

**Centro de Investigación Científica y de Educación
Superior de Ensenada, Baja California**



**Programa de Posgrado en Ciencias
en Ciencias de la Tierra**

**Inversión de forma de onda completa en medios elásticos
bidimensionales en el dominio del tiempo usando el método
de imágenes enfocadas**

Tesis

para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Raúl Ulices Silva Avalos

Ensenada, Baja California, México

2015

Tesis defendida por

Raúl Ulices Silva Avalos

y aprobada por el siguiente Comité

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado

Codirector del Comité

Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado

Codirector del Comité

Dr. Pratap Narayan Sahay Sahay

Dr. Antonio González Fernández

Dr. Markus Sebastian Gross



Dr. Juan García Abdeslem

Coordinador del Programa de Posgrado en Ciencias de la Tierra

Dr. Jesús Favela Vara

Director de Estudios de Posgrado

Raúl Ulices Silva Avalos © 2015

Queda prohibida la reproducción parcial o total de esta obra sin el permiso formal y explícito del autor

Resumen de la tesis que presenta Raúl Ulices Silva Avalos como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Ciencias de la Tierra con orientación en Geofísica Aplicada

Inversión de forma de onda completa en medios elásticos bidimensionales en el dominio del tiempo usando el método de imágenes enfocadas

Resumen aprobado por:

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado

Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado

Codirector de tesis

Codirector de tesis

La búsqueda de yacimientos de hidrocarburos entre las trampas estratigráficas y estructurales está basada en el detallado análisis e interpretación de las ondas sísmicas. Esta necesidad hace de la propagación de ondas elásticas e Inversión de Forma de Onda Completa (FWI por sus siglas en inglés) uno de los temas más activos en la investigación en exploración sísmica. Sin embargo existe un número limitado de algoritmos FWI que empleen la aproximación elástica para modelar estos datos en multicomponentes. Hemos desarrollado un esquema iterativo basado en el método de Gauss-Newton de FWI 2D que reproduce la velocidad vertical y horizontal de las partículas medidas por estudios sísmicos comunes, se obtiene simultáneamente la distribución de tres parámetros elásticos del modelo de subsuelo (densidad ρ y los parámetros de Lamé λ y μ).

En esta tesis propagamos la onda elástica en medios heterogéneos 2D en el dominio del tiempo usando el método de mallado intercalado en la representación de las velocidades y los esfuerzos. Nuestro código obedece la condición de estabilidad e incluye condiciones de frontera absorbentes y paralelización. Este código es usado tanto en el modelado directo como en el cálculo de las derivadas de Frechet con respecto a los tres parámetros del modelo. Usamos la teoría de la aproximación a la ecuación de sensibilidad para el cálculo de estas derivadas.

Regularizamos el algoritmo de FWI aplicando dos criterios diferentes: Regularización de primer orden de Tikhonov (máxima suavidad) y Mínimo Soporte de Gradiente (MGS por sus siglas en inglés) que consiste en una aproximación de la norma cero del gradiente de las varias propiedades del modelo. Aplicamos el algoritmo de FWI para un modelo sintético demostrando que la información estructural se recupera para los tres parámetros del modelo (λ , μ y ρ). Los resultados muestran que la regularización usando el criterio de MGS depende en gran medida de la elección de la constante α , un parámetro el cual pesa la parte de MGS en la función objetivo. Un valor grande de α cuida más la mínima estructura de los modelos obtenidos sin minimizar el desajuste de los datos mientras que un valor α pequeño obedece más al ajuste de los datos manteniendo aún una imagen enfocada en los modelos obtenidos.

Palabras Clave: Inversión de Forma de Onda Completa, Propagación de Onda Elástica, Regularización, Imágenes Enfocadas.

Abstract of the thesis presented by Raúl Ulices Silva Avalos as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Earth Sciences with orientation in Applied Geophysics.

2D Time domain elastic full waveform inversion using image focusing

Abstract approved by:

Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado

Thesis Co-Director

Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado

Thesis Co-Director

The search of hydrocarbon reservoirs within fine stratigraphic and structural traps relies on the detailed analysis and interpretation of multicomponent seismic data. That makes elastic wave field simulation and Full Waveform Inversion (FWI) one of the most active research areas in seismic exploration. However there are a limited number of FWI algorithms that utilize the vector field approach required to model multicomponent data. We have developed an iterative Gauss-Newton 2D time-domain elastic FWI scheme that reproduces the vertical and horizontal particle velocity as measured by common seismic surveys and obtains simultaneously the distribution of three parameters of subsurface model (density ρ and the Lamé parameters λ and μ).

In this thesis the elastic wave is simulated by the time domain 2D velocity-stress staggered grid finite difference method in a elastic media. Our code observes the necessary stability conditions, includes absorbing boundary conditions and basic multi-thread optimization. The same forward modeling code is also used to calculate the Frechet's derivatives with respect to the three parameters of our model following the sensitive equation approach and perturbation theory.

We regularized our FWI algorithm applying two different criteria: (1) First order Tikhonov regularization (maximum smoothness) and (2) Minimum Gradient Support (MGS) that adopts an approximate zero-norm of the several property gradients. We applied our algorithm to one test model and demonstrated that inferred structural information content resemble closely that of the original synthetic model parameters (λ , μ and ρ). Our FWI results show that the regularization based on MGS highly depends on the choice of the MGS weights (α) of the misfit function. A high value of α yields the minimal structure for λ , μ and ρ but the misfit data is not minimized whereas a low value of α minimizes the misfit correctly and yields a detailed structure for model parameters.

Keywords: Full Waveform Inversion, Elastic Wave Propagation, Regularization, Image Focusing.

Dedicatoria

A mi padre Raúl Silva Rivera, a mi madre Jacoba Avalos Cárdenas y a mis hermanos Madai, Daniel y Luz Elena por apoyarme siempre y en todo momento, siempre tendrán mi amor y mi respeto. Las palabras me quedan cortas para expresar mi eterna gratitud, amo a mi familia. En memoria de Cruz Silva Torres.

Al amor de mi vida Hilda Yolanda Fernández Parga por su muy apreciado apoyo sentimental y moral a pesar de la distancia. Gracias por estar a mi lado y por enseñarme a ser feliz.

Te amo Yolanda, eternamente.

A Dios padre por conducir mi camino durante toda mi vida y por concederme el conocimiento, la salud y las fuerzas necesarias para triunfar hasta donde he llegado.

Agradecimientos

A mis asesores Dr. Jonás de Dios de Basabe Delgado y Dr. Luis Alonso Gallardo Delgado por sus invaluable enseñanzas, conocimientos, orientaciones y por su excelente atención y paciencia a lo largo de este trabajo. Estaré siempre agradecido con ustedes.

A mis sinodales Dr. Pratap Sahay Narayan, Dr. Antonio González Fernández y Dr. Markus Sebastian Gross por sus valiosos comentarios y por toda la disposición durante los procesos de avance y revisión de tesis.

Al Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada por abrirme las puertas para realizar mis estudios de maestría, en especial al posgrado y profesores de Ciencias de la Tierra. Al CONACyT por brindarme el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría. Al CeMIE-Geo por permitirme el uso del cluster Lamb.

A mis amigos del alma David Chong Alba, Alan López Becerra, Cuco, Daniel Gaytán, Francisco, Enrique y Edgar por mantener una fuerte y muy bonita amistad a lo largo de mi ausencia de Zacatecas, se les extraña.

A mis amigos y compañeros de vivienda Daniel Huerta y Alejandro Romero que junto con Genaro Suárez me brindaron momentos inolvidables durante mi estadía en Ensenada. En especial agradezco a Alejandro por su compañerismo desde la Licenciatura y por recomendarme estudiar una maestría en Ciencias de la Tierra.

A toda mi familia y amigos del Obraje Pinos Zacatecas por todas sus palabras de apoyo y estímulo en mi corta estancia, nunca olvido mi lugar de origen. Agradezco a mi prima Anaiza por ayudarme a conocer lo mejor que me ha pasado en la vida.

A mis compañeros Adrián León y Armando Calderón por su amistad y sus valiosos consejos a lo largo de la maestría. A José Paúl por los formatos compartidos.

Tabla de contenido

Página

Resumen en español	ii
Resumen en inglés	iii
Dedicatoria	iv
Agradecimientos	v
Lista de figuras	viii
Lista de tablas	xiii
1. Introducción	1
1.1. Inversión de forma de onda completa	1
1.2. Problema	4
1.3. Hipótesis	4
1.4. Objetivos	5
1.5. Organización del trabajo	5
2. Modelado de forma de onda	7
2.1. Marco teórico	7
2.1.1. Ecuación de elastodinámica	7
2.1.2. Ondas P y S	9
2.1.3. Parámetros elásticos	11
2.2. Implementación numérica del modelado de forma de onda	12
2.2.1. Discretización	15
2.2.2. Condiciones de frontera	17
2.2.3. Condición de estabilidad	18
2.2.4. Implementación computacional	20
2.2.5. Paralelización	23
2.3. Validación del esquema numérico de modelado	26
2.3.1. Ejemplo 1: Medio de dos capas homogéneas	26
2.3.2. Ejemplo 2: Una discontinuidad con escalones en un medio de dos capas horizontales.	37
2.3.3. Ejemplo 3: Perfil sísmico vertical en un medio estratificado	43
3. Formulación del problema inverso	50
3.1. Definición de parámetros del modelo elástico y observaciones	50
3.2. Proposición de la función objetivo ϕ	51
3.3. Solución algebraica a la minimización de ϕ	52
3.4. Solución lineal de Gauss-Newton	53
3.5. Regularización del problema inverso: Modelos suaves vs modelos enfocados	55
4. Cálculo numérico de derivadas de Frechet	62
4.1. Método de perturbaciones	62
4.2. Aproximación a la ecuación de sensibilidad	63
4.3. Método del campo adjunto	68

Tabla de contenido (continuación)

4.4.	Calibración del cálculo de derivadas	72
5.	Implementación del problema inverso	80
5.1.	Construcción de la matriz A y $A^T C_{dd}^{-1} A$	80
5.2.	Criterios de convergencia	85
5.3.	Solución iterativa del problema inverso	88
6.	Experimentos numéricos	91
6.1.	Medio de 2 capas. Modelo de 4×4 celdas	92
6.2.	Medio de 2 capas. Inversión de 20×20 celdas	102
6.3.	Medio de 2 capas. Inversión de 20×20 celdas usando MGS como regularización	112
7.	Discusiones	122
7.1.	Modelado directo de forma de onda elástica	122
7.2.	Formulación del problema inverso	123
7.3.	Cálculo numérico de derivadas de Frechet	123
7.4.	Experimentos numéricos de inversión	124
8.	Conclusiones	127
8.1.	Trabajo a futuro	128
	Lista de referencias bibliográficas	130
A.	Código de modelado directo de forma de onda	133

Lista de figuras

Figura		Página
1.	Ejemplo de propagación de ondas P y S	10
2.	Esquema de mallado intercalado	16
3.	Mallado con condiciones de frontera	18
4.	Diagrama de flujo modelado directo	22
5.	Interpolación líneal para la medición en los receptores	23
6.	Tiempo de cómputo vs. número de procesadores	24
7.	Medio dos capas con fuente en ($x = 2000\text{m}$, $z = 0\text{m}$), donde la interfaz se encuentra a 2 km de profundidad.	26
8.	Modelado directo de v_x para el modelo de prueba de la figura 7, donde se realizó una captura cada $t = 0.4$ segundos, sin aplicar condiciones de frontera.	28
9.	Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio para el campo de velocidad de la figura 8	29
10.	Modelado directo de v_z para el modelo de prueba de la figura 7, donde se realizó una captura cada $t = 0.4$ segundos, sin aplicar condiciones de frontera.	30
11.	Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio para el campo de velocidad de la figura 10.	31
12.	Modelado directo de v_x para el modelo de la figura 7, implementando condiciones de frontera absorbentes.	33
13.	Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio para el campo de velocidad v_x de la figura 12.	34
14.	Modelado directo de v_z para el modelo de la figura 7, implementando condiciones de frontera absorbentes.	35
15.	Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio para el campo de velocidad v_z de la figura 14.	36
16.	Medio de dos capas con una heterogeneidad en la interfaz de las capas.	38
17.	Modelado directo de v_x para el modelo de la figura 7, donde se realizó una captura cada $t = 0.4$ segundos.	39
18.	Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio para el campo de velocidad v_x de la figura 17	40
19.	Modelado directo de v_x para el modelo de la figura 7, donde se realizó una captura cada $t = 0.4$ segundos.	41
20.	Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio para el campo de velocidad v_z de la figura 19	42

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
21. Medio estratificado para un perfil sísmico vertical. El modelo de 6 capas incluye agua (medio acústico).	43
22. Modelado numérico de la velocidad \vec{v} para el modelo geológico de la figura 21, que nos servirá de referencia para validar el código de modelado numérico.	45
23. Modelado directo de la velocidad horizontal v_x un sondeo sísmico vertical .	46
24. Respuesta en los sismogramas al campo de velocidades de la figura 23 .	47
25. Modelado directo de la velocidad horizontal v_z un sondeo sísmico vertical .	48
26. Respuesta en los sismogramas al campo de velocidades de la figura 25 . .	49
27. Discretización del dominio	52
28. Operador discreto del gradiente	60
29. Inversión gravimétrica 2D usando imágenes enfocadas	61
30. Ejemplo de discretización 4×4 para el cálculo de derivadas de Frechet de las velocidades respecto a m	72
31. Modelado de la derivada de la velocidad horizontal (v_x) respecto a lambda, en la celda comprendida en la región $0 \leq x \leq 250$ y $0 \leq z \leq 250$ metros para el semiespacio homogéneo de la figura 30.	74
32. Modelado de la derivada de la velocidad vertical (v_z) respecto a lambda, en la celda comprendida en la región $0 \leq x \leq 250$ y $0 \leq z \leq 250$ (línea azul) para el semiespacio homogéneo de la figura 30.	75
33. Mismo ejemplo de discretización 4×4 para el cálculo de derivadas de Frechet de las velocidades que el de la figura 30, pero ahora calculado la sensibilidad de la celda acotada por la línea azul entre $500 \leq x \leq 750$ y $500 \leq z \leq 750$ metros del modelo de 2 capas.	76
34. Comparación de las derivadas de v_z respecto de lambda para la celda que se encuentra entre $500 \leq x \leq 750$ y $500 \leq z \leq 750$ metros del modelo. . . .	77
35. Comparación de la amplitud de la onda propagada para la velocidad v_z en el modelado directo, para la derivada respecto a lambda, la derivada respecto a μ y la derivada respecto a la densidad, para una fuente en la superficie a la mitad del terreno, en un tiempo $t = 0.8$ segundos.	79
36. Diagrama de flujo para el llenado de la matriz A y $A^T C_{dd}^{-1} A$	83

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
37. Diagrama de flujo para el esquema iterativo de inversión de forma de onda completa a partir de un modelo inicial m_0 con los datos de las velocidades $v_x(t)$ y $v_z(t)$ medidos en los sismogramas.	90
38. Medio de dos capas horizontales a invertir en una región de 0 a 1000 metros de distancia horizontal y profundidad, donde la interfaz entre capas se encuentra a 500 metros de profundidad.	92
39. Datos de entrada v_x^{obs} (izquierda) y v_z^{obs} (derecha) para nuestro algoritmo de modelado inverso de la figura 38.	93
40. Discretización (línea azul) de 4×4 celdas para el problema inverso del modelo 39.	94
41. Evolución del proceso iterativo de inversión de 4×4 celdas para las iteraciones 0, 1, 2, 5, 10 y 20 para el parámetro de Lamé $\lambda(x, z)$ del modelo m	95
42. Evolución del proceso iterativo de inversión de 4×4 celdas para las iteraciones 0, 1, 2, 5, 10 y 20 para el parámetro de Lamé $\mu(x, z)$ del modelo m	96
43. Evolución del proceso iterativo de inversión de 4×4 celdas para las iteraciones 0, 1, 2, 5, 10 y 20 para la densidad $\rho(x, z)$ del modelo m	97
44. Valor medio cuadrático porcentual contra iteración para el proceso de inversión de los modelos obtenidos en las figuras 41, 42 y 43.	99
45. Valor medio cuadrático en contra número de iteración para el ajuste de los datos sintéticos observados de la figura 39 en nuestro algoritmo de inversión en 20 iteraciones.	99
46. Continuación al cálculo del valor medio cuadrático porcentual contra iteración para la curva obtenida en la ecuación 44, a partir de la iteración número 20 hasta 110 iteraciones.	100
47. Continuación al cálculo del valor medio cuadrático contra número de iteración para el ajuste de los datos sintéticos observados de la figura 39 en nuestro algoritmo de inversión a partir de la iteración 20 hasta 110.	101
48. Discretización de 20×20 celdas para el mismo problema inverso del modelo de la figura 39.	102
49. Evolución del proceso iterativo de inversión con modelos de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para el parámetro de Lamé $\lambda(x, z)$ del modelo m	105

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
50. Evolución del proceso iterativo de inversión con modelos de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para el parámetro de Lamé $\mu(x, z)$ del modelo m	106
51. Evolución del proceso iterativo de inversión con modelos de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para la densidad $\rho(x, z)$ del modelo m	107
52. Valor medio cuadrático porcentual contra iteración para el proceso de inversión de los modelos obtenidos en las figuras 49, 50 y 51.	108
53. Valor medio cuadrático contra número de iteración para el ajuste de los datos sintéticos observados de la figura 39 en nuestro algoritmo de inversión en 50 iteraciones para el caso discreto de la figura 48.	109
54. Función de mínimo soporte de gradiente (MGS) para los tres parámetros del modelo.	111
55. Aportación neta de la función de mínimo soporte de gradiente (Σ MGS) para los tres parámetros del modelo.	112
56. Evolución del proceso iterativo de inversión de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para el parámetro de Lamé $\lambda(x, z)$ del modelo m usando MGS como regularización.	114
57. Evolución del proceso iterativo de inversión de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para el parámetro de Lamé $\mu(x, z)$ del modelo m usando MGS como regularización.	115
58. Evolución del proceso iterativo de inversión de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para la densidad del modelo m usando MGS como regularización.	116
59. Valor medio cuadrático contra número de iteración para el ajuste de los datos sintéticos observados de la figura 39 en nuestro algoritmo de inversión con MGS como regularización para 50 iteraciones.	117
60. Valor medio cuadrático porcentual contra iteración para el proceso de inversión de los modelos obtenidos en las figuras 56, 57 y 58.	118
61. Comparación de inversiones con mínimo soporte de gradiente para diferentes valores de alfa de nuestro esquema iterativo.	119
62. Comparación de inversiones con mínimo soporte de gradiente para diferentes valores de alfa y beta para nuestro esquema iterativo.	120

Lista de figuras (continuación)

Figura	Página
63. Comparación de las funciones objetivos participantes en el esquema de inversión de forma de onda, para el ajuste de los datos (línea roja) y el funcional de mínimo soporte de gradiente (línea azul).	121
64. Formato de archivos de entrada para el programa de modelado directo. . .	139

Lista de tablas

Tabla

Página

1. Datos de entrada para el algoritmo 3 y el diagrama de flujo de la figura 37 del esquema iterativo de inversión de forma de onda. 88

Capítulo 1. Introducción

1.1. Inversión de forma de onda completa

Los retos en la exploración sísmica son cada vez mayores y demandan el uso de la mayor cantidad de información recolectada en la superficie, pozos o fondo marino, ya que esta información permite observar detalles composicionales, estratigráficos y estructurales que antes eran imperceptibles. El registro y procesado de este nuevo tipo de información va más allá de los procesos convencionales de apilamiento y migración con los que se producen las secciones sísmicas. Desafortunadamente, estas secciones sísmicas son en su mayoría obtenidas aplicando principios básicos de propagación de ondas acústicas e inclusive en aproximaciones asintóticas como aquellas aplicadas en fenómenos ópticos de hace más de un siglo. En cambio, el procesado e interpretación de la información detallada recolectada en la actualidad necesita basarse en un modelo físico más apropiado, y en particular resulta indispensable aplicar los conceptos más modernos de la teoría de la elasticidad. Es así que el estudio de las propiedades elásticas del subsuelo a partir de las mediciones de la forma de onda completa y la inversión de forma de onda completa FWI (Full Waveform Inversion por sus siglas en inglés) en particular, son un tema de investigación relativamente reciente (Tarantola, 1984) y de un creciente interés (Virieux y Operto, 2009).

Dado que no existe una solución analítica de la ecuación de elastodinámica para modelos realistas, una gran variedad de métodos numéricos han sido desarrollados por más de cuatro décadas para simular eficientemente la propagación de onda sísmica en medios más complejos, de entre los cuales se encuentran los métodos de diferencias finitas, elementos finitos, pseudo-espectral, elementos espectrales y discontinuo de Galerkin (Moczo *et al.* (2014) y referencias citadas). En particular Madariaga (1976) desarrolló un método de diferencias finitas en un mallado intercalado basado en un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden expresado en términos de la velocidad y esfuerzos. Virieux (1984, 1986) extendió este método de mallado intercalado para modelar propagación de onda sísmica en medios bidimensionales.

Respecto a inversión, hubo un periodo de escaso desarrollo hasta los años 80, cuan-

do empieza la interpretación de tiempos de primeros arribos en medios heterogéneos (Vidale, 1988; Hole y Zelt, 1995). En estos primeros algoritmos de inversión se obtienen mapas de velocidades a partir de arribos de ondas sísmicas.

Un cambio más reciente ha sido con el desarrollo de algoritmos de inversión que observan la forma de onda completa. Un paso fundamental en FWI fue dado por Tarantola (1984) con su formulación no-lineal de inversión de forma de onda en medios acústicos y elásticos, teoría que explota toda la información contenida en los sismogramas e infiere modelos de alta resolución del subsuelo. Resultados numéricos empleando esta metodología aparecen en las aportaciones de Kolb *et al.* (1986), Gauthier *et al.* (1986), Mora (1987) y Borisov y Singh (2015). Todos estos autores formularon sus métodos en el dominio del tiempo como un problema de mínimos cuadrados. El reto principal en estas técnicas de inversión de forma de onda es el de producir un modelo de propiedades elásticas que pueda producir los datos sísmicos de manera aceptable.

El problema de inversión de forma de onda también puede ser implementado en el dominio de la frecuencia (Pratt y Worthington, 1990) y en el dominio de Laplace (Shin y Cha, 2008) aplicando a la ecuación de onda elástica transformadas de Fourier y Laplace respectivamente. A continuación, describimos brevemente algunas ventajas y desventajas de la aplicación de la inversión de onda en el dominio del tiempo y de la frecuencia (Vigh *et al.*, 2008).

- Eficiencia computacional. En el dominio del tiempo, el método puede ser fácilmente paralelizado en una estación de trabajo distribuyendo los disparos que se realizan para cada tiempo (Vigh y Starr, 2008). En el dominio de la frecuencia, el problema es resuelto típicamente usando descomposición LU para una matriz dispersa, esta aproximación hace difícil la paralelización para este dominio.
- Selección de Frecuencias. El mayor beneficio de trabajar en el dominio de la frecuencia, es que solo son necesarias unas cuantas frecuencias para resolver el problema. En cambio, en el dominio del tiempo los algoritmos de inversión incluyen todas las frecuencias, y esto hace que algunas frecuencias, en especial las bajas frecuencias, se omitan a causa de las derivadas en tiempo (Sirgue y Pratt, 2004).

- Número de disparos. Un punto a favor del dominio de la frecuencia es la eficiencia para un número grande de disparos a causa de que la descomposición LU solo necesita efectuarse una vez. En el dominio del tiempo, el tiempo de cómputo es el mismo para cada disparo (Vigh y Starr, 2008).
- Requerimiento en memoria. El costo en cuanto a memoria para el dominio de la frecuencia es muy grande respecto al del tiempo, en especial, si se trabaja con problemas tridimensionales y discretizaciones grandes. La diferencia en memoria, es aproximadamente 3 órdenes de magnitud (Operto *et al.*, 2007).

Es interesante que a pesar de que gran parte de los autores actualmente resuelven el problema inverso en el dominio de la frecuencia, el modelado directo es realizado en el dominio del tiempo, esto debido a ventajas relacionadas a la eficiencia y disponibilidad de recursos computacionales. Es importante señalar que la mayoría de los resultados, tanto en dominio del tiempo como en dominio de la frecuencia, se basan en la aproximación acústica, esto debido a además de ser una aproximación aceptable, la inversión de forma de onda acústica presenta una teoría relativamente más sencilla respecto a inversión de onda elástica.

A pesar de la gran cantidad de información contenida en la forma de onda sísmica, los modelos actuales obtenidos con FWI siguen presentando rasgos con un detalle inferior al esperado. Esto es particularmente notable cuando se contrasta con la cantidad de información que no es recuperada de las mediciones. Esto nos da una evidencia de que existe una amplia posibilidad de que las condiciones de regularización empleadas en dichos algoritmos presentan un grado notable de incompatibilidad con los datos mismos.

La mayoría de los autores citados en el presente trabajo realizan regularización del tipo Tikhonov en sus diferentes presentaciones dependiendo de la naturaleza de la estructura de la Tierra, promoviendo la búsqueda de imágenes suavizadas del subsuelo. Nosotros exploramos una teoría de regularización basada en imágenes enfocadas comúnmente aplicada otro tipos de datos geofísicos (Zhdanov, 2002; Zhdanov *et al.*, 2004; Zhdanov y Fang, 1996), teoría la que emplea un funcional de estabilización conocido como Mínimo Soporte de Gradiente (MGS por sus siglas en inglés) en el problema inverso.

Aplicaciones de esta técnica de estabilización para problemas inversos de forma de onda no se encuentran reportados en la literatura científica.

1.2. Problema

En vista de lo anterior, nos planteamos varias preguntas. Primeramente ¿Por qué se ha abandonado la tomografía en el dominio del tiempo cuando la evolución de los algoritmos de modelado directo ha sido en este dominio, inclusive, para algunos que trabajan el problema inverso en el dominio del tiempo? ¿Por qué se ha considerado la aproximación acústica mucho más que el caso completo en medio elástico en problemas de FWI? Finalmente, ¿por que no se han aplicado operadores no suavizantes (como MGS) para regularizar el problema de FWI? Por último, hacemos énfasis en los escasos trabajos empleando un regularización de mínima estructura (MGS), cuando se espera buscar una imagen estratificada y bien definida del subsuelo.

1.3. Hipótesis

Como respuesta a las preguntas anteriores se plantea que:

- La popularidad de las técnicas de inversión de forma de onda en el dominio del tiempo es baja por la dificultad de implementar condiciones de regularización apropiadas que permitan detalles suficientes en el modelo para reproducir las componentes de alta frecuencia en las trazas sísmicas. La estabilidad y la dificultad están limitando la incorporación de la serie completa de tiempo, quizá influenciada por las condiciones de regularización usadas en inversión, se propone así que un esquema de regularización de mínimo gradiente (imágenes enfocadas) podría favorecer la estabilidad del problema al mismo tiempo que permite ajustar las componentes de más alta frecuencia de las trazas sísmicas.
- También suponemos que la simplicidad de las ecuaciones en la aproximación acústica facilita tanto el modelado directo como el inverso a costa de la capacidad de explicar la información completa contenida en la traza sísmica. Así que para mejorar es necesario usar las ecuaciones apropiadas para un medio elástico, las cuales involucran múltiples parámetros (Parámetros de Lamé) y múltiples componentes.

1.4. Objetivos

En esta tesis se plantean cumplir los siguientes objetivos:

1. Implementar un algoritmo de diferencias finitas con mallado intercalado para el modelado directo de la simulación de forma de onda completa mediante el uso de la ecuación de elastodinámica para medios elásticos bidimensionales en el dominio del tiempo.
2. A partir de los resultados del problema directo, desarrollar el esquema inversión en 2D.
3. Aplicar el método de Imágenes Enfocadas para regularizar el esquema de inversión y compararlo con los métodos típicos de regularización.
4. Probar el esquema de inversión en datos sintéticos.

1.5. Organización del trabajo

La presentación del trabajo realizado la organizamos en las siguientes secciones:

En el capítulo 2 presentamos las ecuaciones gobernantes (ecuación de Elastodinámica) de la propagación de la onda completa en el subsuelo para después describir los aspectos relevantes al modelado numérico (discretización, condiciones de frontera, condición de estabilidad, relación de dispersión, optimización) que nos permitirán la simulación y medición de los campos de velocidades $v_x(x, z)$ y $v_z(x, z)$ en el dominio del tiempo, concluyendo con la presentación de una serie de experimentos para validar nuestro código.

En el capítulo 3 describimos la metodología que se utiliza para invertir de forma simultánea las velocidades vertical y horizontal observadas en una serie de receptores colocados en el dominio y así estimar la distribución bidimensional de los parámetros de Lamé (λ y μ) y la densidad (ρ). Formulamos el problema inverso a través de una solución del tipo Gauss-Newton a un problema de mínimos cuadrados convencionales. También se presentan las diferentes teorías de regularización implementadas en nuestro esquema iterativo de inversión.

Dada la importancia del cálculo de derivadas de Frechet en un esquema tipo Gauss-Newton, en el capítulo 4 se muestran en detalle las ecuaciones desarrolladas así como la calibración de los campos de sensibilidad para los vectores de velocidad de partículas contenidos en las trazas sísmicas con respecto a los tres parámetros del modelo del subsuelo.

El capítulo 5 muestra los detalles del código computacional tales como nuestra estrategia de llenado de la matriz hessiana así como la forma en que se evalúan las derivadas de Frechet. Finalmente concluimos el capítulo presentando el algoritmo y diagrama de flujo para la inversión de forma de onda en el dominio del tiempo usando mínimo soporte de gradiente como regularización. Apartir de estos algoritmos, presentaremos una serie de resultados para diferentes tipos de modelado inverso, haciendo un análisis completo de las componentes de nuestro esquema iterativo de inversión.

En el último capítulo se discuten los resultados encontrados y se presentan las conclusiones del presente trabajo de investigación.

Capítulo 2. Modelado de forma de onda

En este capítulo se describen la ecuación de elastodinámica y la teoría detrás de ésta que nos permitirán la simulación numérica de ondas sísmicas para medios bidimensionalmente heterogéneos e isotrópicos.

En nuestra formulación se supondrá que el registro del movimiento del terreno en función del tiempo se puede llevar a cabo en varios sensores (sismómetros) distribuidos sobre una misma sección vertical del terreno y que estos sensores registran las velocidades horizontales (en la dirección del perfil o v_x) y verticales (v_z) de desplazamiento del terreno. Estos sensores son conocidos como sismómetros o geófonos y pueden ser colocados en la superficie, en pozos y cualquier lugar del dominio.

Los aspectos relevantes al modelado numérico (discretización, condición de estabilidad, implementación computacional) se explicaron brevemente y se incluye en el apéndice A el programa en FORTRAN que se desarrolló para este modelado de forma de onda elástico.

2.1. Marco teórico

2.1.1. Ecuación de elastodinámica

Un cuerpo elástico es aquel que se rige por la ley de Hooke generalizada, la cual establece que para pequeñas deformaciones, los esfuerzos (tensiones, compresiones o cizallas) son directamente proporcionales a la deformación, esto es:

$$[\tau] = [c][e]. \quad (1)$$

Donde $[\tau]$ es el tensor de esfuerzos generalizado, $[e]$ el tensor de deformaciones y $[c]$ es la constante de proporcionalidad. El símbolo $[]$ es usado para denotar tensor o matriz. En notación indicial, esta relación lineal se escribe como

$$\tau_{ij}(x, t) = c_{ijkl}e_{kl}(x, t), \quad (2)$$

o bien, en términos del desplazamiento,

$$\tau_{ij}(x, t) = c_{ijkl} \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_l}. \quad (3)$$

En general la constante de proporcionalidad c_{ijkl} es un tensor simétrico de cuarto orden que comúnmente se asume independiente del tiempo, conocido como tensor de rigidez que cumple $u_i = \vec{u}(x, t) = \{u_x(x, t), u_y(x, t), u_z(x, t)\}$ es el vector desplazamiento del cuerpo, con densidad ρ , de su posición de equilibrio a un estado deformado por los esfuerzos en un tiempo t . La derivación de la ecuación de movimiento (Ikelle y Amundsen, 2005) es a partir de la ecuación de movimiento de Newton ($F = ma$), donde las componentes de las fuerzas son representadas por las componentes del tensor de esfuerzos τ de la siguiente manera

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i. \quad (4)$$

Combinando las ecuaciones (3) y (4), obtenemos la ecuación de elastodinámica para la propagación de onda para desplazamiento, obteniendo

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[c_{ijkl} \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_l} \right] = f_i. \quad (5)$$

Para un medio isotrópico, donde las propiedades del tensor de rigidez no dependen de la dirección, el tensor de rigidez se puede expresar como:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (6)$$

donde $\lambda = \lambda(x)$ y $\mu = \mu(x)$ son los parámetros de Lamé. Sustituyendo (6) en (5) y

empleando los operadores vectoriales correspondientes, la ecuación de elastodinámica se puede escribir como:

$$\rho \partial_t^2 \vec{u} = (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} + \vec{F}. \quad (7)$$

2.1.2. Ondas P y S

Para ejemplificar el comportamiento del medio elástico ante una deformación, se describen algunos de los fenómenos de propagación más conocidos y los parámetros que comúnmente se estudian. Primeramente, en un medio elástico se pueden observar dos tipos de ondas. Para ejemplificar el comportamiento de éstas, realizamos el mismo análisis que Ikelle y Amundsen (2005), tomando como solución una onda plana de la forma

$$\vec{u} = A \hat{u}_0 \exp [ik (\hat{n} \cdot \vec{x} - Vt)], \quad (8)$$

donde \hat{u}_0 y \hat{n} son vectores unitarios que definen la dirección de movimiento y propagación respectivamente, V es la velocidad de fase de la onda y k es normalmente un vector de número de onda. Sustituyendo en la ecuación (7) encontramos que

$$(\mu - \rho V^2) \hat{u}_0 + (\lambda + 2\mu) (\hat{n} \cdot \hat{u}_0) \hat{n} = 0. \quad (9)$$

Dado que \hat{n} y \hat{u}_0 son vectores diferentes, la ecuación (9) puede satisfacerse de dos maneras. En la primera, $\vec{u}_0 = \pm \hat{n}$, lo que nos conduce a

$$\hat{u}_0 \cdot \hat{n} = \pm 1 \quad y \quad V = V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad (10)$$

es decir, el movimiento es en la misma dirección de propagación para esta onda P, como se observa en el ejemplo de propagación de onda de la figura 1. Esta onda, se le co-

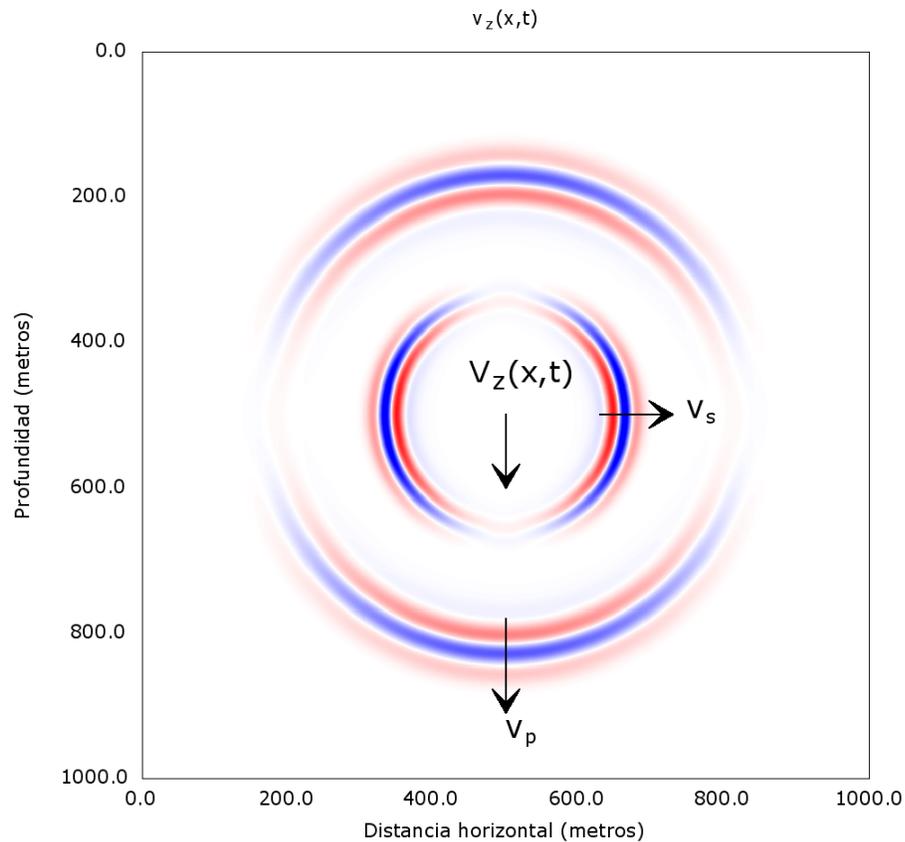


Figura 1: Ejemplo de propagación de las ondas longitudinal (V_P) y transversal (V_S) cuando la fuente tiene componente vertical f_z . Se muestra solo la amplitud de la componente vertical de la velocidad $V_z(x, t)$

noce como onda longitudinal, onda compresional u onda de presión. Ahora, la segunda solución a la ecuación (9) nos muestra que

$$\hat{u}_0 \cdot \hat{n} = 0 \quad y \quad V = V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (11)$$

Donde ahora, la dirección de propagación de esta onda S ocurre perpendicularmente al movimiento (Figura 1). Esta onda es conocida como onda transversal o de cizalla.

La ecuación de elastodinámica se simplifica significativamente en medios no viscosos y en fluidos, donde el módulo de elasticidad μ es cero. Tomando $\mu = 0$ y definiendo $p = \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}$ como la presión, se obtiene la ecuación de onda en un medio acústico

$$\frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{x}, t) \right) = f(\mathbf{x}, t), \quad (12)$$

o bien, en términos de la velocidad de onda acústica $v_p = \sqrt{\lambda/\rho}$ en un medio de densidad constante,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = v_p^2 \nabla^2 p + f. \quad (13)$$

A pesar de ser válida para medios fluidos (líquidos y gaseosos), esta aproximación acústica es frecuentemente empleada en modelado de forma de onda y en inversión de forma de onda por la mayoría de autores, dado su poco costo computacional comparado con la ecuación de onda elástica. Una de las principales restricciones de esta aproximación es la ausencia de ondas S, ondas convertidas y ondas superficiales. Para fines de la presente tesis, solo se trabajará en medios elásticos bidimensionales en el dominio del tiempo.

2.1.3. Parámetros elásticos

En los diferentes estudios de medios elásticos, es común emplear diferentes constantes elásticas, las cuales pueden expresarse en función de los parámetros de Lamé (Ikelle y Amundsen, 2005). Por ejemplo, podemos trabajar en términos de las velocidades de onda de cuerpo, velocidad de onda P

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (14)$$

y velocidad de onda S

$$V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (15)$$

Otra cantidad muy recurrente en sismología es el módulo de compresibilidad, el cual mide la resistencia de un material respecto a comprimirse uniformemente,

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu. \quad (16)$$

Otra cantida usada es el módulo de Young,

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad (17)$$

el cual mide la rigidez de un cuerpo elástico. Un último ejemplo de representación de los parámetros de Lamé, es la razón de Poisson,

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad (18)$$

cantidad adimensional la cual se define como la medida de estiramiento de un cuerpo elástico.

2.2. Implementación numérica del modelado de forma de onda

Una primer fase para estimar las características elásticas del terreno a partir de los registros sísmicos observados en campo es el calcular el sismograma que un medio elástico puede producir (simograma sintético). Para simular sismogramas sintéticos necesitamos resolver las ecuaciones diferenciales parciales que describen la propagación de ondas en la Tierra, esto bajo un conjunto de condiciones iniciales y de frontera. En la actualidad, existen diversas técnicas numéricas que se han aplicado al modelado de forma de onda tanto aplicando diferencias finitas (Kelly *et al.*, 1976; Alford *et al.*, 1974) como elementos finitos (Cohen, 2003; De Basabe y Sen, 2007). Un caso particular de diferencias finitas es el mallado intercalado (Virieux, 1984, 1986; Levander, 1988; Graves, 1996). La mayor ventaja de métodos de diferencias finitas es que son computacionalmente muy eficientes, nosotros nos enfocamos en el método de mallado intercalado tanto para modelado directo como modelado inverso como se describirá a lo largo del presente trabajo. En Moczo *et al.* (2014) se presenta un análisis más detallado de los diferentes métodos de modelado directo.

Para desarrollar un esquema de solución con diferencias finitas, preferimos desarrollar una aproximación explícita, ya que la ecuación de onda se resuelve recursivamente por pasos de tiempo. Para nuestro desarrollo partimos del sistema de ecuaciones de conservación de momento

$$\rho \partial_{tt} u_x = \partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz} + f_x, \quad (19)$$

$$\rho \partial_{tt} u_y = \partial_x \tau_{xy} + \partial_y \tau_{yy} + \partial_z \tau_{yz} + f_y, \quad (20)$$

$$\rho \partial_{tt} u_z = \partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} + \partial_z \tau_{zz} + f_z, \quad (21)$$

y las relaciones de esfuerzo

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \partial_x u_x + \lambda (\partial_y u_y + \partial_z u_z), \quad (22)$$

$$\tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) \partial_y u_y + \lambda (\partial_x u_x + \partial_z u_z), \quad (23)$$

$$\tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \partial_z u_z + \lambda (\partial_x u_x + \partial_y u_y), \quad (24)$$

$$\tau_{xy} = \mu (\partial_y u_x + \partial_x u_y), \quad (25)$$

$$\tau_{xz} = \mu (\partial_z u_x + \partial_x u_z), \quad (26)$$

$$\tau_{yz} = \mu (\partial_z u_y + \partial_y u_z). \quad (27)$$

Ahora bien, muchas veces es más útil trabajar con ecuaciones diferenciales de primer orden, por eso trabajaremos las ecuaciones anteriores en función de las velocidades, además de que éstas son las que se miden en campo por los geófonos. Para esto tomamos la derivada con respecto al tiempo del vector de desplazamiento $\partial_t \vec{u} \rightarrow \vec{v}$, y derivamos los esfuerzos respecto al tiempo, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones para la velocidad de la partícula

$$\rho \partial_t v_x = \partial_x \tau_{xx} + \partial_y \tau_{xy} + \partial_z \tau_{xz} + f_x, \quad (28)$$

$$\rho \partial_t v_y = \partial_x \tau_{xy} + \partial_y \tau_{yy} + \partial_z \tau_{yz} + f_y, \quad (29)$$

$$\rho \partial_t v_z = \partial_x \tau_{xz} + \partial_y \tau_{yz} + \partial_z \tau_{zz} + f_z, \quad (30)$$

y para los esfuerzos

$$\partial_t \tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \partial_x v_x + \lambda (\partial_y v_y + \partial_z v_z), \quad (31)$$

$$\partial_t \tau_{yy} = (\lambda + 2\mu) \partial_y v_y + \lambda (\partial_x v_x + \partial_z v_z), \quad (32)$$

$$\partial_t \tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z + \lambda (\partial_x v_x + \partial_y v_y), \quad (33)$$

$$\partial_t \tau_{xy} = \mu (\partial_y v_x + \partial_x v_y), \quad (34)$$

$$\partial_t \tau_{xz} = \mu (\partial_z v_x + \partial_x v_z), \quad (35)$$

$$\partial_t \tau_{yz} = \mu (\partial_z v_y + \partial_y v_z). \quad (36)$$

Como nuestro caso de interés para la presente tesis, es el caso bidimensional para medio elástico, las ecuaciones que rigen el movimiento de la onda serán solo en las direcciones x y z . Lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones

$$\rho \partial_t v_x = \partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} + f_x, \quad (37)$$

$$\rho \partial_t v_z = \partial_x \tau_{xz} + \partial_z \tau_{zz} + f_z, \quad (38)$$

y para las relaciones de esfuerzo

$$\partial_t \tau_{xx} = (\lambda + 2\mu) \partial_x v_x + \lambda \partial_z v_z, \quad (39)$$

$$\partial_t \tau_{zz} = (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z + \lambda \partial_x v_x, \quad (40)$$

$$\partial_t \tau_{xz} = \mu (\partial_z v_x + \partial_x v_z). \quad (41)$$

2.2.1. Discretización

Ahora, nos vemos en la tarea de resolver numéricamente las velocidades de partícula del sistema de ecuaciones de elastodinámica 2D. La discretización del tiempo y espacio del dominio está dada por:

$$t = i_t \Delta t \quad i_t = 0, 1, 2, \dots, n_t \quad (42)$$

$$x = i_x \Delta x \quad i_x = 0, 1, 2, \dots, n_x \quad (43)$$

$$z = i_z \Delta z \quad i_z = 0, 1, 2, \dots, n_z. \quad (44)$$

Esta discretización a paso constante define el mallado de referencia. En mallado intercalado, algunas cantidades se encuentran calculadas en puntos intermedios del mallado, por ejemplo $x = (i_x \pm \frac{1}{2}) \Delta x$ como se ilustra en la figura 2. La forma discreta de las ecuaciones (37)–(41) está dado por (Madariaga, 1976; Graves, 1996) como

$$[v_x]_{i,k+1/2}^{n+1/2} = [v_x]_{i,k+1/2}^{n-1/2} + [\Delta t b (D_x \tau_{xx} + D_z \tau_{xz} + f_x)]_{i,k+1/2}^n, \quad (45)$$

$$[v_z]_{i+1/2,k}^{n+1/2} = [v_z]_{i+1/2,k}^{n-1/2} + [\Delta t b (D_x \tau_{xz} + D_z \tau_{zz} + f_z)]_{i+1/2,k}^n, \quad (46)$$

para la velocidad de la partícula. Y para los esfuerzos:

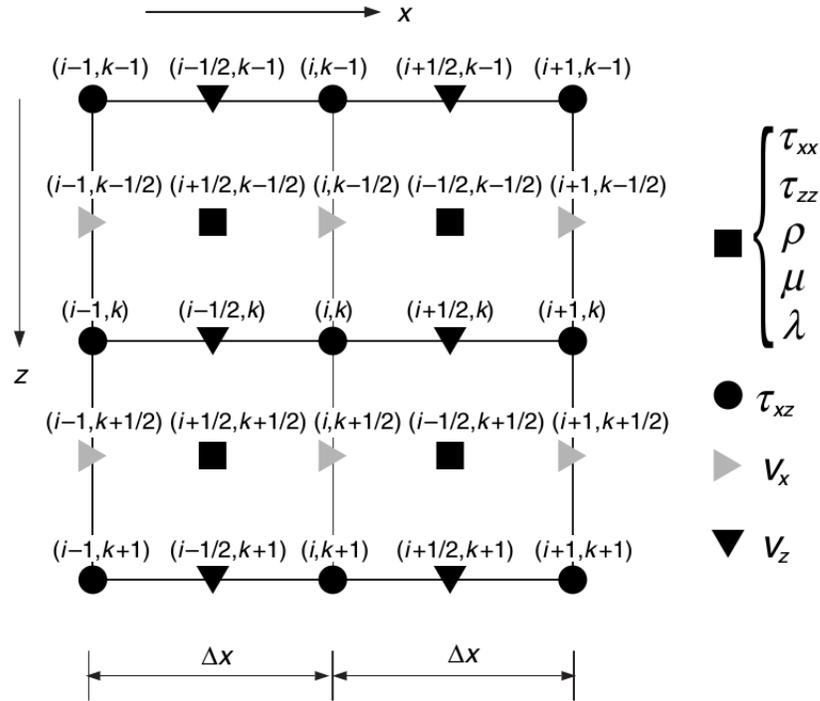


Figura 2: Esquema de mallado intercalado para un medio 2D elástico para su modelado numérico (Ikelle y Amundsen, 2005).

$$[\tau_{xx}]_{i+1/2, k+1/2}^{n+1} = [\tau_{xx}]_{i+1/2, k+1/2}^n + \Delta t [(\lambda + 2\mu)D_x v_x + \lambda D_z v_z]_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2}, \quad (47)$$

$$[\tau_{zz}]_{i+1/2, k+1/2}^{n+1} = [\tau_{zz}]_{i+1/2, k+1/2}^n + \Delta t [(\lambda + 2\mu)D_z v_z + \lambda D_x v_x]_{i+1/2, k+1/2}^{n+1/2}, \quad (48)$$

$$[\tau_{xz}]_{i, k}^{n+1} = [\tau_{xz}]_{i, k}^n + \Delta t [\mu(D_z v_x + D_x v_z)]_{i, k}^{n+1/2}, \quad (49)$$

donde $b = 1/\rho$ y los operadores D_x y D_z representan la derivada espacial discreta de primer orden para x y z respectivamente. En nuestro caso, consideramos operadores de primer orden de diferencias de la forma

$$D_x F_{i_x, i_z} = \frac{F_{i_x+1/2, i_z} - F_{i_x-1/2, i_z}}{\Delta x}, \quad (50)$$

donde F puede ser velocidades o esfuerzos y similarmente para D_z . La elección de ope-

radores de segundo orden es porque operadores de cuarto orden requieren cuatro nodos en cada dirección del estencil para hacer la operación, lo que duplica el número de operaciones en el software desarrollado.

