

TESIS DEFENDIDA POR
Jorge Alberto Mora Vargas
Y APROBADA POR EL SIGUIENTE COMITÉ

Dr. Fernando Rojas Íñiguez
Codirector del Comité

Dr. Ernesto Cota Araiza
Codirector del Comité

Dr. Jorge Alberto Villavicencio Aguilar
Miembro del Comité

Dra. Catalina López Bastidas
Miembro del Comité

Dr. Pedro Negrete Regagnon
Miembro del Comité

Dra. Laura Cecilia Viana Castrillón
*Coordinador del programa de posgrado
en Física de Materiales*

Dr. David Hilario Covarrubias Rosales
Director de Estudios de Posgrado

9 de enero de 2013

**CENTRO DE INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA Y DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DE ENSENADA**



**Programa del posgrado en ciencias
en Física de Materiales**

**Dinámica de entrelazamiento híbrido $3xN$ en un transbordador de triple
punto cuántico**

Tesis

que para cubrir parcialmente los requisitos necesarios para obtener el grado de
Maestro en Ciencias

Presenta:

Jorge Alberto Mora Vargas

Ensenada, Baja California, México
2013

Resumen de la tesis de Jorge Alberto Mora Vargas, presentada como requisito parcial para la obtención del grado de Maestro en Ciencias en Física de Materiales. Ensenada, Baja California. Enero de 2013.

Dinámica de entrelazamiento híbrido $3 \times N$ en un transbordador de triple punto
cuántico

Resumen aprobado por:

Dr. Fernando Rojas Íñiguez
Codirector de Tesis

Dr. Ernesto Cota Araiza
Codirector de Tesis

El entrelazamiento cuántico es uno de los pilares de los procesos de información y la computación cuántica. En este trabajo se estudia el entrelazamiento híbrido $3 \times N$ en un transbordador de triple punto cuántico (TDQS por sus siglas en inglés). Los puntos cuánticos (PC) están conectados linealmente, con los PC de los extremos fijos y el PC central oscilante, con el tuneo entre los PC dependiente de la posición del PC central, el cual se describe como un oscilador armónico cuántico con modos de oscilación que se entrelazan con los estados electrónicos de los PC. En esta tesis se caracterizan los estados entrelazados mediante el número de Schmidt (K) en función de los parámetros del TDQS, voltaje (ε_b) e inversa de la longitud del tuneo (α). En estado estacionario, los estados excitados de menor energía, como el primero y el segundo, presentan entrelazamiento $2 \times N$, en tanto que estados excitados más energéticos, como el quinto, presentan entrelazamiento $3 \times N$ en función de ε_b , mostrando un máximo de K para un ε_b fijo en función de α . Se encontraron relaciones del fenómeno cuántico del entrelazamiento híbrido con propiedades físicas medibles: relaciones cualitativas con la corriente electrónica (CE), en las que los máximos de la CE corresponden con máximos del K . Se estudia la evolución dinámica de los estados entrelazados para tres condiciones iniciales: una mezcla de eigenestados, $K=2$ y $K=3$ para el TDQS en presencia de un potencial AC periódico y en ausencia de éste. Se contrastan los efectos, para cada condición inicial, del caso sin potencial AC con el caso con potencial para una frecuencia igual a la frecuencia natural de la mezcla de eigenestados y con el fenómeno de destrucción coherente de tuneo (CDT por sus siglas en inglés). El potencial AC influye en el grado y la forma de los estados entrelazados, siendo esta influencia más intensa en condiciones de CDT que fuera de ellas. Se obtuvieron también promedios temporales de K como función de los parámetros del TDQS, encontrando regiones específicas en donde la CDT disminuye el grado de entrelazamiento hasta valores de K cercanos a uno.

Palabras Clave: **Entrelazamiento, número de Schmidt, TDQS.**

Abstract of the thesis presented by Jorge Alberto Mora Vargas as a partial requirement to obtain the Master of Science degree in Materials Physics Ensenada, Baja California, México. January 2013.

3xN hybrid entanglement dynamics in a triple dot quantum shuttle

Abstract approved by:

Dr. Fernando Rojas Íñiguez
Thesis codirector

Dr. Ernesto Cota Araiza
Thesis codirector

Quantum entanglement is a central feature in quantum information and quantum computation. In this work we study the 3xN hybrid entanglement in a triple dot quantum shuttle (TDQS). The quantum dots (QD's) are linearly connected, with the outer QD's fixed and the central QD oscillating, so that the tunneling between the QD's depends on the position of the central QD, which is described as a quantum harmonic oscillator with oscillation modes that are entangled with the electronic states of the QD's. In this thesis the entangled states are characterized by the Schmidt number (K) as a function of the parameters of the TDQS, the detuning (ε_b) and the inverse of the tunneling length (α). At steady state, the excited states of lower energies, such as the first and second ones, present a 2xN entanglement, and the more energetic excited states, such as the fifth one, present a 3xN entanglement as a function of ε_b , showing a maximum value of K for a fixed ε_b as a function of α . We found relationships between the quantum phenomenon of entanglement and physical measurable properties: qualitative relationships with the electronic current, in which the maxima of the electric current correspond with the maxima of K . We study the dynamic evolution of the entangled states for three initial conditions: a mixture between eigenstates, $K=2$ and $K=3$ for the TDQS in the presence of a periodic AC potential and in the absence of it. The effects are contrasted, for each initial condition, for the case without the AC potential with the case with a potential for a frequency equal to the natural frequency of the mixture of eigenstates and with the phenomenon of coherent destruction of tunneling (CDT). The AC potential influences the degree and the form of the entangled states, being this influence stronger in the CDT conditions than out of them. Temporal averages of K were also obtained as a function of the TDQS parameters, finding specific regions in which the CDT condition decreases the degree of entanglement to values of K near to one.

