, Oklahoma.
- Annan, A.P. 2009. Electromagnetic principles of ground penetrating radar. In: Harry M. Jol (ed.), *Ground Penetrating Radar: Theory and Applications*, Elsevier, Amsterdam. .
- Balanis, C. A. 1989. *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, New York, NY.
- Capizzi, P., Cosentino, P.L., 2008. GPR multi-component data analysis, *Near Surface Geophysics*, Vol 6, pp. 87-95.
- Chen, C.-C., Higgins, B., O'Neill, K., Detsch, R., 2001. Ultrawide-Bandwidth Fully-Polarimetric Ground Penetrating Radar Classification of Subsurface Unexploded Ordnance, *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol 39, pp. 1221-1230.
- Davis, J.L. and Annan, A.P., 1989. Ground penetrating radar for high resolution mapping of soil and rock stratigraphy. *Geophysical Prospecting*, Vol 37, pp. 531-551.
- Giannopoulos, A., 2005. Modelling ground penetrating radar by GprMax, *Construction and Building Materials*, Vol 19, pp. 755-762.

- Gómez Londono, E., Castillo López, L. A., and Kazmierczak, S., 2005. Using the Karhunen-Loève transform to suppress ground roll in seismic data. *Earth Sciences Research Journal*, Vol.9, pp. 139-147.
- Guy, E.D., Daniels, J.J. & Radzevicius, S., 1999. Demonstration of using crossed dipole GPR antennae for site characterization, *Geophysical Research Letters*, Vol 26, pp. 3421-3424.
- Kalman, R. E. 1960. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering*, Vol 82 (Series D), pp. 35-45.
- Khan S. U. and Al-Nuaimy W., 2010. Background Removal from GPR Data Using Eigenvalues, *IEEE Xplore Digital Library*, In 13th International Conference on Ground Penetrating Radar (GPR), Recuperado de : <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=5550079>
- Lehmann, F., Boerner, D.F., Holliger, K. & Green, A., 2000. Multicomponent georadar data: Some important implications for data acquisition and processing, *Geophysics*, Vol 65, pp. 1542-1552.
- Maybeck, P.S., 1979. *Stochastic models, estimation and control*. New York, NY, Academic Press.
- Orlando, L. and Slob, E., 2009. Using multicomponent GPR to monitor cracks in a historical building, *Journal of Applied Geophysics*, Vol 67, pp. 327-334.
- Radzevicius, S.J., Daniels, J.J., 2000. Ground penetrating radar polarization and scattering from cylinders, *Journal of Applied Geophysics*, Vol 45, 111-125.
- Ramirez-Mejía, D. and Young, R.A., 2007. Fracture orientation determination in sedimentary rocks using multicomponent ground-penetrating radar measurements. *The Leading Edge*, Vol 26, pp. 1010-1016.
- Roberts, R.L., 1994. *Analysis of theoretical modeling of GPR polarization phenomena*, (PhD Thesis), The Ohio State University, Ohio.
- Roberts, R.L., Daniels, J.J., 1996. Analysis of GPR polarization phenomena, *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, Vol 1, pp. 139-157.

- Sassen, D.S. and Everett, M.E., 2009. 3D polarimetric GPR coherency attributes and full-waveform inversion of transmission data for characterizing fractured rock, *Geophysics*, Vol 74, pp. J23-J34.
- Seol, S.J., Kim, J.-H., Song, Y. & Chung, S.-H., 2001. Finding the strike direction of fractures using GPR, *Geophysical Prospecting*, Vol 49, pp. 300-308.
- Thomas, Andrew P. and Rockwell, Thomas K., 1996, A 300- to 550-year history of slip on the Imperial fault near the U.S.-Mexico border: Missing slip at the Imperial fault bottleneck, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, Vol 101, pp. 5987-5997.
- Tsoflias, G.P., van Gestel, J.P., Stoffa, P.L., Blankenship, D.D. and Sen, M., 2004. Vertical fracture detection by exploiting the polarization properties of ground-penetrating radar signals. *Geophysics*, Vol 69, pp. 803–810.
- Van Gestel, J.-P. and Stoffa, P.L., 2001. Application of Alford rotation to ground-penetrating radar data. *Geophysics*, Vol 66, pp. 1781–1792.
- Yelf R. and Yelf D., 2006. Where is True Time Zero?. *Electromagnetic Phenomena*, Vol 7, pp. 158-163.
- Yilmaz O., 1987, *Seismic data processing*, SEG, Tulsa, Oklahoma.

## Apéndice A.- Programas elaborados en Matlab.

### 1).- CALCULA RADAGRMA SINTETICO

```

% 13 de Noviembre 2008
% Programa para calcular el radagrama sintetico de un modelo de cuatro
% capas.

clear all;
mu0 = 4*pi*10^-7;
eps0 = 8.854*10^-12;
ep=eps0*4; %para k=4

%%% Datos del modelo:
mu = [mu0,mu0,mu0,mu0,mu0]
eps = [ep,6*ep,8*ep,10*ep,12*ep]
sigma = [0.0,0.001,0.001,0.001,0.001]
Z = [0.0,3.9,7.3,10.3]
f = 100*1.e6;
omega =2*pi*f;

%%% Calculo de constante de propagacion.
sq = sqrt(1 + (sigma./(eps.*omega)).^2);
alfa = ones(size(sigma)).*omega.*sqrt(mu.*eps.*(sq + 1)/2);
beta = ones(size(sigma)).*omega.*sqrt(mu.*eps.*(sq - 1)/2);
prop = alfa - (beta*i)
prog = sqrt((omega^2.*mu.*eps)-(omega.*mu.*sigma.*i))
Vel = omega./alfa

%%% Calculo de coeficientes de reflexion y transmision.

for i=1:length(mu)-1
    R(i) = ((mu(i+1)* prop(i)) - (mu(i)*prop(i+1))) / ((mu(i)*prop(i+1))+
(mu(i+1)* prop(i)));
    T(i) = (2*mu(i+1)*prop(i))/((mu(i)*prop(i+1))+ (mu(i)* prop(i)));
    tiempo(i) = Z(i)/Vel(i)
end
R = real(R);
T = real(T);
%%% calcula ondícula de Ricker
np = 101;
[r,t,dt] = Rickter(f,np); % np=101 puntos

tiempo = tiempo/1.e-9; % nanosegundos
deltat = dt/1.e-9; % en nanosegundos
TT = 0:deltat:2*ceil(tiempo(length(tiempo)));
RR = zeros(size(TT));

for m =1:length(tiempo)
    k = find(abs(TT-ceil(tiempo(m)))<=deltat/2)
    RR(k)= R(m)
end

```

```

##### convolucion
Rada = conv(RR,r)

##### Graficas de coeficientes de reflexión contra tiempo
figure
subplot(2,2,1); stem(TT,RR)
title 'Tiempo vs Coeficiente de reflexión'
xlabel 'Tiempo (nanoseg)'
ylabel 'Coeficientes de reflexion'

subplot(2,2,2); plot(t/1.e-9,r)
title 'Ondicula de Ricker'
xlabel 'Tiempo (nanoseg)'
ylabel 'Amplitud'
legend(strcat('f =',num2str(f/1.e6),' MHz'))

TR = -floor(np/2)*deltat:deltat:TT(length(TT))+floor(np/2)*deltat;
subplot (2,2,3:4); plot(TR,Rada)
title 'Radagrama'
xlabel 'Tiempo (nanoseg)'
ylabel 'Amplitud'

```

## 2).- CALCULO DE ANGULO E INVARIANTES

```

% Lee datos tanque vacio
Syy = load('ATZT2per.txt');
Sxy = load('ATZT2parper.txt');
Syx = load('ATZT2perpar.txt');
Sxx = load('ATZT2par.txt');
t = [-16:0.8:164]';
x = [0:0.1:2]';
t1 = 0; t2 = 32;
ix1 = 1; ix2 = 21;
pfil = 0.4; % define porcentaje para filtro fobenius
% correccion del tiempo zero (utiliza la función t_zero)
[Sxx,xxlag] = t_zero(Sxx,t,1,t1,t2);
[Sxy,xylag] = t_zero(Sxy,t,1,t1,t2);
[Syx,yxlag] = t_zero(Syx,t,1,t1,t2);
[Syy,yylag] = t_zero(Syy,t,1,t1,t2);
%filtro fk elimina onda directa (utiliza la función filtro_airwave)
[Sxxf] = filtro_airwave(Sxx);
[Sxyf] = filtro_airwave(Sxy);
[Syxf] = filtro_airwave(Syx);
[Syyf] = filtro_airwave(Syy);
% corta entre t1 y 100 ns y entre ventana en x
Sxx = Sxxf(find(abs(t+8)<10^-5):find(abs(t-80)<10^-5),ix1:ix2);
Sxy = Sxyf(find(abs(t+8)<10^-5):find(abs(t-80)<10^-5),ix1:ix2);
Syx = Syxf(find(abs(t+8)<10^-5):find(abs(t-80)<10^-5),ix1:ix2);
Syy = Syyf(find(abs(t+8)<10^-5):find(abs(t-80)<10^-5),ix1:ix2);
t = t(find(abs(t+8)<10^-5):find(abs(t-80)<10^-5));

```

```

x = x(ix1:ix2);
% Dibuja datos sin onda directa y cortados hasta 80ns.
figure
subplot(1,4,1), gpramp(Sxx,t,x), caxis([-1,1]);
title('Sxx')
subplot(1,4,2), gpramp(Sxy,t,x), caxis([-1,1]);
title('Sxy')
subplot(1,4,3), gpramp(Syx,t,x), caxis([-1,1]);
title('Syx')
subplot(1,4,4), gpramp(Syy,t,x), caxis([-1,1]);
title('Syy')
% Calcula Angulos
thper = 0.5*atan2((Syy-Sxx),(Syx+Sxy))*180/pi; %calcula angulos maximiza
antidiagonal
thpar = 0.5*atan2((Syx+Sxy),(Sxx-Syy))*180/pi; %calcula angulos maximiza
la diagonal
% lleva angulo thper a los cuadrantes 1 y 2  0 < ang < 180
thper = thper + 180*(thper<0);
thpar = thpar + 180*(thpar<0);
% uso de la norma de frobenius como filtro
fro = sqrt(Sxx.^2 + Sxy.^2 + Syx.^2 + Syy.^2);
fronorm=fro./(max(max(fro)));
load invhot; % carga escala de colores
filtro = fronorm>pfil; % filtro en base a la norma
figure % grafica los angulos filtrados
gprang(thpar.*filtro,t,x,invhot), caxis([0,180]);
hold on
gprsec(Sxx+Syy,t,x,gan) % dibuja trazas en base al invariante traza
title('thpar')
figure
gprang(thper.*filtro,t,x,invhot), caxis([0,180]);
hold on
gprsec(Sxx+Syy,t,x,gan)
title('thper')

%% Calculo de invariantes
tra = Sxx + Syy; % traza
det = Sxx.*Syy - Sxy.*Syx; % determinante
fro = sqrt(Sxx.^2 + Sxy.^2 + Syx.^2 + Syy.^2); % norma de frobenius

```

## 2-1).- FUNCION CORRECCION DEL TIEMPO CERO

```

function [datnew,mlag] = t_zero(dat,t,ntr,t1,t2)
%
% corrige tiempo cero usando correlaci?n cruzada
%
% dat = matriz de datos
% t = vector columna de tiempos
% ntr = traza elegida para la correlaci?n
% t1 a t2 = ventana de tiempo elegida para la correlaci?n

