

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN
SUPERIOR DE ENSENADA, BAJA CALIFORNIA**



**PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS
DE LA TIERRA**

**Inversión bidimensional de mediciones de susceptibilidad
magnética**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Rocío Fabiola Arellano Castro

Ensenada, Baja California, México
2015

Tesis defendida por

Rocío Fabiola Arellano Castro

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Enrique Gómez Treviño

Director del Comité

Dr. Marco Antonio Pérez Flores

Miembro del Comité

Dr. Hugo Homero Hidalgo Silva

Miembro del Comité

Dr. Juan García Abdeslem

Coordinador del Posgrado en
Ciencias de la Tierra

Dr. Jesús Favela Vara

Director de Estudios de Posgrado

Ensenada, Baja California, México
2015

Resumen de la tesis que presenta Rocío Fabiola Arellano Castro como requisito parcial para la obtención del grado de Maestra en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada.

Inversión bidimensional de mediciones de susceptibilidad magnética

Resumen elaborado por:

Rocío Fabiola Arellano Castro

En este trabajo se desarrolla un algoritmo para obtener imágenes bidimensionales del subsuelo con base en mediciones superficiales de la susceptibilidad magnética (SM). El algoritmo se utilizó para interpretar datos obtenidos con el equipo Geonics *EM-38 MK2*, el cual opera con bobinas pequeñas o dipolos, una como fuente y la otra como receptor. El problema directo se plantea como una convolución bidimensional entre la sensibilidad espacial del instrumento y la distribución de SM en el subsuelo. Se consideran mediciones con los arreglos estándar de dipolos magnéticos verticales (DMV) y de dipolos magnéticos horizontales (DMH). La recuperación de la distribución de SM del subsuelo o problema inverso se plantea en términos de amplitudes de funciones Hann. Estas funciones se definen en una rejilla regular y sus amplitudes se obtienen mediante programación cuadrática aplicando criterios de regularización. El problema de la no unicidad de la solución inversa se resuelve calculando modelos extremos. Para esto se minimiza el momento del modelo inverso alrededor de dos profundidades, obteniéndose por un lado una imagen somera cuya respuesta se ajusta a los datos, y otra profunda que igualmente los ajusta. Con base en estos modelos extremos se define un modelo final intermedio que a su vez satisface los datos. Se presentan dos tipos de aplicaciones a datos de campo. En una modalidad se considera una distribución superficial de susceptibilidad magnética del subsuelo que puede variar horizontalmente pero no verticalmente. Para ello se realizaron en campo mediciones dentro de una zona arqueológica en Baja California con el *EM-38 MK2*, con sus dos separaciones de 0.5 y 1 m. En la otra modalidad el objetivo es obtener una sección o imagen vertical del subsuelo a manera de tomografía. Se encontró que en este caso las configuraciones estándar no proveen información suficiente para recuperar con confianza la distribución de SM del subsuelo. Para mejorar la recuperación se propone utilizar el *EM-38 MK2* rotándolo sobre uno de sus ejes para agregar dos nuevas configuraciones de dipolos, DMV-R y DMH-R. Se presentan ejemplos con datos sintéticos para validar el proceso así como aplicaciones a un ejemplo en campo en que se localizó con éxito una muestra de magnetita a profundidad.

Palabras clave: **inversión, susceptibilidad, tomografía magnética.**

Abstract of the thesis presented as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics.

Inversión bidimensional de mediciones de susceptibilidad magnética

Abstract by:

Rocío Fabiola Arellano Castro

In this paper an algorithm is developed to obtain two-dimensional images of the subsurface based on surface measurements of magnetic susceptibility (MS). The algorithm was used to interpret the data obtained with the Geonics *EM38-MK2* equipment which operates with a pair of dipoles or small coils, one as source and the other as receiver. The forward problem is posed as a two-dimensional convolution between the spatial sensitivity of the instrument and the distribution of subsurface MS. We considered measurements using the standard vertical magnetic dipole arrays (MVD) and horizontal magnetic dipoles (MHD). The recovery of the distribution or inverse problem arises in terms of amplitudes of Hann functions. These functions are defined in a regular grid and their amplitudes are obtained by using quadratic programming regularization criteria. The problem of non-uniqueness of the solution is solved by computing inverse extreme models. For this the momentum of the inverse model around two depths is minimized, yielding on one hand a shallow image whose response fits the data, and on the other hand another deeper which also fits the data. Based on these extreme models we obtain an intermediate final model which also satisfies the data. Two types of applications to field data are presented. In one embodiment we considered that the subsurface distribution of magnetic susceptibility may vary horizontally but not vertically. For this, field measurements were performed in an archaeological site in Baja California with the *EM-38 MK2*, with its two separations between coils, 0.5 and 1 m. In the other mode the objective is to obtain a section or vertical image of the subsurface as a tomography. It was found that in this case the standard configurations do not provide sufficient information in order to recover with confidence the real distribution of subsurface MS. To improve recovery we proposed to use the *EM-38 MK2* rotating on its axis to add two new configurations of dipoles, DMV-R and DMH-R. Examples with synthetic data are presented to validate the process and applications to an example in the field in which successfully was located a magnetite sample at depth.

Keywords: **inversion, susceptibility, magnetic tomography.**

Agradecimientos

A mi asesor que ha tenido la paciencia, el ánimo y perseverancia para enseñarme y apoyarme durante la realización de esta tesis.

Agradezco también al comité evaluador por sus aportes y apoyo brindado durante este proceso.

A Dios y a mi familia que están presentes siempre.

A mis viejos y nuevos amigos por su aliento y soporte y a todos esos personajes raros que me ha tocado conocer en esta isla que de alguna forma también ayudaron haciendo más agradable mi estancia.

Agradezco a todo el personal del posgrado especialmente a los profesores, secretarias, técnicos que me trataron tan amablemente y con los cuales conviví durante todo este tiempo y a Conacyt por su apoyo económico durante este periodo de estudio.

Tabla de contenido

	Página
Resumen español.....	ii
Resumen inglés.....	iii
Agradecimientos.....	iv
Lista de Figuras.....	vii
Lista de Tablas.....	xviii
 Capítulo 1. Introducción.....	 1
 Capítulo 2. Problema directo	4
2.1. Introducción.....	4
2.2. Contribución de un volumen elemental del subsuelo.....	4
2.3. Susceptibilidad magnética aparente.....	7
2.4. Funciones de sensibilidad.....	10
2.5. Anomalías de objetos rectangulares.....	15
2.6. Conclusiones.....	21
 Capítulo 3. Problema inverso y manejo de la no unicidad.....	 22
3.1. Introducción.....	22
3.2. Modelos con límites continuos.....	22
3.3. Planteamiento del problema inverso.....	25
3.4. Multiplicidad de modelos válidos: solución a la no unicidad...	31
3.5. Funciones Hann vs. Funciones escalonadas.....	44
3.6. Interpretación de datos en planta.....	45
3.7. Conclusiones.....	47
 Capítulo 4. Validación con modelos difíciles.....	 48
4.1. Introducción.....	48
4.2. Modelo de dos cuerpos a diferentes profundidades.....	48
4.3. Modelo del cuerpo en forma de L.....	55
4.4. Modelo de tres cuerpos a diferentes profundidades.....	62
4.5. Conclusiones.....	68

Tabla de contenido (continuación)

Capítulo 5. Aplicación a datos de campo.....	69
5.1. Introducción.....	69
5.2. El equipo <i>EM-38 MK2</i>	69
5.3. Aplicación en arqueología.....	72
5.4. Tomografía magnética.....	80
5.5. Conclusiones.....	86
 Capítulo 6. Conclusiones.....	 88
 Lista de referencias.....	 90
 Apéndice A. Potencial escalar magnético.....	 92
 Apéndice B. Peso del dipolo imagen en el semiespacio.....	 95
 Apéndice C. Intensidad del campo magnético primario y secundario.....	 97
 Apéndice D. Cálculo de los factores geométricos para χ_a	 100
 Apéndice E. Resultados de los sitios arqueológicos.....	 101

Lista de Figuras

Figura		Página
1	Sistema de coordenadas y representación esquemática de dos dipolos magnéticos puestos por encima de un suelo magnético. El dipolo receptor mide tanto el campo magnético primario (H_p) como el campo magnético secundario (H_s). El primero es producido directamente por la fuente y el segundo se debe al efecto integrado de pequeños dipolos elementales inducidos en el suelo magnético.....	4
2	Contribuciones espaciales de la relación $H(r_s, r) \cdot H(r_r, r)$ según las componentes de los campos tanto para DMV como DMH. Las imágenes corresponden a una profundidad $z = 0$ y a una altura $h = 0.1 \text{ m}$ para las dos configuraciones.....	7
3	Los cuatro arreglos de dipolos usados en las mediciones de campo. Los primeros dos: DMV y DMH corresponden a las configuraciones estándar del equipo <i>EM-38 MK2</i> . Los últimos dos: DMV-R y DMH-R corresponden a la nueva forma de utilizar el equipo propuesta en este trabajo, la letra R se refiere a la versión rotada de las configuraciones normales correspondientes.....	7
4	Dentro de un semiespacio homogéneo de permeabilidad magnética μ_1 , el campo magnético presente en el aire circundante es la suma del campo debido a la fuente (H_p) y al debido a la imagen (H_s) con momento magnético escalado (cm_s) el cual depende del contraste de permeabilidad magnética.....	8
5	Funciones de sensibilidad a una profundidad $z = 0 \text{ m}$ para los cuatro distintos arreglos de dipolos. a) DMV $s = 0.5 \text{ m}$, b) DMV-R $s = 0.5 \text{ m}$, c) DMH $s = 0.5 \text{ m}$, d) DMH-R $s = 0.5 \text{ m}$ a una altura $h = 0.1 \text{ m}$	11
6	Funciones de sensibilidad a una profundidad $z = 0 \text{ m}$ para los cuatro distintos arreglos de dipolos. a) DMV $s = 1 \text{ m}$, b) DMV-R $s = 1 \text{ m}$, c) DMH $s = 1 \text{ m}$, d) DMH-R $s = 1 \text{ m}$ a una altura $h = 0.1 \text{ m}$	11

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
7	Secciones verticales de la función de sensibilidad para los cuatros distintos arreglos de dipolos. Las variaciones a lo largo de la variable y se integraron de modo que la contribución es independiente de esta variable. Los valores en los porcentajes corresponden a las contribuciones debidas a las variables x y z . En a) y b) se observan tres regiones distintas mientras que en c) y d) solo existen dos. Las flechas en la parte de arriba representan las posiciones de los dipolos.....	12
8	Secciones horizontales de las funciones de sensibilidad para los cuatro arreglos de dipolos magnéticos. Las variaciones a lo largo del eje z se integraron de manera que la contribución es independiente de esta variable. Los valores de porcentaje corresponden a la contribución de la función en las variables x y y . En a) y b) nuevamente se observan tres distintas regiones mientras que en c) y d) solo dos. Las flechas por encima de la figura representan las posiciones de los dipolos.....	14
9	Contribuciones en función solo de la profundidad para los cuatro arreglos de dipolos magnéticos. En todos los casos el área definida bajo la curva es la unidad. Para el caso de DMV el área positiva es 1.25 por tanto el área negativa es igual a -0.25. Estas contribuciones se obtienen integrando a infinito en dirección x y y para que las funciones de peso solo dependan de z	15
10	Datos sintéticos derivados del modelo propuesto para todas las configuraciones de dipolos con $s = 0.5 m$ y $s = 1 m$. a) Anomalías magnéticas para los arreglos de dipolos convencionales causadas por el cuerpo de abajo. b) Anomalías magnéticas para dipolos rotados. c) Representación de la posición y tamaño delos cuerpos modelo. Las coordenadas indican el centro de los objetos.....	17

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
11	Anomalías debidas a dos cuerpos centrado a profundidad según la figura 10c. Utilizando todas las configuraciones de dipolos con separación $s = 0.5, 1 m$. Se suponen las mediciones cada $0.25 m$ en x para 5 diferentes perfiles en y . En todos los casos los rectángulos delimitan los cuerpos. Como puede observarse, la respuesta correspondiente a DMV tiene valores negativos además de que presenta dos máximos.....	18
12	Datos sintéticos derivados del modelo propuesto para todas las configuraciones de dipolos con $s = 0.5 m$ y $s = 1 m$. a) Anomalías magnéticas para los arreglos de dipolos convencionales causadas por el cuerpo de abajo. b) Anomalías magnéticas para dipolos rotados. c) Representación de la posición y tamaño de los cuerpos modelo. Las coordenadas indican el centro de los objetos.....	19
13	Anomalías debidas a dos cuerpos centrado a profundidad según la figura 12c. Utilizando todas las configuraciones de dipolos con separación $s = 0.5, 1 m$. Se suponen las mediciones cada $0.25 m$ en x para 5 diferentes perfiles en y . En todos los casos los rectángulos delimitan los cuerpos.....	Página 20
14	Función Hann 2D. Se supone que la variación lateral de susceptibilidad magnética es una superposición de estas funciones. La distribución vertical se supone constante dentro de una capa específica del subsuelo. Estas funciones se multiplican por las funciones de sensibilidad según la ecuación (20) para obtener las anomalías de susceptibilidad aparente de las Figuras 15 y 16.....	24
15	Anomalías en superficie para los diferentes arreglos de dipolos. Se puede ver que para DMV la anomalía es negativa mientras que para los otros casos todas ellas son positivas, esto en concordancia con las funciones de sensibilidad de las Figuras 7 y 8. En este caso la anomalía se asume verticalmente uniforme de 0.5 a $0.6 m$ de profundidad. El rectángulo en negro define el dominio de la función.....	24

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
16	Anomalías en superficie para los diferentes arreglos de dipolos. En este caso la anomalía se supone verticalmente uniforme desde 0 a 0.1 m en profundidad. Ésta difiere con la Figura 15, aquí se pueden observar que las respuestas para DMV y DMH tienen dos máximos, sugiriendo la presencia de dos cuerpos. En contraste, las versiones rotadas DMV-R y DMH-R sugieren la presencia de un solo cuerpo, tal como es el caso. El rectángulo define el dominio de la función Hann.....	25
17	Funciones Hann superpuestas, si se intersectan tal como lo indica la imagen pueden reproducir susceptibilidades uniformes dentro de ellas con límites suaves en los extremos. En este ejemplo las tres funciones tienen la misma amplitud. Para diferentes amplitudes las formas geométricas se vuelven más complicadas pero siempre continuas.....	26
18	Representación gráfica del mallado propuesto con los centros de las funciones Hann. Los centros de las funciones están dispuestos cada $T_x/2, T_z/2$, los elipses en negro muestran el dominio de estas funciones. Los cuadrados en rojo representan la posición del centro del par de bobinas.....	27
19	El residual rms normalizado disminuye a medida que disminuye el parámetro de regularización. El parámetro óptimo se escoge cuando $rms \cong 1$, o bien cuando su valor se estabiliza.....	28
20	Datos sintéticos derivados del modelo propuesto DMH $s = 1\text{ m}$. Las coordenadas indican el centro del objeto..	29
21	Comparación entre dos modelos obtenidos utilizando diferentes valores de alfa. a) $\alpha = 1$; b) $\alpha = 0.0001$ y c) $\alpha = 0.0000001$. Todos los casos para DMH $s = 1\text{ m}$	30
22	Ajustes de los modelos de la Figura 21. En línea continua la respuesta correspondiente de los modelos obtenidos usando distintos valores de α	30

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
23	Modelo obtenido a partir de la función objetivo de la ecuación (25) para DMH $s = 1m$ con parámetros $\alpha = 0.0001$ y $\beta = 0$	32
24	Ajuste del modelo de la Figura 23. En este caso el valor del rms es cercano a 1. DMH $s = 1m$ con parámetros $\alpha = 0.000$	33
25	Modelos obtenidos a partir de datos de DMH $s=1m$. Todos estos modelos son válidos en cuanto a que satisfacen los datos adecuadamente. Los modelos corresponden a objetos localizados a distintas profundidades. Izq: $z_0 = 0 m$, Centro: $z_0 = 0.5 m$, Der: $z_0 = 1 m$. Todos los modelos fueron calculados con un valor de $\beta = 0.001$	33
26	Ajustes de los modelos de la figura 25 al invertir datos de la configuración DMH $s=1 m$	34
27	Modelos obtenidos a partir de datos para DMH $s=1m$ y DMV $s=1m$ contaminados con ruido aleatorio con desviación estándar de 0.05. Los modelos corresponden a objetos localizados a distintas profundidades. Izq: $z_0 = 0 m$, Centro: $z_0 = 0.5 m$, Der: $z_0 = 1 m$. Todos los modelos fueron calculados con un valor de $\beta = 0.001$	35
28	Ajustes de los modelos de la figura 27. a) DMH $s=1m$, b) DMV $s=1 m$	35
29	Modelos obtenidos a partir de datos para DMH y DMV con $s=0.5, 1m$ contaminados con ruido aleatorio con desviación estándar de 0.05. Los modelos corresponden a objetos localizados a distintas profundidades. Izq: $z_0 = 0 m$, Centro: $z_0 = 0.5 m$, Der: $z_0 = 1 m$. Todos los modelos fueron calculados con un valor de $\beta = 0.001$	36
30	Ajustes de los modelos de la Figura 29 correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMH $s=1m$, b) DMV $s=1 m$, c) DMH $s=0.5 m$ y d) DMV $s=0.5$	37

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
31	Modelos obtenidos a partir de datos para todas las configuraciones contaminados con ruido aleatorio con desviación estándar de 0.05. Los modelos corresponden a objetos localizados a distintas profundidades. Izq: $z_0 = 0 \text{ m}$, Centro: $z_0 = 0.5 \text{ m}$, Der: $z_0 = 1 \text{ m}$. Todos los modelos fueron calculados con un valor de $\beta = 0.001$	38
32	Ajustes de los modelos de la figura 31 correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMH $s=1\text{m}$, b) DMV $s=1 \text{ m}$, c) DMH $s=0.5 \text{ m}$ y d) DMV $s=0.5 \text{ m}$	39
33	Ajustes de los modelos de la figura 31 correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMHR $s=1\text{m}$, b) DMVR $s=1 \text{ m}$, c) DMHR $s=0.5 \text{ m}$ y d) DMVR $s=0.5 \text{ m}$	40
34	Modelo obtenido a partir de datos para todas las configuraciones contaminados con ruido aleatorio con desviación estándar de 0.05 utilizando un valor de $\beta = 0$	42
35	Ajustes de los modelos de la figura 34 correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMV $s=0.5 \text{ m}$, b) DMV $s=1 \text{ m}$, c) DMH $s=0.5 \text{ m}$, d) DMH $s=1 \text{ m}$, e) DMVR $s=0.5 \text{ m}$, f) DMVR $s=1 \text{ m}$, g) DMHR $s=0.5 \text{ m}$ y h) DMHR $s=1 \text{ m}$	43
36	Comparación de los modelos encontrados al invertir. a) Utilizando prismas rectangulares. b) Utilizando superposición de funciones Hann. Ambos casos corresponden a la configuración de DMV para $s = 0.5 \text{ m}$. La minimización del momento se realizó en ambos casos alrededor de la profundidad central del objeto.....	44
37	Modelo obtenido para el ejemplo de los dos cuerpos de la sección 2.5 considerando una distribución uniforme de $z = 0$ hasta $z = 1 \text{ m}$	46

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
38	Modelo obtenido para el ejemplo de los dos cuerpos de la sección 2.5 integrando a profundidad solo donde están definidos los cuerpos.....	46
39	Comparación entre modelos para el ejemplo de los dos cuerpos utilizando todas las configuraciones a) modelo libre $\beta = 0$, b) modelo extremo superior $\beta = 0.001, z_0 = 0 \text{ m}$, c) modelo extremo inferior $\beta = 0.001, z_0 = 1 \text{ m}$	50
40	Respuesta de los tres modelos de la Figura 39, la línea continua roja es cuando $\beta = 0$, en negro cuando $\beta = 0.001, z_0 = 0 \text{ m}$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 \text{ m}$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMV $s = 1 \text{ m}$, b) DMH $s = 1 \text{ m}$, c) DMV $s = 0.5 \text{ m}$, d) DMH $s = 0.5 \text{ m}$	51
41	Respuesta de los tres modelos de la Figura 39, la línea continua roja es cuando $\beta = 0$, en negro cuando $\beta = 0.001, z_0 = 0 \text{ m}$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 \text{ m}$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMHR $s = 1 \text{ m}$, b) DMVR $s = 1 \text{ m}$, c) DMHR $s = 0.5 \text{ m}$ y d) DMVR $s = 0.5 \text{ m}$	52
42	Modelo final para el ejemplo de los dos cuerpos, éste se obtuvo utilizando todas las configuraciones y un valor de $\beta = 0.001$ centrándolo en $z_0 = 0.7 \text{ m}$	53
43	Comparación de datos sintéticos con las respuestas del modelo final de la Figura 42 para el ejemplo de los dos cuerpos.....	54
44	Datos sintéticos derivados del modelo propuesto para todas las configuraciones de dipolos con $s = 0.5 \text{ m}$ y $s = 1 \text{ m}$. a) Anomalías magnéticas para los arreglos de dipolos convencionales causadas por el cuerpo de abajo. b) Anomalías magnéticas para dipolos rotados. c) Representación de la posición y tamaño de los cuerpos modelo. Las coordenadas especifican el centro del cuerpo.....	56

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
45	Comparación entre modelos para el ejemplo del cuerpo en forma de L utilizando todas las configuraciones a) modelo libre $\beta = 0$, b) modelo extremo superior $\beta = 0.001, z_0 = 0 \text{ m}$, c) modelo extremo inferior $\beta = 0.001, z_0 = 1 \text{ m}$	57
46	Respuesta de los tres modelos de la Figura 45, la línea continua roja es cuando $\beta = 0$, en negro cuando $\beta = 0.001, z_0 = 0 \text{ m}$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 \text{ m}$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMV $s = 1 \text{ m}$, b) DMH $s = 1 \text{ m}$, c) DMV $s = 0.5 \text{ m}$, d) DMH $s = 0.5 \text{ m}$	58
47	Respuesta de los tres modelos de la Figura 45, la línea continua roja es cuando $\beta = 0$, en negro cuando $\beta = 0.001, z_0 = 0 \text{ m}$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 \text{ m}$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMHR $s = 1 \text{ m}$, b) DMVR $s = 1 \text{ m}$, c) DMHR $s = 0.5 \text{ m}$ y d) DMVR $s = 0.5 \text{ m}$	59
48	Modelo final para el ejemplo del cuerpo en forma de L, éste se obtuvo utilizando todas las configuraciones y un valor de $\beta = 0.001$ centrándolo en $z_0 = 0.5 \text{ m}$	60
49	Comparación de datos sintéticos con las respuestas del modelo final de la Figura 48. Datos correspondientes al modelo del ejemplo del cuerpo en forma de L.....	61
50	Comparación entre modelos para el ejemplo de los tres cuerpos utilizando todas las configuraciones a) modelo libre $\beta = 0$, b) modelo extremo superior $\beta = 0.001, z_0 = 0 \text{ m}$, c) modelo extremo inferior $\beta = 0.001, z_0 = 1.5 \text{ m}$	63
51	Respuesta de los tres modelos de la Figura 50, la línea continua roja representa la respuesta para $\beta = 0$, en negro para $\beta = 0.001, z_0 = 0 \text{ m}$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 \text{ m}$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMV $s = 1 \text{ m}$, b) DMH $s = 1 \text{ m}$, c) DMV $s = 0.5 \text{ m}$, d) DMH $s = 0.5 \text{ m}$	64

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
52	Respuesta de los tres modelos de la Figura 50, la línea continua roja representa la respuesta para $\beta = 0$, en negro para $\beta = 0.001, z_0 = 0 \text{ m}$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 \text{ m}$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMHR $s = 1 \text{ m}$, b) DMVR $s = 1 \text{ m}$, c) DMHR $s = 0.5 \text{ m}$ y d) DMVR $s = 0.5 \text{ m}$	65
53	Modelo final para el ejemplo de los tres cuerpos, éste se obtuvo utilizando todas las configuraciones y un valor de $\beta = 0.001$ centrándolo en $z_0 = 1 \text{ m}$	66
54	Comparación de datos sintéticos con las respuestas del modelo final de la Figura 53. Los datos corresponden al ejemplo de los tres cuerpos de la sección 2.5.....	67
55	Esquema del principio físico de operación para el aparato EM-38 MK2 en modo vertical. (Adaptado de Lesch <i>et al.</i> , 2005).....	70
56	Mapa con la localización de los sitios arqueológicos dentro del Complejo Turístico Bajamar. El triángulo indica la posición del conchero MP3c mientras que el círculo marca la localización del conchero MP3g.....	73
57	Esquema gráfico de los perfiles de mediciones para ambos concheros. El equipo se encuentra en la configuración de DMV.....	74
58	Levantamiento de datos dentro del conchero MP3c. En este caso corresponde a un perfil longitudinal con DMV.....	74
59	Representación gráfica del mallado propuesto para invertir los datos de campo del conchero MP3c. Los asteriscos azules representan las posiciones de las bobinas para las mediciones realizadas a lo largo de los perfiles, los asteriscos en rojo las posiciones para las mediciones perpendiculares a los perfiles y los asteriscos negros los centros de las funciones Hann....	75

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
60	Imágenes del conchero MP3c después de ser excavado.....	76
61	Retícula de excavación, sitio MP3c. Los dibujos fueron realizados por los arqueólogos a cargo de las excavaciones. La imagen corresponde a 12 de los 20 cuadros. La profundidad de la excavación es de 0.2 m..	77
62	Anomalías magnéticas en planta para el conchero MP3c. a) DMVL $s=0.5$ m, b) DMVT $s=0.5$ m, c) DMHL $s=0.5$ m y DMHT $s=0.5$ m.....	78
63	Superposición de la retícula de excavación de la figura 61 con el mejor modelo obtenido mediante inversión para DMVL $s = 0.5$ m, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$	79
64	Respuesta del modelo de la figura 63, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$. Su rms correspondiente es $rms = 1.003$	80
65	Anomalías magnéticas en planta de una roca magnetita de susceptibilidad magnética $\chi = 600 \times 10^{-5}$ SI localizada a aproximadamente 0.6 m de profundidad.....	81
66	Anomalías magnéticas de una roca magnetita de susceptibilidad magnética $\chi = 600 \times 10^{-5}$ SI localizada a aproximadamente 0.6 m de profundidad.....	82
67	Comparación entre modelos para el ejemplo de campo de la magnetita obtenidos mediante la ecuación (25) con $\beta = 0.001$ para diferentes profundidades z_0 utilizando todas las configuraciones.....	83
68	Respuesta de los tres modelos de la Figura 67, la línea continua roja representa la respuesta para $\beta = 0$, en negro para $\beta = 0.001, z_0 = 0$ m y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1$ m para todas las configuraciones siguientes: a) DMH $s = 0.5$ m, b) DMV $s = 0.5$ m, c) DMHR $s = 0.5$ m y d) DMVR $s = 0.5$ m.....	84

Lista de Figuras (continuación)

Figura		Página
69	Mejor modelo obtenido para el ejemplo de campo de la magnetita mediante inversión conjunta correspondiente a valores de $\alpha = 0.0001, \beta = 0.001$ con $z_0 = 0.7$ m.....	85
70	Respuesta del mejor modelo de la figura 69 (línea continua) comparada con los datos de campo (asteriscos) para cada una de las configuraciones utilizadas.....	85
71	Modelo obtenido mediante inversión en planta usando todas las configuraciones. Para integrar a profundidad se eligió un intervalo de valores a partir de la inversión de la Figura 69.....	86

Lista de Tablas

Tabla		Página
1	Especificaciones técnicas del equipo <i>EM-38 MK2...</i>	71

Capítulo 1. Introducción

En la exploración geofísica uno de los métodos más utilizados como herramienta indirecta es la prospección con equipos de inducción electromagnética, siendo la conductividad eléctrica y la susceptibilidad magnética dos de las propiedades físicas que pueden ser medidas mediante dichos equipos. El conocimiento de estas propiedades físicas son de gran ayuda, por ejemplo en geología ya sea para la localización de características estructurales: como fallas, fracturas, ciertos tipos de rocas y basamento geológico. También en la búsqueda de yacimientos minerales, hidrocarburos y acuíferos, además de su aplicación en estudios ambientales y arqueológicos, siendo la susceptibilidad magnética la más recurrida en este último caso pues se sabe que como parte de los procesos naturales las capas superficiales del suelo típicamente se vuelven más magnéticas que las capas más profundas en el subsuelo. Los mecanismos responsables de este aumento en la magnetización del suelo incluyen los incendios naturales y generados por el hombre (Dalan, 2008; Dearing *et al.*, 1996). Estas y otras intervenciones culturales por parte de los seres humanos hacen la susceptibilidad magnética de interés para los arqueólogos. Las mediciones de susceptibilidad magnética proporcionan información útil para distinguir los suelos magnetizados cultural o naturalmente.

La susceptibilidad magnética cuantifica la respuesta de un material a un campo magnético externo, regularmente se le conoce como susceptibilidad magnética de campo débil (pues se encuentra dentro del orden del campo geomagnético). Se define como la relación de la magnetización inducida en el material con respecto al campo inductor externo. Si no hay ningún campo externo entonces la propiedad del material no se puede medir y por lo tanto es distinta de la magnetización remanente, la cual si puede ser medida en ausencia de un campo magnético externo. La prospección realizada con magnetómetros que se basan en el campo magnético natural de la Tierra no puede distinguir entre las dos propiedades porque el campo magnético medido responde a ambas. En este trabajo nos ocupamos de la susceptibilidad magnética

como una propiedad de los materiales que se puede medir en presencia de un campo magnético conocido producido por una fuente artificial cercana y controlada. Hay básicamente dos tipos de medidores de susceptibilidad magnética, los que utilizan una sola bobina y los que utilizan dos bobinas separadas entre sí. Del primer tipo el más conocido es el *Bartington MS2* (e.g., Dearing, 1994), y del segundo el Geonics *EM-38 MK2* (McNeill, 2013). El funcionamiento de este último se basa en el uso de una de las bobinas como fuente controlada de campo magnético. Este campo primario interactúa con el medio circundante. Si existen cuerpos magnéticos dentro del subsuelo, el campo primario induce nuevos dipolos dentro de estos cuerpos produciendo a su vez un nuevo campo magnético (secundario). La otra bobina situada a 0.5 y 1 m con respecto a la primera mide el efecto de ambos campos. Cuando ambas bobinas se encuentran tendidas sobre el suelo operan como dipolos magnéticos verticales (DMV), y cuando se giran en sentido horizontal como dipolos magnéticos horizontales (DMH). Ambas modalidades se utilizan comúnmente en aplicaciones arqueológicas (e.g. Dalan 2008, McNeill 2012, Tabbagh 1986). En cuanto a la interpretación de las mediciones, estas generalmente se grafican y se procede a identificar cualitativamente la presencia de zonas anómalas.

La interpretación cualitativa de mediciones de susceptibilidad magnética (SM) que se desarrollan con equipos que emplean dos bobinas separadas puede presentar importantes retos a la imaginación. Esto sucede principalmente cuando las anomalías en el subsuelo tienen dimensiones menores que la separación entre bobinas. En tales casos los mapas o imágenes bidimensionales de SM aparente pueden no parecerse a la distribución de la susceptibilidad en el subsuelo. Tanto el modo de DMV como el de DMH producen anomalías complicadas de SM aparente que ameritan su interpretación cuantitativa en términos de la distribución de SM del subsuelo. La inexistencia en la literatura de trabajos al respecto motivó la realización de la presente tesis. Como antecedente está la tesis de Méndez-Delgado (1992) quien se ocupó de algunos aspectos relacionados con el problema directo. Cabe mencionar, sin embargo, que existen trabajos sobre tomografías de conductividad eléctrica para los mismos equipos tipo el Geonics *EM-38 MK2* (e.g., Pérez-Flores *et al.* 2012). Así mismo, en relación con mediciones de SM existen trabajos sobre interpretación cuantitativa pero sólo para medios unidimensionales (e.g., Simpson *et al.*, 2010, Benech C. and Marmet E. 1999).

En el capítulo 2 se presenta la solución al problema directo. Partiendo de las ecuaciones de Maxwell se desarrollan las expresiones para el campo magnético debido a una fuente dipolar en la presencia de material magnético. El caso particular de un semiespacio homogéneo se utiliza para representar las mediciones en términos de susceptibilidad aparente para los diferentes arreglos de dipolos. El cálculo para anomalías de cuerpos tridimensionales se realiza mediante funciones de sensibilidad cuyas características predicen y explican las anomalías de susceptibilidad aparente que se miden en la superficie. Se presentan ejemplos ilustrativos al respecto.

El capítulo 3 contiene la propuesta para resolver el problema inverso. Primero se presenta la solución al problema directo para anomalías espacialmente continuas o con bordes suaves. Para ello se supone una superposición de funciones Hann. El problema inverso se plantea en términos de las amplitudes de estas funciones, de tal forma que los modelos inversos se calculan como una superposición de las funciones óptimas. Se presentan ejemplos de las ventajas de esta estrategia sobre la suposición tradicional de bloques con propiedades uniformes. Primero se considera el caso de levantamientos sobre una sola línea utilizando varias separaciones, lo que propiamente se considera como una tomografía del terreno. Luego se considera el caso más común de levantamientos de campo sobre áreas rectangulares utilizando una sola separación entre bobinas. En ambas instancias se demuestra la viabilidad y la necesidad de una interpretación cuantitativa.

En el capítulo 4 se analizan tres modelos difíciles para la modalidad de tomografía. Se analizan aplicando las ideas desarrolladas en el capítulo anterior donde se prueban con un modelo muy simple. Los resultados se presentan sistemáticamente con la aplicación de tres pasos. Paso 1: Modelo libre. Paso 2: Modelos extremos. Paso 3: Modelo final. Los tres ejemplos validan la propuesta de inversión más allá del modelo simplista del capítulo anterior.

En el capítulo 5 se presenta la aplicación de los algoritmos desarrollados a mediciones de campo y el capítulo 6 contiene las conclusiones.

Capítulo 2. Problema directo

2.1. Introducción

El problema directo para el caso que nos ocupa consiste en simular matemáticamente las mediciones de SM que se realizan en el campo. Esto es, simular mediciones que se realizan en medios heterogéneos utilizando equipos que operan con dos bobinas, una como fuente de campo magnético y otra como receptora. Utilizaremos la expresión del campo magnético de un dipolo tanto para modelar el campo de la bobina fuente como el producido por elementos diferenciales de volumen en el subsuelo. El efecto individual de estos elementos define la sensibilidad de las mediciones, y su efecto integrado sobre el subsuelo simula las mediciones.

II.2. Contribución de un volumen elemental del subsuelo

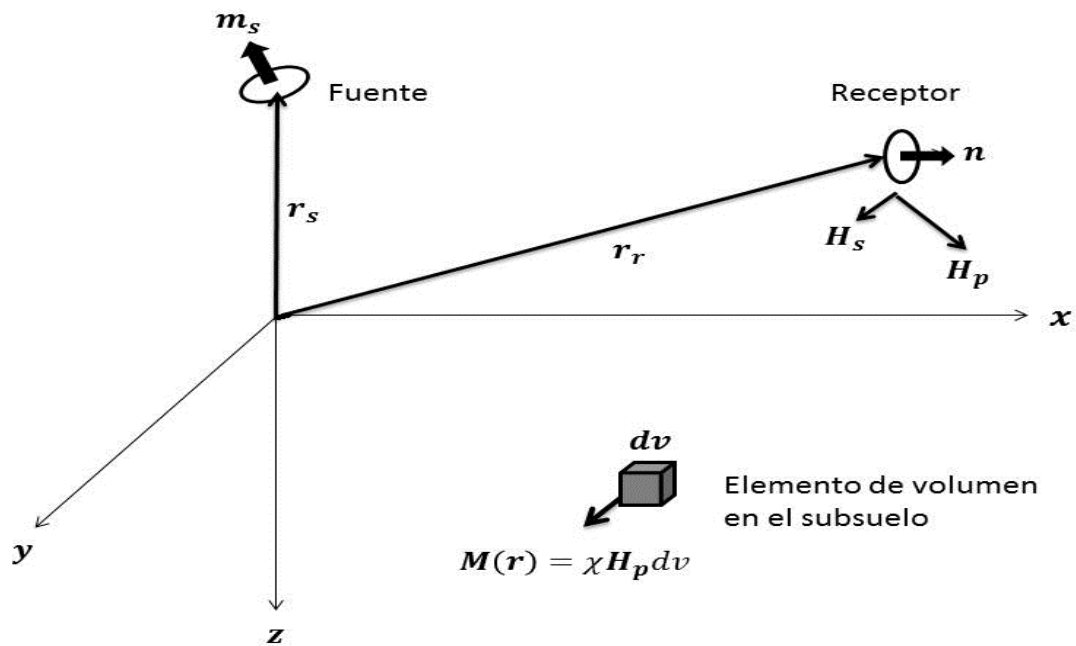


Figura 1. Sistema de coordenadas y representación esquemática de dos dipolos magnéticos puestos por encima de un suelo magnético. El dipolo receptor mide tanto el campo magnético primario (H_p) como el campo magnético secundario (H_s). El primero es producido directamente por la fuente y el segundo se debe al efecto integrado de pequeños dipolos elementales inducidos en el suelo magnético.

La expresión vectorial para el campo magnético $\mathbf{H}$ en un punto $\mathbf{r}$ debido a un dipolo localizado en $\mathbf{r}_i$ con momento magnético $\mathbf{m}_i$ está dada como (e.g, Reitz and Milford, 1979):

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i) = \frac{1}{4\pi} \left\{ -\frac{\mathbf{m}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} + \frac{3[\mathbf{m}_i \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)](\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^5} \right\}. \quad (1)$$

Para encontrar la contribución de intensidad magnética de un elemento diferencial de volumen dentro de un medio homogéneo, considérese la geometría de la Figura 1 donde el campo magnético primario $\mathbf{H}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)$ generado por el dipolo fuente induce un dipolo magnético secundario en el elemento diferencial. Este dipolo tendrá un momento magnético que depende directamente de la susceptibilidad magnética χ del medio (e.g., Grant y West, 1965) la cual se define como

$$\chi = \frac{\mu_1}{\mu_0} - 1, \quad (2)$$

siendo μ_0 la permeabilidad magnética del vacío y μ_1 la del medio. La densidad volumétrica $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ de magnetización en el subsuelo debida al campo primario $\mathbf{H}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)$ está dada para valores pequeños de χ como (e.g., Grant and West, 1965)

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi \mathbf{H}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s), \quad (3)$$

donde

$$\mathbf{H}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi} \left\{ -\frac{\mathbf{m}_s}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^3} + \frac{3[\mathbf{m}_s \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)](\mathbf{r}-\mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s|^5} \right\}.$$

Por lo tanto, el momento magnético inducido en el elemento de volumen será entonces $\chi \mathbf{H}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) dv$. Ahora, siguiendo la ecuación (1) el campo magnético $\mathbf{H}_s$ en el receptor localizado en $\mathbf{r}_r$ debido al elemento de volumen en $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left\{ -\frac{\chi \mathbf{H}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s)}{|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}|^3} + \frac{3[\chi \mathbf{H}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \cdot (\mathbf{r}_r - \mathbf{r})](\mathbf{r}_r - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}|^5} \right\} dv. \quad (4)$$

Si se considera solo la componente del campo $\mathbf{H}_s$ en la dirección $\mathbf{n}$, como se muestra en la figura, la expresión toma la forma

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{4\pi} \left\{ -\frac{\chi \mathbf{H}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}|^3} + \frac{3[\chi \mathbf{H}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \cdot (\mathbf{r}_r - \mathbf{r})](\mathbf{r}_r - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}|^5} \right\} dv. \quad (5)$$

Este es el campo medido por el dipolo receptor orientado en la dirección $\mathbf{n}$. Reordenando los términos

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}_r, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \left\{ \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{r}_r - \mathbf{r})(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r}_r - \mathbf{r}))}{|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}|^5} - \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{r}_r - \mathbf{r}|^3} \right] \right\} \cdot \mathbf{H}_p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s) \chi dv. \quad (6)$$

El término dentro de las llaves es equivalente al de la ecuación (1) pero remplazando $\mathbf{m}_i$ por $\mathbf{n}$. En otras palabras, el término entre llaves es el campo en $\mathbf{r}$ de un dipolo unitario “fuente” en el lugar y con la dirección del dipolo receptor. Esto quiere decir que la intensidad del campo secundario se puede escribir como

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_r, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{H}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_r) \cdot \mathbf{H}_p(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) dv, \quad (7)$$

siendo $\mathbf{H}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_r) = \left\{ \frac{1}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_r)(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_r))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_r|^5} - \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_r|^3} \right] \right\}.$

La expresión anterior obedece al principio de reciprocidad, es decir, intercambiando la fuente por el receptor el resultado no se ve afectado. Sin embargo, nótese que esta reciprocidad no fue impuesta de antemano sino que se cumple automáticamente. Integrando las contribuciones elementales tenemos que las mediciones del campo magnético en el receptor se pueden representar para una distribución arbitraria $\chi(\mathbf{r})$ como

$$\mathbf{H}_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_r) \cdot \mathbf{n} = \int_v \mathbf{H}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_r) \cdot \mathbf{H}_p(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) dv. \quad (8)$$

En la Figura 2 se comparan las contribuciones del integrando separándolas según las componentes de los campos. La suma de las contribuciones en cada caso representa la sensibilidad espacial de las mediciones. Como veremos más adelante la integral sobre todo el semiespacio es unitaria cuando se normaliza el campo secundario para expresarlo como susceptibilidad aparente, según se explica en la siguiente sección.

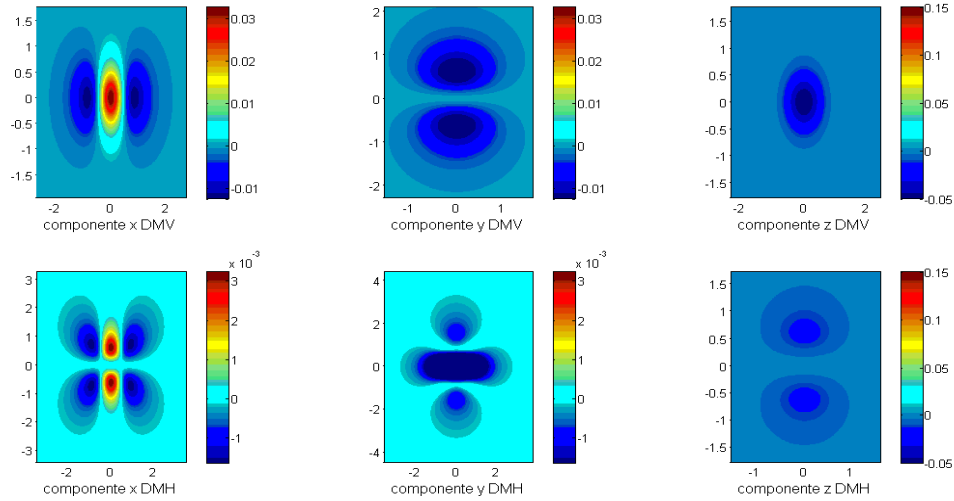


Figura 2. Contribuciones espaciales de la relación $H(r_s, r) \cdot H(r_r, r)$ según las componentes de los campos tanto para DMV como DMH. Las imágenes corresponden a una profundidad $z = 0$ y a una altura $h = 0.1 \text{ m}$ para las dos configuraciones.

2.3. Susceptibilidad magnética aparente

Considérese la Figura 3 donde se presentan las cuatro configuraciones propuestas en este trabajo. Las dos primeras corresponden a las configuraciones estándar del equipo *EM-38 MK2*. Éstas son: dipolos magnéticos verticales (DMV) y dipolos magnéticos horizontales (DMH). Además en una nueva forma de utilizar el equipo rotándolo sobre el eje longitudinal se agregaron dos configuraciones a las cuales llamamos DMV-R y DMH-R. La R se refiere a la versión rotada de su configuración correspondiente.

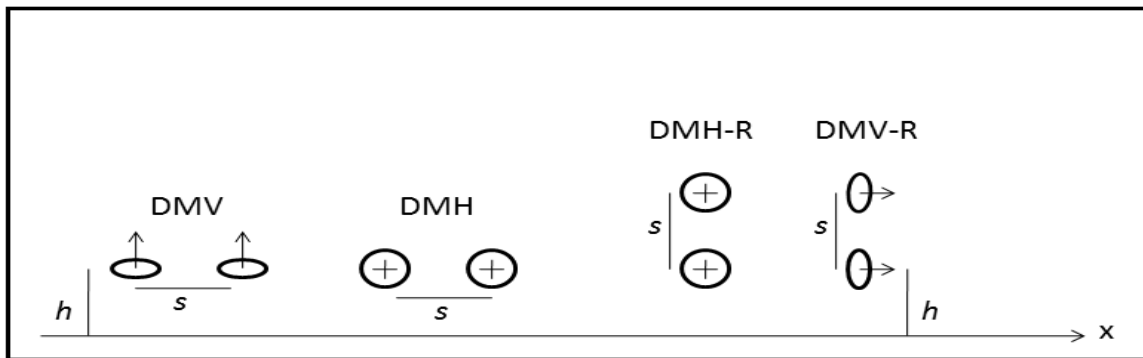


Figura 3. Los cuatro arreglos de dipolos usados en las mediciones de campo. Los primeros dos: DMV y DMH corresponden a las configuraciones estándar del equipo *EM-38 MK2*. Los últimos dos: DMV-R y DMH-R corresponden a la nueva forma de utilizar el equipo propuesta en este trabajo, la letra R se refiere a la versión rotada de las configuraciones normales correspondientes.

Utilizamos el concepto de susceptibilidad magnética aparente χ_a para normalizar las expresiones anteriores y también las mediciones de campo correspondientes. La idea es resolver para la susceptibilidad de un semiespacio homogéneo en función de la separación s de los dipolos magnéticos y su altura h por encima de la superficie, para después utilizar la misma expresión pero esta vez para medios heterogéneos.

El campo magnético sobre un semiespacio de permeabilidad magnética μ_1 se puede expresar como la suma de dos términos. Uno de ellos es el campo primario asociado directamente con el dipolo fuente y el otro es el campo secundario debido al semiespacio. Se puede demostrar utilizando el método de imágenes que el efecto del semiespacio está dado por la imagen del dipolo fuente (Keller and Frischknecht, 1960). La Figura 4 ilustra el caso para un DMV.

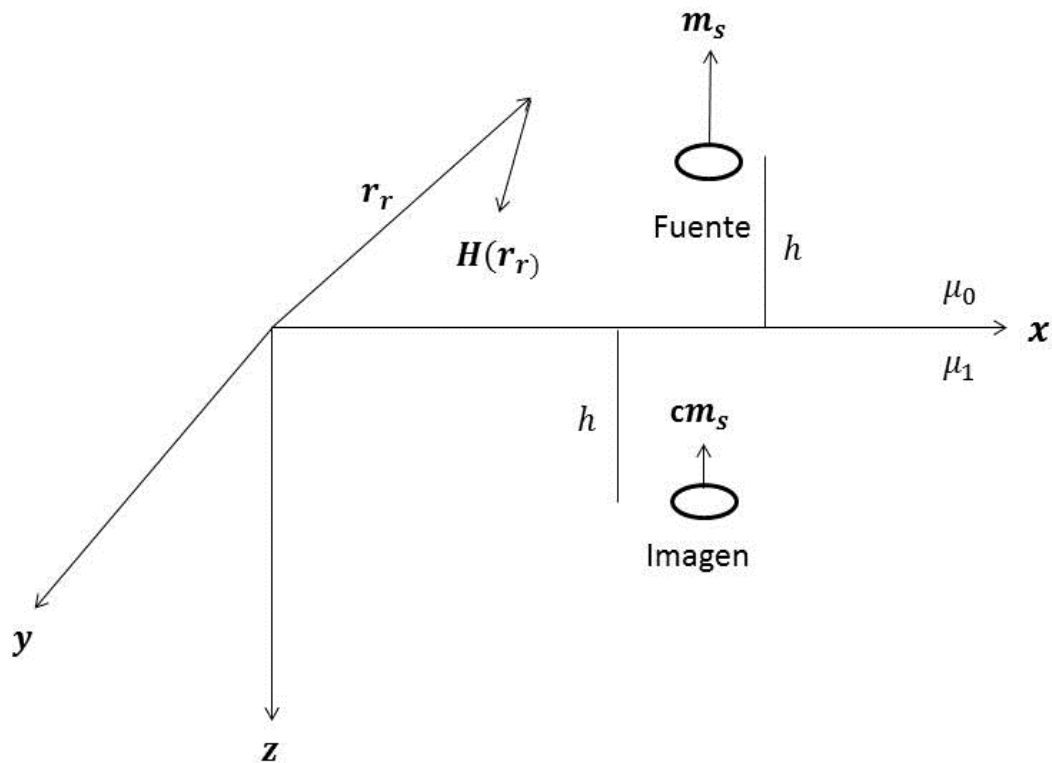


Figura 4. Dentro de un semiespacio homogéneo de permeabilidad magnética μ_1 , el campo magnético presente en el aire circundante es la suma del campo debido a la fuente (H_p) y al debido a la imagen (H_s) con momento magnético escalado (cm_s) el cual depende del contraste de permeabilidad magnética.

En el Apéndice C se muestra que la respuesta de un semiespacio de permeabilidad μ_1 para las distintas configuraciones cuando el dipolo fuente se encuentra a una altura h con respecto al semiespacio se expresa como

$$\frac{H}{H_p} = 1 \pm \left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \right) f. \quad (9)$$

Para cada arreglo H se refiere a la suma de las componentes correspondientes de los campos primario y secundario. La variable f es una función que depende de la separación s entre bobinas y h . Esta función será diferente para cada configuración, el cálculo de estas funciones se desarrolla en el apéndice D. Generalmente la susceptibilidad magnética es una cantidad muy pequeña y haciendo una expansión en series resulta

$$\frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_0} \right). \quad (10)$$

Utilizando las ecuaciones (2) y (9)

$$\frac{H}{H_p} = 1 \mp \frac{1}{2} \chi f|_h. \quad (11)$$

Despejando χ de la ecuación anterior tenemos

$$\chi = \mp \frac{2}{f|_h} \left(\frac{H}{H_p} \Big|_h - 1 \right). \quad (12)$$

La intensidad del campo total H puede expresarse como la suma del campo primario H_p más el campo secundario H_s , por consiguiente:

$$\chi = \mp \frac{2}{f|_h} \left(\frac{H_s}{H_p} \Big|_h \right). \quad (13)$$

Por lo tanto, la susceptibilidad magnética para un semiespacio homogéneo cuando ambas bobinas se encuentran a la misma altura con respecto al semiespacio para DMV está dada por

$$\chi = 2 \left[\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2h}{s}\right)^2\right]^{3/2}} - \frac{3\left(\frac{2h}{s}\right)^2}{\left[1 + \left(\frac{2h}{s}\right)^2\right]^{5/2}} \right] \frac{H_{zs}}{H_{zp}}. \quad (14)$$

En el caso de dipolos magnéticos horizontales (DMH) la susceptibilidad magnética del semiespacio está dada como

$$\chi = -2 \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2h}{s}\right)^2\right]^{3/2}} \frac{H_{ys}}{H_{yp}}. \quad (15)$$

Y para las configuraciones DMV-R y DMH-R la susceptibilidad magnética del semiespacio se escribe como

$$\chi = -2 \left(\frac{s+2h}{h} \right)^3 \frac{H_{ys}}{H_{yp}}, \quad (16)$$

La ecuación (8) se sustituye en las definiciones anteriores para la susceptibilidad magnética aparente y así poder modelar anomalías del subsuelo. Para todos los casos los subíndices indican la dirección del dipolo, es decir, la componente del campo para cada configuración.