2.2.2. Condiciones de frontera

Para resolver las ecuaciones de elastodinámica, debemos indicar las condiciones de frontera y condiciones iniciales para el modelado de propagación de onda en el subsuelo. Las condiciones iniciales de esfuerzo y velocidad de la partícula, así como sus derivadas son cero:

$$\vec{v} = 0, \quad t \leq 0, \quad (51)$$

$$\vec{\tau} = 0, \quad t \leq 0. \quad (52)$$

Las condiciones de frontera libre nos proporcionan el comportamiento de la onda en la superficie, la cual hemos tomado a una profundidad $z = 0$, entonces

$$\tau_{zz}(x, z = 0, t) = \tau_{xz}(x, z = 0, t) = 0. \quad (53)$$

Nótese que las condiciones de frontera libre pueden ser añadidas agregando una capa superior rellena de aire al modelo geológico. La región de interés siempre estará limitada por distancia horizontal y profundidad finita, donde se espera que la propagación de la onda continúe después de esta región. Entonces consideraremos el medio ilimitado implementando condiciones de frontera del tipo absorbentes. En nuestro caso de modelado numérico, usaremos las condiciones de frontera amortiguadas de Cerjan *et al.* (1985). Estas condiciones son aplicadas incrementando el mallado de referencia por un conjunto menor de nodos (i_{ab}), como se muestra en la figura 3, donde se producirá la absorción de los campos mediante la multiplicación por el factor de amortiguamiento

$$G(i) = \exp \left\{ - \left[\frac{\alpha_{abs}}{i_{ab}} (i_{ab} - i)^2 \right] \right\} \quad (54)$$

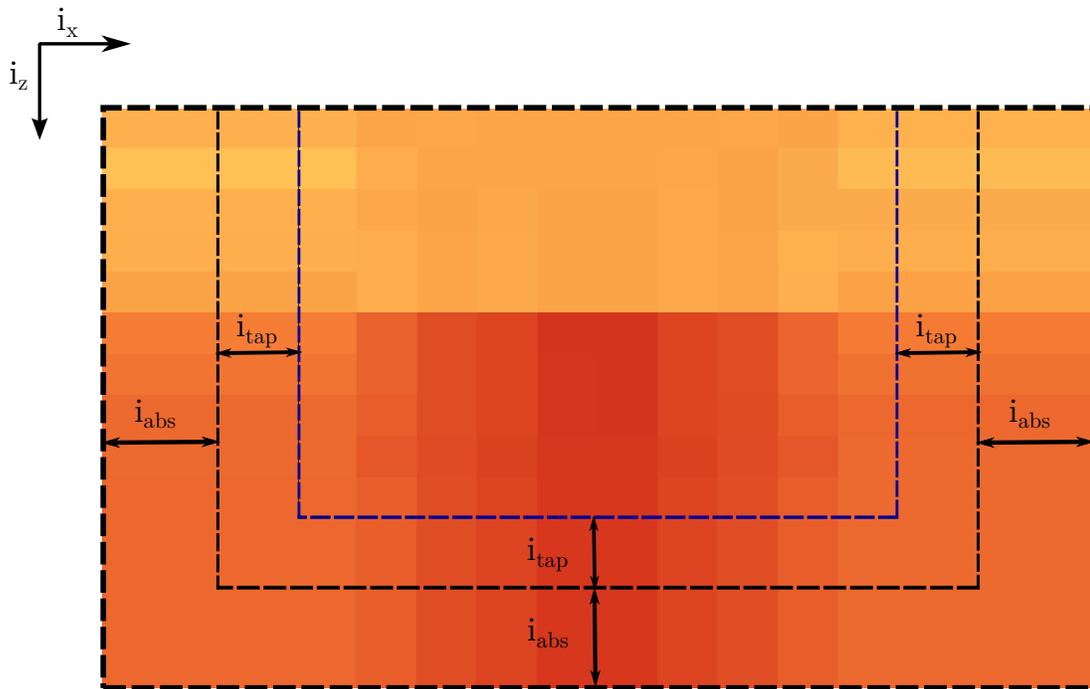


Figura 3: Aumento del mallado intercalado para la región de interés (línea azul), donde las partes i_{ab} corresponden a las zonas de absorción y la región i_{tap} a la zona de transición entre el área de interés y la absorción.

donde $1 \leq i \leq i_{abs}$ y α_{ab} es una constante calculada empíricamente para una absorción óptima. Adicionalmente, nosotros agregamos otra cantidad pequeña de nodos entre la zona de absorción y el área de interés (i_{tap}) donde se calcularán los mismos campos sin condiciones, es decir, ampliamos un poco la región de interés, como se observa en la figura 3, para evitar pequeñas reflexiones espurias aún presentes.

2.2.3. Condición de estabilidad

En el esquema de mallado intercalado de las ecuaciones (45)–(49), los 5 campos (v_x , v_z , τ_{xx} , τ_{zz} , τ_{xz}) del modelado directo son calculados recursivamente cada paso de tiempo. Sin embargo, este cómputo recursivo puede presentar inestabilidad causada por la aproximación discreta de los operadores de derivadas.

Un método para analizar la estabilidad de un esquema en base a diferencias finitas para ecuaciones diferenciales, es el método de Von Neumann. Para ilustrar esta técnica, seguimos el análisis presentado por (Virieux, 1986) y tomando las ecuaciones (45)–(49)

del esquema de mallado intercalado, empleamos como solución aproximada la siguiente expresión:

$$E = e^{i(-\omega t \Delta t + k_x i_x h + k_z i_z h)} \quad (55)$$

Donde i_t , i_x e i_z son los índices de la discretización y k_x y k_z son los componentes del número de onda. Si consideramos una misma discretización vertical y horizontal, $\Delta x = \Delta z = h$, y además asumimos que las velocidades y esfuerzos son de la forma $[v_x]_{i_x, i_z}^{i_t} = A_1 E$, $[v_z]_{i_x, i_z}^{i_t} = A_2 E$, $[\tau_{xx}]_{i_x, i_z}^{i_t} = B_1 E$, $[\tau_{zz}]_{i_x, i_z}^{i_t} = B_2 E$ y $[\tau_{xz}]_{i_x, i_z}^{i_t} = B_3 E$. Substituyendo en el esquema de mallado intercalado obtenemos el siguiente problema de eigenvalores

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \frac{h^2}{\Delta t^2} \sin^2 \left(\omega \frac{\Delta t}{2} \right) = \begin{bmatrix} \alpha^2 \sin^2 \left(k_x \frac{h}{2} \right) + \beta^2 \sin^2 \left(k_z \frac{h}{2} \right) & (\alpha^2 - \beta^2) \sin \left(k_x \frac{h}{2} \right) \sin \left(k_z \frac{h}{2} \right) \\ (\alpha^2 - \beta^2) \sin \left(k_x \frac{h}{2} \right) \sin \left(k_z \frac{h}{2} \right) & \alpha^2 \sin^2 \left(k_x \frac{h}{2} \right) + \beta^2 \sin^2 \left(k_z \frac{h}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}. \quad (56)$$

Realizando un poco de álgebra, encontramos los eigenvalores

$$\Lambda_1 = \alpha^2 \left[\sin^2 \left(k_x \frac{h}{2} \right) + \sin^2 \left(k_z \frac{h}{2} \right) \right] \quad (57)$$

y

$$\Lambda_2 = \beta^2 \left[\sin^2 \left(k_x \frac{h}{2} \right) + \sin^2 \left(k_z \frac{h}{2} \right) \right] \quad (58)$$

de donde saldrá una condición de estabilidad similar para cada Λ . Tomando en cuenta que $\alpha > \beta$, obtenemos la condición de estabilidad más restrictiva de la ecuación (57), dada por

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{h}{V_p}. \quad (59)$$

Esta condición es necesaria pero no suficiente dado que se parte de la solución de onda para un medio homogéneo. Esta condición ha sido verificada por Virieux y Madariaga (1982). La importancia de esta condición de estabilidad radica en la dependencia directa con la velocidad de la onda P y por ende de los demás parámetros (λ , β y ρ), que

resultarán de la inversión.

2.2.4. Implementación computacional

Se realizó un programa en Fortran90 con base en un código en C++ tomado de los trabajos de De Basabe y Sen (2015). El programa resuelve numéricamente las ecuaciones (45)–(49) empleando las condiciones de frontera explicadas anteriormente. Se diseña el esquema de manera que cumpla con las restricciones de estabilidad descritas anteriormente. Los pasos a seguir por nuestro software se describen en el algoritmo 1.

El diagrama de flujo correspondiente al algoritmo 1 se encuentra en la figura 4. En él se incluyen las condiciones de frontera absorbentes. En el esquema, los campos de velocidades y esfuerzos del dominio espacial completo son capturados en rebanadas de tiempo específicas. No obstante, se registran mediciones en puntos específicos del dominio, ya sea en la superficie o en el interior, esto es, se guarda la serie completa de tiempo $v_x(x_s, z_s; t)$, $v_z(x_s, z_s; t)$ y lo mismo para los esfuerzos si se requiere la información de éstos, donde x_s y z_s es la posición de cada uno de los sismómetros. Para los puntos de observación que no coinciden con ninguno de los nodos de la malla, se realiza una interpolación bilíneal de los nodos más cercanos al receptor.

Para visualizar este método, consideremos solo el campo v_x comprendido en la región de 4 nodos cada uno con su correspondiente velocidad, como se observa en la figura 5. Supóngase que tenemos un receptor (triángulo invertido rojo) dentro del área $A = \Delta x \Delta z$ de dicha región colocado en una posición (x_{sis}, z_{sis}) del espacio. Asignaremos el área correspondiente (A_1, A_2, A_3, A_4) a cada nodo respecto al punto de recepción y realizaremos una interpolación líneal utilizando los 4 nodos para medir la serie completa del sismograma de la siguiente manera

$$v_{x_{sis}}(t) = \frac{A_4 v_x(ix, iz) + A_3 v_x(ix + 1, iz) + A_2 v_x(ix, iz + 1) + A_1 v_x(ix + 1, iz + 1)}{A} \quad (60)$$

donde el área del nodo que multiplica al campo de velocidad es el área contraria a la

Entrada:

- Dominio: $n_x, n_z, n_t, isnap, Nosnap$
- Modelo: $\lambda(x, z), \mu(x, z), \rho(x, z)$
- Fuente: x_{source}, z_{source}
- Receptores: $n_s, \vec{r}_{sources}$

1 Comienzo del Modelado directo;

2 **Para** $it=0:nt$ **hacer**

3 **Para** $ix=1:nx$ **hacer**

4 **Para** $iz=1:nz$ **hacer**

5 Calcular v_x y v_z con las ecuaciones (45) y (46)

6 **Fin**

7 **Fin**

8 **Para** $ix=1:nx$ **hacer**

9 **Para** $iz=1:nz$ **hacer**

10 Calcular τ_{xx}, τ_{zz} y τ_{xz} con las ecuaciones (47), (48) y (49)

11 **Fin**

12 **Fin**

13 Aplicar condiciones de frontera absorbentes;

14 Impresión de los campos cada cierto tiempo;

15 **si** $isnap=Nosnap$ **entonces**

16 **Salida:** $v_x(x, z; it), v_z(x, z; it), \tau_{xx}(x, z; it), \tau_{zz}(x, z; it)$ y $\tau_{xz}(x, z; it)$

16 $isnap=0$;

17 **fin**

18 $isnap=isnap+1$;

18 **Salida:** $v_{x_{sis}}(t), v_{z_{sis}}(t), \tau_{xx_{sis}}(t), \tau_{zz_{sis}}(t)$, y $\tau_{xz_{sis}}(t)$

19 **Fin**

20 Final del Modelado directo.

Algoritmo 1: Algoritmo de cálculo de campo de velocidades y esfuerzos (Modelado directo)

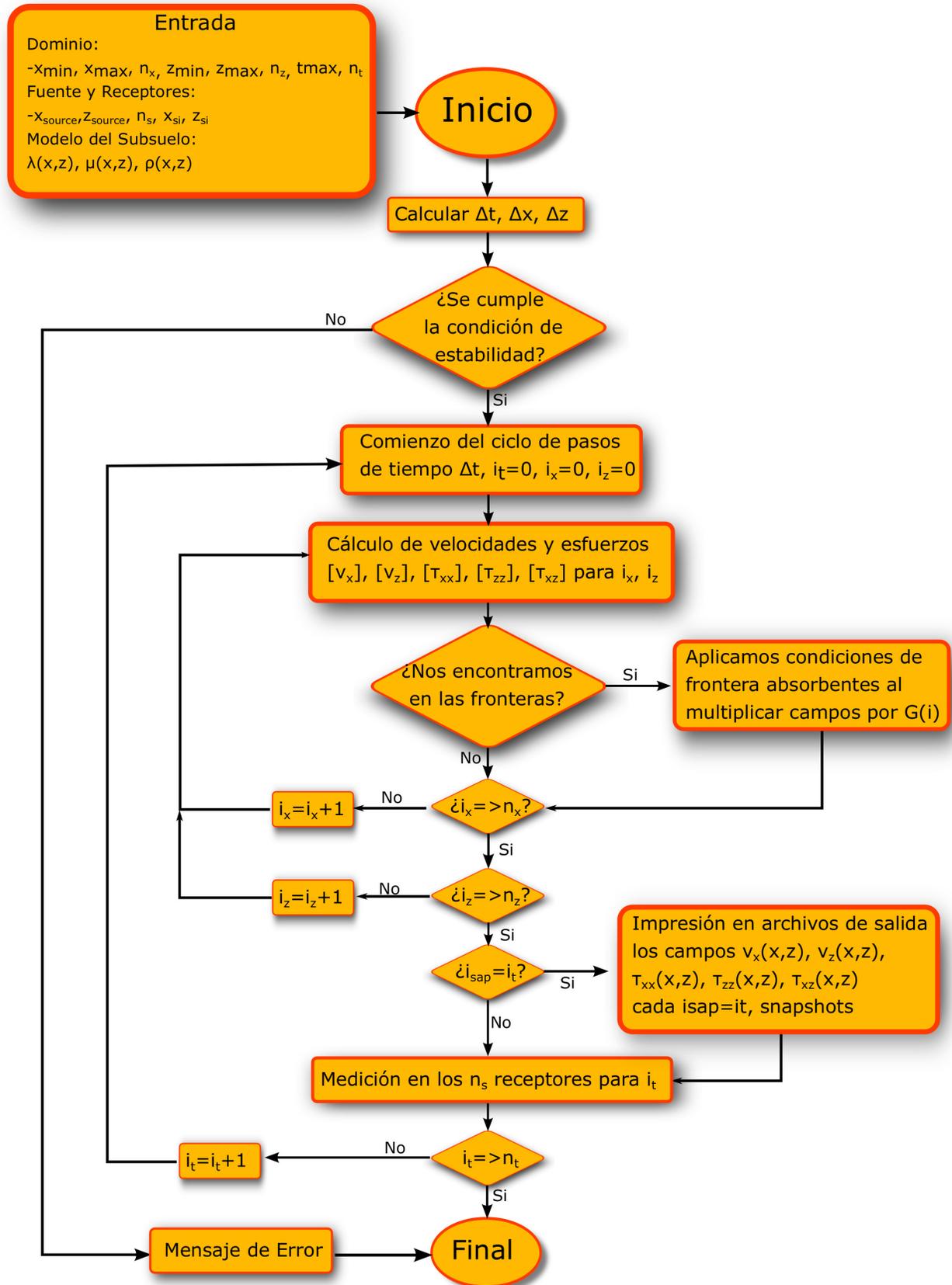


Figura 4: Diagrama de flujo para el esquema de modelado numérico de forma de onda elástica

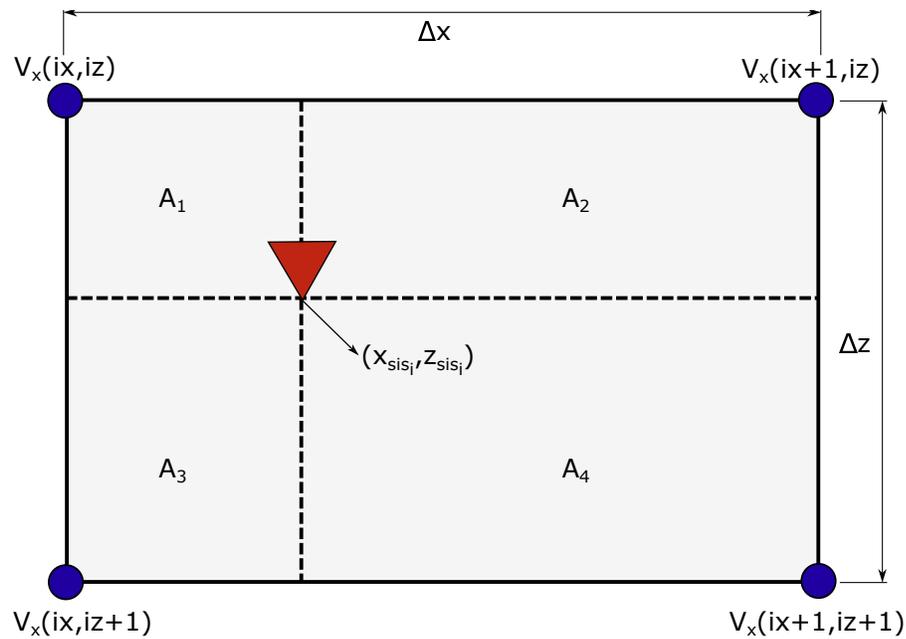


Figura 5: Interpolación lineal para la medición de los receptores en cualquier lugar del mallado .

suya, esto es para garantizar que el nodo que se encuentre más cerca del sismograma sea el que mayor aporte a la medición, dado que el nodo más cercano tendrá el área contraria mayor, como se observa en la figura 5. De igual manera se realiza este procedimiento para la velocidad vertical y los esfuerzos, si se desean medir.

2.2.5. Paralelización

En nuestro código Fortran90 implementado para modelado numérico de la ecuación de elastodinámica, empleamos dos ciclos anidados para x y z para calcular velocidades y esfuerzos para una rebanada de tiempo dada, como se ilustra en el diagrama de flujo de la figura 4. Este par de ciclos pueden ser paralelizados por el compilador por que cada iteración es independiente de la otra, dado que las operaciones para calcular velocidades y esfuerzos sólo dependen de la rebanada de tiempo anterior ($it-1$) y no de la presente.

Para paralelizar el algoritmo 1 se utilizó OpenMP(Open Multi-Processing), el cual es una aplicación de interfaz de programación (API) que soporta multiplataformas de memoria compartida para programación en C/C++ y Fortran, y se puede utilizar con los compiladores de GNU, Intel y otros. OpenMP consiste en una serie de directivas de compilador, librerías y variables de entorno que influye en el comportamiento en el tiempo de

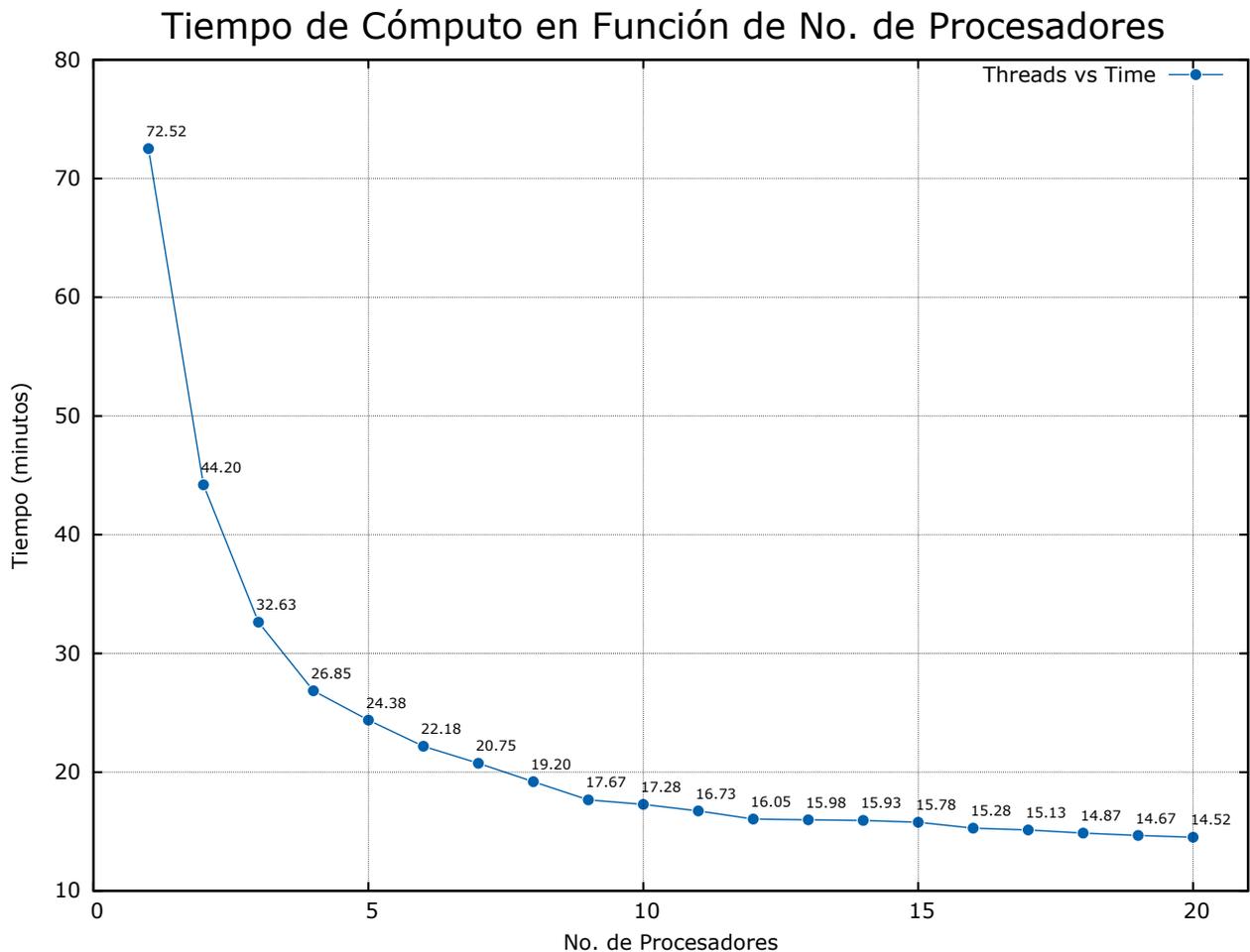


Figura 6: Relación de tiempo de cómputo de nuestro código de modelado directo, apéndice A, contra el número de procesadores (1, 2, ..., 20) empleados en la paralelización usando openMP.

ejecución del programa.

En la ejecución del programa, hacemos uso del cluster (cúmulo de computadoras) Lamb del CeMIE Geo, el cual consiste en 24 nodos con de 20 núcleos Intel Xeón con memoria RAM de 128 GB y otros 5 nodos AMD Opteron de 32 núcleos de 64 GB de memoria RAM.

Para comprobar la eficiencia de la paralelización de nuestro programa, realizamos una serie de experimentos para un modelo de prueba, con $n_x \times n_z = 1600^2$ nodos en espacio por $n_t = 3200$ pasos en tiempo utilizando el código de modelado directo del Apéndice A. Realizamos pruebas con 1, 2, 4, 8, 16 y 20 procesadores tomando nota del tiempo de cómputo. Como se observa en la figura 6, el aumento gradual de 1 a 20 procesadores

reduce hasta en una cuarta parte del tiempo total de cómputo para un modelo del número de nodos descrito previamente. Si bien es de esperarse que el tiempo de cómputo sea mucho menor para un grande número de procesadores, se debe tener en cuenta que la paralelización solo ocurrió en los ciclos de cálculo de campos, procesos como impresión de archivos de salida de velocidades, medición en sismogramas, funciones externas como la de condiciones de frontera y otros cálculos pequeños, en conjunto también emplean tiempo de cómputo significativo.

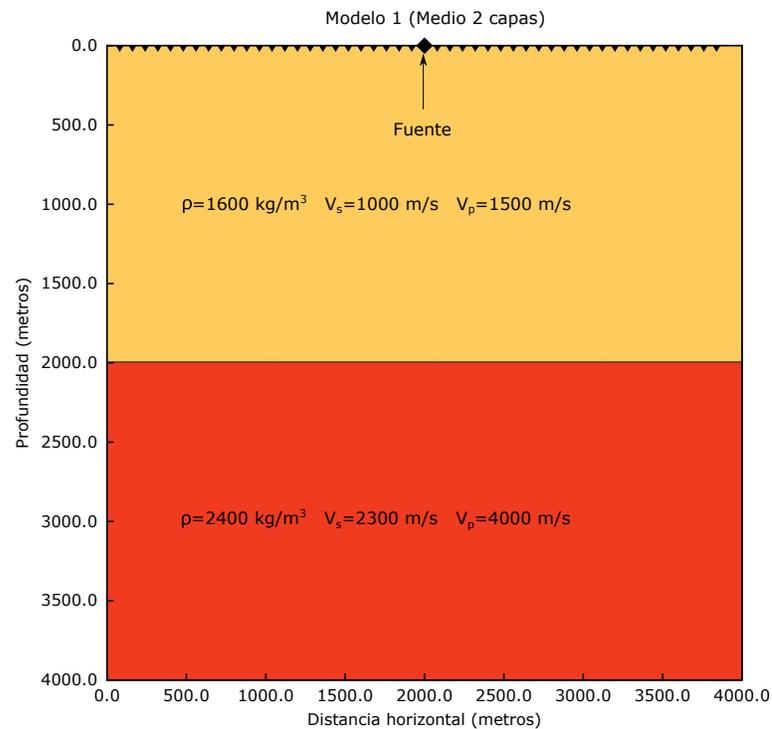


Figura 7: Medio dos capas con fuente en $(x = 2000\text{m}, z = 0\text{m})$, donde la interfaz se encuentra a 2 km de profundidad. Los 48 receptores están colocados en la superficie separados 80 metros a partir de 80 metros del origen.

2.3. Validación del esquema numérico de modelado

Para verificar el funcionamiento del algoritmo de modelado directo, se realizaron varios experimentos para diferentes modelos sintéticos. La discretización en tiempo y en espacio cambia para cada uno, así como la posición de la fuente, de los sismogramas y de las interfaces entre capas. Nuestros resultados son producto de la aplicación de una ondulada de Ricker tanto para modelado directo como inverso. Se tomaron las precauciones necesarias para cumplir con la condición de estabilidad en la simulación numérica.

2.3.1. Ejemplo 1: Medio de dos capas homogéneas

Primero, consideremos el medio de dos capas de la figura 7. Los límites de la región son 4 km vertical y horizontalmente, donde la interfaz entre capas se encuentra a 2 km de profundidad. Se coloca una sola fuente vertical en la superficie a 2000 metros del origen ($F(x, z; t) = F(2000, 0, t)$) y realizamos mediciones de la velocidad horizontal (v_x) y vertical (v_z) en 48 sismogramas separados cada 80 metros, donde el primer receptor se encuentra a 80 metros del origen del dominio.

En la primer capa, suponemos una densidad $\rho = 1600 \text{ kg/m}^3$ y velocidades de onda $V_s = 1000 \text{ m/s}$ y $V_p = 1500 \text{ m/s}$. La siguiente capa tendrá un contraste muy marcado en sus propiedades, tendremos una densidad $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$ y velocidades de onda $V_s = 2300 \text{ m/s}$ y $V_p = 4000 \text{ m/s}$.

Discretizamos el dominio en $n_x = n_z = 1600$ celdas en x y z , que corresponderá a una resolución espacial $\Delta x = \Delta z = 2.5$ metros. Simulamos con nuestro código de modelado de forma de onda durante un tiempo $t = 4$ segundos con 9600 muestras en los sismogramas, el cual corresponderá a un muestreo de $\Delta t = 0.000417 \text{ s}$, muestreo bastante pequeño, pero necesario para satisfacer la condición de estabilidad,

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta x}{V_{\text{MAX}}} = 4.420 \times 10^{-4}$$

Computacionalmente, el modelado de 1600×1600 celdas en 9600 rebanadas de tiempo será relativamente costoso para una computadora de uso personal. Por eso, hemos paralelizado el código Fortran de modelado directo mediante las instrucciones descritas anteriormente (Sección 2.2.5). El uso de 20 procesadores en la simulación de nuestro problema reduce significativamente el tiempo de cómputo, como se observó anteriormente.

Primero, presentamos la simulación de las velocidades y sus respectivos sismogramas sin considerar las condiciones de frontera absorbentes descritas previamente. La evolución en tiempo de los campos de velocidades v_x y v_z y la toma de la serie completa de tiempo $v_x(t)$ y $v_z(t)$ en los 48 sismogramas se muestran en las figuras 8, 10, 9 y 11 respectivamente.

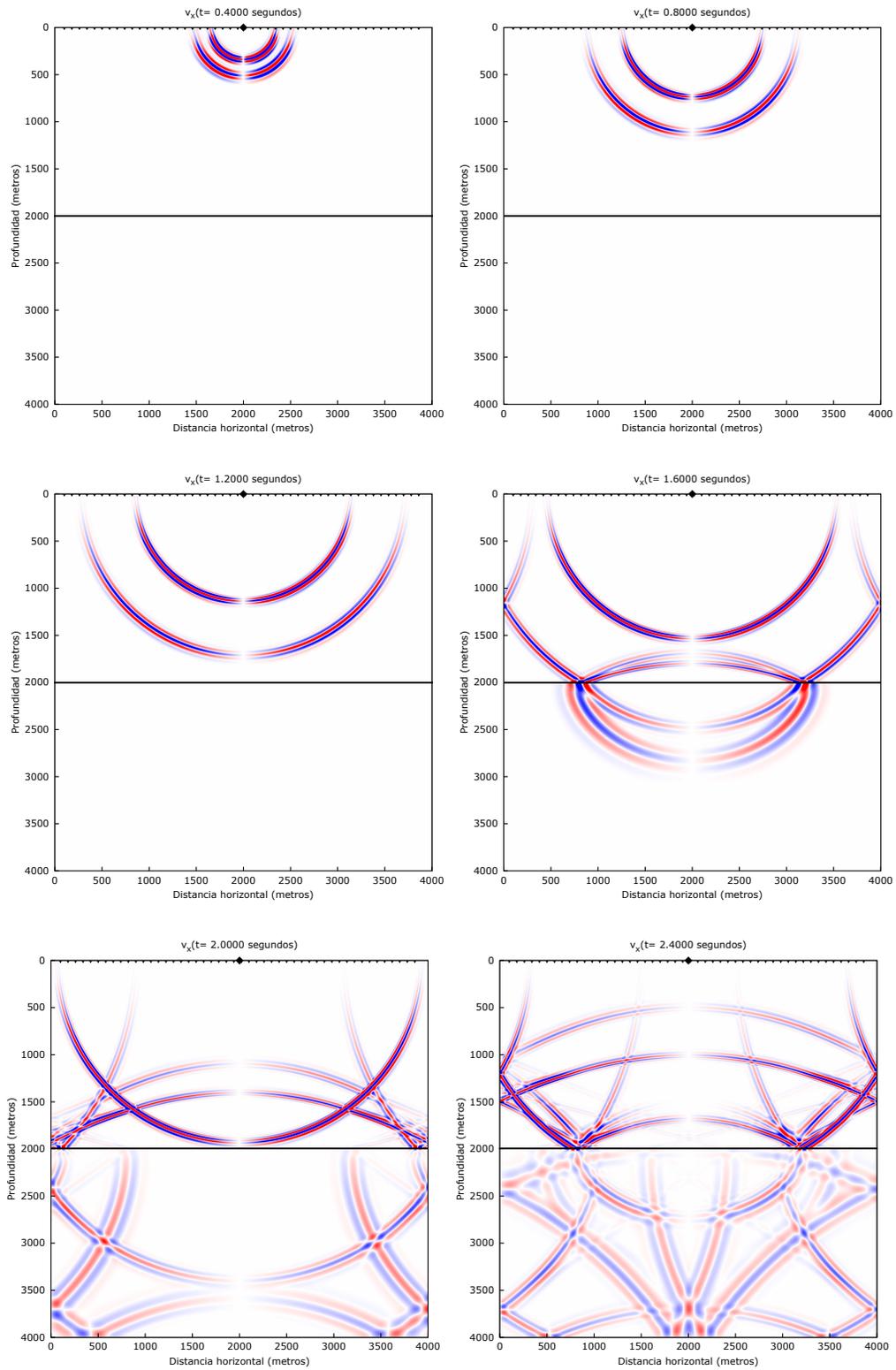


Figura 8: Modelado directo de v_x para el modelo de prueba de la figura 7, donde se realizó una captura cada $t = 0.4$ segundos, sin aplicar condiciones de frontera. Donde \blacktriangledown son los receptores y \blacklozenge es el origen de la fuente $(2000,0)$. La línea negra continua representa el límite entre capas.

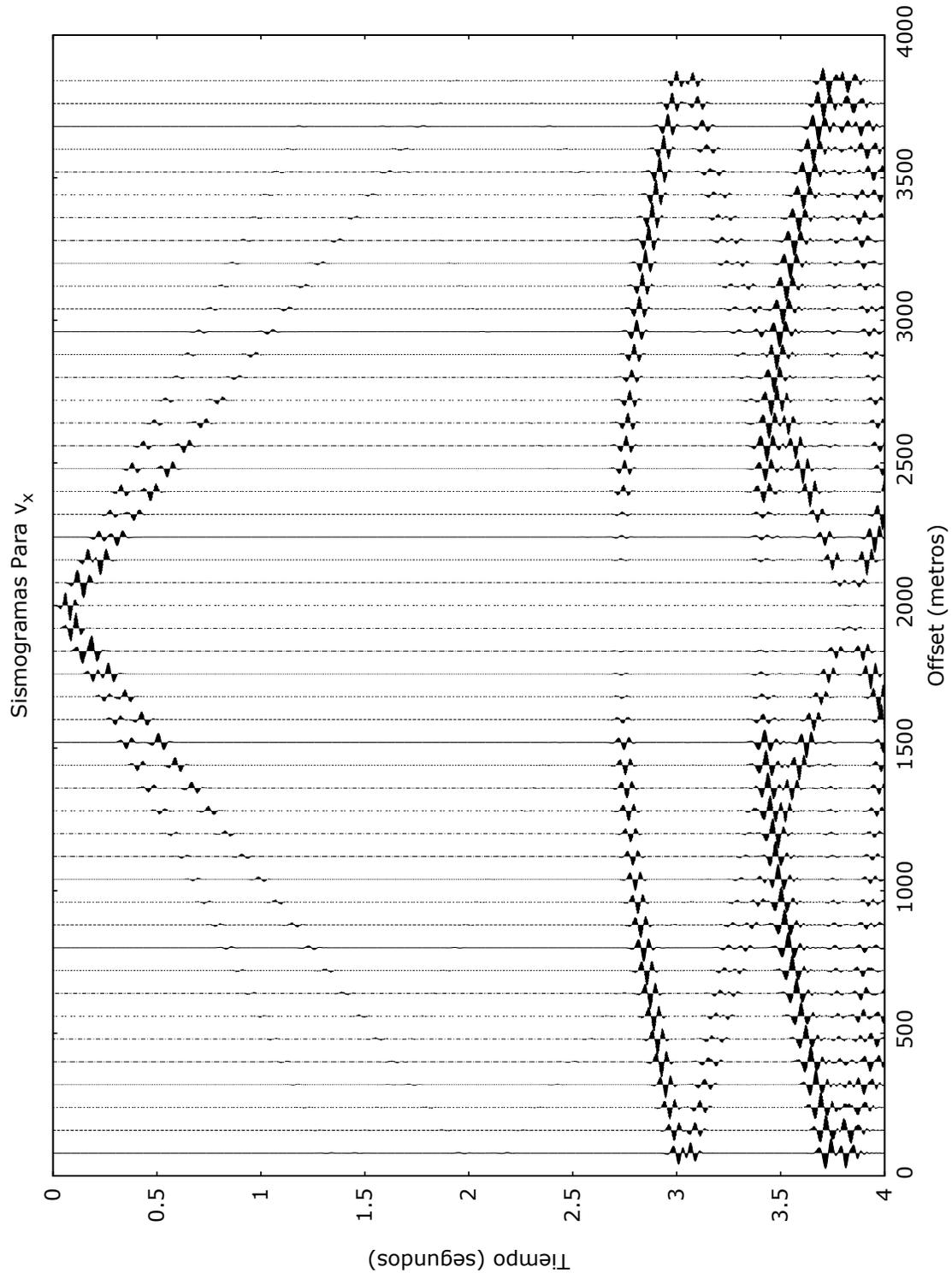


Figura 9: Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio. La serie completa de tiempo corresponde a la velocidad de la figura 8

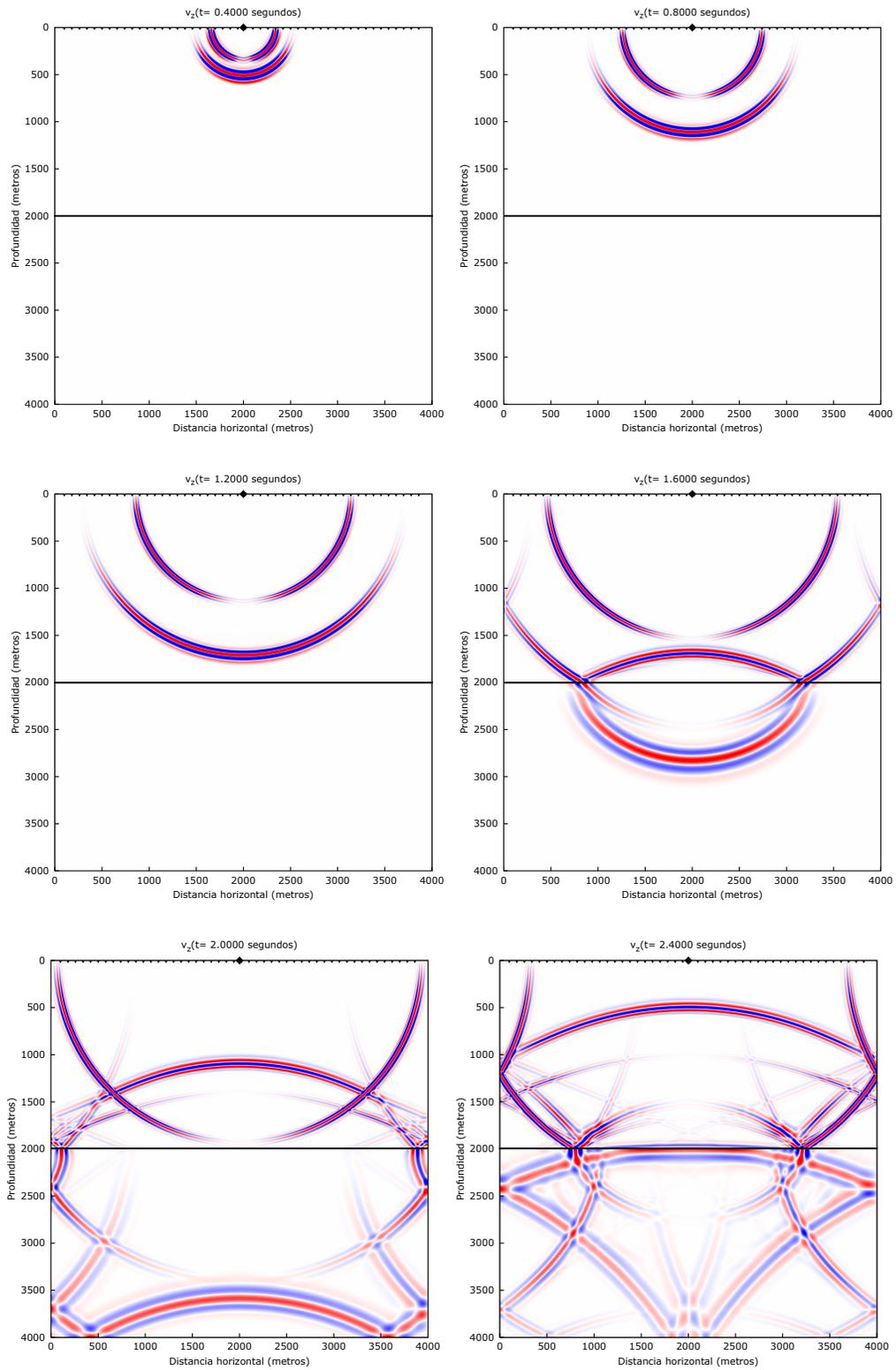


Figura 10: Modelado directo de v_z para el modelo de prueba de la figura 7, donde se realizó una captura cada $t = 0.4$ segundos, sin aplicar condiciones de frontera. Donde \blacktriangledown son los receptores y \blacklozenge es el origen de la fuente (2000,0). La línea negra continua representa el límite entre capas.

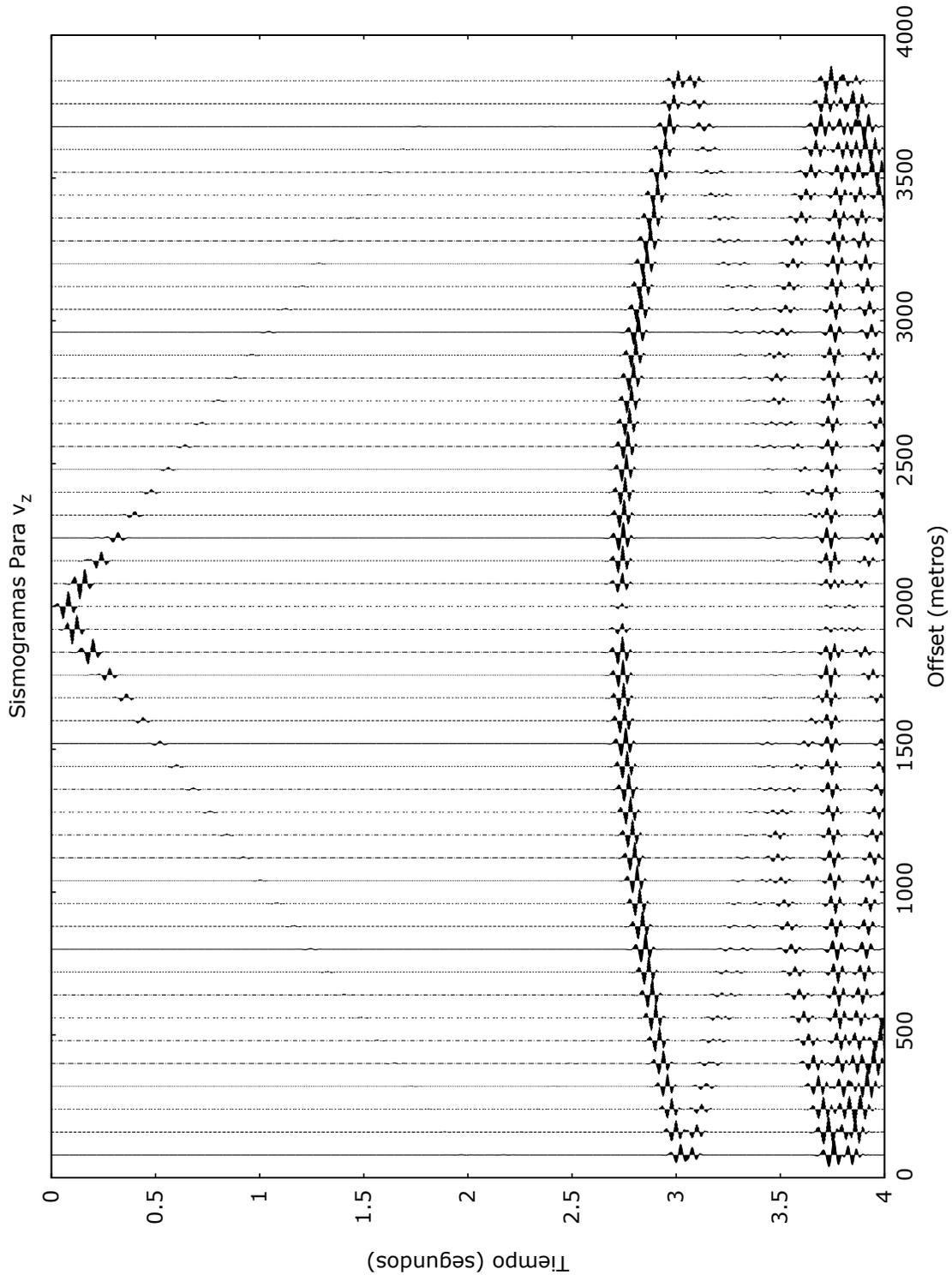


Figura 11: Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio. La serie completa de tiempo corresponde a la velocidad de la figura 10

En estos resultados, se observa que las velocidades de ondas P y S van acorde a los parámetros de entrada, además, como es de esperarse, cuando la onda P alcanza la interfaz entre ambos medios, aparecen ondas P y S reflejadas así como ondas P y S transmitidas, como se observa en la figura 8 para v_x y 10 para v_z en la rebanada de tiempo $t = 1.6$ segundos. Otro aspecto evidente en estos resultados son las reflexiones espurias debido a la omisión de condiciones a la frontera absorbentes. Cuando la onda alcanza los extremos del dominio en $x = 0$ y $x = 4$ km, esta comienza a rebotar en dirección contraria alrededor de $t = 1.33$ segundos para la onda P y $t = 2$ segundos para la onda S de la misma forma como si se encontrara otro medio con diferentes propiedades. De igual manera cuando ésta alcanza el fondo del modelo, comenzarán a aparecer rebotes hacia la superficie no deseados. La medición en los 48 receptores (figuras 9 y 11) también se ve afectada por no utilizar las condiciones de frontera absorbentes en los límites del dominio.

Para mitigar este efecto no deseado hacemos uso de las condiciones de frontera de la sección 2.2.2, aumentando el dominio de la figura 7 como en el ejemplo de la figura 3. El aumento de nodos y la elección de la constante α de la ecuación (54) se hará en base a prueba y error hasta borrar la aparición de estas reflexiones espurias. El espesor de la zona absorbente será de una cuarta parte de los nodos de x para la absorción lateral y una cuarta parte de los nodos en z en profundidad. De esta manera se tendrá calibrado el código de modelado directo para la presentación de los siguientes resultados.

Por ejemplo, realizamos la misma propagación de onda para el medio 1 (figura 7) considerando condiciones de frontera absorbentes. Tomaremos los mismos parámetros de entrada en el programa, para poder comparar con el modelado sin aplicar condiciones de frontera absorbentes. Los resultados en los campos v_x y v_z (figuras 12 y 14), muestran la eficiencia de estas condiciones, eliminando todas las reflexiones de los bordes laterales del dominio y del borde inferior. Las reflexiones de la superficie no se verán afectadas, dado que éstas si son de esperarse en el modelado del problema. De igual manera, el muestreo de ambas series de tiempo (figuras 13 y 15) presenta limpieza de éstas reflexiones en todas sus trazas, a diferencia de los resultados sin aplicar condiciones de frontera absorbentes.

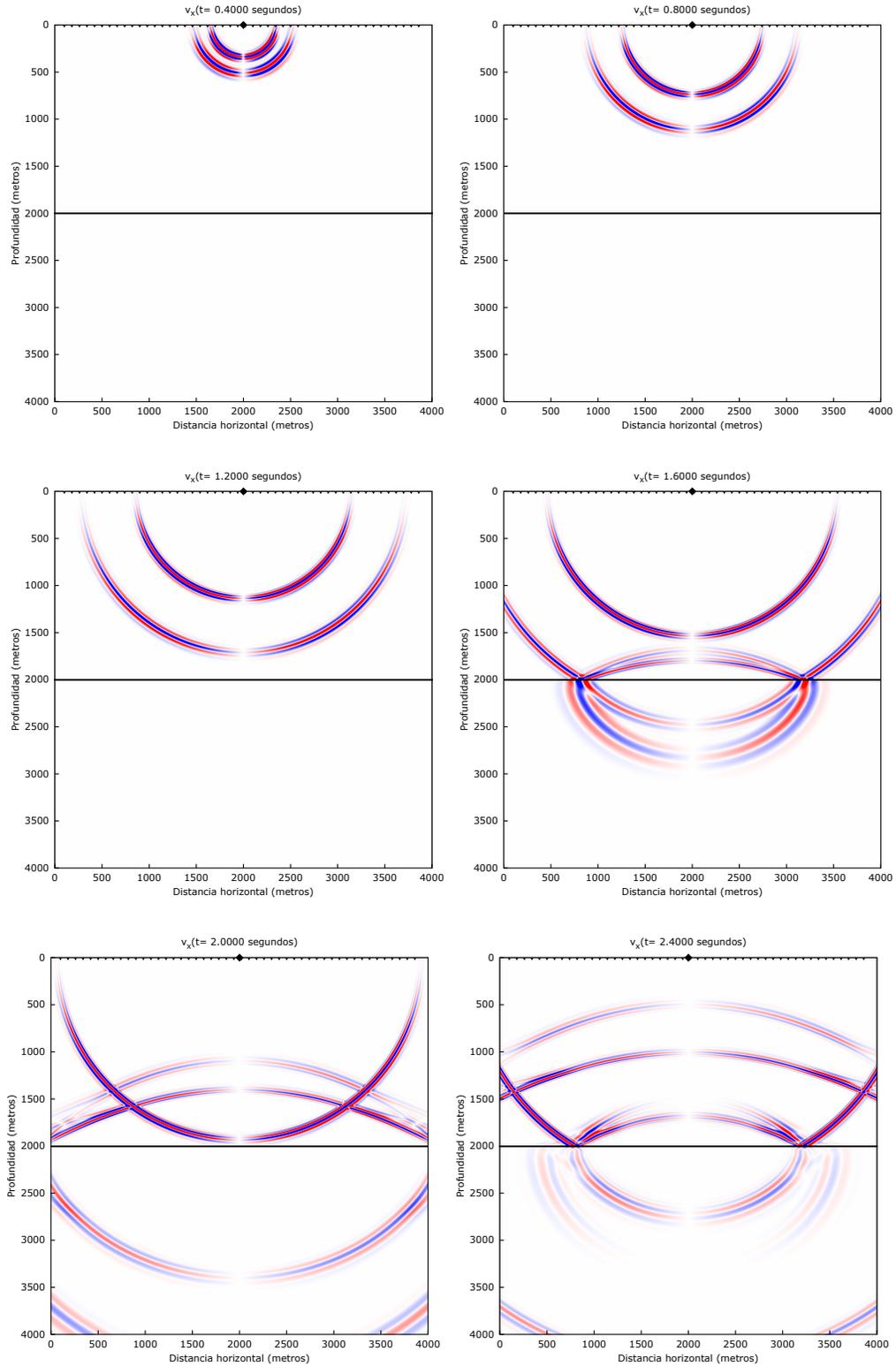


Figura 12: Modelado directo de v_x para el modelo de la figura 7, donde se realizó una captura cada $t = 0.4$ segundos. En esta ocasión se implementaron condiciones de frontera del tipo absorbentes. Donde ∇ son los receptores y \blacklozenge es el origen de la fuente (2000,0). La línea negra continua representa el límite entre capas.