```

```

%
% sept 2011

[ndat,mdat] = size(dat);
d1 = dat(find(abs(t-t1)<0.000001):find(abs(t-t2)<0.000001),ntr); % usa
solo una ventana del la traza ntr
d = dat(find(abs(t-t1)<0.000001):find(abs(t-t2)<0.000001),:);

for k=1:mdat
    [c,lag] = xcorr(d1,d(:,k),'unbiased');
    [m,ix] = max(c);
    mlag(k) = lag(ix);
    if (k>1 && abs(mlag(k)-mlag(k-1))>3) % no permite brincos grandes
        mlag(k) = mlag(k-1);
    end
    datnew(:,k) = circshift(dat(:,k),mlag(k)); % shift circular
end

% suaviza lags ..... no funciona para xx yy
% P = polyfit(1:mdat,mlag,2);
% clag = round(polyval(P,1:mdat));
% corrige con lags suaves
% mlag = clag;
for k = 1:mdat
    datnew(:,k) = circshift(dat(:,k),mlag(k));
end

```

## 2-2).- FUNCION FILTRO AIRWAVE (FILTRO FK)

```

function [datnew] = filtro_airwave(dat)
%
% filtra onda directa usando transformacion f-k
%
% dat = matriz de datos (nt x mx)
%
% Regresa datnew : datos filtrados
%
% sept 2011
%

[n,m] = size(dat);
%wt=window(@parzenwin,n);
wt = ones(n,1);
%wx=window(@parzenwin,m);
wx = ones(m,1);
wtap = wt*wx';

fk = fft2(dat.*wtap);
fk(:,1) = 0; %filtra onda directa (elimina #onda=0)

% filtro pasa-bajas f-k
wf=window(@parzenwin,n);
wk=window(@parzenwin,m);

```

```
wfk = fftshift(wf*wk');
fk = fk.*wfk; %filtro pasa-bajas f-k
datnew = real(ifft2(fk));
```

### 3).- FILTRO KALMAN

```
% Lee datos Guadalupe perpendicular
Syy = load('TZprincL4per.txt');
Sxy = load('TZprincL11RT.txt');
Syx = load('TZprincL9TR.txt');
Sxx = load('TZprincL17par.txt');
%ajusta tiempos para comparar con linea diagonal
Sxx = circshift(Sxx,11);
Sxy = circshift(Sxy,10);
Syx = circshift(Syx,14);
Syy = circshift(Syy,3);
t = [-45.6:0.8:173.6]';
x = [0:0.1:16]';
t1 = -20; t2 = 32; % para time-zero
ix1 = 21; ix2 = 141;
% correccion del tiempo zero
[Sxx,xxlag] = t_zero(Sxx,t,1,t1,t2);
[Sxy,xylag] = t_zero(Sxy,t,1,t1,t2);
[Syx,yxlag] = t_zero(Syx,t,1,t1,t2);
[Syy,yylag] = t_zero(Syy,t,1,t1,t2);
% corta los datos en tiempo dejando hasta 80ns
ASxx = Sxx(find(abs(t+8)<10^-5):find(abs(t-80)<10^-5),ix1:ix2);
ASxy = Sxy(find(abs(t+8)<10^-5):find(abs(t-80)<10^-5),ix1:ix2);
ASyx = Syx(find(abs(t+8)<10^-5):find(abs(t-80)<10^-5),ix1:ix2);
ASyy = Syy(find(abs(t+8)<10^-5):find(abs(t-80)<10^-5),ix1:ix2);
% Aplica filtro d kalman para Q y R
Q = 1;
R = 0.01
Kxx = mi_kalman(Axx,R,Q);
Kxy = mi_kalman(Axy,R,Q);
Kyx = mi_kalman(Ayx,R,Q);
Kyy = mi_kalman(Ayy,R,Q);
% calculo de Angulo
AngDegKdiag = 0.5*atan2((Kyx+Kxy),(Kxx-Kyy))*180/pi; %%maximizando la
diagonal
AngDegKantidiag = 0.5*atan2((Kyy-Kxx),(Kyx+Kxy))*180/pi; %%maximiza
antidiagonal
figure %graficado de figuras
gprampb(AngDegKdiag,t,x,jet); xlabel('Distancia (m)'); title(['Q=
',num2str(Q),' R= ',num2str(R)])
figure
gprampb(AngDegKantidiag,t,x,jet); xlabel('Distancia (m)'); title(['Q=
',num2str(Q),' R= ',num2str(R)])
```

## 3-1).- FUNCION FILTRO KALMAN

```

function y = mi_kalman(x,R,Q)
% Aplica filtro de kalman a los datos (x)
% Para diferentes constantes de R y Q
%
% Octubre 2011

[m,n] = size(x); % lee los datos

for nc = 1:n      % doble ciclo para aplicar todos los datos la matriz

Xo = 0;
Po = 1;
K = Po/(Po+R);
y(1,nc) = Xo + K*(x(1,nc)-Xo);
P = (1-K)*Po;

for k = 2:m

    K = P/(P+R);
    y(k,nc) = y(k-1,nc) + K*(x(k,nc)-y(k-1,nc));
    P = (1-K)*P + Q;

end
end

```

## 4).- ENVOLVENTE

```

% Lee datos
Ayy = load('ATZT2per.txt');
Axy = load('ATZT2parper.txt');
Ayx = load('ATZT2perpar.txt');
Axx = load('ATZT2par.txt');

% Normaliza los datos
Axx=Axx./Axx;
Axy=Axy./Axx;
Ayx=Ayx./Axx;
Ayy=Ayy./Axx;

% Calcula la envolvente de los datos
XX = hilbert(Axx);
YY = hilbert(Ayy);
XY = hilbert(Axy);
YX = hilbert(Ayx);

% Grafica la envolvente
Figure
subplot(1,4,1), gpramp(abs(XX),t,x);
title('Sxx')
subplot(1,4,2), gpramp(abs(XY),t,x);

```

```

title('Sxy')
subplot(1,4,3), gpramp(abs(YX),t,x);
title('Syx')
subplot(1,4,4), gpramp(abs(YY),t,x);
title('Syy')

```

## 5).- DESCOMPOSICION EN VALORES SINGULARES

```

% calculo de componentes principales

BSyy = load('ATZL2per.txt'); % lee los datos

Figure % grafica los datos originales
subplot(2,2,1), gpramp(BSyy,t,x), caxis([-1,1]);
title('Syy')
ylabel('Tiempo ns')

[m,n]=size(BSyy);
[u,d,v] = svd(BSyy); % calcula componentes principales

subplot(2,2,2), stem(diag(d),'*'); % grafica componentes principales
title('Diagonal principal SVD')
ylabel('Amplitud')

%Eliminacion onda directa
d(1,1)=0; % Hace cero la component principal

Xfin = u*d*v'; % Recalcula los datos

subplot(2,2,3), gpramp(Xfin,t,x,jet), caxis([-1,1]); % Grafica datos
recalculados
title('Syy sin Onda Directa') % sin componente
principal.
ylabel('Tiempo ns')
xlabel('Distancia m ')

subplot(2,2,4), stem(diag(d),'*');
xlabel('Componentes principales')
ylabel('Amplitud')

```

Apéndice B.- Resumen extendido. IEEE Xplore Digital Library, In 13th International Conference on Ground Penetrating Radar (GPR),

## Experimenting with different polarization arrays in a test site

Almendra Villela and José M. Romo  
Applied Geophysics Department  
Centro de Investigación Científica y Educación Superior de Ensenada (CICESE)  
Ensenada, México  
[avillela@cicese.mx](mailto:avillela@cicese.mx), [jromo@cicese.mx](mailto:jromo@cicese.mx)

**Abstract**— Four GPR antenna configurations were used to illuminate the subsurface using different polarizations. We conducted field experiments in a test site where different objects were buried at a known depth. Measurements with two co-pole antenna configurations were conducted along crosswise sections. In addition, measurements in a 3D grid were carried out at the top of one of the buried objects using four different antenna configurations. We show preliminary results showing some advantages and limitations of each antenna configuration.

**Keywords:** *multicomponent GPR; polarization;*

### I. INTRODUCTION

A number of experiments attempting to exploit the use of different field polarizations to illuminate distinct types of targets at the subsurface have been reported in the past [1], [2], [3], [4], [5], [6] and [7]. It has been observed that the achievement of better images of the subsurface greatly depend on an optimal coupling between profile-orientation and antenna-array with the geometry and material properties of the target. It has been reported that pipes or elongated targets made of low impedance (conductive) material are better imaged with co-pole arrays parallel to the long axes of the target, while co-pole arrays perpendicular to the target axes are better for high impedance pipes or elongated objects [8], [7]. On the other hand, cross-pole arrays are more sensitive to depolarized energy scattered by elongated targets [2]. Thus, a better understanding of polarization features of different antenna configurations and their sensitivity to the scattering properties of target materials is important to improve data interpretation. As new GPR practitioners we are interested in explore the possible advantages of different polarization antennae arrays and gain

experience on multi-component data acquisition and interpretation.

### II. EXPERIMENT DESCRIPTION

We conducted two experiments in a test site of the Universidad Autónoma de Nuevo León, in Linares N.L., México. The test site is an area of 16 x 16 m where four objects have been buried (Figure 1). Object A is an empty plastic barrel of 1 m in diameter and 1.5 m long, buried 0.8 m deep. Object B is a metallic barrel filled with metallic junk; the

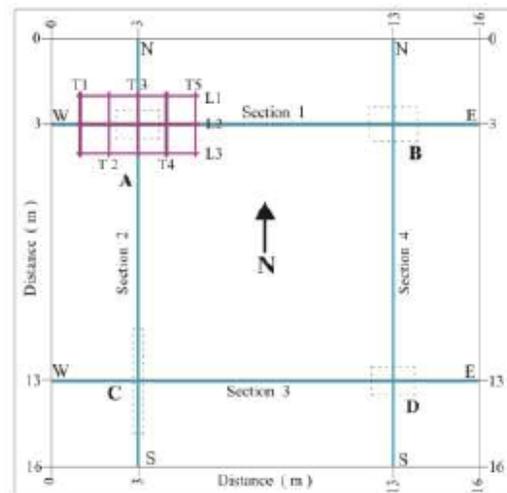


Figure 1. Diagram showing a plan view of the test site. Blue lines correspond to co-pole sections described in Experiment I. Red lines indicate the grid measured for Experiment II. The buried objects are shown in dashed line (see description of objects A, B, C and D in the text)

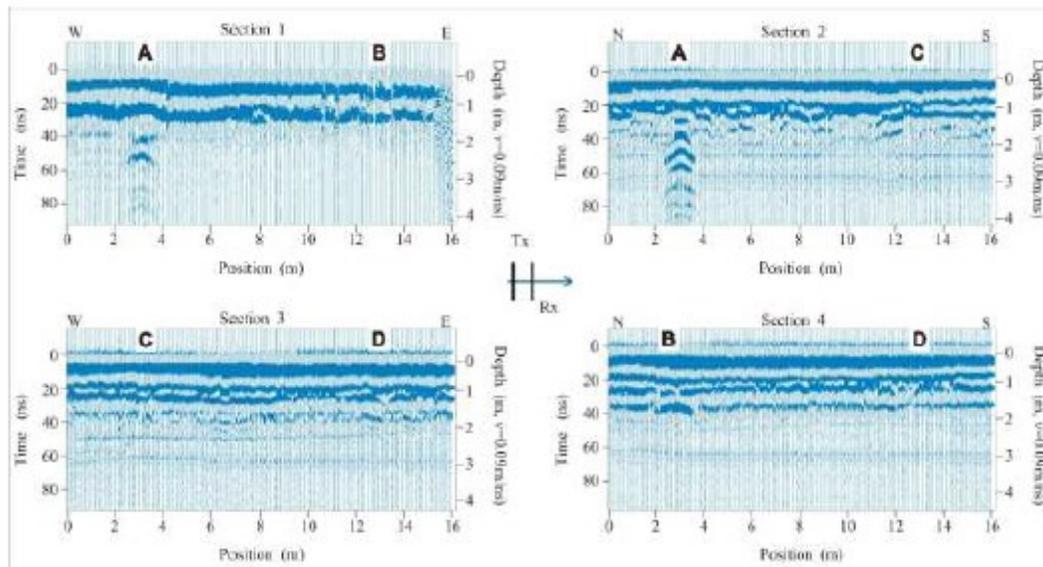


Figure 2. Co-pole sections using the antenna configuration perpendicular to the profile direction. The horizontal position of the objects are shown with bold capitals. A is an empty plastic barrel, B is a metal filled metallic barrel, C is a dipping metallic sheet, and D is a plastic barrel filled with water and foam. The depth scale is estimated with a velocity of 0.09 m/ns

barrel has a diameter of 1 m, is 1.7 m long and is buried at 0.8 m depth and filled with water and foam