2.4. Funciones de sensibilidad

En las siguientes líneas se exploran algunas de las características de las funciones de sensibilidad de las cuatro configuraciones. Estas funciones son los núcleos de la ecuación (8). En un punto dado dentro de la tierra, la sensibilidad es el producto escalar de dos campos magnéticos, uno debido al dipolo fuente y el otro debido a un dipolo ficticio en la misma posición y en la misma dirección que el receptor. En todos los casos se normaliza por los factores geométricos correspondientes de modo tal que la integral de volumen sobre el semiespacio inferior sea la unidad.

Las Figuras 5 y 6 corresponden a las funciones de sensibilidad en 3D para las cuatro configuraciones utilizadas en este trabajo con dos separaciones $s = 0.5, 1 \text{ m}$ respectivamente. Como puede notarse, para el caso de las configuraciones estándar de dipolos, es decir DMV y DMH se presentan dos máximos (en color rojo) justo por arriba de la posición de los dipolos mientras que para las versiones rotadas, es decir

DMV-R y DMH-R solo se presenta un máximo pues ambas bobinas comparten las mismas coordenadas x, y , lo cual ayuda a realizar las debidas interpretaciones de las anomalías magnéticas, más adelante se discutirá al respecto.

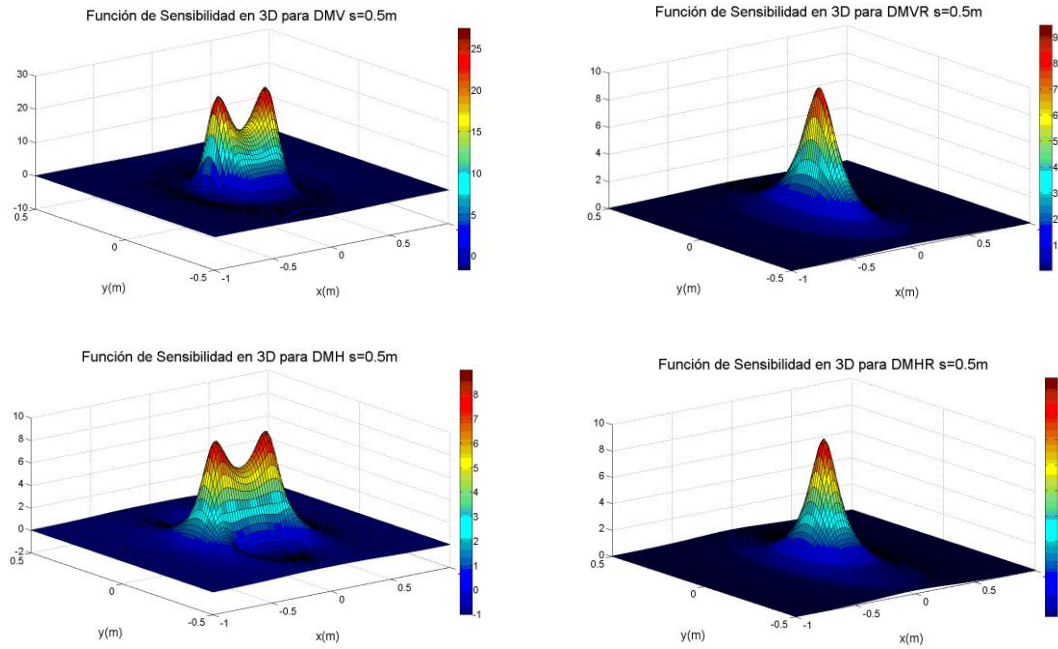


Figura 5. Funciones de sensibilidad a una profundidad $z = 0 \text{ m}$ para los cuatro distintos arreglos de dipolos. a) DMV $s = 0.5 \text{ m}$, b) DMV-R $s = 0.5 \text{ m}$, c) DMH $s = 0.5 \text{ m}$, d) DMH-R $s = 0.5 \text{ m}$ a una altura $h = 0.1 \text{ m}$.

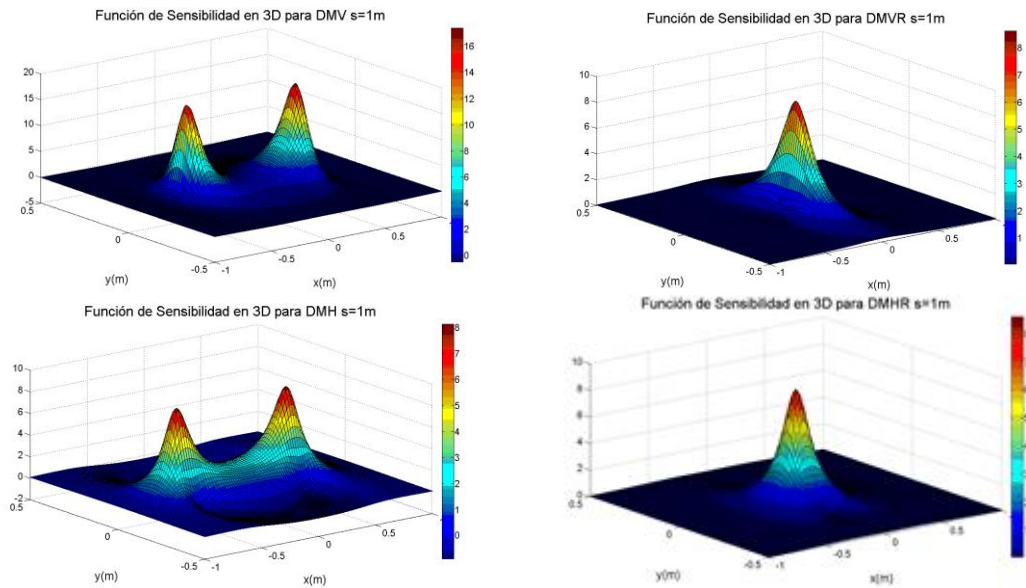


Figura 6. Funciones de sensibilidad a una profundidad $z = 0 \text{ m}$ para los cuatro distintos arreglos de dipolos. a) DMV $s = 1 \text{ m}$, b) DMV-R $s = 1 \text{ m}$, c) DMH $s = 1 \text{ m}$, d) DMH-R $s = 1 \text{ m}$ a una altura $h = 0.1 \text{ m}$.

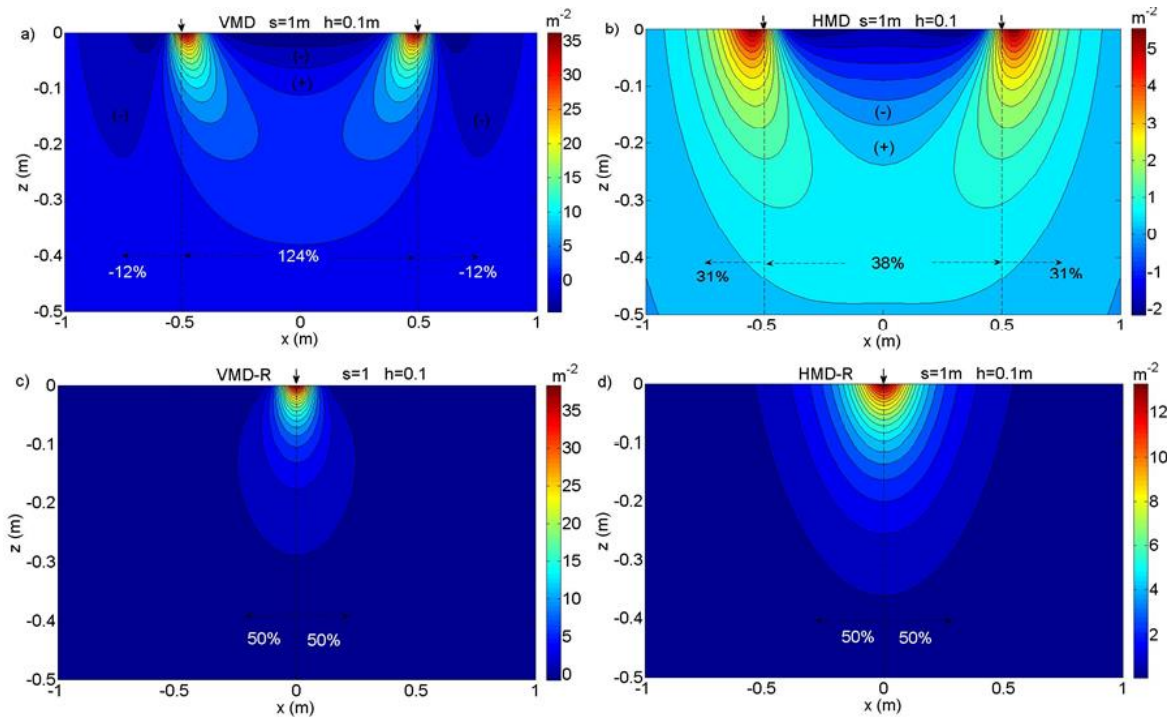


Figura 7. Secciones verticales de la función de sensibilidad para los cuatro distintos arreglos de dipolos. Las variaciones a lo largo de la variable y se integraron de modo que la contribución es independiente de esta variable. Los valores en los porcentajes corresponden a las contribuciones debidas a las variables x y z . En a) y b) se observan tres regiones distintas mientras que en c) y d) solo existen dos. Las flechas en la parte de arriba representan las posiciones de los dipolos.

La Figura 7a presenta las variaciones en 2D de la sensibilidad en función de la profundidad y a lo largo de la línea por debajo de los dipolos para DMV. Las funciones se integran a lo largo de la dirección y y de esta forma se busca la independencia de las secciones con respecto a esta variable. Se puede observar que los valores máximos se producen en la superficie y muy cerca de los dipolos. Hay una pequeña región central cerca de la superficie donde las contribuciones son negativas, y también hay lóbulos secundarios negativos cerca de la superficie en las regiones exteriores del arreglo de dipolos. El balance global se resume en los porcentajes impresos en la parte inferior de la figura. La región central contribuye con 124% de la señal. Este valor se obtiene integrando sobre la profundidad y también dentro de los dipolos. Las regiones exteriores contribuyen con -12% cada una, dejando una contribución neta para todo el semiespacio del 100%. La imagen ofrecida por la Figura 7a es parcial ya que sólo representa una sección 2D sobre la profundidad y las regiones entre los dipolos. Para complementar las imágenes se presentan más adelante vistas en planta y curvas de contribución en profundidad.

La Figura 7b presenta la sección para DMH. Una vez más, hay una región significativa de contribuciones negativas entre los electrodos. Una diferencia con respecto a la sección anterior es que las regiones exteriores son positivas. Esto se refleja en la integración total sobre la profundidad y entre las tres regiones definidas por los dipolos. Ahora el balance es del 31% para cada una de las regiones exteriores y el 38% para la parte central. En cuanto a los dipolos rotados es decir, DMV-R y DMH-R, en las secciones mostradas en las Figuras 7c y 7d respectivamente, se puede observar que tienen un solo máximo justo por debajo de ambos dipolos debido a que ahora ambos comparten la misma posición a lo largo del eje horizontal (x), por lo que el 50% corresponde a cada lado del dipolo. También se puede apreciar que el DMV-R tiene un alcance lateral más estrecho que el DMH-R, y que de alguna manera ambos parecen tener una menor profundidad de penetración que sus versiones análogas sin rotar. Esto quedará más claro cuando se hable sobre la dependencia en función solo de la profundidad un poco más adelante.

Pasemos ahora a secciones 2D en planta (Figura 8). Las funciones de sensibilidad se integran ahora sobre la profundidad de modo que estas secciones ya no dependen de la profundidad. Una vez más se incluye el balance general de las contribuciones para las diferentes regiones. En una comparación de las secciones en planta para DMV y DMH se puede observar que este último tiene una distribución más compacta a lo largo de la línea definida por los dipolos. Por tanto, esperamos que la configuración de DMH pueda proporcionar anomalías menos afectadas por los objetos que se encuentran a los lados de los dipolos. Un patrón muy similar se puede apreciar al comparar las secciones de DMV-R con DMH-R, con la diferencia de que ahora esto se aplica a una sola área dominante en lugar de dos. Antes de dejar esta sección debemos analizar cómo se comportan las contribuciones en función de la profundidad, en este caso mediante la integración sobre las coordenadas horizontales. Las curvas resultantes se muestran en la Figura 9.

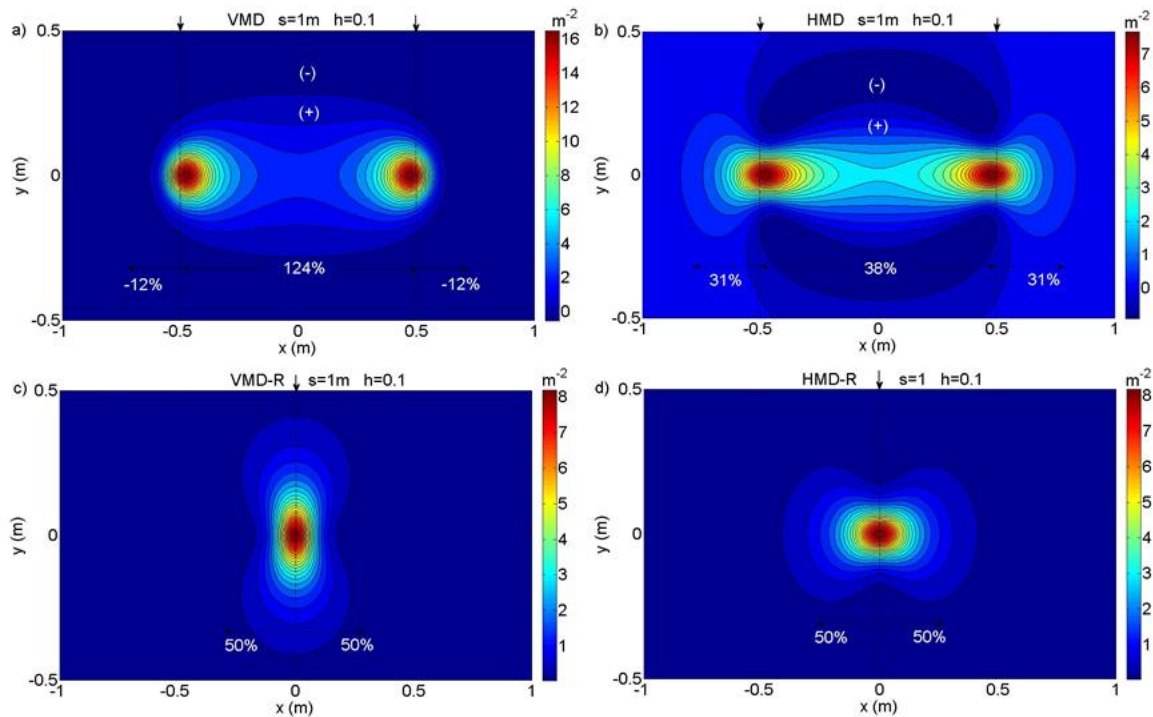


Figura 8. Secciones horizontales de las funciones de sensibilidad para los cuatro arreglos de dipolos magnéticos. Las variaciones a lo largo del eje z se integraron de manera que la contribución es independiente de esta variable. Los valores de porcentaje corresponden a la contribución de la función en las variables x y y . En a) y b) nuevamente se observan tres distintas regiones mientras que en c) y d) solo dos. Las flechas por encima de la figura representan las posiciones de los dipolos.

Tanto DMV y DMH muestran una contribución máxima en profundidad. Además, la curva de DMV presenta valores negativos significativos a profundidades de más de la mitad de la separación entre dipolos. La parte negativa profunda contribuye en -25% del área total de la curva, mientras que el 125% corresponde a profundidades menores. Otra observación es que las versiones rotadas comienzan con un valor máximo en la superficie y decaen con la profundidad más rápido que DMV y DMH. Esto implica que tienen una profundidad inferior de penetración. Esto es importante para la discriminación en profundidad cuando se realice la inversión de datos para fines de tomografía.

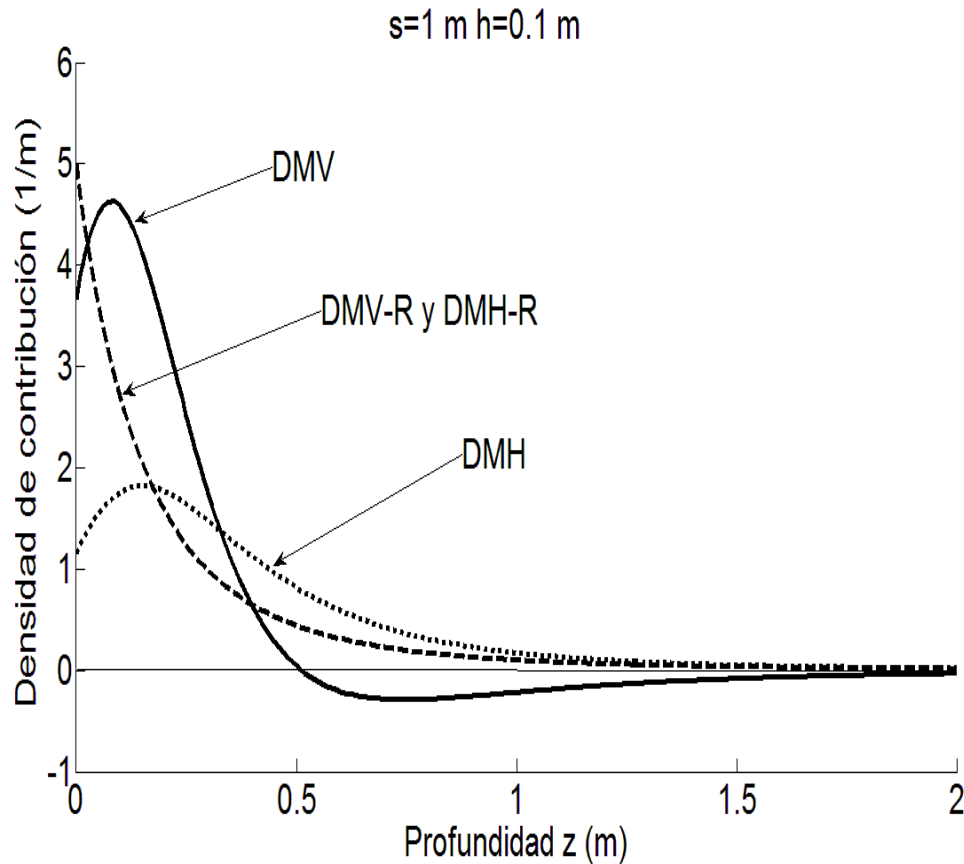


Figura 9. Contribuciones en función solo de la profundidad para los cuatro arreglos de dipolos magnéticos. En todos los casos el área definida bajo la curva es la unidad. Para el caso de DMV el área positiva es 1.25 por tanto el área negativa es igual a -0.25. Estas contribuciones se obtienen integrando a infinito en dirección x e y para que las funciones de peso solo dependan de z .

2.5. Anomalías de objetos rectangulares

En un primer ejemplo para mostrar la aplicación de la integral en la ecuación (8), se calcularon las anomalías causadas por dos cuerpos magnéticos con distintas dimensiones y localizados a diferentes profundidades. La Figura 10c ilustra tanto las dimensiones como posiciones a profundidad de ambos cuerpos así como los valores de susceptibilidad magnética, en todos los modelos directos las unidades son arbitrarias. Los datos sintéticos derivados de los cuerpos modelo se muestran como perfiles en la Figura 10a y 10b correspondiendo a dipolos convencionales (DMV, DMH) y dipolos rotados (DMV-R, DMH-R), respectivamente. En la Figura 11 se pueden encontrar las respuestas en planta para estos cuerpos utilizando todas las configuraciones anteriores con separación de bobinas $s = 0.5\text{ m}$ y $s = 1\text{ m}$. En todos los

casos las mediciones se supusieron cada 0.25 m sobre x para cinco diferentes perfiles en y . Estos perfiles están espaciados cada metro.

Como puede observarse en la Figura 11b la configuración de DMV con $s = 0.5\text{ m}$ es la única que presenta valores negativos además de dos máximos para un solo cuerpo, esto está en acuerdo con la función de sensibilidad correspondiente. Igualmente en su configuración DMV con $s = 1\text{ m}$ presenta lo que pudiera interpretarse a primera instancia como la imagen de tres o más cuerpos, esto nuevamente es predicho por la función de sensibilidad correspondiente. Las configuraciones de dipolos rotados presentan un solo máximo por cada cuerpo. En la Figura 12, un nuevo modelo propuesto consistió en 3 cuerpos de diferentes dimensiones y localizados a distintas profundidades, sus anomalías correspondientes para un perfil en $y = 0\text{ m}$ se presentan en las Figuras 12a y 12b. De igual forma que en el ejemplo anterior, las mediciones se supusieron cada 0.25 m sobre x con ambas separaciones de bobinas. La respuesta en planta (Figura 13) también presenta lo que pudiera interpretarse como la presencia de más cuerpos sobre todo para DMV. Debido a este tipo de particularidades es que se consideró la idea de invertir los datos e incluir nuevas configuraciones y así evitar este tipo de malinterpretaciones.

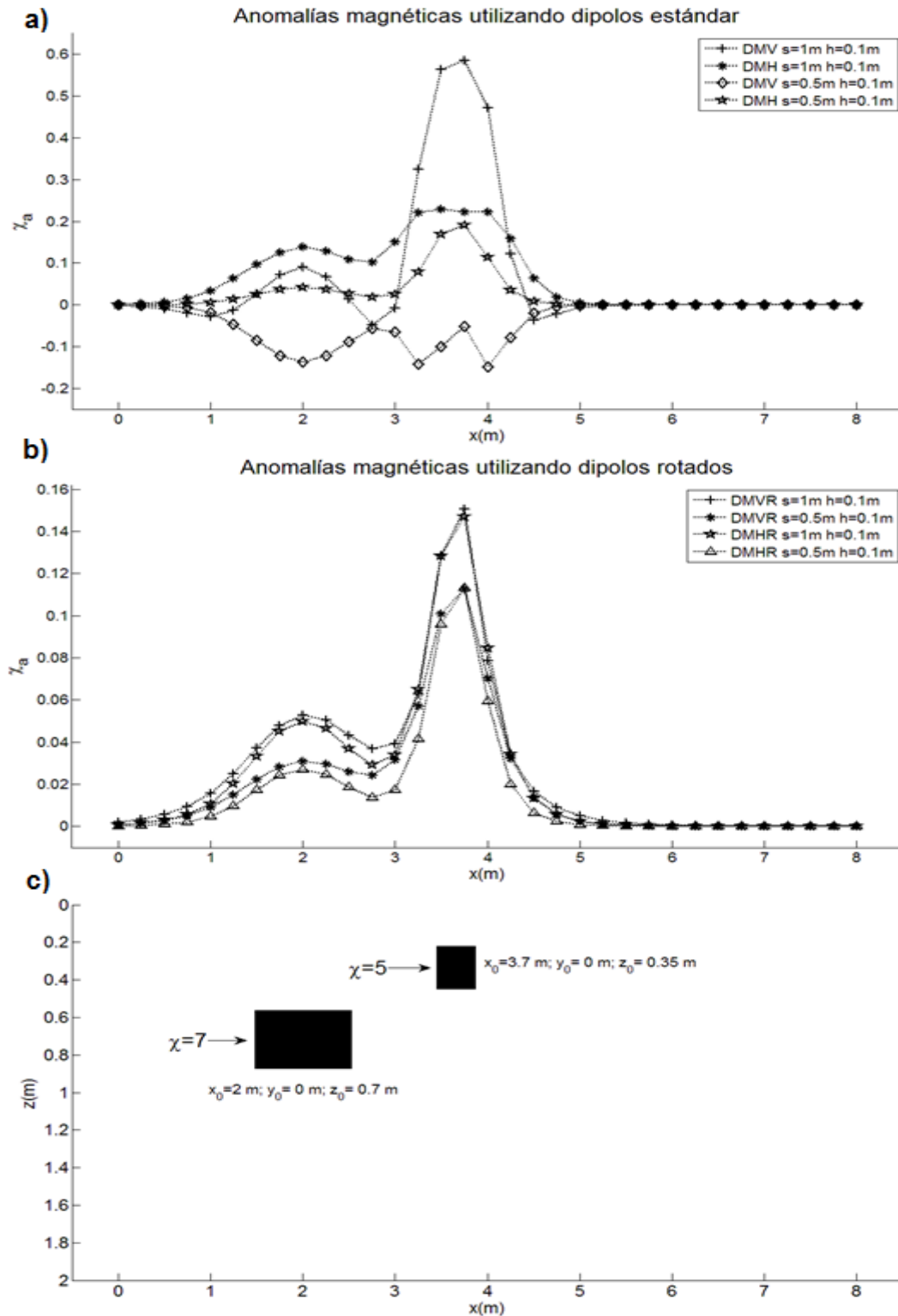


Figura 10. Datos sintéticos derivados del modelo propuesto para todas las configuraciones de dipolos con $s = 0.5\text{ m}$ y $s = 1\text{ m}$. a) Anomalías magnéticas para los arreglos de dipolos convencionales causadas por el cuerpo de abajo. b) Anomalías magnéticas para dipolos rotados. c) Representación de la posición y tamaño de los cuerpos modelo. Las coordenadas indican el centro de los objetos.

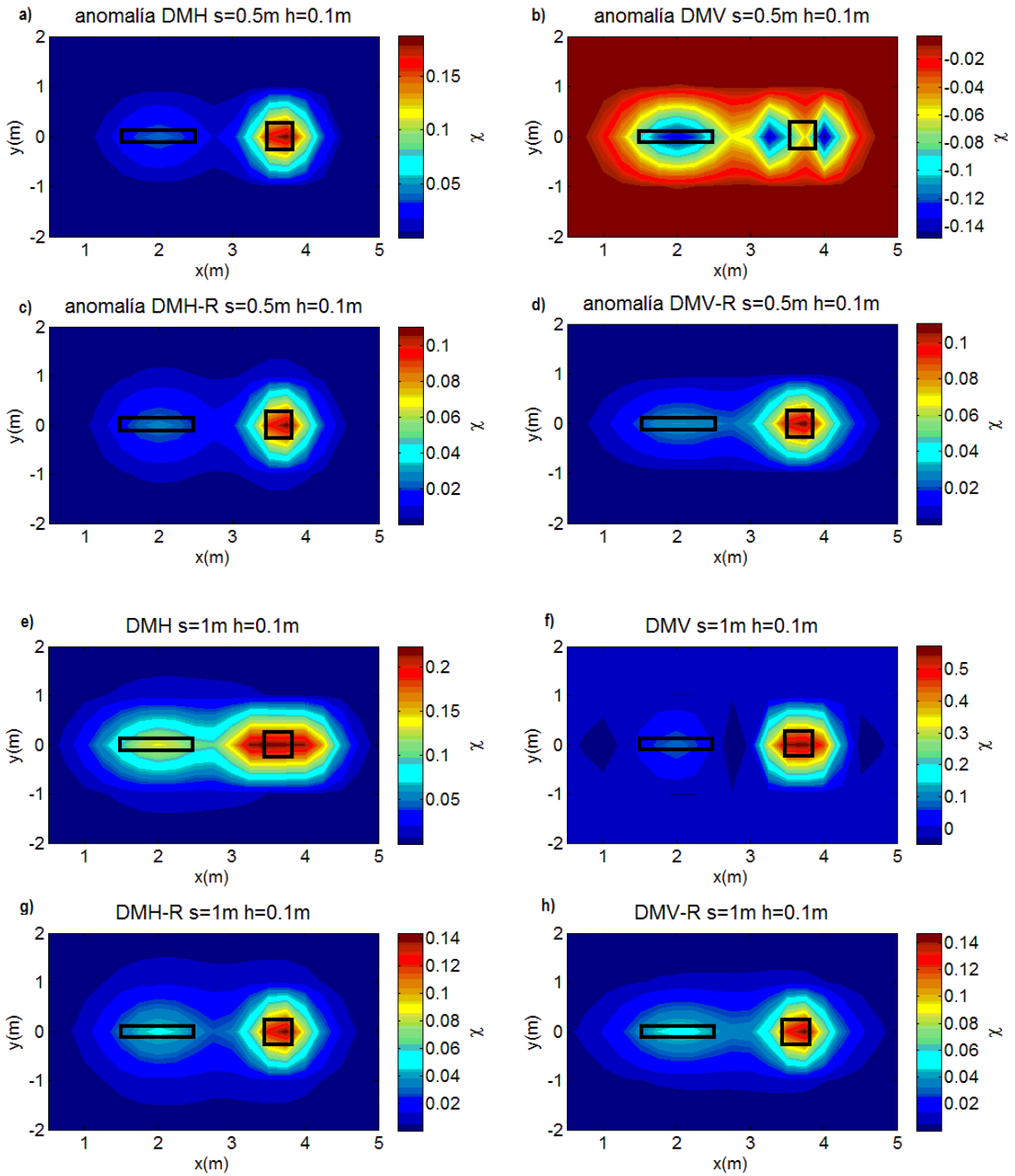


Figura 11. Anomalías debidas a dos cuerpos centrado a profundidad según la figura 10c. Utilizando todas las configuraciones de dipolos con separación $s = 0.5, 1\text{ m}$. Se suponen las mediciones cada 0.25 m en x para 5 diferentes perfiles en y . En todos los casos los rectángulos delimitan los cuerpos. Como puede observarse, la respuesta correspondiente a DMV tiene valores negativos además de que presenta dos máximos.

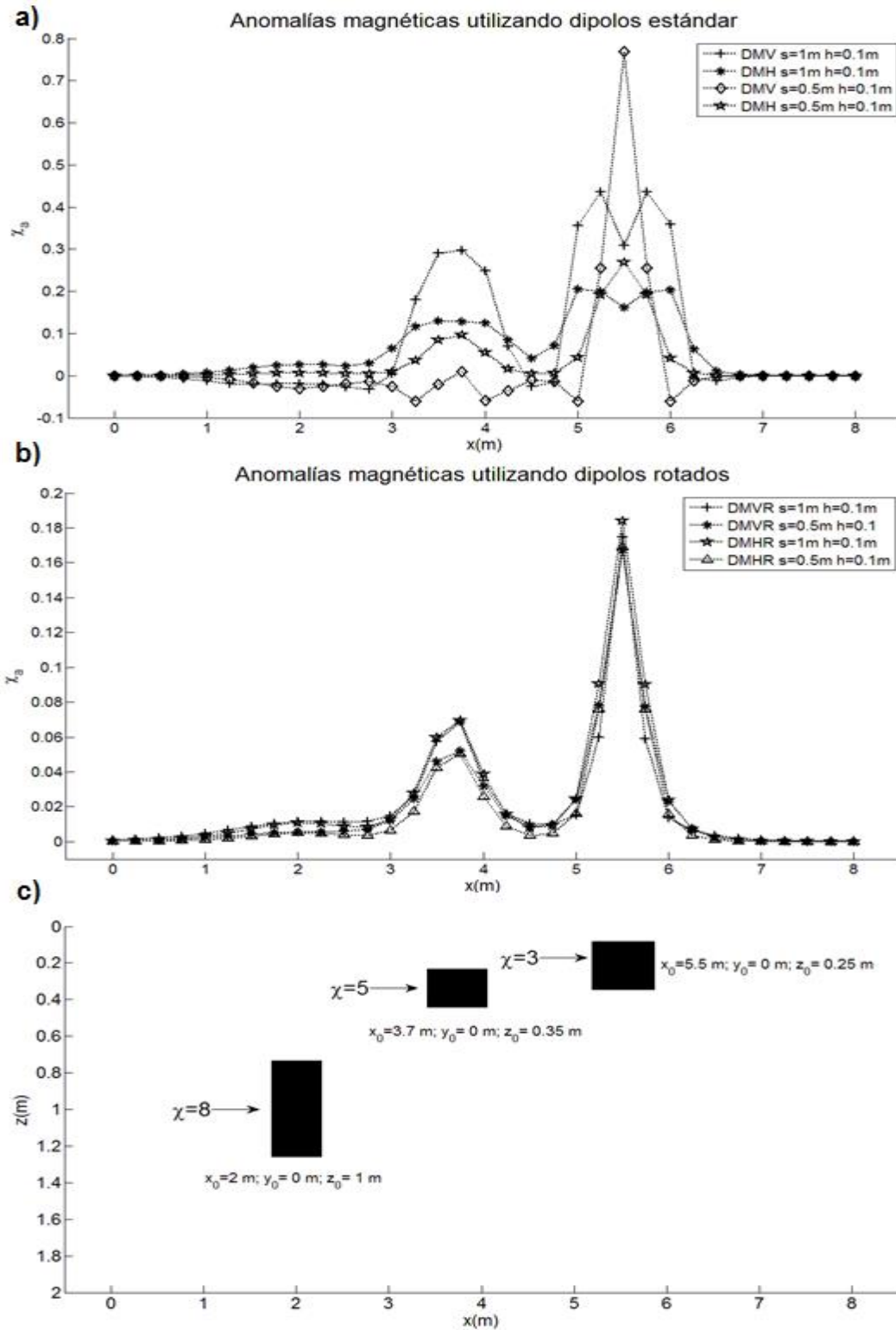


Figura 12. Datos sintéticos derivados del modelo propuesto para todas las configuraciones de dipolos con $s = 0.5 m$ y $s = 1 m$. a) Anomalías magnéticas para los arreglos de dipolos convencionales causadas por el cuerpo de abajo. b) Anomalías magnéticas para dipolos rotados. c) Representación de la posición y tamaño de los cuerpos modelo. Las coordenadas indican el centro de los objetos.

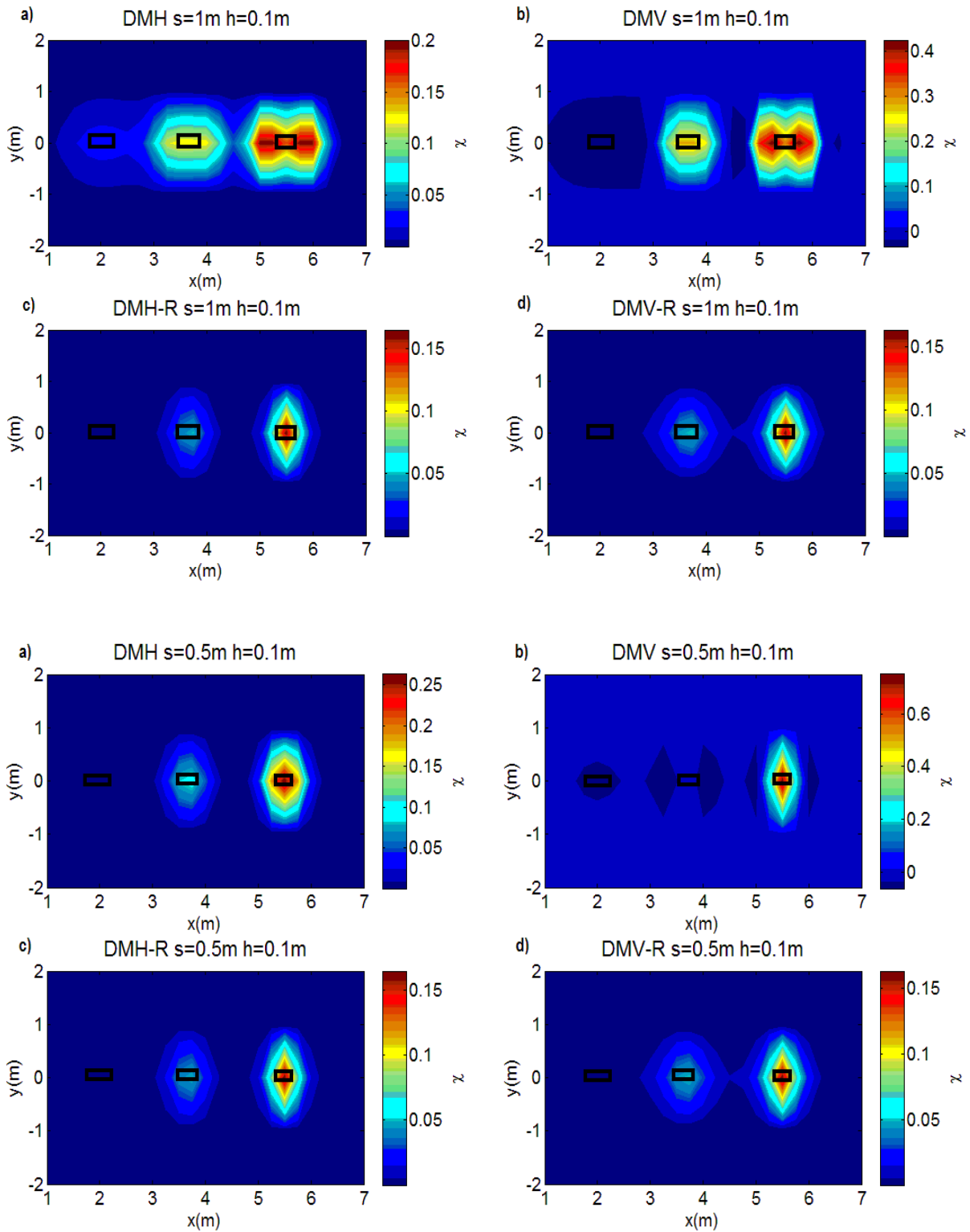


Figura 13. Anomalías debidas a dos cuerpos centrado a profundidad según la figura 12c. Utilizando todas las configuraciones de dipolos con separación $s = 0.5, 1\text{ m}$. Se suponen las mediciones cada 0.25 m en x para 5 diferentes perfiles en y . En todos los casos los rectángulos delimitan los cuerpos.

2.6. Conclusiones

Objetos simples y compactos pueden producir anomalías superficiales complicadas y dispersas, difíciles de interpretar cualitativamente en lo relativo a la localización horizontal de los objetos. Esto sucede particularmente con los arreglos tradicionales de DMV y DMH y en menor medida con los arreglos rotados DMV-R y DMH-R. Estimar la profundidad y el tamaño de los objetos resultaría aún más complicado intentarlo cualitativamente. El planteamiento del problema directo como una convolución entre las funciones de sensibilidad y la distribución de SM invita a la recuperación de esta última mediante análisis lineal. En el siguiente capítulo se presenta la propuesta para recuperar la distribución de SM en el subsuelo a partir de mediciones realizadas con uno o varios arreglos dipolares.

Capítulo 3. Problema inverso y manejo de la no unicidad

3.1 Introducción

Lo primero que hay que decidir en este tipo de problemas es la forma de representar matemáticamente la distribución de la propiedad física que se desea estimar. Se puede suponer, por ejemplo, que se trata de objetos anómalos en el subsuelo que tienen forma rectangular, circular o elíptica, y proceder a obtener su localización, dimensiones y el valor de la propiedad en cuestión. Otra opción es no suponer una geometría en particular, sino hacer que la distribución misma defina la forma del objeto según las variaciones espaciales de la propiedad. Esto se puede lograr suponiendo una distribución donde la propiedad pueda variar arbitrariamente de punto a punto. Lo que comúnmente se hace en la práctica es suponer una rejilla rectangular con celdas relativamente pequeñas en las que se supone que la propiedad física es uniforme. En este trabajo utilizaremos esta última estrategia con una modificación: en lugar de suponer que la propiedad es uniforme en cada celda, con lo cual aparecen discontinuidades entre celdas, supondremos que la propiedad varía según funciones Hann. El problema inverso se plantea en términos de las amplitudes de estas funciones, lográndose imágenes suaves de los objetos sin tener que incrementar el número de celdas de la rejilla. La no unicidad se aborda explorando el espacio de soluciones mediante la minimización del momento de los modelos con respecto a diferentes profundidades. Si los datos permiten modelos válidos centrados a muy diferentes profundidades entonces la interpretación no es confiable, mientras que si no se dispersan mucho la interpretación es confiable.

3.2. Modelos con límites continuos

La ecuación (8) puede escribirse para cualquiera de los arreglos como

$$\chi_a(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_p) = K \int_v \mathbf{H}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}_R, \mathbf{r}) \chi(\mathbf{r}) d\mathbf{v}, \quad (17)$$

donde la constante K representa el factor geométrico para convertir la razón del campo secundario al primario a susceptibilidad aparente. Para una profundidad dada, representaremos una distribución bidimensional de susceptibilidad del semiespacio como una superposición de funciones continuas, es decir

$$\chi(x, y) = \sum \hbar_j \mathcal{H}_j(x, y), \quad (18)$$

donde $\mathcal{H}_j(x, y)$ son funciones Hann en 2D definidas como

$$\mathcal{H}_j(x, y) = [0.5 + \cos\left(\frac{2\pi(x-x_j)}{T}\right)] [0.5 + \cos\left(\frac{2\pi(y-y_j)}{T}\right)], \quad (19)$$

y $\hbar_j$ sus correspondientes amplitudes. La Figura 14 ilustra una de estas funciones. Para calcular las respuestas de las diferentes configuraciones, se sustituye la ecuación (18) en la ecuación (17) para obtener

$$\chi_a(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_P) = K \sum \hbar_j \int_v \mathbf{H}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}_P, \mathbf{r}) \mathcal{H}_j(x, y) dv. \quad (20)$$

De esta manera podemos calcular las anomalías debidas a cuerpos continuos en el subsuelo. Ejemplos de estos cálculos se muestran en la Figura 15 donde se supone que la distribución está a profundidad, desde $z = 0.5$ a $z = 0.6$ m. Se supone que la distribución en z es uniforme en ese intervalo de profundidades. Se puede observar que la configuración de DMV es la única que presenta una anomalía con valores negativos, en concordancia con las curvas de sensibilidad de la Figura 9. La misma distribución de la Figura 14 se coloca ahora en la superficie y se integra hasta una profundidad de $z = 0.1$ m. La separación entre dipolos es para este caso de $s = 1$ m. De acuerdo con las vistas en planta de las secciones de contribución de la Figura 8, la respuesta ahora presenta dos máximos para DMV y DMH, como se muestra en la Figura 16. Esto significa que se debe tener cuidado durante el levantamiento de datos en campo, pues para cuerpos muy poco profundos la respuesta en superficie no tendrá su máximo sobre el cuerpo sino a los costados, y entonces se verán dos máximos. Esto está en contraste con el comportamiento de DMV-R y DMH-R, cuyas respuestas tienen solo un máximo sobre el cuerpo.

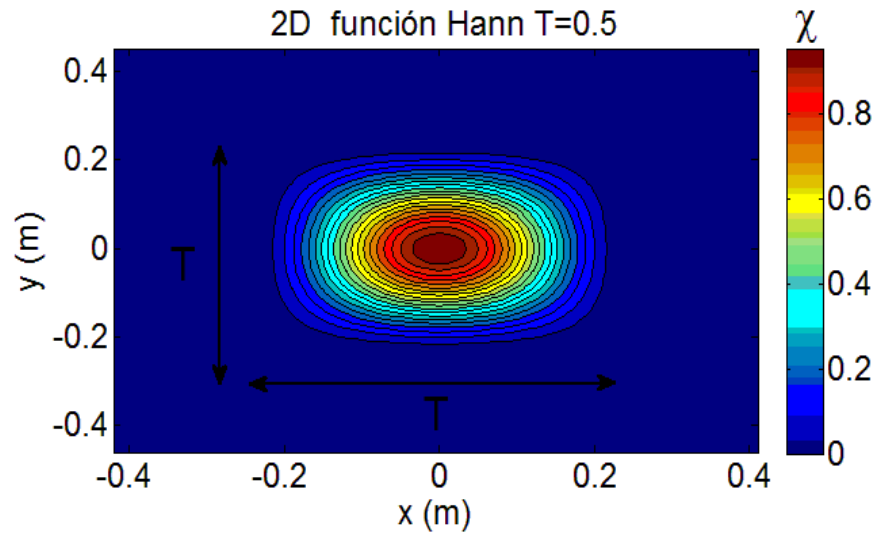


Figura 14. Función Hann 2D. Se supone que la variación lateral de susceptibilidad magnética es una superposición de estas funciones. La distribución vertical se supone constante dentro de una capa específica del subsuelo. Estas funciones se multiplican por las funciones de sensibilidad según la ecuación (20) para obtener las anomalías de susceptibilidad aparente de las Figuras 15 y 16.

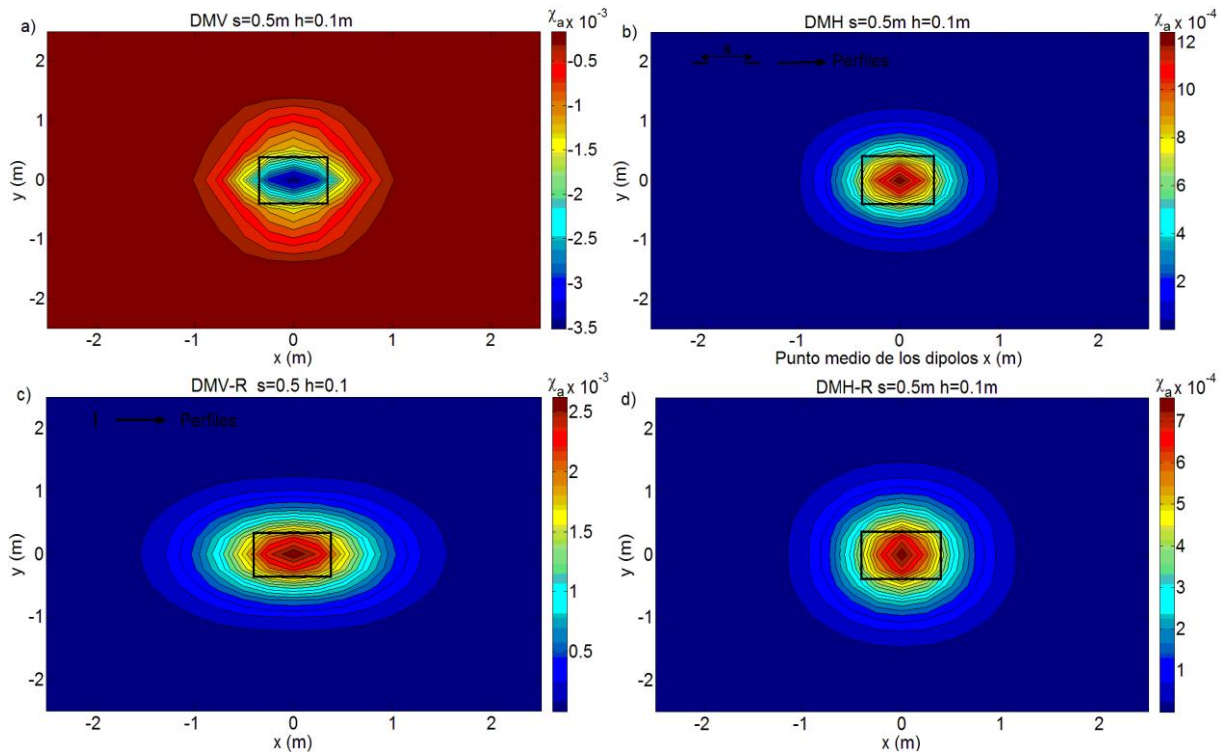


Figura 15. Anomalías en superficie para los diferentes arreglos de dipolos. Se puede ver que para DMV la anomalía es negativa mientras que para los otros casos todas ellas son positivas, esto en concordancia con las funciones de sensibilidad de las Figuras 7 y 8. En este caso la anomalía se asume verticalmente uniforme de 0.5 a 0.6 m de profundidad. El rectángulo en negro define el dominio de la función.

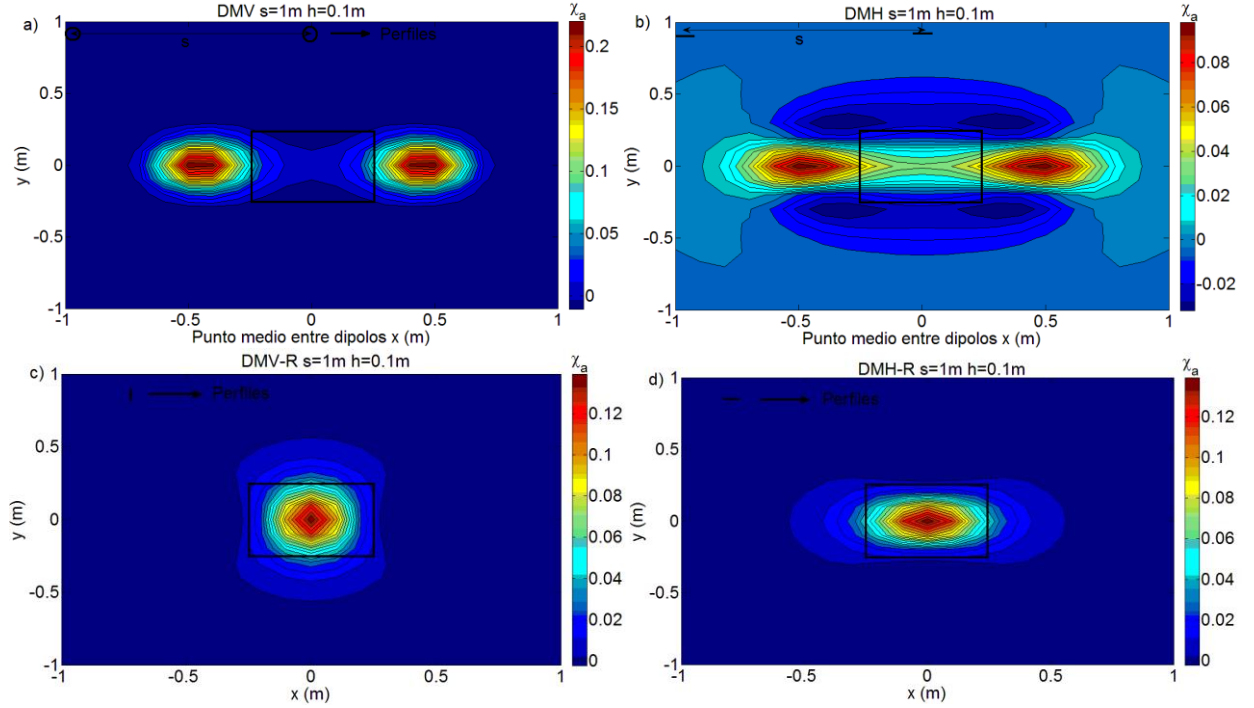


Figura 16. Anomalías en superficie para los diferentes arreglos de dipolos. En este caso la anomalía se supone verticalmente uniforme desde 0 a 0.1 m en profundidad. Ésta difiere con la Figura 15, aquí se pueden observar que las respuestas para DMV y DMH tienen dos máximos, sugiriendo la presencia de dos cuerpos. En contraste, las versiones rotadas DMV-R y DMH-R sugieren la presencia de un solo cuerpo, tal como es el caso. El rectángulo define el dominio de la función Hann.