Keywords: Entanglement, Schmidt number, TDQS.

A mi familia, por estar siempre conmigo...

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Fernando Rojas y al Dr. Ernesto Cota por recibirme como tesista, por su compromiso con el proyecto y por su apoyo siempre oportuno. Gracias por su guía y el tiempo invertido.

Gracias a la Dra. Catalina López, al Dr. Jorge Villavicencio y al Dr. Pedro Negrete, miembros del comité, por tomarse el tiempo para revisar y evaluar mi progreso.

A la Dra. Laura Viana por su incansable labor de coordinador.

Al CICESE y al CNYN, por brindarme las herramientas necesarias para llevar a cabo mi maestría.

Al CONACyT por el apoyo económico recibido mediante la beca con el registro 253318 y el apoyo para mi estancia en España.

Dentro del rubro de apoyos económicos agradezco también a la dirección de estudios de posgrado del CICESE, especialmente al Dr. David Covarrubias y a la Quim. Ivonne Best, por su apoyo para mi estancia en España.

A mi familia y amigos, por apoyarme siempre.

Contenido

Resumen de la tesis en español.....	i
Resumen de la tesis en inglés.....	ii
Dedicatorias.....	iii
Agradecimientos.....	iv
Lista de figuras.....	vii
Lista de tablas.....	ix
Capítulo 1. Introducción.....	1
1.1 Mecánica cuántica.....	2
1.2 Desarrollo histórico del entrelazamiento.....	5
1.3 Medidas de entrelazamiento.....	7
1.4 Computación cuántica y procesos de información cuántica.....	8
1.5 Sistemas nanoelectromecánicos sometidos a campos eléctricos oscilantes.....	10
1.6 Objetivos y organización de la tesis.....	11
Capítulo 2. Entrelazamiento cuántico.....	13
2.1 Entrelazamiento.....	13
2.2 Entrelazamiento híbrido.....	14
2.3 Un ejemplo: teleportación cuántica.....	16
Capítulo 3. Medidas de entrelazamiento.....	18
3.1 Número de Schmidt.....	18
3.2 Vector de Bloch.....	22
Capítulo 4. Transbordador de triple punto cuántico.....	25
4.1 Transbordador de triple punto cuántico sin campo AC.....	25
4.2 Dinámica cuántica del TDQS.....	30
4.3 Transbordador de triple punto cuántico bajo el efecto de un campo AC.....	31
4.4 Destrucción coherente de tuneleo.....	33
Capítulo 5. Propiedades calculadas.....	36
5.1 Expresiones para el número de Schmidt.....	36
5.2 Expresiones para el vector de Bloch.....	38
5.3 Relación entre el número de Schmidt y el vector de Bloch.....	43
Capítulo 6. Resultados.....	45
6.1 Sistema en estado estacionario.....	46

Contenido

6.1.1 Espectro de energías del TDQS sin campo AC	46
6.1.2 Caracterización del entrelazamiento en el TDQS	47
6.1.3 Relación con la corriente electrónica	54
6.2 Evolución dinámica del sistema.....	59
6.2.1 Evolución para una mezcla de eigenestados.....	60
6.2.2 Evolución para un valor inicial $K=2$	69
6.2.3 Evolución para un valor inicial $K=3$	79
6.2.4 Promedio temporal del número de Schmidt	89
6.3. Caracterización dinámica mediante el vector de Bloch	94
Capítulo 7. Conclusiones	98
Referencias bibliográficas	102
Apéndice A. Marco matemático	105
Apéndice B. Descomposición de Schmidt.....	110
Apéndice C. Solución de dinámicas cuánticas mediante RK4	112

Lista de figuras

Figura	Página
1 Experimento de Young con electrones.....	4
2 TDQS sin AC.....	26
3 TDQS con AC.....	31
4 Número de Schmidt vs ε_b	44
5 Espectro de eigenenergías del TDQS.....	46
6 Caracterización del entrelazamiento en función de ε_b para el estado base y el primer estado excitado.....	48
7 Caracterización del entrelazamiento en función de ε_b para el segundo estado excitado.....	50
8 Caracterización del entrelazamiento en función de ε_b para el quinto estado excitado.....	52
9 Caracterización del entrelazamiento en función de α para el primer, segundo y quinto estados excitados.....	53
10 Curvas de contorno del primer estado excitado, K vs ε_b vs α	54
11 Comparativo de la corriente electrónica y el grado de entrelazamiento en función de ε_b	56
12 Comparativo de la corriente electrónica y el grado de entrelazamiento en curvas de contorno, I vs ε_b vs α y K vs ε_b vs α	58
13 Dinámica de entrelazamiento de una mezcla de eigenestados sin potencial AC, histogramas de probabilidad a tiempos específicos.....	61
14 Dinámica de entrelazamiento de una mezcla de eigenestados con potencial AC ($V_{AC} = 0.1$ $\omega_{AC} = 0.5, 0.1404$), histogramas de probabilidad a tiempos específicos.....	63

Lista de figuras

Figura	Página
15	Dinámica de entrelazamiento de una mezcla de eigenestados en condiciones de CDT, histogramas de probabilidad a tiempos específicos..... 65
16	Funciones de Bessel..... 67
17	Dinámica de entrelazamiento para un valor $K=2$ sin potencial AC, gráficas de área de probabilidad..... 70
18	Histogramas a tiempos específicos de la figura 17..... 71
19	Periodicidad del número de Schmidt cuando se incluye un potencial AC..... 72
20	Dinámica de entrelazamiento para un valor $K=2$ con potencial AC ($V_{AC} = 0.1 \omega_{AC} = 0.5$)..... 73
21	Dinámica de entrelazamiento para un valor $K=2$ con potencial AC ($V_{AC} = 0.1 \omega_{AC} = 0.1404$), gráficas de área de probabilidad. 74
22	Histogramas a tiempos específicos de la figura 21..... 75
23	Dinámica de entrelazamiento para un valor $K=2$ en condiciones de CDT, gráficas de área de probabilidad..... 77
24	Histogramas a tiempos específicos de la figura 23..... 78
25	Dinámica de entrelazamiento para un valor $K=3$ sin potencial AC, gráficas de área de probabilidad..... 80
26	Histogramas a tiempos específicos de la figura 25..... 81
27	Dinámica de entrelazamiento para un valor $K=3$ con potencial AC ($V_{AC} = 0.1 \omega_{AC} = 0.5$)..... 82
28	Dinámica de entrelazamiento para un valor $K=3$ con potencial AC ($V_{AC} = 0.1 \omega_{AC} = 0.1404$), gráficas de área de probabilidad. 83
29	Histogramas a tiempos específicos de la figura 28..... 84