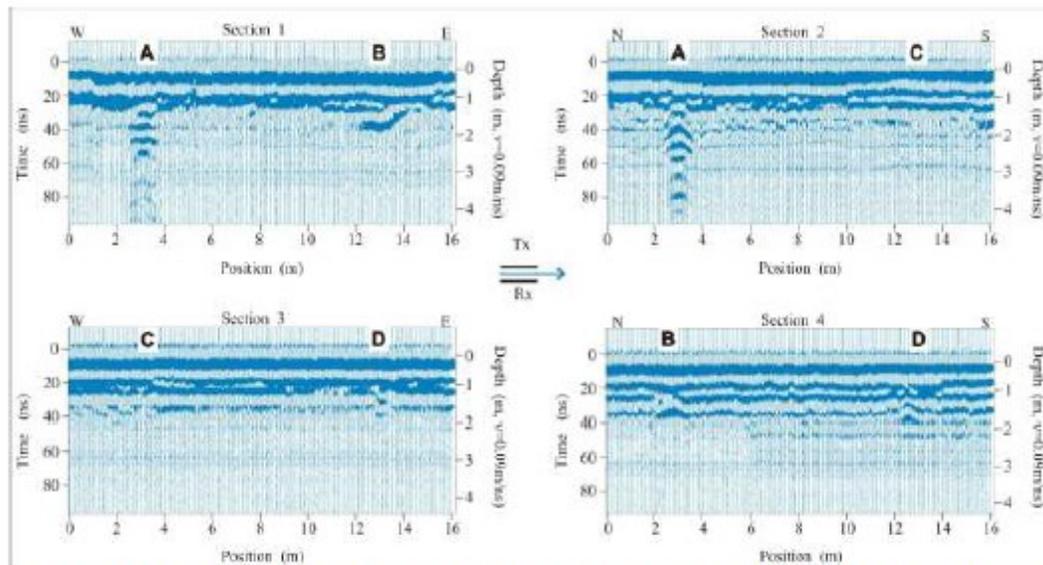


Figure 3. Co-pole sections using the antenna configuration parallel to the profile direction. The horizontal position of the objects are shown with bold capitals. A is an empty plastic barrel, B is a metal filled metallic barrel, C is a dipping metallic sheet, and D is a plastic barrel filled with water and foam. The depth scale is estimated with a velocity of 0.09 m/ns

buried at a depth of 1.0 m. Object C is a dipping thin plate made with a piece of corrugated metal roofing material, its top buried at 1.0 m depth. Object D is a plastic barrel of the same dimensions that object A,

pieces. The terrain at the test site consists of alluvial deposits and conglomerates. A velocity of 0.06 m/ns was estimated for this terrain from a common mid

point survey made at the time of our field experiments. This velocity value seems too small considering that typical values for this kind of soils are close to 0.1 m/ns. Since our measured CMP record is not as clear as required for conclusive ground velocity estimation we decided to use a value of 0.09 m/ns for depth calculation.

#### A. Experiment I

The Sensors&Software bistatic GPR system was utilized with antennas of 200 Mhz. The first experiment consisted of four cross sections, shown in Figure 1 with blue line, located crosswise the four buried objects. The four sections were surveyed with the antennas in two different co-pole arrays, one perpendicular and other parallel to the surveyed line. We utilized a step-size of 0.1 m with transmitter and receiver antennas separated by 0.5 m. The sections were processed with the software Ekkoview deluxe, provided by Sensors&Software. The process sequence was similar for all the sections and consisted in: dewow filtering, time zero correction and a constant gain factor of 20. Figure 2 shows the images obtained with the perpendicular array along the four surveyed lines, while the images resulting from the parallel array are shown in Figure 3.

Object A (empty plastic barrel, 0.8 m deep) produces a strong response consisting of multiple reflections independent of both, antenna configuration and profile orientation, as shown in Sections 1 and 2, Figures 2 and 3. The effect is stronger when profiling N-S (Section 2) for both polarization arrays, i.e. when profiling across the barrel axes.

Object B (metal filled metallic barrel, 1.0 m deep) produces a recognizable response in the crossway sections 1 and 4 of Figure 3, which corresponds to the antenna array parallel to the surveyed line. In contrast, when using the perpendicular array, the response is identifiable only in Section 4, as the antenna polarization is along the axes of the barrel.

Object C (dipping thin metallic plate with top at 1.0 m depth) is causing no anomalies regardless line orientation or antenna polarization. A better coupling between the wave field and the target is expected when the electric field is polarized parallel to the thin sheet plane, i.e. in Section 3 of Figure 2 as well as in Section 2 of Figure 3. However there is

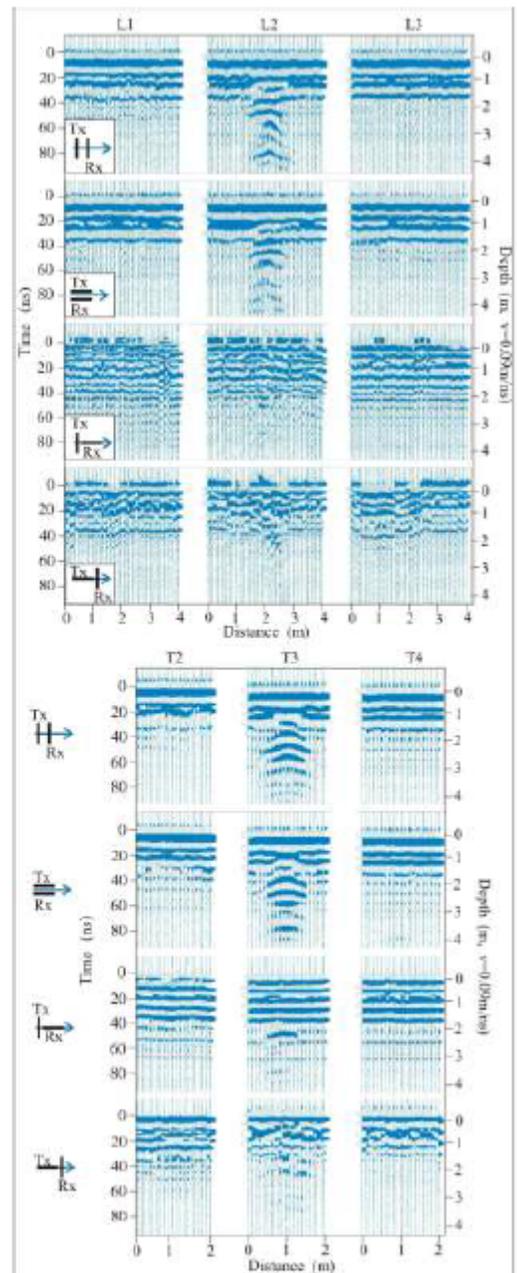


Figure 4. Cross-sections of the 3D grid measured in Experiment II. L1, L2 and L3 are longitudinal sections, while T2, T3 and T4 are transversal sections. The antenna configurations are indicated in the left column.

no recognizable response in these images, a possible

explanation may be a strong depolarizing effect due to the corrugated surface of the metallic sheet.

Object D (plastic barrel filled with water and foam, 0.8 m deep) produces no response when using the perpendicular array, as shown in Sections 3 and 4 of Figure 2, and a very weak response for the parallel array images shown in Sections 3 and 4 of Figure 3. These results contrast with those obtained for the empty plastic barrel (Object A) buried at the same depth. This contrasting behavior may be attributed to the different electromagnetic properties of the filling material, which is air in object A versus water and foam in object D.

### B. Experiment II

The second experiment consisted in a grid of measurements covering an area of 2 by 4 m completed above Object A. The grid is composed of eight profiles 1.0 m apart, three longitudinal and five transversal to the axes of the buried barrel (Figure 1). As before, we used a step-size of 0.1 m with 200 MHz antennas. This time we measured with four polarization arrays, two of them co-polar arrays and two cross-polar arrays. Figure 4 shows the images obtained in three longitudinal sections as well as in three out of five transversal sections. All the sections were processed using the same process sequence

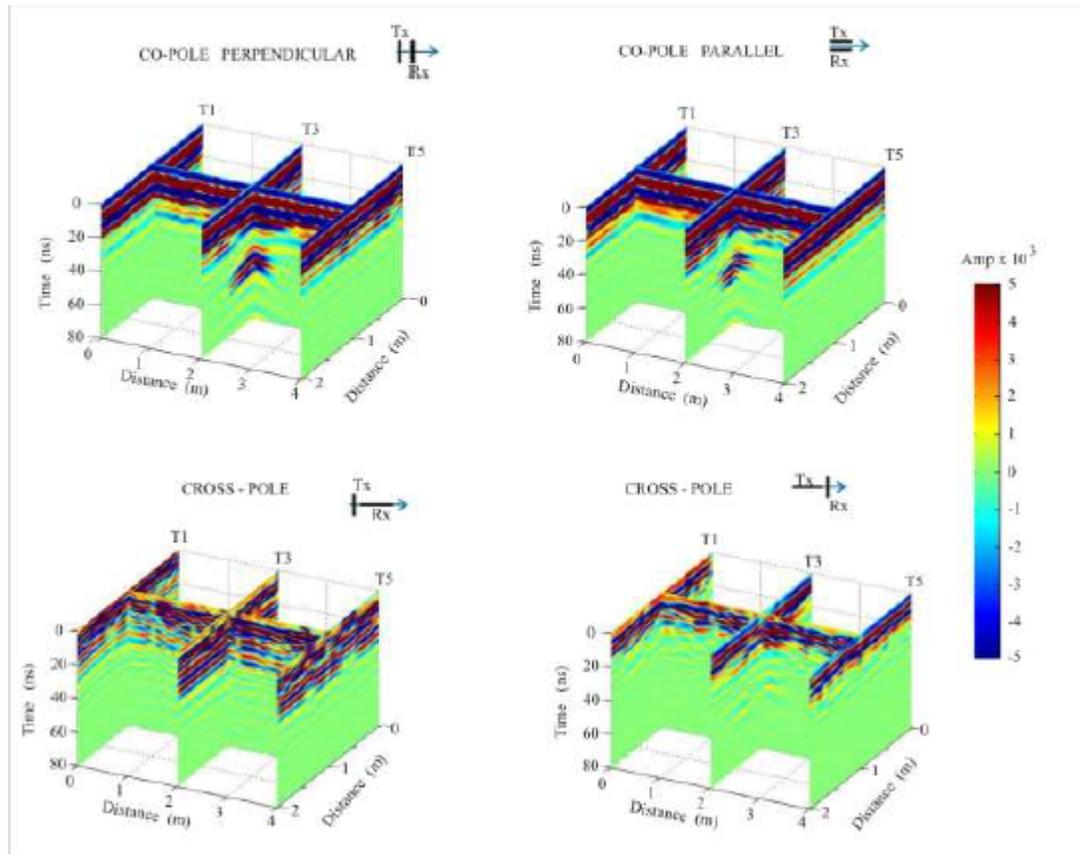


Figure 5. 3D slice view showing the images for three longitudinal sections L1, L2 and L3, as well as three transversal sections T1, T3 and T5 (sections T2 and T4 are not shown). The array configuration is indicated for each panel. The color scale show an adimensional amplitude.

described before.