3.3. Planteamiento del problema inverso

Para formular el problema inverso supondremos que se tienen n mediciones y m amplitudes a_j de las funciones Hann. Es decir,

$$\chi_{ai}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}_P) = K \sum_{j=1}^m \hbar_j \int_v \mathbf{H}(\mathbf{r}_{Si}, \mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}_{Pi}, \mathbf{r}) \mathcal{H}_j(x, y) dv, \quad i = 1, n; j = 1, m. \quad (21)$$

La cual puede escribirse en su forma matricial como

$$\chi_a = A\hbar. \quad (22)$$

El vector χ_a contiene todos los datos, el vector $\hbar$ las incógnitas, en este caso las amplitudes de las funciones Hann. Cada una de las filas de la matriz A contiene las contribuciones de las funciones Hann multiplicadas por la función de sensibilidad para una determinada medición. Para encontrar el vector solución óptimo $\hbar$ se minimiza la

norma de los residuales junto con la norma de las derivadas espaciales de $\mathbf{h}$, sujeto a la condición de que todas las amplitudes de las funciones Hann sean positivas. Para esto último se utilizó programación cuadrática. La inclusión de las derivadas espaciales se conoce como regularización de Tikhonov (e.g. Constable et al., 1987) y se requiere para estabilizar el problema. Formalmente, se minimiza la función objetivo

$$P[\mathbf{h}] = \|\chi_a^{data} - \chi_a^{respuesta}\|^2 + \alpha \|\mathbf{D}\mathbf{h}\|^2, \quad (23)$$

sujeto a $\mathbf{h} > 0$. El vector columna χ_a^{data} contiene todos los datos disponibles para uno o más arreglos de dipolos. El vector columna $\chi_a^{respuesta}$ contiene la respuesta teórica del modelo calculado mediante la ecuación (22). La matriz $\mathbf{D}$ es un operador diferencial de primer orden que involucra las diferencias entre amplitudes consecutivas de las funciones Hann en ambas direcciones. El parámetro α es un parámetro de compensación que controla la importancia relativa del ajuste de los datos y la suavidad del modelo.

La distribución de SM se representa como una superposición de funciones Hann tal como se ilustra en la Figura 17. El periodo es elegido de tal manera que al sumarse dos funciones consecutivas la suma entre ellas sea igual a la unidad, lo que permitirá modelar susceptibilidades uniformes.

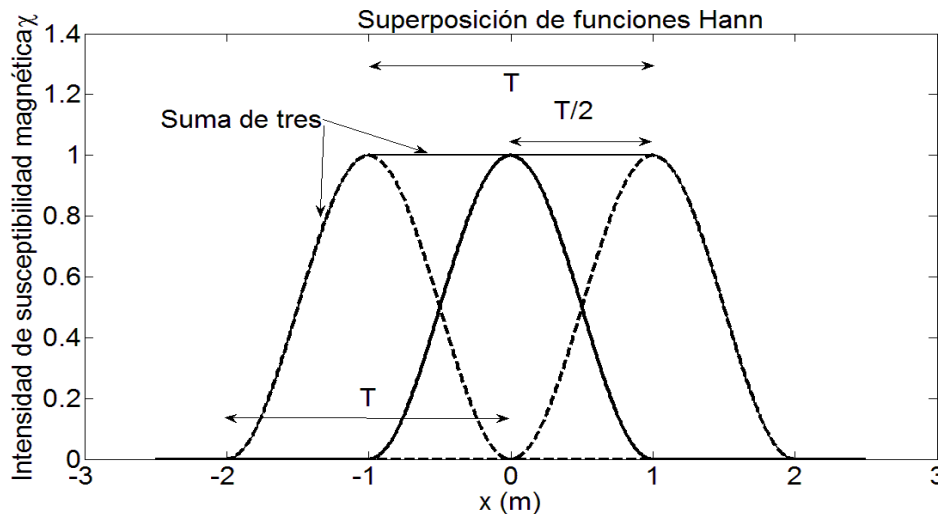


Figura 17. Funciones Hann superpuestas, si se intersectan tal como lo indica la imagen pueden reproducir susceptibilidades uniformes dentro de ellas con límites suaves en los extremos. En este ejemplo las tres funciones tienen la misma amplitud. Para diferentes amplitudes las formas geométricas se vuelven más complicadas pero siempre continuas.

Hasta el momento hemos abordado el problema para una distribución horizontal. Ahora, si lo que deseamos representar es una distribución vertical, la función de la ecuación (19) dependerá de x y z . En lo que sigue, para todos los ejemplos de tomografías magnéticas los centros de las Hann están dispuestos cada 0.25 m en x y 0.1 m en z . Para crear las matrices de sensibilidad A todas las mediciones se supusieron a una altura $h = 0.1\text{ m}$ para ambas separaciones s y equiespaciadas cada 0.25 m en x para un perfil $y = 0\text{ m}$. La Figura 18 ilustra la superposición de la rejilla de mediciones con los centros de las funciones Hann, los cuadros en rojo indican el centro del arreglo de las bobinas sobre el perfil, mientras que los asteriscos negros representan los centros de las Hann. Estas funciones tienen un dominio representado por las elipses. A partir de la ecuación (21) se tiene $n = 33$ y $m = 800$. Para cada una de las n mediciones se realizó la integral del producto de la función de sensibilidad de cada configuración por las funciones Hann con periodo de $T_x = 0.5\text{ m}$ y $T_z = 0.2\text{ m}$. Como las funciones Hann solo están definidas para valores tales que se cumpla $|x - x_0| \leq T_x$ y $|z - z_0| \leq T_z$ (siendo x_0, z_0 los centros de las Hann), los límites de integración utilizados fueron $x_0 \pm T_x/2, -0.25, 0.25, z_0 \pm T_z/2$.

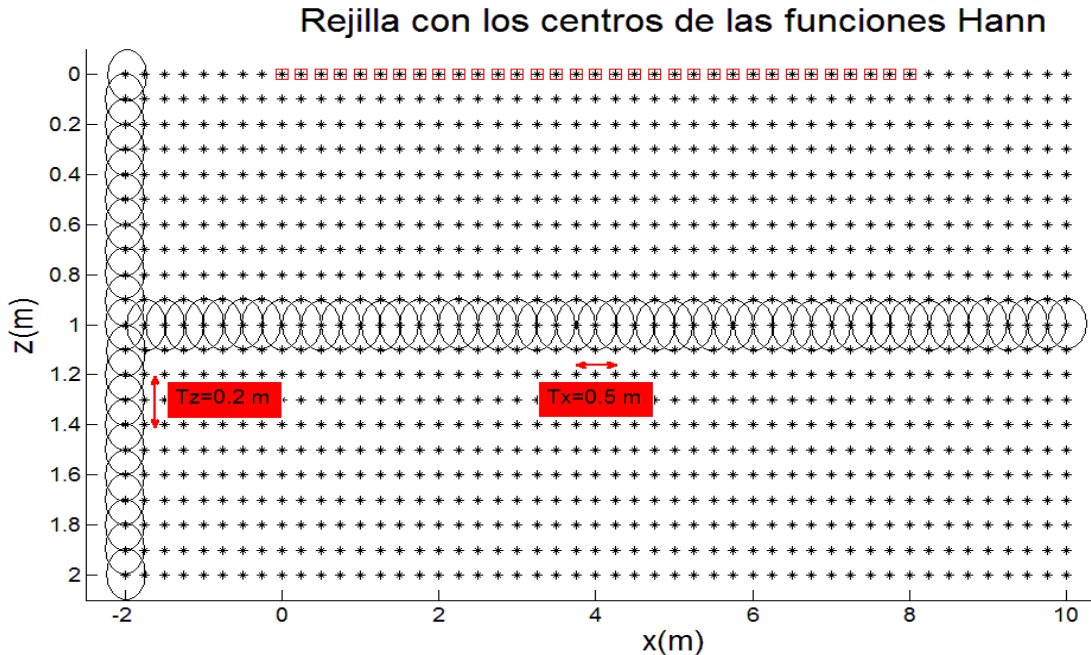


Figura 18. Representación gráfica del mallado propuesto con los centros de las funciones Hann. Los centros de las funciones están dispuestos cada $T_x/2, T_z/2$, las elipses en negro muestran el dominio de estas funciones. Los cuadrados en rojo representan la posición del centro del par de bobinas.

Para elegir el mejor modelo que represente la distribución de susceptibilidad en el subsuelo se monitoreó el valor medio cuadrático normalizado rms como

$$rms = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\chi_i^{data} - \chi_i^{respuesta})^2}, \quad (24)$$

donde σ es la desviación estándar de los datos. Si rms es menor que la unidad los datos han sido sobre ajustados, y si es mayor que la unidad entonces necesitan más ajuste. Esto se controla con el parámetro α , el cual a medida que se escoge más pequeño se privilegia el ajuste a los datos. En la Figura 19 se grafican los valores del valor cuadrático medio para distintos valores de α , en este caso el punto en rojo señala el valor elegido. El efecto de este parámetro en el ajuste a los datos y en los modelos resultantes se presenta secuencialmente en las Figuras 21 y 22.

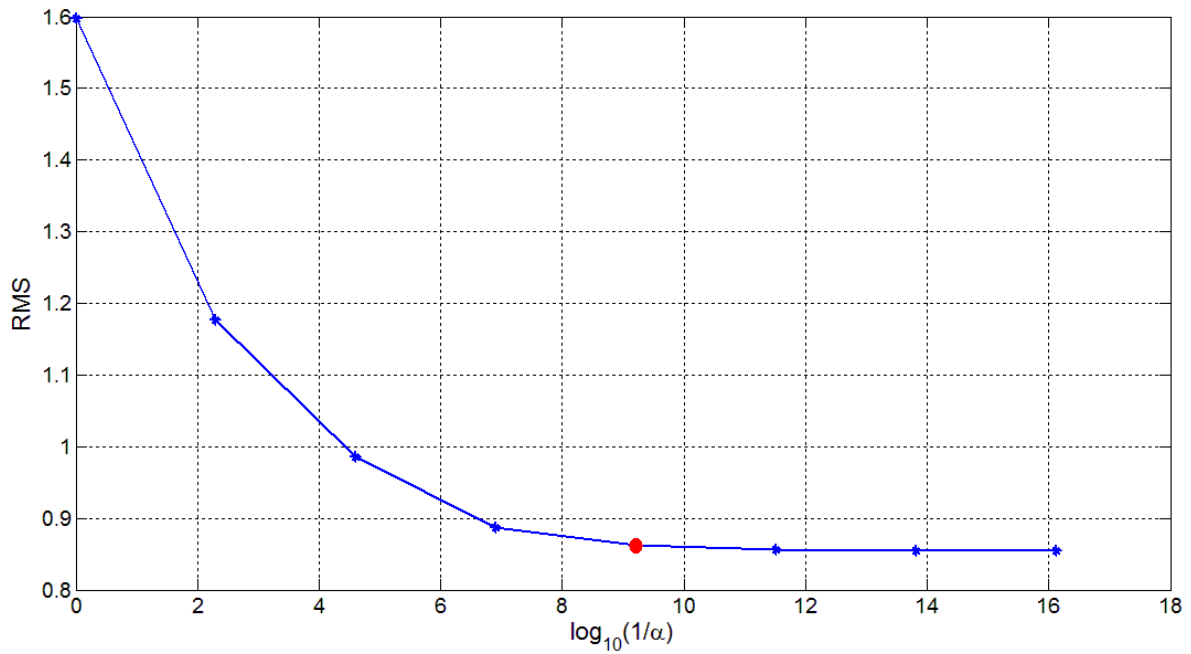


Figura 19. El residual rms normalizado disminuye a medida que disminuye el parámetro de regularización. El parámetro óptimo se escoge cuando $rms \cong 1$, o bien cuando su valor se estabiliza.

Los datos de la Figura 20 fueron contaminados con ruido aleatorio con desviación estándar de 0.05 unidades de susceptibilidad magnética. En la Figura 21 se muestran tres modelos, el primero en (a) con un parámetro demasiado grande dominando la

regularización, el siguiente en (b) con el parámetro adecuado, y el tercero en (c) con muy poca regularización. Se puede observar en la Figura 22 que estos dos últimos ajustan muy bien a los datos. Sin embargo, ninguno de los dos modelos que ajustan los datos se parece al cuerpo rectangular de donde provienen los datos. Este asunto se considera en la siguiente sección.

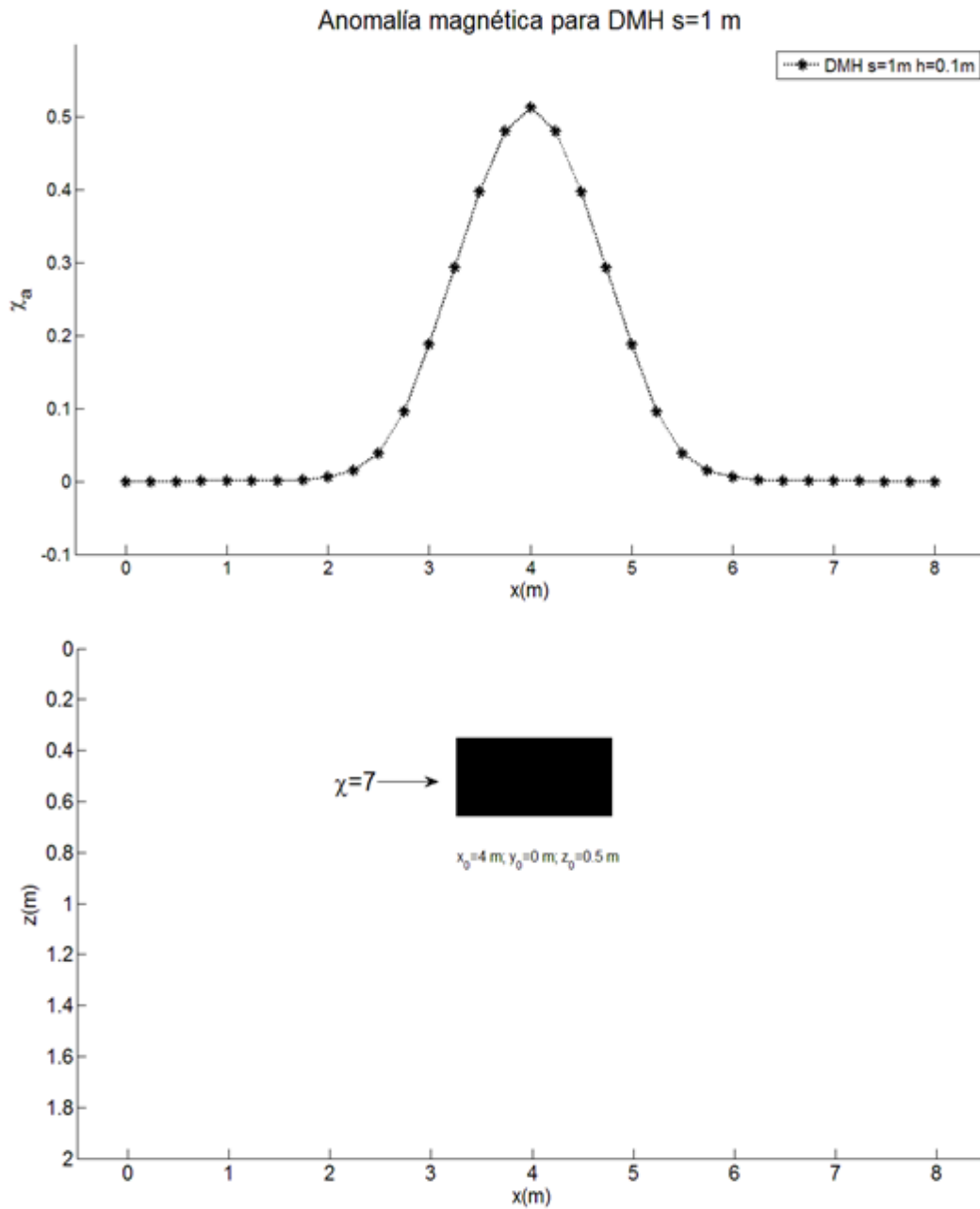


Figura 20. Datos sintéticos derivados del modelo propuesto DMH $s = 1$ m. Las coordenadas indican el centro del objeto.

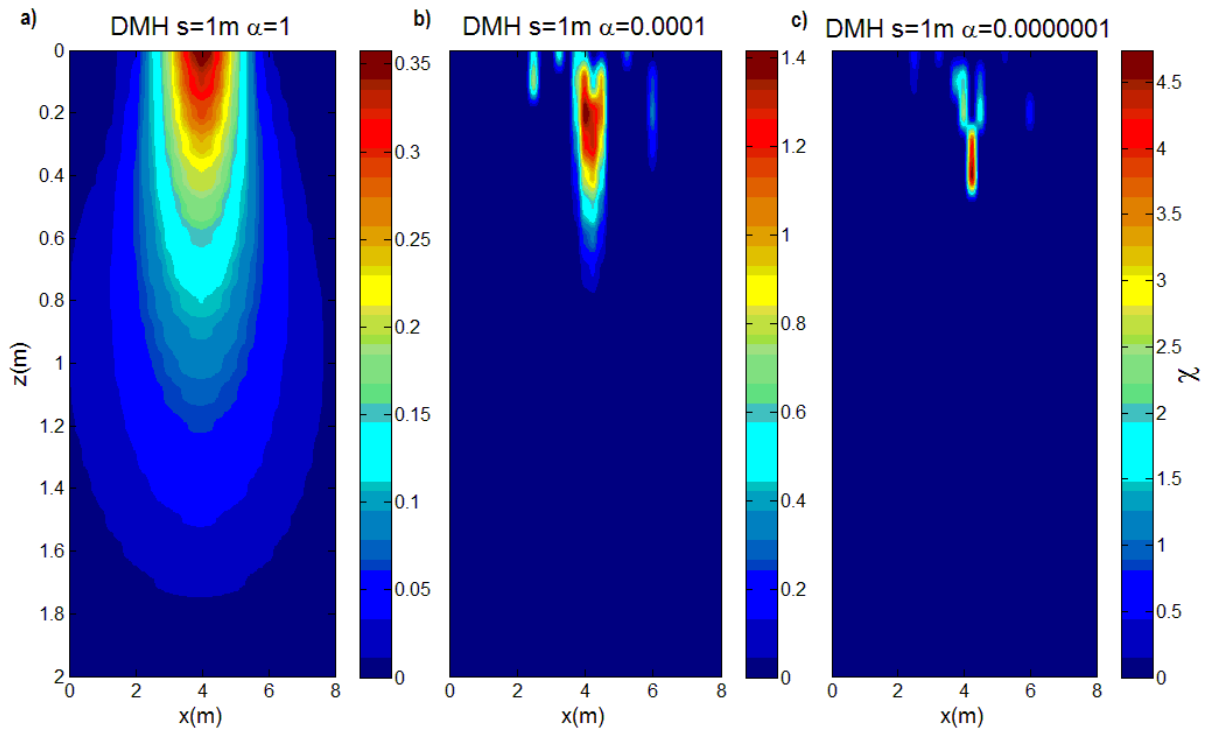


Figura 21. Comparación entre dos modelos obtenidos utilizando diferentes valores de alfa. a) $\alpha = 1$; b) $\alpha = 0.0001$ y c) $\alpha = 0.0000001$. Todos los casos para DMH $s = 1$ m.

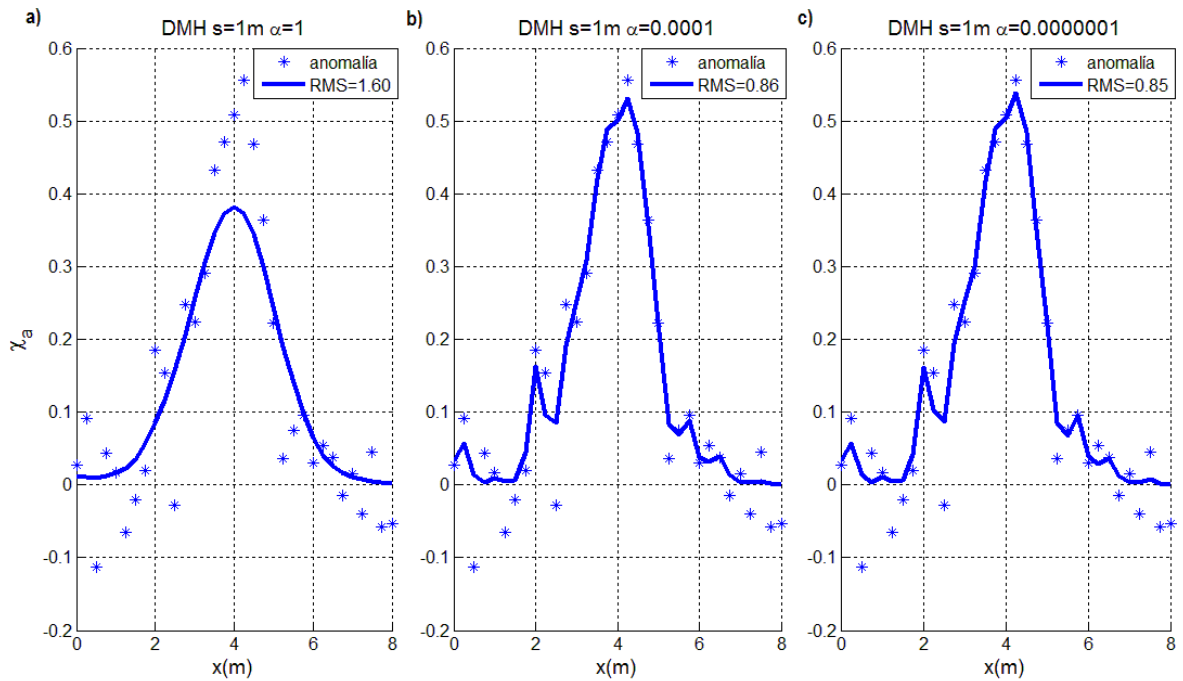


Figura 22. Ajustes de los modelos de la Figura 21. En línea continua la respuesta correspondiente de los modelos obtenidos usando distintos valores de α .

3.4 Multiplicidad de modelos válidos: solución a la no unicidad.

Una vez que se interpreta un conjunto de datos, o sea que se obtiene un modelo cuya respuesta ajusta los datos, surgen o deberían de surgir dudas sobre el modelo obtenido. Por ejemplo, los modelos de la Figura 21 es obvio que no corresponden al objeto rectangular. Las distribuciones inferidas están mayormente cerca de la superficie cuando debieran estar a profundidad indicando la presencia del rectángulo. Se puede apreciar en la Figura 22 que las respuestas de los modelos ajustan bien a los datos sintéticos que provienen del rectángulo. Estamos en la presencia de dos distribuciones de SM muy diferentes entre sí que producen la misma anomalía, lo que se conoce como no unicidad de la solución del problema inverso. Si se tratara de datos de campo donde no se conoce la fuente de la anomalía cualquiera de estas distribuciones inferidas nos estaría dando indicaciones erróneas sobre la profundidad. Al respecto surgen dos preguntas: ¿Cómo podríamos cuantificar la confiabilidad de una interpretación? Y, una vez cuantificada ¿Cómo podríamos incrementar esa confiabilidad? Abordaremos en lo que sigue la primera pregunta. Para ello proponemos agregar a la función de penalidad un término que se ocupe de concentrar la distribución alrededor de una profundidad dada. Este término es el momento de la distribución de susceptibilidad que incluimos mediante una matriz $\mathbf{Z}$ que contiene las diferencias $z_j - z_0$ siendo z_0 la profundidad alrededor de la cual se calcula el momento. La expresión (23) toma la forma

$$P[\mathbf{h}] = \|\mathbf{x}_a^{data} - \mathbf{x}_a^{respuesta}\|^2 + \alpha \|\mathbf{D}\mathbf{h}\|^2 + \beta \|\mathbf{Z}\mathbf{h}\|^2, \quad (25)$$

donde el parámetro β controla el peso que se le asigne al momento.

Comenzaremos con el caso de DMH $s = 1 \text{ m}$. Partiendo de la ecuación (25) y utilizando un valor de $\beta = 0$ obtenemos el mejor modelo al invertir los datos de la anomalía correspondiente de la Figura 20, este se presenta en la Figura 23.

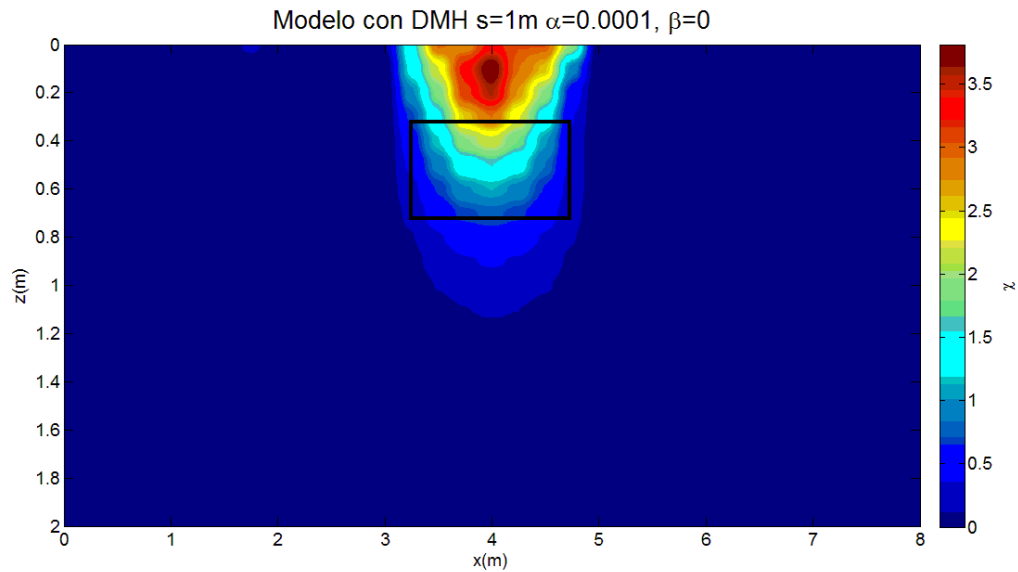


Figura 23. Modelo obtenido a partir de la función objetivo de la ecuación (25) para DMH $s = 1m$ con parámetros $\alpha = 0.0001$ y $\beta = 0$.

La Figura 24 contiene la respuesta representada en línea continua del modelo de la Figura 23. Puede notarse que este modelo a pesar de no corresponder al cuerpo delimitado por el rectángulo negro produce un buen ajuste. A su vez si elegimos un valor distinto de β podemos generar diferentes distribuciones centradas a diferentes profundidades z_0 como se muestra en la Figura 25. Las respuestas de estos modelos se ajustan también a los datos, es decir, todos estos cuerpos o distribuciones de SM producen la misma anomalía en superficie. Estos ajustes se presentan en la Figura 26.

La Figura 25 contiene la respuesta a la primera pregunta propuesta al inicio de esta sección: ¿Cómo podríamos cuantificar la confiabilidad de una interpretación? El hecho de que existan distribuciones de SM centradas a diferentes profundidades significa que la interpretación original con $\beta = 0$ no es confiable. ¿Cómo podría serlo si no es la única que satisface los datos, y hay otras centradas a mayor profundidad? Tampoco son confiables las que están centradas a profundidad, aunque una de ellas se corresponda con la verdadera. La razón es que no sabemos la profundidad verdadera.

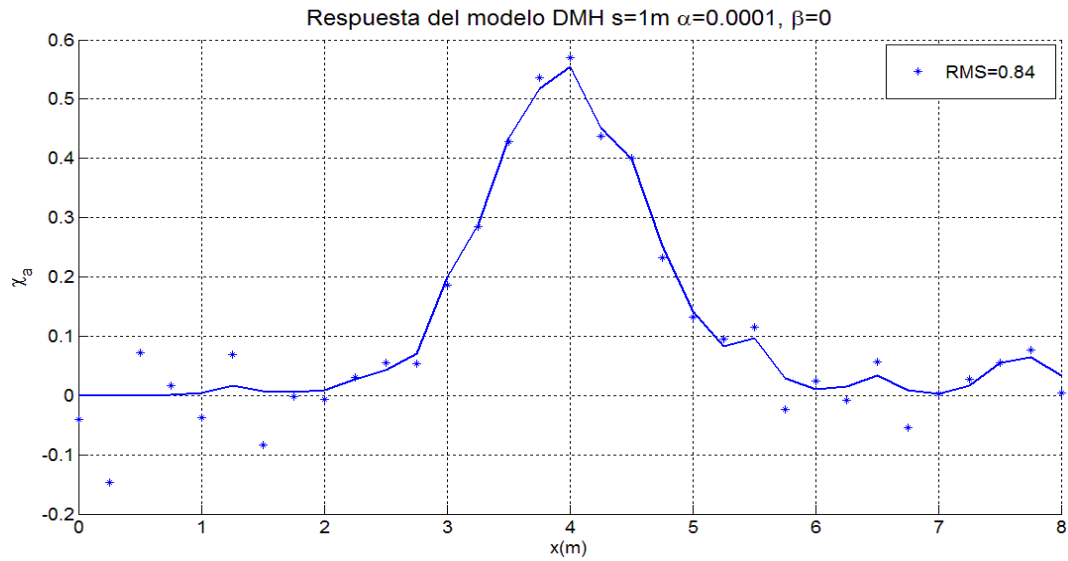


Figura 24. Ajuste del modelo de la Figura 23. En este caso el valor del *rms* es cercano a 1. DMH $s = 1m$ con parámetros $\alpha = 0.0001$.

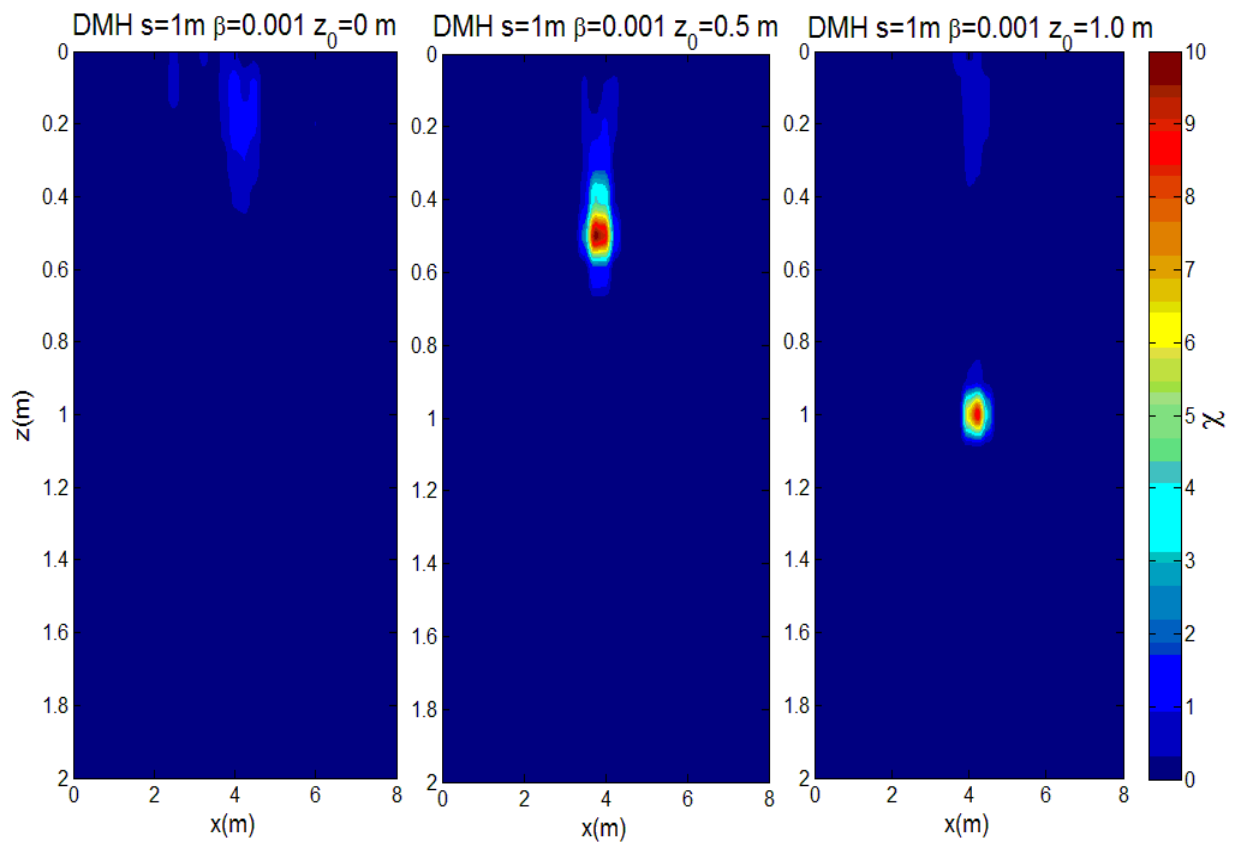


Figura 25. Modelos obtenidos a partir de datos de DMH $s=1m$. Todos estos modelos son válidos en cuanto a que satisfacen los datos adecuadamente. Los modelos corresponden a objetos localizados a distintas profundidades. Izq: $z_0 = 0 m$, Centro: $z_0 = 0.5 m$, Der: $z_0 = 1 m$. Todos los modelos fueron calculados con un valor de $\beta = 0.001$.

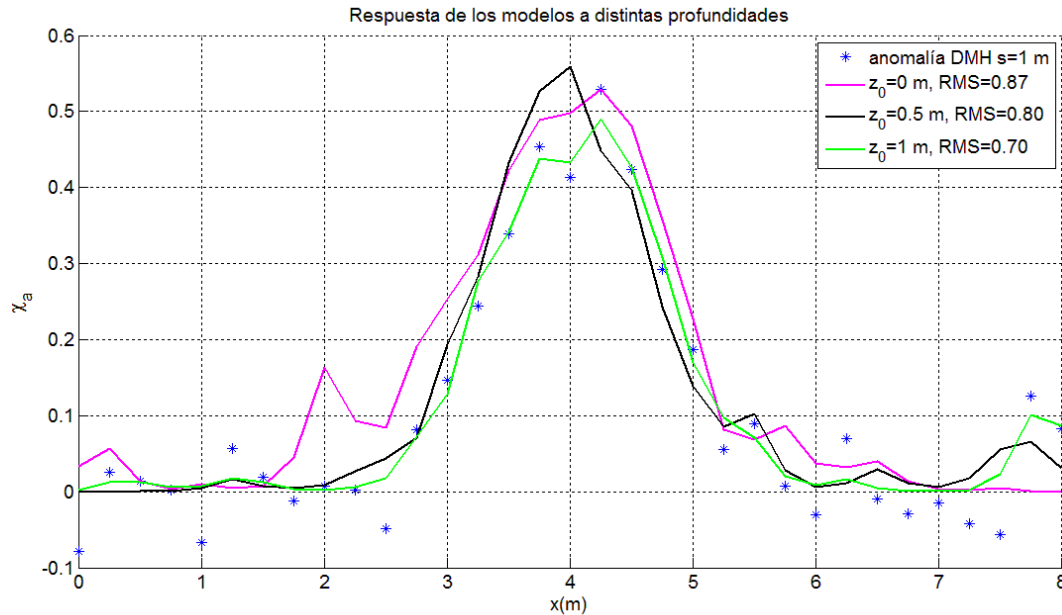


Figura 26. Ajustes de los modelos de la figura 25 al invertir datos de la configuración DMH $s=1$ m.

Ahora pasemos a la segunda pregunta: ¿Cómo podríamos incrementar esa confiabilidad? Esto es: ¿Qué podremos hacer para que la distribución inferida sea siempre la misma sin importar a qué profundidad se la quiera centrar? En el ejemplo anterior los datos aceptan opciones a diferentes profundidades. Estas opciones son forzadas pero si en la minimización se ajustan los datos entonces esos datos no constriñen la profundidad. Intuitivamente cabría esperar que agregando más datos la situación podría mejorar. De preferencia los datos agregados deberían tener sensibilidades diferentes a profundidad que los originales para que agreguen nueva información. De poco serviría, por ejemplo, aumentar la densidad de mediciones utilizando el mismo arreglo de dipolos.

En la Figura 27 se muestran modelos obtenidos con datos de DMH y DMV, ambos con separación $s = 1$ m. Los ajustes para ambas configuraciones se muestran en la Figura 28. Como en el ejemplo anterior, se forzó la minimización para centrar en diferentes profundidades la distribución inferida. Se puede observar que en este caso la dispersión es mucho menor que en el caso anterior pero aún se presenta.

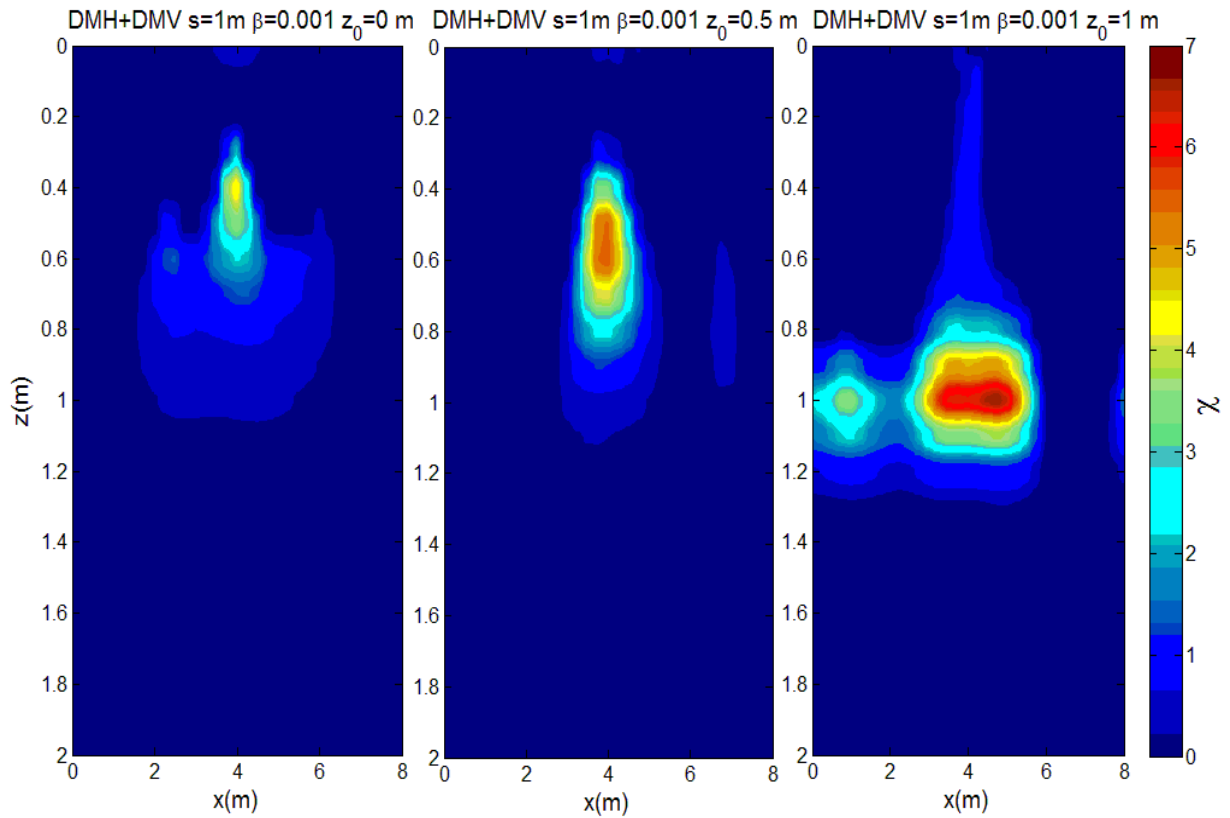


Figura 27. Modelos obtenidos a partir de datos para DMH $s=1\text{m}$ y DMV $s=1\text{m}$ contaminados con ruido aleatorio con desviación estándar de 0.05. Los modelos corresponden a objetos localizados a distintas profundidades. Izq: $z_0 = 0\text{ m}$, Centro: $z_0 = 0.5\text{ m}$, Der: $z_0 = 1\text{ m}$. Todos los modelos fueron calculados con un valor de $\beta = 0.001$.

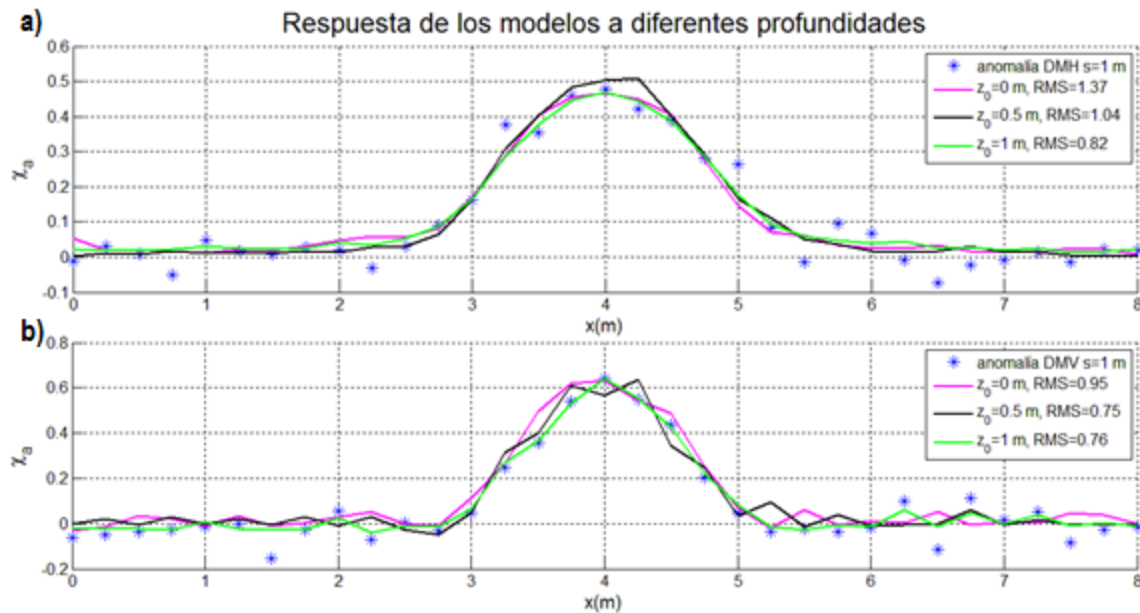


Figura 28. Ajustes de los modelos de la figura 27. a) DMH $s=1\text{m}$, b) DMV $s=1\text{ m}$.

A continuación se muestran los nuevos modelos agregando dos configuraciones más, estas son DMH y DMV con $s = 0.5 \text{ m}$. Nuevamente para un valor de $\beta = 0.001$ utilizamos la ecuación (25) para diferentes z_0 . Observamos en la Figura 29 que la dispersión tiende a reducirse alrededor de la verdadera profundidad $z_0 = 0.5 \text{ m}$. Los ajustes correspondientes se muestran en la Figura 30.

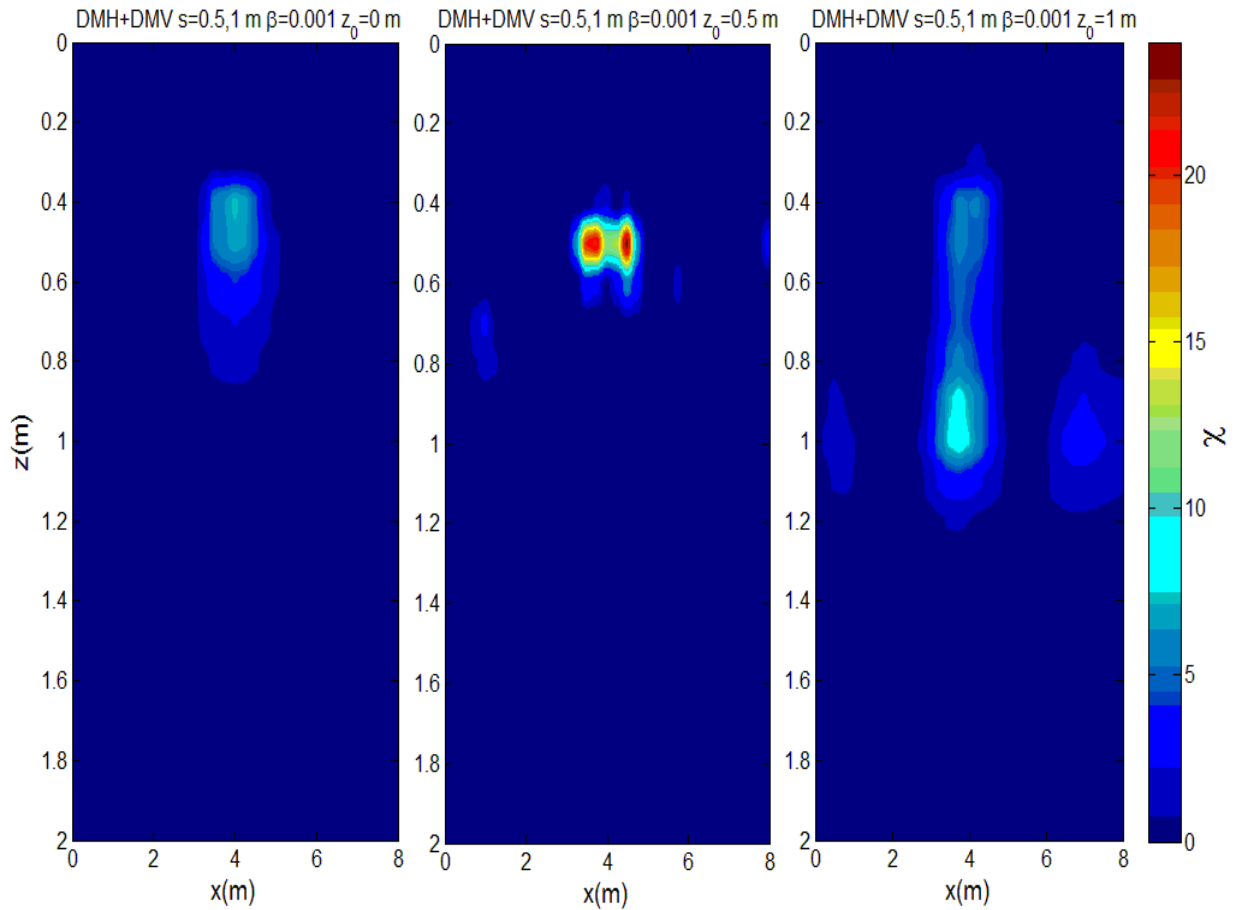


Figura 29. Modelos obtenidos a partir de datos para DMH y DMV con $s=0.5, 1 \text{ m}$ contaminados con ruido aleatorio con desviación estándar de 0.05. Los modelos corresponden a objetos localizados a distintas profundidades. Izq: $z_0 = 0 \text{ m}$, Centro: $z_0 = 0.5 \text{ m}$, Der: $z_0 = 1 \text{ m}$. Todos los modelos fueron calculados con un valor de $\beta = 0.001$.

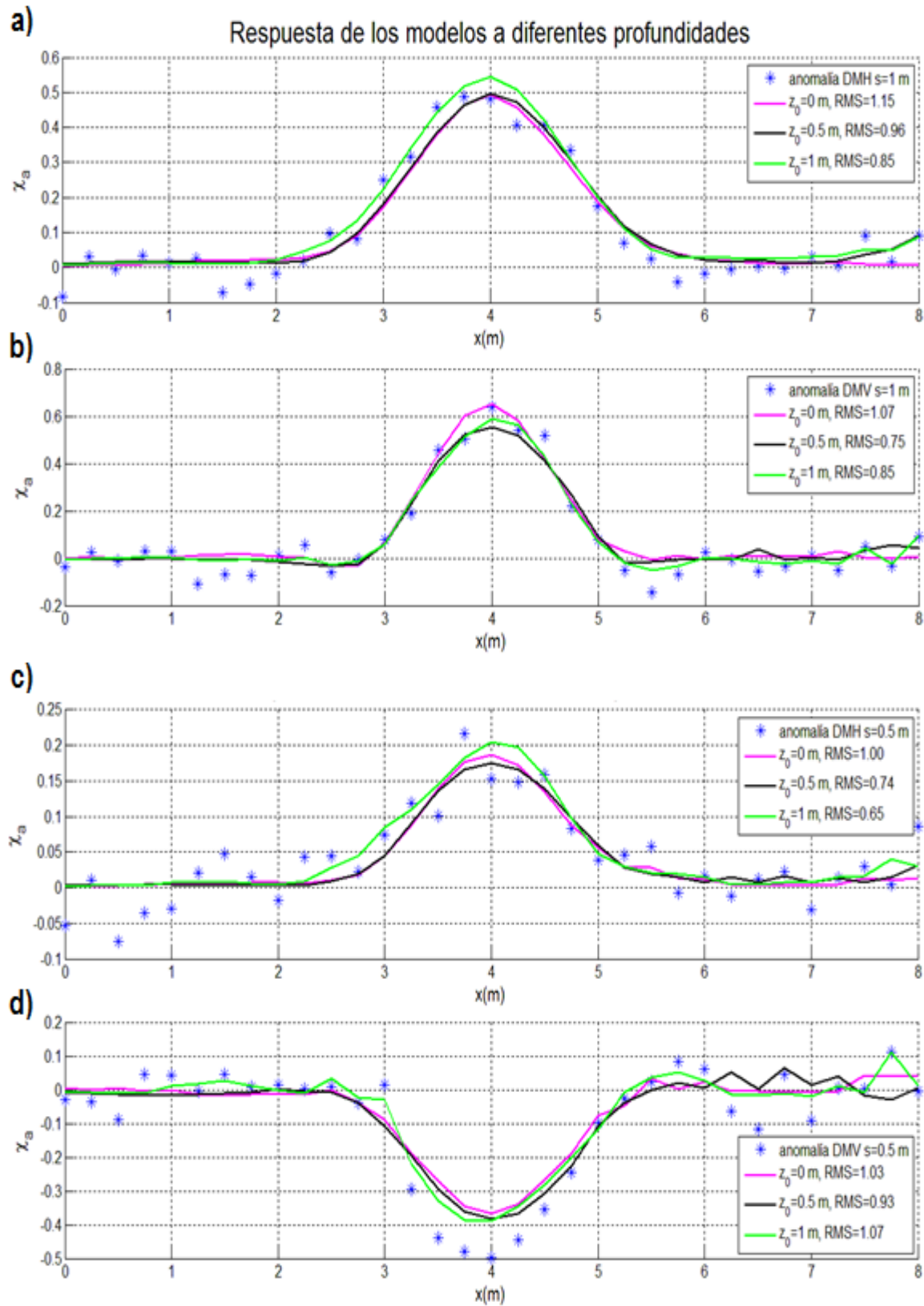


Figura 30. Ajustes de los modelos de la Figura 29 correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMH $s=1$ m, b) DMV $s=1$ m, c) DMH $s=0.5$ m y d) DMV $s=0.5$ m.