Lista de figuras

Figura	Página
30 Dinámica de entrelazamiento para un valor $K=3$ en condiciones de CDT, gráficas de área de probabilidad.....	86
31 Histogramas a tiempos específicos de la figura 30.....	88
32 Curvas de contorno para el número de Schmidt promediado en el tiempo, \bar{K} vs ε_b vs α para una mezcla de eigenestados para diferentes condiciones del potencial AC.....	90
33 Análisis de una región de la figura 32.....	91
34 Gráficas de área de probabilidad para el análisis de la figura 33.....	92
35 Gráficas de área de probabilidad para de una región de la figura 32	93
36 Caracterización del grado de entrelazamiento mediante el vector de Bloch (caso estacionario).....	95
37 Caracterización del grado de entrelazamiento mediante el vector de Bloch (caso dinámico).....	96

Lista de tablas

Tabla	Página
1 Propiedades ecuación característica relacionada al vector de Bloch.....	42

*

Capítulo 1. Introducción

El entrelazamiento emerge de forma inherente a la teoría cuántica, la cual ha revolucionado la comprensión de los fenómenos a escalas subatómicas y es universalmente aceptada (Aczel, 2001) (Audretsch, 2007). Este fenómeno puramente cuántico puede ser utilizado para probar las bases de la misma teoría cuántica y es indispensable para la información y computación cuánticas (Audretsch, 2007). En la actualidad, el entrelazamiento cuántico ha sido comprobado experimentalmente en múltiples ocasiones e incluso en sistemas híbridos, es decir, en sistemas en los que se entrelazan diferentes grados de libertad (Dada, et al., 2011) (Ma, et al., 2012) (Ursin, et al., 2007) (Karimi, et al., 2010). Gracias a ello, se han logrado llevar a cabo protocolos como la teleportación y criptografía cuánticas (Ma, et al., 2012) (Ursin, et al., 2007).

Para el estudio y la utilización de un sistema entrelazado es necesario conocer el grado de entrelazamiento del sistema en cuestión. Para este fin se han desarrollado diferentes indicadores, como el número de Schmidt, la concurrencia, la negatividad o los testigos de entrelazamiento. El número de Schmidt será de gran utilidad para este trabajo, ya que permite cuantificar el entrelazamiento en un sistema puro con dos subespacios de Hilbert de cualquier dimensión.

Los sistemas nanoelectromecánicos (NEMS, por sus siglas en inglés) son estructuras de orden nanométrico que prometen revolucionarias aplicaciones como transistores, detectores, almacenamiento de datos, pantallas, etc. (Herrera May, et al., 2010) En algunos NEMS, estudiados principalmente desde un enfoque de transporte electrónico, se ha encontrado un acoplamiento entre diferentes grados de libertad que da lugar a pensar en la presencia de entrelazamiento híbrido. Resulta de gran interés para la implementación de dispositivos en computación cuántica el encontrar relaciones entre las propiedades físicas medibles de estos novedosos sistemas y el fenómeno de entrelazamiento híbrido.

Particularmente, se han realizado estudios sobre transporte electrónico en un transbordador de triple punto cuántico (TDQS, por sus siglas en inglés) con el punto cuántico central móvil y descrito como un oscilador armónico cuántico. Este sistema presenta un acoplamiento entre los grados de libertad electrónicos en los puntos cuánticos y los modos de oscilación que se generan a partir de las vibraciones del punto cuántico central (Armour & MacKinnon, 2002) (Maldonado, 2011) (Villavicencio, et al., 2011) (Villavicencio, et al., 2008).

Es por ello que nos proponemos a estudiar el entrelazamiento híbrido entre los estados electrónicos de los puntos cuánticos y los modos de oscilación en el TDQS con el punto cuántico central oscilante con y sin la presencia de un potencial AC. También se buscarán relaciones del fenómeno de entrelazamiento con propiedades físicas medibles del TDQS, especialmente con la corriente electrónica.

1.1 Mecánica cuántica

En la mecánica cuántica la descripción sobre el estado de una partícula se representa mediante una función de onda $\psi(x, t)$. Esta función de onda contiene información sobre la localización de la partícula. Su módulo cuadrado ($|\psi(x, t)|^2$) representa la densidad de probabilidad de la posición de la partícula. La ecuación que describe su dinámica temporal es la ecuación de Schrödinger. (Sankar, 1994)

El descubrimiento del comportamiento dual (onda-partícula) se llevó a cabo en el primer tercio del siglo pasado. El experimento que el físico británico Thomas Young realizó a principios del siglo XIX demostró, mediante patrones de interferencia, que la luz se comporta como una onda (Aczel, 2001). Sin embargo, en 1905, Albert Einstein explicó el efecto fotoeléctrico que consiste en la emisión de electrones al hacer incidir luz sobre una superficie metálica, proponiendo que la

luz está formada de partículas (fotones) con energía y momento angular discretos (Sankar, 1994).