Sections L1 and L2 show no lateral effects caused by the presence of the target, the barrel response is only visible as multiple reflections in section L2 crossing along the barrel axes. The co-pole sections are much better than the cross-pole, which are fairly noisy.

The co-pole transversal sections T1, T2, T4 and T5, crossing outside the longitudinal limits of the barrel, show no anomalies associated with the lateral influence of the barrel. Some lateral influence can be observed in T2 for the cross-pole arrays but nothing is shown in T4 (sections T1 and T5 are not shown in Figure 4). On the other hand, section T3 crossing transversely the center of the barrel show a strong effect as multiple reflections. Some response is also present in the cross-pole configurations, although not as strong as in the co-pole arrays. The image for the cross-pole array with the transmitter parallel to the barrel axes shows a very clear multiple reflection at 50 ns, which is weaker but still present in the section obtained with the transmitter perpendicular to the barrel axes.

Figure 5 is a 3D slice view showing the images for three longitudinal sections L1, L2 and L3, as well as three transversal sections T1, T3 and T5 (sections T2 and T4 are not shown). This figure summarizes the results obtained in the 3D grid above the empty plastic barrel (object A).

### III. CONCLUSIONS

The empty plastic barrel (object A) is suitably imaged by the two co-pole arrays, although the configuration with the electric field polarized perpendicular to the barrel axis provides a better image. Conversely, the metal filled barrel (object B) is better imaged when the array is oriented parallel to the long axes of the barrel. The dipping metallic sheet (object C) was not detected by any array, probably because a strong depolarizing effect. Unexpectedly, the plastic barrel filled with water and foam (object D) produced a very weak response for the two co-pole configurations, possibly due to a lower impedance contrast with the surrounding media. As a final point, we found that the cross-pole configuration utilized in the 3D grid surveyed above the air filled plastic barrel added no significant information to those provided by the co-pole arrays. It is worth to mention that the main advantage of

cross-pole arrays has been reported when used for detection of highly depolarizing objects, which apparently is not the case for our surveyed object A.

### ACKNOWLEDGMENT

We thanks to Dr. Sóstenes Méndez from Facultad de Ciencias de la Tierra de la UANL as well as the students Ana Lilia, Ernesto, Lili, Carlos and Cuauhtémoc, for their help and support during the field work. We also thanks to MSc Fernando Herrera as well as to Jaime Calderón from CICESE for their technical support in several measurements and experiments conducted at different places. We also thank CONACYT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) for the financial support of Almendra Villela as graduate student in CICESE.

### REFERENCES

- [1] Roberts, R. L., 1994, Analysis of theoretical modeling of GPR polarization phenomena, Ph.D. dissertation, The Ohio State University, 429 p.
- [2] Roberts, R. L., and J. J. Daniels, 1996, Analysis of GPR polarization phenomena: *Journal of Environmental and Engineering Geophysics*, v. 1, p. 139-157.
- [3] Roberts, R. L., and J. J. Daniels, 1997, Modeling near-field GPR in three dimensions using the FDTD method: *Geophysics*, v. 62, p. 1114-1126.
- [4] Tsofilas, G. P., J.-P. Van Gestel, P. L. Stoffa, D. D. Blankenship, and M. Sen, 2004, Vertical fracture detection by exploiting the polarization properties of ground-penetrating radar signals: *Geophysics*, v. 69, p. 803-810.
- [5] van Gestel, J.P., and P. L. Stoffa, 2001, Application of Alford rotation to ground-penetrating radar data: *Geophysics*, v. 66, p. 1781-1792.
- [6] van der Kruk, J., C. P. A. Wapenaar, J. T. Fokkema, and P. M. van den Berg, 2003, Three-dimensional imaging of multicomponent ground-penetrating radar data: *Geophysics*, v. 68, p. 1241-1254.
- [7] Capizzi, P., and P. L. Cosentino, 2008, GPR multi-component data analysis: *Near Surface Geophysics*, v. 6, p. 87-95.
- [8] Radzevicius, S., and J. J. Daniels, 2000, Ground penetrating radar polarization and scattering from cylinders: *Journal of Applied Geophysics*, v. 45, p. 111-123.

## Apéndice C.- Artículo.

Journal of Applied Geophysics 90 (2013) 71–81



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Journal of Applied Geophysics

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jappgeo](http://www.elsevier.com/locate/jappgeo)

## Invariant properties and rotation transformations of the GPR scattering matrix



Almendra Villela\*, José M. Romo

División de Ciencias de la Tierra, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, Carretera Ensenada-Tijuana #3918, zona Playitas, Ensenada, Baja California 22860, Mexico

## ARTICLE INFO

## Article history:

Received 13 July 2012

Accepted 1 January 2013

Available online 11 January 2013

## Keywords:

GPR scattering matrix

Multiple polarizations

Invariant properties

GPR matrix transformation

## ABSTRACT

We analyze the properties of the scattering matrix associated with the incident and scattered electric fields used in GPR. The elements of the scattering matrix provide information produced by different polarizations of the incident wave field. Rotationally invariant quantities such as trace, determinant and Frobenius norm lead to images that combine the information contained in the four elements of the scattering matrix in a mathematically simple and sound manner. The invariant quantities remove the directional properties implicit in the dipolar field used in GPR allowing the application of standard processing techniques designed for scalar fields, such as those used in seismic data processing. We illustrate the non-directional properties of the invariants using a 3D simulation of the wavefield produced by a point scatterer. The estimation of the azimuth angle of elongated targets is also explored using rotation transformations that maximize alternatively the co-polarized or the cross-polarized responses. The angle estimation is essentially an unstable process, particularly if low amplitudes or noisy data are involved. We apply the Frobenius norm  $\|S\|_F$  as a criterion for selection of the best amplitudes to use for a more stable and significant angle estimation. The performance of our formulation was tested with synthetic data produced by a 3D model of an air-filled metal pipe buried in a homogeneous halfspace. The images resulting from the invariants show a clear diffraction hyperbola suitable for a scalar wavefield migration, while the azimuth of the pipe is neatly resolved for amplitudes selected with  $\|S\|_F \geq 0.4$ . A field experiment conducted above an aqueduct pipe illustrates the proposed methods with real data. The images obtained from the invariants are better than those from the individual elements of the scattering matrix. The azimuth estimated using our formulation is in agreement with the probable orientation of the aqueduct. Finally, a field experiment above a buried air-filled barrel shows that combining the information in the way proposed in this work may lead to an improved image of the subsurface target, the cost to pay is the loss of directional information contained in the scattering matrix. In general, we claim that the methods proposed in this work can be useful to analyze the information acquired by multicomponent GPR surveys using standard scalar wavefield algorithms.

© 2013 Elsevier B.V. All rights reserved.

## 1. Introduction

The vector nature of the electromagnetic fields generated and measured by ground penetrating radars (GPR) prompts the study of the response of buried targets to different field polarizations (Roberts, 1994; Roberts and Daniels, 1996). A number of experiments have been attempted to exploit the use of multicomponent measurements for different subsurface targets. It has been shown that using different polarizations can help to better define the size, shape and orientation of the target. For example, Guy et al. (1999) found that non-planar or rough objects are better imaged using a receiver antenna perpendicular to the polarization of the source (cross-polarization); Radzevicius and Daniels (2000) studied the backscattered fields from cylinders with different polarization properties; they found that high impedance

dielectric pipes are best imaged with the long axis of the dipoles oriented orthogonal to the long axis of the pipes, while using antennas oriented parallel to the long axis of the pipes produces better images for low impedance metallic pipes. In recent years, a number of migration algorithms have been proposed to properly account for the vector nature of GPR wave propagation as well as for dipolar antenna radiation patterns and coupling factors (Lambot et al., 2004; Streich et al., 2007; van der Kruk et al., 2003). Orlando and Slob (2009), using 2.0 GHz multicomponent data to detect cracks in a historical building, found that vector migration images have better resolution than images obtained with standard 2D scalar migration.

On the other hand, it is common that algorithms designed for elastic waves processing (seismic reflection data) be used for GPR data processing. Lehmann et al. (2000) pointed out the convenience of using the sum of copolarized fields to obtain non-directional wavefields suitable for processing with standard scalar wavefield algorithms.

In this work we explore the rotation-invariant properties of the scattering matrix and their ability to transform the characteristic directional

\* Corresponding author at: CICESE/Earth Sciences, P.O. Box 434843, San Diego, CA, 92143-4843, United States. Tel.: +52 646 175 0500; fax: +52 646 175 0567.

E-mail addresses: [avillela@cicese.mx](mailto:avillela@cicese.mx) (A. Villela), [jromo@cicese.mx](mailto:jromo@cicese.mx) (J.M. Romo).

wavefield implicit in GPR measurements to a non-directional field more appropriate for processes designed for scalar wave fields like seismic waves. We also propose an improved way to estimate the orientation of elongated objects by using particular rotation transformations of the scattering matrix.

## 2. The scattering matrix

In a common bistatic GPR system, the transmitting dipolar antenna produces a nearly linearly polarized electromagnetic field oriented mainly parallel to the axis of the antenna. A separate receiver antenna detects the signal backscattered by the targets in the subsurface. The amplitude, polarization, and arrival time of the backscattered field strongly depend on the electromagnetic (EM) properties and geometry of the target, as well as on the subsurface properties. Elongated targets such as pipes or dipping fractures change the polarization of the transmitted wave producing backscattered fields in directions distinct from the transmitting antenna axis. This fact encourages the idea of illuminating the targets and measuring the backscattered field with different antenna orientations in order to obtain information about each target's orientation as well as about its EM properties. Four antenna arrays might be devised to illuminate a target and register the scattered wave field along a profile: two co-polarized arrays and two cross-polarized arrays. In the co-polarized (co-pol) arrays the receiver and transmitter antennas are parallel to each other, while in the cross-polarized (x-pol) mode they are perpendicular. The common practice in GPR profiling is to operate a co-pol array in a "broadside" mode, i.e. with both antennas perpendicular to the profile's direction. Other possibility is setting the co-pol array with both antennas parallel to the profile's direction. For the x-pol array there are also two possible operation modes: one of them with the transmitter perpendicular to the profile's direction and the other parallel to it.

The response of these four arrays is represented by the time-domain scattering matrix  $S(t)$  (Chen et al., 2001; Sassen and Everett, 2009)

$$S(t) = \begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{yx} & S_{yy} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where the first subscript in the elements of the matrix represents the transmitter direction and the second subscript corresponds with the receiver orientation. Thus, co-pol responses are in the diagonal and the off-diagonal elements are x-pol responses. Because of the reciprocity principle, both x-pol arrays are exactly equivalent; however, it is meaningful to acquire field data with both of them as to reduce noise and contribute to the image improvement.

For horizontal planar scatterers both co-pol arrays are identical ( $S_{xx} = S_{yy}$ ) and the x-pol response vanishes ( $S_{xy} = S_{yx} = 0$ ). In contrast, for elongated targets the co-pol responses differ, and the x-pol responses are not null, with their relative amplitude depending on the geometry and electrical properties of the target (Radzevicius and Daniels, 2000). The time-domain matrix  $S$  is a real-valued symmetric matrix with  $S_{xy} = S_{yx}$  because of the reciprocity principle. Each element in  $S$  might represent the time-varying radargram in a given location of the Tx-Rx (transmitter-receiver) array, or a whole common-offset section along a given profile.