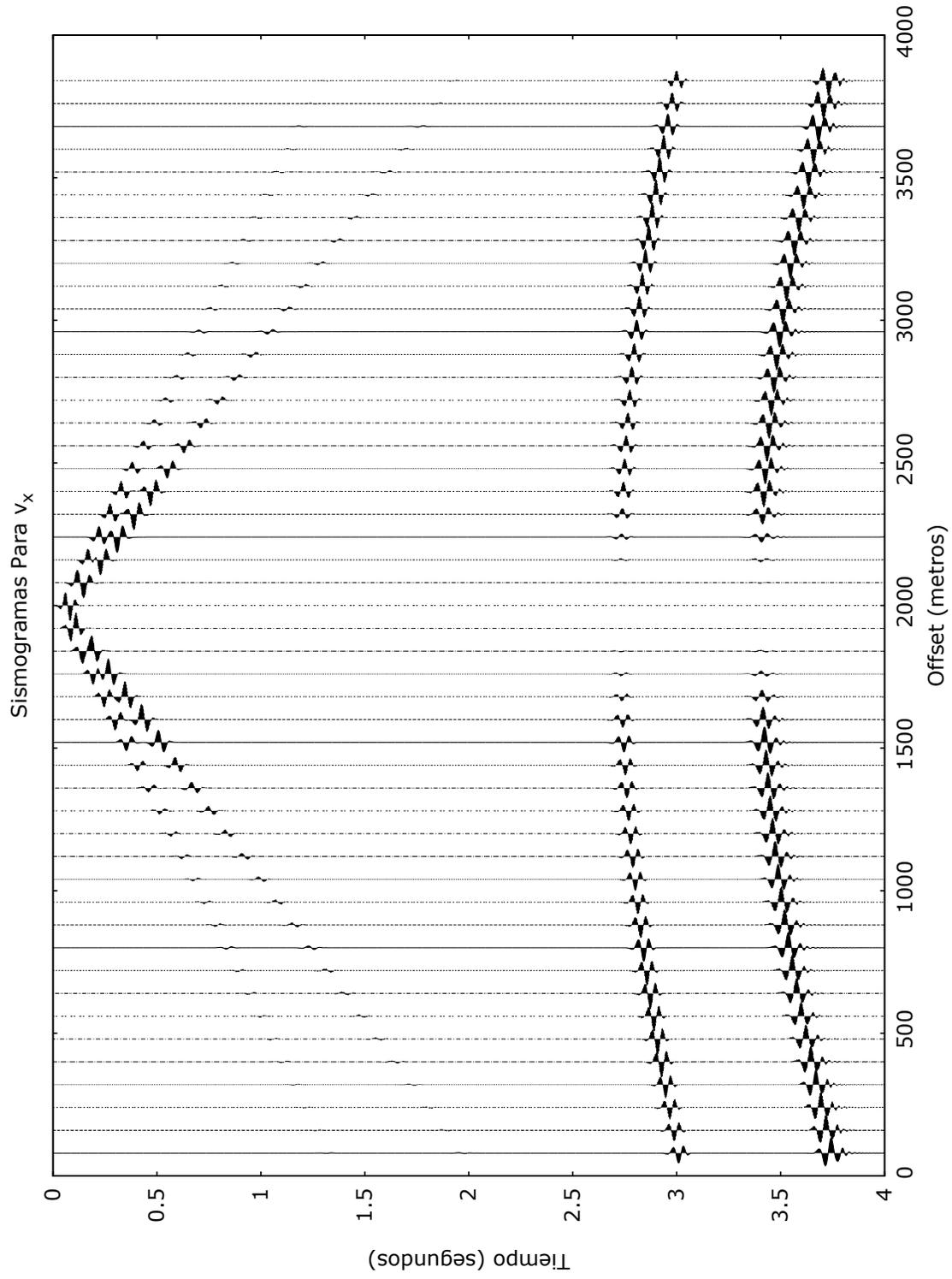


Figura 13: Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio. La serie completa de tiempo corresponde a la velocidad de la figura 12

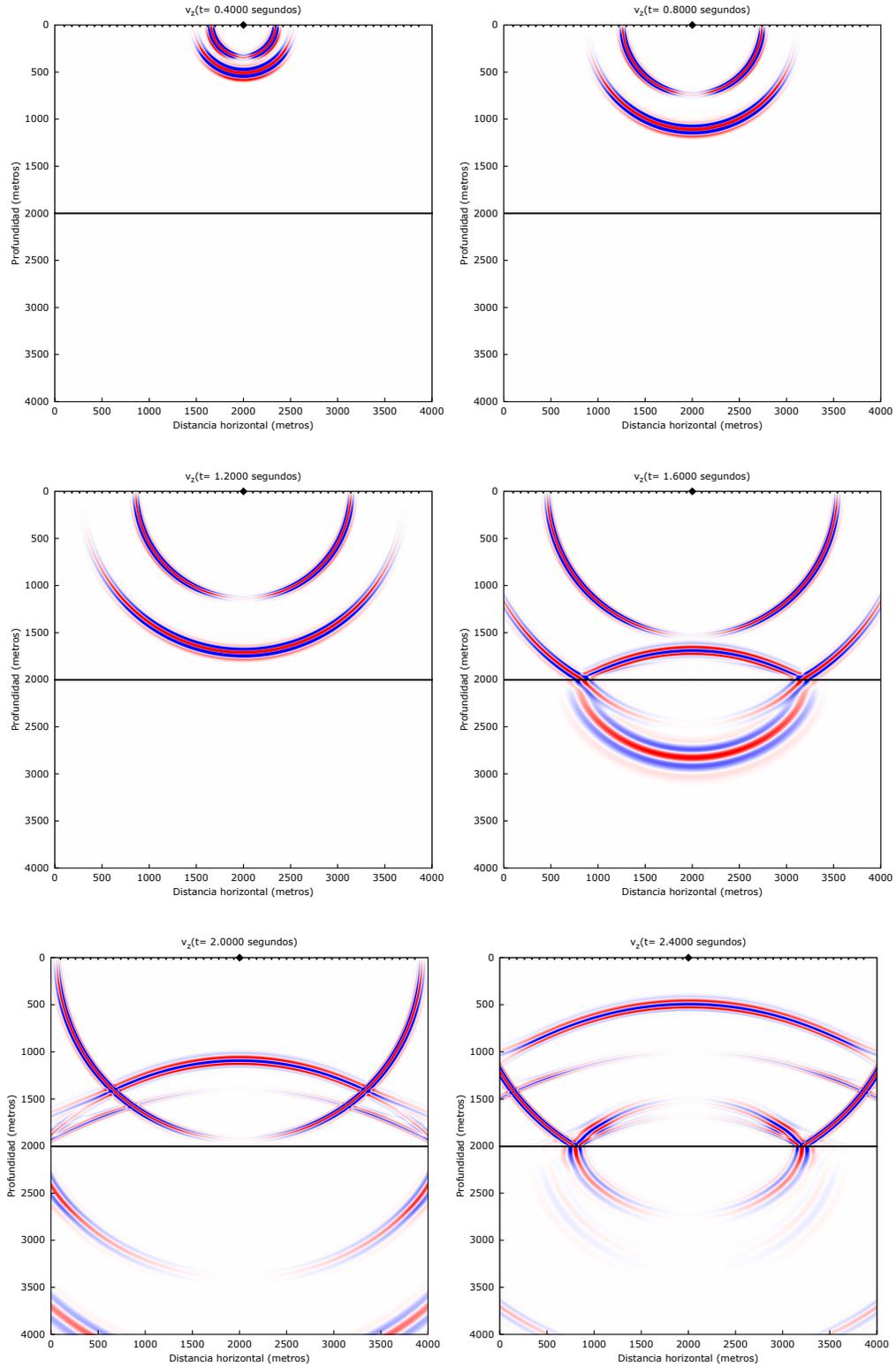


Figura 14: Modelado directo de v_z para el modelo de la figura 7, donde se realizó una captura cada $t = 0.4$ segundos. En esta ocasión se implementaron condiciones de frontera del tipo absorbentes. Donde \blacktriangledown son los receptores y \blacklozenge es el origen de la fuente (2000,0). La línea negra continua representa el límite entre capas.

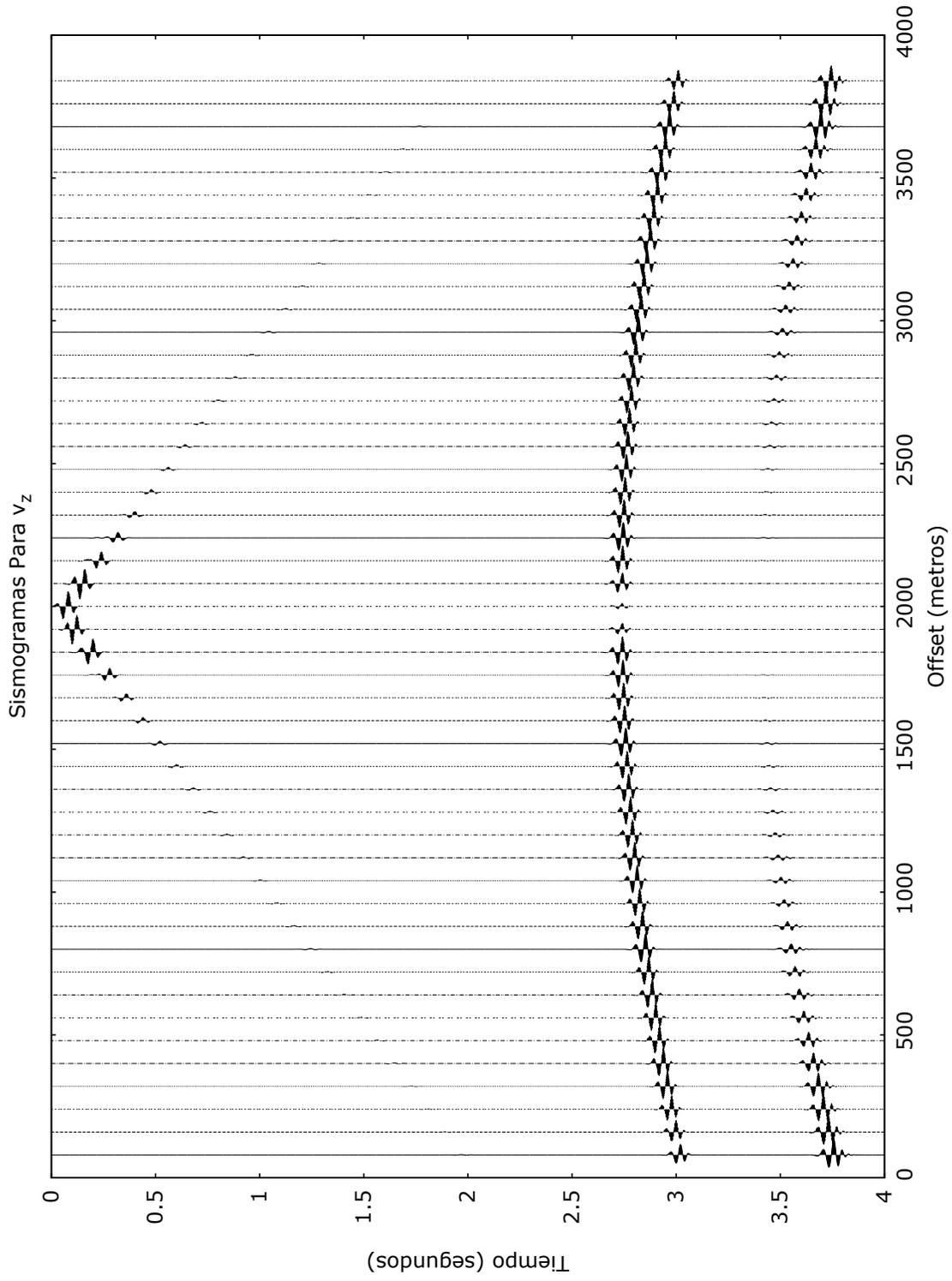


Figura 15: Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio. La serie completa de tiempo corresponde a la velocidad de la figura 12

2.3.2. Ejemplo 2: Una discontinuidad con escalones en un medio de dos capas horizontales.

Ahora, tomamos el mismo medio de dos capas de la figura 7, agregando un bloque con las mismas propiedades de la capa inferior entre $1000 \leq x \leq 3000$ y $1000 \leq z \leq 2000$. La posición y separación de los sismogramas será la misma, pero ahora colocaremos la fuente en el origen del dominio. Se hace la misma discretización en tiempo y en espacio, por lo que la condición de estabilidad también se cumplirá para este ejemplo.

La forma irregular del modelo nos hace esperar ondas difractadas en las esquinas del bloque, las cuales pueden interpretarse como emisores puntuales en los sitios de difracción, como se observa en los resultados del modelado directo para las velocidades en las figuras 17 y 19, en los tiempos donde la onda directa alcanza estos bordes.

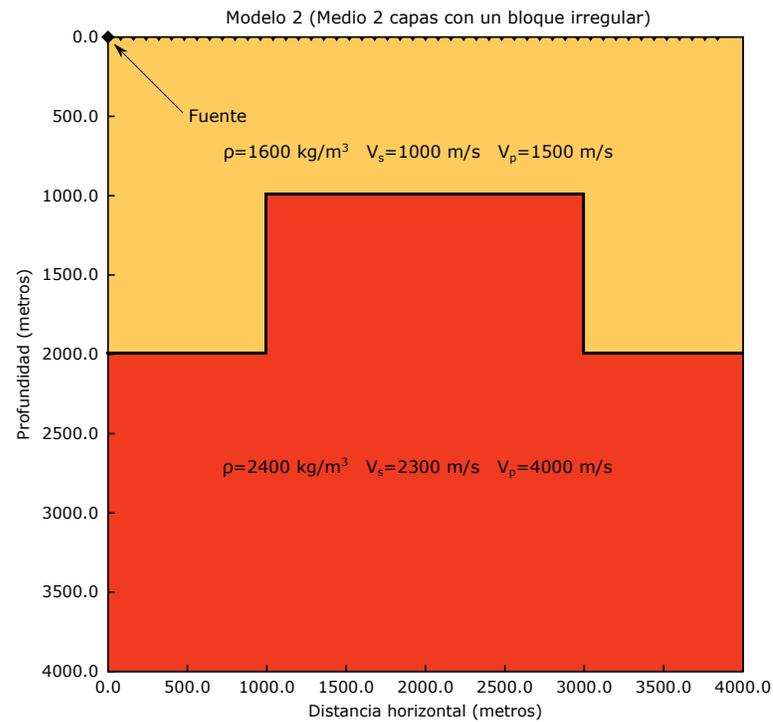


Figura 16: Medio de dos capas con una heterogeneidad en la interfaz de las capas, donde la fuente (◆) se encuentra en el origen del dominio, la interfaz se encuentra a 2 km de profundidad con un bloque entre $1000 \leq x \leq 3000$ y $1000 \leq z \leq 2000$ metros con propiedades de la capa de abajo. Los 48 receptores (▼) están colocados en la superficie separados 80 metros a partir de 80 metros de la fuente

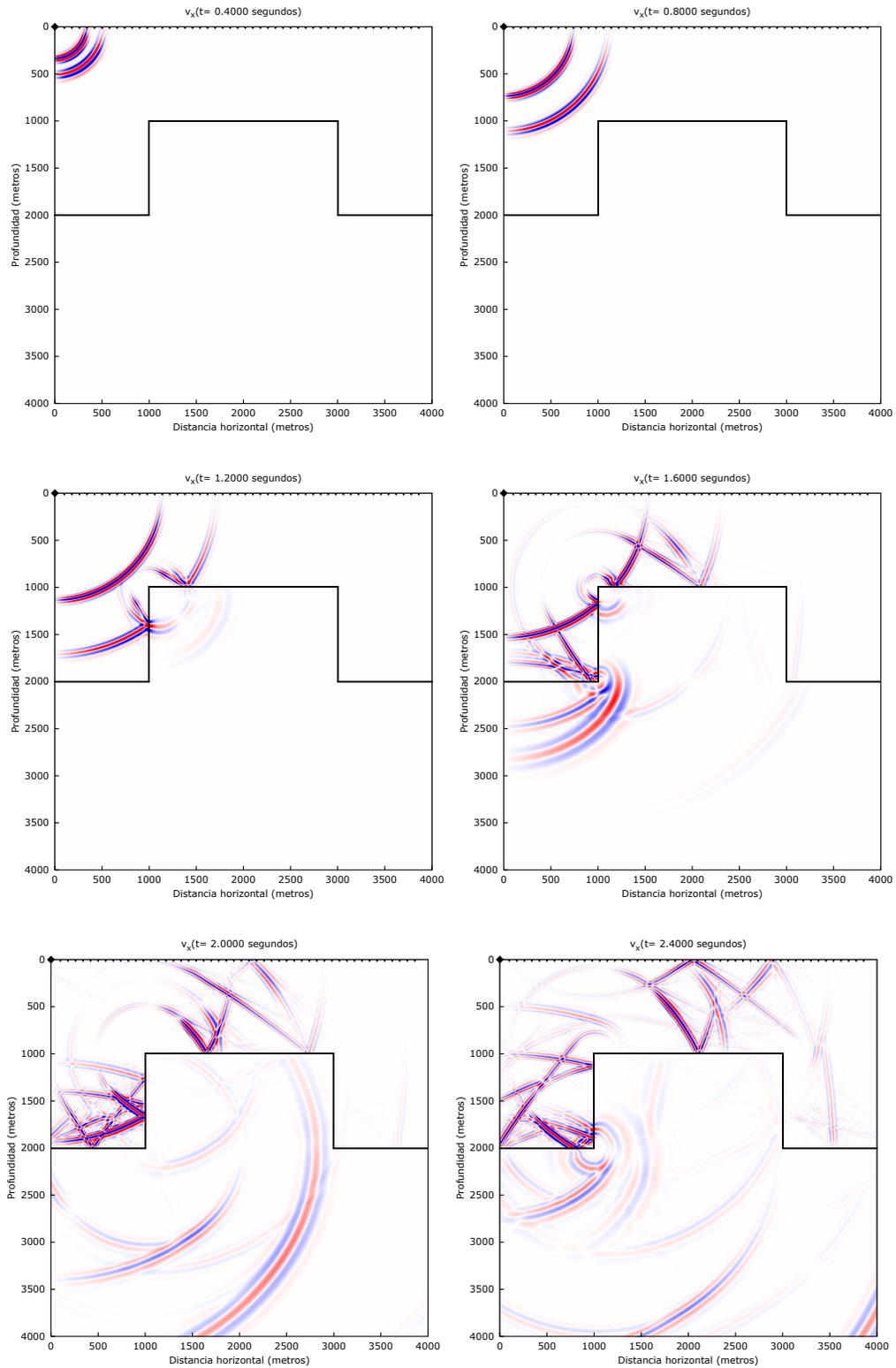


Figura 17: Modelado directo de v_x para el modelo de la figura 16, donde se realizó una captura cada $t = 0.4$ segundos. Se utilizaron condiciones de frontera absorbentes. Donde \blacktriangledown son los receptores y \blacklozenge es el origen de la fuente (2000,0). La línea negra continua representa el límite entre diferentes medios.

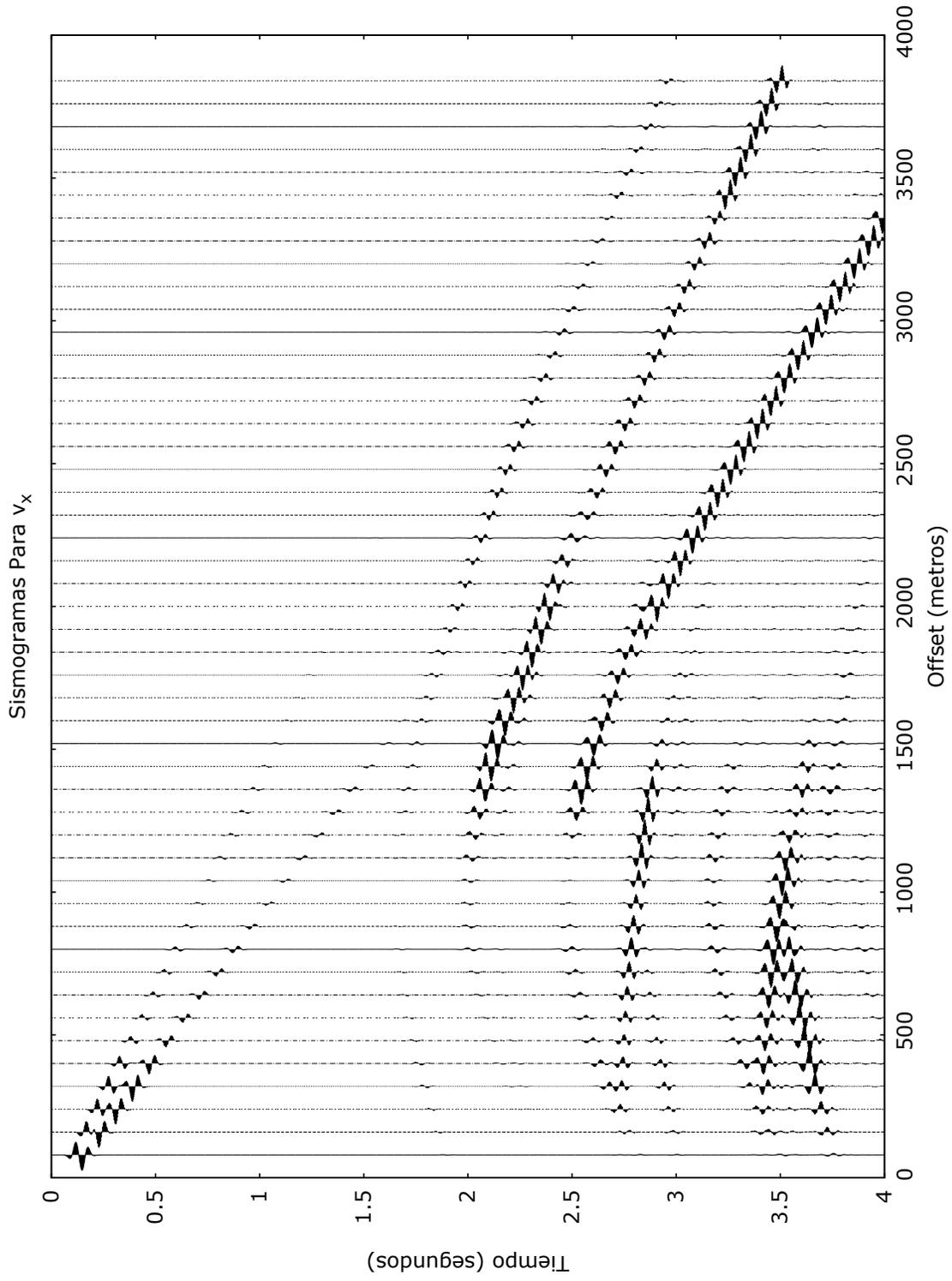


Figura 18: Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio. La serie completa de tiempo corresponde a la velocidad de la figura 17

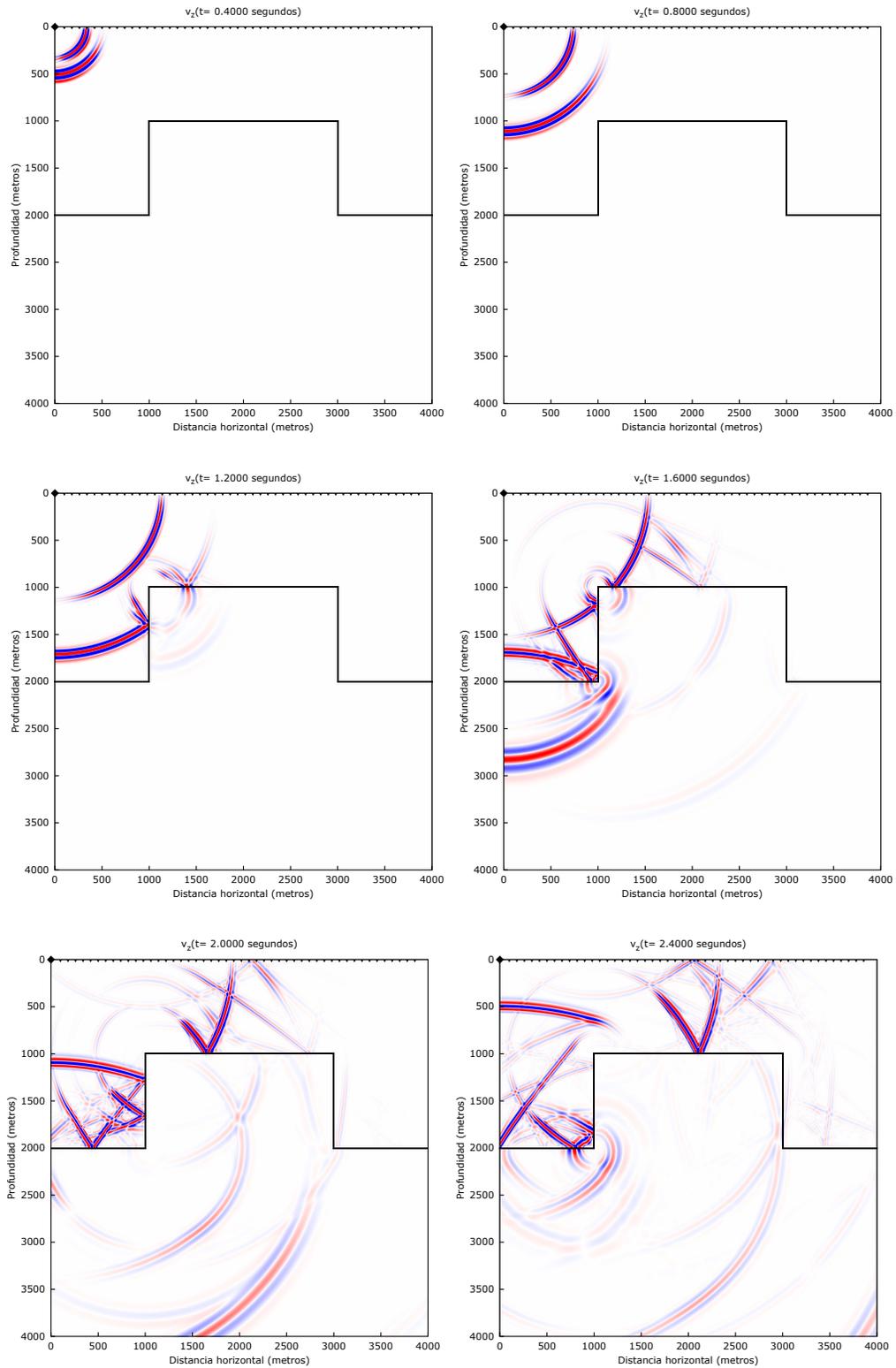


Figura 19: Modelado directo de v_x para el modelo de la figura 16, donde se realizó una captura cada $t = 0.4$ segundos. Se utilizaron condiciones de frontera absorbentes, donde \blacktriangledown son los receptores y \blacklozenge es el origen de la fuente (2000,0). La línea negra continua representa el límite entre diferentes medios.

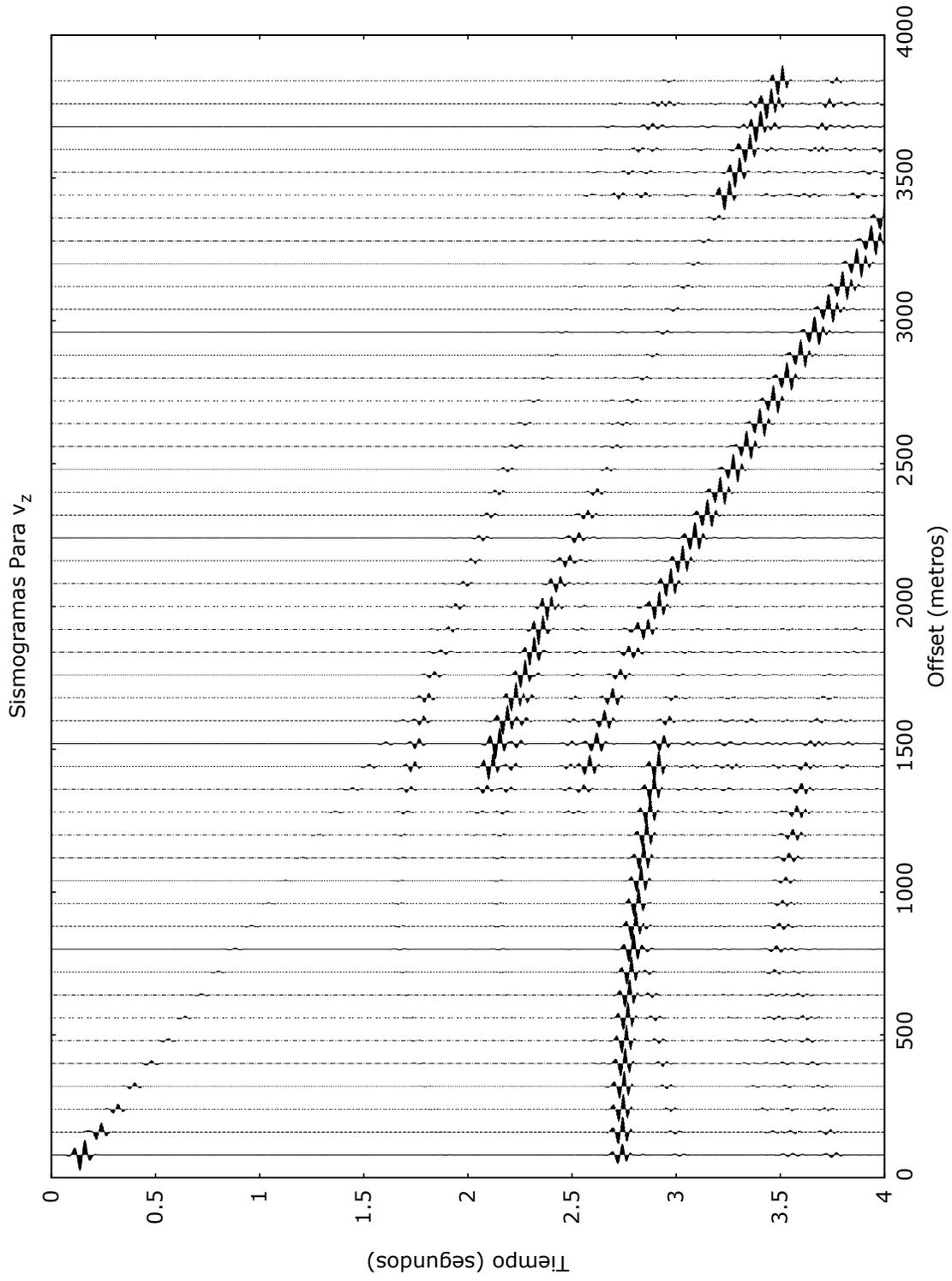


Figura 20: Medición en los 48 receptores ubicados en la superficie cada 80 metros del origen del dominio. La serie completa de tiempo corresponde a la velocidad de la figura 19

2.3.3. Ejemplo 3: Perfil sísmico vertical en un medio estratificado

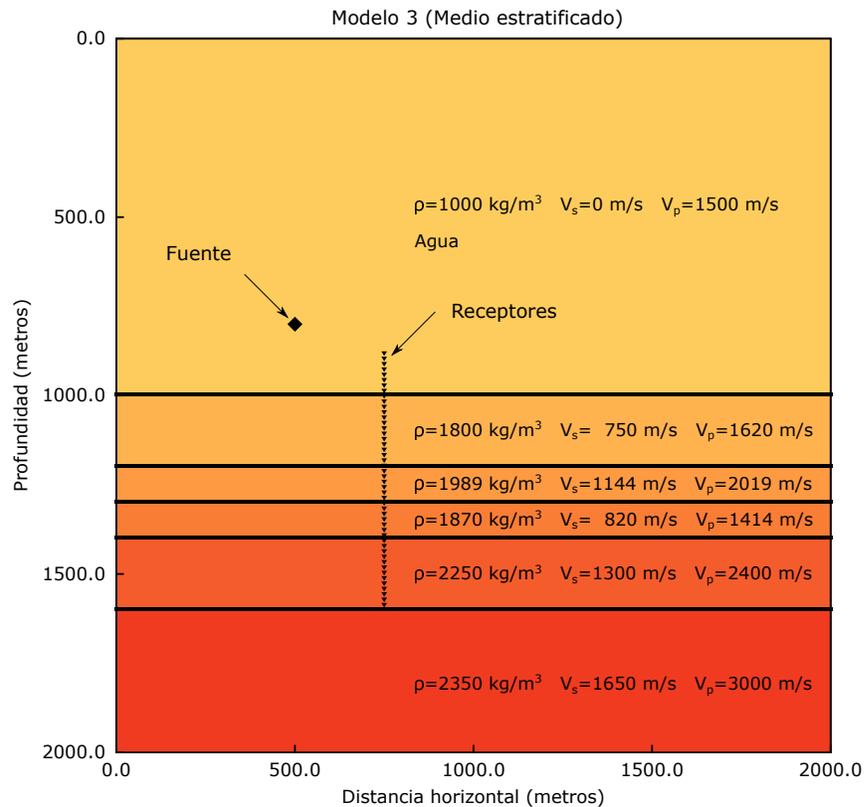


Figura 21: Medio estratificado para un perfil sísmico vertical. El modelo de 6 capas incluye agua (medio acústico). Las propiedades V_p , V_s y ρ del modelo difieren de cada capa. La fuente (◆) se encuentra en el punto $x = 500$ y $z = 800$ metros. Los receptores (▼) están colocados verticalmente a lo largo de un pozo. Los valores de las propiedades fueron tomadas de Thakur y Rajput (2010).

Por último, y para completar la parte de la verificación del modelado directo, se tomó un medio estratificado (figura 21) con las propiedades y posiciones de capas tomadas de Thakur y Rajput (2010). Este ejemplo consiste en un perfil sísmico vertical, donde colocaremos receptores verticalmente en un pozo y aplicaremos la fuente a una profundidad de 800 metros y a 500 metros de distancia horizontal del dominio.

En las 6 capas del ejemplo, se incluye una capa superior de agua con 1000 metros de profundidad, entonces, la fuente que ocurre en esta primera capa acústica, solo presentará ondas P en el modelado directo. Los 48 sismómetros se encuentran 250 metros de distancia horizontal a la fuente, es decir, el primer receptor se encuentra ubicado en $x = 750$ y $z = 880$ metros, a partir de este receptor, la separación vertical entre sismómetros será de 15 metros.

Para el modelado numérico, discretizamos espacialmente el espacio en 1600 nodos en x y z , obteniendo una resolución espacial de 1.25 metros. Simulamos 1 segundo nuestro programa, con 5000 muestras de tiempo, para poder cumplir la condición de estabilidad

$$\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Delta x}{V_{\text{MAX}}}$$

$$2.0 \times 10^{-4} \leq 2.9 \times 10^{-4}.$$

Los campos de velocidad v_x y v_z se pueden observar en las capturas de tiempo en las figuras 23 y 25, donde efectivamente, en la primer capa aparece solamente propagación de onda P. En la medición en los 48 receptores para v_x y v_z (figuras 24 y 26) se observan claramente los primeros arribos de onda P. La complejidad de las capas en sus propiedades puede presentar complicaciones en la observación de las ondas reflejadas en las capas horizontales, sin embargo se pueden observar cambios en la polaridad de la forma de la onda en los sismogramas, en especial, en los sismogramas correspondientes a la componente vertical de la velocidad (26), dado que se tiene una fuente con sólo componente vertical. Estos cambios de polaridad son resultados de ondas reflejadas en las interfaces de la capas. Para corroborar nuestros resultados, tomamos el modelado realizado por Thakur y Rajput (2010) y lo comparamos con la respuesta de los sismogramas.

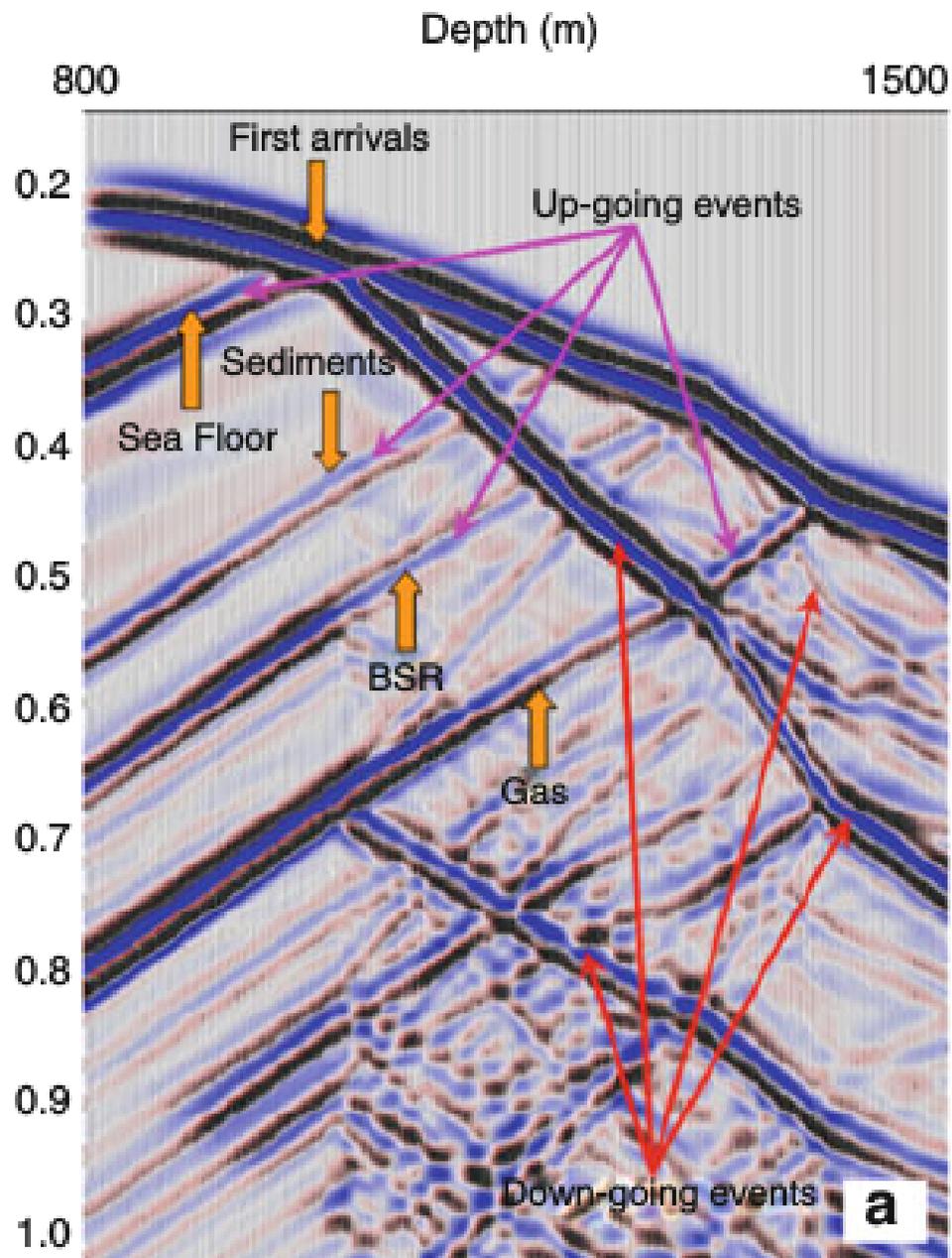


Figura 22: Modelado numérico de la velocidad \bar{v} para el modelo geológico de la figura 21, que nos servirá de referencia para validar nuestro código de modelado numérico. Las diferencias que puedan existir se las atribuimos al desconocimiento del tipo de fuente empleada. Tomado de Thakur y Rajput (2010)

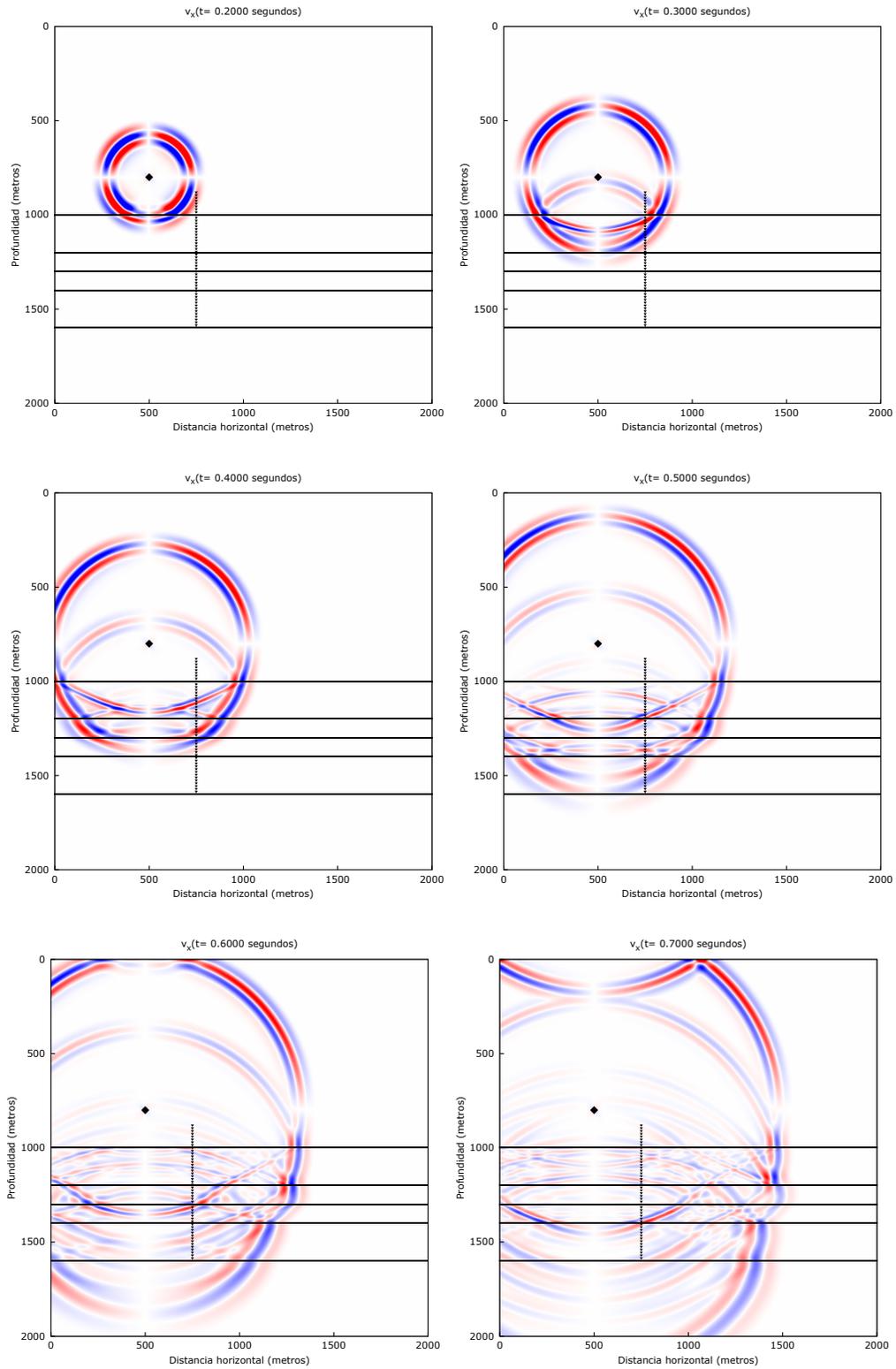


Figura 23: Modelado numérico de la velocidad horizontal v_x para un sondeo sísmico vertical, donde los receptores (\blacktriangledown) se encuentran alineados verticalmente en un pozo(\blacklozenge).

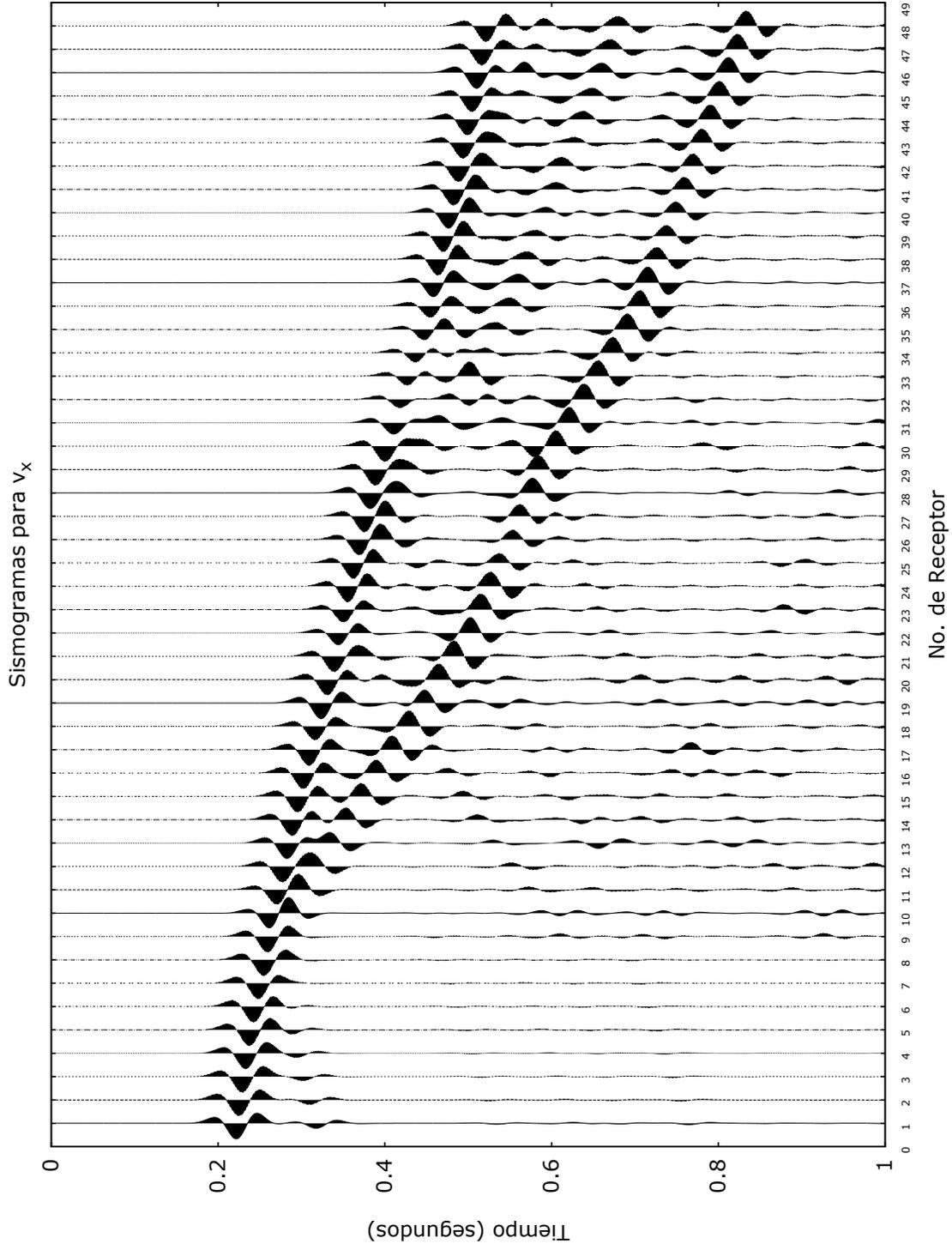


Figura 24: Respuesta en los sismogramas al campo de velocidades de la figura 23

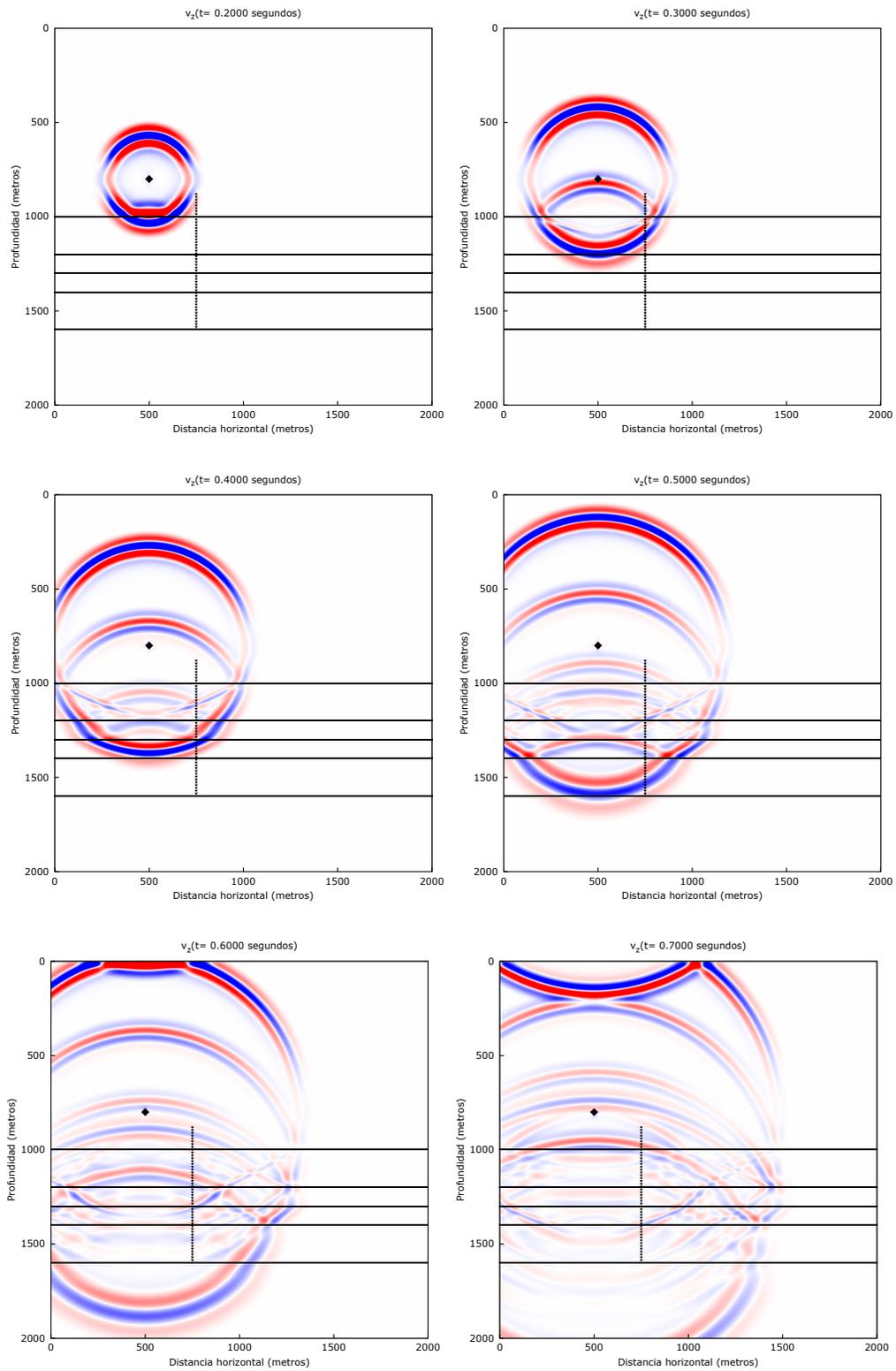


Figura 25: Modelado numérico de la velocidad vertical v_z para un sondeo sísmico vertical, donde los receptores (∇) se encuentran alineados verticalmente en un pozo (\blacklozenge).