La confiabilidad de las distribuciones mejora a medida que se incorporan más datos pero todavía se observa dispersión significativa sobre todo para las dos profundidades mayores. Sin embargo, ya no hay más datos qué incluir excepto por las configuraciones rotadas que proponemos en esta tesis. La Figura 31 muestra los resultados cuando se utilizan juntas todas las configuraciones. Los ajustes para los arreglos estándar se presentan en la Figura 32 y para las versiones rotadas en la Figura 33. En todos los casos se logra un ajuste razonablemente bueno. En cuanto a la calidad de la interpretación, podemos afirmar que mejoró sustancialmente pues ahora los tres modelos inferidos de la Figura 31 están centrados más o menos alrededor de la misma profundidad, y esta profundidad corresponde a la del punto central del rectángulo.

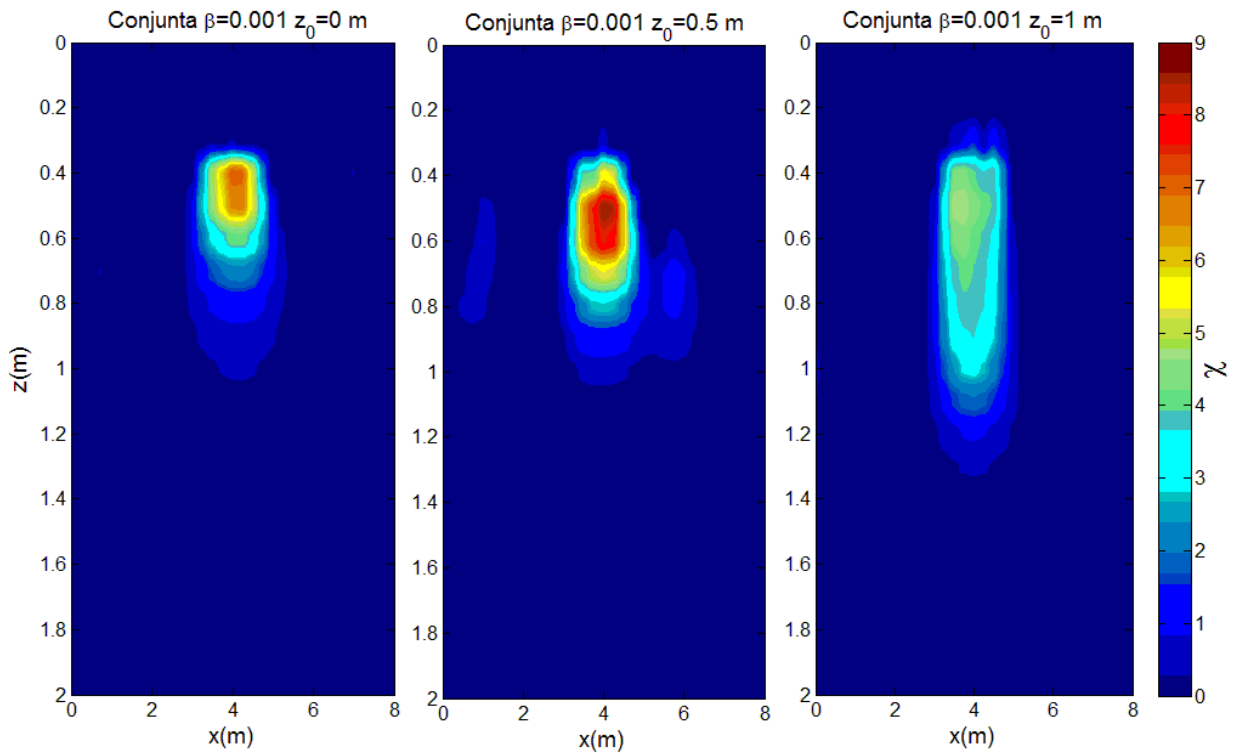


Figura 31. Modelos obtenidos a partir de datos para todas las configuraciones contaminados con ruido aleatorio con desviación estándar de 0.05. Los modelos corresponden a objetos localizados a distintas profundidades. Izq: $z_0 = 0$ m, Centro: $z_0 = 0.5$ m, Der: $z_0 = 1$ m. Todos los modelos fueron calculados con un valor de $\beta = 0.001$.

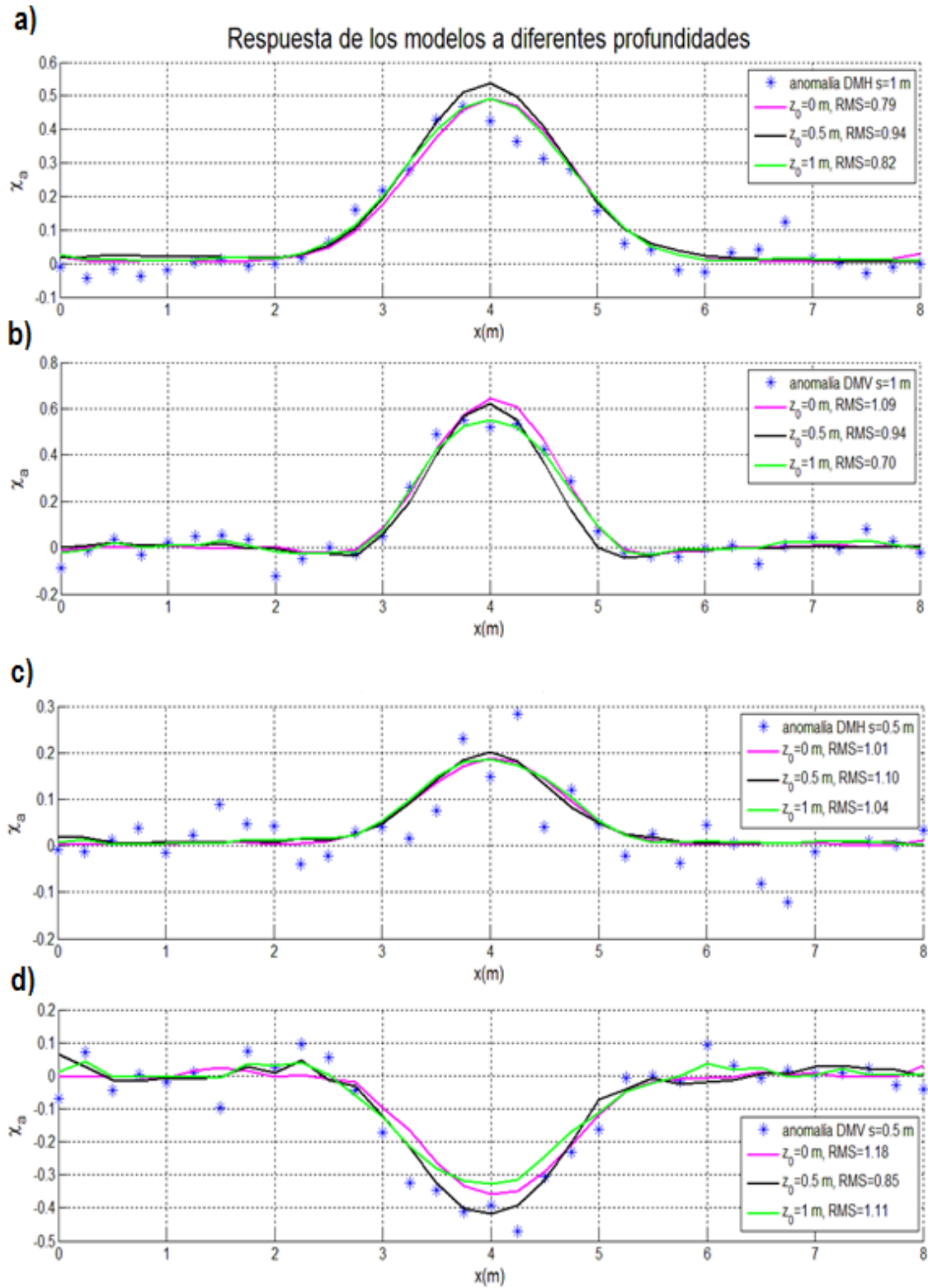


Figura 32. Ajustes de los modelos de la figura 31 correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMH $s=1$ m, b) DMV $s=1$ m, c) DMH $s=0.5$ m y d) DMV $s=0.5$ m.

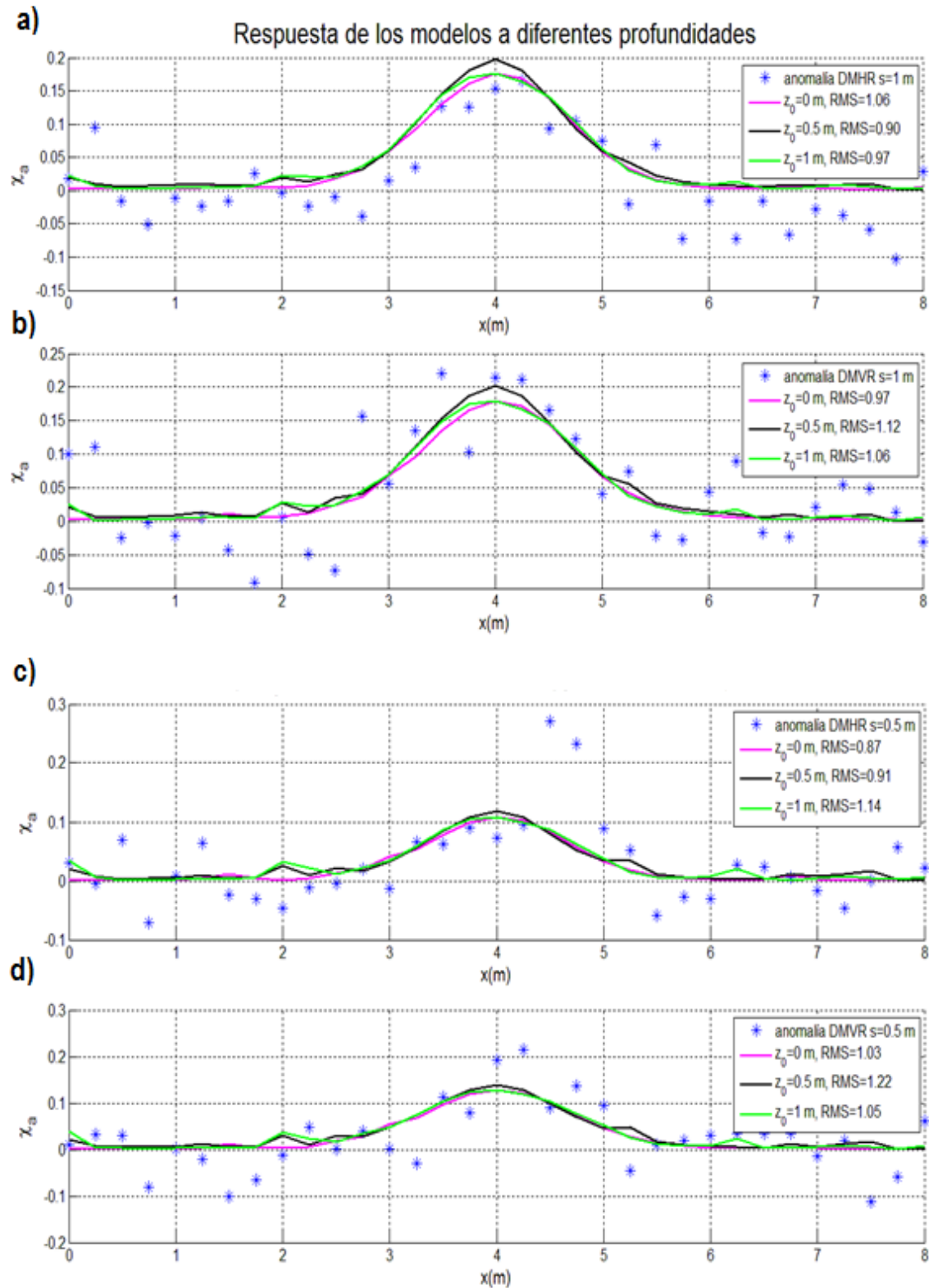


Figura 33. Ajustes de los modelos de la figura 31 correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMHR s=1m, b) DMVR s=1 m, c) DMHR s=0.5 m y d) DMVR s=0.5 m.

Al inicio de esta sección presentamos el modelo de la Figura 23, en el cual la distribución de SM se concentra muy cerca de la superficie, en contraste con la fuente real de la anomalía que se encuentra a profundidad. En lugar de considerar esto como un resultado negativo que habría que mejorar, escogimos aceptarlo como válido, con la salvedad de que no es el único modelo que satisface los datos. En otras palabras, que su validez o no validez no debería depender tanto de que el modelo inferido se parezca al original, sino de la existencia o no existencia de modelos muy diferentes entre sí que satisfagan los datos. La inclusión del momento alrededor de una profundidad dada y la introducción del parámetro β permiten la construcción de modelos diferentes entre sí pero que igualmente sus respuestas reproducen los mismos datos. El resultado fue que hay modelos a muy diferentes profundidades que son igualmente válidos, por lo que la primera inferencia de la Figura 23 donde no se supone ninguna profundidad preferencial no es confiable. De hecho, ninguno de los modelos inferidos es confiable, o equivalentemente todos son igualmente no confiables, dependiendo de cuál se tome como referencia.

En el caso en que se utilizaron todos los arreglos de dipolos, cualquiera de los modelos inferidos de la Figura 31 es confiable. Todos indican que la distribución de SM está centrada alrededor de 0.5 m de profundidad, como de hecho lo está. El modelo inferido utilizando todas las configuraciones cuando no se supone ninguna profundidad en particular, o sea cuando $\beta = 0$, también está centrado cerca de 0.5 m de profundidad según se muestra en la Figura 34. Este modelo podría considerarse el de referencia al cuál los demás califican como confiable. O como en el caso anterior, cualquiera de los que califican podría considerarse el de referencia. En el presente caso podríamos escoger a uno de los modelos compactos de la Figura 31 en lugar de al modelo bastante dilatado de la Figura 34. El argumento no podría ni debería ser que son más parecidos al modelo verdadero, sino una muy conocida característica de la regularización de Tikhonov cuando se utilizan derivadas espaciales. Esta característica es que donde el modelo esté menos constreñido allí se desparrama artificialmente más el modelo, y precisamente esto sucede en las partes más profundas porque allí la sensibilidad es más pequeña que en las partes superiores (Guillen and Menicheti, 1984).

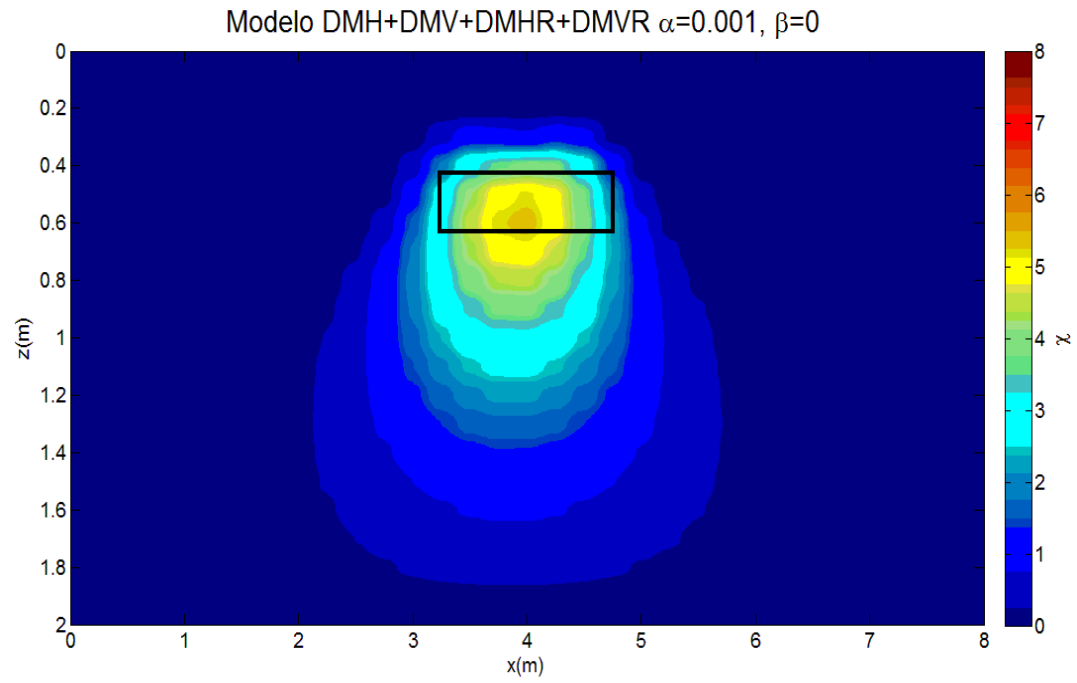


Figura 34. Modelo obtenido a partir de datos para todas las configuraciones contaminados con ruido aleatorio con desviación estándar de 0.05 utilizando un valor de $\beta = 0$.

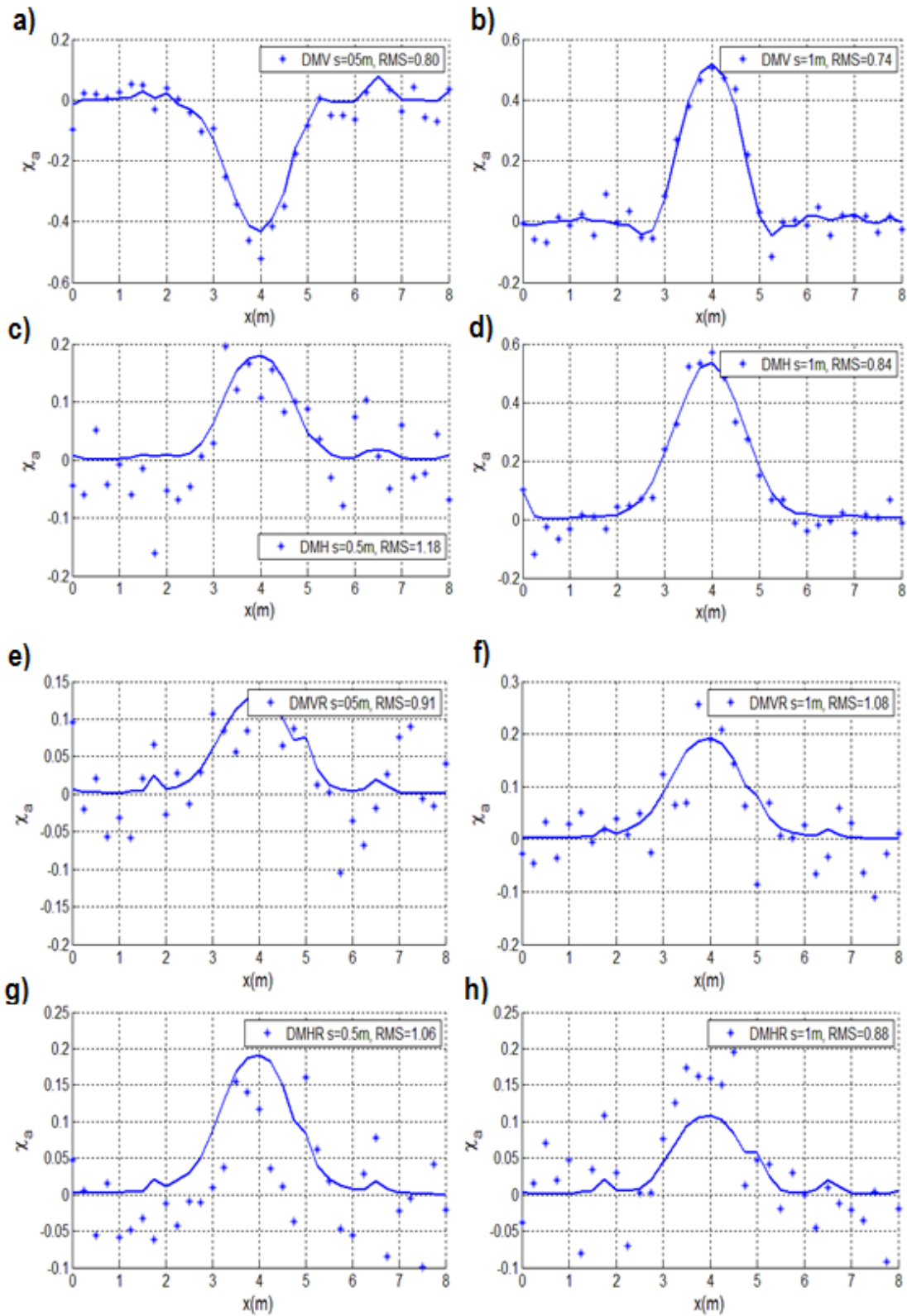


Figura 35. Ajustes de los modelos de la figura 34 correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMV $s=0.5$ m, b) DMV $s=1$ m, c) DMH $s=0.5$ m, d) DMH $s=1$ m, e) DMVR $s=0.5$ m, f) DMVR $s=1$ m, g) DMHR $s=0.5$ m y h) DMHR $s=1$ m.

3.5 Funciones Hann vs. funciones escalonadas.

Como se mencionó anteriormente, una de las ventajas de representar la distribución de SM utilizando funciones Hann es que permite modelar variaciones continuas sin tener qué subdividir demasiado la rejilla lo cual incrementa el número de incógnitas. Otra de las ventajas es que, para el mismo número de incógnitas, la representación utilizando funciones Hann resulta en una mejor recuperación de la imagen de un objeto a profundidad, como se muestra en la Figura 36.

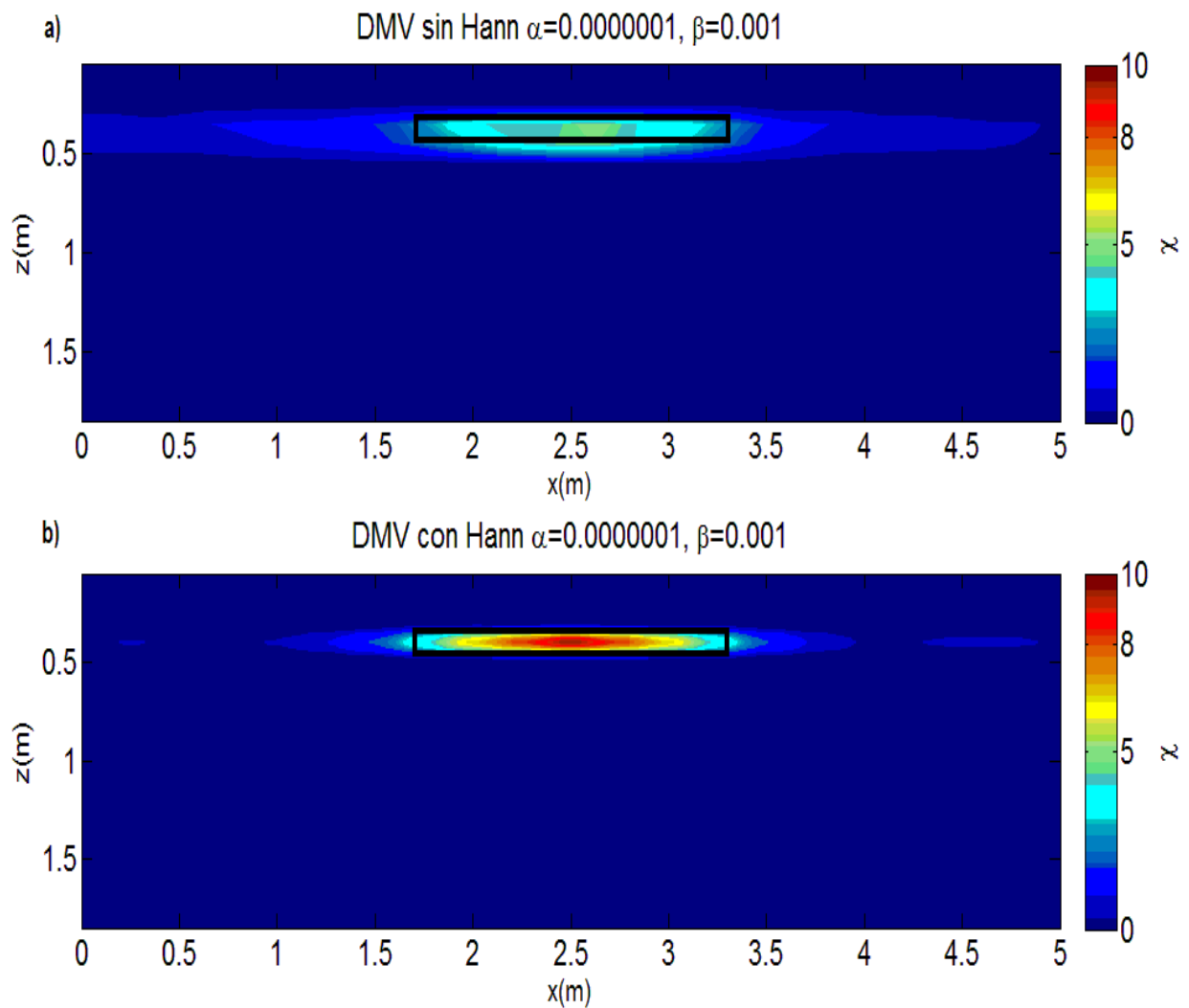


Figura 36. Comparación de los modelos encontrados al invertir. a) Utilizando prismas rectangulares. b) Utilizando superposición de funciones Hann. Ambos casos corresponden a la configuración de DMV para $s = 0.5$ m. La minimización del momento se realizó en ambos casos alrededor de la profundidad central del objeto.

3.6 Interpretación de datos en planta.

El presente trabajo fue motivado, como ya se mencionó, por la existencia de datos de campo tomados en la modalidad de una sola separación sobre áreas de interés arqueológico. En el siguiente capítulo se presentan datos e interpretaciones para esta modalidad que se tomaron como parte de este trabajo. Su interpretación cuantitativa no muestra, en general, una mejora significativa con respecto a simplemente graficar los datos en planta. De hecho, como se puede apreciar en la Figura 11, las anomalías en planta de dos objetos queda muy bien delimitada por los datos de todos los arreglos para las dos separaciones de 1.0 y 0.5 m, excepto por la de DMV de 0.5 m, la cual presenta valores negativos.

La recomendación respecto a datos en planta es por lo tanto procesarlos como de costumbre. Los más confiables son los arreglos rotados ya que ambos dipolos están siempre en la misma posición horizontal. Enseguida están los DMH y al último los DMV que tienden a producir anomalías negativas que pueden confundir al usuario del equipo. En la Figura 37 se muestra la inversión en planta de las anomalías de la Figura 11b. Se trata de dos objetos que se encuentran a diferentes profundidades. Para realizar la inversión bidimensional es necesario suponer una profundidad sobre la cual definir las incógnitas, o bien un intervalo de profundidades. Los modelos de la Figura 37 se obtuvieron integrando las funciones de sensibilidad desde la superficie hasta una profundidad de 1 m. Como se puede observar, la recuperación de la forma y la posición de los objetos es peor si se compara con las anomalías originales de la Figura 11. Sin embargo, el modelo presentado en la Figura 38 corresponde a una inversión considerando la profundidad a la cual están localizados los objetos, es decir, se integró en z solo en el intervalo en el que están definidos, como puede observarse este modelo corresponde en gran medida al deseado. Por lo tanto si se desea realizar una interpretación cuantitativa de datos en planta debe conocerse el rango de profundidades.

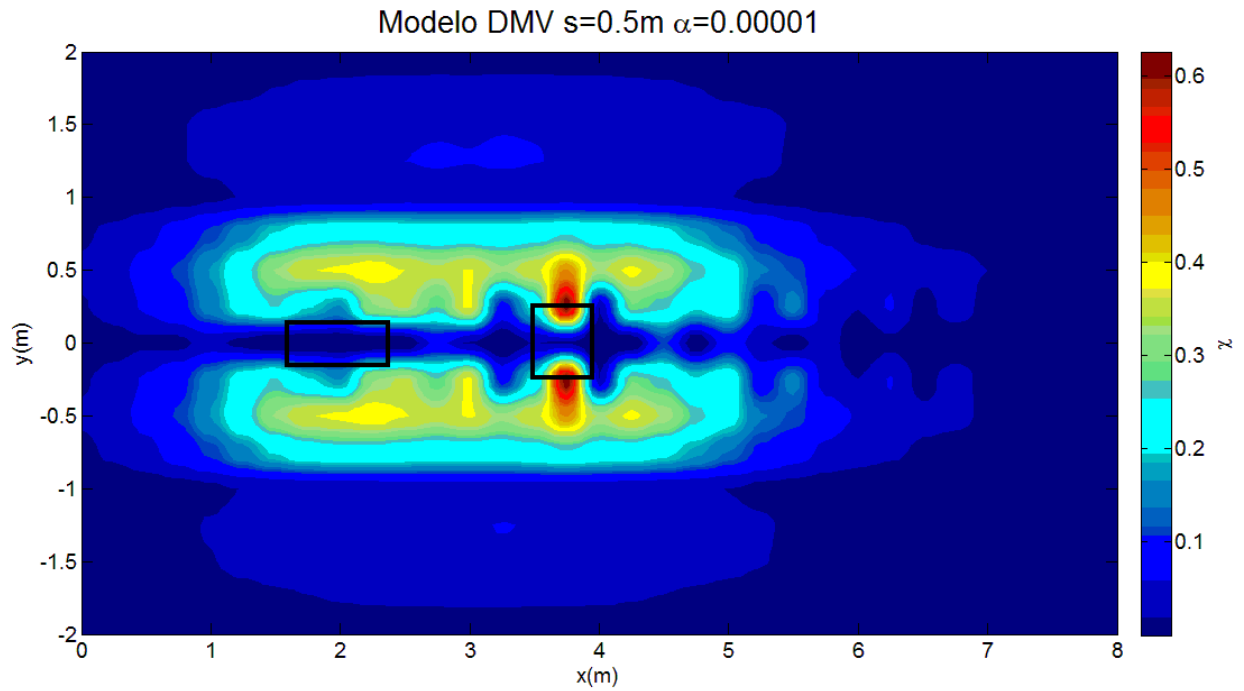


Figura 37. Modelo obtenido para el ejemplo de los dos cuerpos de la sección 2.5 considerando una distribución uniforme de $z = 0$ hasta $z = 1\text{ m}$.

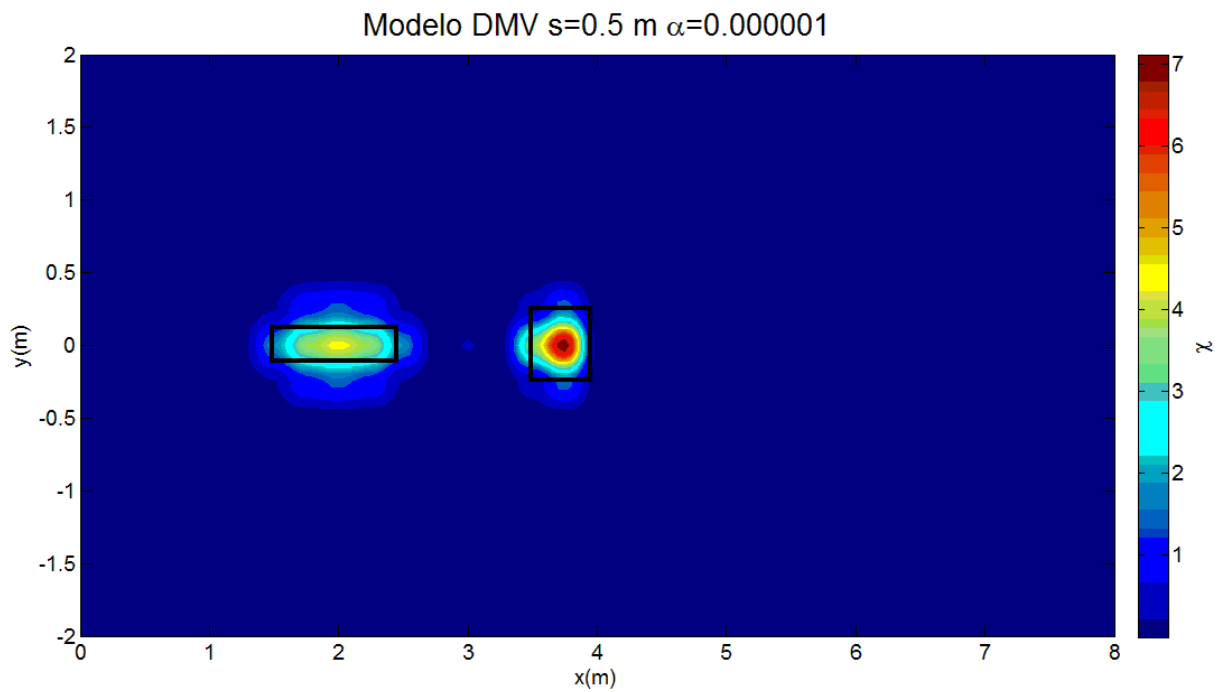


Figura 38. Modelo obtenido para el ejemplo de los dos cuerpos de la sección 2.5 integrando a profundidad solo donde están definidos los cuerpos.

3.7. Conclusiones

Las pruebas realizadas con datos sintéticos señalan la viabilidad de realizar tomografías magnéticas con equipos existentes como el *Geonics EM38 MK2*. Si se dispone de datos de una sola separación entre dipolos se requiere, además de las restricciones de suavidad, minimizar el momento de la distribución con respecto a una profundidad razonable. En caso de disponer de datos de separaciones múltiples esta última restricción no es necesaria, aunque puede mejorar sustancialmente la imagen obtenida. Lo mismo sucede con la incorporación de los dipolos rotados, las imágenes mejoran sobre todo en relación con la estimación de la profundidad. En el caso de datos de campo no se conoce el modelo verdadero por lo que no se puede hablar de mejoras en la recuperación. Lo que se propone es inspeccionar la no unicidad de la solución mediante el mismo procedimiento de encontrar modelos válidos a diferentes profundidades. El siguiente capítulo abunda sobre este manejo de la no unicidad como una manera de calificar la inversión. .

Capítulo 4. Validación con modelos difíciles.

4.1. Introducción.

En el capítulo anterior se delineó una estrategia para clasificar la interpretación de un conjunto de datos como confiable o no confiable. Esta estrategia se ilustró aplicándola a un cuerpo simple localizado a profundidad. En este capítulo se presentan aplicaciones a los casos de varios cuerpos localizados a diferentes profundidades. Estas pruebas son necesarias porque la obtención de modelos extremos gira alrededor de una sola profundidad relativa a la profundidad de un solo cuerpo. En el caso de que haya varios la situación de ambigüedad requiere de explorar la cuestión con ejemplos concretos.

4.2. Modelo de dos cuerpos a diferentes profundidades.

Hasta aquí hemos demostrado que si se utilizan las respuestas de todas las configuraciones podemos obtener un modelo único independientemente del valor de β o del z_0 , pero hay que explorar esta idea en situaciones más complicadas. Como ejemplo tomemos el modelo sintético de los dos cuerpos de la sección 2.5 (Figura 10). A estos datos se les agregó ruido aleatorio con desviación estándar de 0.005 unidades de SM aparente.

Paso 1. Modelo libre. Tomando una sección en particular, en este caso $y = 0 \text{ m}$ se realizó primeramente la inversión con $\beta = 0$ usando todas las configuraciones. Llamaremos al modelo con $\beta = 0$ el modelo libre en vista de que no está constreñido a que se centre a una profundidad determinada de antemano. El modelo inferido se muestra en la Figura 39a. Se puede observar que ambos cuerpos definen muy bien los modelos originales por lo que al parecer ambos están bien constreñidos por los datos. Como en la práctica no se conocen las fuentes de las anomalías necesitamos realizar la prueba descrita en el capítulo anterior. Este es el segundo paso.

Paso 2. Modelos extremos. Lo que estamos proponiendo en esta tesis para calificar una interpretación como la de la Figura 39 es calcular modelos extremos que

satisfagan los datos y compararlos entre sí. Se compara el modelo libre con dos modelos extremos, uno que minimiza el momento con respecto a la superficie ($z_0 = 0$), y otro con respecto a una profundidad por debajo de las distribuciones inferidas en el modelo libre ($z_0 = 1$). En el primer caso la intención es forzar a que la imagen de susceptibilidad se concentre cerca de la superficie mientras se mantiene el mismo ajuste a los datos. El resultado para este caso se presenta en la Figura 39b. Se puede observar que la imagen del objeto más somero no cambia apreciablemente en relación con el modelo libre, indicando que su ubicación y tamaño están muy bien constreñidos por los datos. Por otro lado, la imagen más profunda ahora se concentra sobre el borde superior del rectángulo, cuando en el modelo libre se concentraba cerca del centro. Esto significa que su ubicación a profundidad y su tamaño están menos constreñidos que el objeto más somero. Aunque la nueva imagen está desplazada hacia la superficie, sigue estando por debajo del objeto somero.

Pasemos a examinar el modelo extremo forzado ahora hacia abajo que se muestra en la Figura 39c. Como en el caso anterior, la imagen somera casi no cambia no así la más profunda que ahora se centra sobre el borde inferior del rectángulo. Recordando que los tres modelos de la Figura 39 satisfacen los datos (véanse Figuras 40 y 41), no podemos afirmar cuál de ellos es el mejor. De hecho, hay muchos más modelos intermedios entre los dos extremos que hemos explorado. El problema de la no unicidad obviamente no puede tener un modelo como solución, sino de alguna manera el resumen de todos los posibles modelos que satisfacen a los datos. En el presente caso estamos acotando los posibles modelos determinando máximas y mínimas profundidades.

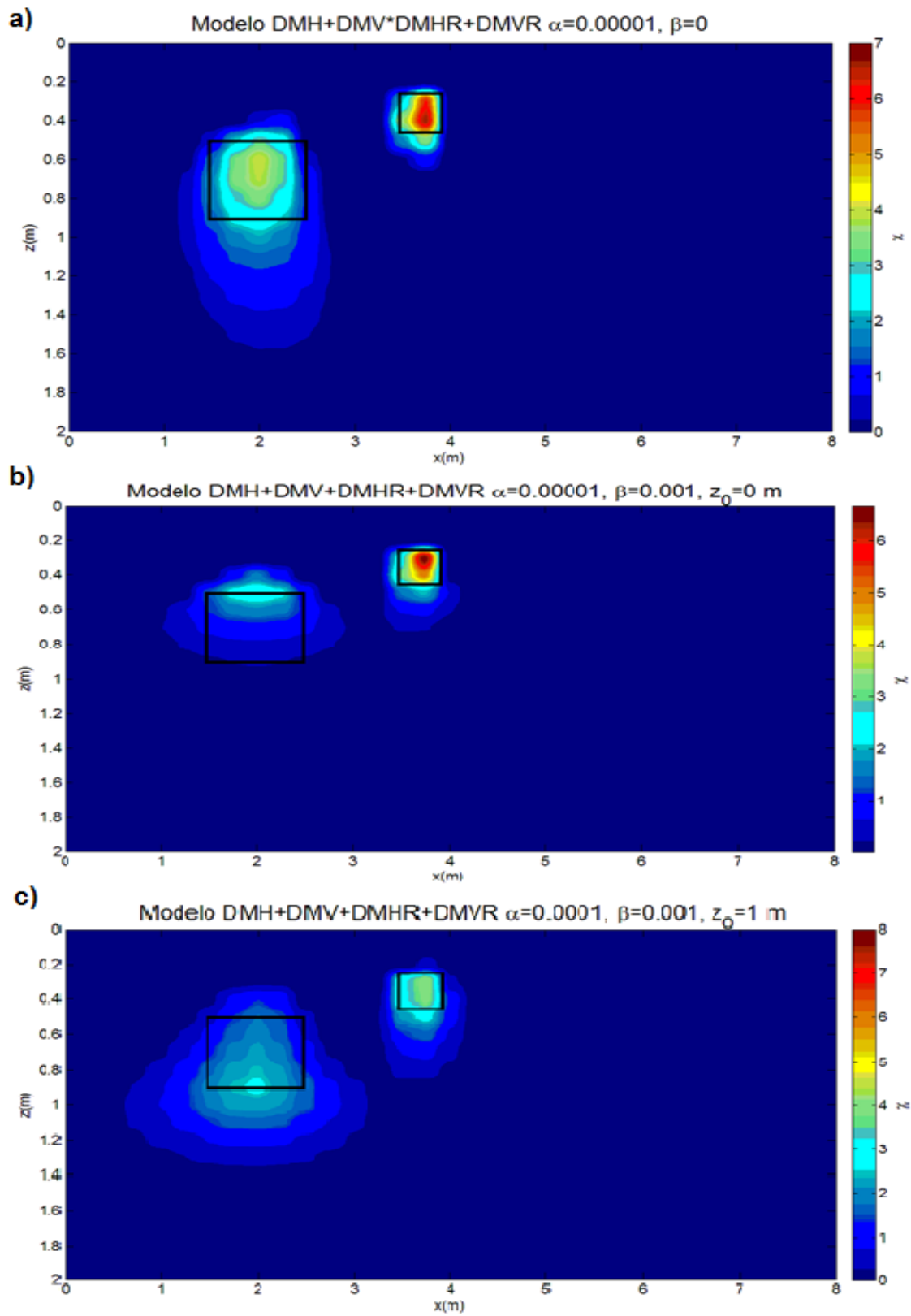


Figura 39. Comparación entre modelos para el ejemplo de los dos cuerpos utilizando todas las configuraciones a) modelo libre $\beta = 0$, b) modelo extremo superior $\beta = 0.001, z_0 = 0$ m, c) modelo extremo inferior $\beta = 0.001, z_0 = 1$ m.

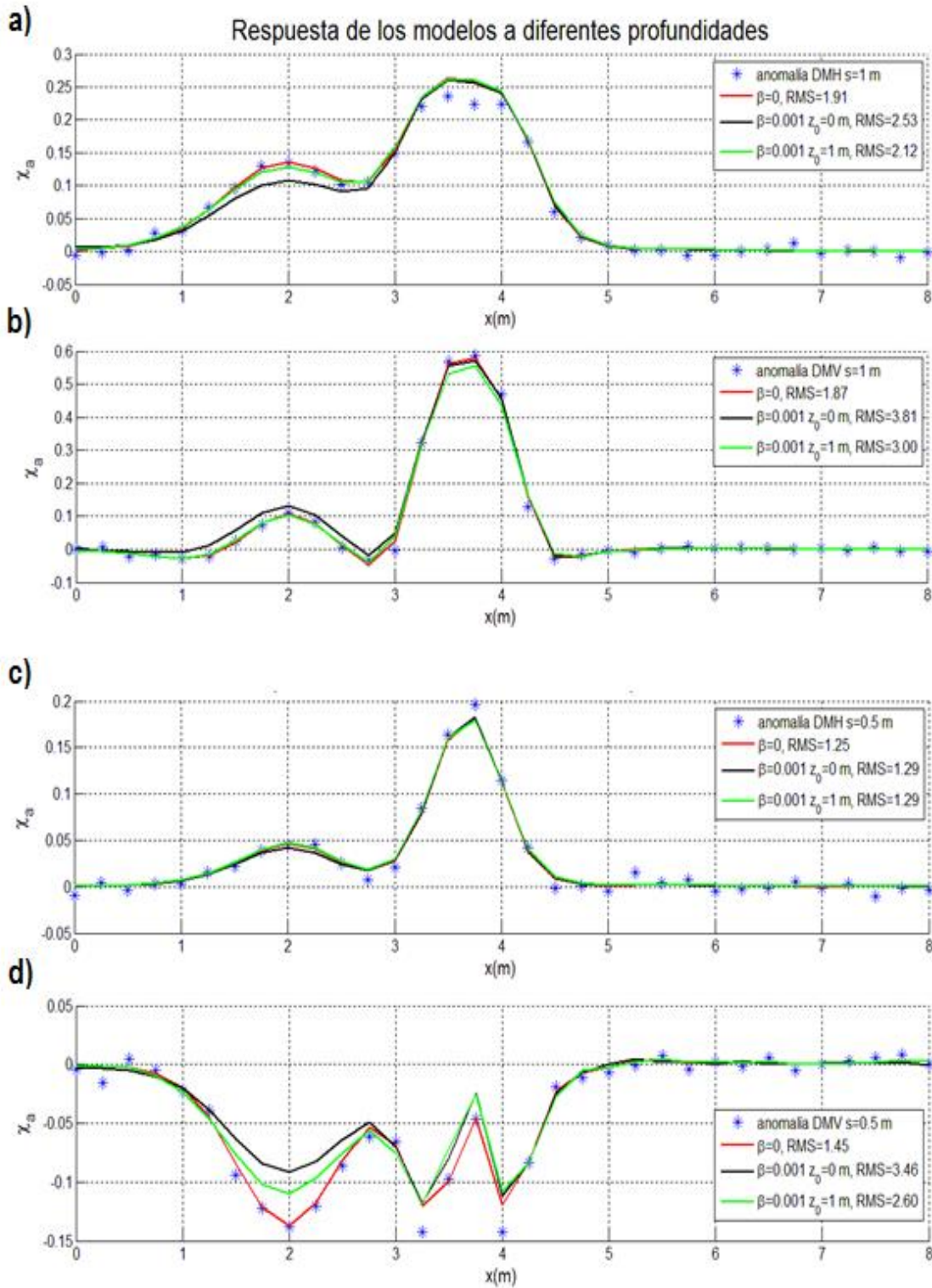


Figura 40. Respuesta de los tres modelos de la Figura 39, la línea continua roja es cuando $\beta = 0$, en negro cuando $\beta = 0.001, z_0 = 0 m$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 m$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMV $s = 1 m$, b) DMH $s = 1 m$, c) DMV $s = 0.5 m$, d) DMH $s = 0.5 m$.

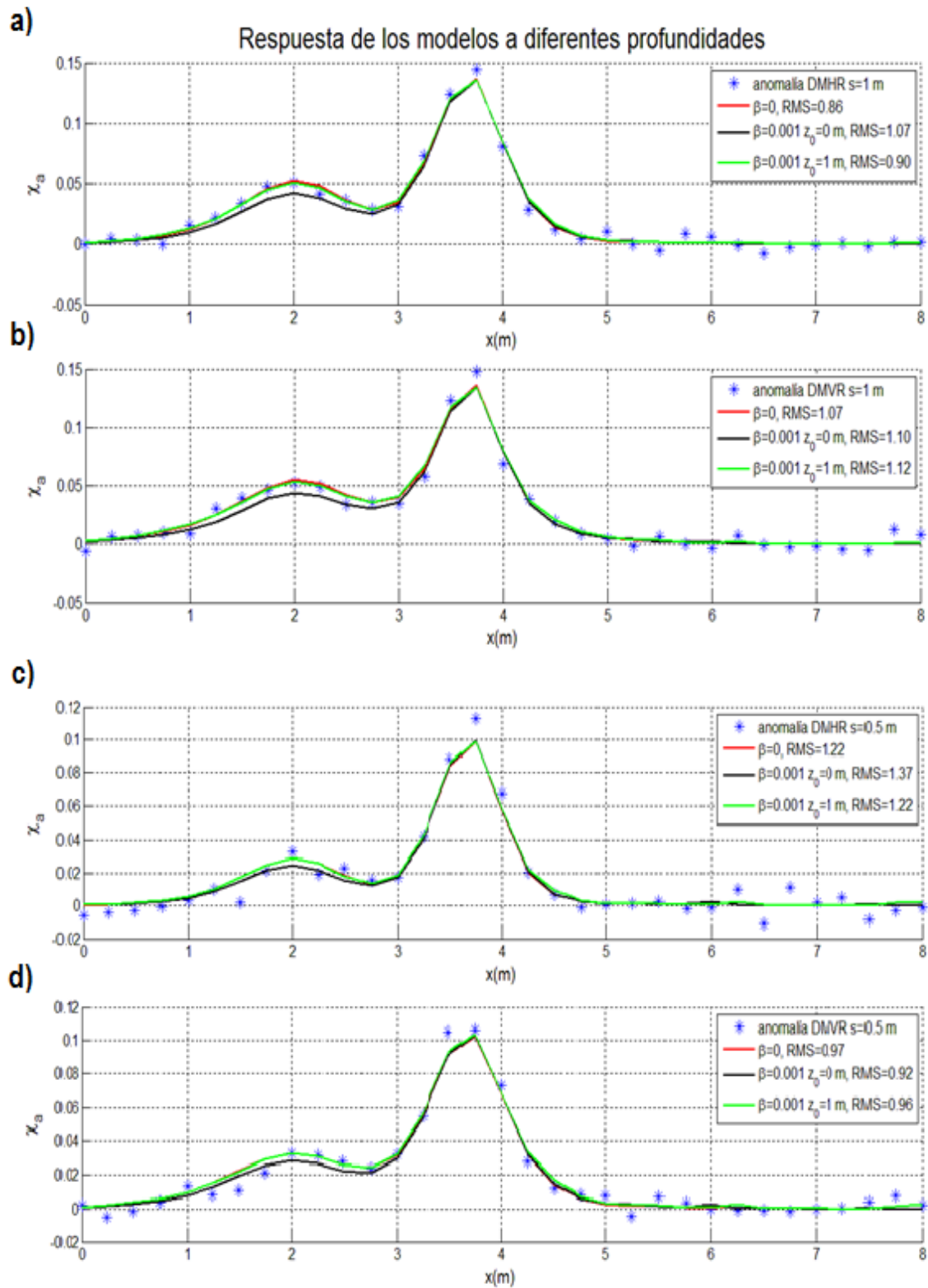


Figura 41. Respuesta de los tres modelos de la Figura 39, la línea continua roja es cuando $\beta = 0$, en negro cuando $\beta = 0.001, z_0 = 0 m$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 m$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMHR $s = 1 m$, b) DMVR $s = 1 m$, c) DMHR $s = 0.5 m$ y d) DMVR $s = 0.5 m$.

Paso 3. Modelo final. Aun cuando se sabe que no es posible determinar un modelo único para un conjunto de datos, persiste la idea de presentar un único modelo como resultado de la interpretación. Lo que se puede hacer al respecto es escoger una profundidad intermedia entre los centros de los modelos extremos y optimizar la función objetivo como si esa profundidad fuera la verdadera. El modelo resultante y el ajuste a los datos se presentan en las Figuras 42 y 43, respectivamente. Se escogió la profundidad intermedia de la imagen profunda de los modelos extremos ya que las imágenes someras son insensibles a la profundidad de referencia. Definido de esta manera la imagen final para este ejemplo recupera de manera muy confiable la ubicación, tamaño de los objetos a profundidad así como su valor de susceptibilidad, recordando que para el cuerpo más profundo es igual a 7 unidades y para el cuerpo más somero igual a 5.