Applying a simple linear transformation to the scattering matrix, the orientation of the measurement frame can be rotated at different azimuths in order to investigate the target's response as a function of the polarization direction. The scattering matrix in a rotated system is given by

$$S' = RSR^T, \quad (2)$$

where

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (3)$$

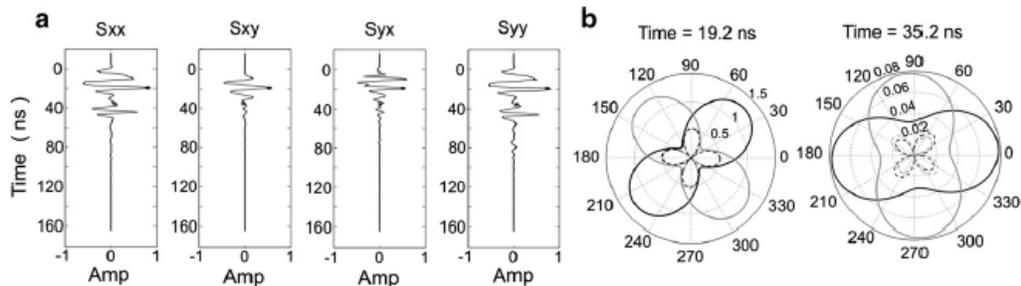
and  $\theta$  is the counterclockwise rotation angle. The elements of the rotated matrix  $S'$ , in terms of original elements and the rotation angle, are given by

$$\begin{aligned} S'_{xx} &= S_{xx} \cos^2\theta + S_{yy} \sin^2\theta + (S_{yx} + S_{xy}) \sin\theta \cos\theta \\ S'_{xy} &= S_{xy} \cos^2\theta - S_{yx} \sin^2\theta + (S_{yy} - S_{xx}) \sin\theta \cos\theta \\ S'_{yx} &= S_{yx} \cos^2\theta - S_{xy} \sin^2\theta + (S_{yy} - S_{xx}) \sin\theta \cos\theta \\ S'_{yy} &= S_{yy} \cos^2\theta + S_{xx} \sin^2\theta - (S_{yx} + S_{xy}) \sin\theta \cos\theta \end{aligned} \quad (4)$$

For a fixed time, one can plot the four elements of the scattering matrix as a function of the rotation angle, using a polar diagram representation.

Fig. 1a shows the radargrams registered by co-pol and x-pol antenna configurations in a given site. Both co-pol signals,  $S_{xx}$  and  $S_{yy}$ , are very similar in amplitude and shape; the x-pol signals  $S_{xy}$  and  $S_{yx}$  exhibit some differences probably because of measurement inaccuracies and/or noise contamination. Fig. 1b shows polar diagrams obtained at  $t = 19.2$  ns and  $t = 35.2$  ns using the four radargrams in Fig. 1a. The diagrams show the amplitude's absolute value of the four elements of  $S'$  in the azimuth range  $0^\circ < \theta < 360^\circ$ .

Several properties of the scattering matrix are evident in the polar diagram plot. The co-pol amplitudes are related by  $S'_{xx}(\theta) = S'_{yy}(\theta + 90^\circ)$ , while the x-pol amplitudes, which should be identical because of the reciprocity principle, have some differences attributable to measurement inaccuracy. A remarkable property is that the azimuth that makes  $S'_{xx}$



**Fig. 1.** (a) Radargrams showing the four sets of measurements used to fill the elements for the scattering matrix as a function of time. In the radargram, the symbol at  $t = 19.2$  ns and  $t = 35.2$  ns indicates the time selected to calculate the polar diagrams shown in b. The amplitude of the components was normalized only for plotting purposes. (b) Polar diagrams calculated for  $t = 19.2$  ns and  $t = 35.2$  ns. The magnitude of  $S_{xx}(\theta)$  and  $S_{yy}(\theta)$  is shown as continuous black and gray lines, respectively, while the x-pol elements  $S_{xy}(\theta)$  and  $S_{yx}(\theta)$  are the black and gray dashed lines, respectively. Magnitude normalized for plotting purposes.

a maximum, also makes  $S_{YY}$  a minimum, and makes null  $S_{XY}$  and  $S_{YX}$ . Conversely, the azimuth that makes  $S_{XY}$  and  $S_{YX}$  a maximum yields  $S_{XX} = S_{YY}$ . In addition, these two particular azimuths are different by  $45^\circ$ .

The azimuth that maximizes the x-pol components of  $S'$  can be found by making zero the derivative of  $S'_{XY}$  or  $S'_{YX}$  with respect to  $\theta$ , which yields:

$$\theta_{\perp} \pm n \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{atan}^{-1} \left( \frac{S_{YX} - S_{XX}}{S_{XY} + S_{YX}} \right). \quad (5)$$

This result has a  $90^\circ$  ambiguity because of the harmonic behavior of  $S'_{XY}$ , which is also evident in the polar diagram of Fig. 1b. Similarly, the azimuth that maximizes one of the co-pol components is given by

$$\theta_{\parallel} \pm n \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{atan}^{-1} \left( \frac{S_{XY} + S_{YX}}{S_{XX} - S_{YY}} \right). \quad (6)$$

As noticed before,  $\theta_{\perp}$  and  $\theta_{\parallel}$  are  $45^\circ$  apart. For the example shown in the polar diagram of Fig. 1b, at 19.2 ns,  $\theta_{\perp} = -2.4^\circ$  and  $\theta_{\parallel} = 42.6^\circ$ . The interpretation of these angles has to do with the depolarization

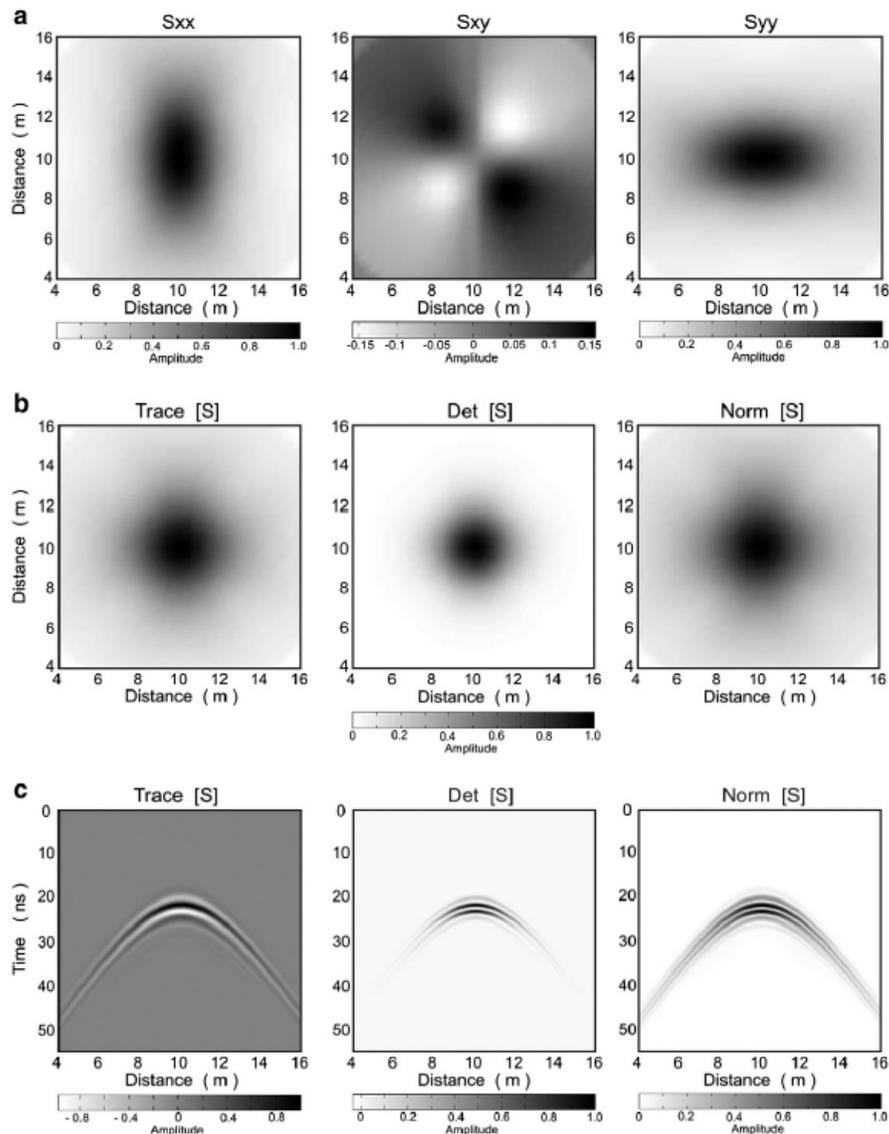


Fig. 2. Backscattered field from a point scatterer located 3.0 m below the acquisition plane in a homogeneous air volume. (a) Maximum amplitude values for  $S_{xx}$ ,  $S_{xy}$  and  $S_{yy}$  shown in a plain view. (b) Maximum amplitude values for the invariant quantities shown in a plain view. (c) Cross-section showing diffraction hyperbolas corresponding to the invariant quantities.

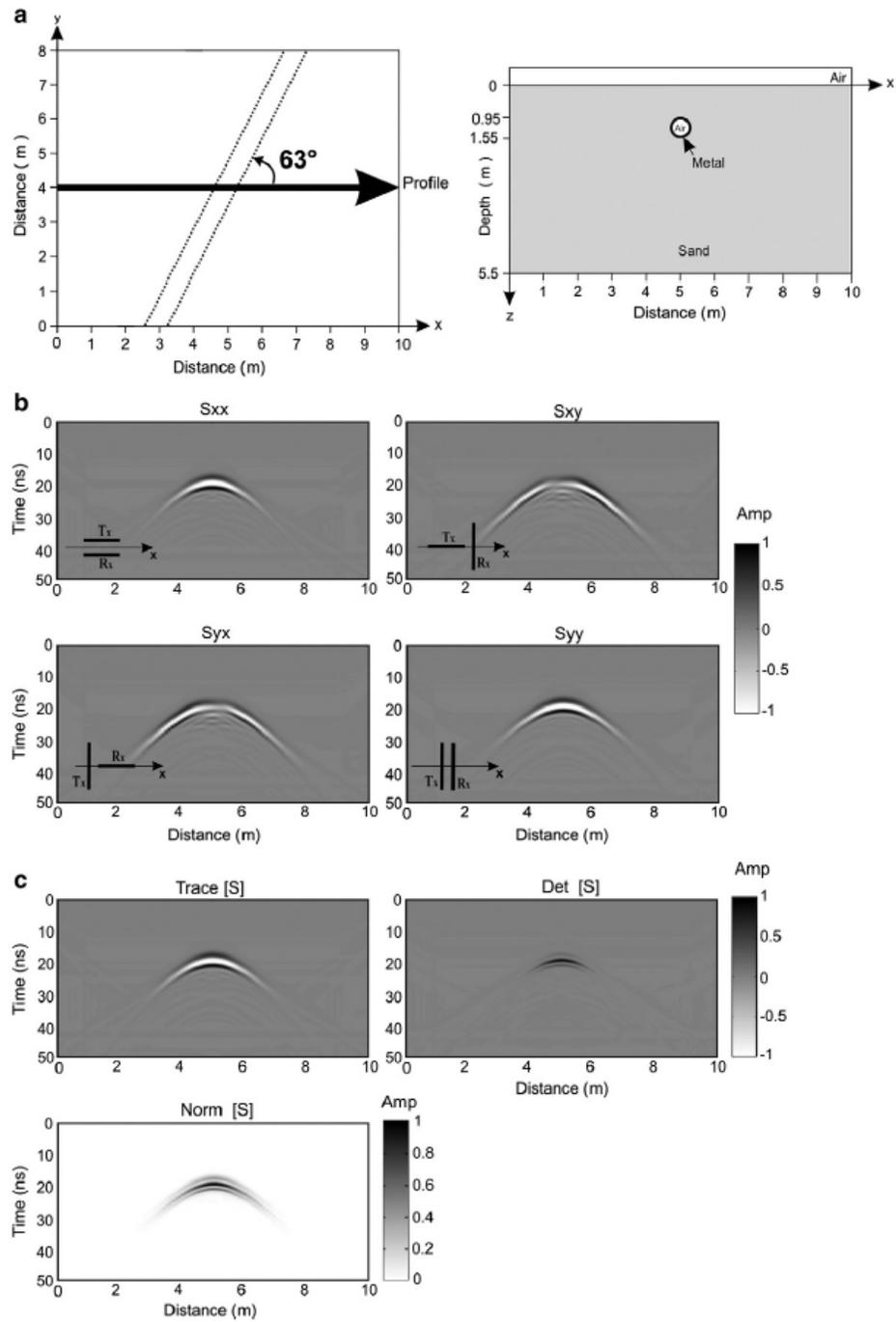


Fig. 3. (a) 3D Model of an air-filled metal pipe buried in a homogeneous media and forming an angle of  $63^\circ$  with a simulated measured profile. (b) Cross-sections of the four elements of the scattering matrix (amplitudes normalized for plotting purposes). (c) Cross-sections of the invariant quantities (amplitudes normalized for plotting purposes).

effect discussed by Roberts and Daniels (1996), which depends on the EM properties and geometry of the target as well as on the angle of the incident field. The amplitude of parallel and perpendicular components of the incident field is modified when reflected by the target, leading to a scattered field with a different polarization.