En 1923, Louis de Broglie extendió los postulados de Einstein y propuso que las partículas, como los electrones, poseen propiedades ondulatorias. De Broglie propuso que toda partícula está asociada con una onda que se propaga en el espacio. Así, fue capaz de relacionar el momento de una partícula con una longitud de onda: $p = h/\lambda$, donde h es la constante de Planck. (Aczel, 2001)

El experimento de Young realizado con electrones demostró que estos presentan un patrón de interferencia, exhibiendo así su comportamiento dual. Este experimento consiste en lanzar partículas a través de dos rendijas, 1 y 2 (figura 1a); posteriormente, un detector mide su posición. En el caso de electrones, si alguna de las dos rendijas está cerrada se observa un comportamiento no ondulatorio, como el que se esperaría de partículas clásicas (figura 1b), pero si ambas están abiertas se observa un patrón de interferencia propio de ondas (figura 1c) (Feynman, et al., 1964). El experimento de Young se ha llevado a cabo con electrones desde la década de 1950, con neutrones desde 1970 y con átomos desde 1980. Así, la hipótesis de de Broglie que confiere propiedades ondulatorias a las partículas de materia, se demostró experimentalmente. (Aczel, 2001)

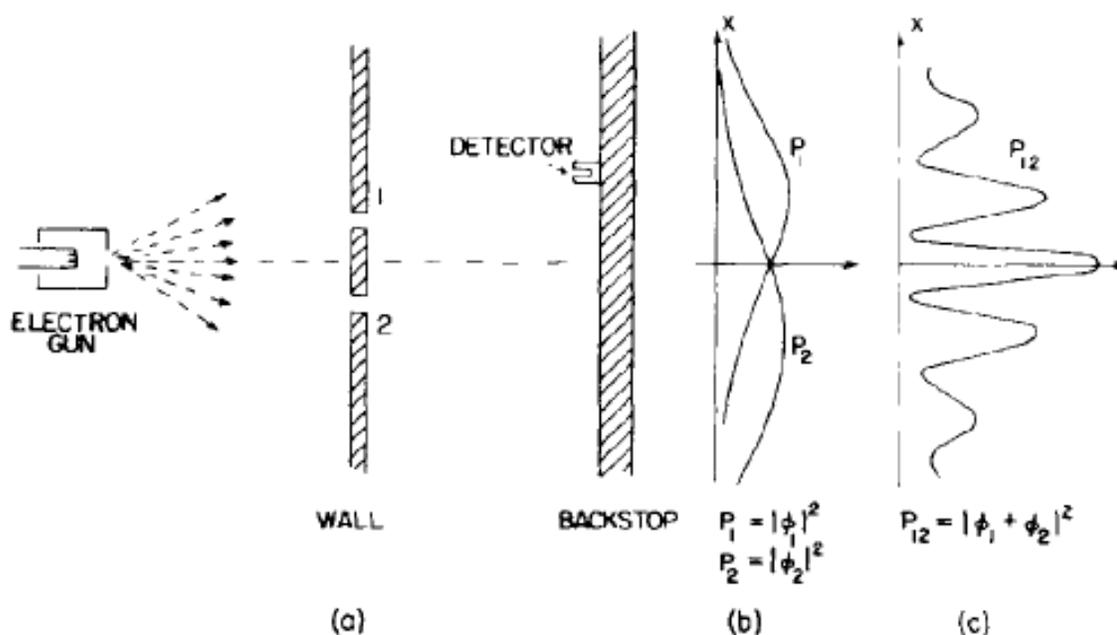


Figura1. Experimento de Young con electrones: a) doble rendija, b) distribución de probabilidad de estados independientes, c) distribución de probabilidad de estados superpuestos. (Feynman, et al., 1964) (Sección 1-3)

El patrón de interferencia desaparece cuando una medición se efectúa sobre el sistema. En el mismo experimento con electrones descrito en el párrafo anterior se monta alguna fuente de luz con la finalidad de que los electrones dispersen la luz y se pueda detectar por cuál rendija pasa cada electrón. En este caso se observa que la medición efectuada para conocer la posición de los electrones destruye el patrón de interferencia, lo que se conoce como colapso del vector de estado. (Feynman, et al., 1964)

Este fenómeno de interferencia entre partículas es una manifestación del principio de superposición de estados cuánticos. Un estado cuántico se refiere a un objeto matemático que permite calcular las probabilidades de todos los resultados posibles al efectuar una medición (Audretsch, 2007). A estos estados cuánticos se les pueden asociar propiedades del sistema. En el caso del experimento de Young la propiedad asociada es la posición de la partícula. El principio de superposición

establece que un estado cuántico puede estar compuesto de dos o más estados diferentes. Así, podemos describir el estado de la partícula en el experimento de Young como una superposición de dos estados A y B, de tal forma que el estado que describe el comportamiento de las partículas sin ser medidas es $P_A A + P_B B$, donde P_A y P_B son coeficientes tales que $|P_A|^2 + |P_B|^2 = 1$. Entonces, la distribución de probabilidad que describe la posición de los electrones sin ser medidos es $|P_A A + P_B B|^2$. Si se efectúa una medición, entonces el patrón de interferencia se destruye y la distribución de probabilidad que describe la posición de los electrones será simplemente la suma de los subsistemas $|P_A A|^2 + |P_B B|^2$. (Aczel, 2001)

1.2 Desarrollo histórico del entrelazamiento

En 1934, Einstein, Podolsky y Rosen publicaron un artículo que cuestionaba las bases de la teoría cuántica confrontándolas con lo que Einstein consideraba elementos de la realidad (Einstein, et al., 1935). Básicamente, Einstein argumentaba que la teoría cuántica era una teoría incompleta pues permitía que el resultado de una medición efectuada sobre una partícula afectara a otra separada físicamente de la primera sin que hubiera algún tipo de señal entre ellas. Por lo tanto, la teoría cuántica era una teoría no local que no coincidía con sus elementos de realidad. Según la percepción de Einstein existían variables ocultas que la mecánica cuántica no estaba considerando y que la complementaban. La llamada paradoja EPR dio pie al descubrimiento del entrelazamiento cuántico. (Aczel, 2001)