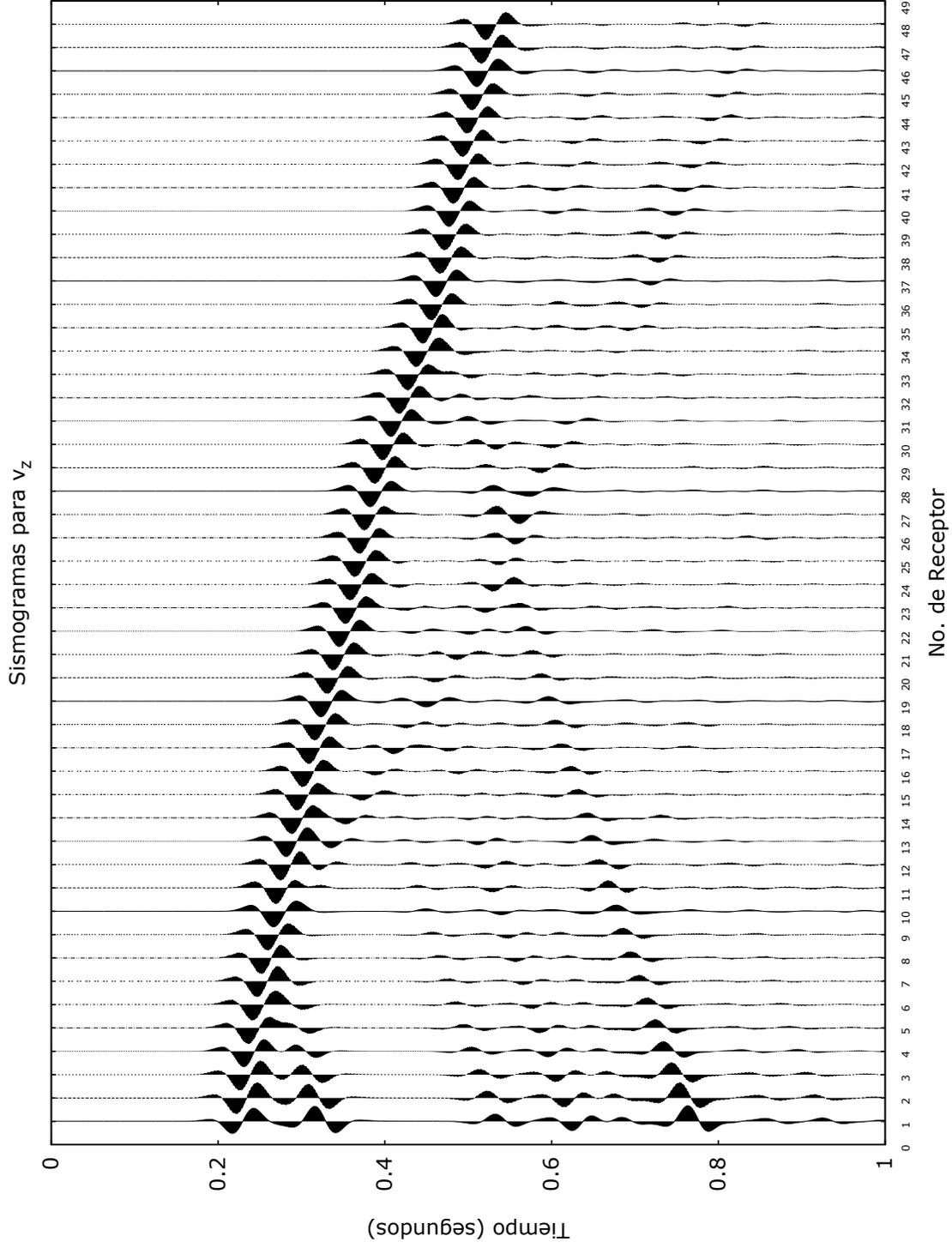


Figura 26: Respuesta en los sismogramas al campo de velocidades de la figura 25

Capítulo 3. Formulación del problema inverso

Los datos sísmicos tomados en la superficie, pozos o fondo marino constituyen mediciones de un campo de deformación que deben ser interpretadas y procesadas para inferir un modelo del subsuelo. Este modelo del subsuelo se puede parametrizar a través de sus propiedades físicas o su distribución, por ejemplo, a través de las interfaces entre las formaciones de las rocas.

En las ecuaciones (37)–(41), las propiedades del subsuelo que queremos cuantificar se encuentran inmersas dentro de los parámetros de Lamé (λ y μ) y la densidad (ρ), por lo que, la relación entre la amplitud de las velocidades de las partículas (datos sísmicos) y los parámetros es no lineal. El problema inverso puede entonces plantearse como la determinación de dichas propiedades físicas y/o interfaces a partir de los datos sísmicos observados.

En este capítulo plantearemos el problema inverso y su solución, con el fin de encontrar simultáneamente las cantidades λ , μ y ρ relacionadas con esfuerzos y velocidades mediante la ecuación de la elastodinámica. Lo abordaremos como un problema de mínimos cuadrados a través de una función objetivo que se minimizará para ajustar los datos observados a través de un esquema iterativo. Adicionalmente, desarrollaremos una estrategia de búsqueda preferencial de imágenes enfocadas, criterio que a la vez regulariza el problema al suplir la deficiencia de información en las mediciones geofísicas.

3.1. Definición de parámetros del modelo elástico y observaciones

Un primer criterio para plantear el problema inverso es encontrar un modelo (m) que reproduzca lo mejor posible los datos observados en campo. Una medida de esto está dada por el desajuste:

$$\Delta d = d_{obs} - d_{cal}(m) \quad (61)$$

donde d_{obs} son los datos sísmicos observados y d_{cal} son los datos modelados numérica-

mente. El modelo m representa algunos parámetros físicos del subsuelo discretizados en el dominio computacional.

Con este desajuste podemos definir una función objetivo que determine si el modelo justifica de mejor o peor manera los datos observados. Uno de los planteamientos más usados para esta función objetivo es a través de una norma cuadrática de los residuales. Esta norma para $Q(m)$ viene dada por

$$Q(m) = \sum_i^N \left\| \frac{d_i^{obs} - f_i(m)}{\sigma_i} \right\|^2. \quad (62)$$

En nuestro planteamiento $f_i(m)$ es la función solución para esfuerzos y velocidades de la ecuación de elastodinámica en 2D, a partir de un modelo $m = m(\lambda, \mu, \rho)$. Hemos elegido una norma L^2 por su compatibilidad con la suposición de una distribución normal de las diferencias y porque al minimizarla conduce a un sistema de ecuaciones lineales, susceptible de ser resuelto con herramientas de álgebra lineal.

3.2. Proposición de la función objetivo phi

Una parte importante en el planteamiento de nuestro problema inverso es definir la región del subsuelo que se desea determinar sus propiedades, especialmente la discretización del modelo. Para ello, consideramos los siguientes aspectos importante en la discretización del espacio:

1. Al considerar una inversión bidimensional, consideramos el subsuelo constante en la dirección y , esto es, ningún parámetro o campo variará en esa dirección.
2. Se dividirá dicha región en celdas rectangulares equiespaciadas vertical y horizontalmente, donde las propiedades serán homogéneas.
3. La discretización y la búsqueda del modelo serán las mismas para las 3 cantidades que se buscan, es decir, la resolución será la misma para λ , μ y ρ .
4. El tamaño de la discretización para el problema inverso podrá ser diferente que la del modelado directo. En nuestro caso será alrededor de un 10% del tamaño del

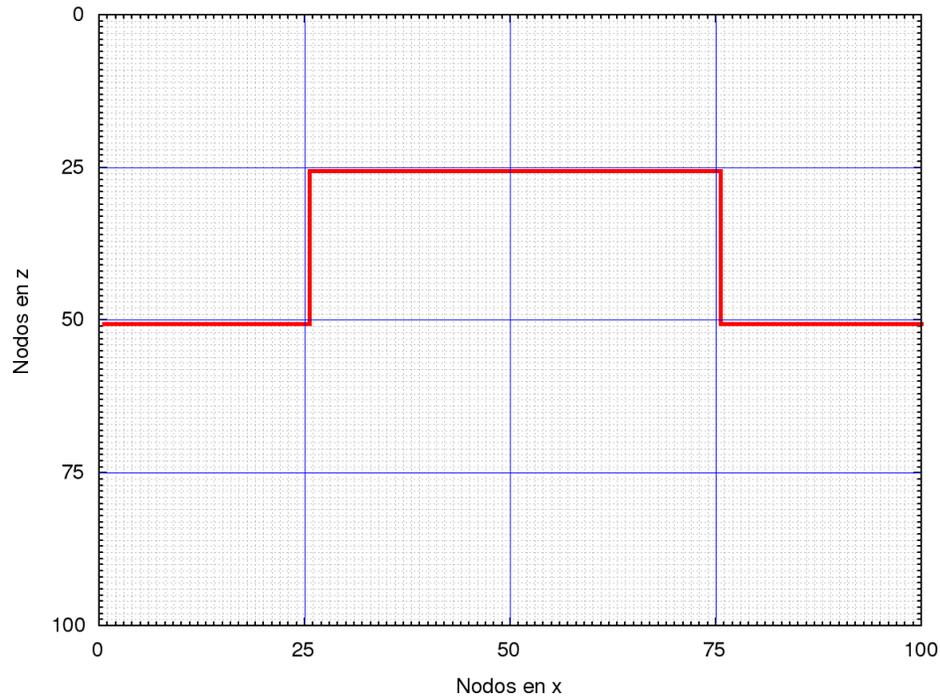


Figura 27: Ejemplo de discretización del dominio para un ejemplo de 100 nodos para x y z , donde la línea negra punteada representa las celdas del modelo directo más fino empleado y la línea azul el modelo inverso a resolver de 4×4 celdas. La línea roja limita dos regiones con diferentes propiedades.

modelo directo.

3.3. Solución algebraica a la minimización de phi

Nuestro problema inverso se convierte en un problema de optimización, esto es, buscaremos un modelo m que minimice la función objetivo viz $\min\{Q(m)\}$. Dada la cantidad de parámetros involucrados, trataremos el problema como un problema de optimización local y proponemos buscar un mínimo al encontrar el conjunto de parámetros m_k que satisfaga:

$$\frac{\partial Q}{\partial m_k} = \frac{\partial}{\partial m_k} \sum_i^N \left\| \frac{d_i^{obs} - f_i(m_i)}{\sigma_i} \right\|^2 = 0 \quad (63)$$

$$\Rightarrow \sum_i \left[\frac{d_i^{obs} - f_i(m_i)}{\sigma_i^2} \right] \frac{\partial f_i}{\partial m_k} = 0. \quad (64)$$

Pasaremos a una notación matricial por comodidad en el manejo de las operaciones.

Renombrando

$$d_i \rightarrow d, \quad f_i \rightarrow F(m), \quad \frac{\partial f_i}{\partial m_k} = A, \quad C_{dd} \rightarrow \sigma_i^2, \quad (65)$$

$$d \rightarrow \begin{pmatrix} v_x^{\text{obs}}(t) \\ v_z^{\text{obs}}(t) \end{pmatrix} \quad A \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial m_1} & \frac{\partial f_1}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial m_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial m_1} & \frac{\partial f_2}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial m_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial m_1} & \frac{\partial f_N}{\partial m_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial m_k} \end{pmatrix}, \quad (66)$$

$$m \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda(x) \\ \mu(x) \\ \rho(x) \end{pmatrix} \quad C_{dd} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Con d los datos observados y C_{dd} su matriz de covarianzas (para este ejemplo solo velocidades) y A será la matriz de jacobianos o matriz de derivadas de Frechet. Tenemos

$$[d - F(m)]^T C_{dd}^{-1} A = 0, \quad (68)$$

$$d^T C_{dd}^{-1} A - F(m)^T C_{dd}^{-1} A = 0, \quad (69)$$

aplicando transpuesta a ambos términos

$$A^T C_{dd}^{-1} d - A^T C_{dd}^{-1} F(m) = 0, \quad (70)$$

lo que nos lleva a un sistema de ecuaciones no lineales y, por ende, a un problema inverso no lineal el cual resolveremos con una aproximación de primer order (tipo Newton).

3.4. Solución lineal de Gauss-Newton

La linealización del problema inverso puede realizarse mediante varios métodos. En particular tomaremos el método clásico de Newton, e.g. Virieux y Operto (2009), el cual realiza una expansión en series de Taylor de la función $F(m)$ en la vecindad de un modelo

inicial m_0 . En notación indicial:

$$F(m) = F(m_0) + \sum_{k=1}^M \frac{\partial F(m_0)}{\partial m_k} \Delta m_k + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M \frac{\partial^2 F(m_0)}{\partial m_j \partial m_k} \Delta m_j \Delta m_k + \mathcal{O}(\Delta m)^3. \quad (71)$$

La mayoría de los problemas no inversos truncan la expansión a primer orden, omitiendo términos de segundo orden y mayores (Virieux y Operto, 2009). Considerando solo el primer término

$$F(m) = F(m_0) + \frac{\partial F}{\partial m} \Delta m, \quad (72)$$

$$F(m) = F(m_0) + A \Delta m, \quad (73)$$

entonces

$$A^T C_{dd}^{-1} d = A^T C_{dd}^{-1} [F(m_0) + \Delta m A], \quad (74)$$

$$A^T C_{dd}^{-1} [d - F(m_0)] = [A^T C_{dd}^{-1} A] \Delta m, \quad (75)$$

donde $\Delta m = m - m_0$, entonces

$$[A^T C_{dd}^{-1} A] m = A^T C_{dd}^{-1} [d - F(m_0) + A m_0], \quad (76)$$

en un problema bien propuesto, es necesario considerar que la matriz $A^T C_{dd}^{-1} A$ debe ser positiva definida y, por ende, que su inversa exista. Lo cual nos lleva a la expresión:

$$m = [A^T C_{dd}^{-1} A]^{-1} A^T C_{dd}^{-1} [d - F(m_0) + A m_0] \quad (77)$$

que finalmente resulta en un esquema iterativo de la búsqueda del vector modelo m en función de un modelo previo m_0 . Para esto, se conocen los datos observados d , se tiene el programa de modelado directo para calcular los datos calculados $F(m_0)$ y se tiene la matriz de covarianzas C_{dd} , entonces solo resta por conocer la matriz de derivadas de Frechet el modelado inverso. El cálculo de estas derivadas se verá en el siguiente capítulo.

3.5. Regularización del problema inverso: Modelos suaves vs modelos enfocados

Como en otros problemas inversos en geofísica, en inversión de forma de onda completa es de esperar que exista un número infinito de modelos que puedan justificar los datos observados, esto es, la matriz a invertir en la ecuación (77) es positiva no definida. Para resolver este tipo de problemas es necesario agregar información adicional hasta que el problema se convierta en un problema definido, estrategia conocida como regularización.

La gran mayoría de los métodos de regularización empleados en geofísica están basados en la teoría de regularización de Tikhonov, la cual proporciona una solución estable al problema inverso. Esta teoría consiste en introducir una norma de una derivada de un orden dado dentro de la función objetivo. Esto proporciona un funcional de estabilización que favorece modelos con variaciones espaciales suaves de sus parámetros. Mientras que esta filosofía es aceptable en términos de buscar modelos geoméricamente simples, lo cierto es que las estructuras geológicas rara vez siguen este principio.

En la actualidad existen varios criterios de regularización de problemas inversos que siguen principios diferentes. Uno de estos métodos de regularización está basado en una norma cero de un funcional de estabilización de operadores de derivadas. La intención es el obtener modelos reflejados en imágenes enfocadas para enfatizar estructuras en bloques que simulan funciones discontinuas (Zhdanov, 2002).

En su forma convencional, el método de regularización de Tikhonov se agrega en las funciones objetivo para formar el funcional

$$P^\alpha(m) = Q(m) + \alpha s(m) \quad (78)$$

donde $Q(m) = \|d - F(m)\|_{C_{dd}^{-1}}^2$ es la función objetivo planteada anteriormente, ecuación (62), con α como un parámetro de regularización y $s(m)$ la función de estabilización.

De acuerdo a las formulaciones de Thikonov existen diferentes maneras de estabilizar este funcional y cada una nos proporcionará una solución diferente dependiendo de la función empleada. Una forma es usando el criterio de mínimos cuadrados de la derivada de orden cero esto es

$$s_{L_2}(m) = \|m\|^2 = (m, m) \quad (79)$$

cuya minimización favorecerá los modelos que tengan la menor magnitud, según el factor α que se aplique. También puede someterse a que favorezca modelos que no se alejen mucho de un modelo m_{apr} , proponiendo el funcional

$$s_{L_2apr}(m) = \|m - m_{apr}\|^2. \quad (80)$$

Otro criterio de estabilización, consiste la minimización de la norma 2 del gradiente del modelo de parámetros ∇m de la forma

$$s_{\max sm}(m) = \|\nabla m\|^2 = (\nabla m, \nabla m). \quad (81)$$

Este criterio de estabilización es uno de los más aplicados en teoría de inversión proporcionándonos una máxima suavidad que nos ayudará a superar el problema de la inestabilidad de la inversión. Algunos ejemplos de esta aplicación se encuentran en esquema de inversión de datos Electromagnéticos (Berdichevskiui y Zhdanov, 1984; Constable *et al.*, 1987; Zhdanov y Fang, 1996) y en inversión conjunta de datos eléctricos y

sísmicos (Gallardo y Meju, 2004).

Invariablemente, los modelos obtenidos con algoritmos de inversión que emplean este funcional representan modelos con heterogeneidades de baja amplitud y que se extienden espacialmente, representando en el mejor de los casos versiones suavizadas de posibles escenarios geológicos. Si se desea encontrar una función estable, con fronteras geológicas bien definidas, y no suavizadas, entonces podemos establecer un tipo especial de funcional de estabilización, el conocido funcional de mínimo soporte de gradiente (Zhdanov, 2002)

$$s_{\beta MGS} = \frac{\|\nabla m \cdot \nabla m\|}{\|\nabla m \cdot \nabla m + \beta^2\|} \quad (82)$$

donde $\beta > 0$ es el parámetro de enfoque (Zhdanov *et al.*, 2004; Portniaguine y Zhdanov, 1999) lo suficientemente pequeño para obtener aproximadamente una norma cero $s_{\beta MGS} \approx \|\nabla m\|^0$.

Portniaguine y Zhdanov (1999) aplicaron este funcional de estabilización como un problema de Tikhonov de norma cuadrática, ecuación (79), de la forma

$$P^\alpha(m) = Q(m) + \alpha(m, m)_{w_e}, \quad (83)$$

con la diferencia de que introdujeron en la norma la función

$$w_e(m) = \frac{f(m)}{[(m, m) + \epsilon^2]^{1/2}}, \quad (84)$$

donde $\epsilon \approx 0$ ($\epsilon \neq 0$) y

$$f(m) = f_{\beta MGS}(m) = \frac{\nabla m}{(\nabla m \cdot \nabla m + \beta^2)^{1/2}} \quad (85)$$

Nosotros aprovecharemos que el operador gradiente se encuentra en el numerador, y aproximando la operación del denominador respecto al modelo anterior, modificaremos el funcional de estabilización de forma similar al funcional de máxima suavidad,

$$P^\alpha(m) = Q(\mathbf{m}) + \alpha(\nabla m, \nabla m)_{C_{\text{MGS}}}, \quad (86)$$

donde la función de peso se calcula de manera aproximada usando el modelo previo como parámetro,

$$C_{\text{MGS}} = \frac{1}{\nabla m_0 \cdot \nabla m_0 + \beta^2}. \quad (87)$$

Se espera que la razón de suavidad del modelo actual, respecto al modelo previo, converja conforme a las iteraciones en una estructura enfocada del subsuelo. La principal ventaja de tratar el funcional de estabilización como un funcional tipo Tikhonov, es que la minimización del problema completo, ecuación (86), no complica de ninguna manera su implementación en la formulación del problema inverso de forma de onda obtenido anteriormente, ecuación (77), dado que solo tenemos que agregar el operador discreto del gradiente, D , e incluirlo en la matriz $A^T C_{dd}^{-1} A$ que se va a invertir de la siguiente manera

$$m = [A^T C_{dd}^{-1} A + \alpha D^t C_{\text{MGS}} D]^{-1} A^T C_{dd}^{-1} [d - F(m_0) + A m_0], \quad (88)$$

con $D = D_x \hat{i} + D_z \hat{k}$ definido como diferencias adelantadas de los elementos del modelo. Para observar la forma de este operador, apliquémoslo a un modelo $m = \{m_{ij}\}$ como

$$D m_{i,j} = \frac{m_{i+1,j} - m_{i,j}}{\Delta x} \hat{i} + \frac{m_{i,j+1} - m_{i,j}}{\Delta z} \hat{k}. \quad (89)$$

Si se aplica a un modelo m de 4 celdas en x por 3 celdas en z como el de la figura 28, se obtendrá la siguiente representación matricial del operador gradiente en x

$$D_x m = \frac{1}{\Delta x} \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \\ \hline m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{24} \\ \hline m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \\ m_{34} \end{pmatrix}, \quad (90)$$

y el operador gradiente en z

$$D_z m = \frac{1}{\Delta z} \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \\ m_{14} \\ \hline m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \\ m_{24} \\ \hline m_{31} \\ m_{32} \\ m_{33} \\ m_{34} \end{pmatrix}, \quad (91)$$

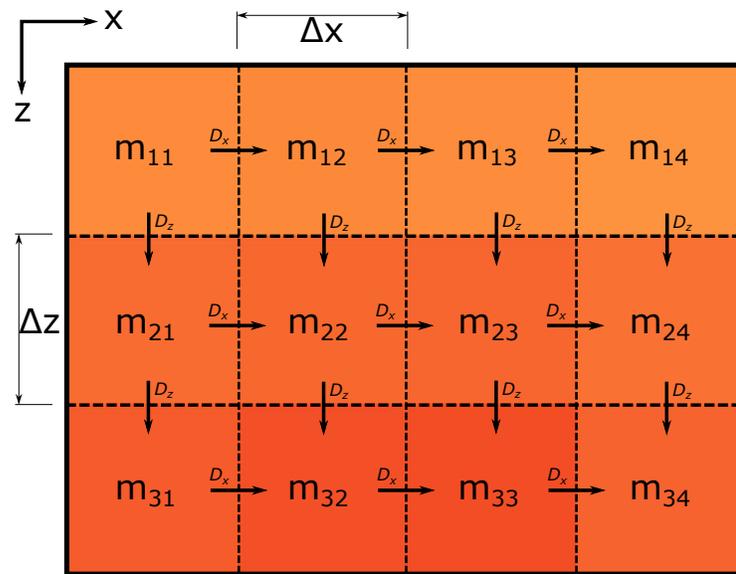


Figura 28: Ejemplo del arreglo de elementos del operador discreto $D = D_x \hat{i} + D_z \hat{k}$ del gradiente que se le aplica a un modelo de 4×3 celdas.

donde con esta implementación se asume un gradiente D_x nulo en el extremo derecho del modelo, así como un gradiente D_z nulo en la parte inferior del modelo, de ahí que las dimensiones de ambos operadores difieren en su dimensión.

Nótese que el proceso iterativo que incluye la regularización de imágenes enfocadas, ecuación (86), coincide con el problema resuelto previamente sin regularización si hacemos $\alpha = 0$. Adicionalmente podemos obtener el problema de máxima suavidad de Tikhonov si consideramos $C_{MGS} = 1$, situación que resulta de bastante beneficio para resolver el problema inverso con diferentes regularizaciones y comparar los modelos que cada método arroja.

Esta regularización ha sido implementada de forma eficiente en inversión de datos magnéticos por Portniaguine y Zhdanov (2002), inversión de datos gravimétricos por Zhdanov *et al.* (2004) y en ambos por Zhdanov (2002). Un ejemplo de un modelo obtenido empleando esta regularización se puede observar en la figura 29 de una inversión gravimétrica 2D de un cuerpo rectangular Zhdanov (2002).

En su ejemplo, se observa que la elección del funcional de estabilización de Tikhonov,

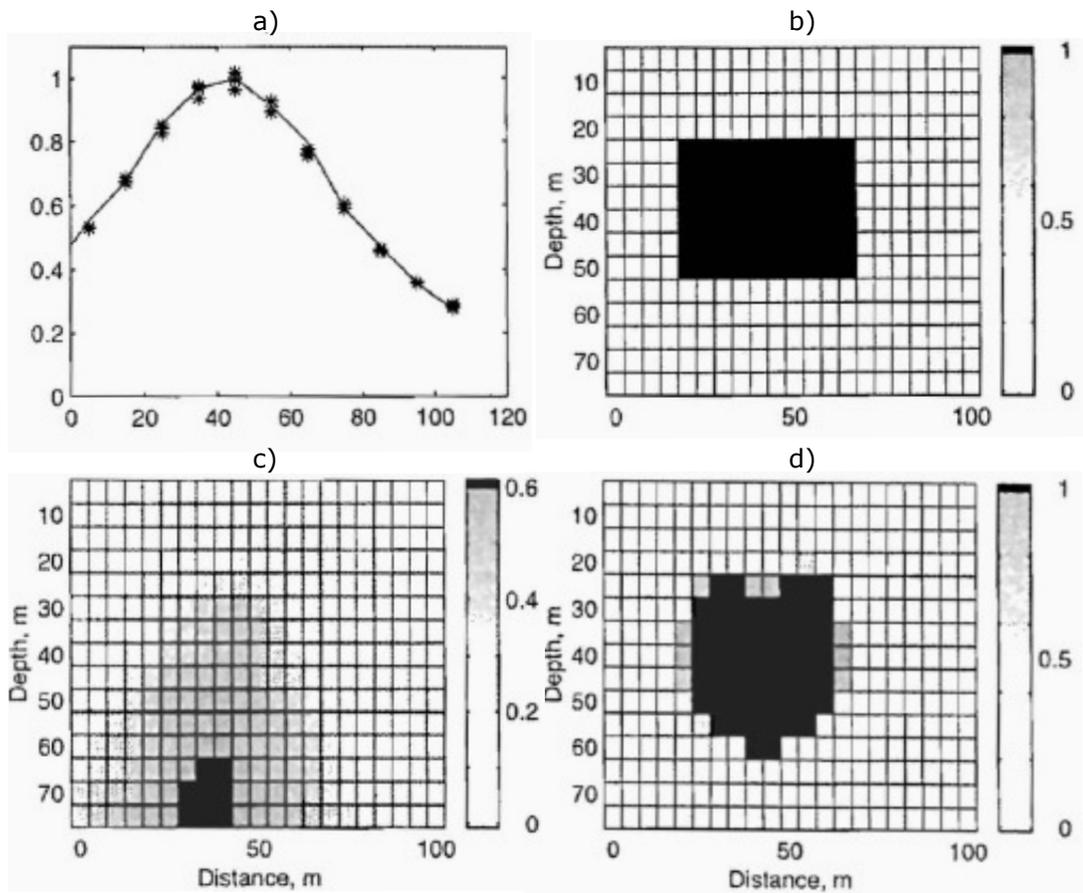


Figura 29: Inversión gravimétrica 2D de un cuerpo rectangular, donde a) son los datos observados, b) el modelo verdadero y c) y d) son los modelos finales de la inversión usando máxima suavidad e imágenes enfocadas respectivamente (Zhdanov, 2002).

figura 29, produce una imagen difusa del modelo sintético, en cambio una función de estabilización como la de la ecuación 85 produce un modelo que se acerca más al modelo de prueba original mediante una imagen enfocada de su última inversión.

Capítulo 4. Cálculo numérico de derivadas de Frechet

Una parte fundamental en el desarrollo de la mayoría de los problemas inversos en geofísica, en especial nuestro problema inverso de forma de onda sísmica, es encontrar la relación entre los cambios en los parámetros del modelo propuesto y los cambios en las velocidades (v_x, v_z) que nuestro modelo produce en los sitios de medición. Este cambio es proporcionado por los elementos de la matriz de derivadas de Frechet de primer orden $A = \partial F(m)/\partial m$ descrito en el capítulo anterior.

En este capítulo exploraremos tres maneras de calcular las derivadas de Frechet: Método de perturbaciones, aproximación de la ecuación de sensibilidad y el método del campo adjunto. De estas tres técnicas, se le dio un mayor análisis a la aproximación de la ecuación de sensibilidad la cual se adoptó en nuestro esquema de inversión.

4.1. Método de perturbaciones

Uno de los métodos más directos para calcular las derivadas de Frechet es aproximarlas usando el método de diferencias finitas. Es decir, aplicando directamente un operador discreto de diferencias finitas de la forma

$$\frac{\partial F_j(m)}{\partial m_k} \approx \frac{F_j(m + \Delta m_k) - F_j(m)}{\Delta m_k}, \quad (92)$$

donde el campo perturbado $F_j(m + \Delta m_k)$ se obtiene volviendo a resolver el problema directo de las ecuaciones discretas (45)–(49) luego de que el k -ésimo parámetro del modelo se perturba por una cantidad Δm_k . De igual manera, podemos usar un operador discreto de derivada con diferencias centradas

$$\frac{\partial F_j(m)}{\partial m_k} \approx \frac{F_j(m + \Delta m_k/2) - F_j(m - \Delta m_k/2)}{\Delta m_k}, \quad (93)$$

la cual incluye una operación extra respecto a (92), dado que en diferencias centradas no se usa la cantidad $F(m)$ previamente calculada en modelado directo. Dado que el modelo tiene que ser modificado para calcular los campos perturbados ∂F del problema, cada

sensibilidad $\partial F_i / \partial m_k$ requiere resolver un nuevo problema independiente del cómputo de las otras sensibilidades.

Para nuestro caso de inversión, se busca simultáneamente el modelo m en la representación de tres parámetros: λ , μ y ρ ; entonces, serán 3 veces las que se aplique este método de perturbaciones para obtener las tres derivadas $\partial F_i / \partial \lambda_k$, $\partial F_i / \partial \mu_k$ y $\partial F_i / \partial \rho_k$ requeridas

$$\frac{\partial F_j(m)}{\partial \lambda_k} \approx \frac{F_j(m + \Delta \lambda_k) - F_j(m)}{\Delta \lambda_k} \quad (94)$$

$$\frac{\partial F_j(m)}{\partial \mu_k} \approx \frac{F_j(m + \Delta \mu_k) - F_j(m)}{\Delta \mu_k} \quad (95)$$

$$\frac{\partial F_j(m)}{\partial \rho_k} \approx \frac{F_j(m + \Delta \rho_k) - F_j(m)}{\Delta \rho_k} \quad (96)$$

Si bien este método puede presentar complicaciones numéricas en memoria y tiempo, se ha aplicado calibrar la estrategia de cálculo de derivadas de Frechet adoptada en esta tesis.

4.2. Aproximación a la ecuación de sensibilidad

En el método de la aproximación a la ecuación de sensibilidad, un nuevo problema de modelado directo es obtenido para calcular las derivadas de Frechet $\partial F_i / \partial m_k$. Si bien ha habido numerosos problemas de inversión que emplean este método, nosotros nos basamos en el trabajo de McGillivray y Oldenburg (1990) aplicado al problema de resistividad para nuestro desarrollo.

Primeramente, retomemos la ecuación de la elastodinámica expresada en función de la velocidad y esfuerzos para medios isotrópicos bidimensionales, ecuaciones (37)–(41). Para ilustrar este método, el modelo $m = m(\lambda, \mu, \rho)$ será discretizado para cada parámetro de Lamé y densidad empleando funciones base de la forma

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M \lambda_l \psi_l(\mathbf{x}), \quad (97)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M \mu_l \psi_l(\mathbf{x}), \quad (98)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{l=1}^M \rho_l \psi_l(\mathbf{x}), \quad (99)$$

con M el número de celdas de modelado inverso y donde $\psi_l(\mathbf{x})$ es una función base auxiliar con valores 0 y 1, que proporcionará la discretización del espacio

$$\psi_l(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{l+1} \\ 0 & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \quad (100)$$

Con l el índice de las celdas. Si empleamos esta definición en el sistema de ecuaciones diferenciales de modelado directo obtenemos

$$\left(\sum_{l=1}^M \rho_l \psi_l(\mathbf{x}) \right) \partial_t v_x = \partial_x \tau_{xx} + \partial_z \tau_{xz} + f_x, \quad (101)$$

$$\left(\sum_{l=1}^M \rho_l \psi_l(\mathbf{x}) \right) \partial_t v_z = \partial_x \tau_{xz} + \partial_z \tau_{zz} + f_z, \quad (102)$$

y para las relaciones de esfuerzo

$$\partial_t \tau_{xx} = \left[\left(\sum_{l=1}^M \lambda_l \psi_l(\mathbf{x}) \right) + 2 \left(\sum_{l=1}^M \mu_l \psi_l(\mathbf{x}) \right) \right] \partial_x v_x + \left(\sum_{l=1}^M \lambda_l \psi_l(\mathbf{x}) \right) \partial_z v_z, \quad (103)$$

$$\partial_t \tau_{zz} = \left[\left(\sum_{l=1}^M \lambda_l \psi_l(\mathbf{x}) \right) + 2 \left(\sum_{l=1}^M \mu_l \psi_l(\mathbf{x}) \right) \right] \partial_z v_z + \left(\sum_{l=1}^M \lambda_l \psi_l(\mathbf{x}) \right) \partial_x v_x, \quad (104)$$

$$\partial_t \tau_{xz} = \left(\sum_{l=1}^M \mu_l \psi_l(\mathbf{x}) \right) (\partial_z v_x + \partial_x v_z). \quad (105)$$

El siguiente paso es derivar respecto a los parámetros λ_k , μ_k y ρ_k correspondientes a la k -ésima celda del problema inverso. Primero tomamos la derivada respecto a λ_k para ilustrar el procedimiento, luego ilustraremos las derivadas con respecto a los otros dos parámetros elásticos. Para esto, hacemos uso de la siguiente notación,

$$v_x^\lambda \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial \lambda_k}, \quad v_z^\lambda \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial \lambda_k}, \quad \tau_{xx}^\lambda \rightarrow \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \lambda_k}, \quad \tau_{zz}^\lambda \rightarrow \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial \lambda_k}, \quad \tau_{xz}^\lambda \rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \lambda_k}. \quad (106)$$

renombrada por comodidad en el manejo de operaciones. Además, considerando que

$$\frac{\partial \lambda(\mathbf{x})}{\partial \lambda_k} = \frac{\sum_{l=1}^M \lambda_l \psi_l(\mathbf{x})}{\partial \lambda_k} = \delta_{lk} \psi_l(\mathbf{x}) = \psi_k(\mathbf{x}) \quad (107)$$

donde ψ_k será la función base de la región de la celda donde nos encontramos. Entonces obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones para el modelado de las derivadas de las velocidades,

$$\rho \partial_t v_x^\lambda = \partial_x \tau_{xx}^\lambda + \partial_z \tau_{xz}^\lambda, \quad (108)$$

$$\rho \partial_t v_z^\lambda = \partial_x \tau_{xz}^\lambda + \partial_z \tau_{zz}^\lambda, \quad (109)$$

y las relaciones de esfuerzo

$$\partial_t \tau_{xx}^\lambda = (\lambda + 2\mu) \partial_x v_x^\lambda + \lambda \partial_z v_z^\lambda + \psi_k (\partial_x v_x + \partial_z v_z), \quad (110)$$

$$\partial_t \tau_{zz}^\lambda = (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z^\lambda + \lambda \partial_x v_x^\lambda + \psi_k (\partial_x v_x + \partial_z v_z), \quad (111)$$

$$\partial_t \tau_{xz}^\lambda = \mu (\partial_z v_x^\lambda + \partial_x v_z^\lambda). \quad (112)$$

Entonces, se obtuvo el mismo sistema de ecuaciones que el problema de modelado directo inicial, con la diferencia de que ahora se aplicará una fuente secundaria en la región de la derivada empleando resultados del primer modelado directo, que corresponde a la parte roja en las ecuaciones (110) y (111).

De esta manera, el cómputo de derivadas de Frechet para calcular la matriz completa de jacobianos vendrá dada por el mismo algoritmo de modelado directo, con la diferencia del uso de una fuente secundaria. Realizaremos el mismo procedimiento para las siguientes derivadas, ahora derivamos respecto a μ , renombrando

$$v_x^\mu \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial \mu_k}, \quad v_z^\mu \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial \mu_k}, \quad \tau_{xx}^\mu \rightarrow \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \mu_k}, \quad \tau_{zz}^\mu \rightarrow \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial \mu_k}, \quad \tau_{xz}^\mu \rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \mu_k}, \quad (113)$$

con

$$\frac{\partial \mu(\mathbf{x})}{\partial \mu_k} = \frac{\sum_{l=1}^M \mu_l \psi_l(\mathbf{x})}{\partial \mu_k} = \delta_{lk} \psi_l(\mathbf{x}) = \psi_k(\mathbf{x}), \quad (114)$$

se obtendrá el siguiente sistema de ecuaciones para la derivada respecto a μ

$$\rho \partial_t v_x^\mu = \partial_x \tau_{xx}^\mu + \partial_z \tau_{xz}^\mu, \quad (115)$$

$$\rho \partial_t v_z^\mu = \partial_x \tau_{xz}^\mu + \partial_z \tau_{zz}^\mu. \quad (116)$$

Las relaciones de esfuerzo están dadas por

$$\partial_t \tau_{xx}^\mu = (\lambda + 2\mu) \partial_x v_x^\mu + \lambda \partial_z v_z^\mu + 2\psi_k \partial_x v_x, \quad (117)$$

$$\partial_t \tau_{zz}^\mu = (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z^\mu + \lambda \partial_x v_x^\mu + 2\psi_k \partial_z v_z, \quad (118)$$

$$\partial_t \tau_{xz}^\mu = \mu (\partial_z v_x^\mu + \partial_x v_z^\mu) + \psi_k (\partial_z v_x + \partial_x v_z). \quad (119)$$

donde se vuelven a obtener fuentes secundarias dependientes del problema directo. Por último obtendremos las derivadas de Frechet para la densidad de la misma manera. Primero renombramos

$$v_x^\rho \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial \rho_k}, \quad v_z^\rho \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial \rho_k}, \quad \tau_{xx}^\rho \rightarrow \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial \rho_k}, \quad \tau_{zz}^\rho \rightarrow \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial \rho_k}, \quad \tau_{xz}^\rho \rightarrow \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial \rho_k}. \quad (120)$$

Además

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x})}{\partial \rho_k} = \frac{\sum_{l=1}^M \rho_l \psi_l(\mathbf{x})}{\partial \rho_k} = \delta_{lk} \psi_l(\mathbf{x}) = \psi_k(\mathbf{x}), \quad (121)$$

obteniendo el sistema de ecuaciones

$$\rho \partial_t v_x^\rho = \partial_x \tau_{xx}^\rho + \partial_z \tau_{xz}^\rho - \psi_k \partial_t v_x, \quad (122)$$

$$\rho \partial_t v_z^\rho = \partial_x \tau_{xz}^\rho + \partial_z \tau_{zz}^\rho - \psi_k \partial_t v_z. \quad (123)$$

Las relaciones de esfuerzo

$$\partial_t \tau_{xx}^\rho = (\lambda + 2\mu) \partial_x v_x^\rho + \lambda \partial_z v_z^\rho, \quad (124)$$

$$\partial_t \tau_{zz}^\rho = (\lambda + 2\mu) \partial_z v_z^\rho + \lambda \partial_x v_x^\rho, \quad (125)$$

$$\partial_t \tau_{xz}^\rho = \mu (\partial_z v_x^\rho + \partial_x v_z^\rho). \quad (126)$$

En esta ocasión, el término de fuente secundaria será una derivada en tiempo de las

velocidades del modelo directo inicial.

En resumen, para calcular las derivadas de Frechet, resolvemos el problema directo una vez para obtener v_x , v_z , τ_{xx} , τ_{zz} y τ_{xz} dado que necesitaremos estos valores para emplear las fuentes secundarias (parte roja) en el mismo algoritmo de modelado directo. Después, para cada parámetro k -ésimo del modelo, el problema de derivadas es resuelto para obtener

$$\begin{aligned} & \partial v_x / \partial \lambda_k, \partial v_z / \partial \lambda_k, \partial \tau_{xx} / \partial \lambda_k, \partial \tau_{zz} / \partial \lambda_k \text{ y } \partial \tau_{xz} / \partial \lambda_k \text{ para } \lambda \\ & \partial v_x / \partial \mu_k, \partial v_z / \partial \mu_k, \partial \tau_{xx} / \partial \mu_k, \partial \tau_{zz} / \partial \mu_k \text{ y } \partial \tau_{xz} / \partial \mu_k \text{ para } \mu \\ & \partial v_x / \partial \rho_k, \partial v_z / \partial \rho_k, \partial \tau_{xx} / \partial \rho_k, \partial \tau_{zz} / \partial \rho_k \text{ y } \partial \tau_{xz} / \partial \rho_k \text{ para } \rho \end{aligned}$$

los cuales son evaluados en los sitios de observación ψ_k . Nótese que el término de fuente, en letras rojas, difiere para cada k -ésima celda, entonces necesitamos resolver $M + 1$ modelados directos para obtener todas las derivadas de sensibilidad. Aunque este método presenta grandes costos en la inversión para celdas de pequeña discretización, se tomarán discretizaciones relativamente más pequeñas que la discretización del modelado directo.

Nótese que si se desean obtener jacobianos de segundo orden, $\partial^2 F_i / \partial m_k \partial m_j$ entonces se deberá de realizar el mismo procedimiento anterior. Este método de la aproximación a la ecuación de sensibilidad también será de ayuda para la descripción del último método de cálculo de derivadas, que se presenta a continuación.

4.3. Método del campo adjunto

EL último método explicado en esta tesis para el cálculo de derivadas de sensibilidad es el método del campo adjunto, implementado por primera vez en los trabajos de Tarantola (1984, 1986) para inversión de onda acústica y onda elástica respectivamente. La teoría presentada por Tarantola puede ser empleada en otros problemas geofísicos,

como se observará más adelante. En este eficiente método, solo dos modelados directos deben ser efectuados para obtener todas las derivadas de Frechet, uno para el problema directo del modelo actual y el segundo usando las diferencias entre datos observados y datos calculados como fuente en otro campo, el campo adjunto.

Problemas sísmicos empleando este método se pueden observar en trabajos de Tarantola (1984, 1986); Tromp *et al.* (2005); Mora (1987); Fichtner y Trampert (2011), en problemas de resistividad de Smith y Vozoff (1984) y en problemas magnetoteléuricos Weidelt (1975).

Para ilustrar este método, consideremos un problema directo de la forma

$$L[m]u = \Psi \quad (127)$$

donde $L[m]$ es el operador de modelado directo, en nuestro caso, la ecuación de elastodinámica, que depende explícitamente de un modelo m del medio, $u = u(x, t)$ es el campo producido por las fuente generalizadas Ψ . Los valores medidos en ciertos sitios del dominio serán los datos observados y calculados $d_{obs} = u_{obs}(x_r, t)$ y $d_{cal} = u_{cal}(x_r, t)$ respectivamente en las posiciones x_r .

Dentro de las técnicas de minimización de una función objetivo, definida por una norma cuadrática de un vector de desajuste, se encuentran los algoritmos iterativos, los cuales buscan el modelo óptimo a través de pasos definidos por aproximaciones del tipo

$$m_{n+1} = m_n - \alpha_n \gamma_n \quad (128)$$

donde γ puede ser el gradiente de la función de desajuste (dirección de descenso más rápido) o bien otra dirección de descenso de la función objetivo. En estas aproximaciones se selecciona un tamaño de paso α (una constante). Formalmente, los datos calculados

d se obtienen al aplicar (proyectar) un operador P (asociado a los puntos de observación) a los campos calculados del modelo (u)

$$d = (Pu)(x_r, t). \quad (129)$$

Para el desarrollo de esta formulación se supone que una perturbación en los parámetros del medio, $m \rightarrow m + \delta m$, producirá una perturbación en el campo de desplazamiento $u \rightarrow u + \delta u$. Bajo estas suposiciones es posible demostrar que estas perturbaciones arrojarán un nuevo problema con la misma estructura pero con los residuales como fuentes secundarias de la forma

$$L^t u^\dagger = P^t C_D^{-1} (Pu - d_{obs}) \quad (130)$$

donde u^\dagger es el campo creado por las fuentes $P^t C_D^{-1} (Pu - d_{obs})$ mediante el operador adjunto L^t . Un recuento detallado de las operaciones necesarias se puede consultar en Tarantola (1988). Este campo es el conocido *campo adjunto* y nos ayudará a encontrar el gradiente requerido resolviendo simplemente la operación:

$$\hat{\gamma} = (Au)^t u^\dagger \quad (131)$$

donde Au se encuentra resolviendo el problema $\delta\psi = (Au)\delta m$, siguiendo la aproximación a la ecuación de sensibilidad descrita en la sección anterior. Para formular un algoritmo completo, Tarantola (1988) resume este método en el siguiente algoritmo de descenso más rápido

$$\begin{array}{ll}
L[m]u_n = \psi & \text{(resolver para } u_n) \\
\delta d_n = Pu_n - d_{obs} & \text{(calcular los residuales)} \\
C_D \delta \hat{d}_n = \delta d_n & \text{(pesar los residuales)} \\
\delta \phi_n = P^t \delta \hat{d}_n & \text{(considerarlos como fuente)} \\
L^t u^\dagger = \delta \phi_n & \text{(resolver el problema adjunto)} \\
\hat{\gamma}_n = (Au_n)^t u^\dagger & \text{(calcular el gradiente } \hat{\gamma}_n) \\
m_{n+1} = m_n - \alpha_n \hat{\gamma}_n & \text{(actualizar el modelo).}
\end{array} \tag{132}$$

Metodologías que utilizan este algoritmo en inversión sísmica se observa en los trabajos de Gauthier *et al.* (1986); Kolb *et al.* (1986); Mora (1987); Pica *et al.* (1990).

En la presente tesis no se siguió este procedimiento, así que el lector interesado puede acudir a los trabajos originales aquí citados.

4.4. Calibración del cálculo de derivadas

Para comprobar las ecuaciones obtenidas en las secciones 4.1 y 4.2, tomamos el modelo de la figura 30 y calculamos las derivadas de los campos de velocidad, $\partial v_x / \partial m$ y $\partial v_z / \partial m$. Primero simularemos las derivadas de Frechet empleando la aproximación a la ecuación de sensibilidad y después compararemos con el método de perturbaciones para validar las derivadas.