Other important properties of  $S$  are easily derived from Eq. (2): the trace, determinant and Frobenius norm of  $S$  are rotation invariants,

$$\begin{aligned} \text{trace}(S') &= \text{trace}(S) \\ S'_{xx} + S'_{yy} &= S_{xx} + S_{yy}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \det(S') &= \det(S) \\ S'_{xx}S'_{yy} - S'_{xy}S'_{yx} &= S_{xx}S_{yy} - S_{xy}S_{yx}, \end{aligned} \quad (8)$$

and

$$\begin{aligned} \text{norm}(S') &= \text{norm}(S) \\ |S'_{xx}|^2 + |S'_{yy}|^2 + |S'_{xy}|^2 + |S'_{yx}|^2 &= |S_{xx}|^2 + |S_{yy}|^2 + |S_{xy}|^2 + |S_{yx}|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

The rotation-invariant quantities may be useful to construct better images of the subsurface as they use the information provided in the four elements of the scattering matrix and, at the same time, they remove the directional character of the GPR dipolar field. It should be mentioned that this may be assumed as a loss of information, as the directional information contained in the individual elements of  $S$  is removed, however this fact may become an advantage when scalar field algorithms are to be used to process the arrival-time sections.

As mentioned before, Lehmann et al. (2000) show that the sum of co-pol components leads to a "pseudo-scalar" image comparable to one produced by a non-directional wavefield. Here we show that this happens because this sum, i.e., the trace of  $S$  is a rotation invariant (Eq. (7)). In a similar way, the determinant and norm of  $S$  (Eqs. (8) and (9)) remove the directional nature of the individual elements of the matrix to produce non-directional fields.

As an example, consider a point scatterer simulated by a small metallic sphere (radius = 0.1 m) located 3.0 m below the data acquisition plane, in a homogeneous air volume. Measurements of the four elements of the scattering matrix were simulated in the  $x$ - $y$  plane using a 200 MHz dipolar source. We utilized GprMax3D, a numerical simulator for GPR electromagnetic wave propagation written by Giannopoulos (2005). The code is a finite difference time-domain simulator for 3D GPR numerical modeling that allows simulating 3D targets with different geometries and electrical properties, as well as dipolar sources with different polarizations. The code is freely available in <http://www.gprmax.org>.

Fig. 2 shows the maximum amplitude of the field produced by the model described before, as measured at the top of the model. Fig. 2a shows, in color scale, the maximum amplitude of three components of the scattering matrix:  $S_{xx}$ ,  $S_{xy}$ ,  $S_{yy}$  ( $S_{yx}$  is identical to  $S_{xy}$ ). The

point scatterer is located in the center of the model ( $x = 10$  m,  $y = 10$  m) at 3 m beneath the acquisition plane. The natural directional effect is evident in the co-pol components; the  $x$ -pol component has a null response at the center of the plane and along two perpendicular axes,  $x = 10$  m and  $y = 10$  m, as well as anti-symmetric maxima and minima located in the four quadrants. The amplitudes in the three plots are relative to the maximum of  $S_{xx}$ . Invariant responses (Eqs. (7), (8) and (9)) are illustrated in Fig. 2b and the corresponding diffraction hyperbolas are shown in the cross-sections of Fig. 2c. Besides the circular symmetry, it is shown that the determinant produces a more compacted response of the point scatterer, while the lateral extension of the norm and trace responses is similar. The trace allows for negative and positive values so that the wavelet shape is not distorted, as can be observed in the corresponding diffraction hyperbola. In contrast, the Frobenius norm shows the absolute value of the response wavelet. A relative advantage of the trace over the norm is that it needs only the co-pol elements of the scattering matrix, so that the extra effort in acquisition of  $x$ -pol components can be saved, if the target being surveyed has no depolarizing properties.

### 3. Azimuth estimation

Some authors have utilized the scattering matrix to extract directional information of the target. For example, Chen et al. (2001) used the eigenvalues of the scattering matrix to characterize unexploded ordnance. Tsoulias et al. (2004) observed consistent phase differences between co-polarized configurations that can be used to estimate the presence and azimuth of vertical fractures. Van Gestel and Stoffa (2001) utilized the rotation transform proposed by Alford (1986) to investigate the directional properties of different targets such as dipping layers, cylinders and fractures. They use the transformation (2) in a "forward" way, i.e., they calculate  $S'$  for a set of angles in the range  $0 < \theta < 180^\circ$ , and look for maximum and minimum values in the resulting rotated components. Seol et al. (2001) proposed the angle that minimizes the energy of the  $x$ -pol components, as a way to identify the azimuth of sub-vertical fractures. They use an optimization approach that sets to zero the derivative of the  $x$ -pol energy  $|S'_{yx}|^2$ , yielding a resulting angle

$$\theta = \frac{1}{2} \text{atan} \left[ \frac{-\left(\frac{1}{2}A^2 - 2B^2\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}A^2 - 2B^2\right)^2 + 4(AB)^2}}{2AB} \right], \quad (10)$$

where  $A = S_{yy} - S_{xx}$  and  $B = S_{yx}$ . Notice that Eq. (10) provides two values, as it is the solution of a quadratic equation. One of these is the azimuth of the target and the other is perpendicular to it.

On the other hand, Capizzi and Cosentino (2008) use the angle that maximizes the  $x$ -pol components, as proposed in Eq. (5), except that they calculate two cases, one assuming that  $S_{xy} + S_{yx} = 2S_{xy}$ , and other for  $S_{xy} + S_{yx} = 2S_{yx}$ , on the basis of the reciprocity principle.

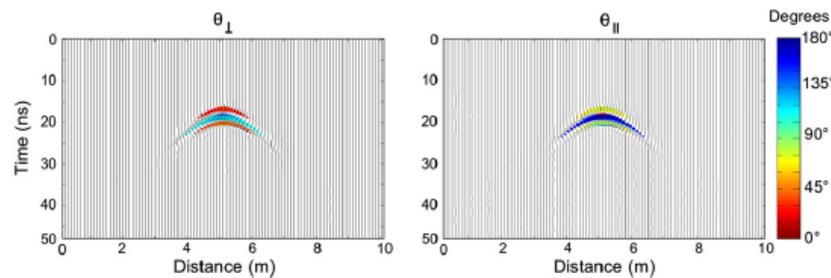
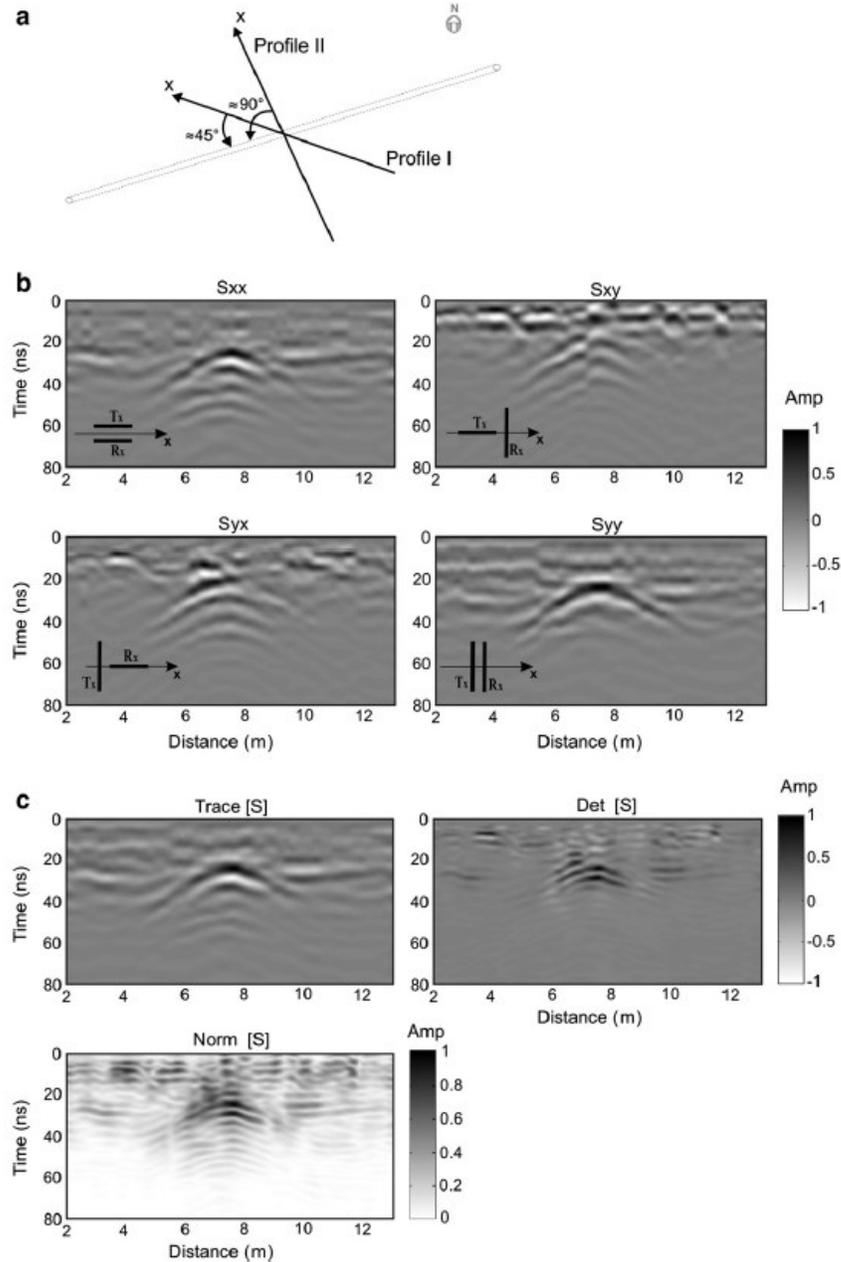


Fig. 4. Angle estimation for the model described in Fig. 3a, obtained by maximizing co-pol and x-pol components,  $\theta_{\perp}$  and  $\theta_{\parallel}$  respectively.

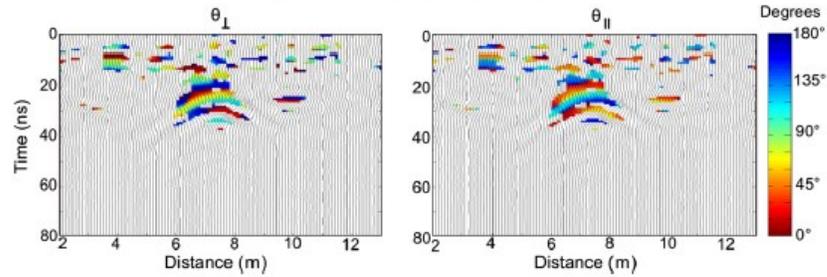
They proposed the arithmetic average of them as indicative of the target azimuth.