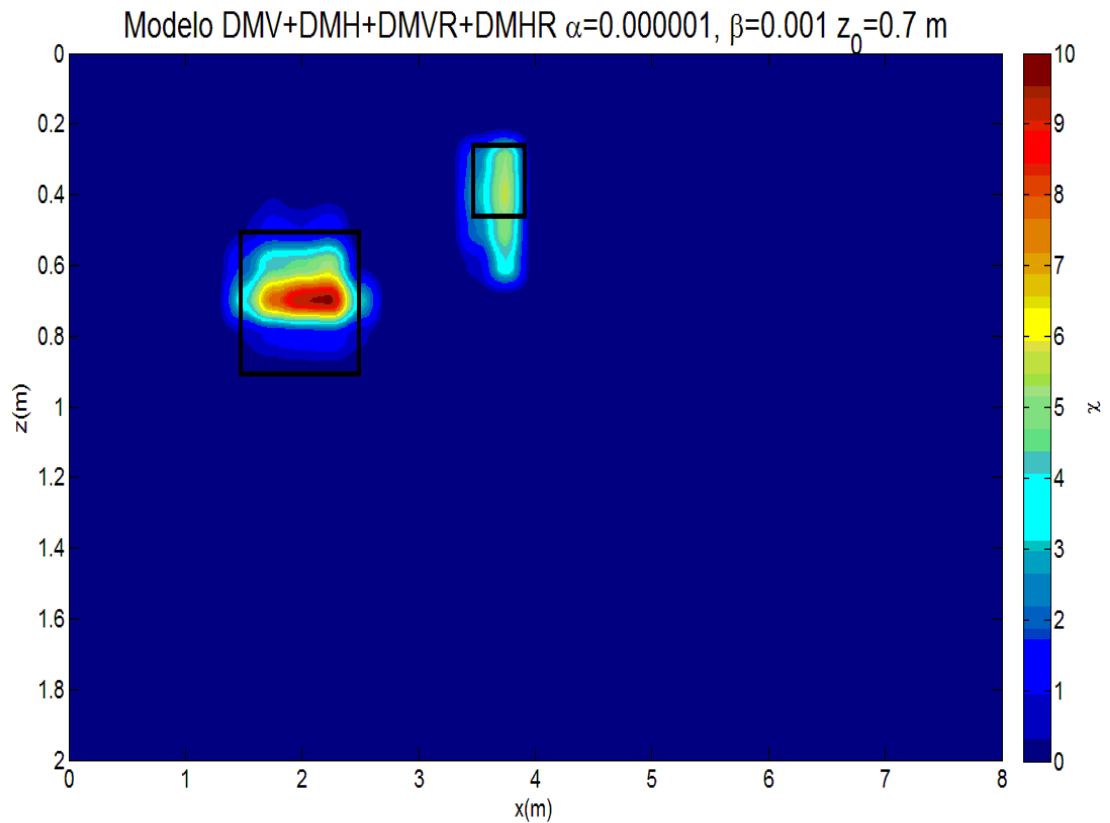


Figura 42. Modelo final para el ejemplo de los dos cuerpos, éste se obtuvo utilizando todas las configuraciones y un valor de $\beta = 0.001$ centrándolo en $z_0 = 0.7$ m.

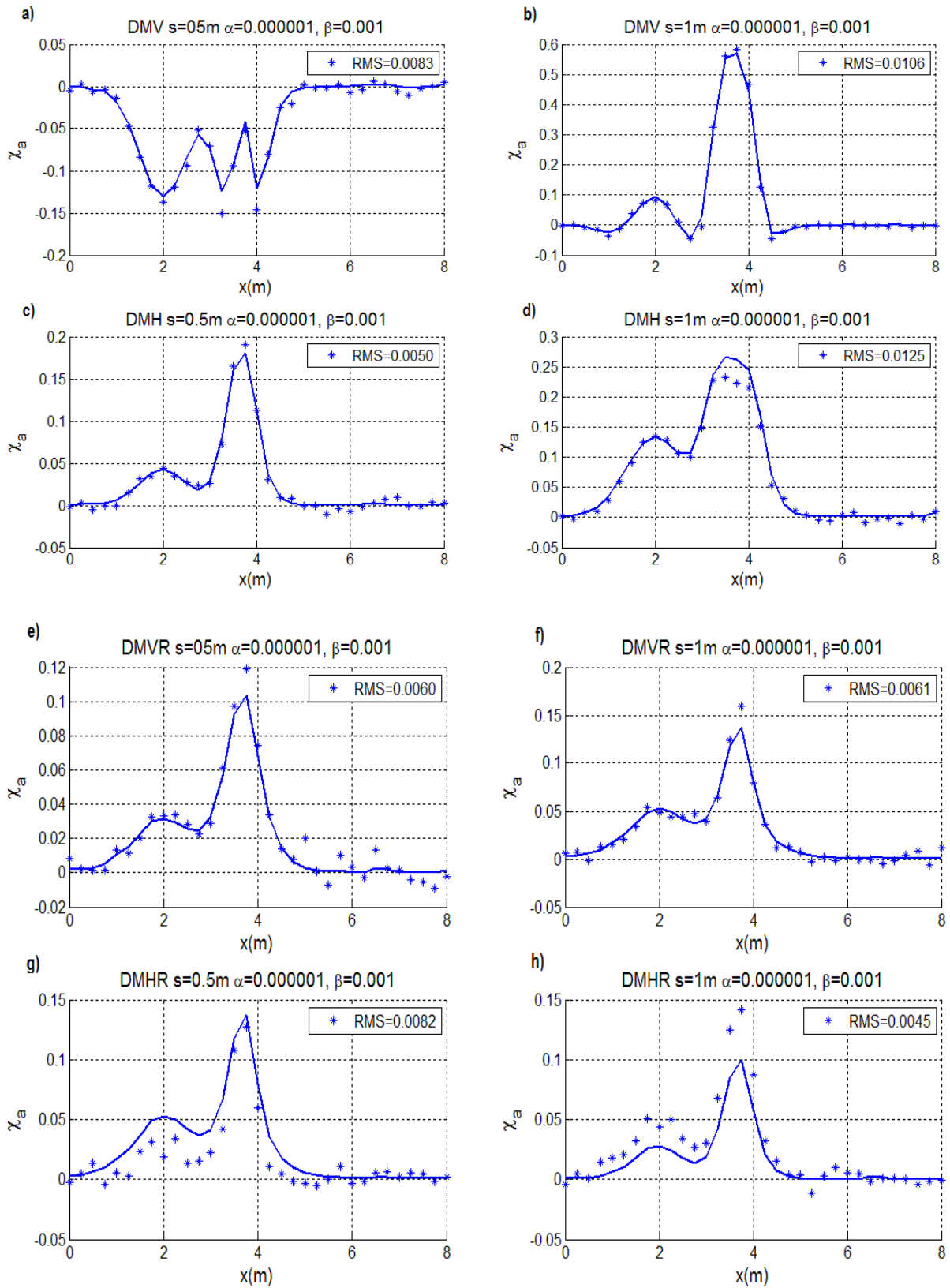


Figura 43. Comparación de datos sintéticos con las respuestas del modelo final de la Figura 42 para el ejemplo de los dos cuerpos.

4.3. Cuerpo en forma de L.

En otro ejemplo ilustrativo se modelaron las anomalías magnéticas causadas por un cuerpo en forma de L. Este cuerpo, su posición a profundidad, su valor de SM así como las respectivas respuestas para todas las configuraciones se presentan en la Figura 44. Los datos sintéticos en este ejemplo fueron contaminados con ruido aleatorio con desviación estándar igual a 0.05 unidades de susceptibilidad magnética.

Paso 1. Modelo libre. Similar al caso anterior, invertimos primero usando $\beta = 0$, el modelo obtenido se muestra en la Figura 45a. Si lo que deseamos es obtener un modelo final que además de satisfacer los datos podamos tener la seguridad de que es único en cuanto a profundidad se refiere o en todo caso es la mejor solución al problema aplicamos los pasos 2 y 3.

Paso 2. Modelos extremos. Nuevamente tomamos un valor fijo de β , forzamos al modelo a que centre el cuerpo primero en una posición por arriba de la distribución definida en el modelo libre, es decir usamos $z_0 = 0 \text{ m}$, observamos en la Figura 45b que el máximo somero (en color rojo) no se desplaza, es decir, aquí el modelo está bien constreñido a diferencia de la parte más profunda del cuerpo donde podemos ver que el máximo profundo se centra ahora en aproximadamente $z = 0.4 \text{ m}$. En la Figura 45c mostramos el modelo extremo por debajo de la distribución de SM inferida, esto es usando $z_0 = 1 \text{ m}$, aquí corroboramos que la parte más superficial del cuerpo está bien definida y no sufre alteración al forzar el modelo, mientras que la parte más profunda si desplaza su centro hasta aproximadamente $z = 0.6 \text{ m}$.

Paso 3. Modelo final. Para obtener un modelo final lo que hacemos es invertir los datos tomando un valor de $z_0 = 0.5 \text{ m}$ pues este es el punto intermedio de los máximos profundos de las distribuciones extremas de las Figuras 44b y 44c. Si utilizamos el criterio de tomar como valido el modelo cuya respuesta ajuste bien los datos podríamos suponer que cualquiera de los modelos anteriores representa la distribución de la Figura 44c pues cumplen con este criterio tal como puede verse en las Figuras 46 y 47 donde se muestran los ajustes para las configuraciones normales y para las configuraciones rotadas, respectivamente. Nosotros proponemos que el mejor modelo que representa la distribución inferida es el que llamamos modelo final que

presentamos en la Figura 48. Las respectivas respuestas de este modelo se muestran en la Figura 49.

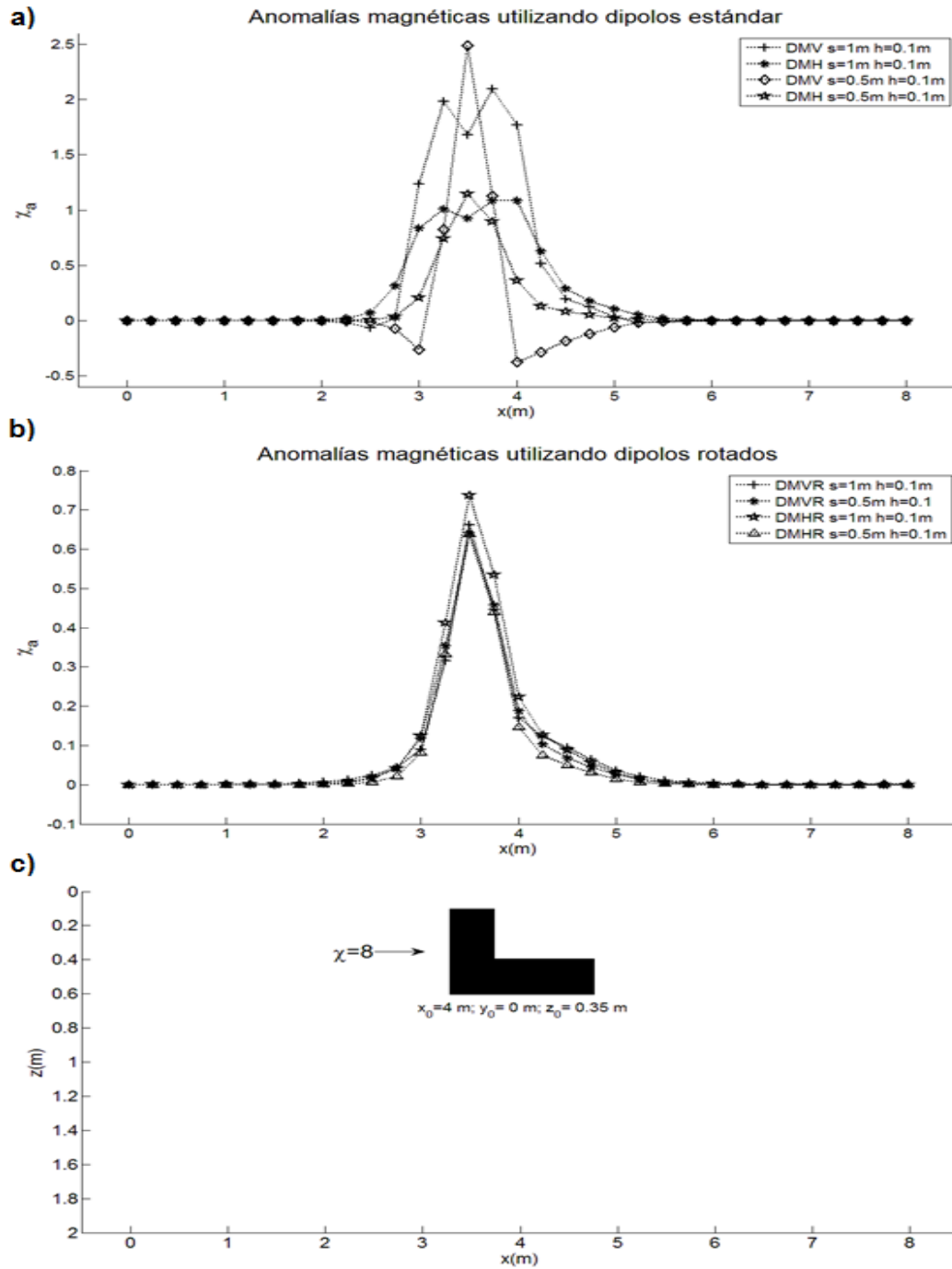


Figura 44. Datos sintéticos derivados del modelo propuesto para todas las configuraciones de dipolos con $s = 0.5m$ y $s = 1m$. a) Anomalías magnéticas para los arreglos de dipolos convencionales causadas por el cuerpo de abajo. b) Anomalías magnéticas para dipolos rotados. c) Representación de la posición y tamaño de los cuerpos modelo. Las coordenadas especifican el centro del cuerpo.

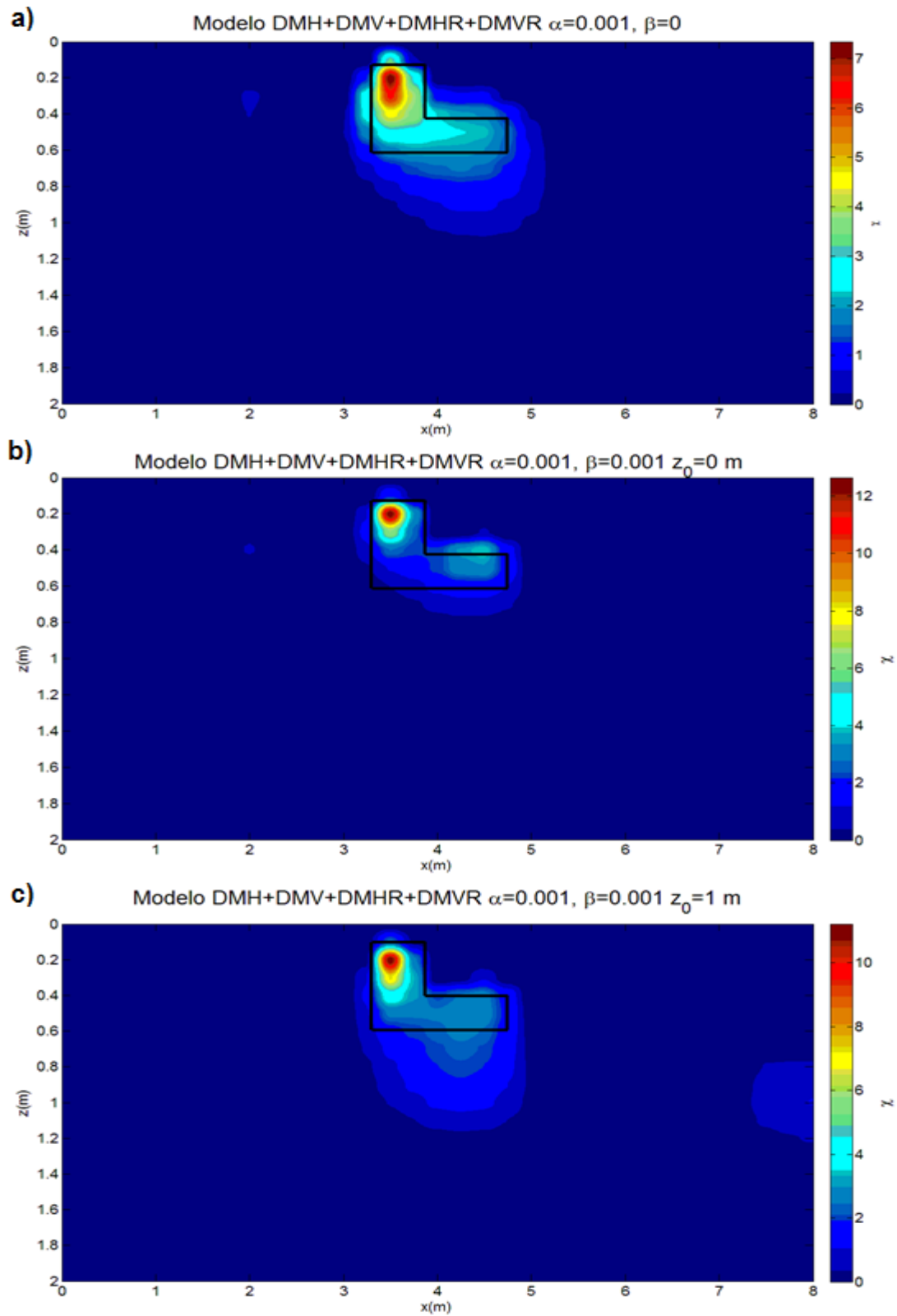


Figura 45. Comparación entre modelos para el ejemplo del cuerpo en forma de L utilizando todas las configuraciones a) modelo libre $\beta = 0$, b) modelo extremo superior $\beta = 0.001$, $z_0 = 0$ m, c) modelo extremo inferior $\beta = 0.001$, $z_0 = 1$ m.

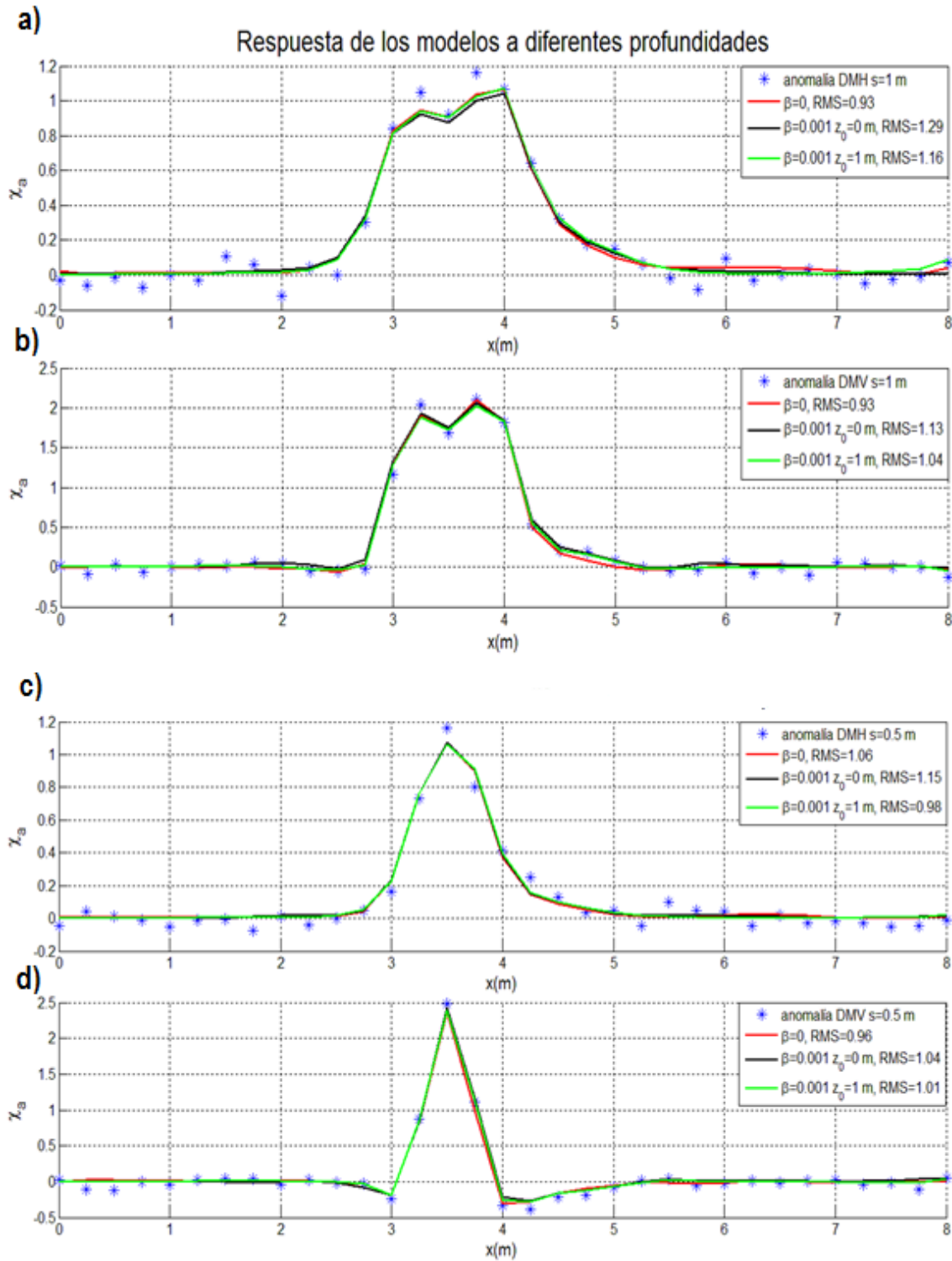


Figura 46. Respuesta de los tres modelos de la Figura 45, la línea continua roja es cuando $\beta = 0$, en negro cuando $\beta = 0.001, z_0 = 0 m$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 m$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMV $s = 1 m$, b) DMH $s = 1 m$, c) DMV $s = 0.5 m$, d) DMH $s = 0.5 m$.

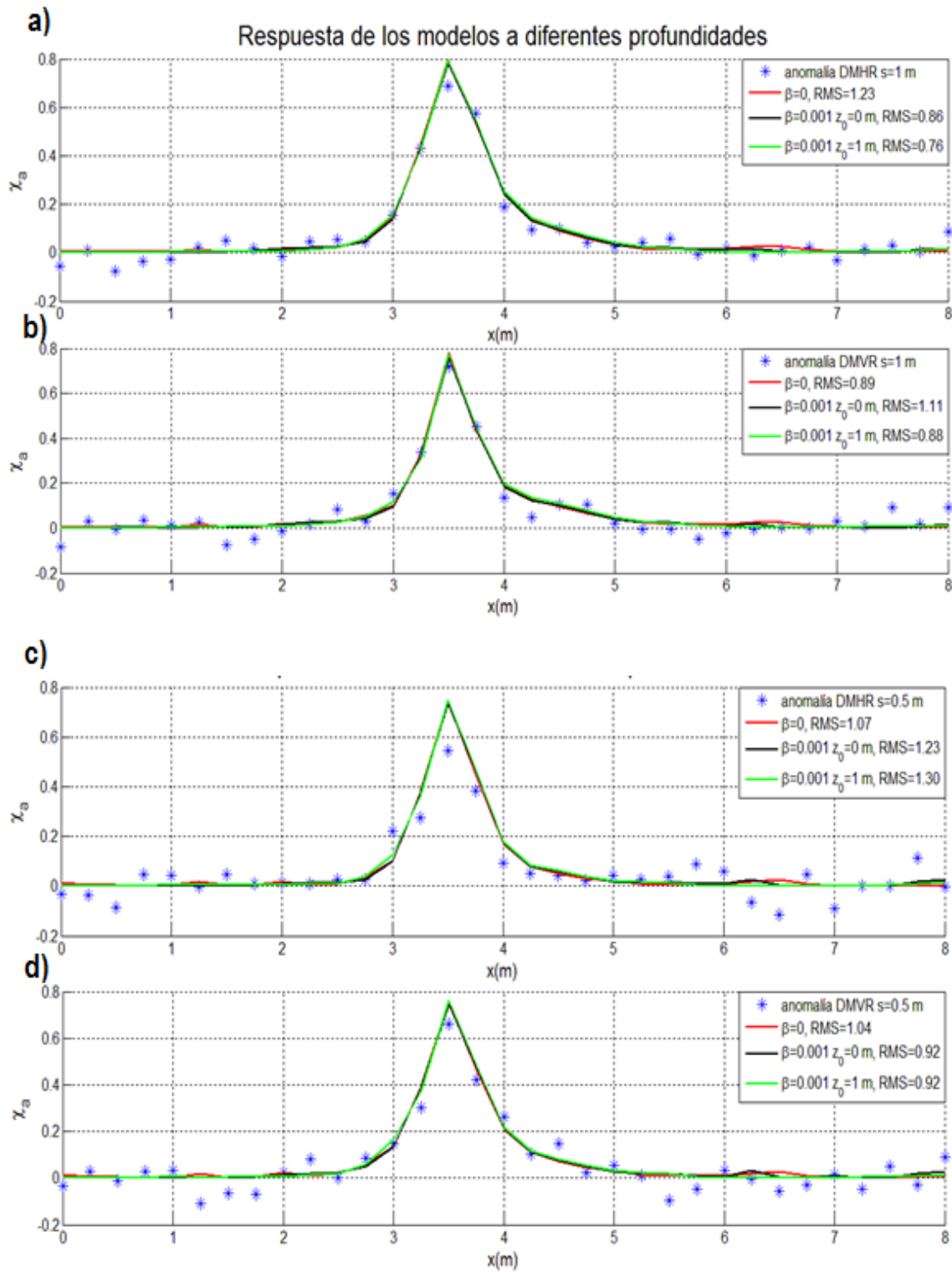


Figura 47. Respuesta de los tres modelos de la Figura 45, la línea continua roja es cuando $\beta = 0$, en negro cuando $\beta = 0.001, z_0 = 0 \text{ m}$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 \text{ m}$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMHR $s = 1 \text{ m}$, b) DMVR $s = 1 \text{ m}$, c) DMHR $s = 0.5 \text{ m}$ y d) DMVR $s = 0.5 \text{ m}$.

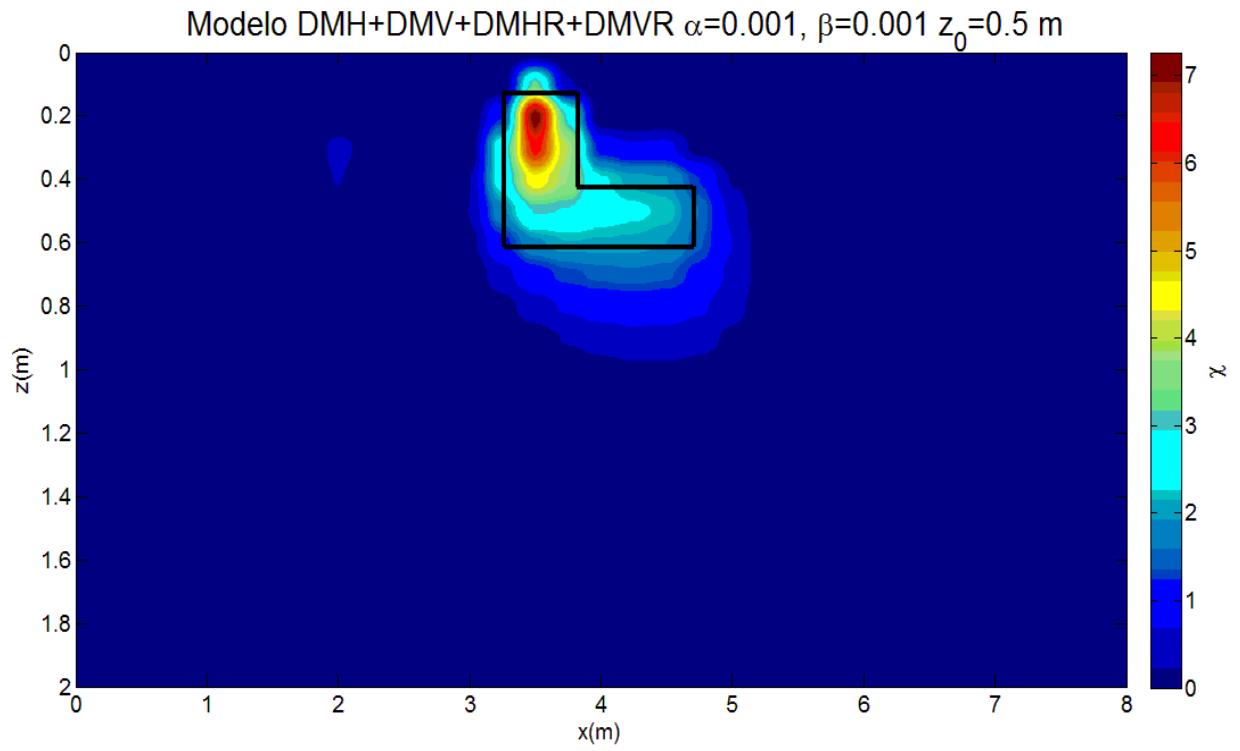


Figura 48. Modelo final para el ejemplo del cuerpo en forma de L, éste se obtuvo utilizando todas las configuraciones y un valor de $\beta = 0.001$ centrándolo en $z_0 = 0.5$ m.

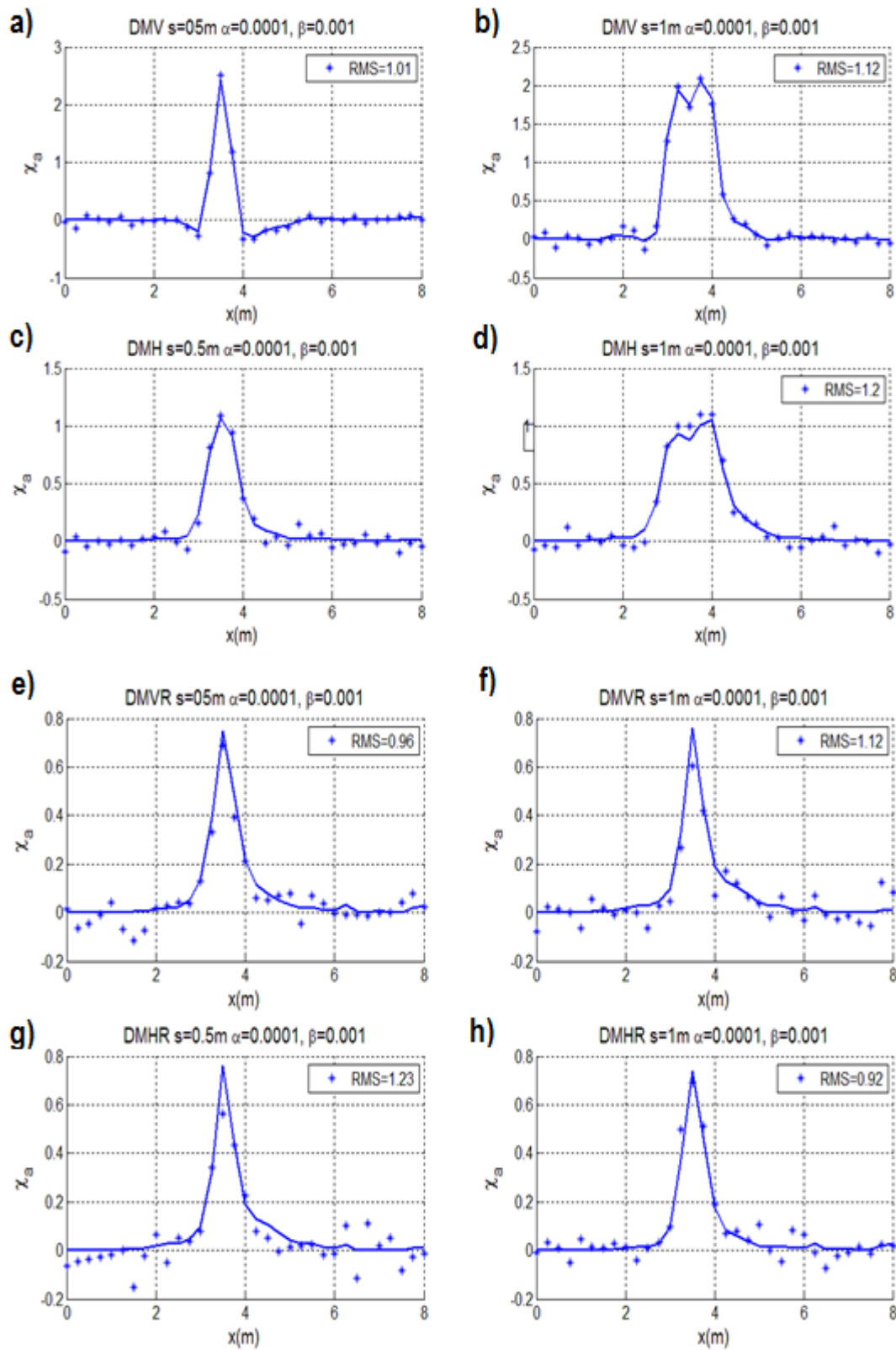


Figura 49. Comparación de datos sintéticos con las respuestas del modelo final de la Figura 48. Datos correspondientes al modelo del ejemplo del cuerpo en forma de L.

4.4. Modelo de tres cuerpos a diferentes profundidades.

Como último ejemplo, considérense las anomalías para un perfil debidas al caso de los tres cuerpos de la sección 2.5, estas se presentan en la Figura 12 donde a su vez se ilustra la posición en profundidad de los tres cuerpos así como sus valores de SM. Habría que notar que el cuerpo a mayor profundidad a pesar de tener una SM (8 unidades) mayor no es detectado en superficie por ninguna de las configuraciones por lo que consideramos que es un ejemplo muy difícil. El valor del ruido aleatorio agregado en este caso correspondió a 0.01 unidades de desviación estándar.

Paso 1. Modelo libre. Para encontrar un modelo final similarmente a los ejemplos anteriores comenzamos invirtiendo para todas las configuraciones con $\beta = 0$. Podemos observar en la Figura 50a que los dos cuerpos a menor profundidad están mucho mejor definidos que el cuerpo centrado en $z_0 = 1 \text{ m}$, esto es una consecuencia natural pues a medida que se tiene mayor profundidad la sensibilidad disminuye. Ahora, a partir del modelo libre buscaremos dos modelos extremos, uno que fuerce a concentrar el momento por arriba de las distribuciones inferidas y el otro por debajo de estas mismas.

Paso 2. Modelos extremos. Utilizando un valor de $z_0 = 0 \text{ m}$ obtenemos el modelo de la Figura 50b, aquí los cuerpos más someros están mejor constreñidos como es de esperarse y el centro del cuerpo más profundo se desplaza hasta aproximadamente $z = 0.7 \text{ m}$. Para el siguiente caso extremo, utilizamos $z_0 = 1.5 \text{ m}$. El modelo obtenido se presenta en la Figura 50c, observamos que ahora el centro del máximo del cuerpo más profundo se desplazó hasta $z = 1.4 \text{ m}$ mientras los otros cuerpos no sufren alteraciones mayores. Las respuestas de los modelos de la Figura 50 se presentan en las Figuras 51 y 52, donde el color verde representa el caso para el modelo libre y en color negro y rojo se presentan las respuestas para los modelos extremos con $z_0 = 0 \text{ m}$ y $z_0 = 1.5 \text{ m}$, respectivamente.

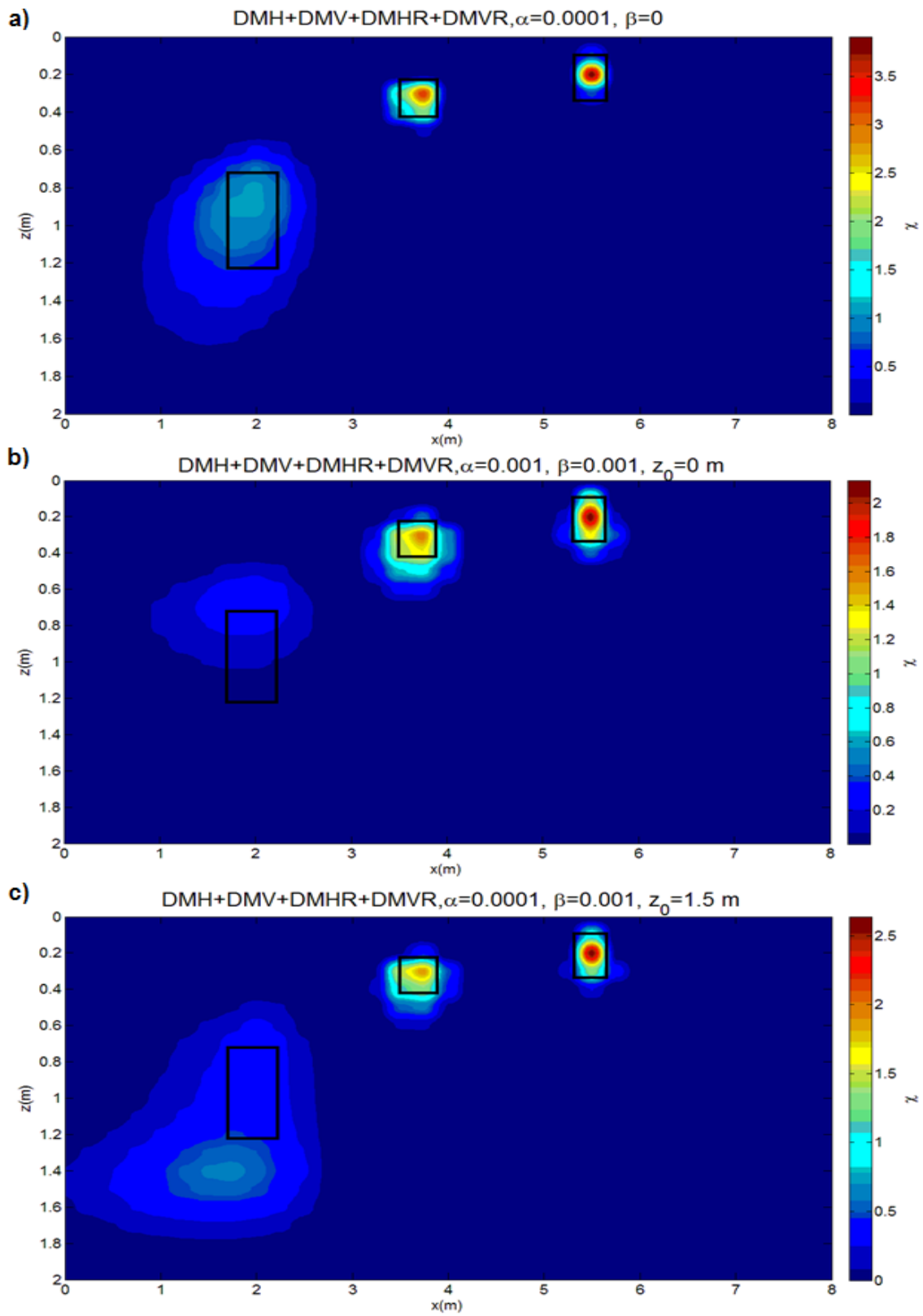


Figura 50. Comparación entre modelos para el ejemplo de los tres cuerpos utilizando todas las configuraciones a) modelo libre $\beta = 0$, b) modelo extremo superior $\beta = 0.001$, $z_0 = 0$ m, c) modelo extremo inferior $\beta = 0.001$, $z_0 = 1.5$ m.

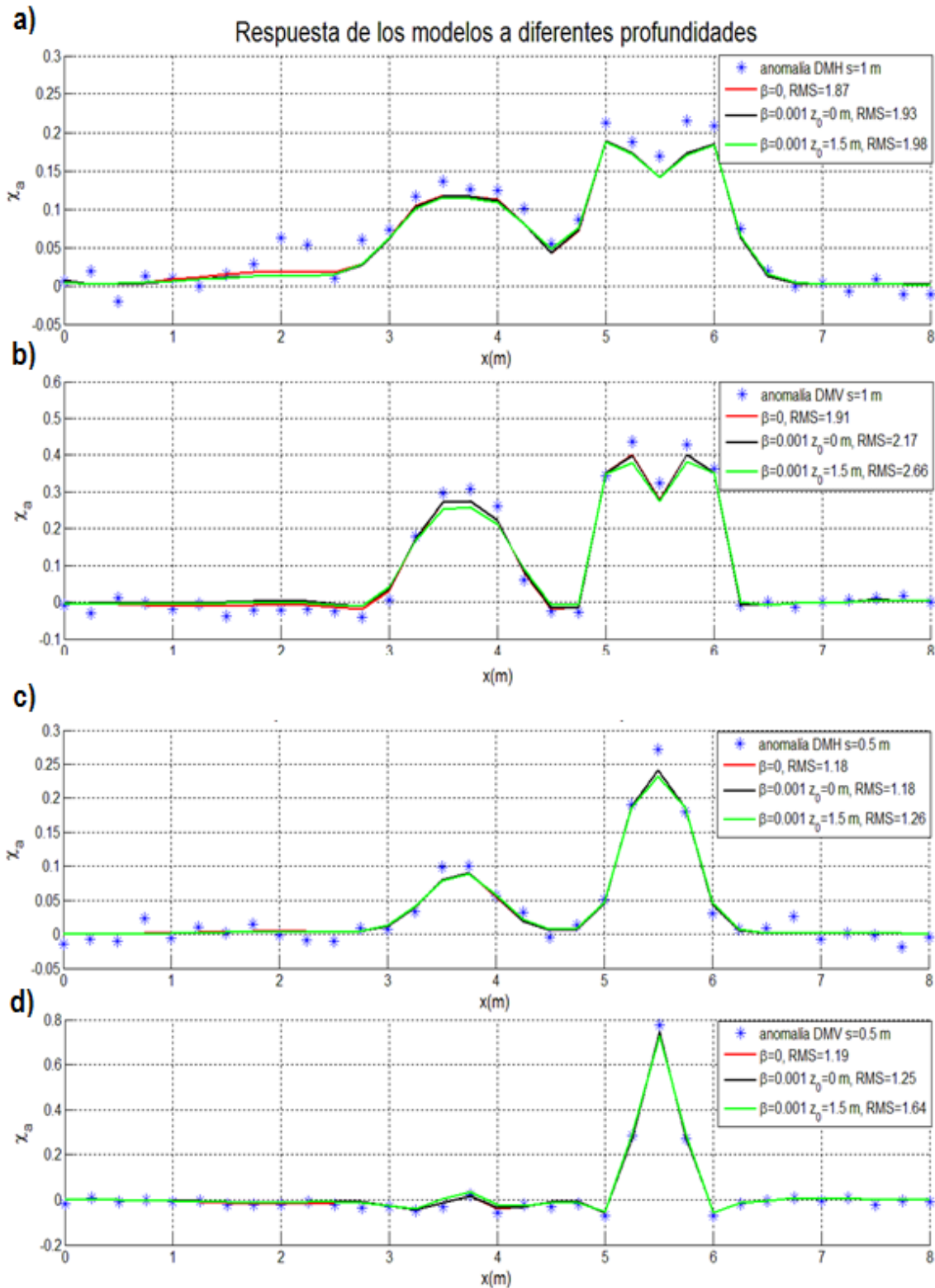


Figura 51. Respuesta de los tres modelos de la Figura 50, la línea continua roja representa la respuesta para $\beta = 0$, en negro para $\beta = 0.001, z_0 = 0 m$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 m$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMV $s = 1 m$, b) DMH $s = 1 m$, c) DMV $s = 0.5 m$, d) DMH $s = 0.5 m$.

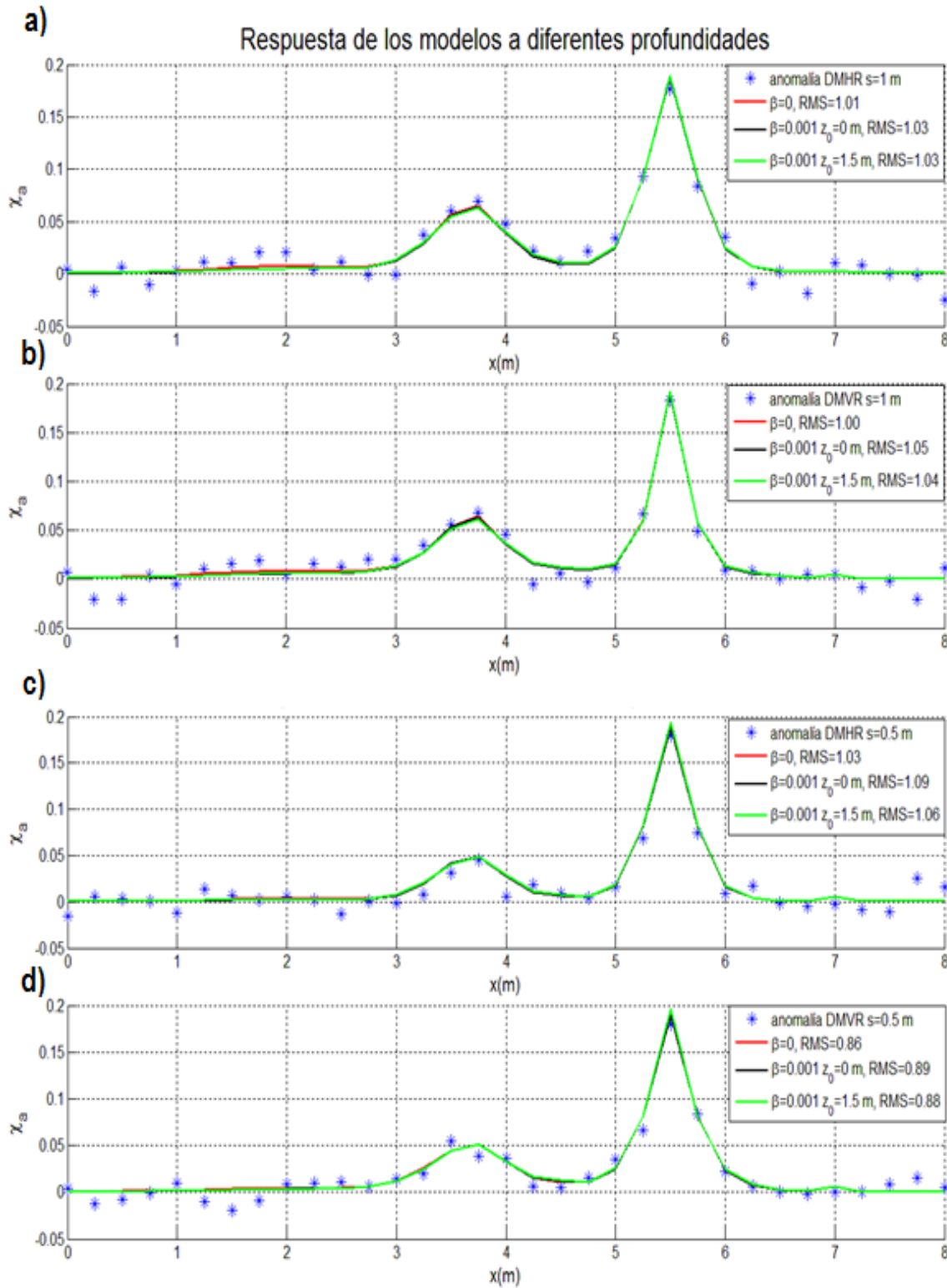


Figura 52. Respuesta de los tres modelos de la Figura 50, la línea continua roja representa la respuesta para $\beta = 0$, en negro para $\beta = 0.001, z_0 = 0 m$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 m$ correspondientes a las siguientes configuraciones: a) DMHR $s = 1 m$, b) DMVR $s = 1 m$, c) DMHR $s = 0.5 m$ y d) DMVR $s = 0.5 m$.

Paso 3. Modelo final. A partir de los modelos extremos de la Figura 50 seleccionamos $z_0 = 1 \text{ m}$ para realizar la inversión. El modelo de la Figura 53 puede considerarse el mejor que representa las distribuciones que se marcan con los rectángulos en negro. Las respuestas de este modelo se presentan en la Figura 54.

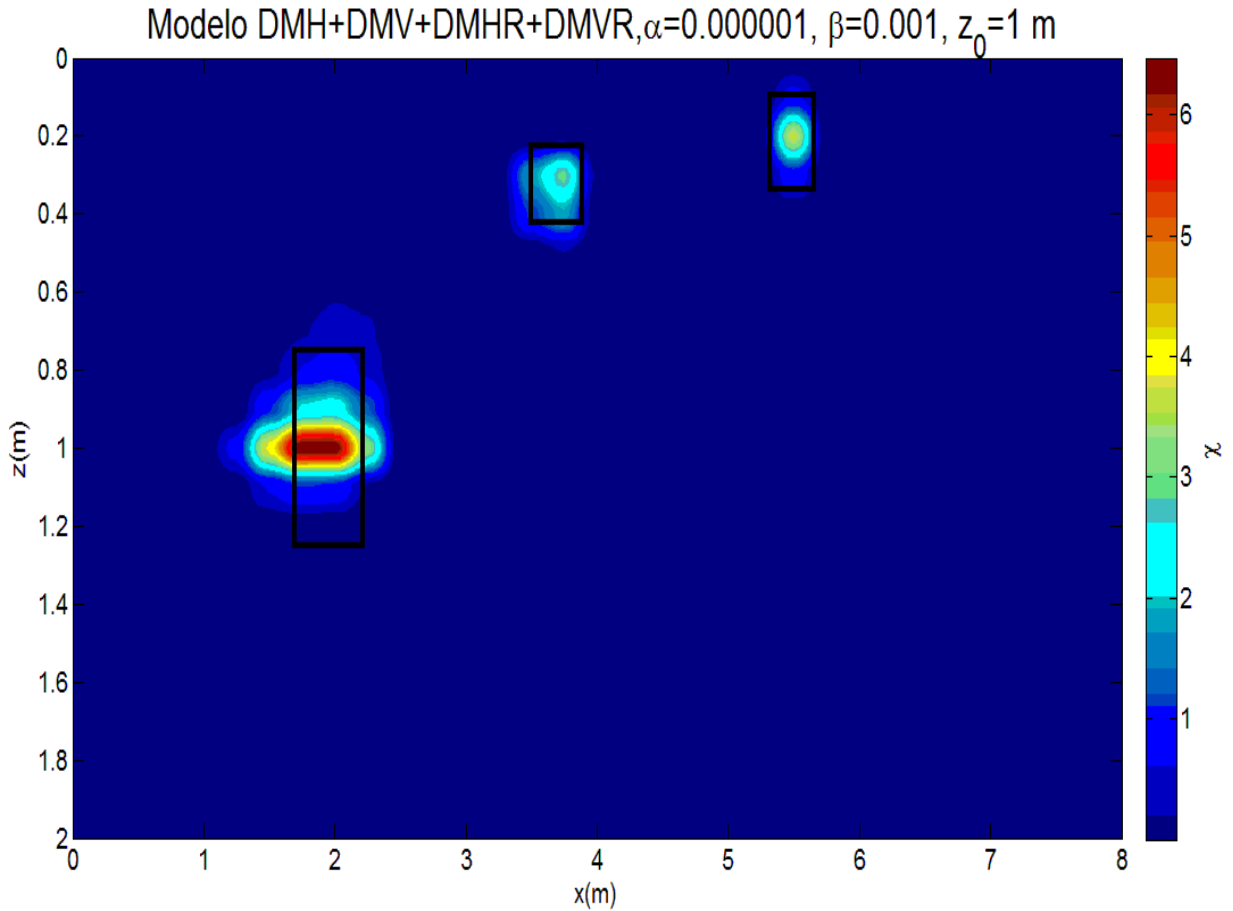


Figura 53. Modelo final para el ejemplo de los tres cuerpos, éste se obtuvo utilizando todas las configuraciones y un valor de $\beta = 0.001$ centrándolo en $z_0 = 1 \text{ m}$.