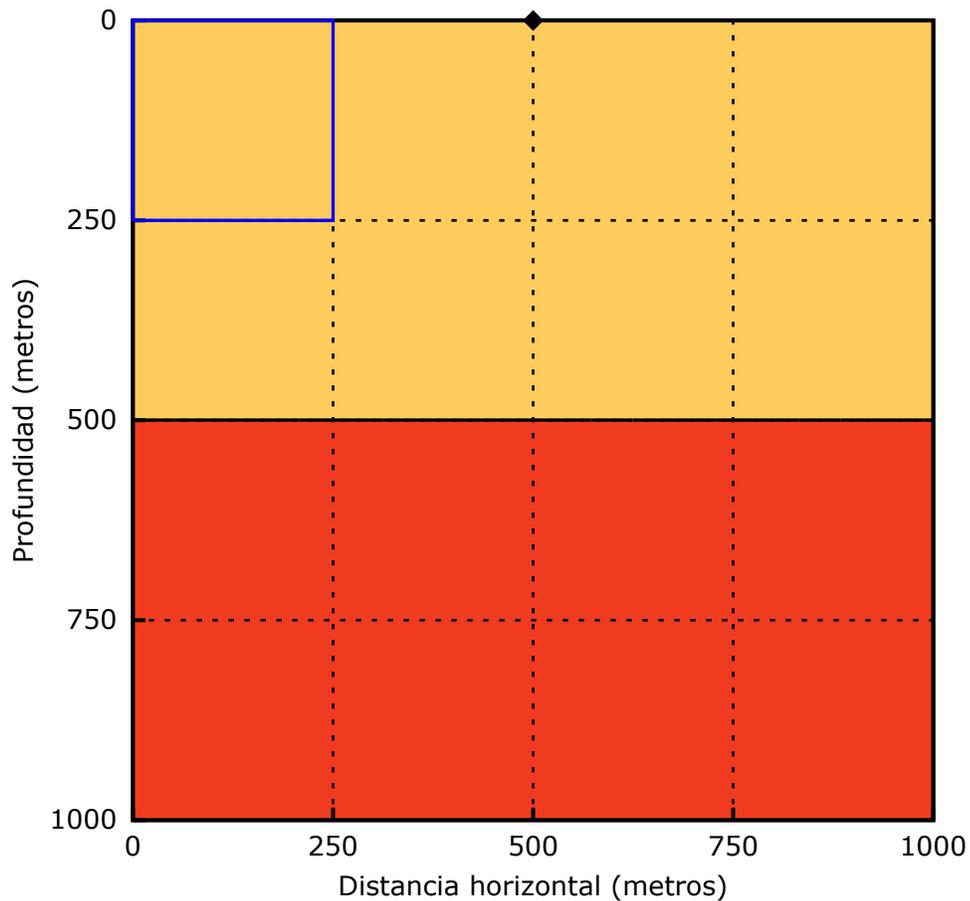


Figura 30: Ejemplo de discretización 4×4 para el cálculo de derivadas de Frechet de las velocidades, donde la línea negra continua representa el límite entre regiones, la línea punteada negra representa la discretización de las celdas para el problema inverso y la línea azul enmarca la celda donde se calcularán las derivadas.

La discretización en este ejemplo será de 4 celdas en x por 4 celdas en z para los modelos de λ , μ y ρ , de esta manera se calcularán 3×16 celdas para obtener toda la matriz de Jacobianos. Tanto el espaciado vertical, como el espaciado horizontal, serán los mismos, teniendo celdas de 250×250 metros. La posición de la fuente vertical

es en la superficie a la mitad de distancia del dominio.

Para ilustrar la manera en la que calculamos las derivadas de Frechet usando la aproximación de la ecuación de sensibilidad (sección 4.2), tomemos la discretización del modelo de la figura 30. En este modelo discretizado en 16 celdas (líneas punteadas), seleccionaremos la primer celda (línea azul) y todos los campos que se encuentren en esa región para cada tiempo serán empleados como fuentes secundarias para el modelado directo de las derivadas de los campos. Dependiendo de con que parámetro estemos derivando, la forma de la fuente cambiará para las derivadas respecto a λ , ecuaciones (108)–(112), respecto a μ , ecuaciones (115)–(119), y respecto a ρ , ecuaciones (122)–(126). Evidentemente, para emplear estas fuentes secundarias es necesario resolver previamente el modelado directo y almacenar las velocidades con las que se calculan estos términos de fuentes secundarias.

El método de aproximación a la ecuación de sensibilidad, como se detalló en la sección 4.2, consiste en resolver la misma ecuación de elastodinámica, empleando como fuentes secundarias resultados del modelado directo inicial, de esta manera, la condición de estabilidad será la misma que para el modelado directo.

Los resultados del modelado de las derivadas respecto a λ ($\partial v_x / \partial \lambda$ y $\partial v_z / \partial \lambda$) en la región $0 \leq x \leq 250$ y $0 \leq z \leq 250$ metros del modelo se presentan en las figuras 31 y 32 respectivamente. En ambas figuras se observa que la sensibilidad del modelo en dicha región casi es nula en tiempos iniciales ($t \leq 0.2$ segundos), dado que la onda del problema directo no ha transitado por la celda donde se calcula la derivada y por ende aun no existe fuente secundaria en los campos de derivadas.

Para tiempos mayores la propagación de la onda efecto de la fuente secundaria empieza a mostrarse. Se observa que el comportamiento de esta onda también obedece a las condiciones de frontera absorbentes descritas previamente, así como a efectos de

reflexión en la superficie y reflexiones de ondas en la interfaz entre ambos medios. La principal diferencia es en la forma de la onda asociada a la forma de la fuente secundaria.

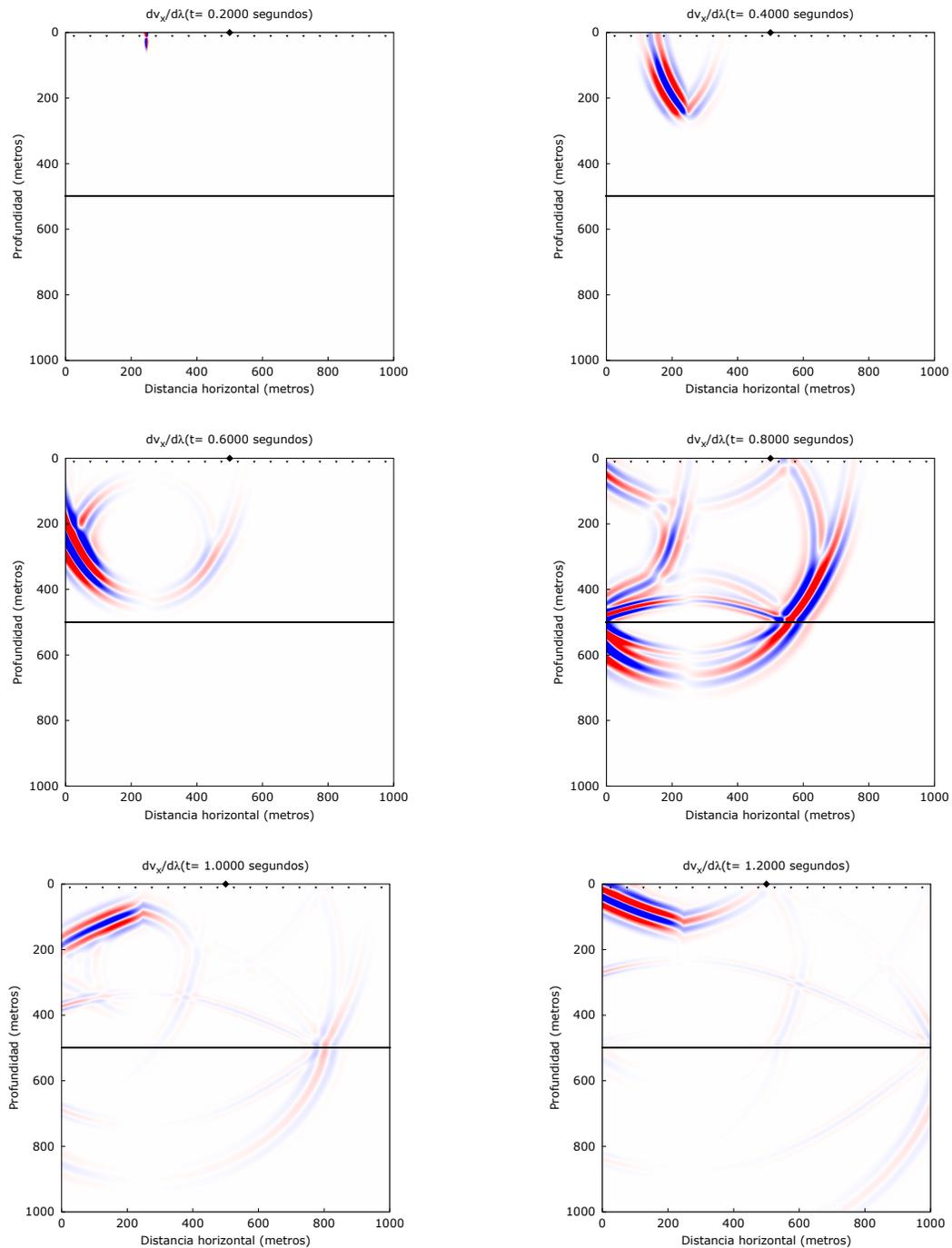


Figura 31: Modelado de la derivada de la velocidad horizontal (v_x) respecto a lambda, en la celda comprendida en la región $0 \leq x \leq 250$ y $0 \leq z \leq 250$ metros para el semiespacio homogéneo de la figura 30, la fuente inicial (\blacklozenge) de modelado directo ocurre en la superficie a la mitad del terreno. Solo se muestra la propagación de los primeros 6 tiempos cada 0.2 segundos.

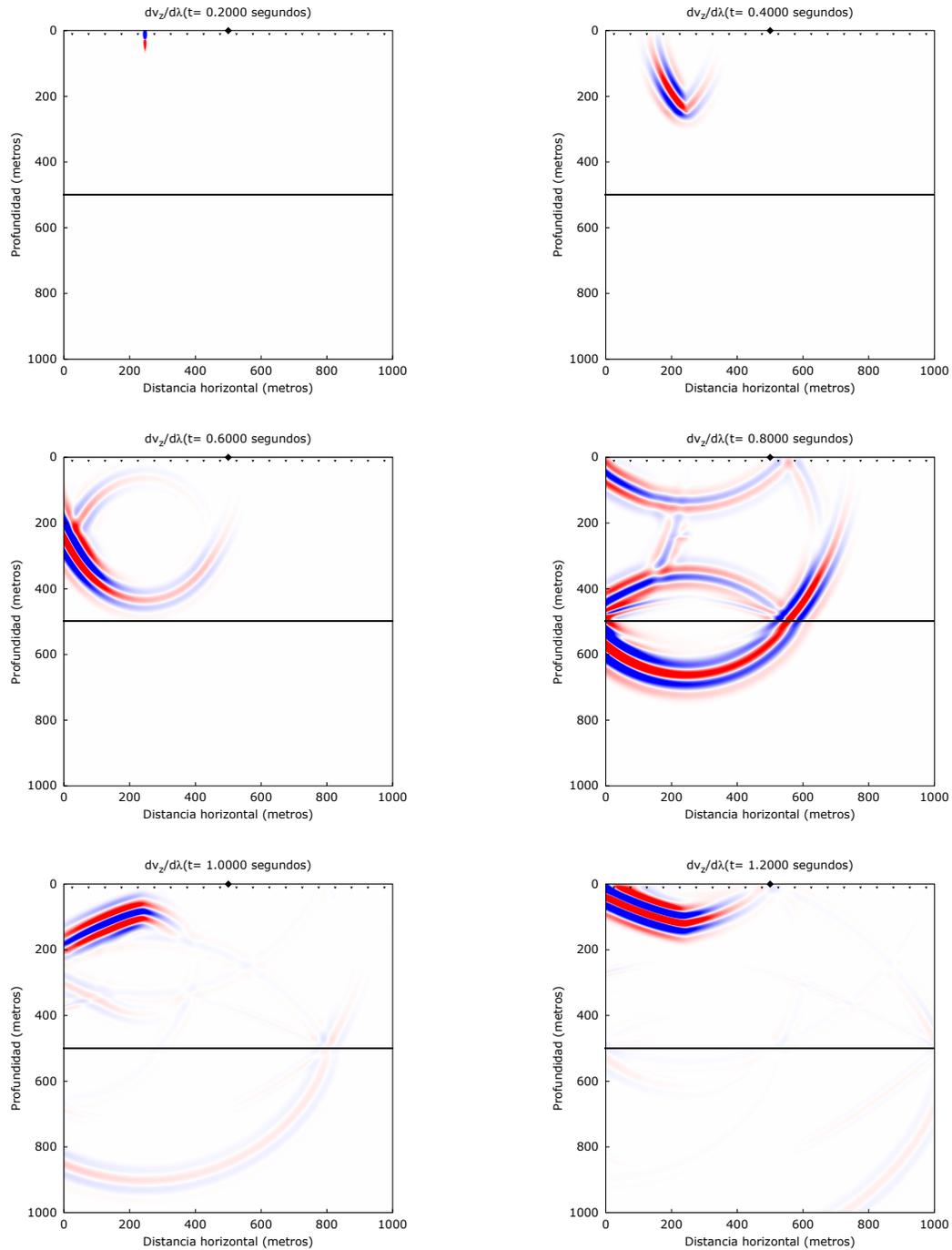


Figura 32: Modelado de la derivada de la velocidad vertical (v_z) respecto a lambda, en la celda comprendida en la región $0 \leq x \leq 250$ y $0 \leq z \leq 250$ (línea azul) para el semiespacio homogéneo de la figura 30, donde la fuente inicial de modelado directo (♦) ocurre en la superficie a la mitad del terreno. Solo se muestra la propagación de los primeros 6 tiempos cada 0.2 segundos.

Como se mencionó anteriormente, para validar estas derivadas calculamos el campo de la derivada de la velocidad respecto a los parámetros del modelo usando el método de perturbaciones descrito en la sección 4.1. Para esto, tomemos el mismo medio de

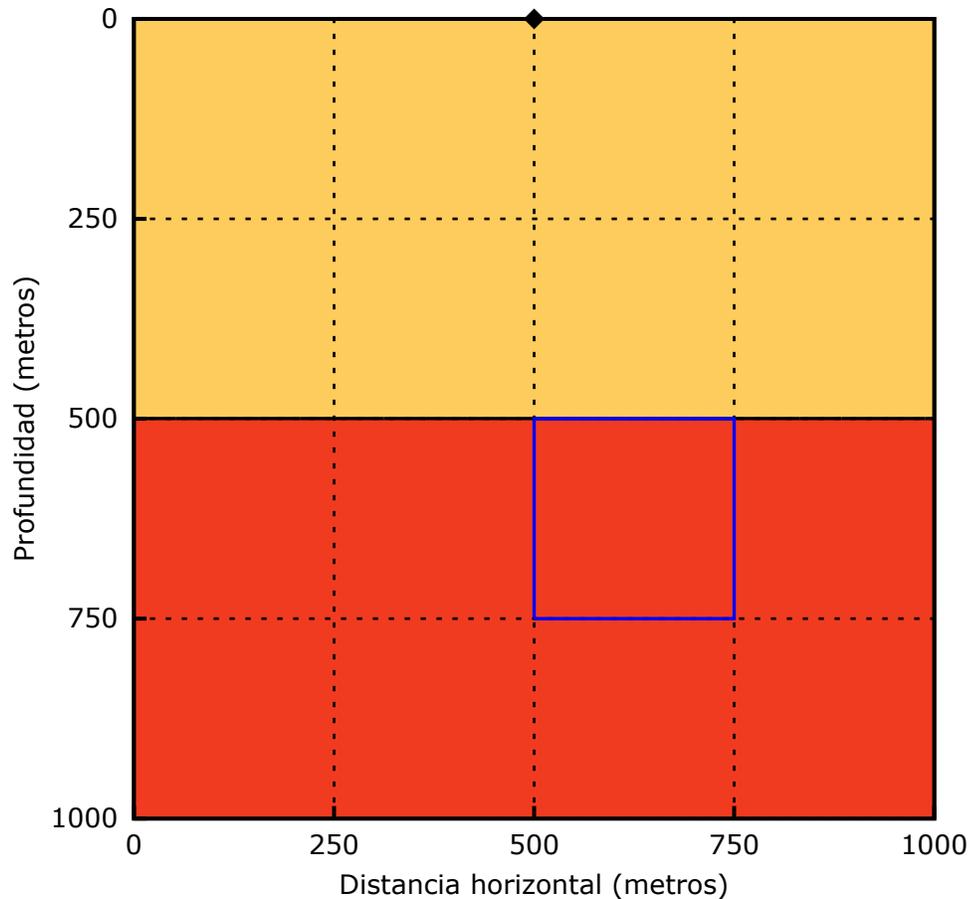


Figura 33: Mismo ejemplo de discretización 4×4 para el cálculo de derivadas de Frechet de las velocidades que el de la figura 30, pero ahora calculado la sensibilidad de la celda acotada por la línea azul entre $500 \leq x \leq 750$ y $500 \leq z \leq 750$ metros del modelo de 2 capas.

dos capas con la misma discretización y mismos valores de sus propiedades, pero ahora calcularemos las derivadas en la zona entre $500 \leq x \leq 750$ y $500 \leq z \leq 750$ metros del dominio, como se observa en el área acotada por la línea azul en la figura 33. Se cambió de zona para observar la propagación de la derivada en una celda más retirada de la fuente inicial y donde ocurre un cambio en las propiedades del medio. Se muestran resultados usando el método de perturbaciones y la aproximación a la ecuación de sensibilidad en la figura 34, tomando por ejemplo solo la derivada de la velocidad vertical respecto a λ . La comparación de las derivadas respecto a los demás parámetros también se realizó, pero solo mostramos los resultados de la derivada respecto a λ .

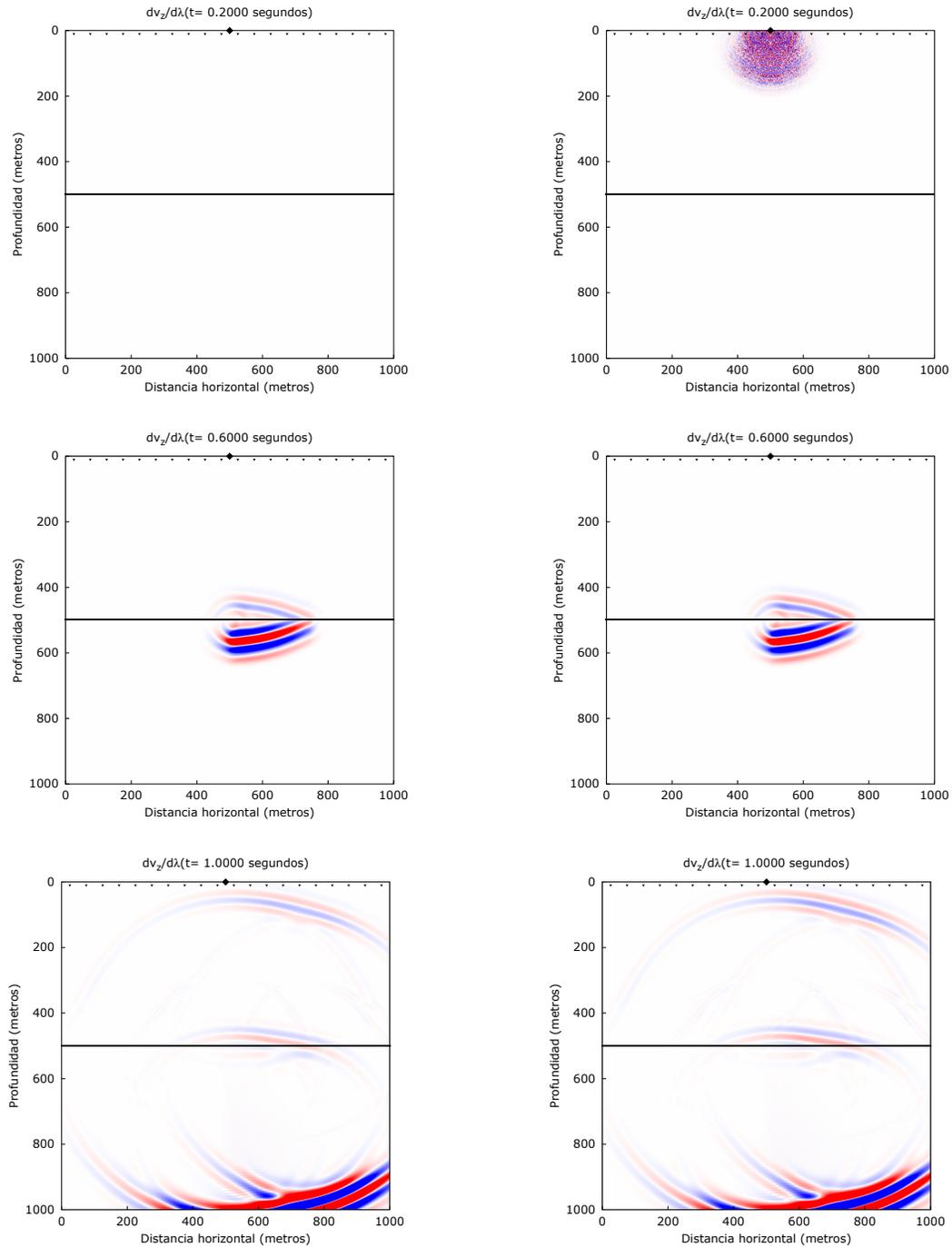


Figura 34: Comparación de las derivadas de v_z respecto de λ para la celda que se encuentra entre $500 \leq x \leq 750$ y $500 \leq z \leq 750$ metros del modelo, donde las gráficas de la parte izquierda corresponden a las derivadas usando la aproximación a la ecuación de sensibilidad y las gráficas de la parte derecha al método de perturbaciones.

Al realizar la comparación de ambos métodos de cálculo de derivadas, corroboramos las ecuaciones obtenidas para la teoría de la aproximación a la ecuación de sensibilidad, dado que ambas propagaciones de $\partial v_z / \partial \lambda_k$ son iguales tanto en forma del frente de

ondas como en su amplitud. En método de perturbaciones se presenta ruido cuando no se debería de tener propagación de onda al inicio.

En general, podemos considerar calibrado nuestro algoritmo de cálculo de derivadas desarrollado según la teoría de la sección 4.2. Además de los inconvenientes numéricos presentes en la teoría de perturbaciones, cabe señalar que el tiempo de cómputo es aproximadamente 1.5 veces del tiempo de cómputo de las derivadas usando la aproximación de sensibilidad, dado que el método de perturbaciones emplea un cálculo de campo extra ($F(m + \Delta\lambda)$) como se observó en la sección 4.1. Esto puede presentar más costo numérico considerando que todavía se tienen que calcular las derivadas de las otras 15 celdas restantes para nuestro ejemplo y peor aún cuando se comience con el proceso iterativo de inversión (ecuación (77) del capítulo 3).

La propagación completa de las derivadas respecto a μ y ρ no se muestra en los resultados anteriores, dado que su forma es similar, cambiando sólo en la amplitud de su onda, producto de la diferencia en órdenes de magnitud de los valores de sus propiedades. No obstante, comparamos sus amplitudes para observar la magnitud de los órdenes en que oscilan estas derivadas. Para ello, tomemos la velocidad vertical v_z y sus derivadas respecto a λ , μ y ρ en un tiempo $t = 0.8$ segundos, como se muestra en la figura 35. Se observa que la magnitud de la amplitud de la derivada respecto a λ es menor, $\mathcal{O}(10^{-16})$, respecto a las demás, $\mathcal{O}(10^{-14})$ para μ y $\mathcal{O}(10^{-8})$ para ρ , cuando se tiene una velocidad vertical de la partícula del orden de $\mathcal{O}(10^{-6})$, esto producto de las unidades diferentes de cada uno, $\lambda \sim 10^9$ Pa, $\mu \sim 10^8$ Pa y $\rho \sim 10^3$ kg/m³. Estas diferencias se observan en los valores de la matriz de derivadas la cual tendrá valores mayores en la región correspondiente a la densidad, como se verá más adelante.

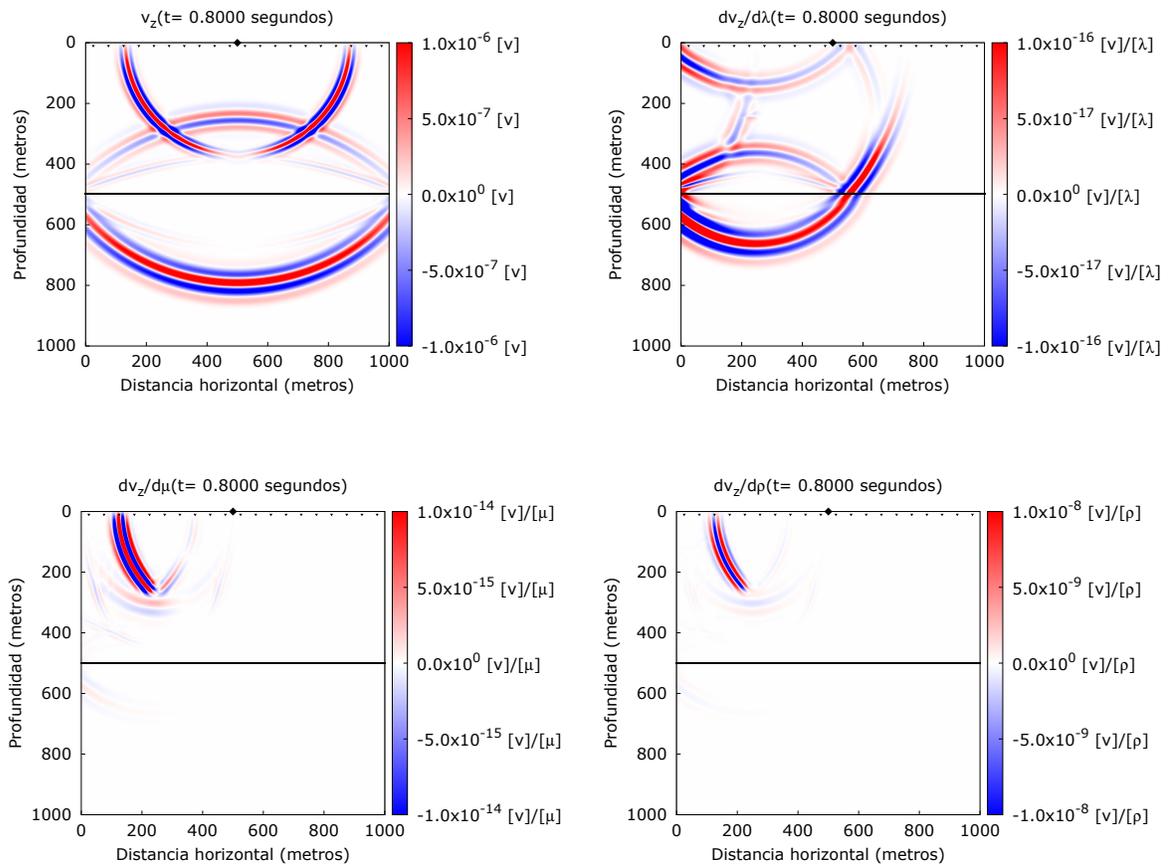


Figura 35: Comparación de la amplitud de la onda propagada para la velocidad v_z en el modelado directo (arriba-izquierda), para la derivada respecto a λ (arriba-derecha), la derivada respecto a μ (abajo-izquierda) y la derivada respecto a la densidad (abajo-derecha), para una fuente en la superficie a la mitad del terreno, en un tiempo $t = 0.8$ segundos.

Capítulo 5. Implementación del problema inverso

En este capítulo se describen el algoritmo para el cálculo de la matriz $A^T C_{dd}^{-1} A$, usando la aproximación a la ecuación de sensibilidad para el cálculo de las derivadas de Frechet, y el algoritmo final para resolver iterativamente el problema inverso de forma de onda completa. Ambos algoritmos están basados en el algoritmo 1 del capítulo 2, por lo que solo describiremos de manera general la estructura de éstos.

También se describe la manera en que se evalúa la convergencia del algoritmo iterativo y la manera en que penalizamos el modelo m para que sus elementos λ , μ y ρ cumplan con la condición de estabilidad de la sección 2.2.3.

5.1. Construcción de la matriz A y $A^T C_{dd}^{-1} A$

Un elemento muy importante en nuestra solución iterativa, ecuación (88), es el cálculo de la matriz de derivadas de Frechet (A) y la matriz $A^T C_{dd}^{-1} A$. En nuestro caso, la matriz A lleva información de como cambian las velocidades respecto a los parámetros λ , μ y ρ del modelo, calculados mediante la aproximación a la ecuación de sensibilidad de la sección 4.2. La estructura de esta matriz A tendrá la forma

$$A = \begin{pmatrix} J_\lambda & J_\mu & J_\rho \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^T = \begin{pmatrix} J_\lambda^T \\ J_\mu^T \\ J_\rho^T \end{pmatrix}, \quad (133)$$

de esta manera la matriz $A^T C_{dd}^{-1} A$ tendrá la siguiente forma

$$A^T C_{dd}^{-1} A = C_{dd}^{-1} \begin{pmatrix} J_\lambda^T J_\lambda & J_\lambda^T J_\mu & J_\lambda^T J_\rho \\ J_\mu^T J_\lambda & J_\mu^T J_\mu & J_\mu^T J_\rho \\ J_\rho^T J_\lambda & J_\rho^T J_\mu & J_\rho^T J_\rho \end{pmatrix}, \quad (134)$$

donde J_λ , J_μ y J_ρ son los Jacobianos para cada parámetro del modelo m , los cuales se calculan mediante las ecuaciones (108)–(112), (115)–(119) y (122)–(126) respectivamen-

te. Nótese que la elección de la forma de la matriz A involucra Jacobianos cruzados en la matriz hessiana que transmiten la correlación que existe entre los diferentes parámetros elásticos. Para ilustrar la forma de estos Jacobianos para cada modelo, tomemos como ejemplo la parte de J_λ y mostremos su estructura como:

$$J_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_{x1}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial v_{x1}}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial v_{x1}}{\partial \lambda_M} \\ \frac{\partial v_{z1}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial v_{z1}}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial v_{z1}}{\partial \lambda_M} \\ \frac{\partial v_{x2}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial v_{x2}}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial v_{x2}}{\partial \lambda_M} \\ \frac{\partial v_{z2}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial v_{z2}}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial v_{z2}}{\partial \lambda_M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial v_{xn_s}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial v_{xn_s}}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial v_{xn_s}}{\partial \lambda_M} \\ \frac{\partial v_{zn_s}}{\partial \lambda_1} & \frac{\partial v_{zn_s}}{\partial \lambda_2} & \dots & \frac{\partial v_{zn_s}}{\partial \lambda_M} \end{pmatrix} \quad (135)$$

donde M es el número de la celdas del modelo λ donde se calculan las derivadas de sensibilidad y n_s es el número de sismogramas tanto para v_x como para v_z . Tomando en cuenta que la longitud de la serie de tiempo para las velocidades es de $n_t + 1$ (incluyendo el tiempo $t = 0$), el tamaño del Jacobiano de λ tendrá dimensiones $2n_s(n_t + 1) \times M$, de igual manera para los otros dos Jacobianos J_μ y J_ρ , entonces la matriz A tendrá dimensiones $2n_s(n_t + 1) \times 3M$ y por lo tanto la matriz $A^T C_{dd}^{-1} A$ tendrá dimensiones de $3M \times 3M$. En nuestro caso, debido a la discretización del problema inverso y a la larga longitud de los sismogramas, tendremos más datos que incógnitas $2n_s(n_t + 1) > 3M$, sin embargo esta información no estará distribuida a lo largo de todo el espacio, sino solo en puntos en la superficie, en pozos, etc., y por lo tanto no nos garantiza la formulación de un problema inverso bien propuesto (es decir que exista la inversa de $A^T C_{dd}^{-1} A$). En resumen, el algoritmo consiste en ir recorriendo cada una de las celdas del modelo del subsuelo y aplicar como fuente en esta región las fuentes secundarias descritas en la sección 4.2 y con ayuda del algoritmo 1 de modelado directo realizar la propagación de onda de sus derivadas, de esta manera la matriz A se irá llenando columna por columna. Una vez ubicados en una celda (una columna de la matriz), comenzaremos los pasos de tiempo resolviendo las ecuaciones de la derivadas de sensibilidad para llenar toda la columna con las series de tiempo para la derivadas $\partial v_x / \partial m$ y $\partial v_z / \partial m$ para los n_s receptores.

Después cambiaremos a la siguiente celda del modelo a invertir y volveremos a realizar el mismo procedimiento, hasta recorrer las M celdas para cada parámetro del modelo.

<p>Entrada:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Mismos parámetros de entrada del Algoritmo 1. - Discretización modelo inverso: nxM, nzM. <p>1 Comienzo del llenado de la matriz A;</p> <p>2 $k=0$;</p> <p>3 Para $izM=1:nzM$ hacer</p> <p>4 Para $ixM=1:nxM$ hacer</p> <p>5 $k = k+1$;</p> <p>6 para $\text{Lambda } kl=k+1$;</p> <p>7 resolver las ecuaciones (108)–(112) usando el algoritmo 1;</p> <p>8 medir las derivadas de la velocidad $\partial v_x / \partial \lambda$ y $\partial v_z / \partial \lambda$ en los n_s receptores;</p> <p>9 llenar toda la columna kl de la matriz $A[: , kl]$ con las mediciones en los receptores;</p> <p>10 para $\text{Mu } km=k+nxM*nzM$;</p> <p>11 resolver las ecuaciones (115)–(119) usando el algoritmo 1;</p> <p>12 medir las derivadas de la velocidad $\partial v_x / \partial \mu$ y $\partial v_z / \partial \mu$ en los n_s receptores;</p> <p>13 llenar toda la columna km de la matriz $A[: , km]$ con las mediciones en los receptores;</p> <p>14 para $\text{Rho } kr=k+2*nxM*nzM$;</p> <p>15 resolver las ecuaciones (122)–(126) usando el algoritmo 1;</p> <p>16 medir las derivadas de la velocidad $\partial v_x / \partial \rho$ y $\partial v_z / \partial \rho$ en los n_s receptores;</p> <p>17 llenar toda la columna kr de la matriz $A[: , kr]$ con las mediciones en los receptores;</p> <p>18 Fin</p> <p>19 Fin</p> <p>20 Calcular $A^T C_{dd}^{-1} A$;</p> <p> Salida: Matriz A y $A^T C_{dd}^{-1} A$</p> <p>21 Final</p>	
---	--

Algoritmo 2: Algoritmo para la construcción de la matriz A y $A^T C_{dd}^{-1} A$, donde el símbolo $[:]$ indica todos los elementos de la columna. Se realizó y guardó previamente un modelado directo para obtener las fuentes secundarias correspondientes.

De esta manera, mediante el algoritmo 2 y el diagrama de flujo de la figura 36 se contará con las matrices A y $A^T C_{dd}^{-1} A$ necesarias para el esquema iterativo de la ecuación 77, recordando nuestro proceso iterativo:

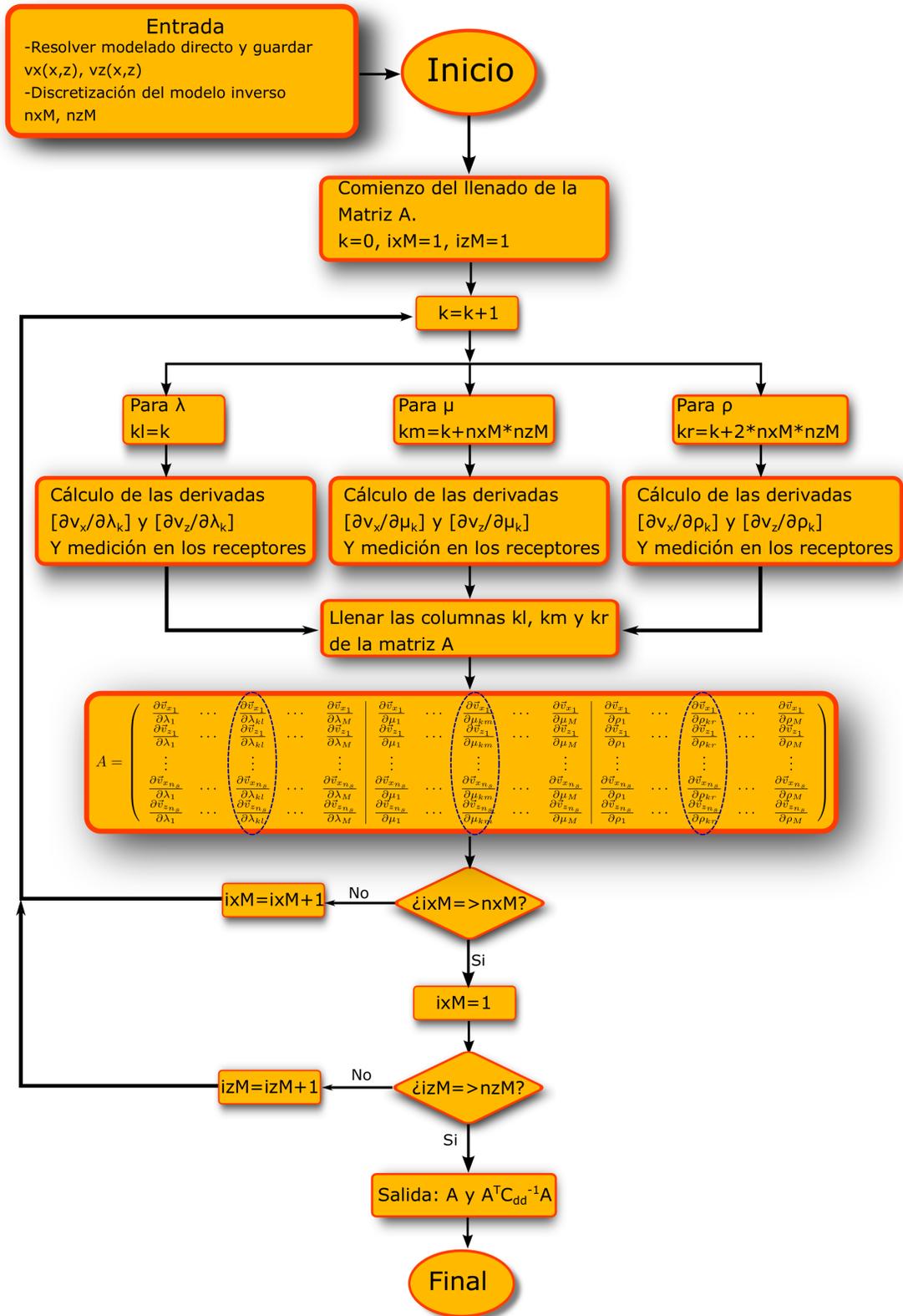


Figura 36: Diagrama de flujo para el llenado de la matriz A y $A^T C_{dd}^{-1} A$, donde las derivadas se calculan usando la aproximación a la ecuación de sensibilidad de la sección 4.2 y donde se realizó un modelado directo previo para el uso de las fuentes secundarias resultantes. El diagrama está basado en el diagrama de modelado directo de la figura 4

$$m = [A^T C_{dd}^{-1} A]^{-1} A^T C_{dd}^{-1} [d - F(m_0) + Am_0],$$

donde no se incluye regularización. Como se explicó en la sección 3.5, la minimización del estabilizador de regularización, ya sea máxima suavidad o imágenes enfocadas, resulta en tomar la ecuación anterior y añadirle la matriz correspondiente a la minimización del operador de gradiente del modelo a la matriz cuadrada que se invertirá como:

$$m = \left[\begin{array}{c} \text{Derivadas de Frechet} \\ \underbrace{A^T C_{dd}^{-1} A} \\ \text{Regularización} \\ + \alpha D^t C_{MGS} D \end{array} \right]^{-1} A^T C_{dd}^{-1} \left[\begin{array}{c} \text{Desajuste} \\ \underbrace{d - F(m_0) + Am_0} \end{array} \right],$$

de esta manera solo tenemos que realizar la metodología anterior del llenado de la matriz $A^T C_{dd}^{-1} A$ y agregarle la matriz correspondiente a la regularización de nuestro problema. Por ejemplo, tomemos el caso de un modelo a invertir equiespaciado $\Delta x = hxM$ y $\Delta z = hzM$ de nxM y nzM celdas en x y z respectivamente. Una vez obtenida la parte de las derivadas de la matriz a invertir, los valores correspondientes al operador gradiente que se agregarán estarán dados por la siguiente operación en nuestro algoritmo desarrollado (citando solamente la contribución del gradiente D_x)

$$[J_\lambda^T J_\lambda]_{ij} = [J_\lambda^T J_\lambda]_{ij} + \alpha_\lambda [C_{MGS_\lambda}]_{ij} \frac{2\delta_{ij} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}}{hxM}, \quad (136)$$

$$[J_\mu^T J_\mu]_{ij} = [J_\mu^T J_\mu]_{ij} + \alpha_\mu [C_{MGS_\mu}]_{ij} \frac{2\delta_{ij} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}}{hxM}, \quad (137)$$

$$[J_\rho^T J_\rho]_{ij} = [J_\rho^T J_\rho]_{ij} + \alpha_\rho [C_{MGS_\rho}]_{ij} \frac{2\delta_{ij} - \delta_{i+1,j} - \delta_{i,j+1}}{hxM}, \quad (138)$$

donde α_λ , α_μ y α_ρ son los factores de regularización y C_{MGS_λ} , C_{MGS_μ} y C_{MGS_ρ} son las matrices de mínimo soporte de gradiente $\left(\frac{1}{|\nabla m^0|^2 + \beta^2}\right)$ utilizando el modelo previo, para cada parámetro de λ , μ y ρ . Obsérvese que si hacemos las matrices de mínimo soporte de gradiente iguales a la unidad, se obtiene un problema con regularización del tipo Tikhonov de primer orden. También si hacemos α_λ , α_μ y α_ρ igual a cero regresamos al problema iterativo sin regularización.

5.2. Criterios de convergencia

En nuestro proceso iterativo de inversión de forma de onda, es importante el monitoreo de la convergencia para cada iteración, ya sea mediante el análisis de los elementos de la función objetivo o de la observación de las actualizaciones del modelo obtenido.

Para observar el ajuste de los datos sintéticos con datos calculados durante el proceso iterativo, podemos rastrear la función objetivo mediante el valor medio cuadrático, RMS (Root Mean Square), de sus residuales normalizados como

$$\text{rms}_{\text{data}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{d_i^{\text{obs}} - F_i(m)}{\sigma_i} \right]^2} \quad (139)$$

donde $N = 2n_s(n_t + 1)$ es el número de datos para los n_s receptores de longitud $n_t + 1$ para la velocidad v_x y v_z . Nótese que el rms de la ecuación (139) mezcla tanto el ajuste de la velocidad vertical como el ajuste de la velocidad horizontal, si deseamos analizar por separado la evolución de los residuales tanto para v_x como v_z , entonces el valor medio cuadrático se separa de la forma

$$\text{rms}_{v_x} = \sqrt{\frac{1}{n_t + 1} \sum_{i=0}^{n_t} \left[\frac{v_{x_i}^{\text{obs}} - v_{x_i}^{\text{cal}}}{\sigma_{v_x i}} \right]^2} \quad (140)$$

y

$$\text{rms}_{v_z} = \sqrt{\frac{1}{n_t + 1} \sum_{i=0}^{n_t} \left[\frac{v_{z_i}^{\text{obs}} - v_{z_i}^{\text{cal}}}{\sigma_{v_z i}} \right]^2}. \quad (141)$$

La convergencia de nuestro proceso iterativo estará basado en su totalidad por el rms de la ecuación (139), es decir, le daremos más importancia al ajuste de todos los datos en conjunto. Sin embargo, no dejaremos de analizar la evolución en tiempo de la estructura del modelo del subsuelo. Para esto podemos calcular un valor medio cuadrático similar al

de los datos, observando la diferencia relativa entre el modelo actual y el modelo previo de la forma

$$\text{rms}_{\text{model}} = \sqrt{\frac{1}{3M} \frac{\sum_{k=1}^{3M} (m_k^i - m_k^{i-1})^2}{\sum_{k=1}^{3M} (m_k^i)^2}}, \quad (142)$$

donde M es el número de celdas a invertir para cada parámetro del modelo $m = m(\lambda, \mu, \rho)$ y m^i es el modelo actual obtenido a partir de un modelo previo m^{i-1} en el i -ésimo proceso iterativo. Si bien no exigimos como criterio el valor medio cuadrático del modelo, ecuación (142), también analizamos por separado la variación de cada parámetro del modelo del subsuelo en la representación de las cantidades λ , μ y ρ , de la forma

$$\text{rms}_{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{\sum_{k=1}^M (\lambda_k^i - \lambda_k^{i-1})^2}{\sum_{k=1}^M (\lambda_k^i)^2}}, \quad (143)$$

$$\text{rms}_{\mu} = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{\sum_{k=1}^M (\mu_k^i - \mu_k^{i-1})^2}{\sum_{k=1}^M (\mu_k^i)^2}}, \quad (144)$$

$$\text{rms}_{\rho} = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{\sum_{k=1}^M (\rho_k^i - \rho_k^{i-1})^2}{\sum_{k=1}^M (\rho_k^i)^2}}. \quad (145)$$

$$(146)$$

También podemos analizar el valor medio respecto al modelo real para observar el sesgo que tiene el modelo óptimo con respecto al modelo original de prueba,

$$\text{rms}_\lambda = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{\sum_{k=1}^M (\lambda_k^i - \lambda_k^{\text{real}})^2}{\sum_{k=1}^M (\lambda_k^i)^2}}, \quad (147)$$

$$\text{rms}_\mu = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{\sum_{k=1}^M (\mu_k^i - \mu_k^{\text{real}})^2}{\sum_{k=1}^M (\mu_k^i)^2}}, \quad (148)$$

$$\text{rms}_\rho = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{\sum_{k=1}^M (\rho_k^i - \rho_k^{\text{real}})^2}{\sum_{k=1}^M (\rho_k^i)^2}}, \quad (149)$$

$$(150)$$

Como se explica más adelante, la revisión de la condición de estabilidad del esquema de mallado intercalado previene una división por cero en los valores rms de los parámetros.

5.3. Solución iterativa del problema inverso

Una vez detallados todos los elementos que se requieren para resolver nuestro problema inverso de forma de onda completa, solo resta por explicar de manera general el funcionamiento de nuestro proceso iterativo de inversión, el cual estará basado en los procesos de modelado directo, del cálculo de derivadas y el llenado de las matrices A y $A^T C_{dd}^{-1} A$ necesarias.

El proceso consiste en ir reduciendo el vector de desajuste $d - F(m_0)$ (residuales) a partir de un modelo inicial m_0 usando la ecuación (88) obtenida con anterioridad. El modelo obtenido m en una iteración pasará a ser m_0 y volveremos a realizar el mismo proceso hasta alcanzar un criterio de convergencia o hasta que se termine el número máximo de iteraciones.

Para una mejor ilustración del funcionamiento de nuestro proceso iterativo, mostramos a continuación su algoritmo y diagramas de flujo correspondientes.

Dominio	$x_{\min}, x_{\max}, z_{\min}, z_{\max}, n_t$
Modelo inicial	$m_0 = m_0(\lambda, \mu, \rho)$
Parámetros de fuente	$x_{\text{source}}, z_{\text{source}}, \hat{n} = \text{Dirección}$
Parámetros de receptores	ns, \vec{r}_{i_s}
Datos observados	$v_x^{\text{obs}} \text{ y } v_z^{\text{obs}}$
Matriz de covarianzas	$C_{dd} = \sigma_i$
Discretización del problema directo	nx, nz
Discretización del problema inverso	nxM, nzM
Parámetros de la regularización	α, β
Parámetros para las iteraciones	$Niter, Tol = \text{Tolerancia}$

Tabla 1: Datos de entrada para el algoritmo 3 y el diagrama de flujo de la figura 37 del esquema iterativo de inversión de forma de onda.

Entrada: Datos de la tabla1

- 1 Comienzo del proceso iterativo de inversión de forma de onda;
- 2 **Para** $iter=1:Niter$ **hacer**
- 3 Realizar modelado directo (Algoritmo 1). Guardar v_x y v_z ;
- 4 Medición en los ns receptores;
- 5 Residuales= $d - F(m_0)$;
- 6 Cálculo de derivadas de Frechet y llenado de la matriz A y $A^T C_{dd}^{-1} A$ (Algoritmo 2);
- 7 Agregamos regularización: $A^T C_{dd}^{-1} A = A^T C_{dd}^{-1} A + \alpha D^T C_{MGS} D$;
- 8 Inversión, $[A^T C_{dd}^{-1} A]^{-1}$;
- 9 $m = [A^T C_{dd}^{-1} A]^{-1} A^T C_{dd}^{-1} [d - F(m_0) + Am_0]$;
- 10 $rms_{data} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{d_i^{obs} - F_i(m)}{\sigma_i} \right]^2}$;
- 11 **si** $rms \leq Tol$ **entonces**
- 12 Mensaje de convergencia alcanzada;
- 12 **Salida:** Modelos del subsuelo $\lambda(x, z)$, $\mu(x, z)$, $\rho(x, z)$, $V_p(x, z)$ y $V_s(x, z)$
- 12 **Salida:** rms_{data} , rms_{λ} , rms_{μ} , rms_{ρ}
- 12 **Salida:** $|d - Fm_0|$
- 13 Fin del proceso Iterativo. Salida del Programa
- 14 **fin**
- 15 Revisión de la condición de estabilidad y penalización del modelo obtenido;
- 16 $m_0 = m$
- 17 **Fin**
- 18 Mensaje de número máximo de iteraciones alcanzado;
- 18 **Salida:** Modelos del subsuelo $\lambda(x, z)$, $\mu(x, z)$, $\rho(x, z)$, $V_p(x, z)$ y $V_s(x, z)$
- 18 **Salida:** rms_{data} , rms_{λ} , rms_{μ} , rms_{ρ}
- 18 **Salida:** $|d - F(m_0)|$
- 19 Fin del proceso Iterativo. Salida del Programa

Algoritmo 3: Algoritmo para el proceso iterativo de inversión de forma de onda, ecuación (88) .