In principle, the angles given by Eq. (10) as well as by  $\theta_{\perp}$  and  $\theta_{\parallel}$  proposed in Eqs. (5) and (6), or the average proposed by Capizzi and Cosentino (2008), can be calculated at any data point in a GPR

travel-time section. However, the calculation becomes very unstable for small amplitudes or in the case of noisy data. Thus, the resulting angles are significant only if they are calculated at the arrival times and in the spatial location of good reflectors. We use the Frobenius norm (9) as a “filter” for selection of the best amplitudes to use for



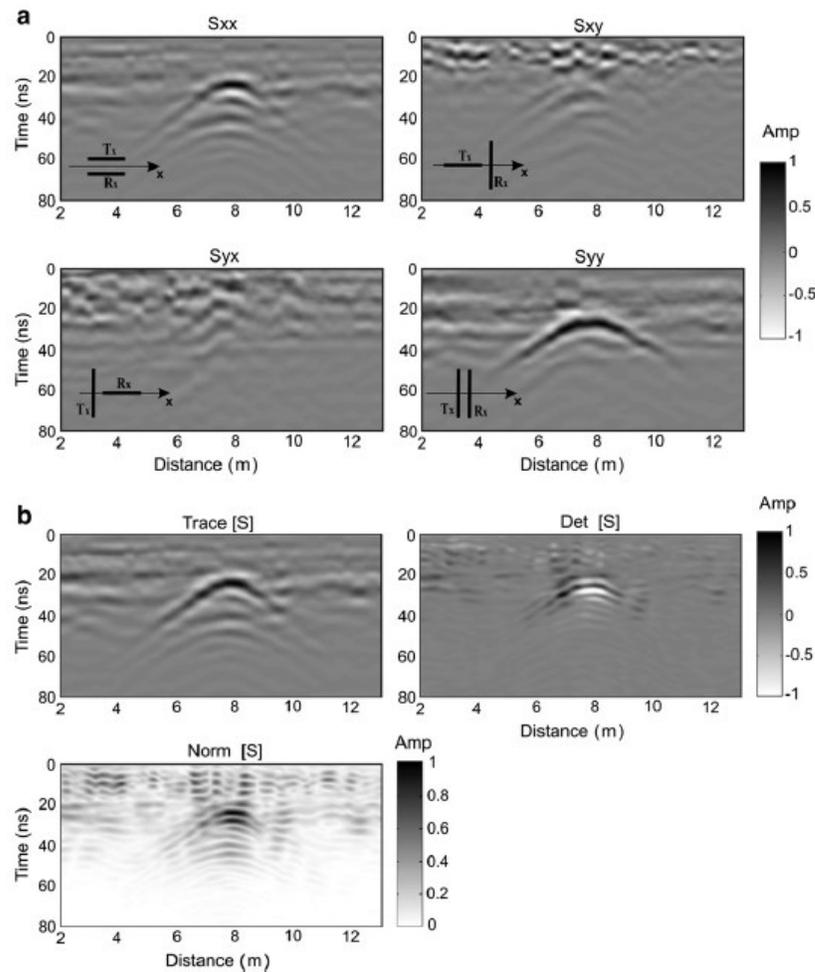
**Fig. 5.** (a) Outline of an aqueduct pipe and two measured profiles; the pipe is buried  $-1.5$  m deep. (b) Cross-sections with the elements of the scattering matrix measured for Profile I. The section runs diagonally across the pipe. After filtering the direct arrival the amplitude of the components was normalized for plotting purposes. (c) Cross-sections of the invariant quantities. Amplitudes normalized for plotting purposes.



**Fig. 6.** The angle estimation obtained by maximizing the x-pol  $\theta_{\perp}$  and co-pol  $\theta_{\parallel}$  components, respectively, is shown in color scale. The background shows the trace of the scattering matrix. The section runs diagonally across the pipe. Angles are estimated for amplitudes with  $|S|_F > 0.35$ , for  $|S|_F$  normalized in the interval  $0 < |S|_F < 1$ ; the background corresponds to the trace of  $S$ . (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

a more stable and significant angle estimation. Thus, only amplitudes with a Frobenius norm above a given threshold are considered for angle calculation. The selection of the threshold depends on the

quality and complexity of the travel-time section, a trial and error process may be carried out to define the value producing the best results.



**Fig. 7.** (a) Cross-sections with the elements of the scattering matrix measured for Profile II. The section runs perpendicularly across the pipe (Fig. 5a). The amplitude of the components was normalized for plotting purposes. (b) Cross-sections showing the invariant quantities. Amplitudes normalized for plotting purposes.

#### 4. Model example

We illustrate the performance of the rotation invariants described in Eqs. (7), (8) and (9) as well as results of the azimuth estimation with Eqs. (5) and (6) using a synthetic model of an air-filled metal pipe 0.60 m in diameter, buried 0.95 m deep in a homogeneous medium ( $\epsilon=4$ ,  $\sigma=0.01$  mS/m,  $\mu=\mu_0$ ). The observed profile traverses the pipe at an angle of  $63^\circ$  as shown in Fig. 3a. The four components of the scattering matrix were simulated along the profile every 0.1 m using the code GprMax3D. In Fig. 3b we show cross-sections for the four elements of the scattering matrix. The diffraction hyperbola caused by the pipe is clearly shown in the four responses: the diagonal components have maximum amplitudes at the top of the pipe, while the x-pol arrays show small amplitudes at the top and larger amplitudes at the sides of the hyperbola, as expected. We removed the first arrival by subtracting the background response registered in the leftmost edge of the section. The invariant quantities shown in Fig. 3c produce enhanced images by combining the information of the four elements of the scattering matrix. Because of the rotation invariance property, the images produced by each of these three responses have lost any directional preference and are suitable to scalar wavefield processing.

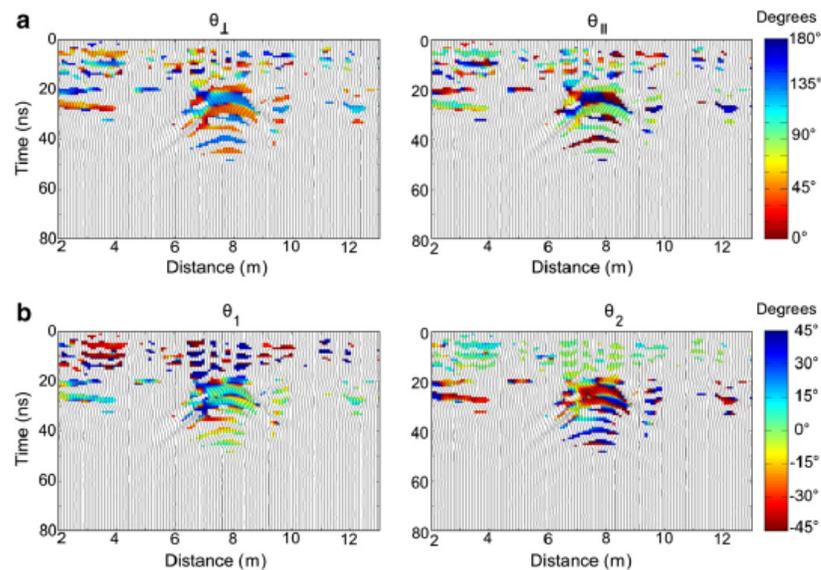
The azimuth estimation using the angles  $\theta_{\perp}$  and  $\theta_{\parallel}$  is shown in Fig. 4. The angles were calculated only for  $\|S\|_F \geq 0.4$ , with  $\|S\|_F$  normalized in the interval  $0 < \|S\|_F < 1$ . The continuous lines in the background of the figure are radargrams obtained with the sum of the co-pol elements, i.e., the trace of the scattering matrix. The magnitude condition holds along the whole diffraction hyperbola providing very consistent angle estimation. As expected in our example,  $\theta_{\perp}$  is close to  $63^\circ$  (counterclockwise) at the top of the diffraction, in agreement with the pipe azimuth, while  $\theta_{\parallel}$  is about  $18^\circ$ , that is, a  $45^\circ$  difference with  $\theta_{\perp}$ . Both angles show  $90^\circ$  changes as the wave polarity changes with time.

#### 5. Field experiments

In this section we present results of two field experiments, one of them conducted above an aqueduct pipe and the other over an air-filled plastic barrel.

##### 5.1. Aqueduct pipe

Multi-polarization data were acquired across a stainless steel water pipe 45 cm in diameter and buried about 1.5 m deep. This pipe connects water wells of the municipal water distribution system for the city of Ensenada in Baja California, Mexico. The azimuth of the pipe was known to a certain extent as it runs parallel to a dirt road along the battery of wells. Data were measured with a 200 MHz GPR system along two profiles, one perpendicular and the other at an angle of  $\sim 45^\circ$  with the assumed direction of the pipe (Fig. 5a). Cross-sections along the diagonal profile (Profile I), for the four elements of the scattering matrix, are shown in Fig. 5b. A careful correction of the time zero was carried out in order to have the same time reference for the four sections. The time-zero correction along each travel-time section was carried out by trace cross-correlation and refined by fitting a common time-zero using the maximum amplitude of the first arrival in the four sections. The measured amplitude was preserved in the whole travel-time section space, except for the direct arrival, which was filtered out in the f-k domain once the time-zero correction was performed. In this particular case, the f-k filtering produced better results than a direct subtraction of the background using an average radargram. The signature of the pipe is observed as a diffraction hyperbola in the four elements of the scattering matrix, as expected from a pipe at an orientation oblique to the profile. The three invariants of  $S$  (Fig. 5c) provide images of similar quality, with the pipe diffraction clearly observed in all of them. In Fig. 6 we

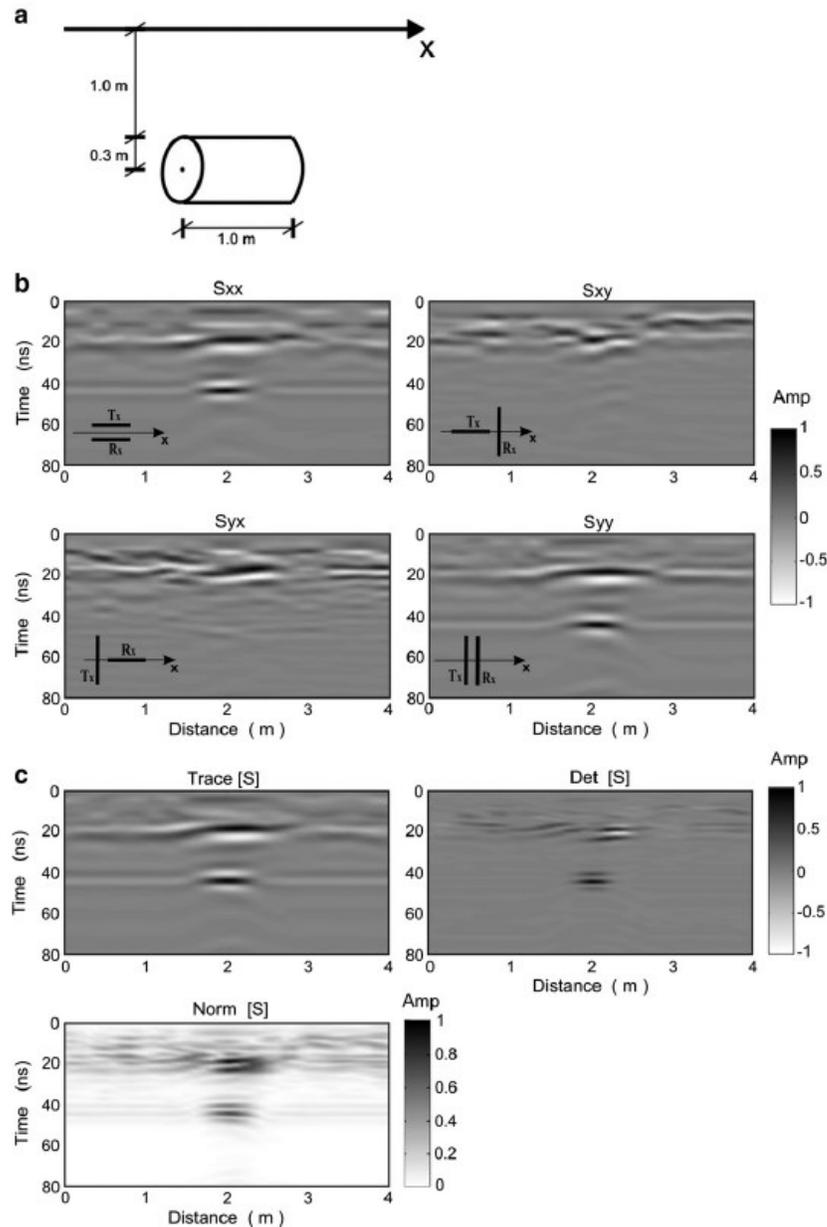


**Fig. 8.** (a) The angle estimation obtained by maximizing the x-pol  $\theta_{\perp}$  and co-pol  $\theta_{\parallel}$  components, respectively, is shown in color scale. The background shows the trace of the scattering matrix. Angles are estimated for amplitudes with  $\|S\|_F > 0.2$ , for  $\|S\|_F$  normalized in the interval  $0 < \|S\|_F < 1$ ; the background corresponds to the trace of  $S$ . (b) Angles estimated with both solutions of Eq. (11) are shown in color scale. The background shows the trace of the scattering matrix. Amplitude filter set as in panel a. (For interpretation of the references to color in this figure legend, the reader is referred to the web version of this article.)