El entrelazamiento cuántico puede explicarse como sigue: el principio de superposición aplicado a varias partículas (dos en esta explicación) permite conocer el estado de una partícula (2) que ha interactuado con otra partícula (1) al efectuar una medición sobre esta última sin perturbar a la partícula (2). La

partícula (1) puede estar en los estados $|A^1\rangle$ y $|C^1\rangle$ y la partícula (2) puede estar en los estados $|B^2\rangle$ y $|D^2\rangle$. Si se considera una superposición de un producto de los estados de las dos partículas (es decir, después de una interacción entre ellas) podemos considerar al estado del sistema completo como:

$$|A^1\rangle \otimes |B^2\rangle + |C^1\rangle \otimes |D^2\rangle, \quad (1)$$

donde \otimes es el producto tensorial de espacios de Hilbert (ver apéndice A para marco matemático).

Si las partículas se separan físicamente y este estado prevalece, al realizarse una medición sobre la partícula (1) se obtendrá un estado $|A^1\rangle$ o $|C^1\rangle$ pero, por el colapso del vector de estado, se conocerá el estado de la partícula (2), que será $|B^2\rangle$ si se midió $|A^1\rangle$ en la partícula (1) o $|D^2\rangle$ si se midió $|C^1\rangle$. (Aczel, 2001)

En 1964, el británico John Bell publicó un artículo titulado “On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox” (Bell, 1964), en el que demostró que la mecánica cuántica y la localidad Einstein son incompatibles. Bell asumió que existían las variables ocultas que propuso Einstein y, con ellas, obtuvo una contradicción en forma de desigualdades (las desigualdades de Bell) que mostraba que la mecánica cuántica no podía contener esas variables ocultas. Entonces, si las desigualdades no eran violadas, la perspectiva de Einstein sería correcta pero, si se violaban, constituiría una evidencia de la no localidad. (Aczel, 2001)

Abner Shimony, Michael Horne, John Clauser y Richard Holt publicaron un artículo en 1969 (CHSH) en el que propusieron un diseño experimental para probar el teorema de Bell (Clauser, et al., 1969). En 1972 John Clauser y Stuart Freedman llevaron a cabo el experimento y encontraron violaciones en las desigualdades de Bell, es decir, la localidad de Einstein era incorrecta. Poco más tarde, Alain Aspect (Aspect, et al., 1982) mejoró el diseño propuesto en CHSH y demostró que en el

fenómeno de entrelazamiento no hay transmisión de señales que transporten la información (o al menos, a una velocidad igual o menor que la velocidad de la luz). (Aczel, 2001)

En la actualidad, el entrelazamiento cuántico es parte esencial del desarrollo de importantes líneas de investigación, principalmente la computación cuántica y el procesamiento de información cuántica. Múltiples laboratorios en todo el mundo buscan generar estados entrelazados. (Dada, et al., 2011) (Karimi, et al., 2010) (Ma, et al., 2012) (Ursin, et al., 2007)

1.3 Medidas de entrelazamiento

Los sistemas cuánticos pueden presentar diferentes grados de entrelazamiento. Desde estados totalmente separables en donde no existe el entrelazamiento hasta estados completamente entrelazados. En los sistemas físicos reales, lo más común es encontrar que las funciones de onda se encuentran en un estado intermedio (Eberly, 2006). Es importante determinar qué tan entrelazado se encuentra el sistema, ya que los protocolos de información cuántica que utilizan estados entrelazados requieren de un grado mínimo para poder ser implementados (Audretsch, 2007).

Existen diferentes indicadores que permiten detectar la presencia y el grado de entrelazamiento de sistemas cuánticos. Una medida robusta, pero solamente aplicable a sistemas en espacios de Hilbert de 2×2 , $\mathcal{H}^{2 \times 2}$ (ver apéndice A para el contexto matemático), es la concurrencia. Para sistemas cuánticos en los que se presentan mezclas o entrelazamiento de más de dos componentes existen medidas como la entropía, la negatividad o los testigos de entrelazamiento, que no son tan robustos como la concurrencia, pero permiten detectar la presencia de correlaciones cuánticas (Audretsch, 2007).

El número de Schmidt, que se obtiene a partir de los coeficientes de Schmidt (en la sección III.1 y en el apéndice B se presenta un desarrollo amplio de este concepto), es una medida robusta que permite determinar el grado y, mediante un análisis más profundo, la forma de estados entrelazados para sistemas cuánticos puros en espacios de Hilbert de $M \times N$, $\mathcal{H}^{M \times N}$ (Audretsch, 2007) (Eberly, 2006). Además, existe una relación entre el número de Schmidt y el conocido vector de Bloch (Ekert & Knight, 1994), en este trabajo encontraremos una expresión para esta relación en sistemas de $\mathcal{H}^{3 \times N}$.

1.4 Computación cuántica y procesos de información cuántica

La computación cuántica y el procesamiento de información cuántica han sido campos muy activos de investigación en las últimas décadas debido a su potencial mejora con respecto a los métodos clásicos en ciertas áreas, como la búsqueda de datos y la factorización de enteros (Tóth & Lent, 2001). Estas ventajas se deben, principalmente, a dos factores fundamentales: el paralelismo cuántico y el entrelazamiento (Rieffel & Polak, 2000).

Para reducir el tiempo que toman las operaciones de los procesos de cómputo se utilizan procesadores paralelos. Si se busca una reducción exponencial en el tiempo de procesamiento, es necesario un aumento exponencial de procesadores y, por lo tanto, de espacio físico. Sin embargo, en los sistemas cuánticos, debido al principio de superposición de estados, el paralelismo aumenta exponencialmente con el tamaño del sistema. Así, el efecto llamado paralelismo cuántico consiste en el aumento exponencial del paralelismo con un incremento lineal en espacio físico (Rieffel & Polak, 2000).