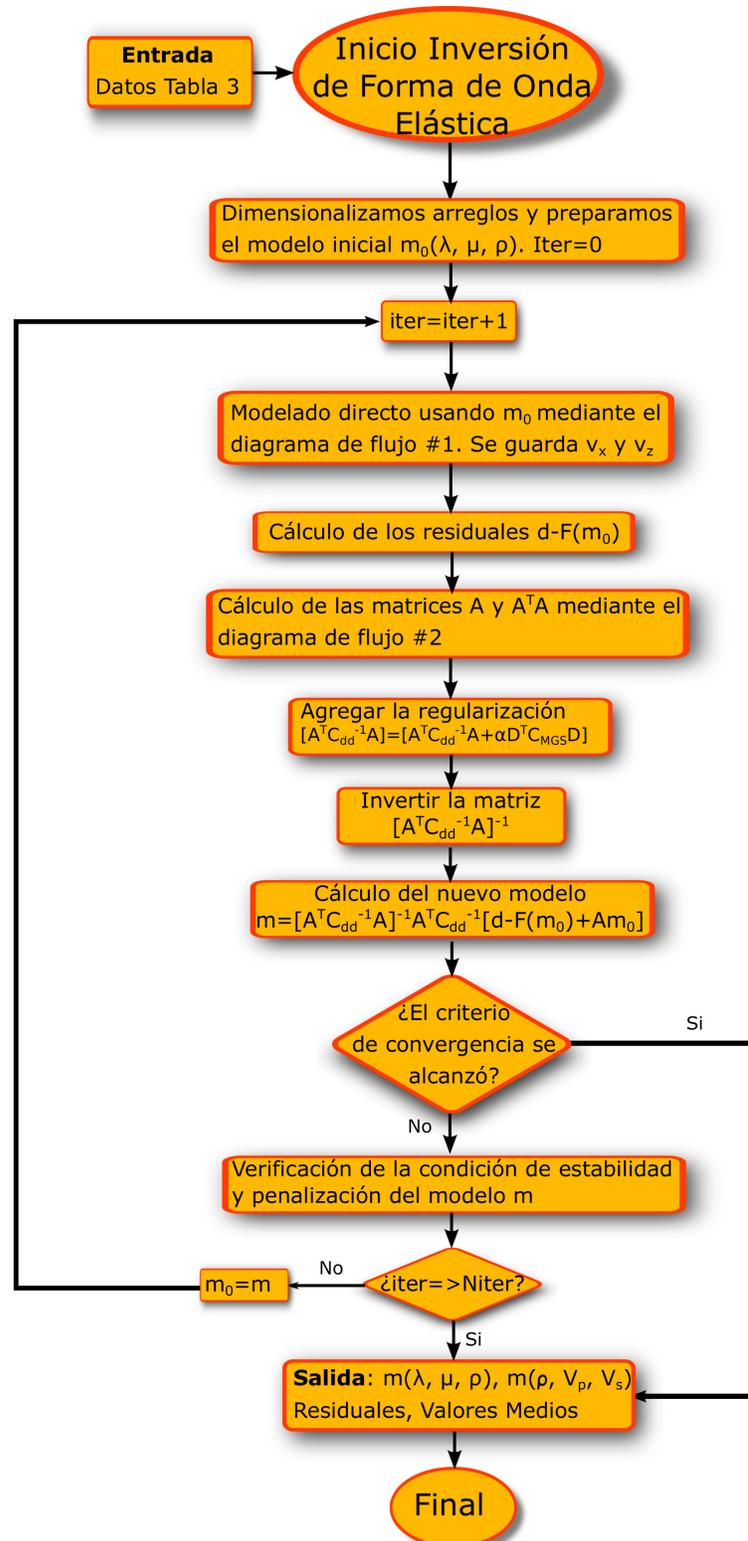


Figura 37: Diagrama de flujo para el esquema iterativo de inversión de forma de onda completa a partir de un modelo inicial m_0 con los datos de las velocidades $v_x(t)$ y $v_z(t)$ medidos en los sismogramas. El índice $iter$ indica el número de iteración hasta un número de iteraciones $Niter$ si el criterio de convergencia no se cumple. El diagrama está basado en el diagrama de modelado directo de la figura 4 y en el diagrama de cálculo de derivadas de la figura 36.

Capítulo 6. Experimentos numéricos

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos empleando nuestro programa desarrollado en Fortran90 para resolver iterativamente el problema inverso de forma de onda completa, con ayuda del algoritmo 3 y el diagrama de flujo de la figura 37.

Para el modelo sintético a resolver se calcularon datos sintéticos con mediciones realizadas a lo largo de la superficie que nos sirvan como datos de entrada en nuestro código de inversión. Si bien se buscan sólo los parámetros $\lambda(x, z)$, $\mu(x, z)$ y $\rho(x, z)$, también se arrojan los modelos en las representaciones de las velocidades de las ondas P y S, para analizar sus ajustes y verificar la condición de estabilidad para cada iteración. Aunque nuestro criterio de convergencia prioriza el ajuste de los datos mediante el monitoreo del valor medio cuadrático (rms_{data}) de los residuales, también analizamos por separado el valor medio para cada parámetro del modelo mediante las ecuaciones descritas en el capítulo anterior.

Se presenta la inversión de un solo modelo sintético. El modelo consiste en 2 capas homogéneas horizontales, donde invertiremos con discretizaciones de 4×4 celdas y 20×20 celdas para los 3 parámetros del modelo m utilizando regularización de primer orden de Tikhonov y mínimo soporte de gradiente.

Por último realizamos un análisis de los parámetros de regularización que se utilizan en MGS, para detallar el tipo de estructura que se produce dependiendo de dichos valores.

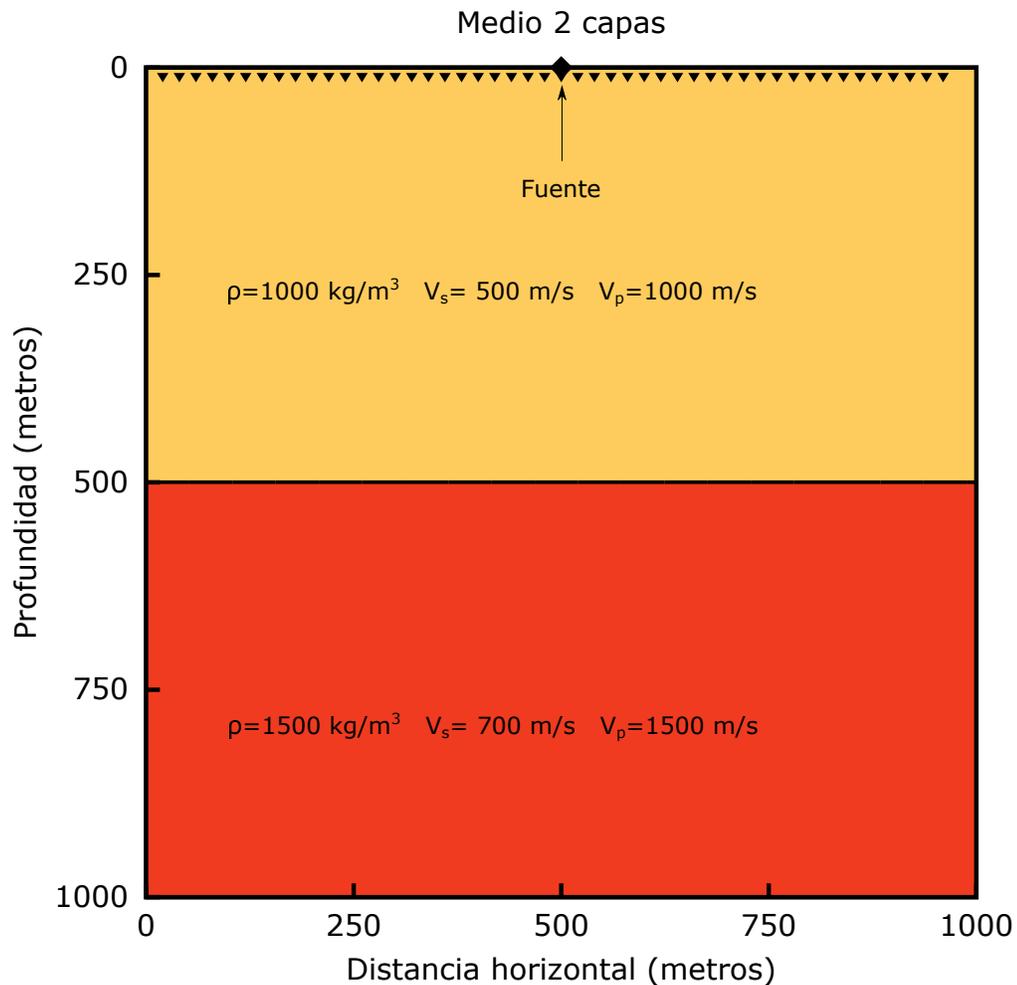


Figura 38: Medio de dos capas horizontales a invertir en una región de 0 a 1000 metros de distancia horizontal y profundidad, donde la interfaz entre capas se encuentra a 500 metros de profundidad. En la figura ▼ representa los receptores y ♦ es el origen de la fuente (500,0). La línea negra continua representa el límite entre capas, V_p representa velocidad de ondas P y V_s la correspondiente a ondas S.

6.1. Medio de 2 capas. Modelo de 4×4 celdas

El modelo resolver mediante inversión de forma de onda consiste en un modelo de 2 capas horizontales homogéneas, figura 38, el cual no representa un modelo geológico real pero servirá como ejercicio de calibración para el algoritmo de inversión. La capa superior tiene velocidades $V_p = 1000 \text{ m/s}$ y $V_s = 500 \text{ m/s}$ y una densidad $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, lo que se traduce en valores de $\lambda = 5 \times 10^8 \text{ Pa}$ y $\mu = 2.5 \times 10^8 \text{ Pa}$ para los parámetros de Lamé. En la segunda capa mostraremos un bajo contraste en sus propiedades, con velocidades $V_p = 1500 \text{ m/s}$ y $V_s = 700 \text{ m/s}$ y una densidad $\rho = 1500 \text{ kg/m}^3$, que corresponde a valores de los parámetros de Lamé $\lambda = 7 \times 10^8 \text{ Pa}$ y $\mu = 7.5 \times 10^8 \text{ Pa}$.

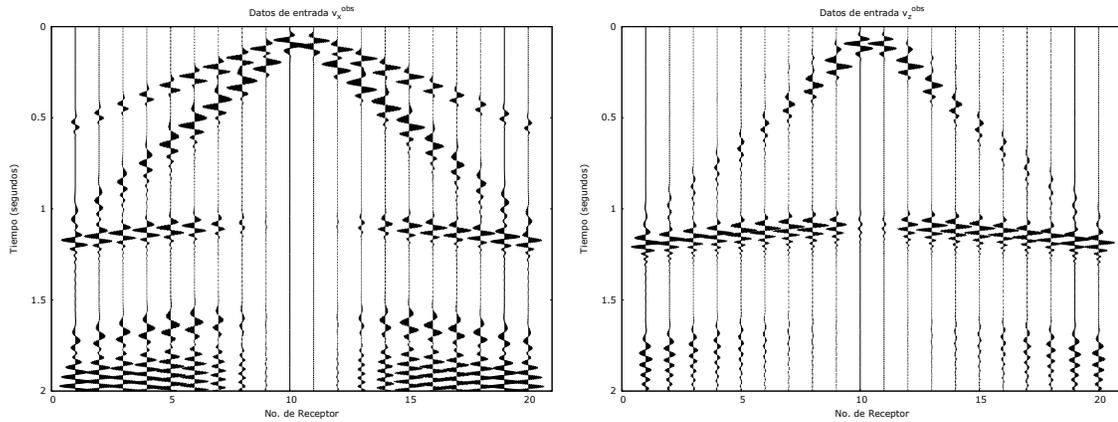


Figura 39: Datos de entrada v_x^{obs} (izquierda) y v_z^{obs} (derecha) para nuestro algoritmo de modelado inverso de la figura 38. Donde se miden 2 segundos de propagación de onda elástica en 20 receptores colocados en la superficie.

El lugar de medición de los datos observados consiste en un arreglo de 20 geófonos (como se observa en la figura 38) colocados a lo largo de la superficie separados cada 50 metros a partir de un primer receptor a una distancia $x = 25$ metros del origen del dominio, de esta manera el último receptor se encontrará en $x = 975$ metros, teniendo así un arreglo simétrico de mediciones. Aplicamos una sola fuente ubicada en la mitad del dominio en la superficie.

Realizamos la propagación de onda elástica de este modelo sintético en un modelado directo de 200×200 nodos en x y z en un tiempo $t = 2$ segundos con 800 muestras de tiempo. Se aplican condiciones de frontera absorbentes y se cumple la condición de estabilidad. La propagación en tiempo y espacio de los campos de velocidades v_x y v_z es similar al ejemplo de las figuras 8 y 10 del capítulo de modelado directo. Así pues, se obtienen las respuestas en los 20 sismogramas, v_x^{obs} y v_z^{obs} (figura 39), que fungirán como los datos de entrada en el esquema de inversión de forma de onda (ecuación 77). En dichas trazas sintéticas, son evidentes las pendientes para las ondas P y S, estas pendientes nos servirán para calcular los valores de la primera capa que fungirá como el modelo inicial.

La discretización del modelo inverso consistirá en $n_x M \times n_z M = 4 \times 4$ celdas equiespaciadas cada 250 metros en el dominio como se observa en la figura 40, considerando que invertimos 3 parámetros elásticos en el vector $m = m(\lambda, \mu, \rho)$, al final se resolverá un total de 48 parámetros del modelo sintético en la inversión.

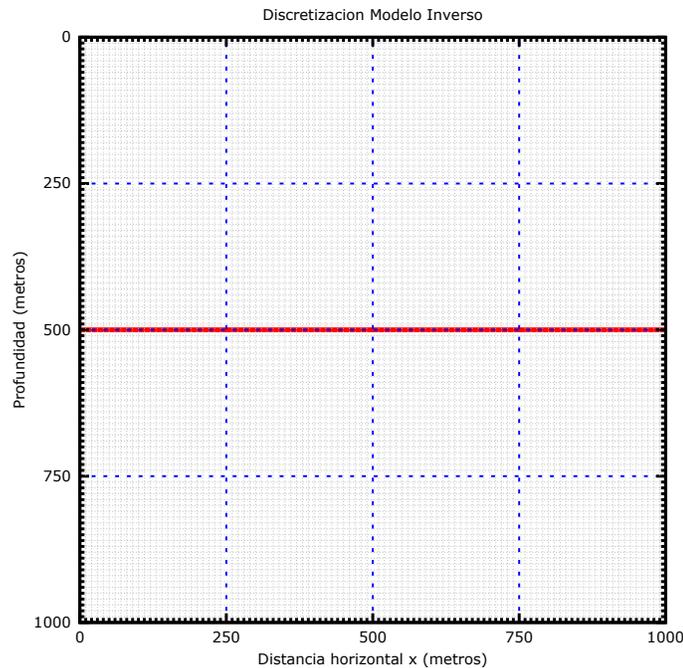


Figura 40: Discretización (línea azul) de 4×4 celdas para el problema inverso del modelo 39, donde la línea roja representa la interfaz entre capas, y la línea más fina representa la discretización del modelo directo.

Esta primer prueba sencilla de inversión fue realizada sin paralelización con un máximo de 20 iteraciones en el algoritmo 37, sin incluir regularización en esta prueba. Se partió de un modelo inicial m_0 homogéneo, obtenido del análisis de pendientes de los primeros arribos de las ondas P y S en nuestros sismogramas y suponiendo una densidad de 1000 kg/m^3 . De esta manera $m_0 = m_0(\lambda = 5 \times 10^8 \text{ Pa}, \mu = 2.5 \times 10^8 \text{ Pa}, \rho = 1000 \text{ kg/m}^3)$.

En un primer experimento se realizó 20 iteraciones en el algoritmo de inversión dado que deseábamos explorar el comportamiento del algoritmo, antes de imponer un criterio de detenimiento formal y que aún no se habían explorado técnicas de paralelización ni se había echo uso de la supercomputadora Lamb. La evolución de los modelos obtenidos en la inversión en cada iteración se observan en las figuras 41, 42 y 43 para λ , μ y ρ respectivamente.

En los 3 parámetros, se observa que inmediatamente en la primer iteración del código de inversión se detecta la interfaz entre capas a 500 m de profundidad, después de eso, continúa el proceso de búsqueda de los valores de la segunda capa hasta obtener un

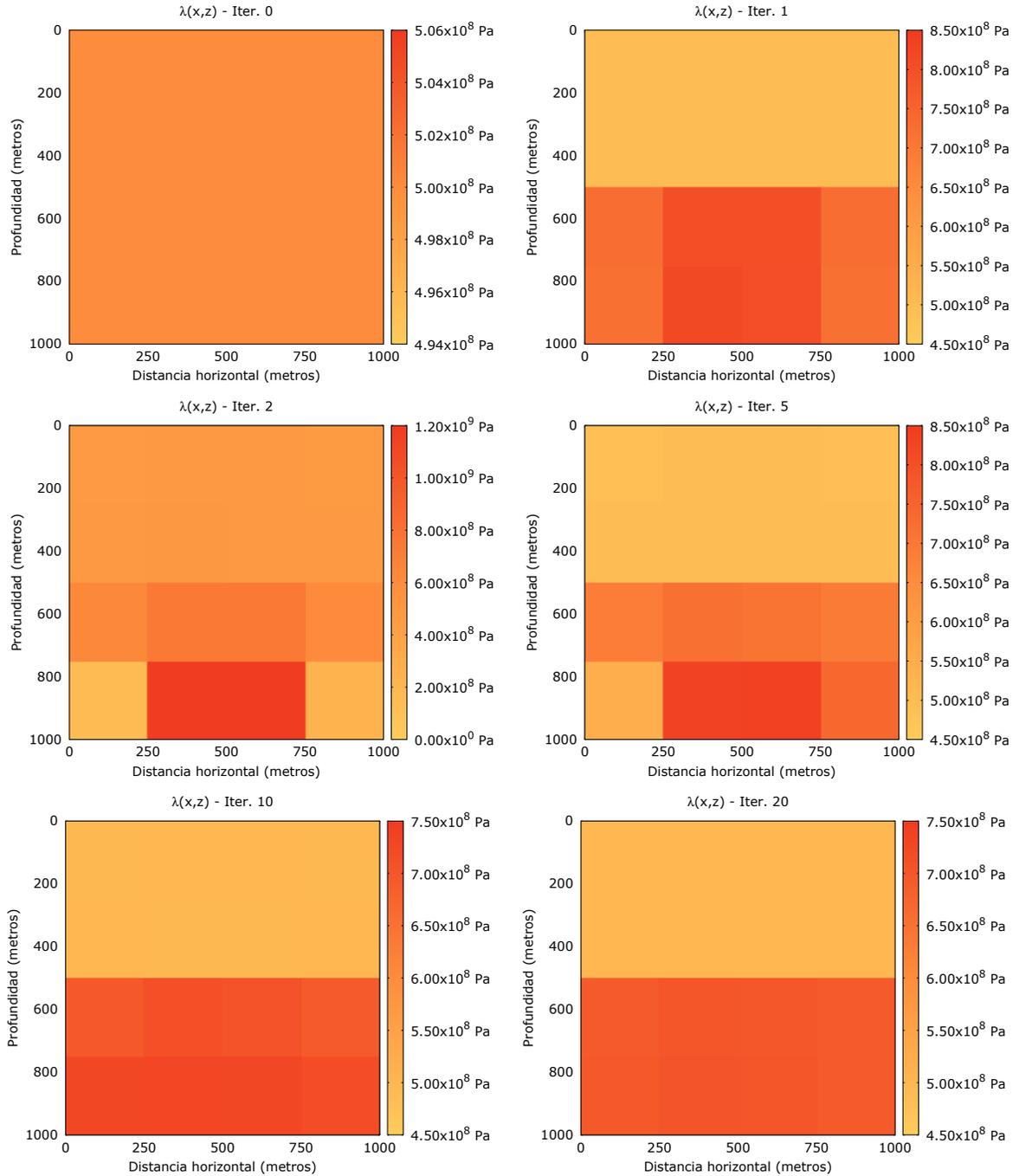


Figura 41: Evolución del proceso iterativo de inversión de 4×4 celdas para las iteraciones 0, 1, 2, 5, 10 y 20 para el parámetro de Lamé $\lambda(x, z)$ del modelo m . Se usa como entrada las trazas sísmicas de la figura 39 generadas por la propagación de onda del modelo sintético de la figura 38.

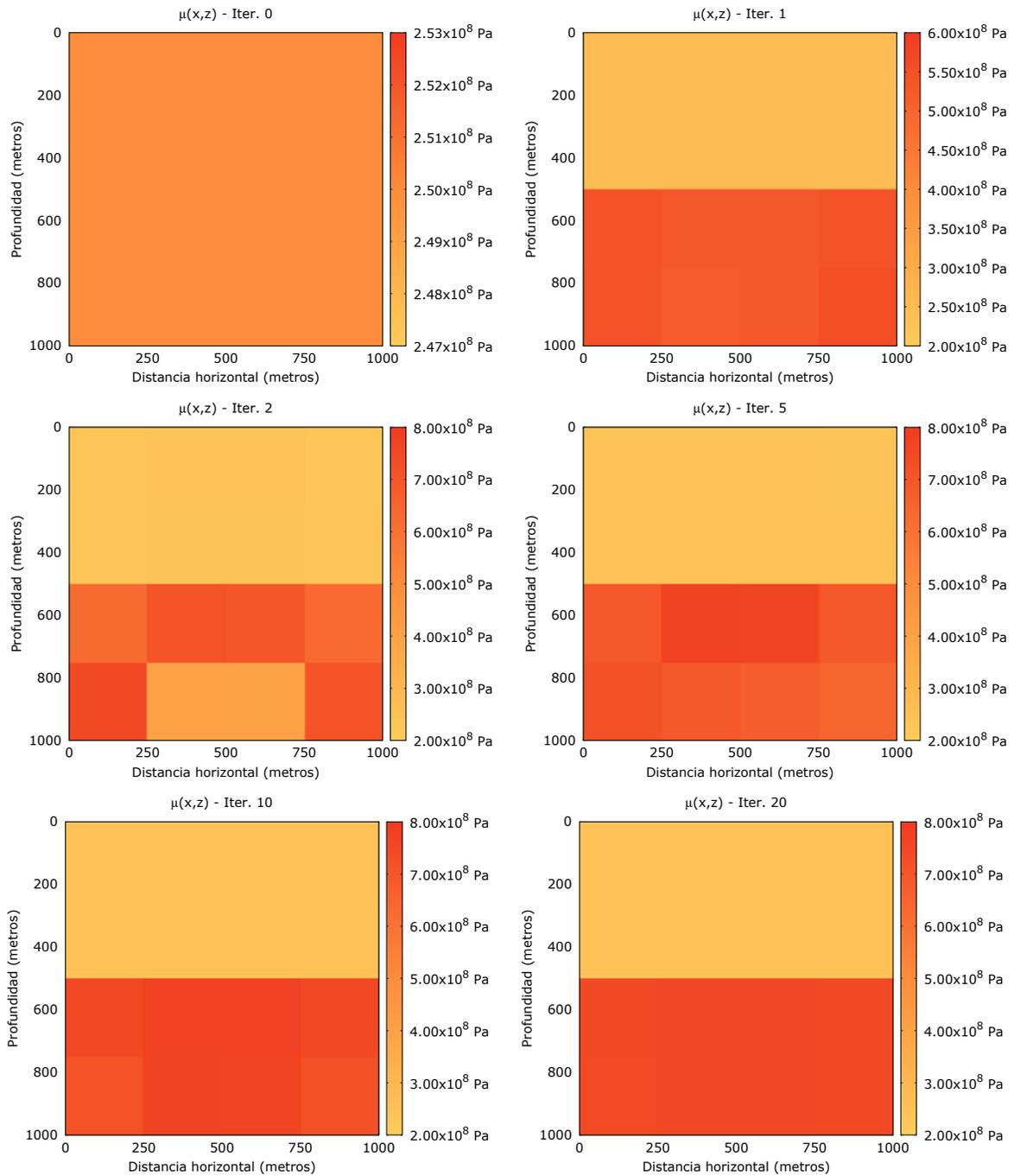


Figura 42: Evolución del proceso iterativo de inversión de 4×4 celdas para las iteraciones 0, 1, 2, 5, 10 y 20 para el parámetro de Lamé $\mu(x, z)$ del modelo m . Se usa como entrada las trazas sísmicas de la figura 39 generadas por la propagación de onda del modelo sintético de la figura 38.

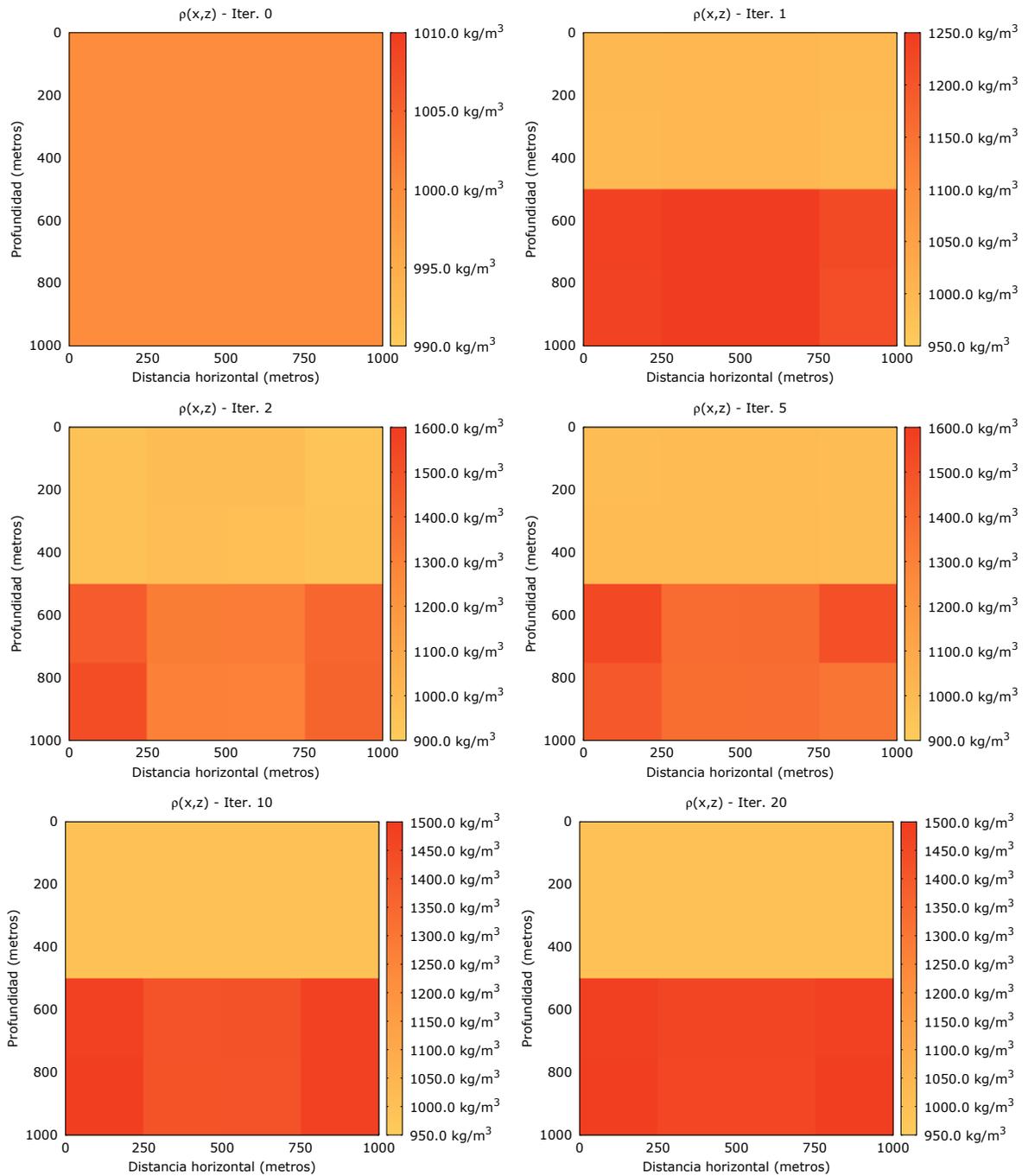


Figura 43: Evolución del proceso iterativo de inversión de 4×4 celdas para las iteraciones 0, 1, 2, 5, 10 y 20 para la densidad $\rho(x, z)$ del m . Se usa como entrada las trazas sísmicas de la figura 39 generadas por la propagación de onda del modelo sintético de la figura 38.

modelo cercano al modelo real de la figura 38. Para el caso de la cantidad $\lambda(x, z)$, se observa que en la segunda iteración las celdas de las esquinas inferiores alcanzan valores pequeños respecto al valor real $\lambda = 5 \times 10^8$ Pa, para aclarar que el cero que se muestra en la escala es debido a estos valores.

Para analizar la convergencia del proceso, primero mostraremos los valores medios cuadráticos porcentuales rms_λ , rms_μ y rms_ρ como se muestran en la figura 44. Se observa que en el primer paso iterativo los parametros del modelo cambian en un 10% para las 3 cantidades λ , μ y ρ respecto al modelo inicial y al modelo real. Después los modelos tienden a cambiar sólo en porcentajes pequeños para rms_λ , rms_μ y rms_ρ respecto al modelo real y valores porcentuales más pequeños respecto al modelo previo. Se observa en las primeras iteraciones existe un aumento en su valor especialmente para rms_λ , esto debido en parte al modelo inicial que se utilizó y a que existen celdas del modelo de λ que presenta valores muy pequeños, como se observa en la figura 41.

En cuanto al ajuste de los datos, el valor medio cuadrático del vector de desajuste $r = d^{\text{obs}} - d^{\text{cal}}$ (figura 45) decrece consistentemente hasta alcanzar un valor $\text{rms}_{\text{data}} = 1.36 \times 10^{-10}$ en la iteración número 20. El descenso de este valor con las iteraciones es un indicativo de que el algoritmo de modelado directo así como los tres algoritmos de cálculo de derivadas son consistentes entre sí. El comportamiento descendente de la gráfica aún en la iteración 20 indica que es muy posible que el proceso todavía requiera algunas iteraciones adicionales para llegar al mínimo requerido para la función objetivo.

Dado que esta primer prueba de inversión fue realizada utilizando un solo procesador, el proceso completo se tomó 2 días para las 20 iteraciones, esto es, sin paralelizar el código. Aspirar a realizar la inversión en modelos con mayor número de celdas con el algoritmo propuesto aquí, implica al menos el uso más eficiente de los recursos de cómputo, por lo que se volvió a realizar el mismo proceso de inversión anterior, pero ahora usando el cluster Lamb, paralelizando el código como en la sección 2.2.5 en la parte de modelado directo de los campos v_x y v_z y las derivadas. Para la ejecución del mismo experimento, se seleccionaron un máximo de 110 pasos iterativos, sin establecer un criterio de convergencia. Los resultados de los rms de los parámetros para este mismo experimento se muestran en la figura 46.

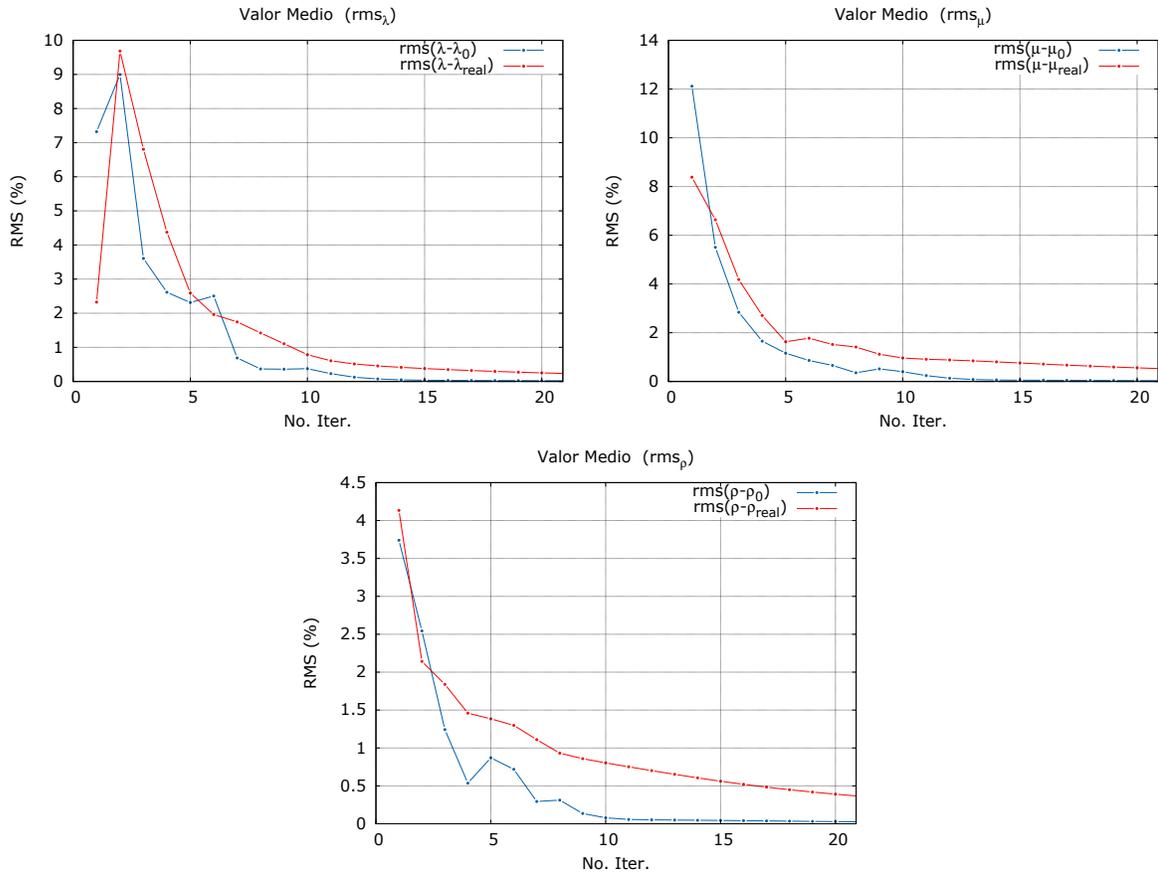


Figura 44: Valor medio cuadrático porcentual contra iteración para el proceso de inversión de los modelos obtenidos en la figura 41 (arriba izquierda), 42 (arriba derecha) y 43 (abajo). Se muestra el valor medio respecto al modelo anterior, $rms(m - m_0)$, para observar la estabilidad de los modelos obtenidos en el proceso iterativo y el valor medio respecto al modelo real, $rms(m - m_{real})$, para observar la desviación respecto al modelo verdadero.

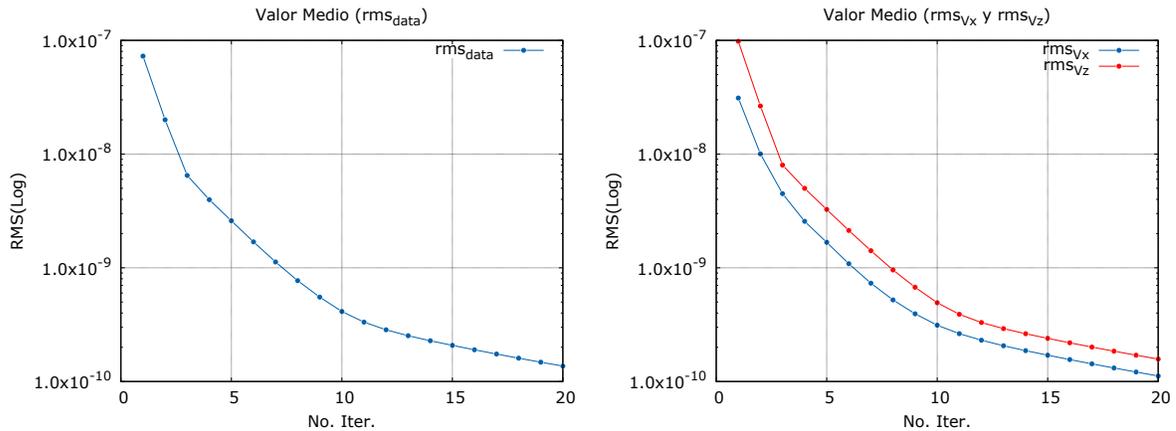


Figura 45: Valor medio cuadrático en escala logarítmica contra número de iteración para el ajuste de los datos sintéticos observados de la figura 39 en nuestro algoritmo de inversión en 20 iteraciones. El rms de la izquierda corresponde al ajuste de los datos en general $d^{obs} - d^{cal}$ y el rms de la derecha corresponde al rms separado para el ajuste de las velocidades $v_x^{obs} - v_x^{cal}$ (color azul) y $v_z^{obs} - v_z^{cal}$ (color rojo).

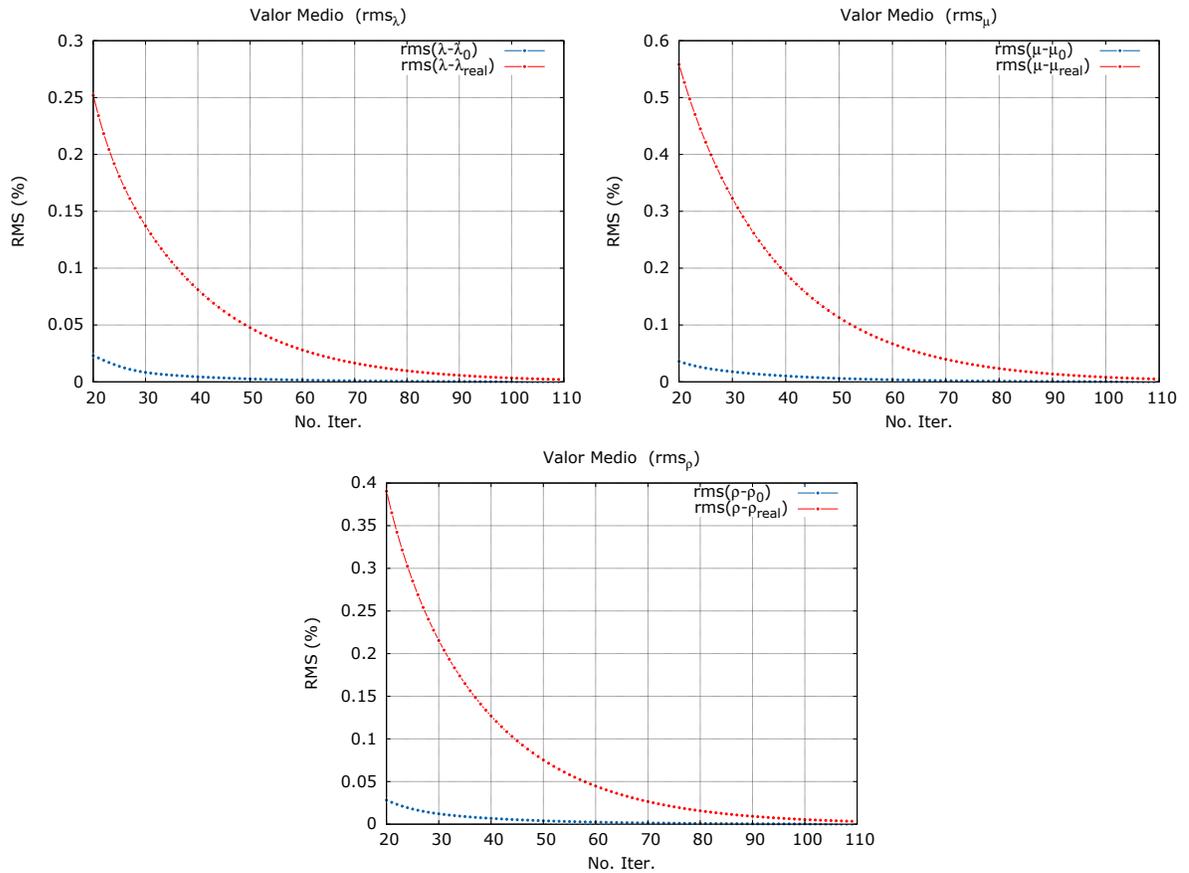


Figura 46: Continuación al cálculo del valor medio cuadrático porcentual contra iteración para la curva obtenida en la ecuación 44, a partir de la iteración número 20 hasta 110 iteraciones.

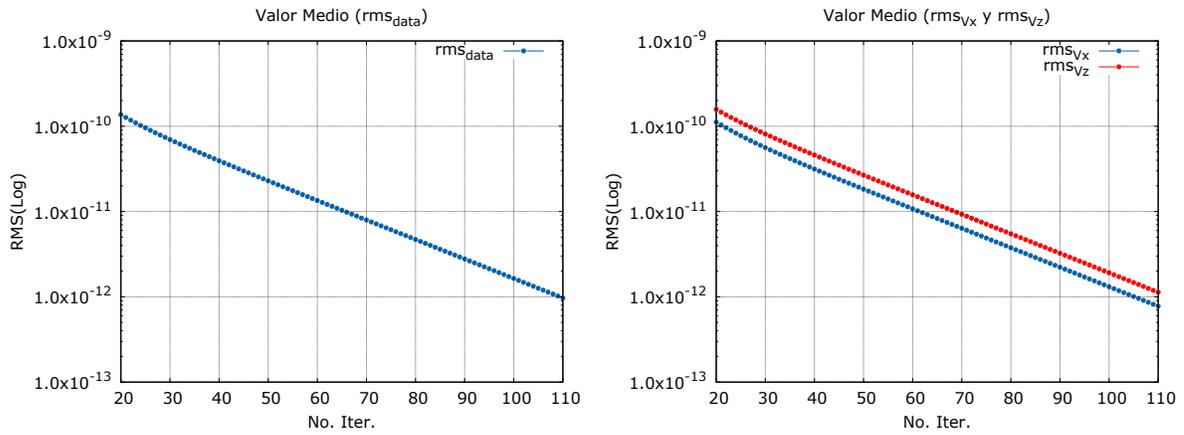


Figura 47: Continuación al cálculo del valor medio cuadrático en escala logarítmica contra número de iteración para el ajuste de los datos sintéticos observados de la figura 39 en el algoritmo de inversión a partir de la iteración 20 hasta 110. El rms de la izquierda corresponde al ajuste de los datos en general $d^{\text{obs}} - d^{\text{cal}}$ y el rms de la derecha corresponde al rms separado para el ajuste de las velocidades $v_x^{\text{obs}} - v_x^{\text{cal}}$ (color azul) y $v_z^{\text{obs}} - v_z^{\text{cal}}$ (color rojo).

Se observa que las diferencias entre los modelos obtenidos en cada iteración continúa disminuyendo respecto al modelo anterior y respecto al modelo real. En cuanto al ajuste de las velocidades, también los valores RMS siguen disminuyendo hasta alcanzar valores cercanos a 10^{-12} , como se observa en la figura 47, valores bastante pequeños respecto al valor máximo de la amplitud de la traza sísmica, 10^{-6} .

6.2. Medio de 2 capas. Inversión de 20×20 celdas

Una vez lograda satisfactoriamente la inversión de forma de onda para el modelo inverso discreto de 4×4 celdas y de haber validado la implementación del paralelizado de nuestro código, el siguiente paso es lograr la inversión de modelos relativamente más finos, para obtener una mejor resolución del subsuelo. El siguiente experimento se llevó a cabo en el mismo modelo del caso anterior, pero se discretizó en 20 celdas horizontalmente por 20 celdas en profundidad como se muestra en la figura 48, es decir, una inversión de $3 \times 20 \times 20 = 1200$ celdas de nuestro vector del modelo $m(\lambda, \mu, \rho)$.

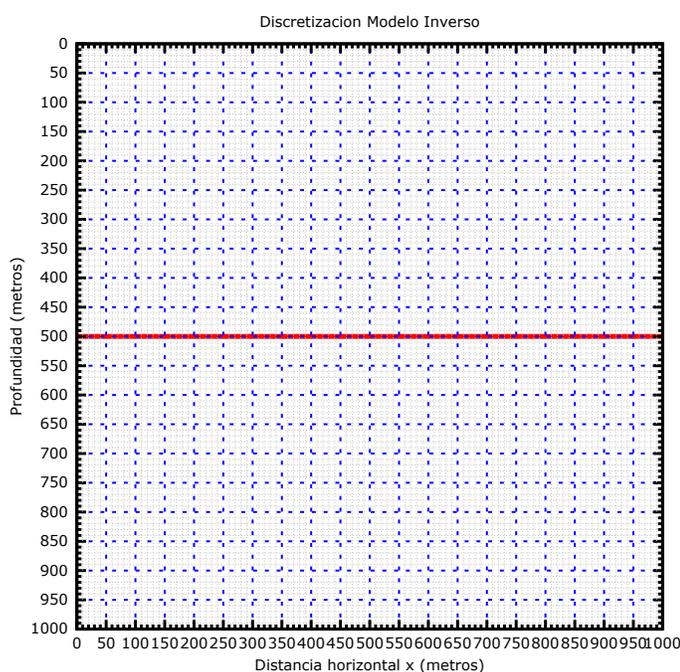


Figura 48: Discretización (línea azul) de 20×20 celdas para el mismo problema inverso del modelo de la figura 39, donde la línea roja representa la interfaz entre capas y la línea más fina representa la discretización del modelo directo.

Esta segunda inversión se realizará sobre el mismo modelo sintético de la figura 38 empleando los mismos parámetros de entrada para el modelado directo, es decir, los datos observados en los receptores serán los mismos que los de la figura 39. Un primer intento en la inversión con esta discretización presentó graves complicaciones a la hora de invertir la matriz hessiana, dado que ésta contenía columnas completamente nulas en su estructura. Este problema es debido a la falta de información en algunas celdas de nuestro modelo, en especial en aquellas celdas que se encuentran en la parte inferior del

modelo, las cuales son las más retiradas del lugar de origen de la fuente (500 m, 0) y de los lugares de medición (superficie) del campo de velocidades. Este problema ya venía manifestándose en el problema anterior como se observa en la figura 41 para la segunda iteración, donde los valores de las celdas de las esquinas inferiores presentan valores más pequeños de lo que debería ser.

Para mitigar este problema, hacemos uso de la estrategia de regularización explorada en la sección 3.5. Primeramente, utilizaremos una regularización de máxima suavidad. Recordando que el proceso iterativo empleando una regularización de primera derivada de Tikhonov está dado por

$$m = [A^T C_{dd}^{-1} A + \alpha D^T D]^{-1} A^T C_{dd}^{-1} [d - F(m_0) + A m_0],$$

el cual se describió con detalle en la sección 3.5. Una parte importante en este proceso iterativo es la correcta elección del parámetro α , el cual le dará cierto peso al ajuste de la regularización respecto al ajuste de los datos dependiendo, de su valor. En unas primeras pruebas con diferentes valores de α , observamos que la condición de regularización sólo tomaba parte en la densidad ρ del modelo m , esto es debido a que la región de la matriz correspondiente a ρ es la que presenta valores mayores a causa de las diferencias de magnitud de las derivadas de Frechet respecto a cada parámetro como se comparó en la figura 35 en la sección 4.4.

Entonces, modificamos en dos aspectos nuestro esquema iterativo con el fin de obtener el mismo rol de la regularización en los 3 parámetros del modelo. Primero consideramos un factor de normalización $\lambda_{\text{norm}} \approx 10^9$, $\mu_{\text{norm}} \approx 10^9$ y $\rho_{\text{norm}} \approx 10^3$ para los Jacobianos J_λ , J_μ y J_ρ respectivamente, esto es para compensar la gran diferencia que existe entre los valores de sus unidades.

Ya normalizados los Jacobianos, la segunda medida tomada consiste en asignar su propio peso α de regularización a cada parámetro de la forma

$$\alpha = \alpha \begin{pmatrix} \alpha_\lambda & & \\ & \alpha_\mu & \\ & & \alpha_\rho \end{pmatrix}, \quad (151)$$

donde ahora α será una matriz dependiendo de un valor α en común que variaremos para darle más o menos peso a la regularización. Las cantidades α_λ , α_μ y α_ρ serán elegidas para tener valores comparables con su respectiva región en la matriz hessiana.

Descritas todas las consideraciones relevantes a nuestro proceso iterativo, ahora procedemos a realizar la inversión de los datos de entrada (figura 39) producidos por el modelo de la figura 38 tomando un máximo de 50 sin agregar ruidos a los datos de entrada y sin imponer un criterio de paro, con un factor de regularización $\alpha = 1.0 \times 10^{-3}$. La discretización y la forma en que se calculan las derivadas de sensibilidad involucraron $(1 + 3 \times 20 \times 20) \times 50 = 60050$ ejecuciones de modelado directo paralelizado, por lo que nuestro algoritmo tomó 10 días en alcanzar el número de iteraciones impuesto.

Al igual que los resultados presentados en la sección 6.1, se observa que inmediatamente en la primer iteración la interfaz entre las dos capas se detecta correctamente para $\lambda(x, z)$, figura 49, $\mu(x, z)$, figura 50, y $\rho(x, z)$, figura 51, dado que este es el factor que influye más en los residuales de los datos. Después conforme va evolucionando nuestro proceso iterativo se van ajustando propiamente los valores de las celdas del modelo sujeto a la minimización de la función objetivo.

El análisis del valor medio cuadrático $\text{rms}(m - m^0)$ y $\text{rms}(m - m_{\text{real}})$ se muestra en la figura 52 para λ , μ y ρ . Se observa que la diferencia entre modelos decrece con las iteraciones como se observa en la curva azul, obteniendo en la última iteración valores medios $\text{rms}_{\lambda-\lambda_0}$, $\text{rms}_{\mu-\mu_0}$ y $\text{rms}_{\rho-\rho_0}$ pequeños garantizando la estabilidad del proceso de búsqueda. Sin embargo, se observa que la curva roja correspondiente al ajuste del modelo respecto al modelo real, muestra que inicialmente se tendía a decrecer, cambiando a la mitad del proceso comenzando lentamente a desviarse del valor real, evidenciando la tendencia inducida por la regularización de Thikonov impuesta.