show the angles  $\theta_1$  and  $\theta_2$  calculated for  $\|S\|_F > 0.35$ . This threshold was selected after experimenting with different values in a trial and error process; the background shown in both sections of Fig. 5c is the trace of  $S$ , while the color scale shows the angle value. An angle between  $30^\circ$  and  $45^\circ$  (counterclockwise) is observed at 20 ns in the top of the diffraction hyperbola for  $\theta_1$ , in agreement with the presumed azimuth of the buried pipe. As expected, the angle estimation is not as sharp as it is for the synthetic model discussed before; even

so, a change from  $30^\circ$ – $45^\circ$  to  $120^\circ$ – $135^\circ$  and back to  $30^\circ$ – $45^\circ$  occurs in one wavelet period. The image for  $\theta_2$  shows similar behavior except for the  $45^\circ$  difference predicted by our formulas.

The same calculations were carried out for a profile running perpendicular to the buried pipe (Profile II). Fig. 7a shows the measured elements of the scattering matrix. The images provided by the co-pol arrays are much better than the x-pol ones, particularly for  $S_{yy}$ , which corresponds to having the receiver and transmitter antennas both



**Fig. 9.** (a) Outline showing the position of an air-filled plastic barrel at depth, as well as the direction of the data profile. (b) Cross-sections with the measured elements of the scattering matrix. The amplitude of the components was normalized only for plotting purposes. (c) Cross-sections showing invariant quantities. Amplitudes normalized for plotting purposes.

parallel to the pipe. On the other hand, the diffraction hyperbola caused by the pipe is clearly observed in the images produced by the invariant quantities (Fig. 7b). We estimate the angle using  $||S||_F > 0.2$  as the amplitude filter; the images for  $\theta_1$  and  $\theta_{\perp 1}$  are shown in Fig. 8a. The angular values estimated with the maximum amplitude of the diffraction hyperbola are  $\theta_1 \approx 180^\circ$  (or  $0^\circ$ ) while  $\theta_{\perp 1} \approx 135^\circ$ . In both cases the estimation changes one half period later consistently to  $\theta_1 \approx 90^\circ$  and  $\theta_{\perp 1} \approx 45^\circ$ , in agreement with the probable direction of the pipe.

For the sake of comparison with the formula proposed by Seol et al. (2001), we plot the angles obtained with Eq. (10) in Fig. 8b, using the same amplitude filter as before. We obtain fairly similar results;  $\theta_1$  and  $\theta_2$  are comparable with  $\theta_1$  and  $\theta_{\perp 1}$ , except that the angle scale ranges in the  $\pm 45^\circ$  interval and Seol's angles are not sensitive to polarity changes in the wavelet, in this case  $\theta_1 \approx 0^\circ$  and  $\theta_2 \approx \pm 45^\circ$ . As for  $\theta_1$  and  $\theta_{\perp 1}$ , the difference between  $\theta_1$  and  $\theta_2$  is just  $45^\circ$ . Our method has two advantages: simpler equations, and none of the ambiguity in the angle value that would result from using Eq. (10). Even though our equations have an intrinsic  $90^\circ$  ambiguity, one can say in advance which angle corresponds to maximizing the co-pol response and which makes the x-pol a maximum.

### 5.2. Air-filled plastic barrel

A third field survey was conducted in a test site, on top of an air-filled cylindrical plastic barrel buried under 1 m of soil, with the barrel's axis horizontal and located 1.3 m deep; the target, located at the middle section of the profile, is 0.6 m in diameter and 1.0 m in height; the profile direction is along the axis of the barrel (Fig. 9a) and the measurements were acquired with a 200 MHz instrument with Tx–Rx antenna separation of 0.5 m.

Fig. 9b shows cross-sections using the four elements of the scattering matrix. As expected, the co-pol arrays are very sensitive to the fastest direct arrival, while the x-pol are not, since in this case the polarization of the direct arrival is perpendicular to the receiver. The information provided by the images in both co-pol arrays seems similar; the reflection from the target is at about 20 ns, and a multiple reflection appears at about 40 ns. It can be noticed that the ability to resolve the target is complicated because its arrivals are merged with spurious noise that remains after removing the first arrival. On the other hand, the x-pol images suggest that the shape and EM properties of the target were able to depolarize the incident wave, in such a way that a fraction of the target response is still recognizable in the x-pol images, although the lower signal to noise ratio reduces the image quality.

The invariant quantities obtained from the same data set are shown in Fig. 9c. The trace of the scattering matrix combines the information from the co-pol components producing a better image of the target. The image for the determinant has negative amplitudes at the target location in 20 ns and positive at the multiple reflections in 40 ns; this happens probably because of some noise remaining after removal of the direct wave. The best image is obtained by the Frobenius norm, which combines the four components in  $S$ ; the noise is greatly reduced and the signal conveniently enhanced, as a result of using the squared magnitudes in Eq. (9). In addition, for the same reason, the norm image contains only positive magnitude values, which improves the contrast between target response and background noise. In this case the azimuth could not be reliably estimated, probably due to the noisy data but also because the aspect ratio of the target is about 3D, in contrast with an elongated object like a pipe.

## 6. Conclusions and discussion

The invariant properties of the GPR scattering matrix are shown to be useful to build better images of targets in the subsurface,

incorporating the information contained in the four elements of  $S$  in a mathematically simple and sound manner. In particular, the trace and the Frobenius norm give improved images of the subsurface, while the determinant has the attribute that it produces more compact diffraction responses. Synthesizing the scattering matrix in the proposed rotation invariant forms removes the directional information contained in the individual elements of the scattering matrix. This lost of information becomes an advantage if the travel-time sections are to be processed with techniques designed for scalar wavefields.

The estimation of the azimuth of elongated targets is a more difficult problem, as the angle calculation is very unstable for small amplitudes or noisy data. Particular care should be taken with the time frame of the four elements of  $S$ , since a small shift in any of them will significantly affect the angle calculation. The same is true for changes in the relative amplitude of the measured elements of  $S$ ; hence the commonly used "automatic gain" algorithms that enhance the amplitude in the GPR sections must be avoided for azimuth estimation purposes. The use of multipolar systems with simultaneous acquisition of the whole scattering matrix will overcome some of the aforementioned problems, except for the fragility of the angular formulas for small amplitudes. In this matter, the Frobenius norm seems to provide an excellent tool to use as an amplitude filter, in order to select only the amplitudes suitable for safe and significant azimuth estimation.

## Acknowledgments

We thank Conacyt, the Mexican science-funding agency, for providing the funds for this project (grant 133042 CB2009-01) as well as the scholarship for Almendra Vilela's doctoral studies at CICESE. We are very grateful to the reviewers of the manuscript, whose comments and recommendations significantly improved the content of this paper. We also thank Joann Stock from CALTECH, Antonio González and Mario González from CICESE, and Octavio Lázaro from UABC, members of Almendra's thesis committee, for their useful comments and recommendations. We are also thankful to Sóstenes Méndez and Daniel Garza from Facultad de Ciencias de la Tierra, UANL, for their help and support during experiments at the UANL test site in Linares, N.L. Thanks are also due to Jaime Calderón from CICESE for his technical help in lab and field experiments.

## References

- Alford, R.M., 1986. Shear data in the presence of azimuthal anisotropy. 56th Annual International Meeting, Society of Exploration Geophysics, Expanded Abstract, pp. 476–479.
- Capizzi, P., Cosentino, P.L., 2008. GPR multi-component data analysis. Near Surface Geophysics 6, 87–95.
- Chen, C.-C., Higgins, B., O'Neill, K., Detsch, R., 2001. Ultrawide-bandwidth fully-polarimetric ground penetrating radar classification of subsurface unexploded ordnance. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing 39, 1221–1230.
- Giannopoulos, A., 2005. Modelling ground penetrating radar by GprMax. Construction and Building Materials 19, 755–762.
- Guy, E.D., Daniels, J.J., Radzevicius, S., 1999. Demonstration of using crossed dipole GPR antennae for site characterization. Geophysical Research Letters 26, 3421–3424.
- Lambot, S., Slob, E.C., van den Bosch, I., Stockbroeckx, B., Vancooster, M., 2004. Modeling of ground-penetrating radar for accurate characterization of subsurface electric properties. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing 42 (11), 2555–2568.
- Lehmann, F., Boerner, D.F., Holliger, K., Green, A., 2000. Multicomponent georadar data: some important implications for data acquisition and processing. Geophysics 65, 1542–1552.
- Orlando, L., Slob, E., 2009. Using multicomponent GPR to monitor cracks in a historical building. Journal of Applied Geophysics 327–334.
- Radzevicius, S.J., Daniels, J.J., 2000. Ground penetrating radar polarization and scattering from cylinders. Journal of Applied Geophysics 45, 111–125.
- Roberts, R.L., 1994. Analysis of theoretical modeling of GPR polarization phenomena. PhD Thesis, The Ohio State University, 429 pp.
- Roberts, R.L., Daniels, J.J., 1996. Analysis of GPR polarization phenomena. Journal of Environmental and Engineering Geophysics 1, 139–157.
- Sassen, D.S., Everett, M.E., 2009. 3D polarimetric GPR coherency attributes and full-waveform inversion of transmission data for characterizing fractured rock. Geophysics 74, J23–J34.

- Seol, S.J., Kim, J.-H., Song, Y., Chung, S.-H., 2001. Finding the strike direction of fractures using GPR. *Geophysical Prospecting* 49, 300–308.
- Streich, R., van der Kruk, J., Green, A.G., 2007. Vector-migration of standard copolarized 3D GPR data. *Geophysics* 72, J65–J75.
- Tsoffias, G.P., van Gestel, J.-P., Stoffa, P.L., Blankenship, D.D., Sen, M., 2004. Vertical fracture detection by exploiting the polarization properties of ground-penetrating radar signals. *Geophysics* 69, 803–810.
- van der Kruk, J., Wapenaar, C.P.A., Fokkema, J.T., van den Berg, P.M., 2003. Three-dimensional imaging of multicomponent ground-penetrating radar data. *Geophysics* 68, 1241–1254.
- van Gestel, J.P., Stoffa, P.L., 2001. Application of Alford rotation to ground-penetrating radar data. *Geophysics* 66, 1781–1792.