Recordemos que para las matrices de sensibilidad utilizadas para invertir los tres ejemplos de este capítulo se consideró integrar en un intervalo en $y = [-0.25, 0.25]$, por lo que los modelos obtenidos mediante inversión suponen que todos los cuerpos tienen un ancho igual a este intervalo. En los tres casos, los cuerpos tienen dimensiones sobre y menores que este intervalo por lo que podemos inferir que para realizar tomografías magnéticas, el eje y no es un elemento de peso en los modelos inferidos.

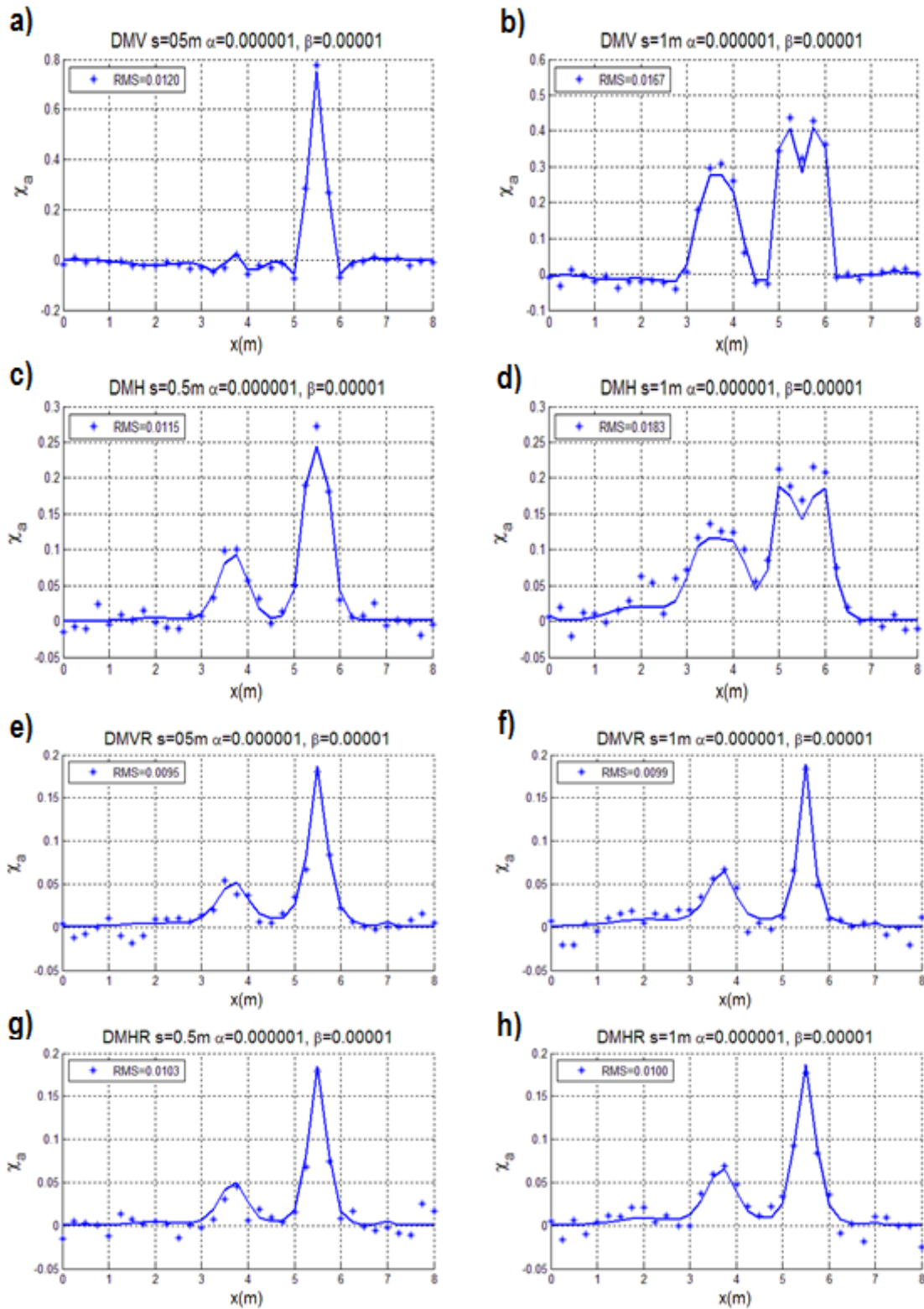


Figura 54 Comparación de datos sintéticos con las respuestas del modelo final de la Figura 53. Los datos corresponden al ejemplo de los tres cuerpos de la sección 2.5.

4.5. Conclusión.

En el capítulo anterior se ilustró con un ejemplo muy simple la estrategia para manejar la no unicidad del problema inverso. En este capítulo se extendió la aplicación de la estrategia a ejemplos más complejos, con el resultado de que también permite manejar imágenes ubicadas a diferentes profundidades. Primero se infiere un modelo libre, en el sentido que no está sesgado hacia una profundidad en particular. Después se infieren modelos extremos sesgados hacia arriba y hacia abajo, para acotar las profundidades de todos los modelos posibles que ajustan a los datos. Esto resuelve el problema de la no unicidad con respecto a la profundidad. Como modelo final se propone un modelo centrado en la profundidad media entre los modelos extremos.

Capítulo 5. Aplicación a datos de campo

5.1. Introducción

En un principio el presente trabajo contemplaba diseñar solamente el algoritmo de inversión para obtener imágenes en planta partiendo de mediciones con una sola separación de dipolos. Lo anterior porque se tenían datos de este tipo y por el hecho de que, como se mostró en el segundo capítulo, algunas veces la respuesta en superficie de un objeto somero consiste en anomalías que pudieran interpretarse cualitativamente como las producidas por más de un objeto. Finalmente el algoritmo no se aplicó a los datos mencionados, sino a un conjunto nuevo de datos que se tomaron como parte del presente trabajo. En colaboración con el CINAH-BC se realizaron mediciones en dos sitios arqueológicos al norte de la ciudad de Ensenada, en donde se supone se asentaron temporalmente humanos en tiempos prehistóricos, lo que se busca son fogones pues el calentamiento del suelo provoca un aumento en las propiedades magnéticas. Comparamos nuestros modelos de distribución de SM con lo encontrado después de realizar las excavaciones y no se encontró correlación, indicando que, o no hubo fogatas en esos sitios, o las rocas aledañas al parecer no sufrieron modificaciones en su SM. En la primera parte de este capítulo se presentan parte de estos resultados. Lo anterior motivó a realizar un experimento controlado en el que se enterró a aproximadamente medio metro de profundidad un trozo de magnetita. Al mismo tiempo se amplió el objetivo a localizar a profundidad la magnetita, para lo cual se tomaron mediciones con todos los arreglos de dipolos tratados en los capítulos anteriores. Se presentan también estos resultados que demuestran la viabilidad de realizar tomografías magnéticas con equipos existentes.

5.2. El equipo EM-38 MK2

Como se ha descrito hasta el momento, el *EM-38 MK2* es un instrumento de detección electromagnética para suelos desarrollado por Geonics Ltd. y utilizado principalmente en agricultura y arqueología. Se trata de un arreglo de bobinas eléctricas las cuales pueden ser orientadas vertical u horizontalmente. La Figura 55 ilustra el caso de

bobinas horizontales donde una de ellas opera como transmisor (*Tx*) y otras dos colocadas a 0.5 m y 1 m con respecto a la primera funcionan como receptores (*Rx*). El principio de operación físico es el siguiente: a través de la bobina transmisora se hace circular una corriente eléctrica, esta corriente produce un campo magnético tanto en el aire como en el suelo. Si se tiene un medio permeable, este campo magnético primario induce pequeños dipolos infinitesimales en el subsuelo. En las bobinas receptoras se mide directamente ambos efectos, es decir, tanto el campo magnético primario producido por el dipolo fuente como el campo magnético secundario producido en el subsuelo.

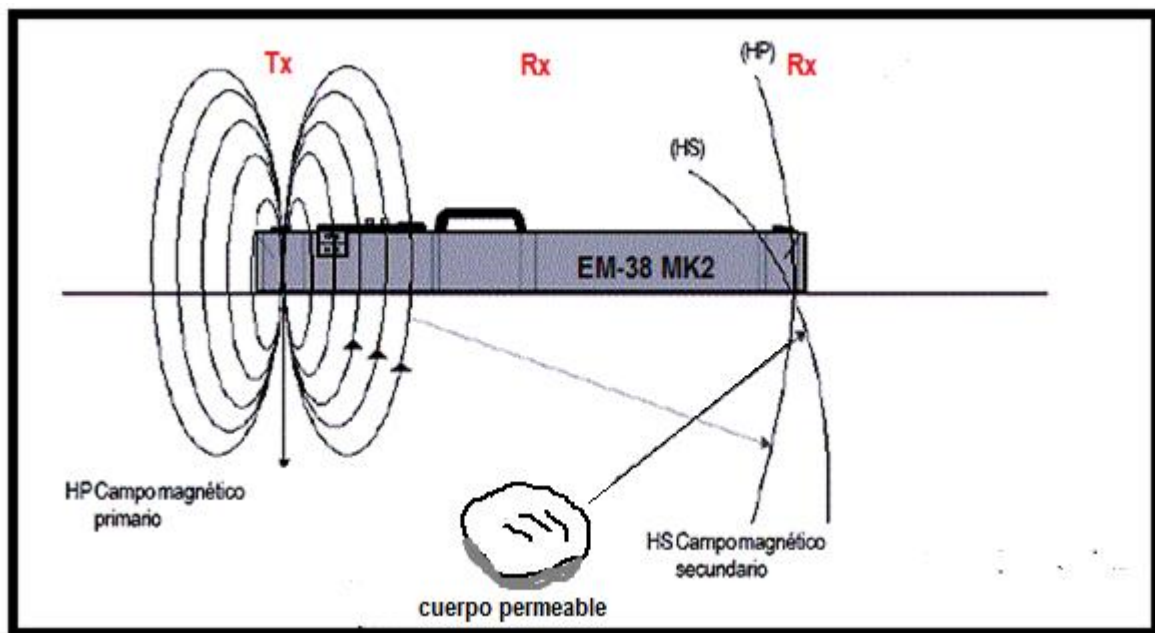


Figura 55. Esquema del principio físico de operación para el aparato EM-38 MK2 en modo vertical. (Adaptado de Lesch *et al.*, 2005).

Además del campo secundario producido por efectos de magnetización, existe un campo secundario producido por inducción electromagnética. La corriente en la bobina transmisora es alterna por lo que el campo magnético, que varía en el tiempo, induce corriente eléctrica en el subsuelo, la cual a su vez produce el otro campo magnético secundario. Ambos campos secundarios se detectan en el receptor y pueden separarse porque están desfasados 90°. Cuando se opera dentro del límite resistivo o para bajos números de inducción ($\frac{\sigma}{\omega} \ll 1$) (el número de inducción se define como la razón de la

separación s dividida entre la penetración δ). La componente en fase del campo magnético secundario es proporcional a la susceptibilidad magnética, mientras que la parte en cuadratura se relaciona directamente con la conductividad eléctrica (McNeill, 1980). El *EM-38 MK2* es capaz de medir ambas componentes, las cuales por cuestiones de instrumentación ambas se leen en mS/m . Las mediciones en fase se convierten a razones del campo secundario al primario y se expresan en ppm (partes por millón). Para convertir las mediciones, se utiliza la siguiente relación (McNeill 1986):

$$\frac{1mS}{m} \equiv 28.5 \text{ ppm (partes por millón)} \quad \text{para } s = 1 \text{ m}$$

$$\frac{1mS}{m} \equiv 7.12 \text{ ppm (partes por millón)} \quad \text{para } s = 0.5 \text{ m}$$

Las especificaciones técnicas del instrumento se detallan en la tabla 1.

Tabla 1. Especificaciones técnicas del equipo *EM-38 MK2*.

Rango para conductividad eléctrica	0 – 1000 mS/m
Rango para la componente en fase	$\pm 28 \text{ ppt}$ para $s = 1 \text{ m}$ $\pm 7 \text{ ppt}$ para $s = 0.5 \text{ m}$
Resolución en las mediciones	$\pm 0.1 \%$ de toda la escala
Precisión en las mediciones	$\pm 5 \%$ a 30 mS/m

Para convertir las razones de campo en susceptibilidad aparente utilizamos las expresiones descritas en el Capítulo 2, según la configuración de que se trate. Cuando el instrumento descansa exactamente sobre el suelo ($h = 0$) la susceptibilidad aparente es simplemente el doble de la razón del campo secundario al primario. El factor de 2, que puede ser -2 en unos casos, compensa por el hecho de que estamos caracterizando sólo la mitad del espacio, el subsuelo, y que el aire tiene cero susceptibilidad. De esta manera, integrando sobre el semiespacio inferior y aplicando el factor, obtenemos la susceptibilidad del subsuelo, siempre y cuando sea homogéneo. Cuando $h \neq 0$ los factores para las diferentes configuraciones hay que calcularlos con las fórmulas correspondientes para que las mediciones sean congruentes con la teoría. Estos factores para $h = 0.1 \text{ m}$ son: DMV $s=1 \text{ m}$ (2.4); DMH $s=1 \text{ m}$ (-2.1); DMVR y

DMHR $s=1$ m (-3.5); DMV $s=0.5$ m (4.3); DMH $s=0.5$ m (-2.5); DMVR y DMHR $s=0.5$ m (-5.5).

5.3. Aplicación en arqueología

El estudio de un sitio arqueológico mediante el uso de técnicas geofísicas y geoquímicas, en particular mediante la medición de susceptibilidad magnética, es posible gracias a que los asentamientos humanos pueden modificar el ciclo natural de la formación del suelo, y producen alteraciones físicas que concentran compuestos químicos y acumulan vestigios culturales. Los sitios que han sido antropológicamente influenciados contienen una alta concentración de óxidos de hierro los cuales se ven manifestados como un aumento en la susceptibilidad del suelo. Entre los óxidos más importantes se encuentran la hematita, magnetita y magemita (Dalan 2008). La hematita que normalmente es no magnética puede ser convertida mediante reducción química (combustión) en magnetita y ésta a su vez mediante oxidación química en magemita, ambos minerales altamente magnéticos. La temperatura umbral a la cual se presenta este cambio es entre 100-200°C con modificaciones extras alrededor de la temperatura de Curie (577°C) para la magnetita (Farwig V.J. *et al.* 2004). Aunque el calentamiento produce un aumento en la SM de las rocas, existe un rango de temperaturas a las cuales el proceso puede ser reversible (Roman S. A. *et al.*, 2013).

Al norte de la ciudad de Ensenada, se localiza el complejo turístico BajaMar. Dentro de él se han descubierto sitios arqueológicos pertenecientes a la cultura yumana. A estos sitios se les conoce con el nombre de concheros, esto debido a la cantidad de conchas y otros elementos como huesos fósiles de animales encontrados en dichos sitios. La Figura 56 marca la posición de estos sitios en un mapa geográfico del estado de Baja California. En colaboración con el CINAH-BC se estudiaron 2 de estos sitios, el primero de ellos, el MP3c de dimensiones 10x8 m y el segundo MP3g de 8x6 m. Para fines prácticos en la excavación ambos concheros se dividieron en cuadros de 2x2 m. En los dos sitios se tomaron lecturas con el equipo *EM-38 MK2* en sus configuraciones normales, es decir DMV y DMH en dos direcciones, la primera a lo largo del perfil (longitudinalmente), para referencia se les llamó DMVL y DMHL, y la segunda en sentido perpendicular a éste (véase Figura 57), llamándoles DMVT y DMHT.

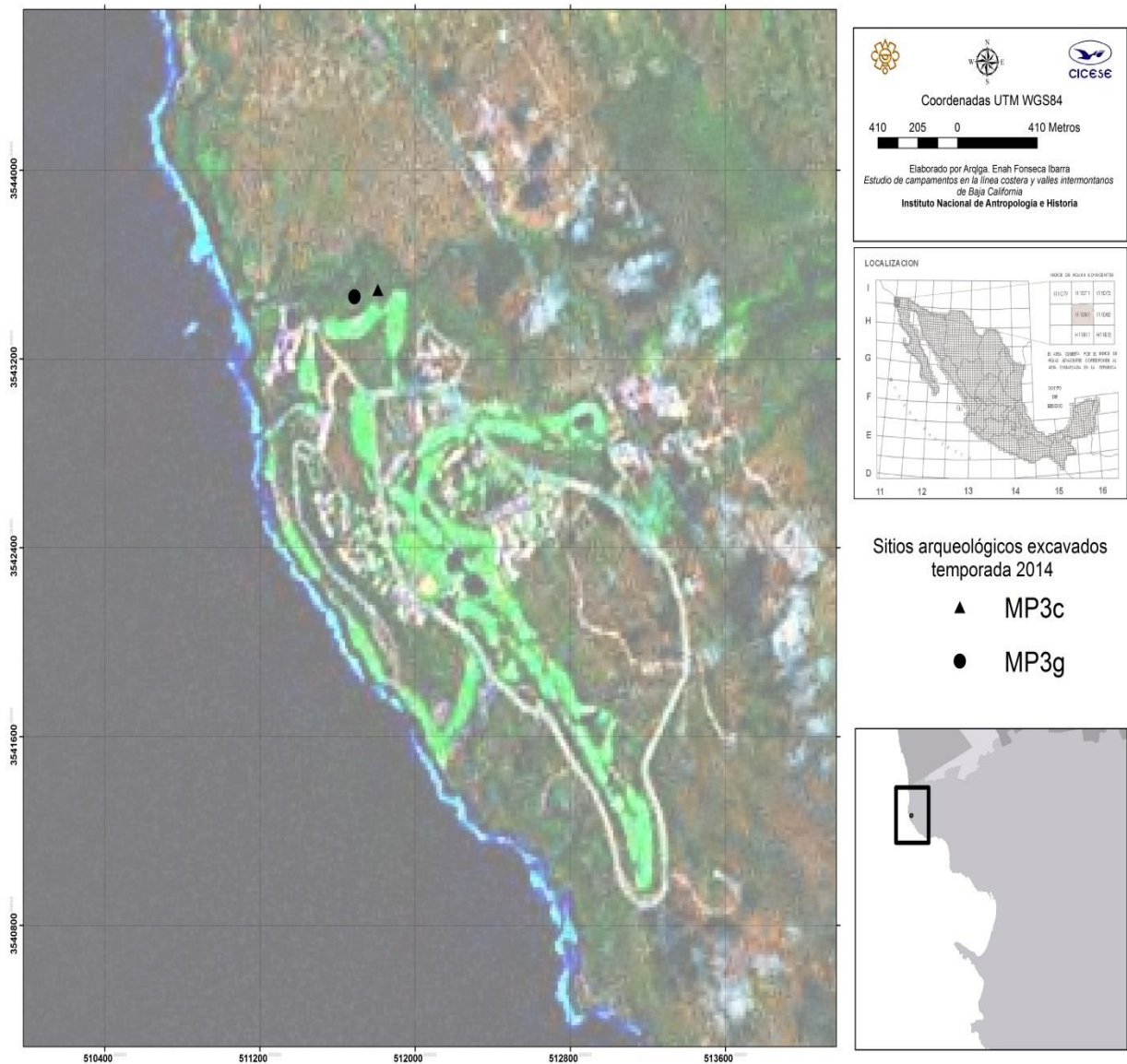


Figura 56. Mapa con la localización de los sitios arqueológicos dentro del Complejo Turístico Bajamar. El triángulo indica la posición del conchero MP3c mientras que el círculo marca la localización del conchero MP3g.

Para el caso del conchero MP3c, en total se realizaron 9 perfiles en y con 20 mediciones por cada uno. Se utilizaron las configuraciones DMVL y DMVT con $s = 0.5m$ y $s = 1m$ mientras que para DMHL y DMHT solo se tomaron con $s = 0.5m$. Una vez obtenidos los datos de campo se prosiguió a mapear las anomalías magnéticas para posteriormente realizar las inversiones en 2D.

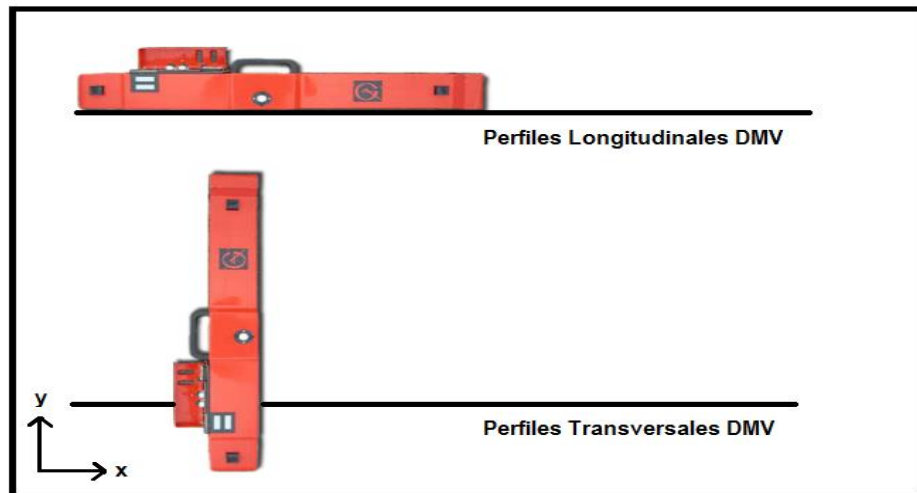


Figura 57. Esquema gráfico de los perfiles de mediciones para ambos concheros. El equipo se encuentra en la configuración de DMV.



Figura 58. Levantamiento de datos dentro del conchero MP3c. En este caso corresponde a un perfil longitudinal con DMV.

Para realizar la inversión en planta se utilizó una malla de $14 \times 12 \text{ m}$, la cual contiene la posición de los centros de las funciones Hann. Estos centros se encuentran dispuestos cada $\Delta x = \Delta y = 0.25 \text{ m}$. Siguiendo la ecuación (20) se tienen 180 mediciones y 2688 incógnitas, la Figura 59 ilustra con asteriscos rojos las posiciones de las bobinas para las mediciones transversales, los asteriscos en azul para las longitudinales y los puntos en negro la posición de cada una de las incógnitas. Para cada una de las mediciones se realizó la integral del producto de la función de sensibilidad por las funciones Hann con periodo de $T_x = T_y = 0.5 \text{ m}$. El hecho de que se tengan más incógnitas fuera del área de mediciones es para asegurar una buena inversión y evitar los cambios bruscos en la frontera del área real de mediciones. Los límites de integración utilizados fueron $x_0 \pm T_x/2$, $y_0 \pm T_y/2$, $z = [0, 0.5]$.

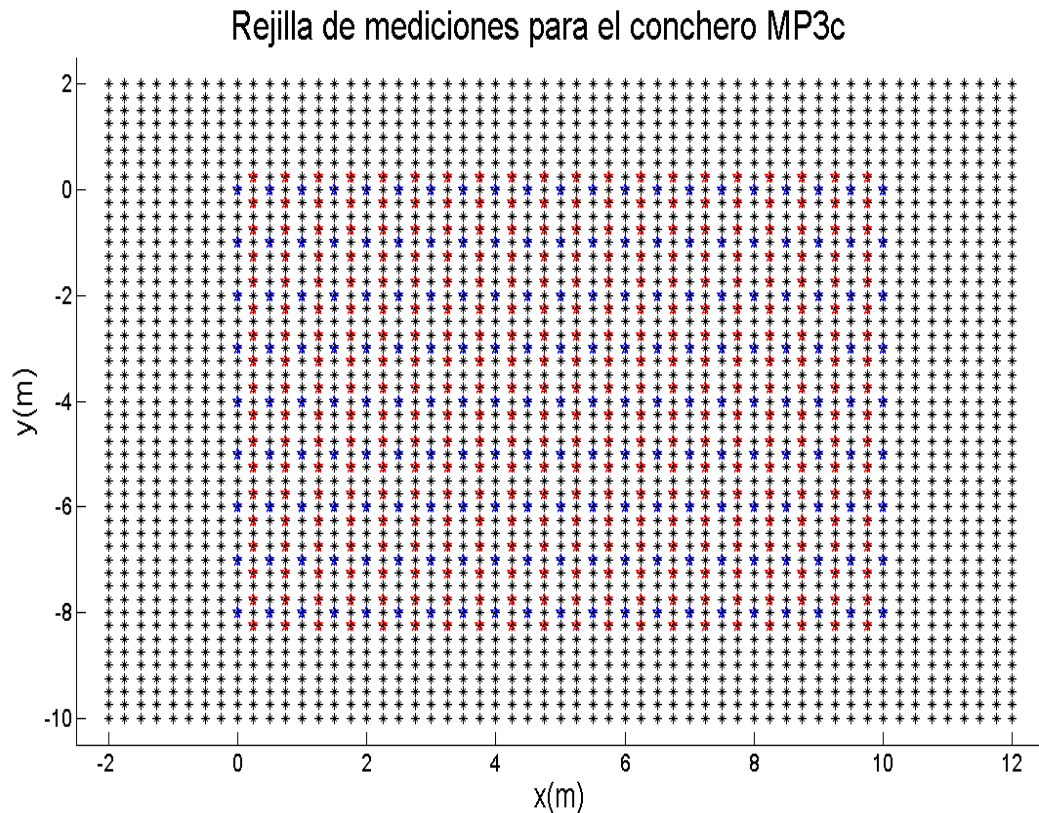


Figura 59. Representación gráfica del mallado propuesto para invertir los datos de campo del conchero MP3c. Los asteriscos azules representan las posiciones de las bobinas para las mediciones realizadas a lo largo de los perfiles, los asteriscos en rojo las posiciones para las mediciones perpendiculares a los perfiles y los asteriscos negros los centros de las funciones Hann.

Para elegir el mejor modelo que represente la distribución de SM en el subsuelo se calcularon los rms y al comparar las respuestas de los modelos con los datos de campo. Además, gracias al aporte del CINAH-BC se tiene una representación gráfica con dibujos de la retícula de excavación dentro de ambos concheros, de esta forma se compararon nuestros modelos con los resultados de la excavación. Cabe mencionar que debido al costo en tiempo y dinero solo se eligieron algunos cuadros para ser excavados. La excavación se realizó por capas cada 0.1 m hasta llegar a 0.4 m de profundidad.

Para el conchero MP3g, el total fueron 7 perfiles con 16 mediciones por cada uno utilizando DMVL, DMVT, DMHL y DMHT con $s = 0.5\text{ m}$. Como en el caso del conchero MP3c el procedimiento para la inversión fue el mismo, con $n = 112$ y $m = 1920$. El periodo, Δx , Δy y los límites de integración fueron los mismos.

Los siguientes resultados corresponden al conchero MP3c. En la figura 60 se muestran imágenes del sitio una vez que fue excavado, en este caso la excavación se realizó en 12 de los 20 cuadros. En la figura 61 se muestra mediante dibujos los objetos encontrados a una profundidad de 0.2 m .



Figura 60. Imágenes del conchero MP3c después de ser excavado.



Figura 61. Retícula de excavación, sitio MP3c. Los dibujos fueron realizados por los arqueólogos a cargo de las excavaciones. La imagen corresponde a 12 de los 20 cuadros. La profundidad de la excavación es de 0.2 m .

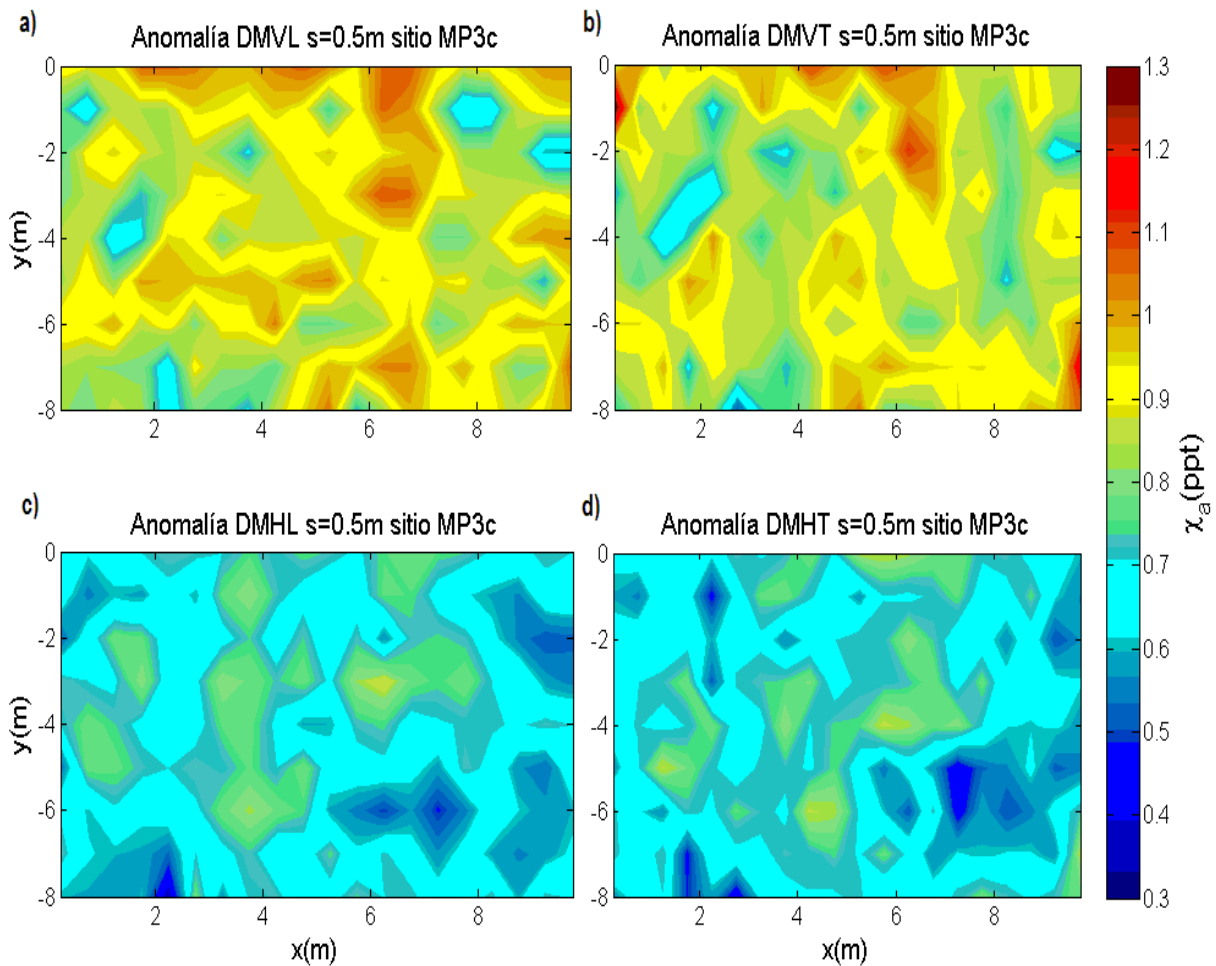


Figura 62. Anomalías magnéticas en planta para el conchero MP3c. a) DMVL $s=0.5$ m, b) DMVT $s=0.5$ m, c) DMHL $s=0.5$ m y DMHT $s=0.5$ m.

Como se ha mencionado anteriormente, cuando se cuenta con mapas magnéticos en planta muchas veces la interpretación de estos puede no ser una tarea sencilla, sobre todo si las anomalías se deben a cuerpos someros, como es el caso en arqueología. Una estrategia para poder llevar a cabo una buena interpretación cualitativa de las mediciones es contar con datos de más de una separación de dipolos. La Figura 62 presenta las respuestas para las dos configuraciones con $s = 0.5$ m tanto para mediciones longitudinales como transversales del conchero MP3c. Podemos comparar estas respuestas y ver que no existe una correlación muy marcada entre ellas. Sin embargo, encontramos un máximo para todos los casos aproximadamente en (6,-3). Cabe mencionar que cuando se llevaron a cabo estos estudios, las configuraciones rotadas todavía no habían surgido como una necesidad por lo que no se utilizaron.

Como se ha visto hasta el momento, tanto DMV como DMH pueden producir anomalías con dos máximos para un solo objeto como se indicó en la Figura 5 del capítulo 2 por lo que se realizó la inversión.

En la Figura 63 se muestra una superposición de la retícula de excavación con el modelo encontrado al invertir para DMVL con $s = 0.5 \text{ m}$. El mejor modelo obtenido corresponde a un valor de $\alpha = 0.0001$. Puede notarse que no se encontró correlación entre el modelo y los objetos encontrados en la excavación. Además, si se realiza una comparación entre el modelo y la anomalía de campo de la Figura 62a puede verse que son muy similares, es decir, en este caso se podría presumir que la distribución de SM produce una respuesta que presenta un solo máximo en superficie por lo tanto el realizar la inversión no modifica la información recabada de las mediciones. Es entonces que podemos decir que tampoco los datos crudos se correlacionan con los objetos encontrados. Aproximadamente en el centro del conchero se localizó un fogón, y aunque tanto el mapa de la anomalía como el modelo presentan valores altos en SM, los máximos no se relacionan con las rocas, esto podría ser debido a que las temperaturas a las cuales fueron calentadas no modificaron sus propiedades magnéticas o el cambio fue reversible.

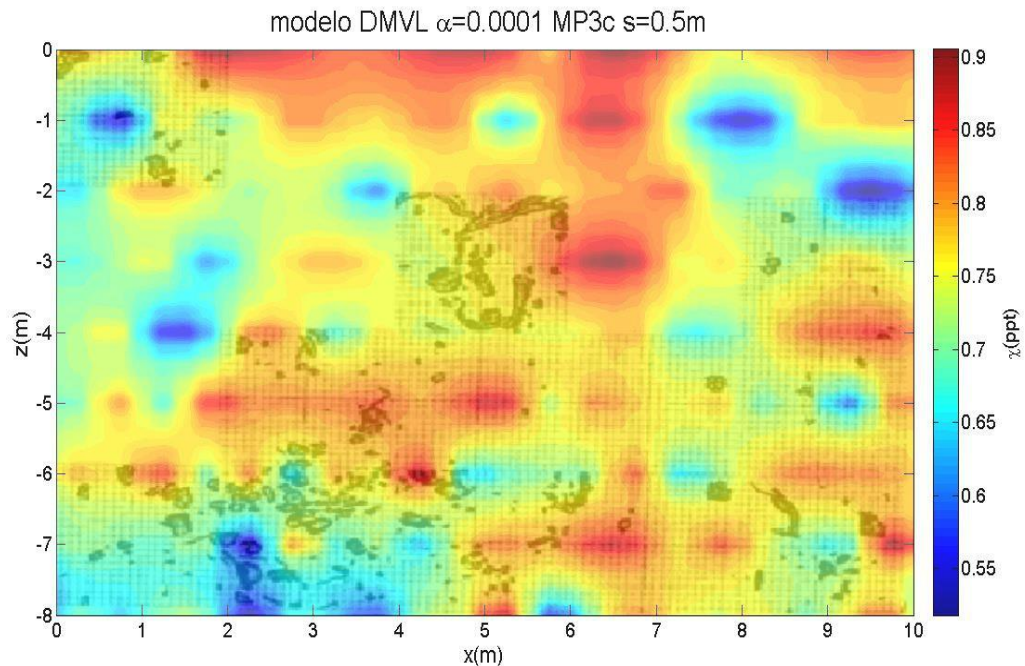


Figura 63. Superposición de la retícula de excavación de la Figura 61 con el mejor modelo obtenido mediante inversión para DMVL $s = 0.5 \text{ m}$, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$.

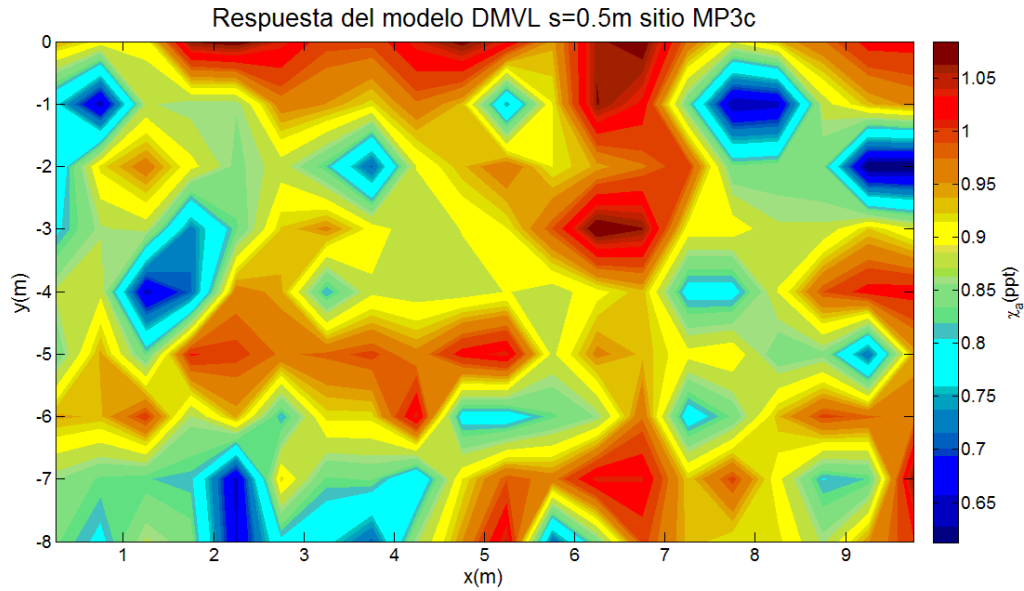


Figura 64. Respuesta del modelo de la Figura 63, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$. Su rms correspondiente es $rms = 1.03$.

El tratamiento y análisis de los datos para las otras configuraciones de ambos sitios se presentan al final de esta tesis en el Apéndice E.

5.4. Tomografía magnética

El trabajo siguiente realizado en campo consistió en localizar a profundidad un objeto magnético. Para ello se enterró a aproximadamente 0.6 m por debajo de la superficie una muestra de magnetita oxidada, cuya susceptibilidad magnética medida con un susceptibilímetro *Scintrex K-2* es $\chi = 600 \times 10^{-5}\text{ SI}$. Para tres diferentes perfiles se realizaron 33 mediciones por cada uno con un muestreo cada 0.25 m utilizando todos los arreglos de dipolos con separación $s = 0.5\text{ m}$. Las matrices de sensibilidad para este caso se calcularon integrando en un intervalo $y = [-0.15, 0.15]$ que es aproximadamente el ancho de la muestra. Las anomalías magnéticas en planta debidas a la roca se presentan en la Figura 65. Las mediciones para el perfil central, es decir justo sobre la roca, se muestran en la Figura 66. En ambas figuras se puede observar que en el caso de DMV, la respuesta en superficie es negativa mientras que el resto de las anomalías son positivas. Esto nuevamente está en acuerdo con la

dependencia de las funciones de sensibilidad con respecto a la profundidad de la Figura 9.

En lo que sigue se presentan los resultados de interpretar los datos según los tres pasos delineados en el capítulo anterior.

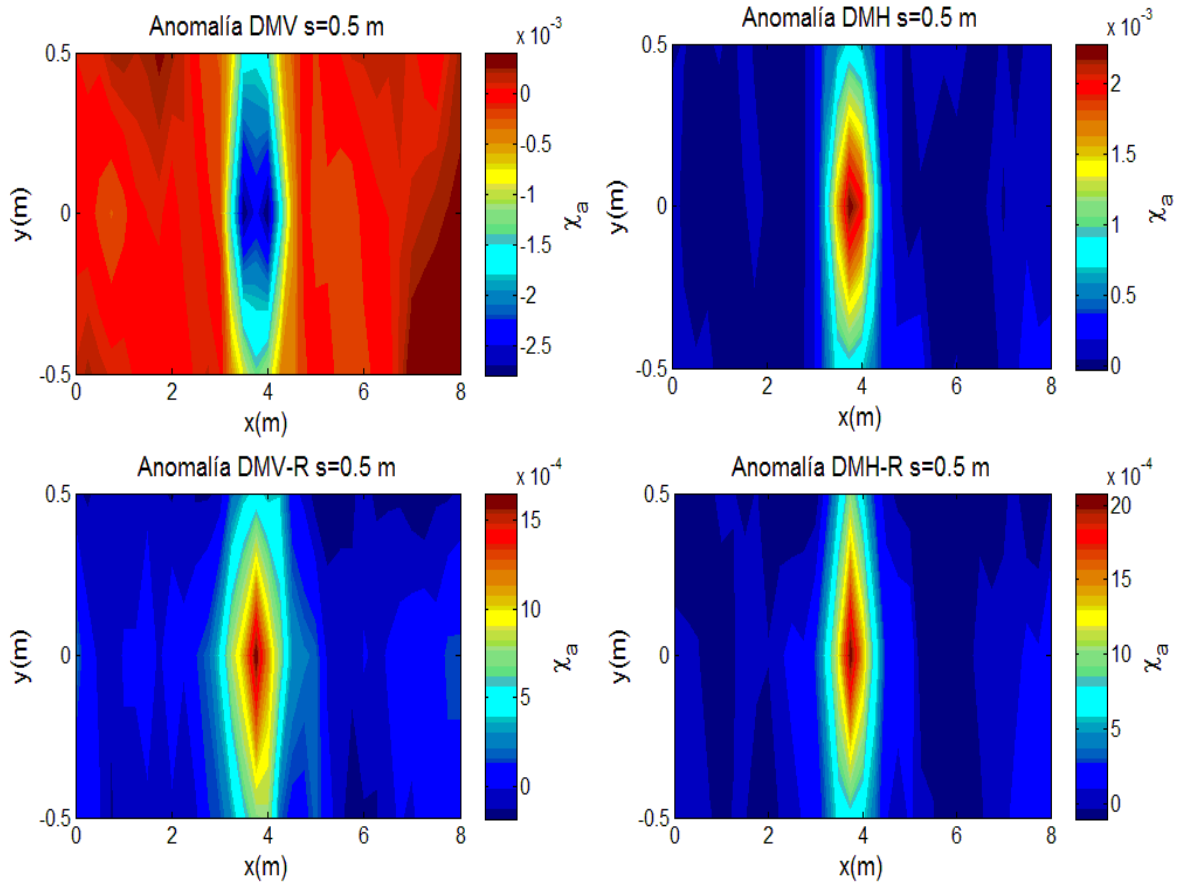


Figura 65. Anomalías magnéticas en planta de una roca magnetita de susceptibilidad magnética $\chi = 600 \times 10^{-5} SI$ localizada a aproximadamente 0.6 m de profundidad.

Paso 1. Modelo libre. Invertimos los datos utilizando un valor de $\beta = 0$, el modelo resultante se muestra en la Figura 67a. Podemos ver que el máximo se concentra en $z = 0.6 m$, aproximadamente a la profundidad a la cual se enterró la roca.

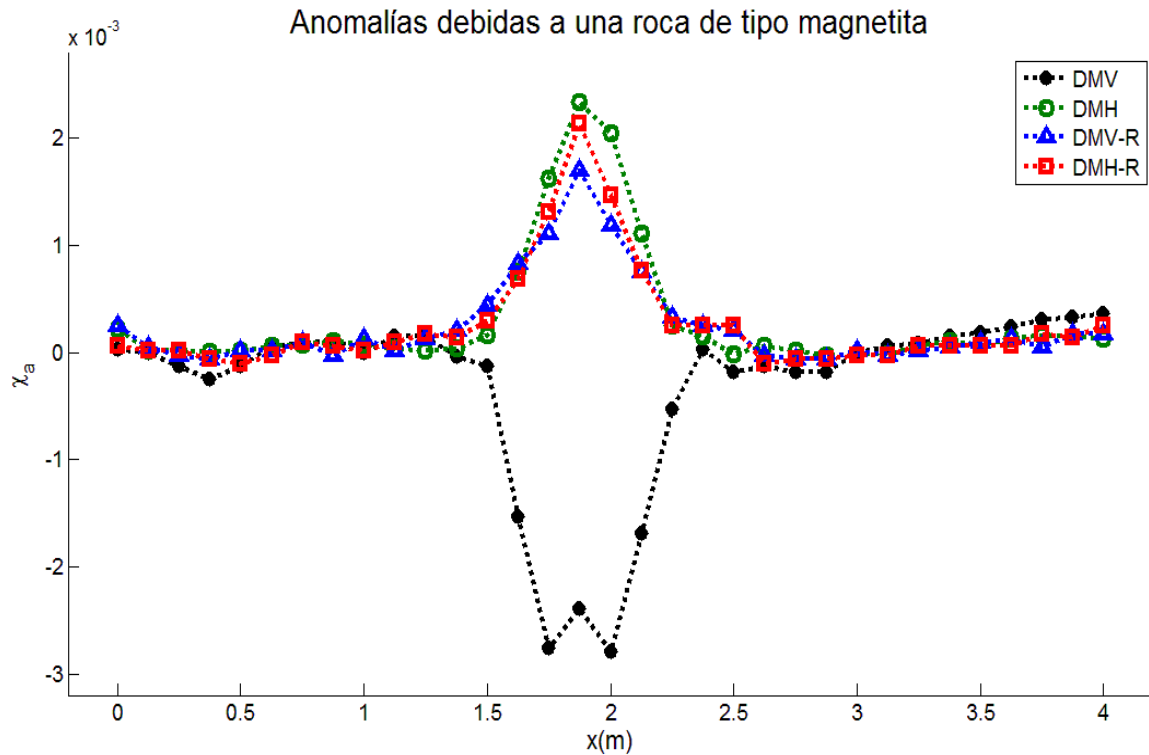


Figura 66. Anomalías magnéticas de una roca magnetita de susceptibilidad magnética $\chi = 600 \times 10^{-5} \text{ SI}$ localizada a aproximadamente 0.6 m de profundidad.

Paso2. Modelos extremos. Para calcular los modelos extremos tomamos un valor de $\beta = 0.001$ e invertimos los datos, primeramente forzando al modelo a concentrar su momento en $z_0 = 0$. En la Figura 67b se observa que aunque pidamos al modelo que desplace la roca hacia la superficie este casi no cambia lo que significa que así como en el caso de los datos sintéticos del capítulo anterior la parte más somera se encuentra bien constreñida. Para el modelo extremo inferior elegimos $z_0 = 1 \text{ m}$. El resultado de la inversión se muestra en la Figura 67c donde podemos apreciar que en este caso el centro del cuerpo se desplazó hasta la profundidad forzada. Las respuestas de estos tres modelos se muestran en la Figura 68. Podemos observar que en los tres casos se tiene un ajuste apropiado a los datos de campo, la incertidumbre del instrumento se tomó como $\sigma = 0.0001$. La respuesta del modelo libre se muestra en rojo, para el modelo extremo superior la respuesta se presenta en negro y para el extremo inferior en verde.

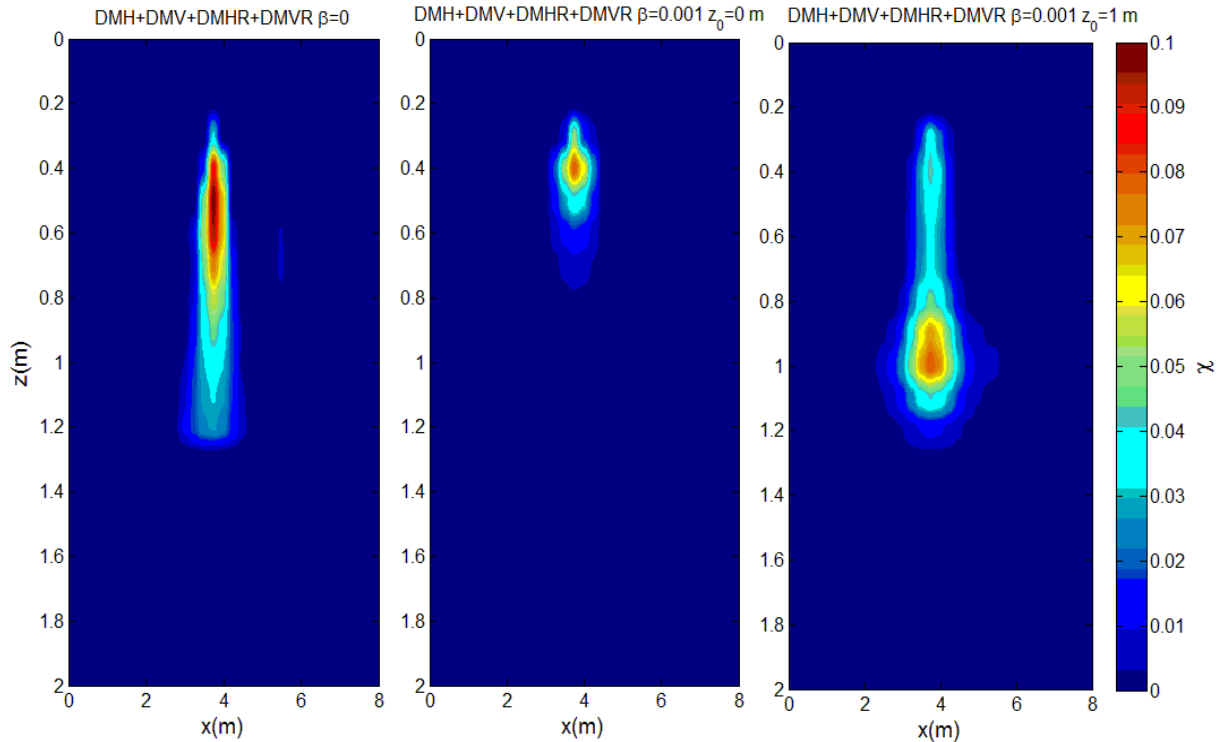


Figura 67. Comparación entre modelos para el ejemplo de campo de la magnetita obtenidos mediante la ecuación (25) con $\beta = 0.001$ para diferentes profundidades z_0 utilizando todas las configuraciones.

Paso 3. Modelo final. El modelo final consiste en un cuerpo centrado justo en el promedio de los centros máximos de los modelos extremos, es decir en $z_0 = 0.7$ m este modelo puede observarse en la Figura 69. Los ajustes correspondientes se muestran en la Figura 70. De este resultado podemos observar que el modelo encontrado tiene una susceptibilidad magnética mayor que la muestra por lo que consideramos las siguientes razones para explicar esta diferencia:

1. El equipo Scintrex K-2 tiene un error instrumental con un factor de 10.
2. La muestra se encuentra bastante oxidada en su exterior, el susceptibilímetro utilizado solo penetra algunos milímetros a diferencia del equipo *EM-38 MK2*, debido a eso este último puede obtener un valor promediando también el centro de la roca.