Los estudios teóricos y experimentales sobre la computación cuántica y la manipulación de estados entrelazados a través de dispositivos se han centrado principalmente en sistemas atómicos y de óptica cuántica. Se ha demostrado

experimentalmente entrelazamiento entre dos, tres y cuatro partículas en iones atrapados, átomos de Rydberg y cavidades cuánticas. Sin embargo, los puntos cuánticos, estructuras semiconductoras capaces de confinar electrones, colocan a los dispositivos de estado sólido como una de las opciones más prometedoras para el desarrollo de la computación cuántica debido a la infraestructura existente en la industria y a la facilidad de integración de estos dispositivos con los dispositivos existentes. (Hichri, et al., 2004)

Se han propuesto arreglos de puntos cuánticos como dispositivos capaces de manipular información cuántica (Tóth & Lent, 2001). Los “*Quantum-dot Cellular Automata*” (QCA) son arreglos de puntos cuánticos distribuidos en celdas que, mediante distribuciones de carga, presentan diferentes estados de polarización (0 y 1 en caso de información clásica) que permiten la manipulación de la información (Tougaw & Lent, 1996) (Tóth & Lent, 2001)). Si las celdas se polarizan parcialmente, se logra una superposición de estados y es posible manipular información cuántica. Tóth y Lent demostraron cómo con dispositivos QCA se pueden realizar las operaciones básicas de la computación cuántica (Tóth & Lent, 2001).

El estudio de triples puntos cuánticos es de gran interés para la computación cuántica, ya que un triple punto cuántico es el sistema más pequeño en el que los puntos cuánticos forman parte de una cadena de qubits. Recientemente fue posible romper las barreras experimentales para crear y estudiar arreglos de tres puntos cuánticos (Rogge & Haug, 2008).

Estos estudios en triples puntos cuánticos son importantes para nuestro tema desde las perspectivas del estudio de entrelazamiento (y que dan pie a pensar en estados entrelazados) (Röthlisberger, et al., 2008) (Villavicencio, et al., 2011) y el transporte electrónico (Armour & MacKinnon, 2002) (Rogge & Haug, 2008) (Villavicencio, et al., 2008) (Villavicencio, et al., 2011). Estudios sobre el transporte

electrónico en un triple punto cuántico con configuración lineal en presencia de una corriente AC, han demostrado que la corriente exhibe resonancias en función del voltaje (Villavicencio, et al., 2011). En este estudio se propone estudiar las relaciones de entrelazamiento (híbrido) que pueden presentarse entre los estados electrónicos de los puntos cuánticos y los modos de oscilación en un transbordador de triple punto cuántico (TDQS, por sus siglas en inglés).

1.5 Sistemas nanoelectromecánicos sometidos a campos eléctricos oscilantes

Un sistema nanoelectromecánico es un dispositivo que puede contener elementos mecánicos, electromagnéticos, ópticos, entre otros que poseen al menos una dimensión de orden nanométrico (Herrera May, et al., 2010). Pueden aplicarse (potencialmente) como sensores de masa, memorias de acceso aleatorio no volátil y filtros, así como en nanorobótica (Herrera May, et al., 2010). Las correlaciones no clásicas entre distintos grados de libertad que pueden existir en estos dispositivos, dan pie a pensar en fenómenos de entrelazamiento híbrido.

Se han realizado estudios de un NEMS desde una perspectiva completamente mecánico-cuántica, específicamente un TDQS, consistente en tres puntos cuánticos, con el punto central oscilante y los extremos fijos a contactos. En estos estudios se analizó el comportamiento de la corriente electrónica en función de los parámetros del sistema. Bajo el efecto de un potencial AC, la corriente de tunelaje exhibe resonancias que pueden describirse por medio de reglas de suma. Estas resonancias dependen de la relación entre la frecuencia y la intensidad del campo AC. Mediante la manipulación de estos parámetros del campo AC ha sido posible controlar las contribuciones de los diferentes modos de oscilación y suprimir las resonancias (destrucción coherente del tuneleo). (Maldonado, 2011) (Villavicencio, et al., 2008) (Villavicencio, et al., 2011)

1.6 Objetivos y organización de la tesis

En este trabajo se caracterizará el entrelazamiento híbrido $3 \times N$ que presenta el TDQS entre los estados electrónicos de los tres puntos cuánticos y los N estados de oscilación y se encontrarán relaciones cualitativas con propiedades físicas medibles, concretamente, la intensidad de corriente electrónica y el vector de Bloch. Además, veremos el cómo se manifiesta el fenómeno de CDT en el grado de entrelazamiento del sistema en presencia de un campo eléctrico oscilante.

La caracterización se llevará a cabo mediante el uso de una medida robusta del grado de entrelazamiento, el número de Schmidt. Se verá la evolución dinámica del fenómeno con y sin la presencia de un potencial AC. La relación del fenómeno con la corriente electrónica se obtendrá de comparar cualitativamente los resultados de este trabajo con otros en los que ya se ha estudiado ampliamente este sistema desde el enfoque de transporte electrónico (Maldonado, 2011) (Villavicencio, et al., 2008) (Villavicencio, et al., 2011) y se buscará cuantitativamente una relación con el vector de Bloch.