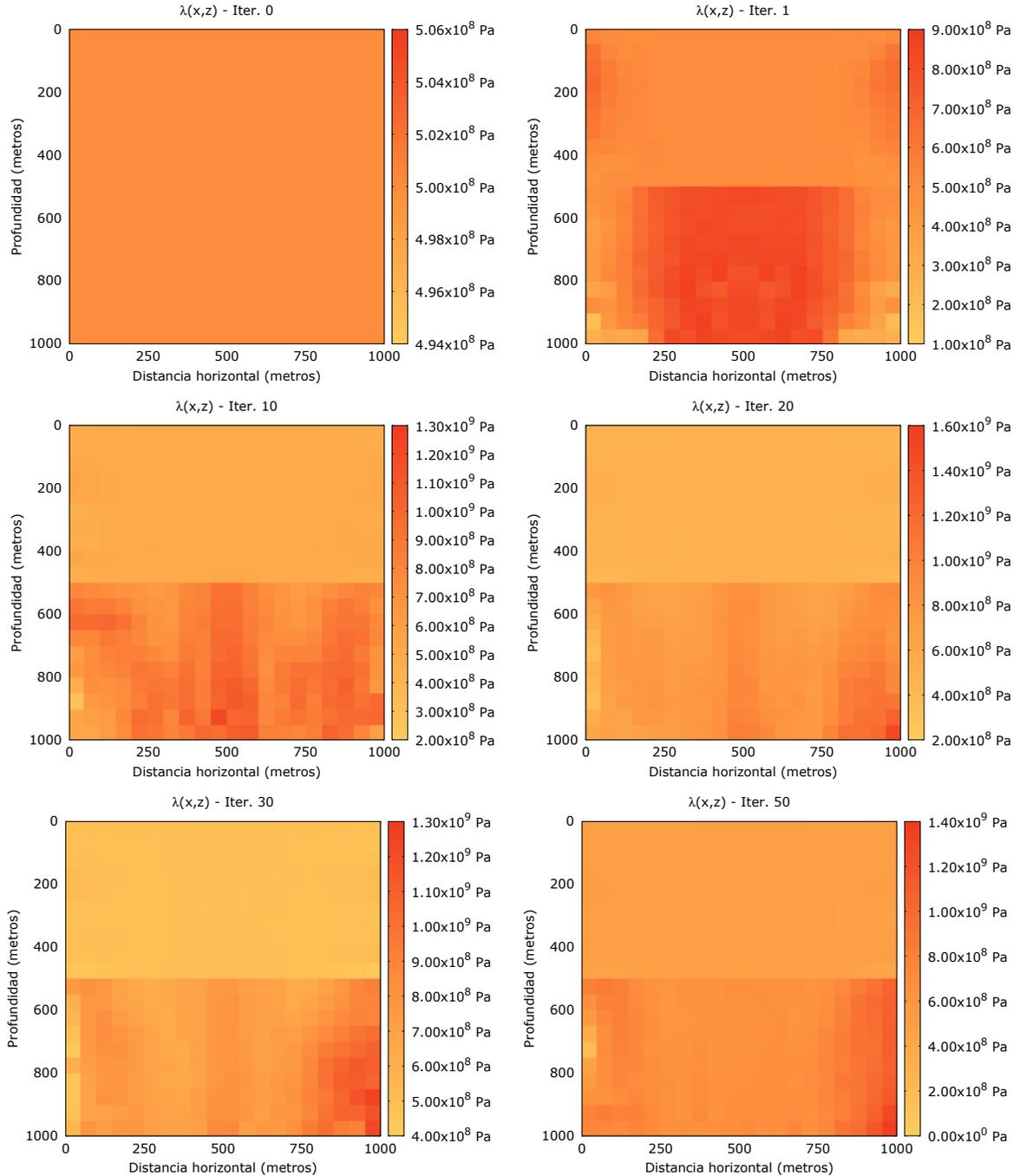


Figura 49: Evolución del proceso iterativo de inversión con modelos de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para el parámetro de Lamé $\lambda(x, z)$ del modelo m . Se usa como entrada las trazas sísmicas de la figura 39 generadas por la propagación de onda del modelo sintético de la figura 38. Se ejecutaron solo 50 iteraciones y no se alcanzó el criterio de convergencia.

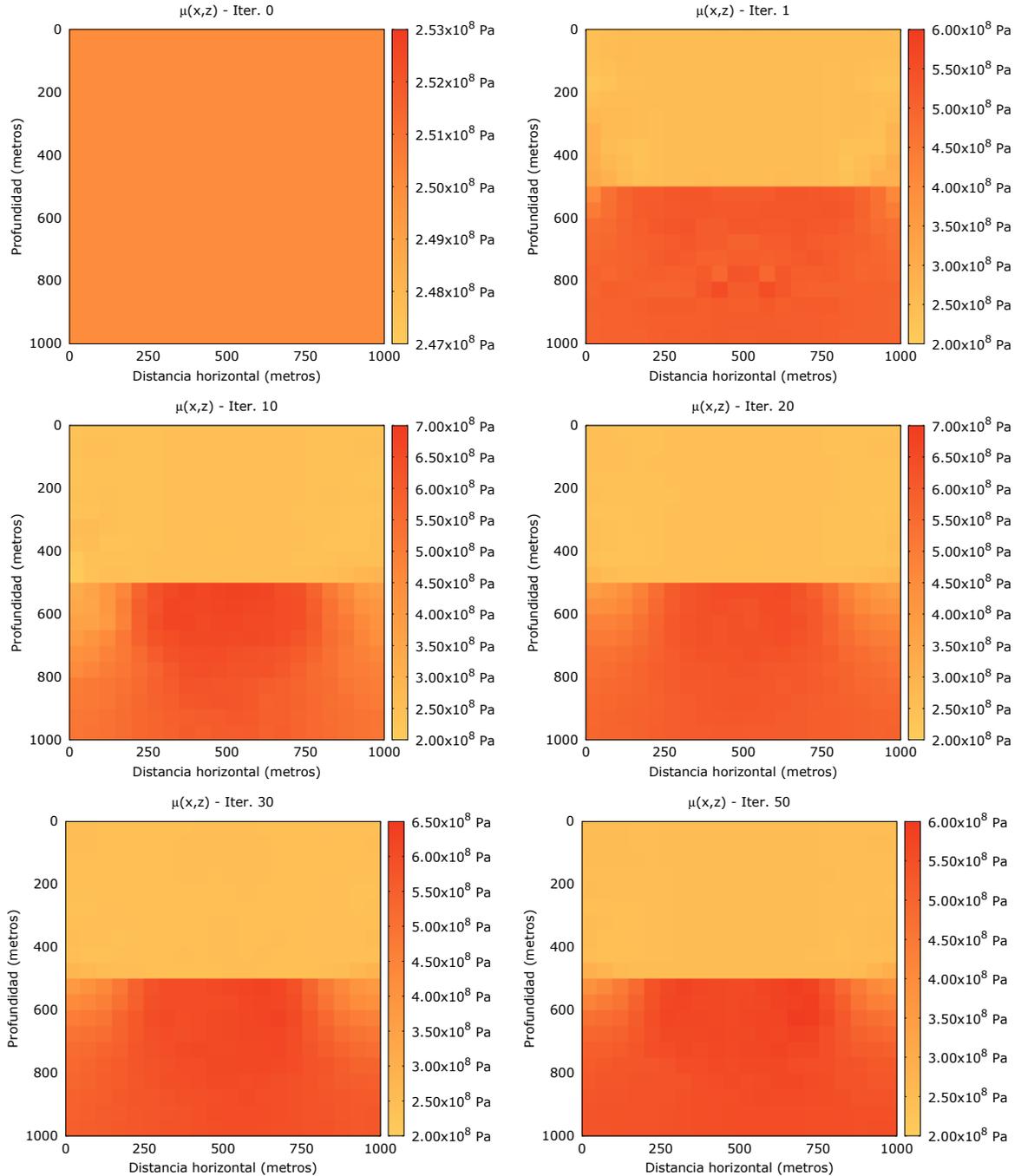


Figura 50: Evolución del proceso iterativo de inversión con modelos de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para el parámetro de Lamé $\mu(x, z)$ del modelo m . Se usa como entrada las trazas sísmicas de la figura 39 generadas por la propagación de onda del modelo sintético de la figura 38. Se ejecutaron solo 50 iteraciones y no se alcanzó el criterio de convergencia.

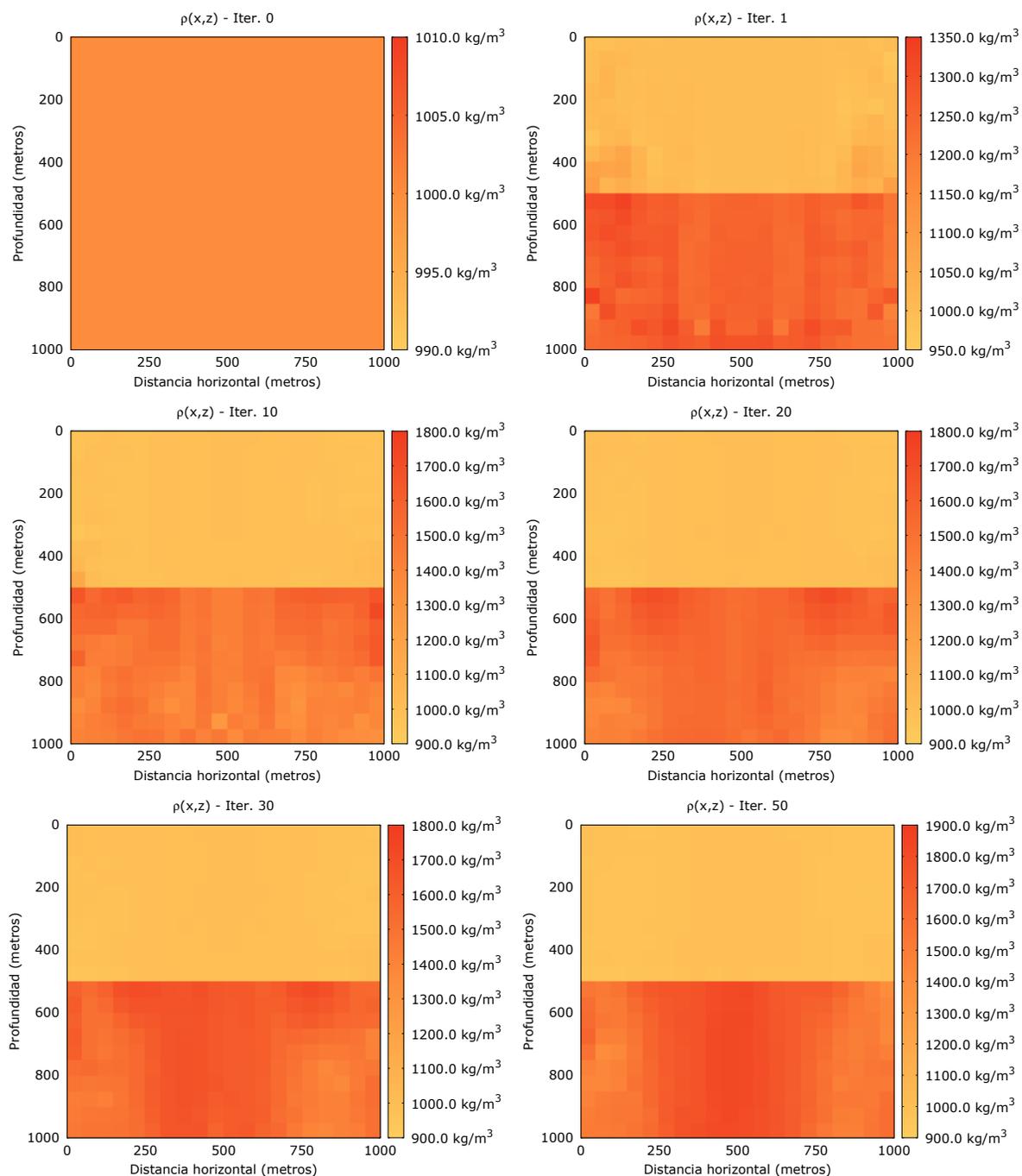


Figura 51: Evolución del proceso iterativo de inversión con modelos de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para la densidad $\rho(x, z)$ del modelo m . Se usa como entrada las trazas sísmicas de la figura 39 generadas por la propagación de onda del modelo sintético de la figura 38. Se ejecutaron solo 50 iteraciones y no se alcanzó el criterio de convergencia.

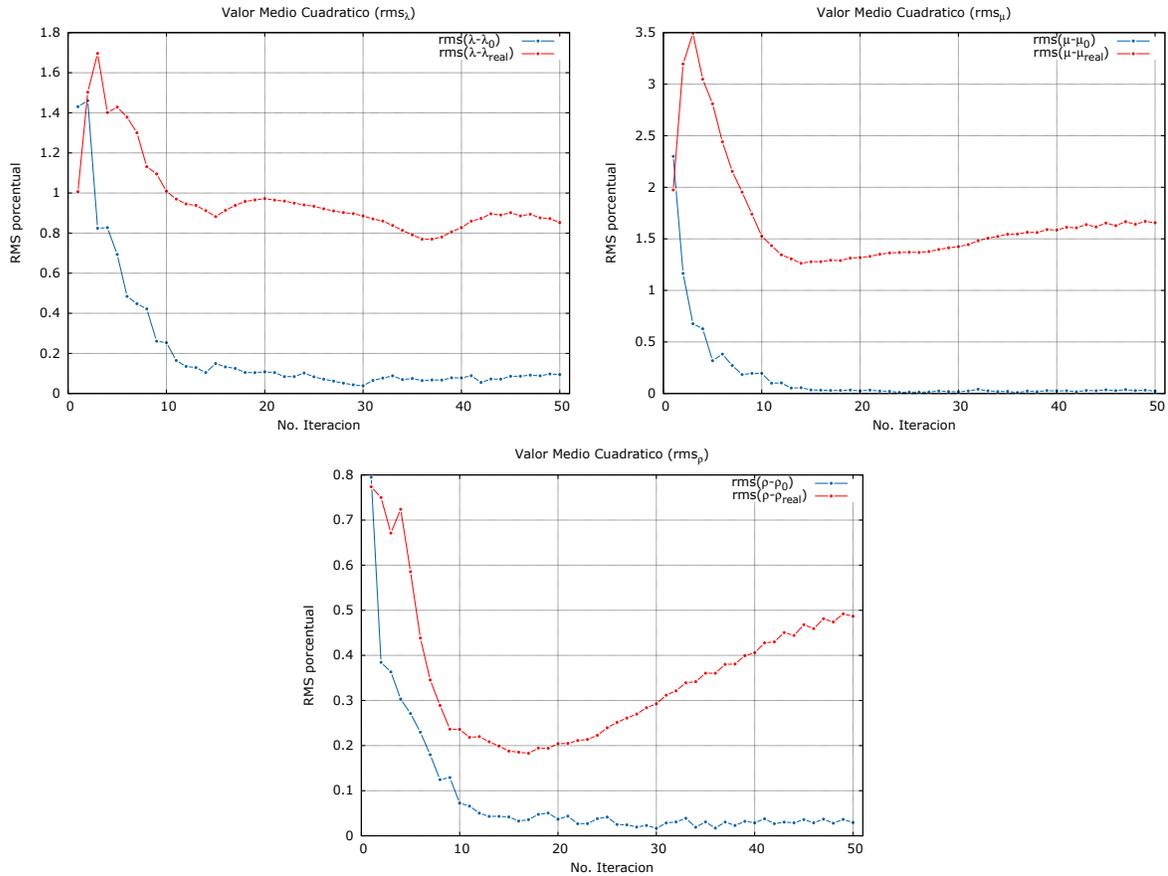


Figura 52: Valor medio cuadrático porcentual contra iteración para el proceso de inversión de los modelos obtenidos en las figuras 49 (arriba izquierda), 50 (arriba derecha) y 51 (abajo). Se muestra el valor medio respecto al modelo anterior, $rms(m - m_0)$, para observar la estabilidad de los modelos obtenidos en el proceso iterativo y el valor medio respecto al modelo real, $rms(m - m_{real})$, para observar la desviación respecto al modelo verdadero.

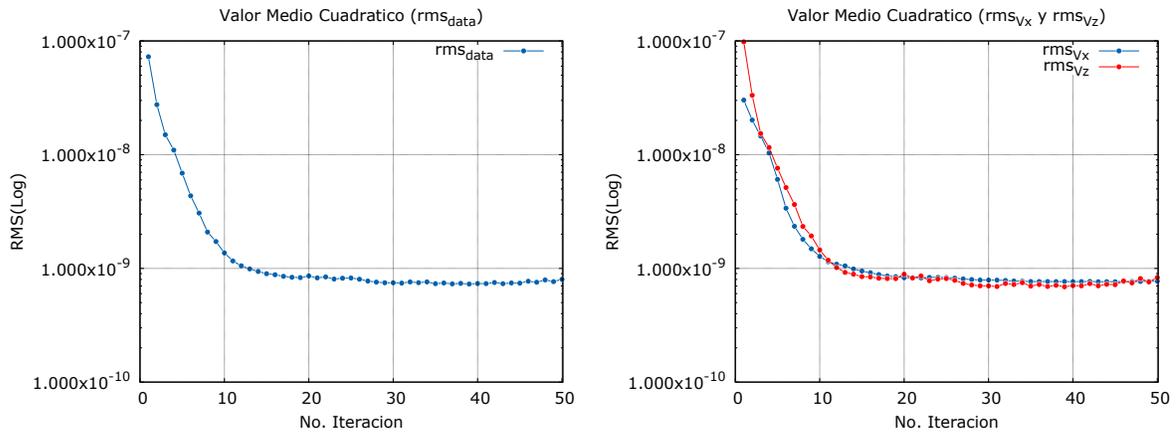


Figura 53: Valor medio cuadrático en escala logarítmica contra número de iteración para el ajuste de los datos sintéticos observados de la figura 39 en nuestro algoritmo de inversión en 50 iteraciones para el caso discreto de la figura 48. El rms de la izquierda, corresponden al ajuste de los datos en general $d^{obs} - d^{cal}$ y el rms de la derecha corresponde al rms separado para el ajuste de las velocidades $v_x^{obs} - v_x^{cal}$ (color azul) y $v_z^{obs} - v_z^{cal}$ (color rojo).

En cuanto al ajuste de los datos, el monitoreo del valor medio de los residuales se reporta en la gráfica 53 para los datos combinados y para los datos separados. Se muestra que inicialmente el ajuste mejora relativamente rápido, después de aproximadamente 20 iteraciones de inversión el ajuste comienza a suceder mas lentamente hasta alcanzar el máximo número de iteraciones, para el ajuste de v_x , v_z y ambos.

En general, en nuestros resultados el ajuste de los datos ha sido siempre aceptable y el proceso iterativo ha sido convergente. El siguiente paso es probar otro tipo de regularización, pero antes realizaremos un pequeño ejercicio para explorar cuales serían las expectativas de los modelos que cumplen la condición de de Mínimo Soporte de Gradiente (MGS),

$$\frac{|\nabla m|^2}{|\nabla m|^2 + \beta^2} \approx \frac{|\nabla m|^2}{|\nabla m_0|^2 + \beta^2}. \quad (152)$$

Como se explicó anteriormente, nuestra aproximación del funcional de MGS realiza la operación del dividendo empleando el modelo anterior para la aplicación del gradiente, como se observó en la sección 3.5, de otra manera nos llevaria a un problema de regularización no-lineal que se agregaría a la no linealidad de la relación con los datos sísmicos, i.e. a complicaciones en su implementación. Dicho ejercicio consiste en aplicar ambos términos de la igualdad de la ecuación (152) a los modelos previamente obtenidos (figu-

ras 49, 50, 51), como se muestra en los mapas de la figura 54 en la última iteración, para λ , μ y ρ . Se observa que estructuralmente después de las 50 iteraciones, la función de mínimo soporte de gradiente es muy similar realizando la operación con el modelo actual y el modelo previo.

Adicionalmente a la comparación estructural y cualitativa de la función MGS, graficamos el valor neto de la función, $\Sigma\text{MGS}(m)$, respecto a cada iteración, para comparar las curvas empleando el modelo actual o el modelo previo de manera cuantitativa como se observa en los gráficos de la figura 55. Si el algoritmo tuviera correctamente implementada esta regularización, se esperaría que el valor de las curvas ΣMGS tienda a 20, dado que solo 20 celdas presentarían un cambio de gradiente en sus propiedades idealmente, sin embargo en los resultados anteriores, se observa que aunque se recupera la interfaz, los valores aún varían debajo de este límite obteniendo pequeños gradientes como se observa en las figuras 54, los que incrementan el valor de la función MGS arriba de 20 en la figura 55.

Sin embargo, la principal intención de este ejercicio es la de corroborar la aproximación de la ecuación (152), la cual es base para deducción de nuestro esquema iterativo de inversión usando MGS como criterio de regularización

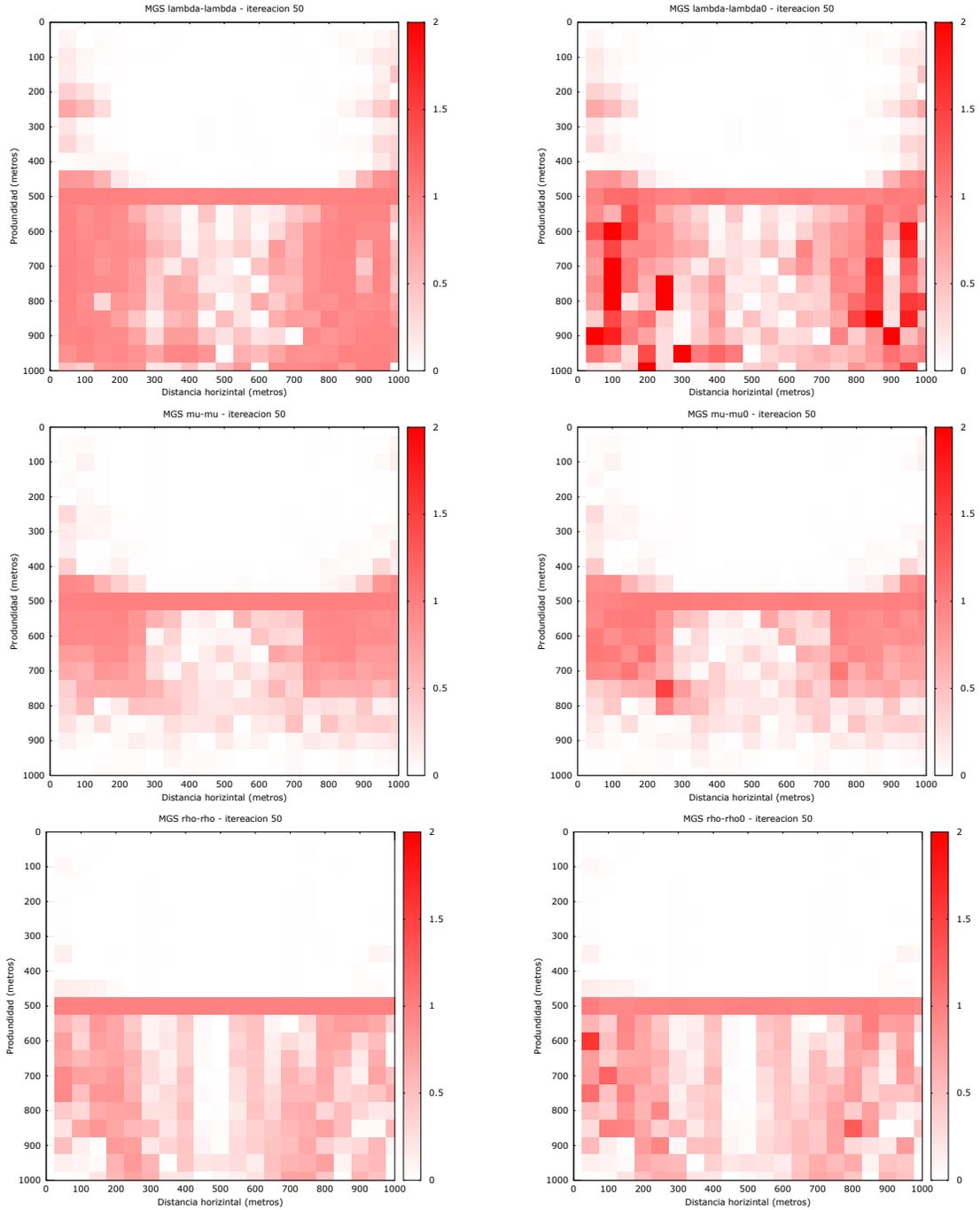


Figura 54: Función de mínimo soporte de gradiente (MGS) para los tres parámetros del modelo. En la parte izquierda se evalúa la función empleando el mismo modelo (parte izquierda de la igual de la ecuación (152)) y en la parte derecha se aproxima la función empleando el modelo previo (parte derecha de la ecuación (152)).

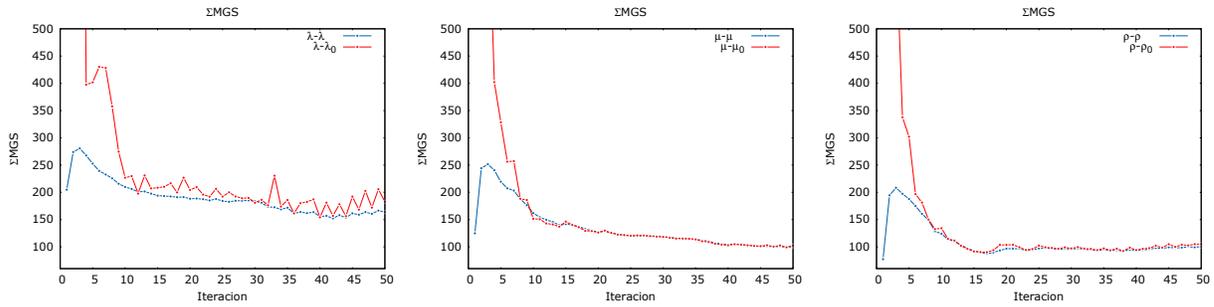


Figura 55: Aportación neta de la función de mínimo soporte de gradiente (Σ MGS) para los tres parámetros del modelo, donde la curva azul es la operación usando el modelo actual como gradiente en el dividendo y la curva roja empleando en modelo anterior para lambda (izquierda), mu (centro) y la densidad (derecha).

6.3. Medio de 2 capas. Inversión de 20×20 celdas usando MGS como regularización

Por último, presentamos la inversión del mismo modelo de la figura 38 empleando MGS como función de estabilización de nuestro problema. Recordando, el proceso iterativo de inversión con regularización de mínima estructura nos lleva a calcular el modelo óptimo m a través de la ecuación:

$$m = [A^T C_{dd}^{-1} A + \alpha D^T C_{MGS} D]^{-1} A^T C_{dd}^{-1} [d - F(m_0) + A m_0],$$

la cual se describió en la sección 3.5. Siendo

$$C_{MGS} = \frac{1}{\nabla m_0 \cdot \nabla m_0 + \beta^2},$$

la matriz de peso de mínimo soporte de gradiente. La discretización de los modelos a invertir será de 20×20 celdas para los 3 parámetros elásticos con los mismos datos de entrada de la figura 39.

Tras varios experimentos utilizando varios parámetros para regularización (α y β) decidimos mostrar solo aquellos que ajustaban mejor los datos y se obtenían mejores estructuras en los modelos obtenidos. Para esto, empleamos un $\alpha = 1.0 \times 10^{-6}$ y un solo $\beta = 1.0 \times 10^{-5}$ para las tres cantidades elásticas buscadas. Entonces el factor

de regularización para cada parámetro será $\alpha_\lambda = \alpha \max\{J_\lambda^T J_\lambda\}$, $\alpha_\mu = \alpha \max\{J_\mu^T J_\mu\}$ y $\alpha_\rho = \alpha \max\{J_\rho^T J_\rho\}$. De esta manera garantizamos que las componentes de la matriz a invertir sean comparables, como se muestra en los resultados mostrados en las figuras 56, 57 y 58 para λ , μ y ρ respectivamente.

El modelo inicial consiste en un medio homogéneo con valores en las propiedades $\lambda = 5.0 \times 10^8$ Pa, $\mu = 2.5 \times 10^8$ Pa y $\rho = 1000$ kg/m³. Se efectúan 50 iteraciones del esquema de inversión de forma de onda elástica, los resultados muestran detalles estructurales esperados en los modelos obtenidos producto de la regularización empleada. Al igual que los resultados anteriores, la ubicación de la interfaz se localiza correctamente en la primer iteración para los tres parámetros del modelo. En las siguientes iteraciones el programa comienza a buscar los valores correspondientes de las celdas con ayuda del ajuste de los datos y de la regularización de mínima estructura. Conforme avanzan las iteraciones, se observa que los efectos de suavidad en las esquinas comienzan a desaparecer tendiendo a mostrar una estructura enfocada en la iteración 50.

En cuanto al ajuste de los datos, se observa que el valor medio cuadrático de los datos disminuye convergentemente tanto para los datos en general como para las velocidades individuales v_x y v_z observadas. Se observa que a partir de la iteración número 20 el ajuste de los datos comienza a suceder más lentamente para las siguientes iteraciones pero su comportamiento convergente prevalece al no presentar variaciones mayores o aleatorias. Si bien no se aplicó un criterio de paro bien definido, se observó el comportamiento del rms de los datos para todas las iteraciones, el cual fue del orden de 10^{-9} , valor que puede ser comparable con una milésima parte del valor de la máxima amplitud de la traza sísmica, 10^{-6} m/s. Es importante señalar que para todos nuestros resultados no se aplicó ruido en las trazas, presentándose solo ruido numérico por el truncamiento de los valores calculados y por su manejo computacional, dado que se realiza por separado el programa para medir las respuestas en los sismómetros y el programa de inversión.

En cuanto al valor medio cuadrático porcentual de la diferencia entre modelos (figura 60) también se observa que el proceso converge a un modelo óptimo, alcanzando valores muy pequeños de rms. En cuanto al ajuste respecto al modelo real, en promedio se tienen cambios en rms menores al 1 % para los tres modelos, cantidad menor que la inversión

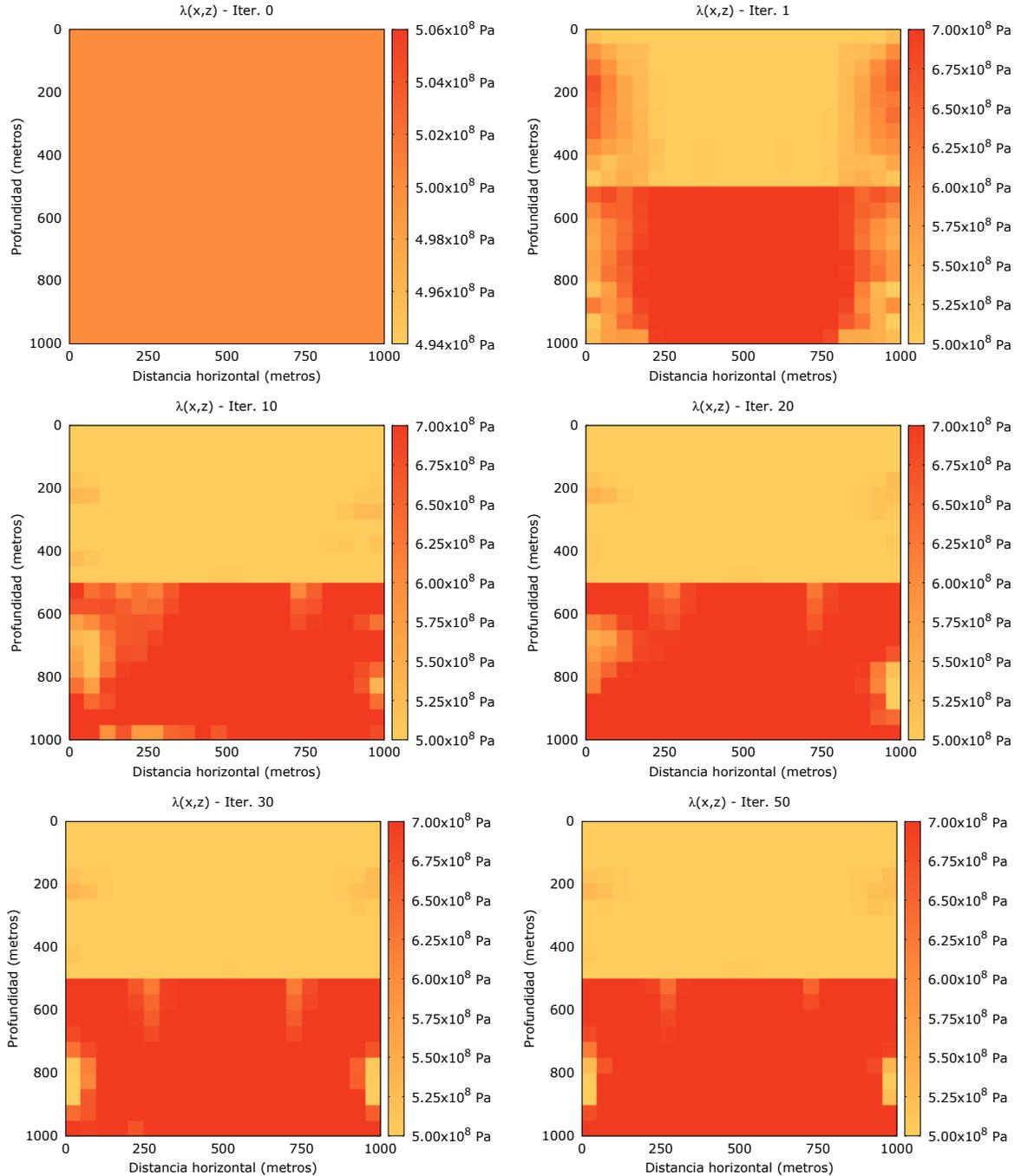


Figura 56: Evolución del proceso iterativo de inversión de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para el parámetro de Lamé $\lambda(x, z)$ del modelo m usando MGS como regularización. Se usa como entrada las trazas sísmicas de la figura 39 generadas por la propagación de onda del modelo sintético de la figura 38. Se ejecutaron 50 iteraciones del programa.

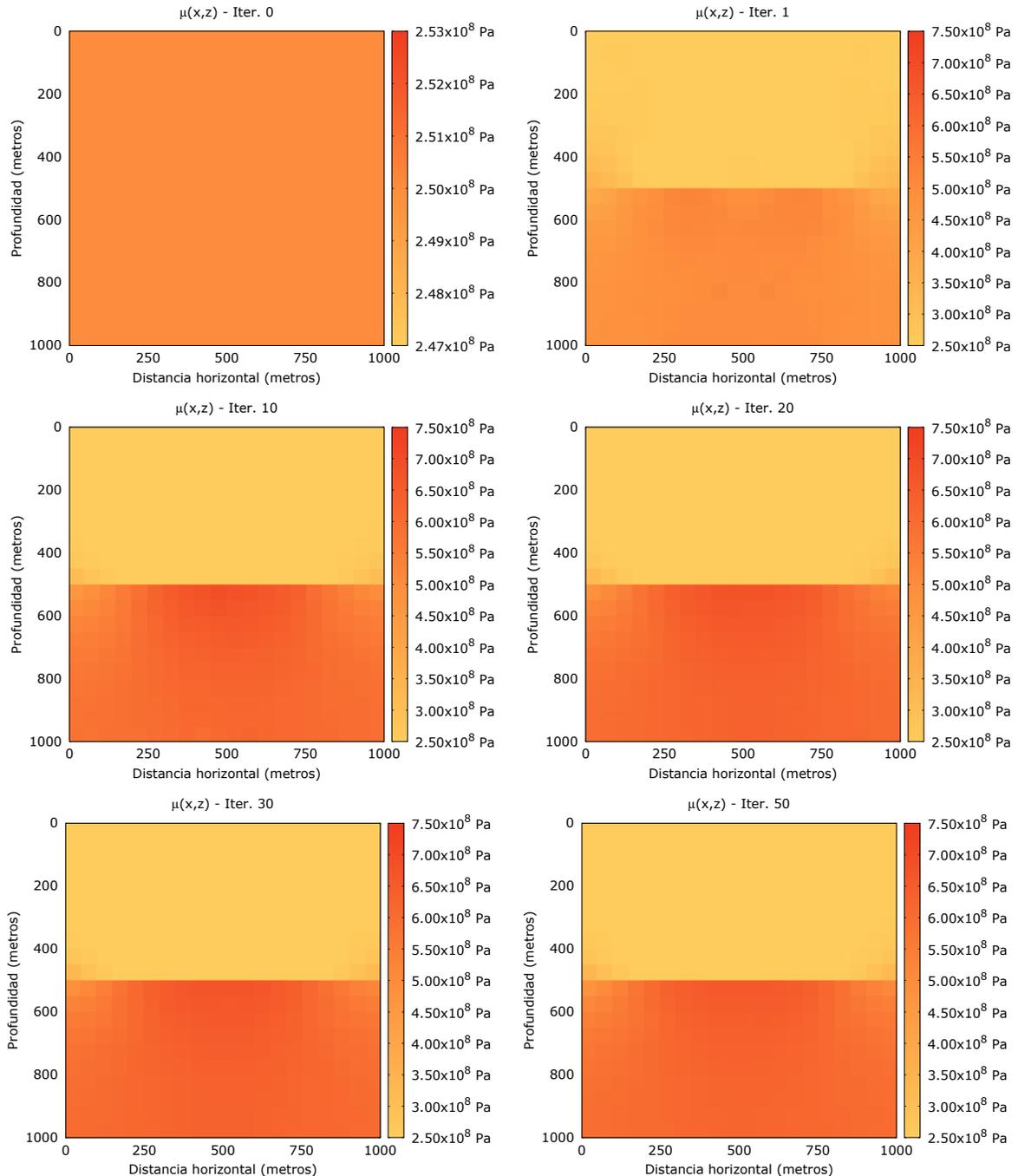


Figura 57: Evolución del proceso iterativo de inversión de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para el parámetro de Lamé $\mu(x, z)$ del modelo m usando MGS como regularización. Se usa como entrada las trazas sísmicas de la figura 39 generadas por la propagación de onda del modelo sintético de la figura 38. Se ejecutaron 50 iteraciones del programa.

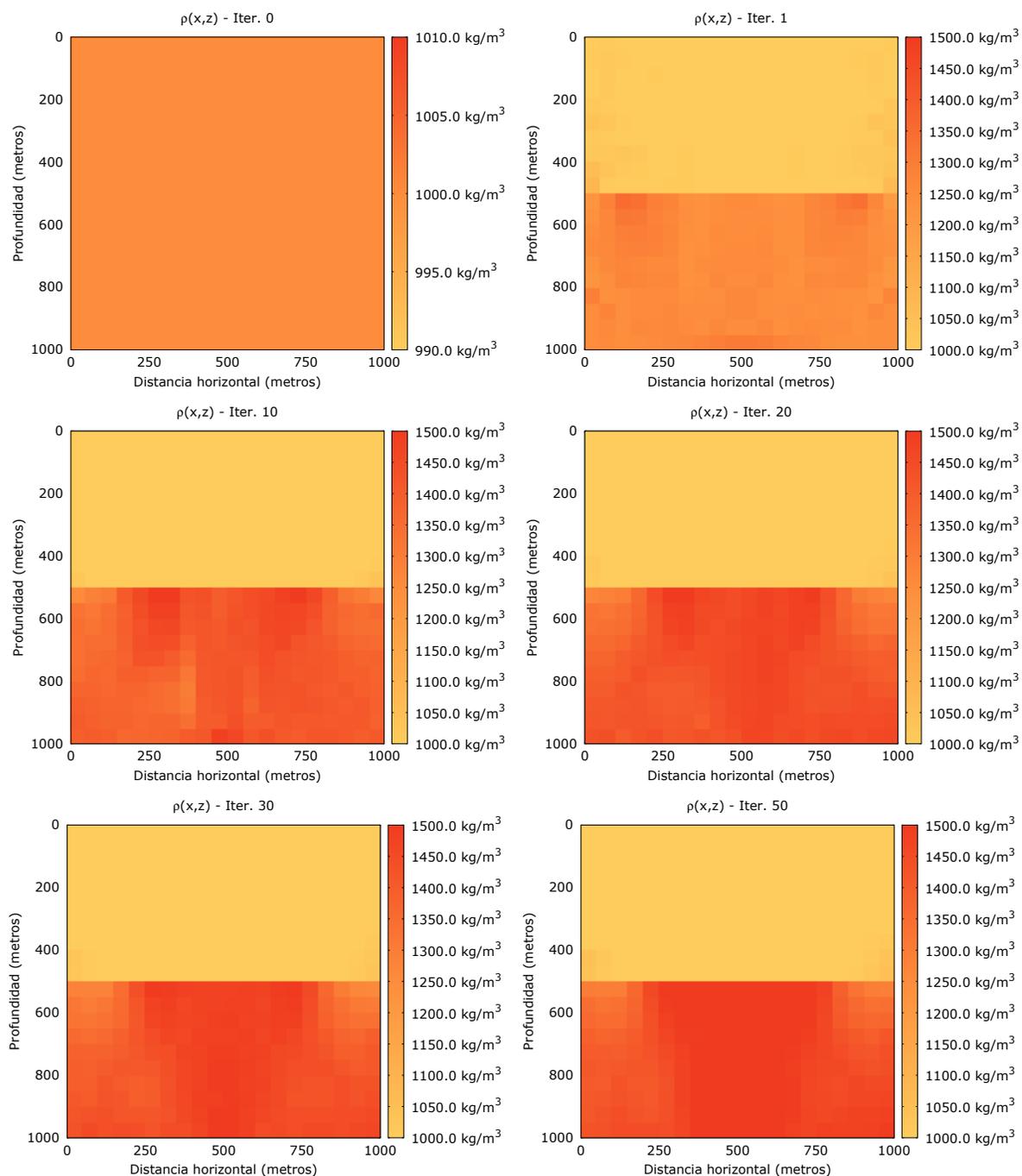


Figura 58: Evolución del proceso iterativo de inversión de 20×20 celdas para las iteraciones 0, 1, 10, 20, 30 y 50 para la densidad $\rho(x, z)$ del modelo m usando MGS como regularización. Se usa como entrada las trazas sísmicas de la figura 39 generadas por la propagación de onda del modelo sintético de la figura 38. Se ejecutaron 50 iteraciones del programa.

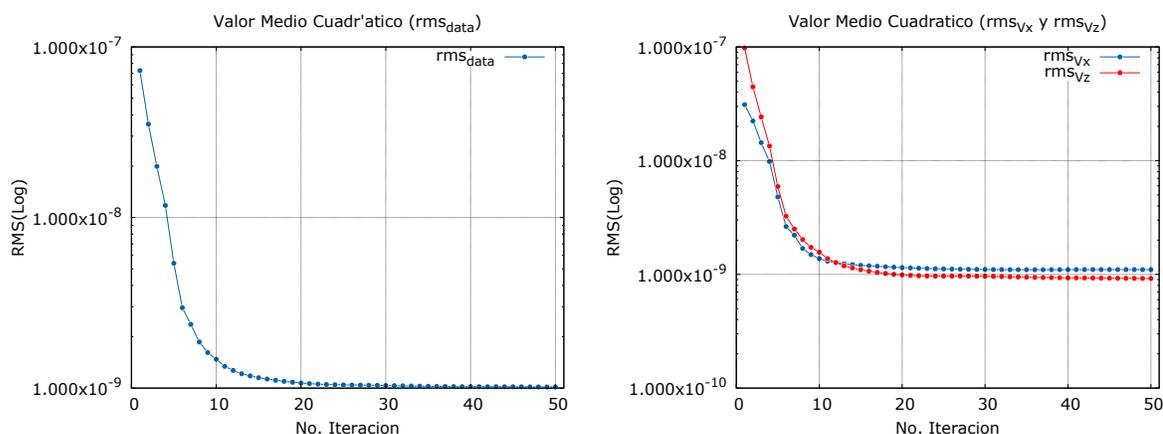


Figura 59: Valor medio cuadrático contra número de iteración para el ajuste de los datos sintéticos observados de la figura 39 en nuestro algoritmo de inversión con MGS como regularización para 50 iteraciones. El rms de la izquierda corresponde al ajuste de los datos en general $d^{obs} - d^{cal}$ y el rms de la derecha corresponde al rms separado para el ajuste de las velocidades $v_x^{obs} - v_x^{cal}$ (color azul) y $v_z^{obs} - v_z^{cal}$ (color rojo).

usando regularización de Tikhonov de primer orden (figura 52). En resumen, la elección de un parámetro α pequeño ajusta satisfactoriamente los datos arrojando estructuras más enfocadas en los modelos obtenidos.

Para explorar el efecto de nuestra selección de los factores de peso en el proceso de inversión, realizamos seis procesos de inversión de 10 iteraciones empleando MGS para el mismo modelo sintético variando los valores del factor de regularización α con los valores 1.0×10^3 , 1.0×10^2 , 1, 1.0×10^{-1} , 1.0×10^{-4} y 1.0×10^{-5} como se muestra en la figura 61, solamente para $\rho(x, z)$ para ilustrar la función de este factor en nuestro esquema.

Se observa que para valores grandes de α (1.0×10^3 y 1.0×10^2) la interfaz entre capas se localiza correctamente, sin embargo los valores de las propiedades se mantienen prácticamente constantes alrededor de los valores del modelo inicial $\rho \approx 1000.0 \text{ k/m}^3$, esto significa que valores grandes de α obedecen más el criterio de mínima estructura que el ajuste de los datos. En el caso de los valores de α de 1 y 1.0×10^{-1} los cuales producen valores numéricos comparables para las dos componentes de la función objetivo, se observa que se comienzan a mostrar variaciones significativas en los valores de la densidad. Para el caso especial donde tanto la aportación del ajuste de los datos como la aportación del funcional de estabilización de MGS es la misma, $\alpha = 1.0$, se observa que la función objetivo no decide si minimizará los datos o MGS, resultando en un modelo que

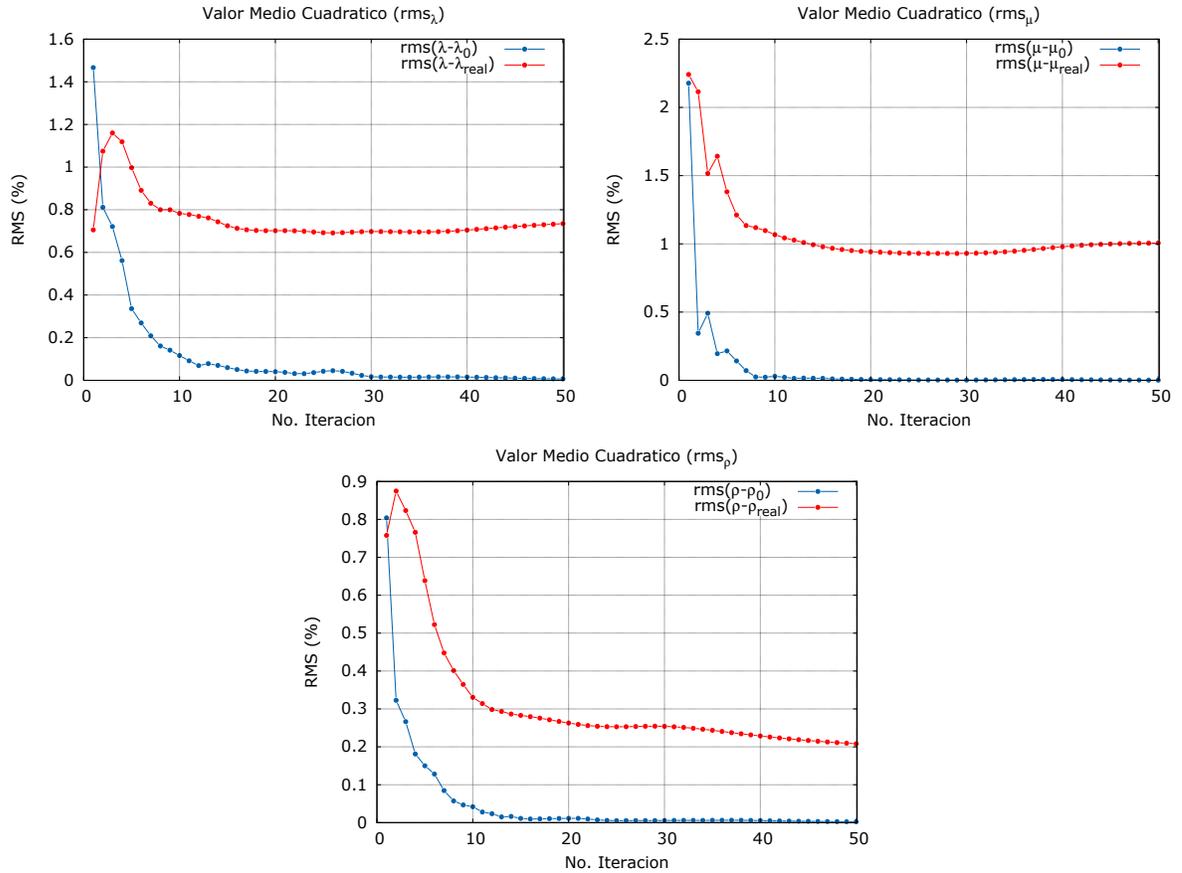


Figura 60: Valor medio cuadrático porcentual contra iteración para el proceso de inversión de los modelos obtenidos en las figuras 49 (arriba izquierda), 50 (arriba derecha) y 51 (abajo). Se muestra el valor medio respecto al modelo anterior, $rms(m - m_0)$, para observar la estabilidad del proceso iterativo y el valor medio respecto al modelo real, $rms(m - m_{real})$, para observar la desviación respecto al modelo verdadero.