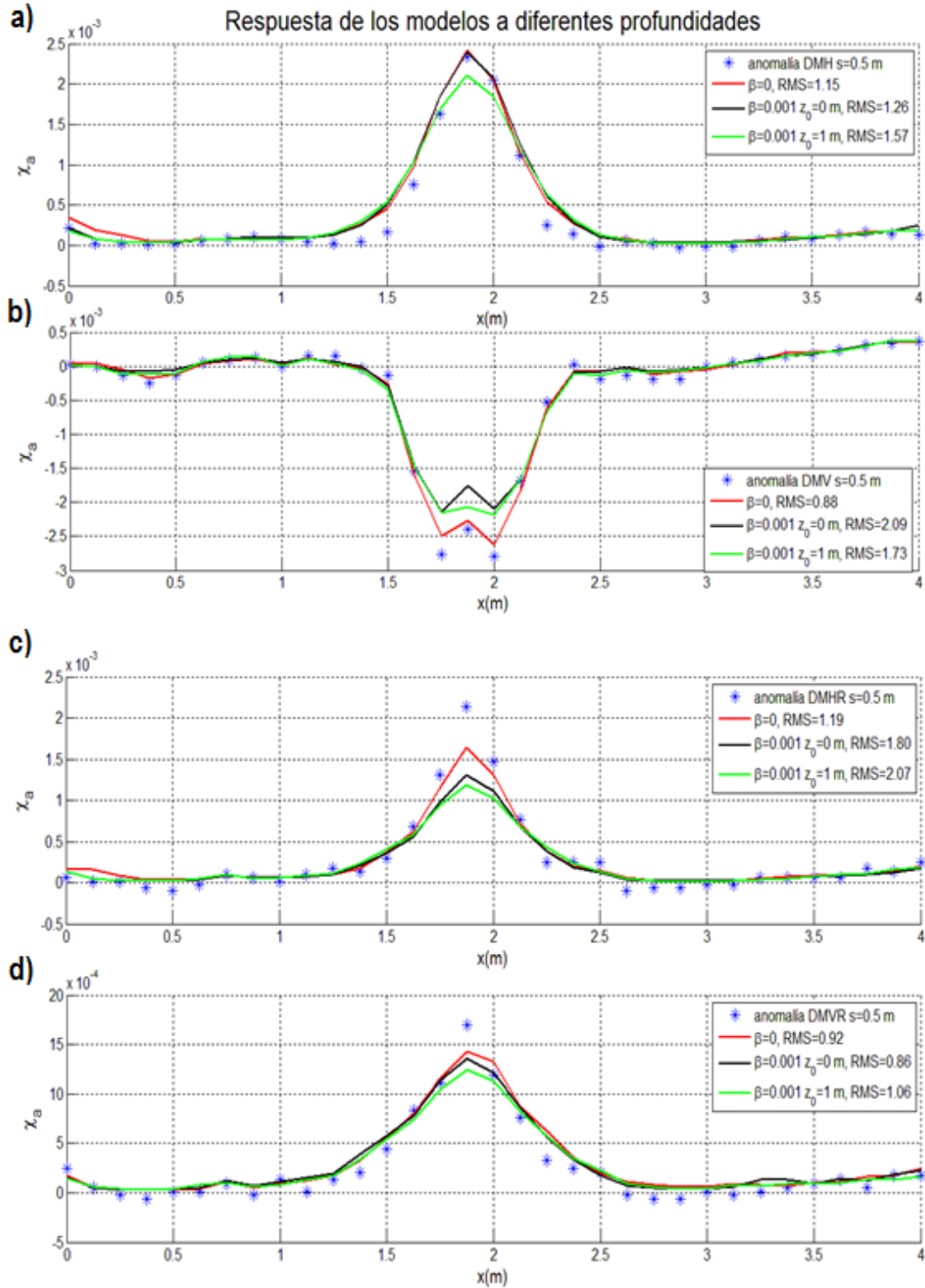


Figura 68. Respuesta de los tres modelos de la Figura 67, la línea continua roja representa la respuesta para $\beta = 0$, en negro para $\beta = 0.001, z_0 = 0 m$ y en verde cuando $\beta = 0.001, z_0 = 1 m$ para todas las configuraciones siguientes: a) DMH $s = 0.5 m$, b) DMV $s = 0.5 m$, c) DMHR $s = 0.5 m$ y d) DMVR $s = 0.5 m$.

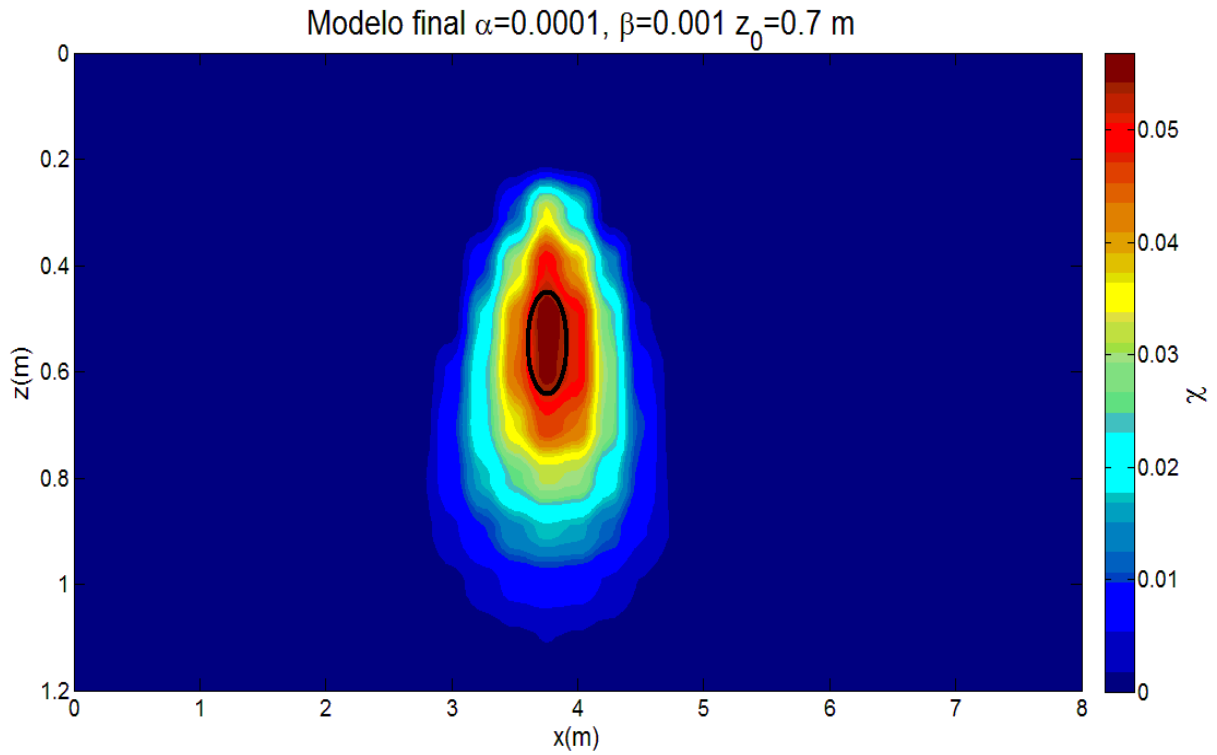


Figura 69. Mejor modelo obtenido para el ejemplo de campo de la magnetita mediante inversión conjunta correspondiente a valores de $\alpha = 0.0001$, $\beta = 0.001$ con $z_0 = 0.7$ m.

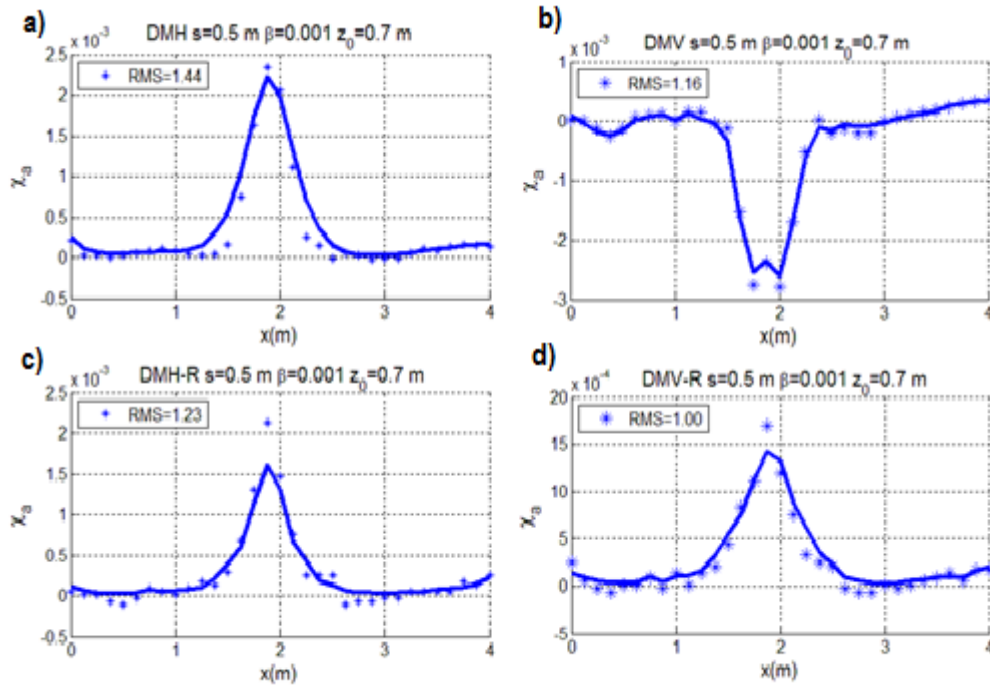


Figura 70. Respuesta del mejor modelo de la figura 69 (línea continua) comparada con los datos de campo (asteriscos) para cada una de las configuraciones utilizadas.

Al conocer el rango de profundidades en el cual está localizada la muestra pudimos realizar además una inversión en planta, es decir, utilizamos el valor de z_0 para calcular las matrices de sensibilidad integrando en un intervalo $z = [0.4, 0.7]$. El modelo obtenido se muestra en la Figura 71 comparado con el contorno aproximado de la muestra de roca. En conjunto, las Figuras 69 y 71 resumen, la primera en sección y la segunda en planta, lo que se puede estimar de la magnetita enterrada. Como era de esperarse, la imagen en planta reproduce mejor las dimensiones reales que la imagen en sección, dado que la sensibilidad de las mediciones superficiales necesariamente se deteriora con la profundidad.

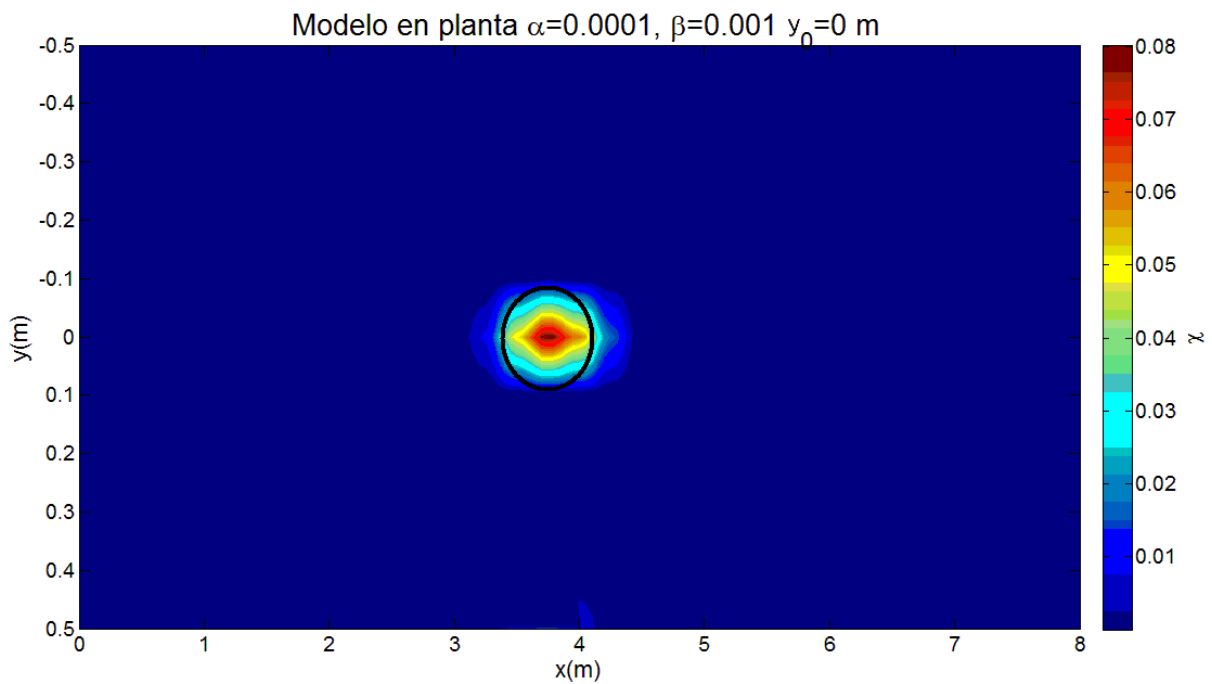


Figura 71. Modelo obtenido mediante inversión en planta usando todas las configuraciones. Para integrar a profundidad se eligió un intervalo de valores a partir de la inversión de la Figura 69.

5.5. Conclusiones

Los algoritmos desarrollados y probados en los capítulos anteriores con datos sintéticos se aplicaron a datos de campo con resultados mixtos. En la primera aplicación se esperaba encontrar correlación entre la distribución de SM y la presencia de rocas utilizadas para delimitar hogueras en tiempos prehistóricos en Baja California.

Los resultados no mostraron la correlación esperada, no por deficiencias del algoritmo que ya había sido probado con anterioridad, sino porque o no hubo hogueras en el sitio, o si las hubo, no modificaron la SM de las rocas. Esto motivó la realización del experimento controlado con la magnetita enterrada y la ampliación del objetivo primero de la tesis. En este experimento se logró no sólo detectar la magnetita, sino además delimitar su geometría a profundidad utilizando mediciones con separaciones múltiples y con arreglos modificados de dipolos.

Capítulo 6. Conclusiones

El objetivo específico de esta tesis consistió en mejorar las imágenes del subsuelo mediante inversión de datos de SM en comparación con las imágenes obtenidas directamente a partir de las mediciones y que se representan como pseudo-secciones de susceptibilidad aparente en función de la separación entre dipolos s .

El problema directo consistió en simular matemáticamente las mediciones de SM que se realizan en el campo. Esto es, simular mediciones que se realizan en medios heterogéneos utilizando equipos que operan con dos bobinas, una como fuente de campo magnético y otra como receptora, a través una convolución entre las funciones de sensibilidad y la distribución de SM

Como se vio en el capítulo 2, objetos simples y compactos pueden producir anomalías superficiales complicadas y dispersas, difíciles de interpretar cualitativamente en lo relativo a la localización horizontal de los objetos. Esto sucede particularmente con los arreglos tradicionales de DMV y DMH y en menor medida con los arreglos rotados DMV-R y DMH-R.

Para representar matemáticamente la distribución de SM supusimos que la propiedad puede variar arbitrariamente de un punto a otro según funciones Hann. El problema inverso se planteó en términos de las amplitudes de estas funciones, lográndose imágenes suaves de los objetos sin tener que incrementar el número de celdas de la rejilla. La no unicidad se abordó explorando el espacio de soluciones mediante la minimización del momento de los modelos con respecto a diferentes profundidades. Pudimos observar que si los datos permiten modelos válidos centrados a muy diferentes profundidades entonces la interpretación no es confiable, mientras que si no se dispersan mucho la interpretación es confiable.

Las pruebas realizadas con datos sintéticos señalan la viabilidad de realizar tomografías magnéticas con equipos existentes como el *Geonics EM38 MK2*. Si se dispone de datos de una sola separación entre dipolos se requiere, además de las restricciones de suavidad, minimizar el momento de la distribución con respecto a una

profundidad razonable. En caso de disponer de datos de separaciones múltiples esta última restricción no es necesaria, aunque puede mejorar sustancialmente la imagen obtenida. Lo mismo sucede con la incorporación de los dipolos rotados, las imágenes mejoran sobre todo en relación con la estimación de la profundidad. Por otro lado, las pruebas también muestran mejoras en las imágenes con la estrategia de utilizar funciones continuas en comparación con el método tradicional de los prismas que suponen una distribución continua dentro de la celda.

En el capítulo 3 se ilustró con un ejemplo muy simple la estrategia para manejar la no unicidad del problema inverso. En el capítulo 4 se extendió la aplicación de la estrategia a ejemplos más complejos, con el resultado de que también permite manejar imágenes ubicadas a diferentes profundidades. Primero se infirió un modelo libre, en el sentido que no está sesgado hacia una profundidad en particular. Después se infirieron modelos extremos sesgados hacia arriba y hacia abajo, para acotar las profundidades de todos los modelos posibles que ajustan a los datos. Esto resolvió el problema de la no unicidad con respecto a la profundidad. Como modelo final se propuso un modelo centrado en la profundidad media entre los modelos extremos.

Los algoritmos desarrollados y probados en los capítulos 3 y 4 con datos sintéticos se aplicaron a datos de campo con resultados mixtos. En la primera aplicación se esperaba encontrar correlación entre la distribución de SM y la presencia de rocas utilizadas para delimitar hogueras en tiempos prehistóricos en Baja California. Los resultados no mostraron la correlación esperada, no por deficiencias del algoritmo que ya había sido probado con anterioridad, sino porque o no hubo hogueras en el sitio, o si las hubo, no modificaron la SM de las rocas. Esto motivó la realización del experimento controlado con la magnetita enterrada y la ampliación del objetivo primero de la tesis. En este experimento se logró no sólo detectar la magnetita, sino además delimitar su geometría a profundidad utilizando mediciones con separaciones múltiples y con arreglos modificados de dipolos.

Lista de referencias

- Benech, C., and Marmet, E. (1999). Optimum Depth of Investigation and Conductivity Response Rejection of the Different Electromagnetic Devices Measuring Apparent Magnetic Susceptibility. *Archaeological Prospecting*, 6, 31-45.
- Constable, S. C., Parker, R. L., and Constable, C. G. (1987). Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, 52(3), 289-300.
- Dalan A. Rinita (2008). Magnetic Susceptibility In: Wiley Online Library (Comp). *A review of the role of magnetic susceptibility in archaeogeophysical studies in the USA: recent developments and prospects*. (pp.161-203).
- Dearing, J., A.1994 Environmental Magnetic Susceptibility Using the Bartington MS2 System. Chi, Kenilworth, Great Britain. British Library Cataloguing in Publication Data.
- Dearing, J. A., K. L. Hay, S. M. J. Baban, A. S. Hudleston, E. M. H. Wellington, and P. J. Loveland 1996 Magnetic Susceptibility of Soil: An Evaluation of Conflicting Theories Using a National Data Set. *Geophysical Journal International*, 127:728–734.
- Esparza, F. J., Méndez-Delgado, S., and Gómez-Treviño, E. (2014). Theoretical approach for the depth of penetration of in situ magnetic susceptibility measurements. *Near Surface Geophysics*, 1(1), 1-6.
- Farwig, V.J., Doerr, S.H., Blake, W. H. and Shakesby, R. A. (2004). The effects of heating on mineral magnetic enhancement of soils: A case study using Australian soils. *Geophysical Research Abstracts*, Vol. 6, 04912
- Guillen, A. and Menichetti, V. (1984). Gravity and magnetic inversion with minimization of a specific functional. *Geophysics*, 49(8), 1354-1360.
- Grant, F.S. and West, G.F (1965). *Interpretations Theory in Applied Geophysics*. McGraw-Hill, New York N.Y. 586pp.
- Keller, G. V., and Frischknecht, F., C.(1966). Electrical methods in geophysical prospecting: Pergamon Press, Oxford.
- McNeill, J., D.(1980). Electromagnetic terrain conductivity measurements at low induction numbers: Technical Note TN-6, Geonics Ltd., Mississauga, Ontario, Canada.
- McNeill, J. D., (1986) Geonics EM38 Ground Conductivity Meter: Operating Instructions and Survey Interpretation Techniques. Technical Note TN-21. Geonics Ltd., Mississauga, Ontario, Canada.

- McNeill, J., D.(2012). Application of Geophysical Surveys Measuring Soil Magnetic Susceptibility to Locate the Site of the Eighteenth-Century Parish Church of Saint-Charles-des-Mines at Grand Pré National Historic Site. Technical Note TN-34, Geonics Ltd., Mississauga, Ontario, Canada.
- McNeill, J. D. (2013). Archaeological Mapping Using the Geonics EM38B to Map Terrain Magnetic Susceptibility (With Selected Case Histories): Technical Note TN-35, Geonics Ltd., Mississauga, Ontario, Canada.
- Méndez Delgado Sóstenes (Diciembre 1992) “Caracterización de la zona de influencia de mediciones de susceptibilidad magnética” Tesis de maestría, Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada. 163pp.
- Pérez-Flores, M. A., Antonio-Carpio, R. G., Gómez-Treviño, E., Ferguson, I., and Méndez-Delgado, S. (2012). Imaging of 3D electromagnetic data at low-induction numbers. *Geophysics*, 77(4), WB47-WB57.
- Reitz, J.R, Milford, F.J. and Christy, R.W. (1979). *Foundations of Electromagnetic Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA.
- Roman, S. A., Johnson, W. C. and Geiss, C. (2013). Grass fires: an unlikely process to explain the magnetic properties of prairie soils. *Geophysical Journal International*, doi: 10.1093/gji/ggt349.
- Simpson, D., Van Meirvenne, M., Lück, E., Rühlmann, J., Saey, T. and Bourgeois, J., (2010) Sensitivity of multi-coil frequency domain electromagnetic induction sensors to map soil magnetic susceptibility. *European Journal of Soil Science*, 61, 469-478.
- Tabbagh, A. (1986) Applications and Advantages of the Slingram Electromagnetic Method for Archaeological Prospecting. *Geophysics*, 51(3), 576-584.

Apéndice A. Potencial escalar magnético

Considérese un cuerpo magnetizado y supóngase que dicho cuerpo ocupa un volumen v . Sea S la superficie cerrada que limita al volumen v , y sea $\mathbf{n}$ un vector unitario normal a S en cada punto, dirigido hacia el exterior del cuerpo. Sea $\mathbf{r}_0$ el vector de posición del cuerpo y sea $\mathbf{M}(\mathbf{r}_0)$ su magnetización. El cuerpo magnetizado va a crear en todos los puntos cercanos un campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ y un vector intensidad magnética $\mathbf{H}(\mathbf{r})$. De acuerdo a la ley de Ampere este campo vectorial es irrotacional, esto es

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = 0. \quad (\text{A1})$$

El potencial escalar magnético $\phi_m(\mathbf{r})$ está relacionado con $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ mediante la ecuación

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi_m(\mathbf{r}). \quad (\text{A2})$$

El potencial vectorial magnético en términos de la magnetización $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ se escribe como (e.g., Reitz y Milford, 1979)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dv. \quad (\text{A3})$$

Es entonces que el campo magnético creado por el cuerpo magnetizado se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} dv \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \nabla \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] dv. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Utilizando la identidad vectorial $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$, podemos reescribir

$$\begin{aligned} \nabla \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] &= \left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \nabla \right] \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) - (\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla) \left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) \\ &\quad + \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \left[\nabla \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right] - \left(\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} (\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)) \right). \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

Como ∇ no actúa sobre $\mathbf{r}_0$, podemos escribir

$$\left[\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot \nabla \right] \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) = 0 \quad (\text{A6})$$

$$\begin{aligned}
Y \quad \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \left[\nabla \cdot \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right] &= \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \left[\nabla \cdot \left(-\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) \right) \right] \\
&= -\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) = 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{A7}
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) = 0. \tag{A8}$$

Sustituyendo las anteriores ecuaciones (A6, A7 y A8) en la ecuación (A5), se llega a que:

$$\nabla \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right] = -(\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla) \left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) + 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{A9}$$

Por otro lado si hacemos uso de la identidad vectorial $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\nabla \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \cdot \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) \right] &= \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \times \left[\nabla \times \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) \right] + \left(\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \right) \times (\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0)) \\
&+ (\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla) \left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) + \left[\left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) \cdot \nabla \right] \mathbf{M}(\mathbf{r}_0). \tag{A10}
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) = \nabla \times \left(-\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \right) \right) = 0, \tag{A11}$$

$$\nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) = 0. \tag{A12}$$

Utilizando la ecuación (A6), la ecuación (A10) toma la forma

$$\nabla \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) \right] = (\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \cdot \nabla) \left(\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right). \tag{A13}$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación (A9), se llega a la siguiente expresión

$$\nabla \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \times (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right] = -\nabla \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) \right] + 4\pi \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \tag{A14}$$

Ahora, sustituyendo la ecuación (A14) en la ecuación (A4), se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \mu_0 \left[\left(-\frac{1}{4\pi} \int_v \nabla \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \cdot \left(\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} \right) \right] dv \right) + \int_v \mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv \right] \\
&= \mu_0 \left(-\nabla \left[\frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^3} dv \right] + \mathbf{M}(\mathbf{r}) \right). \tag{A15}
\end{aligned}$$

Por otro lado, de acuerdo con la ecuación (A2) y con la definición del vector intensidad magnética, debe cumplirse que

$$-\nabla\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r})}{\mu_0} - \mathbf{M}(\mathbf{r}), \quad (\text{A16})$$

despejando la ecuación anterior para encontrar el valor del campo magnético inducido por el cuerpo

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0(-\nabla\phi_m(\mathbf{r}) + \mathbf{M}(\mathbf{r})). \quad (\text{A17})$$

Comparando las ecuaciones (A15) y (A17), encontramos que la expresión para el potencial escalar magnético está dada por

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} d\mathbf{r}_0 \quad (\text{A18})$$

Apéndice B. Peso del dipolo imagen en el semiespacio

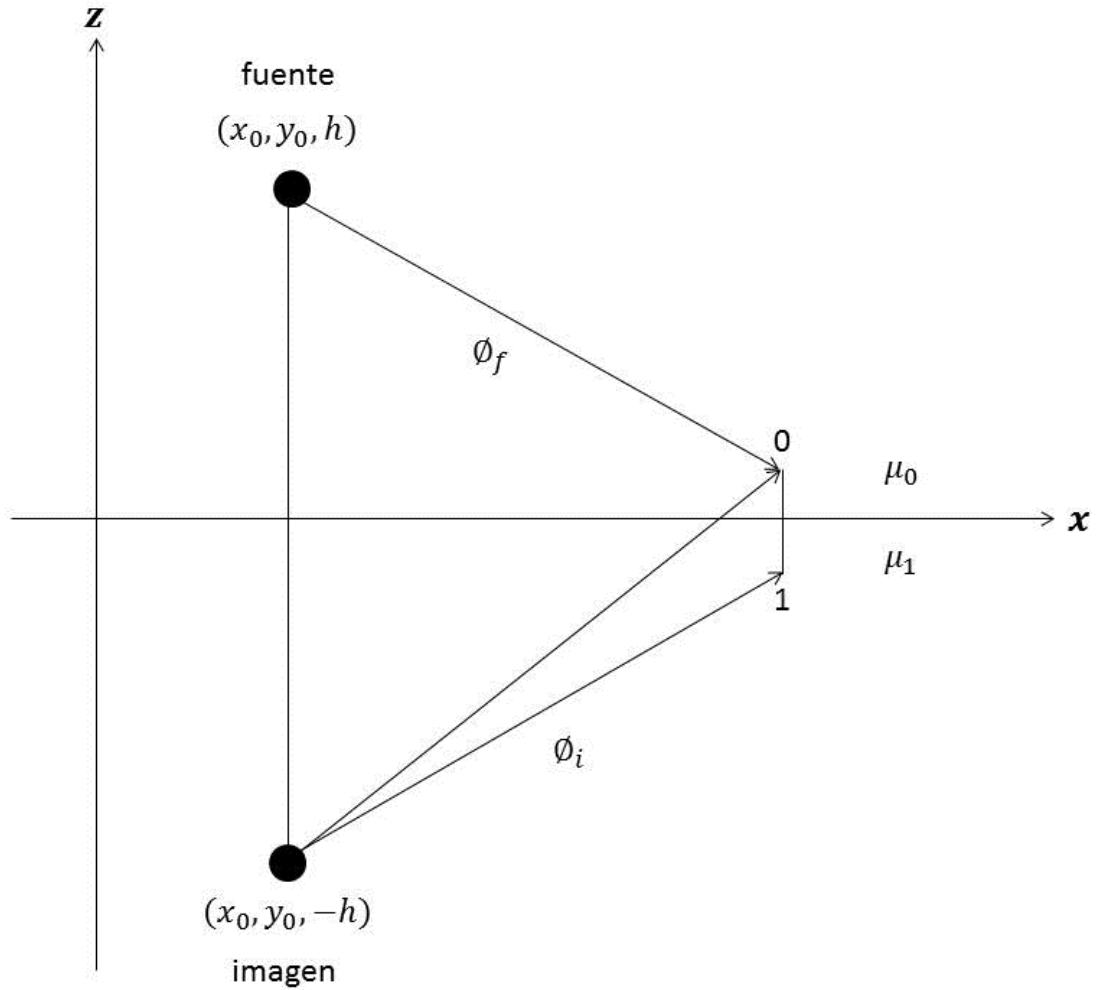


Figura B1. Efecto en dos puntos en las vecindades de la interfase. Aplicando condiciones de continuidad se pueden calcular los pesos del término imagen.

Considérese la figura B1, el potencial magnético escalar Φ_r en un punto arbitrario r por arriba de un semiespacio de permeabilidad magnética μ_1 puede ser expresado siguiendo el método de imágenes como la suma de dos términos (Keller y Frischknecht, 1960). El primero de ellos corresponde a la contribución de la fuente y el segundo a la imagen en el semiespacio, ambos efectos son diferentes. Esto es

$$\Phi_r = \Phi_f + \Phi_i. \quad (B1)$$

A partir de la ecuación (A18) el potencial en el punto 0 es:

$$\Phi_0 = \frac{m(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{4\pi} \left\{ \frac{1}{[\rho^2 + (z-h)^2]^{3/2}} + \frac{c'}{[\rho^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \right\}, \quad (\text{B2})$$

mientras que el potencial en el punto 1 es:

$$\Phi_1 = \frac{cm(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})}{4\pi} \frac{1}{[\rho^2 + (-z+h)^2]^{3/2}}, \quad (\text{B3})$$

donde $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ y c y c' son los pesos del dipolo imagen en el semiespacio y en el vacío, respectivamente. El término fuente tiene un peso igual a la unidad. Para calcular los pesos de la imagen tenderemos en cuenta las condiciones de frontera en los puntos 0 y 1. Esto es:

- a) Continuidad de las componentes tangenciales de $\mathbf{H}$ ($\mathbf{H}_{T0} = \mathbf{H}_{T1}$).
- b) Continuidad de las componentes normales de $\mathbf{B}$ ($\mathbf{B}_{N0} = \mathbf{B}_{N1}$).

La primera condición implica que

$$\Phi_0 = \Phi_1. \quad (\text{B4})$$

Justo en la interfase, es decir, en $z = 0$ se tiene que

$$1 + c' = c. \quad (\text{B5})$$

La condición b) junto con la relación $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ implica que

$$\mu_0 \left\{ \frac{-(z-h)}{[\rho^2 + (z-h)^2]^{3/2}} + \frac{-c'(z+h)}{[\rho^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \right\} = \mu_1 \left\{ \frac{c(-z+h)}{[\rho^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \right\}. \quad (\text{B6})$$

Evaluando en $z=0$, tenemos que

$$\mu_0 - \mu_0 c' = \mu_1 c. \quad (\text{B7})$$

Utilizando las ecuaciones (B5) y (B7) resolvemos para c y c' .

$$c = \frac{2\mu_0}{\mu_0 + \mu_1}; \quad c' = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1}. \quad (\text{B8})$$

De modo que el potencial magnético escalar en el punto 0 es:

$$\Phi_0 = \frac{m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{4\pi} \left\{ \frac{1}{[\rho^2 + (z-h)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \frac{1}{[\rho^2 + (z+h)^2]^{3/2}} \right\}. \quad (\text{B9})$$

Apéndice C. Intensidad de los campos magnéticos primario y secundario

Partiendo de la ecuación (B9) del apéndice anterior, podemos escribir las expresiones para los DMV, DMH, DMV-R y DMH-R, esto es, considerando solo la dirección a la cual se encuentra orientado el momento magnético de los dipolos, estas expresiones están dadas como:

$$\text{DMH} \quad \phi_y = \frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{(y-y_0)}{[\rho^2+(z-h)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\mu_0+\mu_1} \frac{(y-y_0)}{[\rho^2+(z+h)^2]^{3/2}} \right\},$$

$$\text{DMV} \quad \phi_z = \frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{(z-h)}{[\rho^2+(z-h)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\mu_0+\mu_1} \frac{-(z+h)}{[\rho^2+(z+h)^2]^{3/2}} \right\},$$

$$\text{DMH-R} \quad \phi_{yr} = \frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{(y-y_0)}{[\rho^2+(z-h-s)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\mu_0+\mu_1} \frac{(y-y_0)}{[\rho^2+(z+h+s)^2]^{3/2}} \right\}$$

$$\text{y DMV-R} \quad \phi_{xr} = \frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{(x-x_0)}{[\rho^2+(z-h-s)^2]^{3/2}} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\mu_0+\mu_1} \frac{(x-x_0)}{[\rho^2+(z+h+s)^2]^{3/2}} \right\}.$$

En las dos configuraciones de dipolos rotados, el subíndice r se refiere a rotados.

Sabiendo que el campo $\mathbf{H}$ puede ser representado como una función del gradiente del potencial magnético escalar, es decir

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi. \quad (\text{C1})$$

Tenemos que:

$$\frac{\partial\phi_y}{\partial x_0} = \frac{\partial\phi_y}{\partial h} = 0; \quad \frac{\partial\phi_z}{\partial x_0} = \frac{\partial\phi_z}{\partial y_0} = 0.$$

Esto quiere decir que

$$H_y = -\frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{[\rho^2+(z-h)^2]^{3/2}} - \frac{3(y-y_0)}{[\rho^2+(z-h)^2]^{5/2}} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\mu_0+\mu_1} \left[\frac{1}{[\rho^2+(z+h)^2]^{3/2}} - \frac{3(y-y_0)}{[\rho^2+(z+h)^2]^{5/2}} \right] \right\} \quad (\text{C2})$$

y

$$H_z = -\frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{[\rho^2+(z-h)^2]^{3/2}} - \frac{3(z-h)}{[\rho^2+(z-h)^2]^{5/2}} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\mu_0+\mu_1} \left[\frac{1}{[\rho^2+(z+h)^2]^{3/2}} - \frac{3(z-h)}{[\rho^2+(z+h)^2]^{5/2}} \right] \right\}. \quad (\text{C3})$$

Al evaluar en $y = y_0$ y $z = h = 0$ obtenemos

$$H_y = -\frac{m}{4\pi} \frac{1}{(x-x_0)^3} - \frac{m}{4\pi} \left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \right) \frac{1}{(x-x_0)^3} \quad (C4)$$

y

$$H_z = -\frac{m}{4\pi} \frac{1}{(x-x_0)^3} - \frac{m}{4\pi} \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0 + \mu_1} \right) \frac{1}{(x-x_0)^3} . \quad (C5)$$

De donde podemos observar que los campos primarios H_{py} y H_{pz} son:

$$H_{py} = -\frac{m}{4\pi} \frac{1}{(x-x_0)^3} \quad (C6)$$

y

$$H_{pz} = -\frac{m}{4\pi} \frac{1}{(x-x_0)^3} . \quad (C7)$$

Por lo tanto, las respuestas del semiespacio para DMH y DMV respectivamente son:

$$\frac{H_y}{H_{py}} = 1 + \left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \right) \quad (C8)$$

y

$$\frac{H_z}{H_{pz}} = 1 + \left(\frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0 + \mu_1} \right). \quad (C9)$$

En el caso de las configuraciones rotadas:

$$\frac{\partial \phi_{yr}}{\partial x_0} = \frac{\partial \phi_{yr}}{\partial h} = 0; \quad \frac{\partial \phi_{xr}}{\partial y_0} = \frac{\partial \phi_{xr}}{\partial h} = 0 .$$

Es decir, solo sobreviven las componentes $\frac{\partial \phi_{yr}}{\partial y_0}$ y $\frac{\partial \phi_{xr}}{\partial x_0}$. Por lo tanto:

$$H_{yr} = -\frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{[\rho^2 + (z-z_s)^2]^{3/2}} - \frac{3(y-y_0)}{[\rho^2 + (z-z_s)^2]^{5/2}} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \left[\frac{1}{[\rho^2 + (z+z_s)^2]^{3/2}} - \frac{3(y-y_0)}{[\rho^2 + (z+z_s)^2]^{5/2}} \right] \right\} \quad (C10)$$

y

$$H_{xr} = -\frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{[\rho^2 + (z-z_s)^2]^{3/2}} - \frac{3(x-x_0)}{[\rho^2 + (z-z_s)^2]^{5/2}} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \left[\frac{1}{[\rho^2 + (z+z_s)^2]^{3/2}} - \frac{3(x-x_0)}{[\rho^2 + (z+z_s)^2]^{5/2}} \right] \right\}, \quad (C11)$$

donde $z_s = h + s$. Ahora, evaluando en $y = y_0$ y $x = x_0$ tenemos

$$H_{yr} = -\frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{(z-z_s)^3} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\mu_0+\mu_1} \frac{1}{(z+z_s)^3} \right\} \quad (C12)$$

y

$$H_{xr} = -\frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{(z-z_s)^3} + \frac{\mu_0-\mu_1}{\mu_0+\mu_1} \frac{1}{(z+z_s)^3} \right\}. \quad (C13)$$

Al dividir por sus respectivos campos primarios obtenemos las ecuaciones que relacionan los campos primarios y secundarios para ambas configuraciones tienen la forma:

$$\frac{H}{H_p} = 1 + \left(\frac{\mu_0-\mu_1}{\mu_0+\mu_1} \right) \left(\frac{z-z_s}{z+z_s} \right)^3. \quad (C14)$$

Apéndice D. Calculo de los factores geométricos para χ_a

El cálculo de las funciones f , para cada una de las configuraciones se desarrolla a continuación. Para el caso de DMH, evaluamos la expresión (C2) del apéndice anterior en $y = y_0$ y $z = h$. Se obtiene

$$H_y = -\frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{(x_r - x_s)^3} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \left[\frac{1}{[(x_r - x_s)^2 + (2h)^2]^{3/2}} \right] \right\}. \quad (D1)$$

Al dividir por el campo primario dado por la ecuación (C6), y normalizando con respecto a s tenemos:

$$\frac{H_y}{H_{py}} = 1 + \left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \right) \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2h}{s} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (D2)$$

Identificamos f como

$$f(h, s) = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2h}{s} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (D3)$$

En el caso de DMV, igualmente evaluamos la expresión para el campo total (C3) en $y = y_0$ y $z = h$, por lo que obtenemos

$$H_z = -\frac{m}{4\pi} \left\{ \frac{1}{(x_r - x_s)^3} + \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} \left[\frac{1}{[(x_r - x_s)^2 + (2h)^2]^{3/2}} - \frac{3(2h)^2}{[(x_r - x_s)^2 + (2h)^2]^{5/2}} \right] \right\}. \quad (D4)$$

Nuevamente, dividiendo entre el campo primario de la expresión (C7) y normalizando, identificamos que la función f para el caso de dipolos verticales es

$$f(h, s) = \left[\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2h}{s} \right)^2 \right]^{3/2}} - \frac{3 \left(\frac{2h}{s} \right)^2}{\left[1 + \left(\frac{2h}{s} \right)^2 \right]^{5/2}} \right]. \quad (D5)$$

La función f para el caso de DMH-R y DMV-R se puede identificar directamente de la ecuación (C14) y evaluando en $z = h$, pues para estas configuraciones h es distinta para ambas bobinas y diferente de cero, esta función se escribe como

$$f(h, s) = \left(\frac{s + 2h}{h} \right)^3. \quad (D6)$$

Apéndice E. Resultados de los sitios arqueológicos

Conchero MP3c

Similar al caso de DMVL se compara el mejor modelo obtenido para DMHL con separación de bobinas $s = 0.5 \text{ m}$ con la retícula de excavación de la figura 61. La superposición de ambas imágenes se muestra en la figura E1.

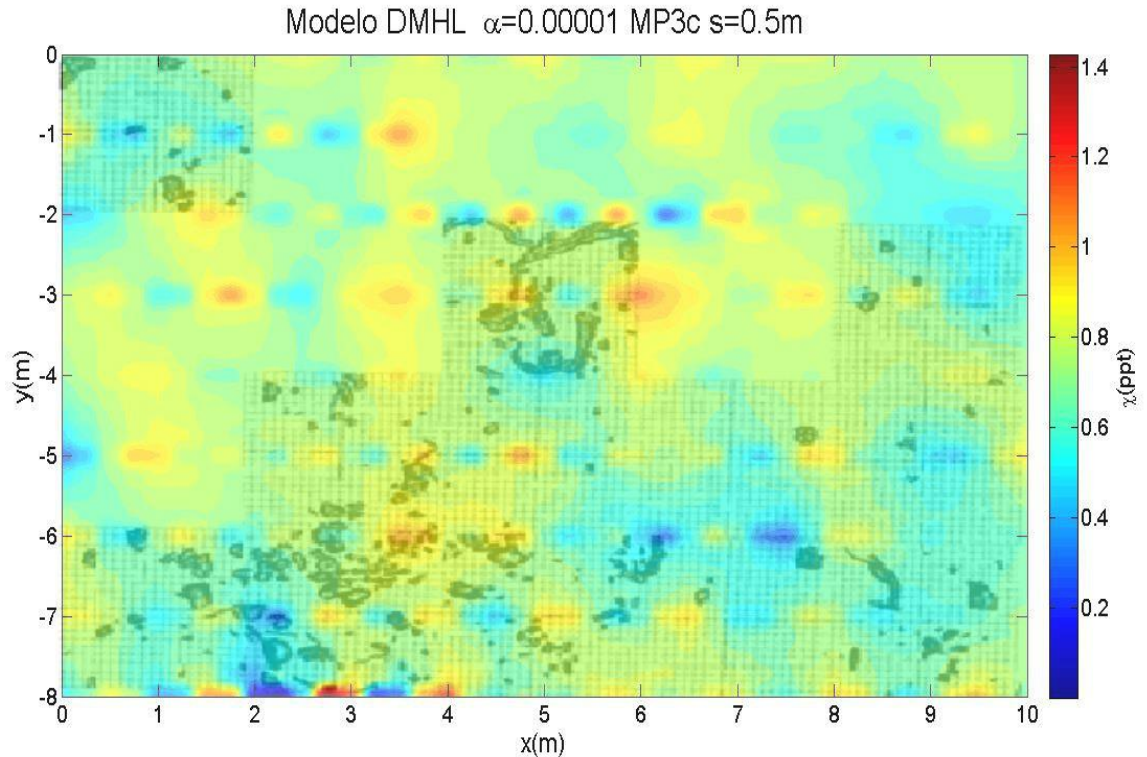


Figura E1. Superposición de la retícula de excavación de la figura 61 con el mejor modelo obtenido mediante inversión para DMHL $s = 0.5 \text{ m}$, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.00001$.

En este caso el modelo no se parece a la anomalía de la figura 62c, aun así no puede inferirse que los cuerpos encontrados se aproximen a nuestro modelo, la respuesta de este se muestra en la figura E2b cuyo error corresponde al $6.8 \times 10^{-3} \%$. Al no encontrar una semejanza entre el modelo y la anomalía comparamos los datos de campo para DMHL con el resultado de las excavaciones haciendo una superposición entre la anomalía magnética y la retícula del sitio MP3c (Figura E3). En dicha comparación no se reconoce que un máximo magnético (rojo) corresponda a alguno de los cuerpos encontrados durante la excavación.

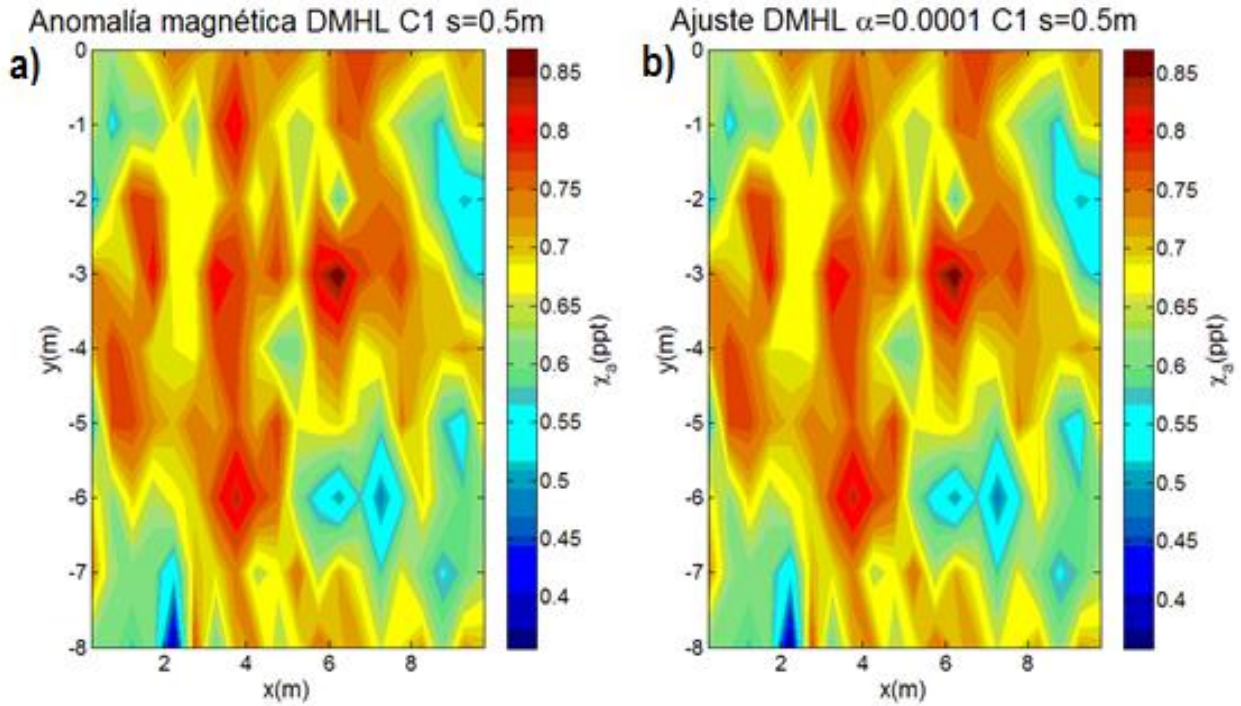


Figura E2. a) Anomalia magnética para DMHL con $s = 0.5 \text{ m}$, b) Ajuste del modelo de la figura E1, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.00001$. Su error es de $6.8 \times 10^{-3} \%$.

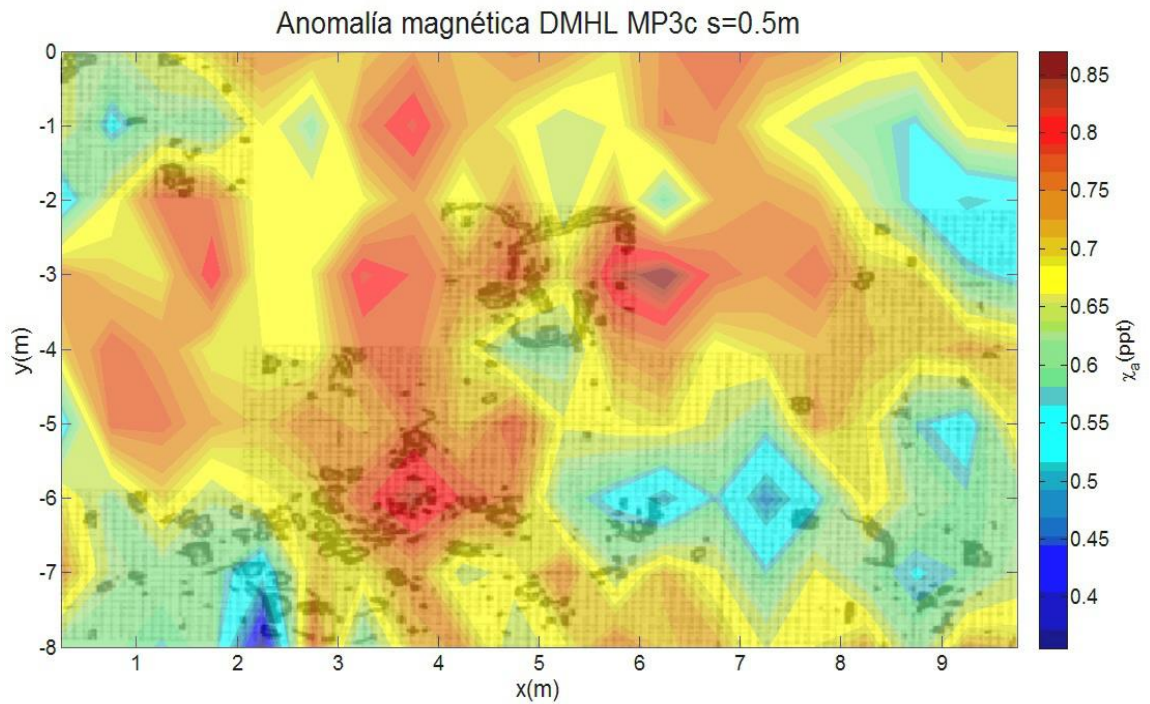


Figura E3. Superposición de la retícula de excavación de la figura 61 con la anomalía magnética para DMHL $s = 0.5 \text{ m}$.

En la figura E4 se muestran los resultados al invertir las mediciones realizadas en el conchero MP3c para DMVT con $s = 0.5m$. El mejor modelo obtenido corresponde a un valor de $\alpha = 0.0001$. Aquí nuevamente se realiza una superposición de la retícula de excavación con el modelo. El mapa de la anomalía magnética para DMVT se muestra en la figura E5a mientras que la respuesta en planta del mejor modelo con un error del $1.7 \times 10^{-3} \%$ se muestra en la figura E5b. Al igual que en el caso de DMVL el modelo invertido es muy similar a la anomalía magnética.

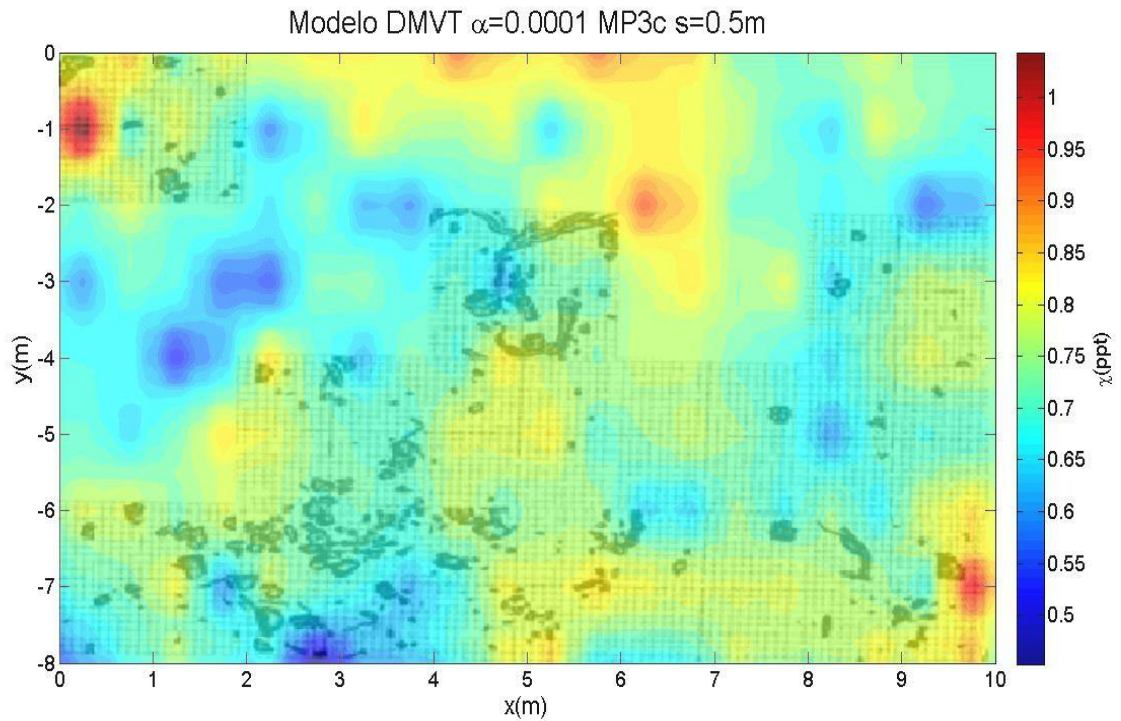


Figura E4. Superposición de la retícula de excavación de la figura 61 con el mejor modelo obtenido mediante inversión para DMVT $s = 0.5 m$, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$.