Este trabajo se distribuye de la siguiente manera: en el capítulo II se explicará el concepto de entrelazamiento y cómo se aplica en los procesos de información cuántica; en el capítulo III se exponen formalmente el número de Schmidt y el Vector de Bloch, que son indicadores cualitativos y cuantitativos de la presencia de entrelazamiento; en el capítulo IV se describe detalladamente el sistema a estudiar (el TDQS), tanto en el caso estacionario, como en el caso dinámico con y sin potencial AC; en el capítulo V se presentan los procedimientos utilizados para llegar a las expresiones de las medidas de entrelazamiento y se encuentra la expresión que relaciona al número de Schmidt con el vector de Bloch; en el capítulo VI se aplican los conceptos y formalismos de los capítulos II y III y los

procedimientos del capítulo V al sistema del capítulo IV, presentando los resultados obtenidos sobre la caracterización del entrelazamiento, su relación con las propiedades físicas medibles y la manifestación del fenómeno CDT en el grado de entrelazamiento; en el capítulo VII se encuentran las conclusiones de esta tesis así como el trabajo futuro y, finalmente, en los apéndices se describe el marco matemático en el que se basan los conceptos aquí presentados, la descomposición de Schmidt y el método utilizado para resolver la dinámica cuántica del sistema.

Capítulo 2. Entrelazamiento cuántico

En este capítulo veremos, de una manera más formal, el concepto de entrelazamiento cuántico. Como punto de partida, utilizaremos sistemas en espacios de Hilbert de 2×2 ($\mathcal{H}^{2 \times 2}$) para explicar los conceptos y veremos que existen estados de máximo entrelazamiento. Finalmente se presenta un protocolo de teleportación cuántica, un proceso de transmisión de información cuántica para el cual es requerida la presencia de estados entrelazados.

2.1 Entrelazamiento

Un sistema entrelazado es aquel que no puede ser representado como la factorización del producto tensorial de cada uno de los estados que lo conforman y es una propiedad mecánico-cuántica sin análogo clásico (Audretsch, 2007) (Rieffel & Polak, 2000). Así, un ejemplo de una función de onda no entrelazada es:

$$|\psi^{AB}\rangle = \frac{1}{2}(|0^A\rangle \otimes |0^B\rangle + |0^A\rangle \otimes |1^B\rangle + |1^A\rangle \otimes |0^B\rangle + |1^A\rangle \otimes |1^B\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0^A\rangle + |1^A\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0^B\rangle + |1^B\rangle), \quad (2)$$

en la cual, una medición sobre alguno de los subsistemas “A” o “B” colapsaría el vector de estado de ese mismo subsistema sin alterar el otro. Y la función de la forma:

$$|\Phi_+^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0^A\rangle \otimes |0^B\rangle + |1^A\rangle \otimes |1^B\rangle), \quad (3)$$

ejemplifica un estado entrelazado, en el cual, una medición sobre alguno de los subsistemas “A” o “B” colapsa ambos vectores de estado.

Son estos estados entrelazados los que confieren el crecimiento exponencial de los espacios de estados cuánticos en función del número de partículas (Rieffel & Polak, 2000). Es por ello que el entrelazamiento se considera como la base de los procesos de información, tales como la teleportación cuántica, el código denso o la criptografía cuántica así como de la computación cuántica (Rieffel & Polak, 2000) (Karimi, et al., 2010) (Röthlisberger, et al., 2008) (Sperling & Vogel, 2011) (Hichri, et al., 2004) (Kraus & Cirac, 2001) (Ursin, et al., 2007).

Dada la fuerte relación del fenómeno con las bases de la teoría cuántica, también se aprovecha para realizar pruebas fundamentales de mecánica cuántica (Ursin, et al., 2007).

2.2 Entrelazamiento híbrido

El entrelazamiento híbrido es aquel que ocurre entre grados de libertad diferentes. Es frecuente encontrar información sobre estados entrelazados entre los mismos grados de libertad, como el singlete de espín entrelazado en el átomo de Helio. Los grados de libertad más utilizados son el espín de un electrón, la polarización en fotones, los estados electrónicos de puntos cuánticos y los modos del campo electromagnético (Audretsch, 2007). Cabe mencionar que el entrelazamiento híbrido ha sido detectado experimentalmente (Karimi, et al., 2010).

Los estados que se describen como vectores en un espacio de Hilbert bidimensional (y que son los sistemas cuánticos no triviales más simples) se llaman qubits (Audretsch, 2007). La mayor cantidad de estudios sobre entrelazamiento se realizan en espacios de Hilbert 2×2 ($\mathcal{H}^{2 \times 2}$), que es el caso de entrelazamiento entre dos qubits (Amico, et al., 2008). A continuación se presentan los estados de Bell (Audretsch, 2007), que son los estados de máximo entrelazamiento para sistemas $\mathcal{H}^{2 \times 2}$:

$$|\Phi_{\pm}^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0^A\rangle \otimes |0^B\rangle \pm |1^A\rangle \otimes |1^B\rangle), \quad (4)$$

$$|\Psi_{\pm}^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0^A\rangle \otimes |1^B\rangle \pm |1^A\rangle \otimes |0^B\rangle). \quad (5)$$

Para algunos sistemas físicos, la dimensionalidad del espacio de Hilbert será mayor que 2×2 , teniendo así espacios de $M \times N$ ($\mathcal{H}^{M \times N}$). Por ejemplo, M estados electrónicos por N modos vibracionales, formarán un estado de entrelazamiento híbrido $M \times N$ (en el capítulo siguiente se menciona cómo identificar estados de máximo entrelazamiento para espacios de Hilbert $M \times N$).