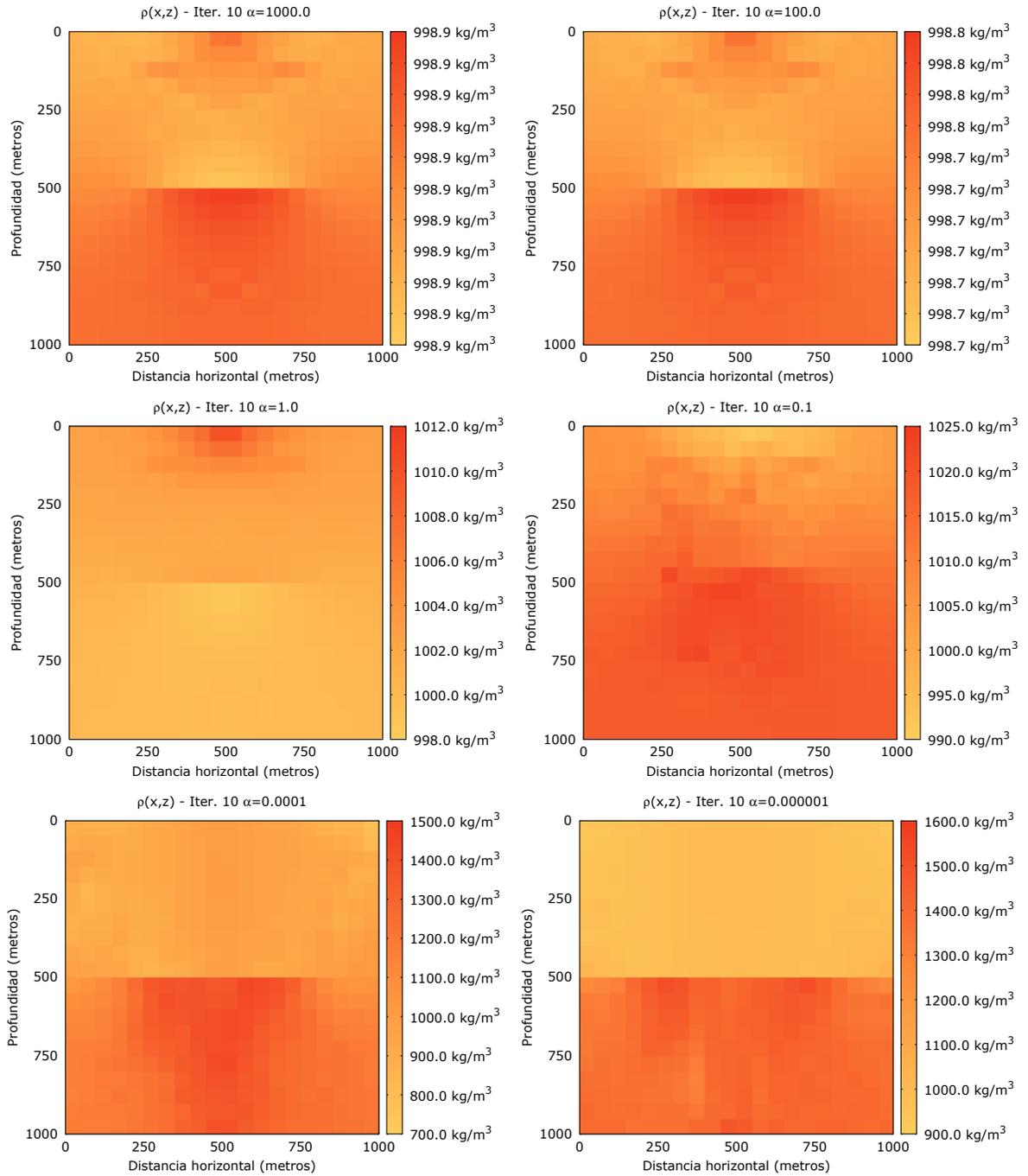


Figura 61: Comparación de inversiones con mínimo soporte de gradiente para diferentes valores de α de nuestro esquema iterativo.

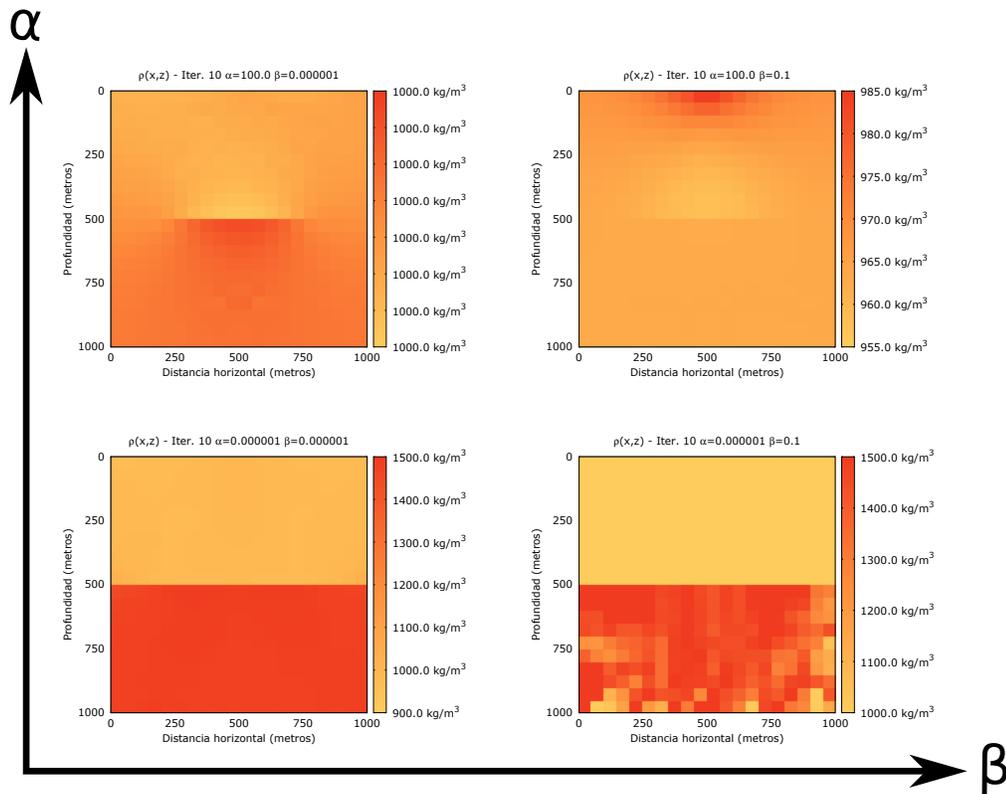


Figura 62: Comparación de inversiones con mínimo soporte de gradiente para diferentes valores de α y β para nuestro esquema iterativo.

aunque sí localiza la interfaz no se obtienen valores de densidad cercanos los del modelo de prueba.

Conforme el valor de alfa decrece ($\alpha = 1.0 \times 10^{-4}$ y $\alpha = 1.0 \times 10^{-5}$), y por ende se da un mayor peso al ajuste de los datos respecto a la mínima estructura, se observa que los modelos obtenidos para la densidad se acercan de manera aceptable al modelo de prueba de la figura 38. De esta manera, fue que se eligió un $\alpha = 1.0 \times 10^{-6}$ para los resultados de las figuras 56, 57 y 58.

Para terminar este el análisis de los parámetros de regularización de mínimo soporte de gradiente, solo resta por observar el comportamiento de β para un par de valores, para $\beta = 1.0 \times 10^{-1}$ y para $\beta = 1.0 \times 10^{-6}$, en las posibles combinaciones con α grande (100) y α pequeño (0.000001). De nuevo, mostramos solo los modelos de densidad obtenidos. Los resultados del análisis de β se muestra en la figura 62 mediante un sistema de coordenadas $\alpha - \beta$.

Los resultados para β pequeños parecen ser los más aceptables al mostrar un mejor

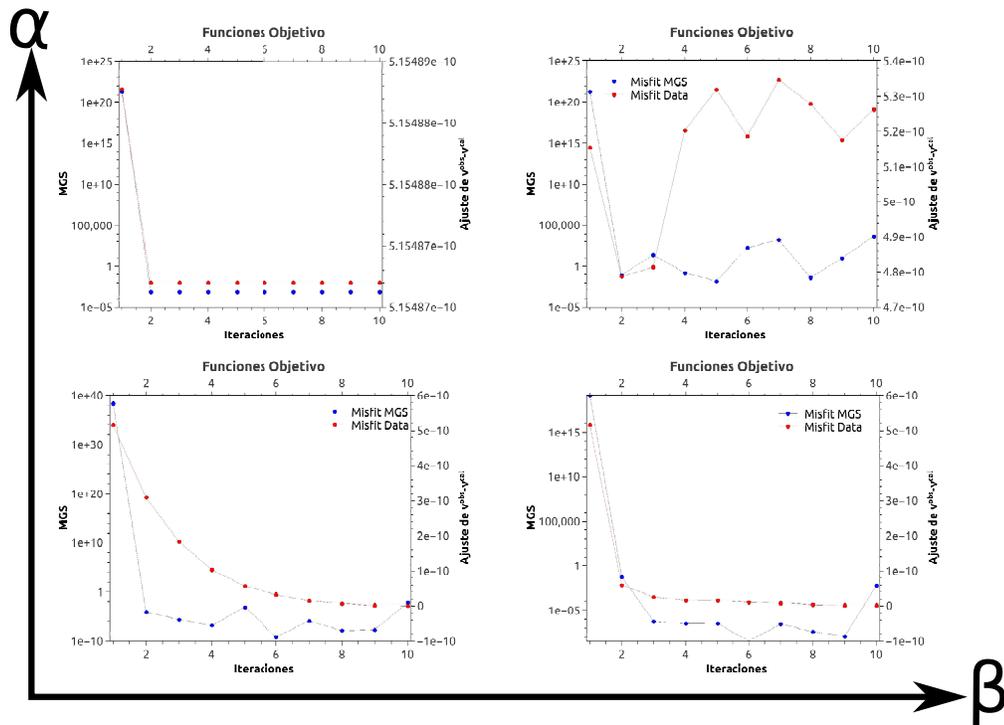


Figura 63: Comparación de las funciones objetivos participantes en el esquema de inversión de forma de onda, para el ajuste de los datos (línea roja) y el funcional de mínimo soporte de gradiente (línea azul).

parecido con el modelo real (Figura 38). Para detallar más la comparación de la figura 62, mostramos en el mismo plano cartesiano el ajuste de los datos y el ajuste de mínima estructura para los mismos modelos obtenidos de ρ como se muestran en la figura 63.

Se comprueba que la región para α y β pequeños favorece tanto el ajuste de los datos como una mínima estructura en los modelos obtenidos. Este último análisis deja abierta la posibilidad de seguir explorando una estrategia estable de búsqueda donde los valores de los parámetros de regularización α y β varíen de acuerdo a como el proceso evoluciona. Por ejemplo, una primera recomendación sería comenzar con valores grandes de α y reducirlo paulatinamente hasta llegar a aquellos valores que producen modelos que ajustan mejor a los datos y producen estructuras más enfocadas (con α y β pequeños).

Capítulo 7. Discusiones

7.1. Modelado directo de forma de onda elástica

En el capítulo 2 se mostraron las ecuaciones de elastodinámica en la representación de velocidades y esfuerzos usando los parámetros de Lamé λ y μ y la densidad ρ , ya que son lineales respecto a estos parámetros y es su representación natural y más utilizada en la literatura. Esta ecuación resultó muy conveniente ya que además proporcionó una relación directa con la velocidad de partícula, propiedad comúnmente medida y representada en sismogramas de campo.

Para el modelado numérico de la ecuación de elastodinámica se partió de los trabajos de De Basabe y Sen (2015), los cuales están basados en un esquema de diferencias finitas con mallado intercalado, metodología acorde con la ecuación de modelado directo seleccionada. Se hizo una implementación del código y se agregaron mediciones en los receptores para cualquier punto del dominio, condiciones de frontera absorbentes en los bordes laterales e inferior, heterogeneidades en los modelos sintéticos y paralelización usando OpenMP. La principal ventaja de esta técnica de modelado radica en la fácil implementación computacional y en la accesible modificación del código para diferentes problemas (modificación del medio, fuentes, receptores). Entre las principales limitaciones de nuestro trabajo resaltamos la condición de estabilidad, la cual resultó ser un punto crítico tanto en modelado directo como en modelado inverso. Esta condición depende de la discretización del modelo y el muestreo en tiempo (que son controlables) y de la velocidad máxima de la onda P (controlable para modelado directo y variable para modelado inverso) que a su vez depende de las 3 cantidades λ , μ y ρ de nuestro modelo sintético. Esta implementación del modelado directo es parte fundamental para el cálculo de derivadas de Frechet necesarias para el esquema de inversión de forma de onda completa. También la manera en que implementamos las condiciones de frontera presenta desventajas, dado que se incrementan el número de nodos del mallado, lo cual aumenta el tiempo de modelado directo y aún más de modelado inverso.

La simulación de tres ejemplos de modelado directo nos permitió observar fenómenos de propagación de onda elástica como: reflexiones, difracciones, cambios de pola-

ridad, ondas de cuerpo V_P y V_S , y cuestiones numéricas exploradas como: condiciones de frontera absorbentes, interpolación lineal para las mediciones, dispersión y tiempos de cómputo con y sin paralelización.

7.2. Formulación del problema inverso

En el capítulo 3 se describió la metodología usada para invertir simultáneamente los 3 parámetros λ , μ y ρ para las mediciones de las múltiples componentes de la velocidad v_x y v_z colectadas en varios receptores. Se desarrolló la inversión de forma de onda completa como la búsqueda iterativa del tipo Gauss-Newton de un modelo que minimice la función objetivo con los residuales de las mediciones observadas.

Resolvimos la estabilidad del esquema de inversión y la compensación por falta de información constreñida en la serie de tiempo desarrollando e implementamos dos métodos de regularización: Regularización de Tikhonov de primer orden que nos proporcionará una imagen suavizada del modelo y regularización usando mínimo soporte de gradiente (MGS por sus siglas en inglés) la cual nos proporcionará imágenes enfocadas de los modelos obtenidos (Portniaguine y Zhdanov, 1999). La minimización de la función objetivo completa incluyendo MGS nos llevó a un esquema iterativo final de inversión de forma de onda donde se puede regresar con relativa facilidad al esquema de inversión con regularización suave de Tikhonov y sin regularización. Al igual que la inversión, la regularización se aplica simultáneamente a los parámetros λ , μ y ρ , teniendo 6 variables diferentes correspondientes a la regularización $(\alpha_\lambda, \alpha_\mu, \alpha_\rho, \beta_\lambda, \beta_\mu, \beta_\rho)$ en el esquema de inversión completo.

Cabe mencionar que hasta donde se tiene conocimiento este es el primer trabajo de inversión de forma de onda completa empleando imágenes enfocadas con mínimo soporte de gradiente como método de regularización.

7.3. Cálculo numérico de derivadas de Frechet

Se desarrollaron un conjunto de ecuaciones para cada parámetro elástico para calcular las derivadas de Frechet en cada región del modelo para una discretización dada, empleando un método conocido como aproximación a la ecuación de sensibilidad, basa-

do en los trabajos de McGillivray y Oldenburg (1990).

Las ecuaciones obtenidas siguen obedeciendo la ecuación de elastodinámica, con la diferencia de que se emplea una fuente secundaria diferente para cada parámetro en la región del modelo donde se plantea calcular la derivada. Las fuentes secundarias dependen de los resultados del modelado directo inicial. Así pues, el cálculo numérico de las derivadas realizará tantos modelados directos como celdas discretizadas existen para el problema inverso más un modelado directo inicial. Entonces, como principal ventaja se encuentra que tenemos que emplear el mismo esquema optimizado de mallado intercalado de modelado directo de las velocidades y esfuerzos para el cálculo de derivadas de Frechet. Como principal desventaja es el tiempo de cómputo para calcular la derivada en cada celda, mientras más fina sea la discretización del problema inverso, más modelados directos deberán ser computados para las derivadas. La discretización del problema inverso se ve afectada por la manera en que se calculan las derivadas de Frechet,

Para corroborar y calibrar las derivadas usando esta metodología, realizamos la propagación de onda del campo de derivada de la velocidad y la comparamos con el método de perturbaciones. Los resultados son los mismos para regiones donde comienza a aparecer la fuente secundaria, presentando ruido numérico el método de perturbaciones. Por esta razón y por que el método de perturbaciones emplea el cálculo de un campo adicional, lo cual se traduce en 1 1/2 veces el tiempo de cómputo, decidimos adoptar la metodología desarrollada en la aproximación a la ecuación de sensibilidad. Por último comparamos la amplitud de la derivada respecto a cada parámetro, para justificar la adimensionalización de la matriz hessiana, para ponderar el peso de los tres parámetros elásticos en la inversión de la matriz. La manera del llenado de la matriz hessiana se muestra en el diagrama de flujo del capítulo 5.

7.4. Experimentos numéricos de inversión

Por último mostramos los resultados de algunos experimentos numéricos de inversión sin usar regularización, usando regularización de primer orden de Tikhonov y regularización con mínima estructura. Se mostró que para una discretización pequeña en cuanto al número de celdas la inclusión de la regularización de cualquier tipo no es necesaria.

Aunque no se agregó ruido a las trazas sísmica de observación, se puede agregar fácilmente sin alterar mucho el esquema de inversión. La adición de más fuentes sísmicas para el problema inverso también se puede incorporar con relativa facilidad, sin embargo se duplica el tiempo de cómputo tantas fuentes se añadan.

Los resultados con inversión sin regularización convergen en 20 iteraciones, en cuanto a los modelos obtenidos, se observa también convergencia y se muestra una desviación aproximada de uno por ciento respecto al modelo real. Estructuralmente se observa que inmediatamente en la primer iteración recupera la interfaz entre capas, para las demás iteraciones el esquema iterativo comienza a ajustar la amplitud de las velocidades obteniendo los valores de los parámetros elásticos de la capa inferior. Estos primeros resultados nos incentivaron a continuar la inversión hasta 110 iteraciones. La convergencia respecto al ajuste a los datos y la desviación respecto al modelo real prevalece. En cuanto a las velocidades de ondas P y S, se recuperan los valores iniciales también.

De esta manera decidimos incrementar la discretización a 20×20 , sin embargo un primer intento falló al momento de invertir la matriz, dado que existen regiones con esta discretización que carecen de información en los sismogramas. Es en este momento que comenzamos a implementar la teoría de regularización.

Primero empleamos la regularización de Tikhonov de primer orden. Al igual que el primer resultado con una discretización grande, la interfaz se obtiene de manera correcta en la primer iteración. Si bien el ajuste de los datos no sucede con rapidez, este mantiene un comportamiento convergente. Al alcanzar el número máximo de iteraciones, se observa que los modelos obtenidos recuperan correctamente la interfaz de la capa, pero en celdas retiradas de los receptores, la regularización empleada muestra una imagen suavizada, produciendo una desviación relativamente grande respecto al modelo real, esto porque obedece a la condición de mínimo gradiente impuesta. Es decir, el esquema a final de cuentas está realizando lo que le pedimos. La naturaleza del problema se podría ver como una inversión conjunta, ligando los 3 parámetros del modelo a una misma ecuación y efectivamente los modelos obtenidos definen su estructura en la misma región.

La aplicación de MGS en la regularización presenta el mismo comportamiento en la

primer iteración como los resultados anteriores, i.e., la interfaz entre capas es la primera en detectarse. Después, el ajuste de la amplitud de las velocidades en los receptores junto con la condición de mínima estructura produce una imagen más enfocada en los modelos obtenidos, esto respecto a los resultados con regularización de Tikhonov de primer orden.

Capítulo 8. Conclusiones

En el presente trabajo de tesis se abordó el problema de inversión de forma de onda completa en medios bidimensionales en el dominio del tiempo usando el método de imágenes enfocadas. Para esto se tuvo que conjuntar la técnica de diferencias finitas con mallado intercalado para modelado directo y el cálculo de derivadas de Frechet con expresiones desarrolladas en base al método de la aproximación a la ecuación de sensibilidad. Mediante la implementación de dos diferentes métodos de aproximación, especialmente mínimo soporte de gradiente en FWI, se invirtieron tres cantidades elásticas λ , μ y ρ usando la medición de 2 componentes de la velocidad, las principales conclusiones se muestran a continuación:

1. La implementación de un esquema de mallado intercalado bidimensional para la ecuación de elastodinámica en el dominio del tiempo es fácil de programar. Los resultados obtenidos muestran algunos de los fenómenos propios de la propagación de onda elástica, ausentes en la formulación acústica de forma de onda. La paralelización del código y las condiciones de fronteras aplicadas resultaron ser componentes claves tanto como para modelado directo como modelado inverso.
2. La condición de estabilidad propia del método en pasos de tiempo del esquema de mallado intercalado repercute seriamente en el problema inverso, dado que esta condición depende de la velocidad de onda P máxima del modelo. Si una celda del modelo durante el proceso iterativo rebasa la velocidad límite, se vuelve inestable.
3. La manera en la que realizamos el cálculo numérico de las derivadas de Frechet presenta buenos resultados, no obstante el tiempo de cómputo puede presentar una limitación para esta metodología inclusive cuando este método está basado en un esquema de modelado directo paralelizado. El costo por iteración en una discretización de 20×20 es alrededor de 4 horas por iteración, dependiendo de algunas configuraciones de cómputo.
4. Todos los resultados en inversión muestran inmediatamente la interfaz entre medios en la primer iteración, dado que esta región es la que produce en mayor parte

el desajuste de los datos observados y calculados. Observamos que para discretizaciones relativamente más finas, la aplicación de un método de regularización es necesaria para la inversión satisfactoria de la matriz hessiana, dado que se incorpora información adicional que la serie de tiempo no aporta.

5. La función de estabilización de MGS efectivamente produce una imagen enfocada de los modelos obtenidos para los tres parámetros elásticos. Resaltamos que el método de imágenes enfocadas ha sido aplicado satisfactoriamente en otros métodos geofísicos, sin embargo ésta es la primera vez que se aplica a FWI.
6. Aunque no se imponen condiciones adicionales de inversión conjunta, el esquema propuesto invierte conjuntamente los tres parámetros elásticos de manera consistente.

8.1. Trabajo a futuro

En cuanto al problema de inestabilidad del esquema de mallado intercalado durante el proceso de inversión se mitigó de manera rápida regresando el valor de la celda al valor previo, sin embargo es necesario implementar una estrategia robusta para acotar los valores del modelo obtenido. Una idea es explorar métodos de programación lineal o no lineal, tal es el caso del método de simplex.

Para obtener una mejor resolución en menos tiempo es necesario explorar e implementar el método del campo adjunto descrito en la presente tesis para calcular las derivadas de Frechet necesarias para el esquema de FWI. El método promete solo dos modelados directos para el cómputo completo de la matriz hessiana.

En cuanto a la inclusión del método de regularización de MGS en FWI es necesario realizar un análisis más detallado para obtener un mejor control de los seis parámetros α_λ , α_μ , α_ρ , β_λ , β_μ y β_ρ que participan en la función objetiva completa.

Por último señalamos que la reformulación de la ecuación de elastodinámica para el caso acústico podría estar mejor representada a través del módulo de compresibilidad $K = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ tanto en modelado directo, cálculo de derivadas y problema inverso. Esto

permitirá evadir problemas cuando $\mu = 0$. Esta formulación ha sido utilizada por varios autores en trabajos de FWI.

La inclusión de otro método geofísico en inversión conjunta con FWI resultaría de bastante beneficio para obtener una mejor resolución del subsuelo, como por ejemplo inversión gravimétrica para obtener junto con FWI un buen modelo de densidad.

Lista de referencias bibliográficas

- Alford, R., Kelly, K., y Boore, D. M. (1974). Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, **39**(6): 834–842.
- Berdichevskii, M. N. y Zhdanov, M. S. (1984). *Advanced theory of deep geomagnetic sounding*. Elsevier Science Ltd.
- Borisov, D. y Singh, S. C. (2015). Three-dimensional elastic full waveform inversion in a marine environment using multicomponent ocean-bottom cables: a synthetic study. *Geophysical Journal International*, **201**(3): 1215–1234.
- Cerjan, C., Kosloff, D., Kosloff, R., y Reshef, M. (1985). A nonreflecting boundary condition for discrete acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, **50**(4): 705–708.
- Cohen, A. (2003). *Numerical analysis of wavelet methods*, Vol. 32. Elsevier.
- Constable, S. C., Parker, R. L., y Constable, C. G. (1987). Occam's inversion: A practical algorithm for generating smooth models from electromagnetic sounding data. *Geophysics*, **52**(3): 289–300.
- De Basabe, J. D. y Sen, M. K. (2007). Grid dispersion and stability criteria of some common finite-element methods for acoustic and elastic wave equations. *Geophysics*, **72**(6): T81–T95.
- De Basabe, J. D. y Sen, M. K. (2015). A comparison of finite-difference and spectral-element methods for elastic wave propagation in media with a fluid-solid interface. *Geophysical Journal International*, **200**(1): 278–298.
- Fichtner, A. y Trampert, J. (2011). Resolution analysis in full waveform inversion. *Geophysical Journal International*, **187**(3): 1604–1624.
- Gallardo, L. A. y Meju, M. A. (2004). Joint two-dimensional dc resistivity and seismic travel time inversion with cross-gradients constraints. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth (1978–2012)*, **109**(B3).
- Gauthier, O., Virieux, J., y Tarantola, A. (1986). Two-dimensional nonlinear inversion of seismic waveforms: Numerical results. *Geophysics*, **51**(7): 1387–1403.
- Graves, R. W. (1996). Simulating seismic wave propagation in 3d elastic media using staggered-grid finite differences. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **86**(4): 1091–1106.
- Hole, J. y Zelt, B. (1995). 3-d finite-difference reflection traveltimes. *Geophysical Journal International*, **121**(2): 427–434.
- Ikelle, L. y Amundsen, L. (2005). *Introduction to Petroleum Seismology*, Vol. 12 de *Introduction to Petroleum Seismology*. Society of Exploration Geophysicists.
- Kelly, K., Ward, R., Treitel, S., y Alford, R. (1976). Synthetic seismograms; a finite-difference approach. *Geophysics*, **41**(1): 2–27.

- Kolb, P., Collino, F., y Lailly, P. (1986). Pre-stack inversion of a 1-d medium. *Proceedings of the IEEE*, **74**(3): 498–508.
- Levander, A. R. (1988). Fourth-order finite-difference p-sv seismograms. *Geophysics*, **53**(11): 1425–1436.
- Madariaga, R. (1976). Dynamics of an expanding circular fault. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **66**(3): 639–666.
- McGillivray, P. y Oldenburg, D. (1990). Methods for calculating fréchet derivatives and sensitivities for the non-linear inverse problem: A comparative study1. *Geophysical Prospecting*, **38**(5): 499–524.
- Moczo, P., Kristek, J., y Gális, M. (2014). *The Finite-Difference Modelling of Earthquake Motions: Waves and Ruptures*. Cambridge University Press.
- Mora, P. (1987). Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data. *Geophysics*, **52**(9): 1211–1228.
- Operto, S., Virieux, J., Amestoy, P., L'Excellent, J.-Y., Giraud, L., y Ali, H. B. H. (2007). 3d finite-difference frequency-domain modeling of visco-acoustic wave propagation using a massively parallel direct solver: A feasibility study. *Geophysics*, **72**(5): SM195–SM211.
- Pica, A., Diet, J., y Tarantola, A. (1990). Nonlinear inversion of seismic reflection data in a laterally invariant medium. *Geophysics*, **55**(3): 284–292.
- Portniaguine, O. y Zhdanov, M. S. (1999). Focusing geophysical inversion images. *Geophysics*, **64**(3): 874–887.
- Portniaguine, O. y Zhdanov, M. S. (2002). 3-d magnetic inversion with data compression and image focusing. *Geophysics*, **67**(5): 1532–1541.
- Pratt, R. G. y Worthington, M. (1990). Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. part 1: acoustic wave-equation method. *Geophysical prospecting*, **38**(3): 287–310.
- Shin, C. y Cha, Y. H. (2008). Waveform inversion in the laplace domain. *Geophysical Journal International*, **173**(3): 922–931.
- Sirgue, L. y Pratt, R. G. (2004). Efficient waveform inversion and imaging: A strategy for selecting temporal frequencies. *Geophysics*, **69**(1): 231–248.
- Smith, N. C. y Vozoff, K. (1984). Two-dimensional dc resistivity inversion for dipole-dipole data. *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, (1): 21–28.
- Tarantola, A. (1984). Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, **49**(8): 1259–1266.
- Tarantola, A. (1986). A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data. *Geophysics*, **51**(10): 1893–1903.

- Tarantola, A. (1988). Theoretical background for the inversion of seismic waveforms including elasticity and attenuation. *Pure and Applied Geophysics*, **128**(1-2): 365–399.
- Thakur, N. K. y Rajput, S. (2010). *Exploration of Gas Hydrates: Geophysical Techniques*. Springer Science & Business Media.
- Tromp, J., Tape, C., y Liu, Q. (2005). Seismic tomography, adjoint methods, time reversal and banana-doughnut kernels. *Geophysical Journal International*, **160**(1): 195–216.
- Vidale, J. (1988). Finite-difference calculation of travel times. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **78**(6): 2062–2076.
- Vigh, D. y Starr, E. W. (2008). 3d prestack plane-wave, full-waveform inversion. *Geophysics*, **73**(5): VE135–VE144.
- Vigh, D., Starr, E. W., *et al.* (2008). Comparisons for waveform inversion, time domain or frequency domain. En: *Extended Abstracts*. pp. 1890–1894.
- Virieux, J. (1984). Sh-wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, **49**(11): 1933–1942.
- Virieux, J. (1986). P-sv wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, **51**(4): 889–901.
- Virieux, J. y Madariaga, R. (1982). Dynamic faulting studied by a finite difference method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **72**(2): 345–369.
- Virieux, J. y Operto, S. (2009). An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, **74**(6): WCC1–WCC26.
- Weidelt, P. (1975). Electromagnetic induction in three-dimensional structures. *J. Geophys.*, **41**(85): 109.
- Zhdanov, M. S. (2002). *Geophysical inverse theory and regularization problems*, Vol. 36. Elsevier.
- Zhdanov, M. S. y Fang, S. (1996). Quasi-linear approximation in 3-d electromagnetic modeling. *Geophysics*, **61**(3): 646–665.
- Zhdanov, M. S., Ellis, R., y Mukherjee, S. (2004). Three-dimensional regularized focusing inversion of gravity gradient tensor component data. *Geophysics*, **69**(4): 925–937.

Apéndice A. Código de modelado directo de forma de onda

```

Program ForwardProblem
!
Implicit none
!=====
!
!                               Declaracion de variables
!=====
real*8, allocatable      :: vx(:, :), vz(:, :)      !Velocidades
real*8, allocatable      :: sxx(:, :), szz(:, :), sxz(:, :) !Esfuerzos
real*8, allocatable      :: XX(:), ZZ(:), TT(:)      !Posiciones
real*8, allocatable      :: alpha(:, :), beta(:, :), rho(:, :) !Vp, Vs y Densidad
real*8, allocatable      :: lambda(:, :), mu(:, :)   !Parametros de Lamé
real*8                   :: XMIN, XMAX, ZMIN, ZMAX, TMAX !Dominio Fisico
real*8                   :: PKFREQ, XSRC, ZSRC, NSX, NSZ !Parametros de Fuente
real*8                   :: XSW, ZSW, VMAX           !Parametros de Fuente
integer*8                 :: SAVEINT                !Intervalo de guardado
real*8                   :: Gauss, Ricker, Source   !Funciones externas
real*8                   :: hx, hz, ht             !Incrementos
real*8                   :: px, pz, b, muc, l2m, l   !Parametros auxiliares
integer*8                 :: it, ix, iz, isnap, ik    !Indices de ciclos
integer*8                 :: nz, nx, nt             !No. de nodos
character(1024)           :: filename1, format_string1 !Variables de archivo
real*8, allocatable      :: vxant(:, :), vzant(:, :) !Previous velocities
real*8                   :: start, finish           !Conteo
!=====
!
!                               Variables para el sismograma
!=====
real*8                   :: offset, ds              !Variables de sismograma
real*8, allocatable      :: at(:, :), a1(:, :), a2(:, :), a3(:, :), a4(:, :) !Areas para interpolar
real*8, allocatable      :: vxsis(:, :), vzsic(:, :) !Sismogramas vx y vz
real*8, allocatable      :: txsis(:, :), tzsisic(:, :), txzsisic(:, :) !Sismogramas esfuerzos
real*8, allocatable      :: xxs(:, :), zzsic(:, :)  !Posiciones de sismograma
integer*8, allocatable   :: ixsisic(:, :), izsisic(:, :) !Indices de sismogramas
integer*8                 :: ns, is                 !Numero de sismogramas
!=====
!
!                               Variables condiciones de Frontera
!=====
integer*8                 :: itap, iab              !Nodos para absorcion
integer*8                 :: nxmin, nxmax, nzmin, nzmax !Dominio aumentado
real*8                   :: dumping, dumper        !Funcion de absorcion
!=====
!
!                               Archivos de entrada
!=====
open(1, file='IN-Forward.txt')                    !Datos de entrada del modelo discretizado
open(2, file='IN-Receiver.txt')                   !Datos de receptores

write(*,*) '=====
write(*,*) '=== Comienzo del programa de Modelado Directo de Forma de Onda ==='
write(*,*) '=====

!=====
!
!                               Lectura de los parametros de entrada
!=====
read(1,*) XMIN      !Distancia horizontal minima
read(1,*) XMAX      !Distancia horizontal maxima
read(1,*) ZMIN      !Profundidad minima
read(1,*) ZMAX      !Profundidad maxima
read(1,*) TMAX      !Tiempo maximo
read(1,*) nx        !Numero de nodos en x
read(1,*) nz        !Numero de nodos en z
read(1,*) nt        !Numero de tiempos
read(1,*) NSX       !Componente horizontal de la fuente
read(1,*) NSZ       !Componente vertical de la fuente
read(1,*) XSRC      !Posiciones de la fuente
read(1,*) ZSRC      !Posiciones de la fuente
read(1,*) SAVEINT   !Intervalo entre capturas de tiempo
!=====

```

```

!
!----- Variables para el sismograma -----!
!-----!
read(2,*) ns           !Numero de sismogramas
read(2,*) offset       !Distancia primer receptor
read(2,*) ds           !Espaciamiento entre receptores
close(1)
close(2)

!----- Comenzamos dimensionalizar nuestros arreglos -----!
!-----!
!Indices adicionales para las condiciones de frontera
itap=nx/2
iab=nx
itap=1
iab=1
! Aumentamos el dominio
nxmin=1-iab
nxmax=nx+iab
nzmin=1
nzmax=nz+iab

!Establecemos los arreglos de los campos
Allocate ( vx(nxmin:nxmax,nzmin:nzmax))
Allocate ( vz(nxmin:nxmax,nzmin:nzmax))
Allocate ( sxx(nxmin:nxmax,nzmin:nzmax))
Allocate ( szz(nxmin:nxmax,nzmin:nzmax))
Allocate ( sxz(nxmin:nxmax,nzmin:nzmax))
vx =0
vz =0
sxx=0
szz=0
sxz=0

!Arreglo de las posiciones de los nodos
Allocate (XX(nxmin:nxmax))
Allocate (ZZ(nzmin:nzmax))
Allocate (TT(0:nt))

!Arreglos de las velocidades de cuerpo y parametros de lame
Allocate ( alpha(nxmin:nxmax,nzmin:nzmax))
Allocate ( beta(nxmin:nxmax,nzmin:nzmax))
Allocate ( rho(nxmin:nxmax,nzmin:nzmax))
Allocate (lambda(nxmin:nxmax,nzmin:nzmax))
Allocate ( mu(nxmin:nxmax,nzmin:nzmax))

!Areas auxiliares para la interpolacion lineal en la medicion
Allocate (at(1:ns))
Allocate (a1(1:ns))
Allocate (a2(1:ns))
Allocate (a3(1:ns))
Allocate (a4(1:ns))

Allocate (xzs(1:ns))
Allocate (zxs(1:ns))
Allocate (ixs(1:ns))
Allocate (izs(1:ns))

!Arreglo de los vectores de medicion en los ns receptores
Allocate (vxsis(1:ns))
Allocate (vzsis(1:ns))
Allocate (txsis(1:ns))
Allocate (tzsis(1:ns))
Allocate (txzsis(1:ns))

! Incrementos
hx=(XMAX - XMIN)/(nx-1.0)
hz=(ZMAX - ZMIN)/(nz-1.0)
ht=TMAX/nt

!-----!
! Computo de las coordenadas x,z de los nodos
!-----!
do ix=nxmin,nxmax
    XX(ix)=XMIN + (ix-1)*hx

```

```

end do

do iz=nzmin,nzmax
    ZZ(iz)=ZMIN + (iz-1)*hz
end do

!=====
! Computo del modelo
! Aqui se puede variar el modelo asignando un valor a ca da punto x,z del
! modelo. Por ejemplo, consideremos un semi-espacio homogeneo descrito por
!=====
alpha    = 1500.0
beta     = 1000.0
rho      = 1600.0

Do ix=nxmin,nxmax
    Do iz=1*nz/2+1,nzmax
        alpha(ix,iz)    =4000.0
        beta(ix,iz)     =2300.0
        rho(ix,iz)      =2400.0
    end do
end do

!El modelo en la representacion de los parametros de Lamé
lambda=rho*(alpha*alpha-2*beta*beta)
mu      =beta*beta*rho

!Verificamos la condicion de estabilidad
write(*,*) 'dt<0.7 dx/Vmax'
write(*,100) ht,0.7*hx/maxval(alpha)
write(*,*)

!Imprimimos el modelo en archivos de salida
open(3,file='lambda.dat')
open(4,file='mu.dat')
open(5,file='rho.dat')
Do ix=1,nx
    Do iz=1,nz
        write(3,*) xx(ix),zz(iz),lambda(ix,iz)
        write(4,*) xx(ix),zz(iz),mu(ix,iz)
        write(5,*) xx(ix),zz(iz),rho(ix,iz)
    end do
end do
close(3)
close(4)
close(5)

px=ht/hx
pz=ht/hz

!=====
! Establecemos las posiciones de los ns sismogramas, donde offset es la distancia
! al primer receptor, y ds el espaciamiento entre receptores
!=====
do is=1,ns
    xxs(is)=offset+ds*(is-1)
    zzs(is)=10.0
end do

!=====
! Preparamos las variables necesarias para la interpolacion lineal para la
! medicion en los ns receptores.
!=====
do is=1,ns
    ixs(is)=(xxs(is)-xmin)/hx+1
    izs(is)=(zzs(is)-zmin)/hz+1
    at(is)=(XX(ixs(is)+1)-XX(ixs(is)))*(ZZ(izs(is)+1)-ZZ(izs(is)))
    a1(is)=(XXS(is)-XX(ixs(is)))*(ZZS(is)-ZZ(izs(is)))
    a2(is)=(XX(ixs(is)+1)-XXS(is))*(ZZS(is)-ZZ(izs(is)))
    a3(is)=(XXS(is)-XX(ixs(is)))*(ZZ(izs(is)+1)-ZZS(is))
    a4(is)=(XX(ixs(is)+1)-XXS(is))*(ZZ(izs(is)+1)-ZZS(is))
end do

!=====
! Comienzo del ciclo principal de modelado pasos de tiempo
!=====

```

```

isnap=0
do it=0,nt
  TT(it)=it*ht
  !=====
  ! Velocidades vx y vz en paralelo
  !=====
  !$OMP PARALLEL DO PRIVATE(IZ,B)
  do ix=1+nxmin,nxmax-1
    do iz=1+nzmin,nzmax-1
      b=1.0/rho(ix,iz)
      vx(ix,iz)=vx(ix,iz)+b*px*(sxx(ix+1,iz)-sxx(ix,iz))
      vx(ix,iz)=vx(ix,iz)+b*pz*(sxz(ix,iz)-sxz(ix,iz-1))
      vx(ix,iz)=vx(ix,iz)+b*ht*NSX*Source(XX(ix),XSRC,ZZ(iz),ZSRC,TT(it))
      vx(ix,iz)=vx(ix,iz)*dumper(ix,iz,itap,nx,nz)
      !For vz
      vz(ix,iz)=vz(ix,iz)+b*pz*(szz(ix,iz+1)-szz(ix,iz))
      vz(ix,iz)=vz(ix,iz)+b*px*(sxz(ix,iz)-sxz(ix-1,iz))
      vz(ix,iz)=vz(ix,iz)+b*ht*NSZ*Source(XX(ix),XSRC,ZZ(iz),ZSRC,TT(it))
      vz(ix,iz)=vz(ix,iz)*dumper(ix,iz,itap,nx,nz)
    end do
  end do
  !$OMP END PARALLEL DO
  !=====
  ! Esfuerzos, en paralelo
  !=====
  !$OMP PARALLEL DO PRIVATE(IZ,l,l2m,muc)
  do ix=1+nxmin,nxmax-1
    do iz=1+nzmin,nzmax-1
      muc=mu(ix,iz)
      l2m=lambda(ix,iz)+2.0*mu(ix,iz)
      l=lambda(ix,iz)
      !Para txx
      sxx(ix,iz)=sxx(ix,iz)+l2m*px*(vx(ix,iz)-vx(ix-1,iz))
      &+l*pz*(vz(ix,iz)-vz(ix,iz-1))
      sxx(ix,iz)=sxx(ix,iz)*dumper(ix,iz,itap,nx,nz)
      !Para szz
      szz(ix,iz)=szz(ix,iz)+l*px*(vx(ix,iz)-vx(ix-1,iz))
      &+l2m*pz*(vz(ix,iz)-vz(ix,iz-1))
      szz(ix,iz)=szz(ix,iz)*dumper(ix,iz,itap,nx,nz)
      !Para sxz
      sxz(ix,iz)=sxz(ix,iz)+muc*(px*(vz(ix+1,iz)-vz(ix,iz))
      &+pz*(vx(ix,iz+1)-vx(ix,iz)))
      sxz(ix,iz)=sxz(ix,iz)*dumper(ix,iz,itap,nx,nz)
    end do
  end do
  !$OMP END PARALLEL DO
!
  !=====
  ! Impresion de Archivos cada SAVEINT
  !=====
  if (isnap==SAVEINT) then
    if (it < 10) then
      format_string1= "(I1)"
    else if (it < 100) then
      format_string1= "(I2)"
    else if (it < 1000) then
      format_string1= "(I3)"
    else if (it < 10000) then
      format_string1= "(I4)"
    else if (it < 100000) then
      format_string1= "(I5)"
    else if (it < 1000000) then
      format_string1= "(I6)"
    endif
    !Aqui convertimos it en caracter con el formato anterior
    write (filename1,format_string1) it
    write(*,*) "t=",it*ht,"s"
    !Imprimimos velocidades y esfuerzos
    open(21,file='vx t='//trim(filename1)//'.dat')
    open(22,file='vz t='//trim(filename1)//'.dat')
    open(23,file='txx t='//trim(filename1)//'.dat')
    open(24,file='tzz t='//trim(filename1)//'.dat')
    open(25,file='txz t='//trim(filename1)//'.dat')

    do iz=1,nz

```

```

do ix=1,nx
    write(21,*) XX(ix),ZZ(iz),vx(ix,iz)
    write(22,*) XX(ix),ZZ(iz),vz(ix,iz)
    write(23,*) XX(ix),ZZ(iz),sxx(ix,iz)
    write(24,*) XX(ix),ZZ(iz),szz(ix,iz)
    write(25,*) XX(ix),ZZ(iz),sxz(ix,iz)
end do
write(21,*)
write(22,*)
write(23,*)
write(24,*)
write(25,*)
end do
Close(21)
Close(22)
Close(23)
Close(24)
Close(25)
isnap=0
end if
isnap=isnap+1

!=====
! Mediciones en los NS sismogramas, usadon interpolacion lineal
!=====
open(51,file='vxobs.dat')
open(52,file='vzobs.dat')
open(53,file='txxobs.dat')
open(54,file='tzzobs.dat')
open(55,file='txzobs.dat')

Do is=1,ns
vxsis(is)=
    +a1(is)*(vx(ixs(is)+1,izs(is)+1))
vxsis(is)=vxsis(is)+a2(is)*(vx(ixs(is),izs(is)+1))
vxsis(is)=vxsis(is)+a3(is)*(vx(ixs(is)+1,izs(is)))
vxsis(is)=vxsis(is)+a4(is)*(vx(ixs(is),izs(is)))
vxsis(is)=vxsis(is)/at(is)

vzsis(is)=
    +a1(is)*(vz(ixs(is)+1,izs(is)+1))
vzsis(is)=vzsis(is)+a2(is)*(vz(ixs(is),izs(is)+1))
vzsis(is)=vzsis(is)+a3(is)*(vz(ixs(is)+1,izs(is)))
vzsis(is)=vzsis(is)+a4(is)*(vz(ixs(is),izs(is)))
vzsis(is)=vzsis(is)/at(is)

txxsis(is)=
    +a1(is)*(sxx(ixs(is)+1,izs(is)+1))
txxsis(is)=txxsis(is)+a2(is)*(sxx(ixs(is),izs(is)+1))
txxsis(is)=txxsis(is)+a3(is)*(sxx(ixs(is)+1,izs(is)))
txxsis(is)=txxsis(is)+a4(is)*(sxx(ixs(is),izs(is)))
txxsis(is)=txxsis(is)/at(is)

!

tzzsis(is)=
    +a1(is)*(szz(ixs(is)+1,izs(is)+1))
tzzsis(is)=tzzsis(is)+a2(is)*(szz(ixs(is),izs(is)+1))
tzzsis(is)=tzzsis(is)+a3(is)*(szz(ixs(is)+1,izs(is)))
tzzsis(is)=tzzsis(is)+a4(is)*(szz(ixs(is),izs(is)))
tzzsis(is)=tzzsis(is)/at(is)

!

txzsis(is)=
    +a1(is)*(sxz(ixs(is)+1,izs(is)+1))
txzsis(is)=txzsis(is)+a2(is)*(sxz(ixs(is),izs(is)+1))
txzsis(is)=txzsis(is)+a3(is)*(sxz(ixs(is)+1,izs(is)))
txzsis(is)=txzsis(is)+a4(is)*(sxz(ixs(is),izs(is)))
txzsis(is)=txzsis(is)/at(is)

end do
!Imprimimos en archivos de salida
write(51,*) it*ht,vxsis
write(52,*) it*ht,vzsis
write(53,*) it*ht,txxsis
write(54,*) it*ht,tzzsis
write(55,*) it*ht,txzsis
end do      !=== Final del ciclo de teiempo=====

close(51)
close(52)
close(53)
close(54)
close(55)

```

```

100 Format(6f12.6)
end program ForwardProblem
!=====
!                               FINALIZACION DEL PROGRAMA PRINCIPAL
!=====
!
!
!=====
!                               Funciones externas
!=====
!
!=====
!                               Ricker wavelet
!=====
Function Ricker(t)
real*8:: t,t0,M_PI=ACOS(-1.0),Ricker,PKFREQ
PKFREQ  =15.0
t0      =0.78/PKFREQ
Ricker  =-2.0*(M_PI*PKFREQ)**2
Ricker  =Ricker*(1.0-2.0*(M_PI*PKFREQ*(t-t0))**2)
Ricker  =Ricker*exp(-(M_PI*PKFREQ*(t-t0))**2)
end function
!=====
!                               Gaussian distribution
!=====
Function Gauss(t,mn,sd)
real*8:: t,mn,sd,M_PI=ACOS(-1.0),Gauss
Gauss=exp(-(t-mn)/sd)**2)/(sd*sqrt(2.0*M_PI))
end function
!=====
!                               Source
!=====
Function Source(x,XSRC,z,ZSRC,t)
real*8:: x,z,t,Source,XSRC,ZSRC,XSW,ZSW,Gauss,Ricker
XSW    =10.0
ZSW    =10.0
Source=Gauss(x,XSRC,XSW)*Gauss(z,ZSRC,ZSW)*Ricker(t)
end function
!=====
!                               Condiciones de Frontera Absorbentes
!=====
Function Dumper(ix,iz,itap,nx,nz)
real*8      :: dumper,alphaaux
integer*8   :: ix,iz,itap,nx,nz
dumper=1.0
alphaaux=1.0/itap
if (ix <=-itap) then
    dumper=exp(-(alphaaux*(itap+ix))**2)
end if
if (ix >= nx+itap) then
    dumper=exp(-(alphaaux*((nx+itap)-ix))**2)
end if
if (iz <=-itap) then
    dumper=exp(-(alphaaux*(itap+iz))**2)
end if
if (iz >=nz+itap) then
    dumper=exp(-(alphaaux*((nz+itap)-iz))**2)
end if
end function

```

The figure consists of two side-by-side screenshots of a text editor window titled 'IN-Forward.txt (-) - gedit' and 'IN-Receiver.txt (-) - gedit'. Both windows show two tabs: 'IN-Forward.txt' and 'IN-Receiver.txt'.

Left Window (IN-Forward.txt):

0.0	XMIN	Dominio del espacio
1000.0	XMAX	
0.0	ZMIN	
1000.0	ZMAX	
3.0	TMAX	Tiempo Maximo
100	nx	Numero de nodos en x
100	nz	Numero de nodos en z
600	nt	Numero de nodos en t
0.0	NSX	Fuente Horizontal
1.0	NSZ	Fuente Vertical
500.0	XSRC	Posicion x de la fuente
0.0	ZSRC	Posicion z de la fuente
100		Intervalos entre snapshot

Right Window (IN-Receiver.txt):

20	nsNS	Numero de sismogramas
25.0	offset	Distancia primer receptor
50.0	ds	Distancia entre receptores

(a) Formato archivo de entrada con los parámetros del dominio del modelo (b) Formato de archivo de entrada con los parámetros de los receptores

Figura 64: Formato de archivos de entrada para el programa de modelado directo.