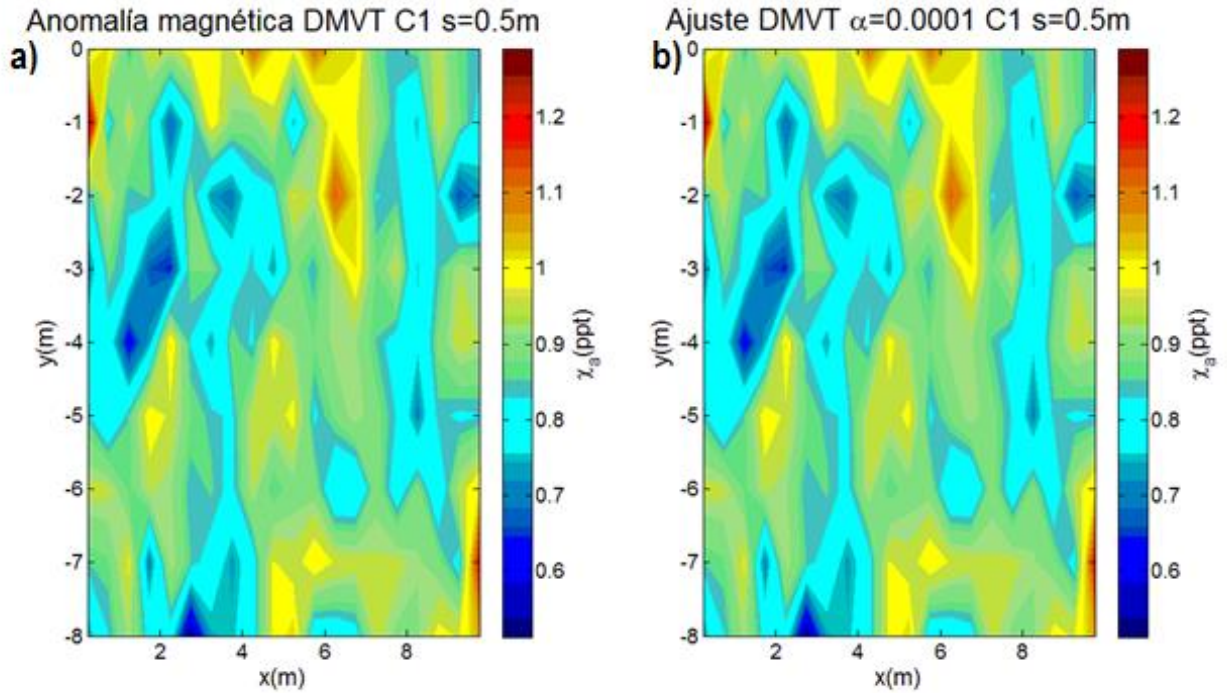


Figura E5. a) Anomalía magnética para DMVT con $s = 0.5\text{ m}$, b) Ajuste del modelo de la figura E4, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$. Su error es de $1.7 \times 10^{-3} \%$.

Para DMHT $s = 0.5\text{ m}$ la comparación entre los resultados de la excavación con el modelo obtenido se presenta en la figura E6. En este caso también se presenta una similitud entre el modelo y la anomalía magnética de la figura 62d. El error calculado del ajuste de la figura E7 es $4.2 \times 10^{-3} \%$.

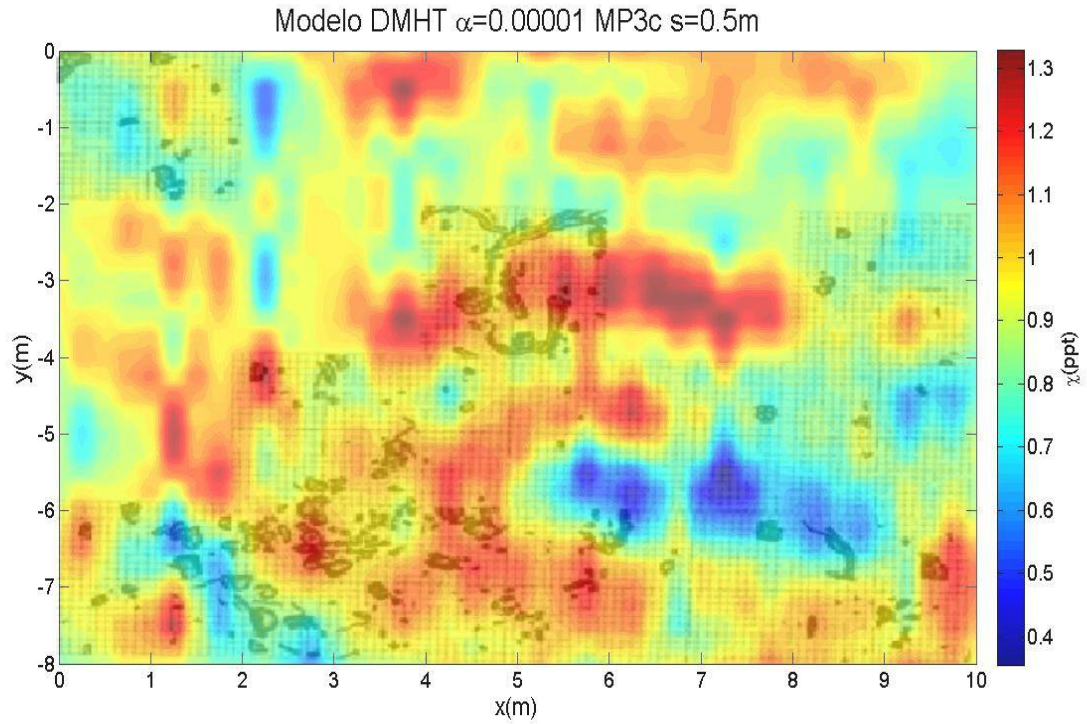


Figura E6. Superposición de la retícula de excavación de la figura 61 con el mejor modelo obtenido mediante inversión para DMHT $s = 0.5 \text{ m}$, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.00001$.

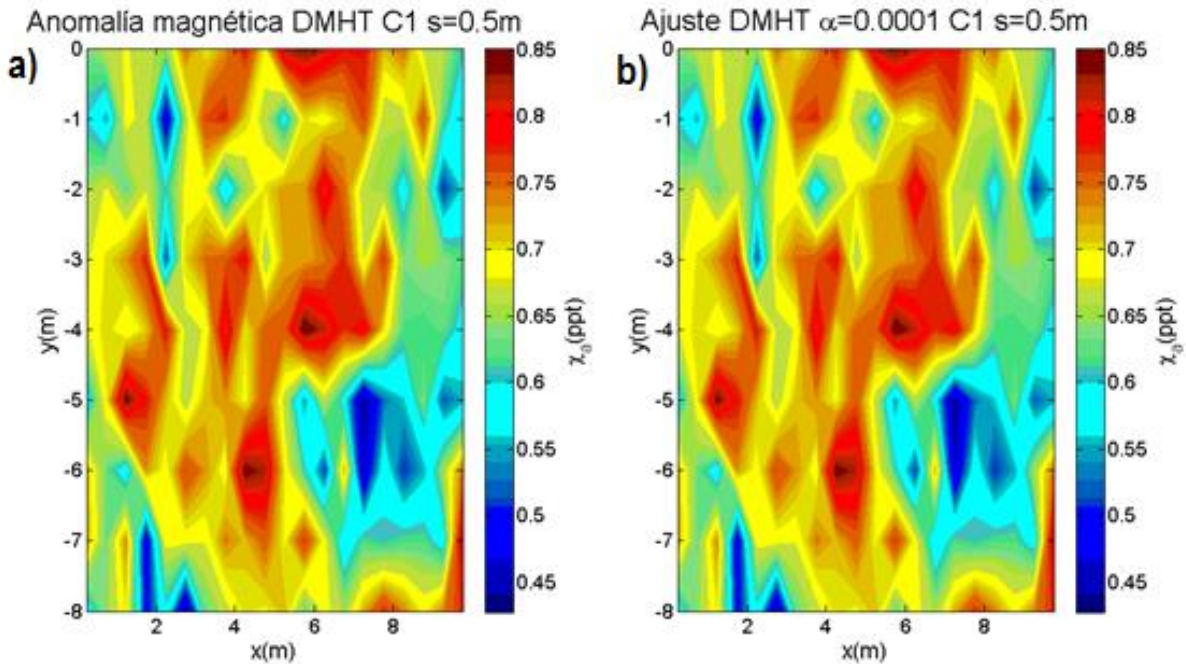


Figura E7. a) Anomalia magnética para DMHT con $s = 0.5 \text{ m}$, b) Ajuste del modelo de la figura E6, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.00001$. Su error es de $4.3 \times 10^{-3} \%$.

Además de las configuraciones anteriores se utilizaron DMVL y DMVT con $s = 1 \text{ m}$ dentro del conchero MP3c. El modelo correspondiente para la configuración DMVL se

muestra en la figura E8, nuevamente se presenta una similitud entre la anomalía de la figura E9a y el modelo calculado con un valor de $\alpha = 0.0001$. La respuesta del respectivo modelo se presenta en la figura E9b la cual tiene un error porcentual de 1.1×10^{-3} .

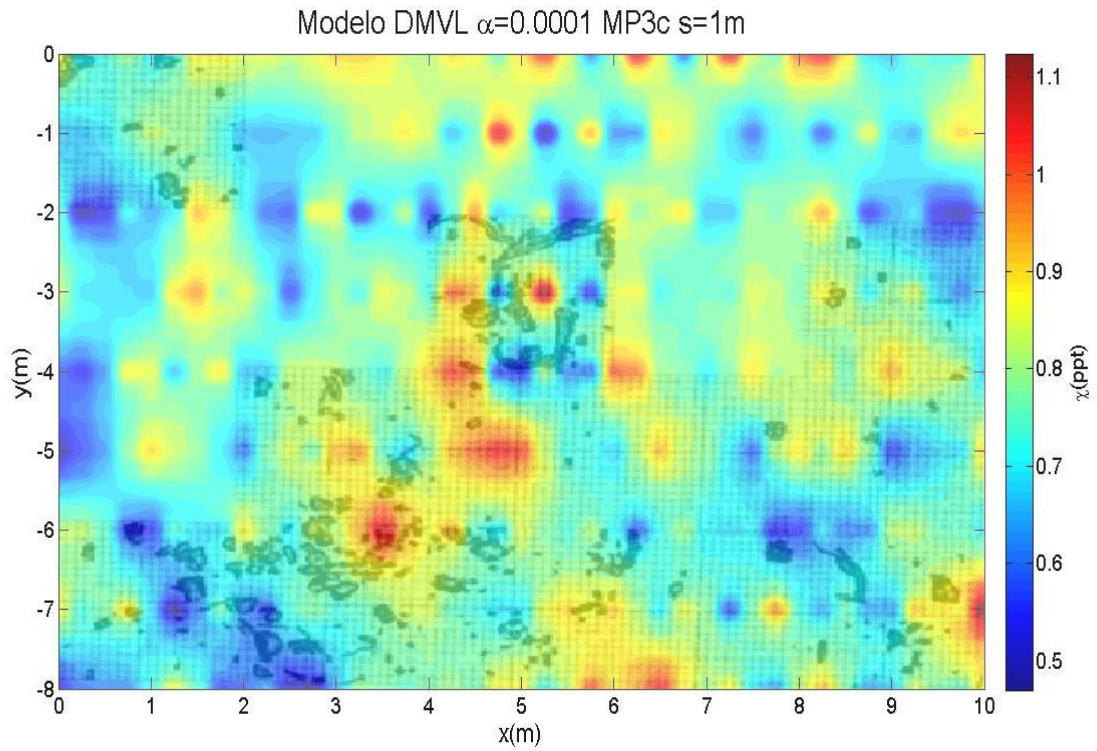


Figura E8. Superposición de la retícula de excavación de la figura 61 con el mejor modelo obtenido mediante inversión para DMVL $s = 1 \text{ m}$, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$.

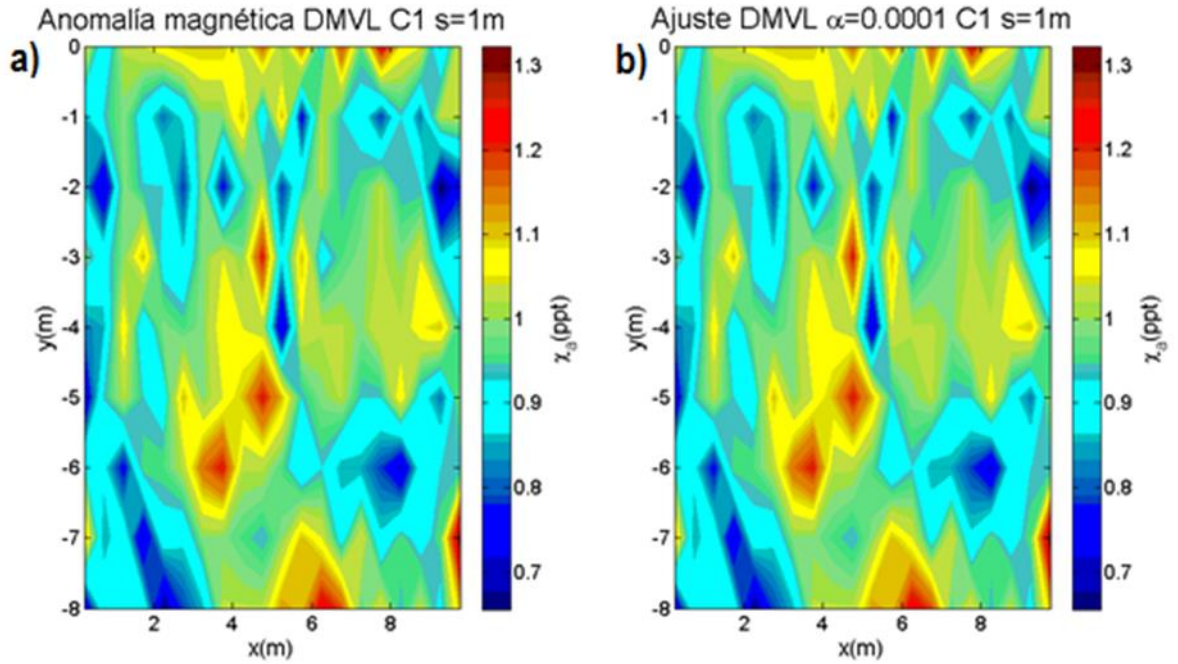


Figura E9. a) Anomalía magnética para DMVL con $s = 1\text{ m}$, b) Ajuste del modelo de la figura E8 correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$ cuyo error es de $1.1 \times 10^{-3} \%$.

En la figura E10 se muestra el modelo correspondiente a la configuración DMVT con $s = 1\text{ m}$.

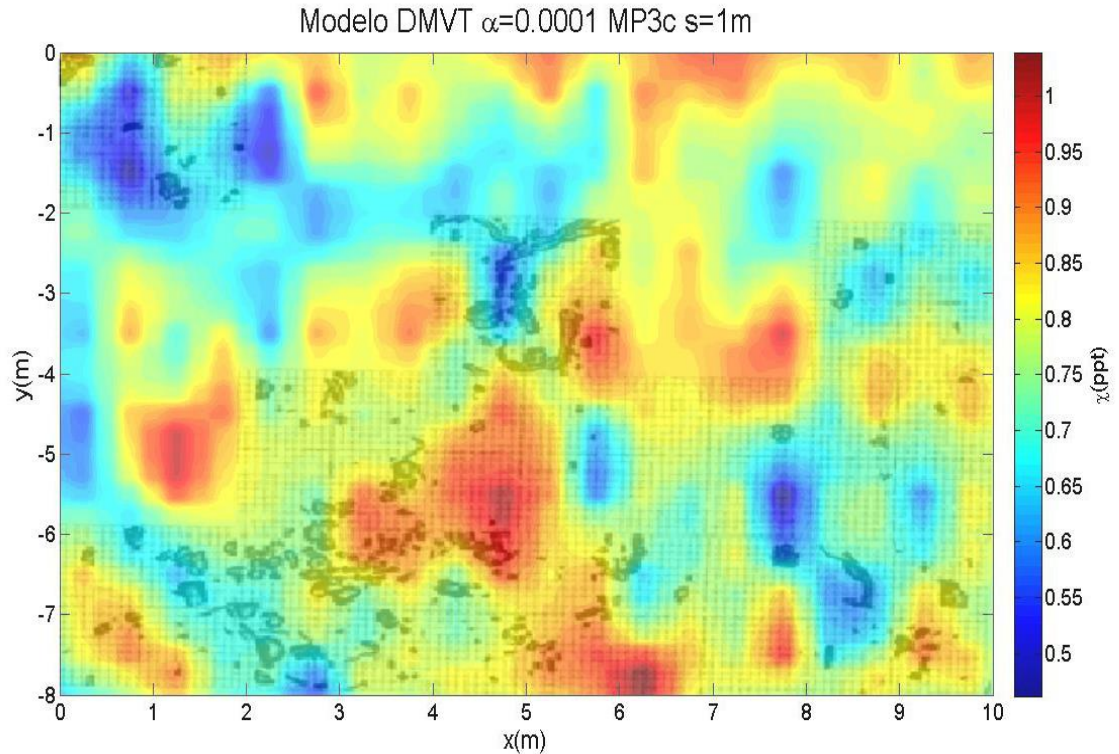


Figura E10. Superposición de la retícula de excavación de la figura 61 con el mejor modelo obtenido mediante inversión para DMVT $s = 1\text{ m}$, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$.

La figura E11 hace una comparación entre la anomalía magnética para este arreglo de dipolos (inciso a) y la respectiva respuesta del modelo (inciso b) de la figura E10. El error porcentual entre la respuesta del modelo y los datos de campo es de 4.6×10^{-3} .

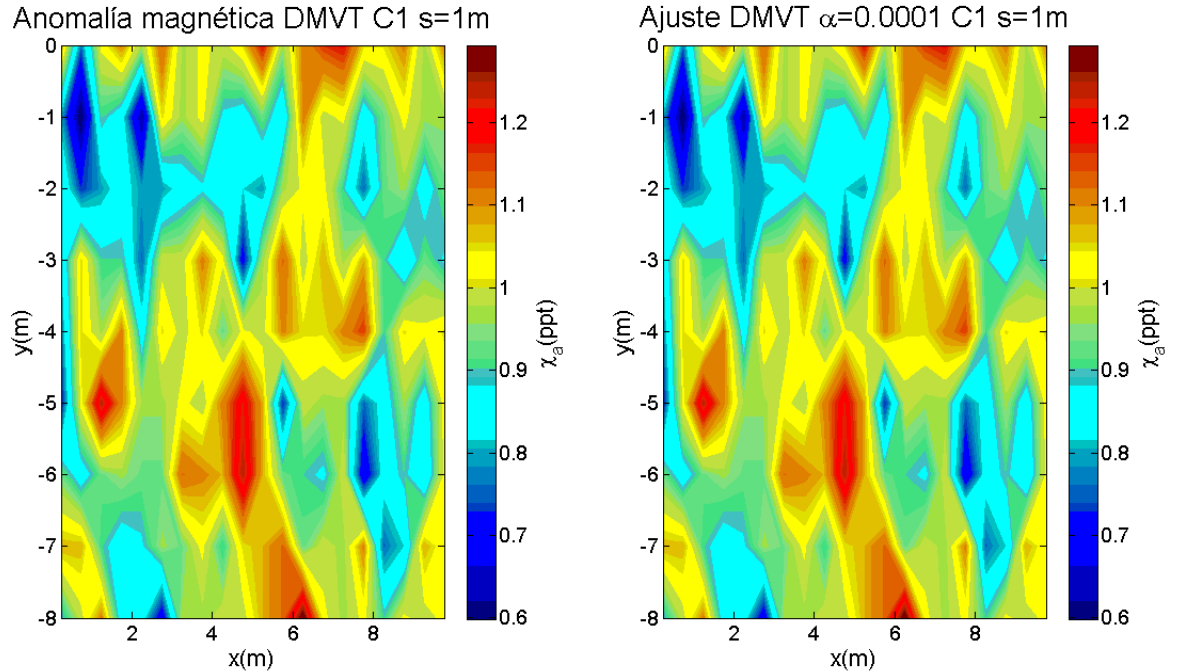


Figura E11. a) Anomalía magnética para DMVT con $s = 1 \text{ m}$, b) Ajuste del modelo de la figura E10, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$ cuyo error es de $4.6 \times 10^{-3} \%$.

Conchero MP3g

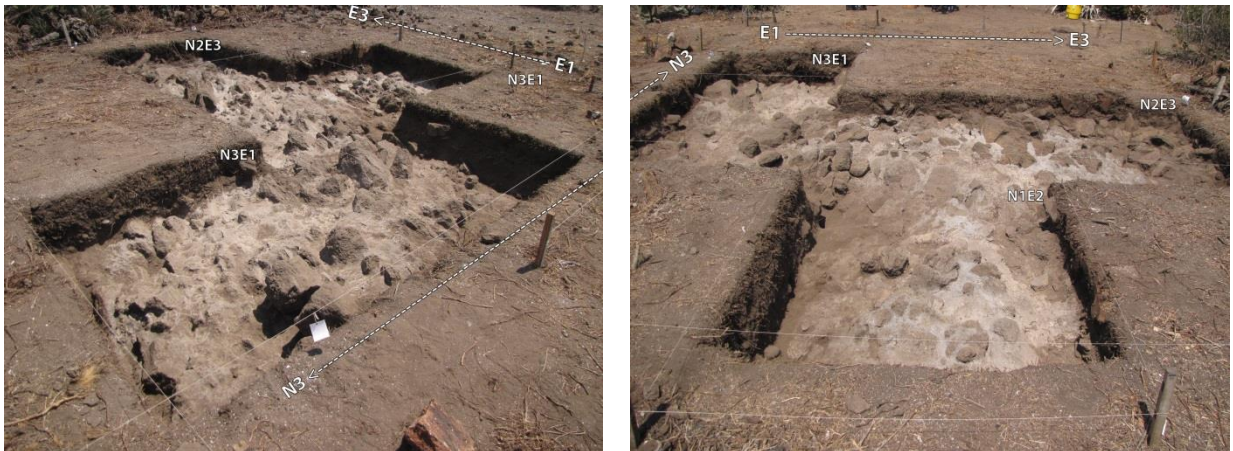


Figura E12. Imágenes del conchero MP3g después de ser excavado. El nivel de excavación es de 0.3 m .



Figura E13. Retícula de excavación, sitio MP3g. Los dibujos fueron realizados por los arqueólogos a cargo de las excavaciones. La imagen corresponde a 5 de los 12 cuadros. La profundidad de la excavación es de 0.3 m .

Los resultados después de invertir los datos de campo medidos con $DMVL$ $s = 0.5m$ se presentan en la figura E14, aquí se hace una superposición de la retícula de excavación correspondiente al sitio MP3g de la figura anterior con el modelo de inversión para poder hacer una comparación más precisa. Como en el caso del conchero MP3c no parece haber una concordancia entre el modelo y los resultados de la excavación, es más, se ha sugerido por parte de la arqueóloga a cargo del estudio que las rocas encontradas así como otros tipos de cuerpos (leños, conchas, etc.) dentro del sitio no tienen ninguna representación o contexto para considerar esos lugares como sitios habitados. Similarmente a los casos anteriores, excepto para los DMHL, las anomalías correspondientes a cada una de las configuraciones son muy similares a los modelos encontrados, puede compararse la figura E14 con la figura

E15a, la cual presenta la anomalía magnética para el arreglo DMVL $s = 0.5m$. En la figura E15b se muestra la respuesta del modelo invertido, con un error del $3.3 \times 10^{-3} \%$.

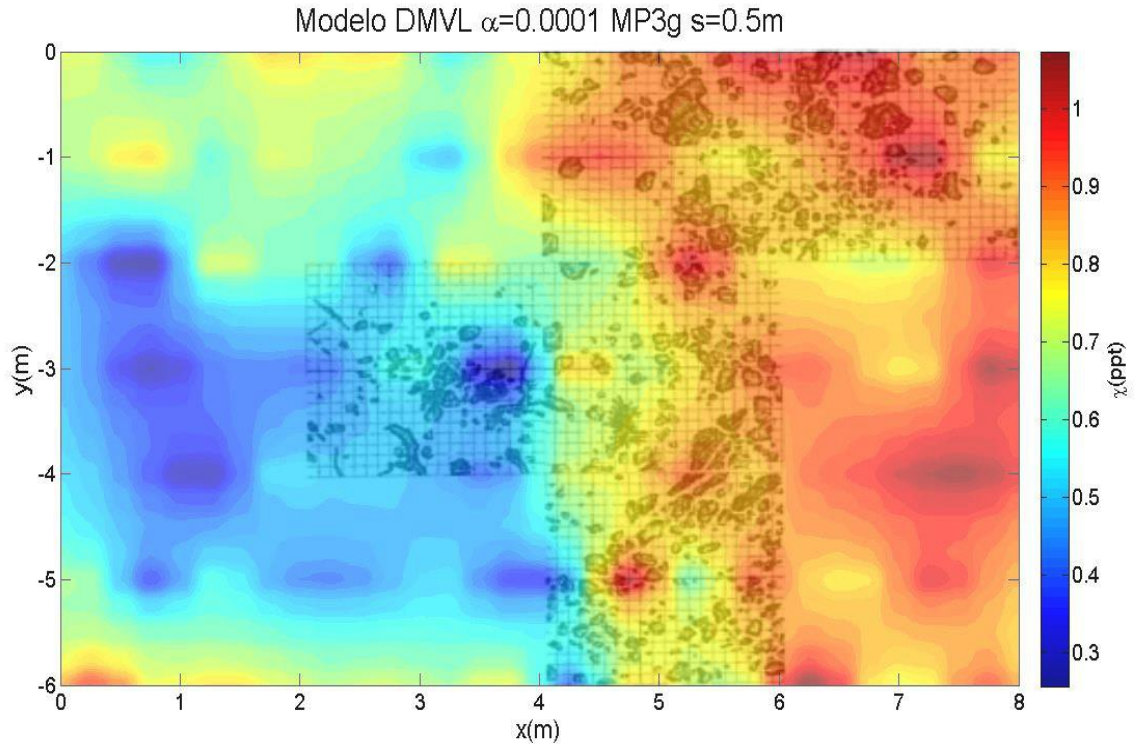


Figura E14. Superposición de la retícula de excavación de la figura E13 con el mejor modelo obtenido mediante inversión para DMVL $s = 0.5 m$ del sitio MP3g, el cual corresponde a un valor de $\alpha = 0.0001$.

El resultado de la inversión de datos de la configuración DMHL $s = 0.5 m$ del conchero MP3g se presenta en la figura E16, al igual que en el caso del conchero MP3c esta configuración parece mostrar diferencias entre el modelo y anomalía magnética correspondientes, contrario a todos los otros casos, aun así en la superposición de la imagen del modelo con la retícula de la figura E13 no se muestra ningún indicio que pudiera sugerir que los cuerpos encontrados correspondan al modelo propuesto. La respectiva anomalía y la respuesta del modelo se muestran en la figura E17a y E17b respectivamente. También se realizó una superposición de la anomalía magnética para DMHL con la retícula del sitio y se muestra en la figura E18.

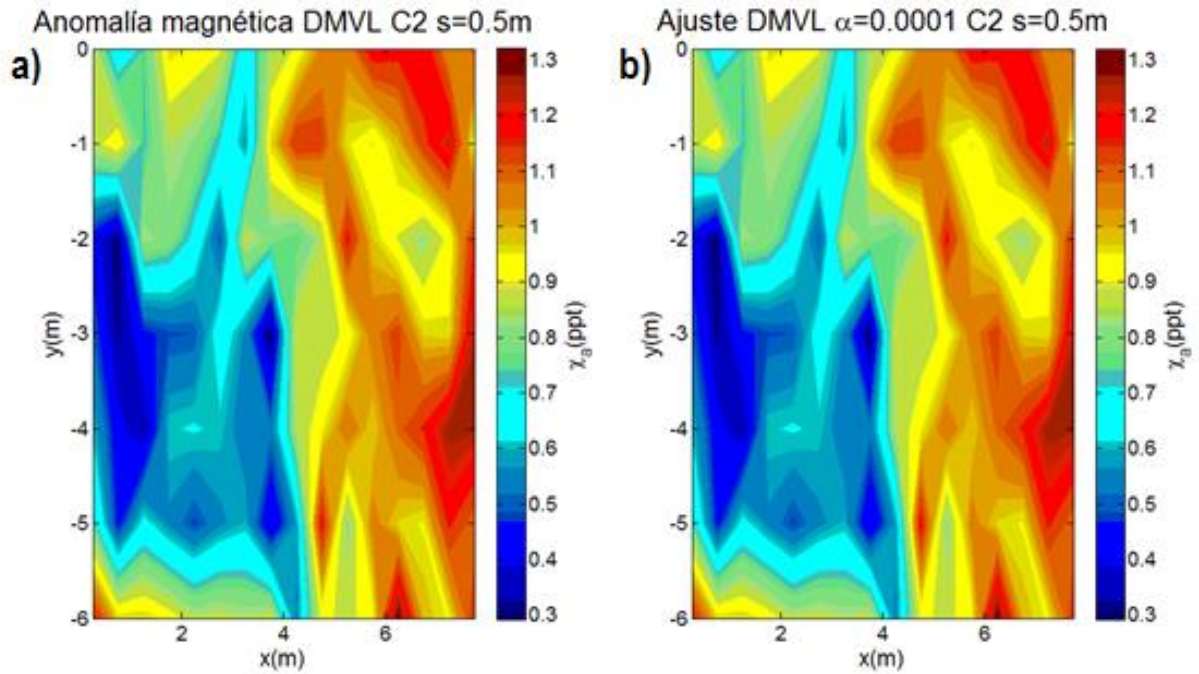


Figura E15. a) Anomalia magnética para DMVL con $s = 0.5 \text{ m}$ del sitio MP3g. b) Respuesta del modelo de la figura E14, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$ cuyo error es del $3.3 \times 10^{-3} \%$.

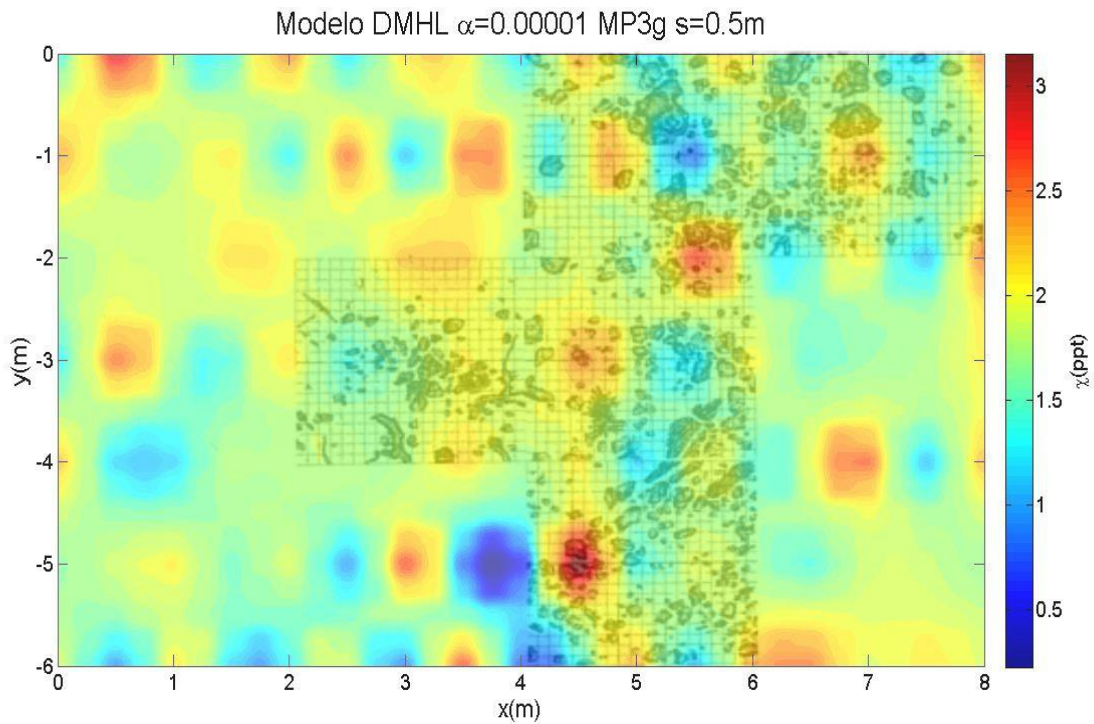


Figura E16. Superposición de la retícula de excavación de la figura E13 con el mejor modelo obtenido mediante inversión para DMHL $s = 0.5 \text{ m}$ del sitio MP3g, el cual corresponde a un valor de $\alpha = 0.00001$.

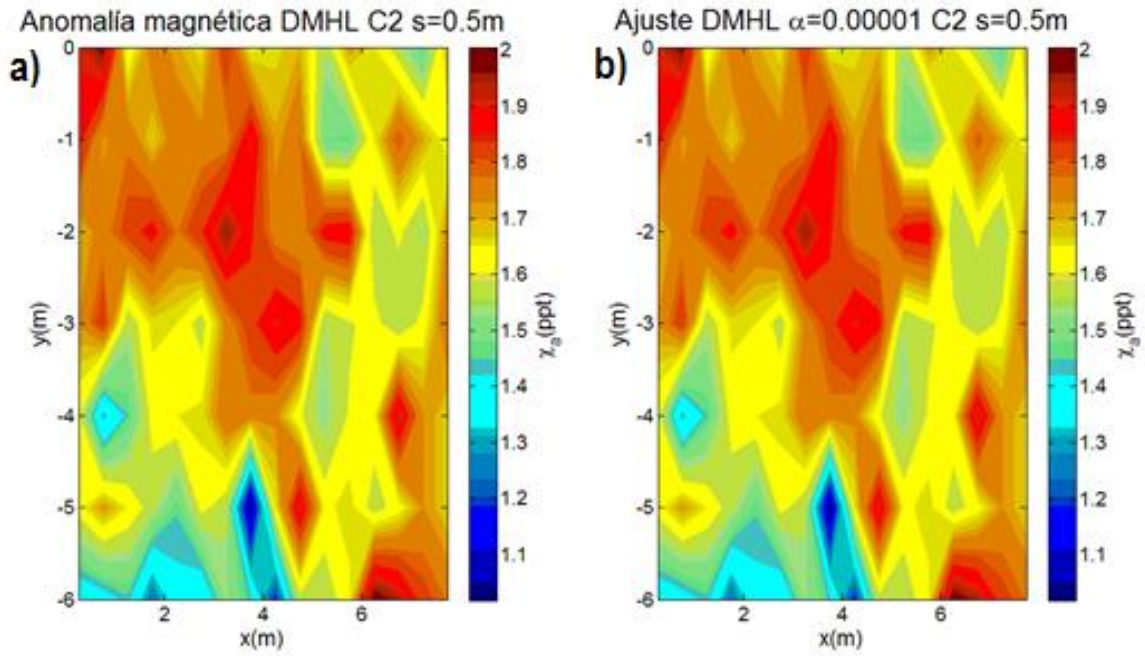


Figura E17. a) Anomalía magnética para DMHL con $s = 0.5 \text{ m}$ del sitio MP3g. b) Respuesta del modelo de la figura E16, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$ cuyo error es del $1.1 \times 10^{-2} \%$.

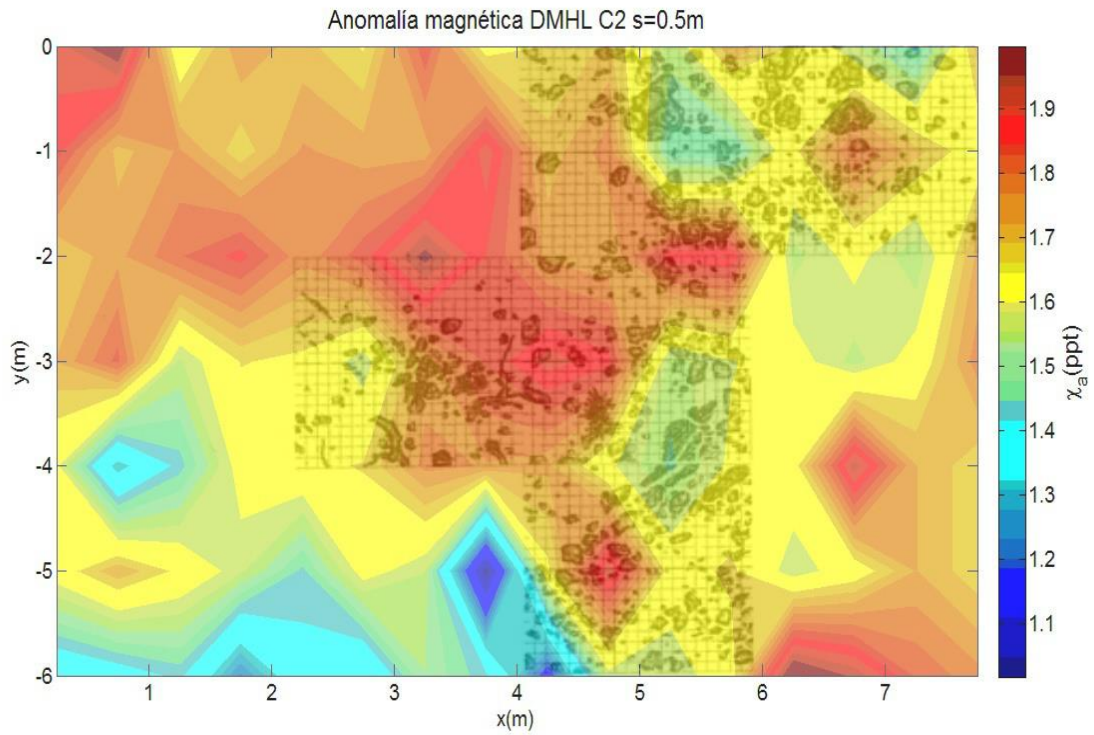


Figura E18. Superposición de la retícula de excavación de la figura E13 con la anomalía magnética para DMHL $s = 0.5 \text{ m}$ del sitio MP3g.

En el caso de DMVT $s = 0.5m$, la comparación entre el modelo calculado y los cuerpos encontrados se muestra en la figura E19. La respectiva anomalía magnética para esta configuración así como la respuesta al modelo calculado se presentan en las figuras E20a y E20b respectivamente. El error calculado de la respuesta del modelo es del $2.47 \times 10^{-2} \%$.

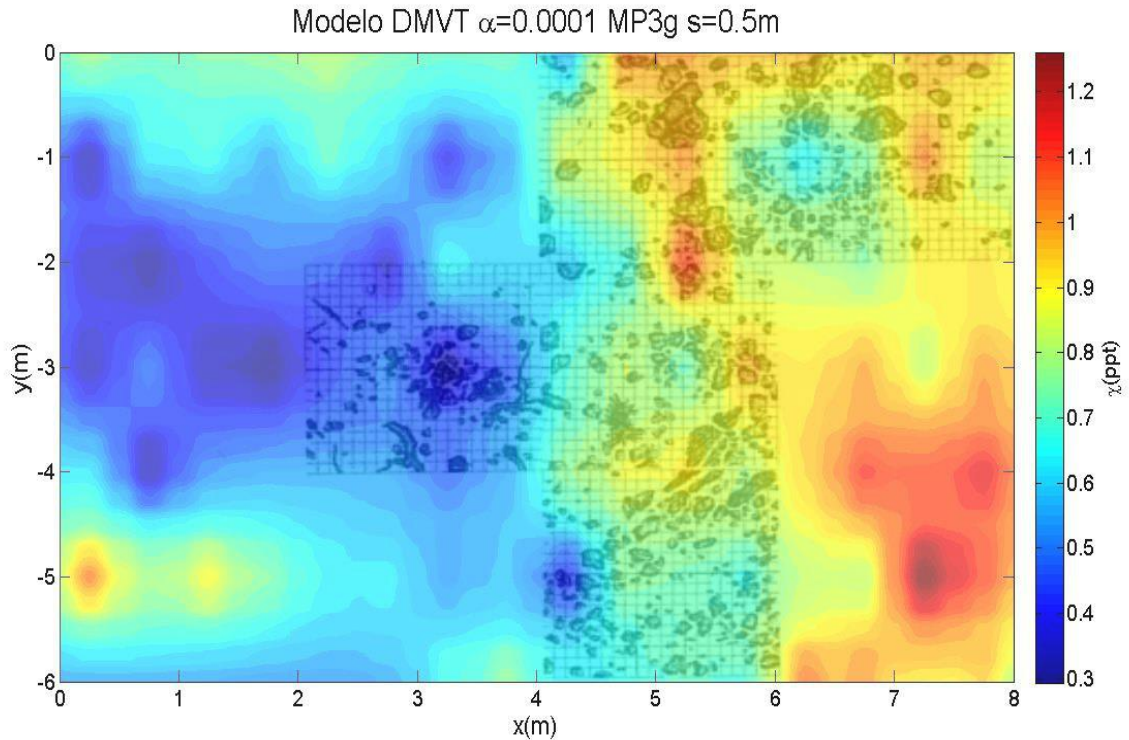


Figura E19. Superposición de la retícula de excavación de la figura E13 con el mejor modelo obtenido mediante inversión para DMVT $s = 0.5 m$ del sitio MP3g, el cual corresponde a un valor de $\alpha = 0.0001$.

Por último, se presenta el mejor modelo obtenido para DMHT con $s = 0.5m$ para el sitio MP3g correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$ en la figura E21. La respectiva anomalía magnética para esta configuración se muestra en la figura E22a, así como la respuesta del modelo en la figura E22b. El error porcentual es de 7.8×10^{-1} .

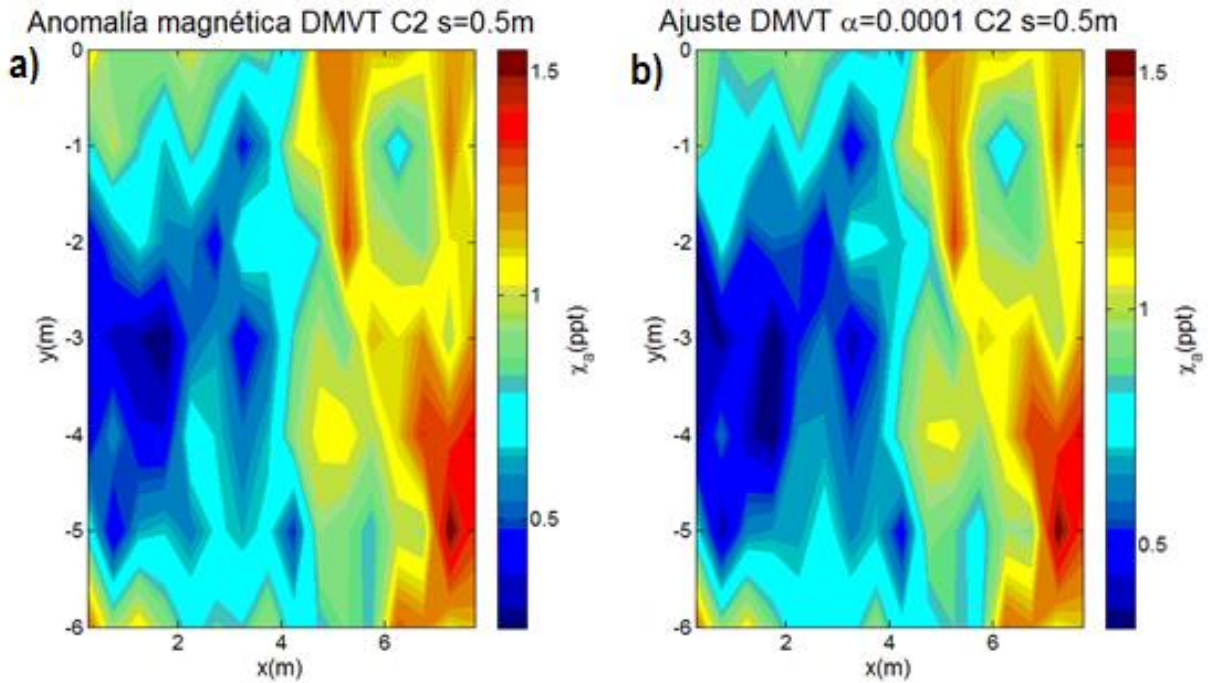


Figura E20. a) Anomalia magnética para DMVT con $s = 0.5 \text{ m}$ del sitio MP3g. b) Respuesta del modelo de la figura E19, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$ cuyo error es del $2.47 \times 10^{-2} \%$.

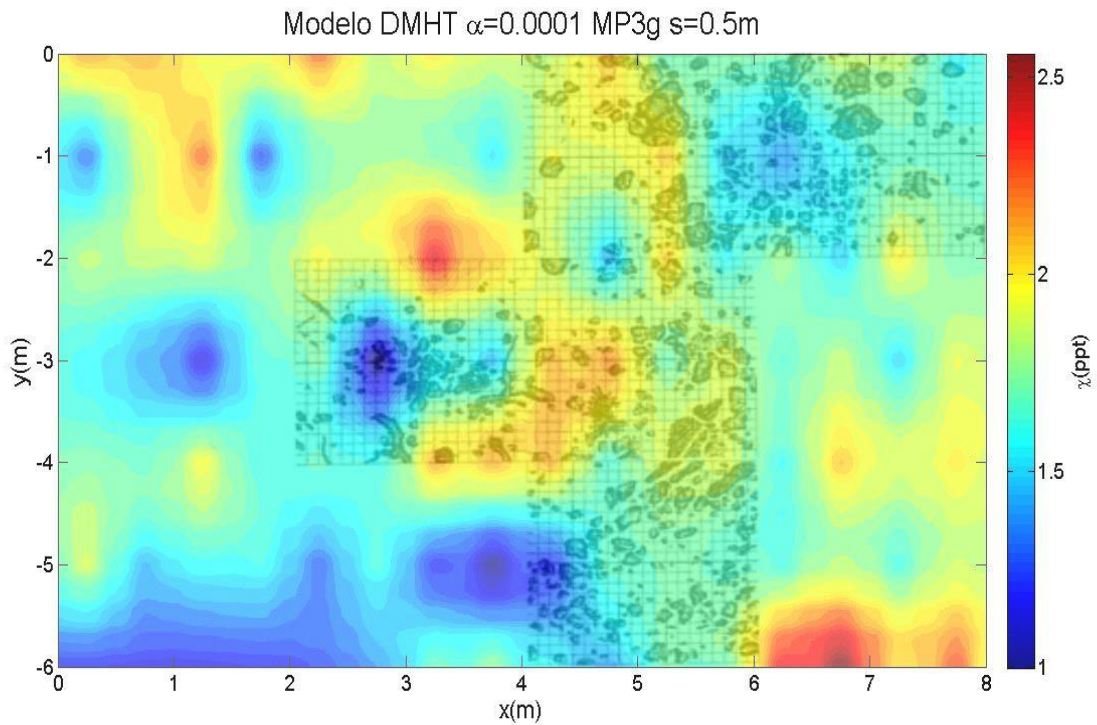


Figura E21. Superposición de la retícula de excavación de la figura E13 con el mejor modelo obtenido mediante inversión para DMHT $s = 0.5 \text{ m}$ del sitio MP3g, el cual corresponde a un valor de $\alpha = 0.0001$.

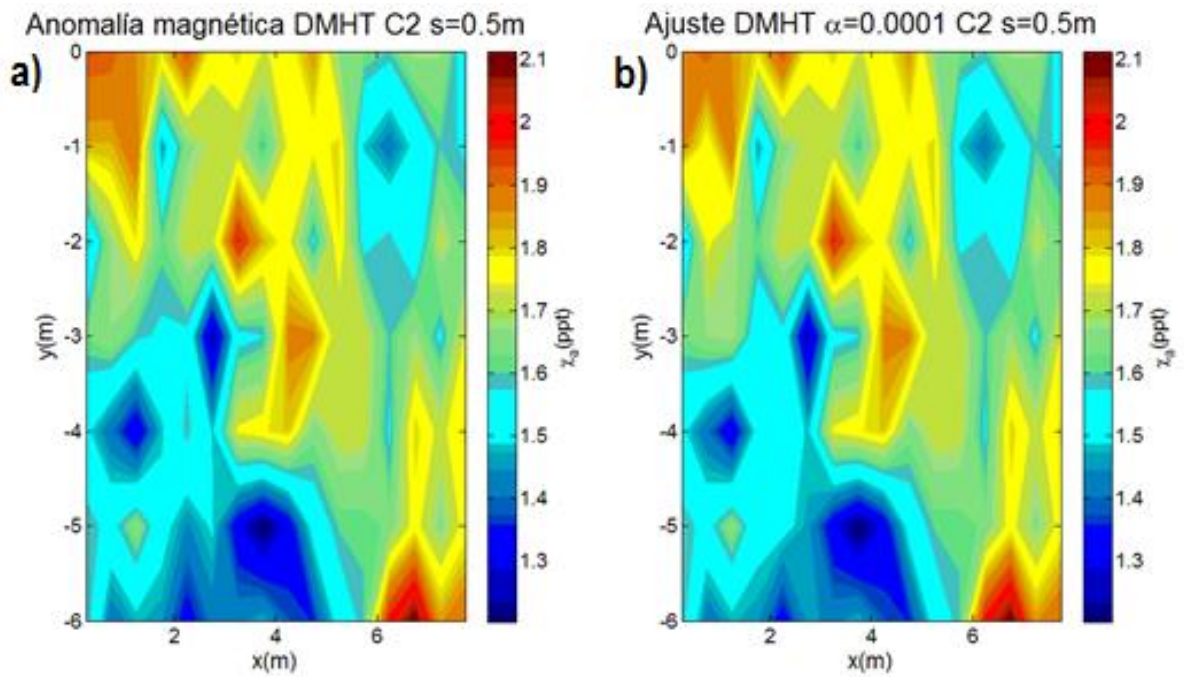


Figura E22. a) Anomalía magnética para DMHT con $s = 0.5 m$ del sitio MP3g. b) Respuesta del modelo de la figura E21, correspondiente a un valor de $\alpha = 0.0001$ cuyo error es del $7.8 \times 10^{-1} \%$.