El entrelazamiento híbrido en sistemas bipartitas ($\mathcal{H}^{M \times N}$) o multipartitas ($\mathcal{H}^{L \times M \times N \times \dots}$) resulta de gran interés para el desarrollo de dispositivos funcionales que permitan el procesamiento cuántico de información. Muchos modelos estudiados recientemente poseen, naturalmente, propiedades de entrelazamiento en $\mathcal{H}^{M \times N}$. Las relaciones de entrelazamiento entre distintos grados de libertad en función de los parámetros de los sistemas permiten pensar en arreglos en los que se puedan implementar, manipular y caracterizar los estados entrelazados. Concretamente, los estudios realizados en la materia condensada parecen prometedores para el futuro de la computación y comunicación cuánticas. (Amico, et al., 2008)

2.3 Un ejemplo: teleportación cuántica

Para ejemplificar la utilidad del entrelazamiento en procesos de información se describirá brevemente en qué consiste la teleportación cuántica (para un sistema $\mathcal{H}^{2 \times 2}$) (Audretsch, 2007). El objetivo es transmitir el estado cuántico de una partícula (C), entre el emisor (A) y el receptor (B), que se encuentra en el estado (desconocido para emisor y receptor):

$$|\varphi^C\rangle = a|0^C\rangle + b|1^C\rangle, \quad (6)$$

en donde $|a|^2 + |b|^2 = 1$. Para lograr el objetivo se utilizará un canal cuántico y comunicación clásica. Supongamos que el emisor (A) y el receptor (B) poseen un estado entrelazado (AB):

$$|\Phi_+^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0^A\rangle \otimes |0^B\rangle + |1^A\rangle \otimes |1^B\rangle). \quad (7)$$

El emisor tendrá en su control los estados (A) y (C). Cuando (A) y (C) interactúan, el sistema completo puede describirse de la siguiente manera (se omitirá \otimes en la notación):

$$|\varphi^C\rangle|\Phi_+^{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(a|0^C\rangle + b|1^C\rangle)(|0^A\rangle|0^B\rangle + |1^A\rangle|1^B\rangle). \quad (8)$$

Haciendo uso de los operadores de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

y con algunas manipulaciones algebraicas (utilizando la base de Bell antes descrita en ecuaciones 4 y 5):

$$\begin{aligned}
|\varphi^C\rangle|\Phi_+^{AB}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|0^C\rangle|0^A\rangle|0^B\rangle + a|0^C\rangle|1^A\rangle|1^B\rangle + b|1^C\rangle|0^A\rangle|0^B\rangle + b|1^C\rangle|1^A\rangle|1^B\rangle) = \\
&= \frac{1}{2}\{a(|\Phi_+^{CA}\rangle + |\Phi_-^{CA}\rangle)|0^B\rangle + a(|\Psi_+^{CA}\rangle + |\Psi_-^{CA}\rangle)|1^B\rangle + b(|\Psi_+^{CA}\rangle - |\Psi_-^{CA}\rangle)|0^B\rangle - \\
&= \frac{1}{2}\{(|\Phi_+^{CA}\rangle - |\Phi_-^{CA}\rangle)|1^B\rangle\} = \frac{1}{2}\{|\Phi_+^{CA}\rangle(a|0^B\rangle + b|1^B\rangle) + |\Psi_+^{CA}\rangle(a|1^B\rangle + b|0^B\rangle) + \\
&= \frac{1}{2}\{|\Phi_+^{CA}\rangle(a|1^B\rangle - b|1^B\rangle) + |\Phi_-^{CA}\rangle(a|0^B\rangle - b|1^B\rangle)\} = \frac{1}{2}\{|\Phi_+^{CA}\rangle|\varphi^B\rangle + |\Psi_+^{CA}\rangle\sigma_x^B|\varphi^B\rangle + \\
&= \frac{1}{2}\{|\Psi_-^{CA}\rangle(-i\sigma_y^B)|\varphi^B\rangle + |\Phi_-^{CA}\rangle\sigma_z^B|\varphi^B\rangle\}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Cuando se realice una medición en el sistema (A) el vector de estado colapsará en una de las cuatro posibilidades del último renglón de la ecuación 10. El estado $|\varphi\rangle$ se puede recuperar en (B), pero es necesario que se informe mediante algún canal clásico sobre el resultado de la medición en (A) para que pueda realizarse la transformación unitaria correspondiente necesaria para recuperar $|\varphi\rangle$. Cabe mencionar que la teleportación cuántica ha sido verificada experimentalmente, y uno de los ejemplos más impactantes puede encontrarse en la referencia (Ma, et al., 2012).

Los retos principales para el desarrollo de dispositivos que permitan implementar el entrelazamiento cuántico son el efecto del medio ambiente (disipación) y el control de distintos grados de libertad en sistemas bipartitas y multipartitas.

El medio ambiente puede ser visto como un elemento más del sistema y su efecto es la destrucción de los estados entrelazados. Para que con estos se puedan realizar operaciones en las aplicaciones antes descritas, es necesario mantener los estados entrelazados el tiempo suficiente.

Capítulo 3. Medidas de entrelazamiento

El estudio de sistemas entrelazados requiere medidas que permitan identificar y cuantificar el grado de entrelazamiento que existe entre los estados participantes (Sperling & Vogel, 2011). Existen diferentes medidas de entrelazamiento, como los coeficientes de Schmidt, la concurrencia, la entropía de los subsistemas y los “testigos de entrelazamiento” (*entanglement witnesses*) (Audretsch, 2007) (Kraus & Cirac, 2001). Cada medida tiene sus ventajas y sus limitantes. La concurrencia, por ejemplo, es una función monótonica del entrelazamiento, con rango de 0 (sistema no entrelazado) a 1 (sistema máximamente entrelazado); sin embargo, sólo está definida para sistemas de dos qubits entrelazados (Audretsch, 2007).

3.1 Número de Schmidt

Para sistemas entrelazados puros, en los que cada subsistema puede tener dos o más subestados, es decir, sistemas entrelazados puros en $\mathcal{H}^{M \times N}$, los coeficientes de Schmidt (descomposición de Schmidt) contienen toda la información sobre el entrelazamiento entre los subsistemas. La descomposición de Schmidt (el formalismo sobre la descomposición de Schmidt se presenta en el apéndice B) de un estado $|\psi^{AB}\rangle$, compuesto por un subsistema A y un subsistema B, con dimensiones en un espacio de Hilbert $H^A = a$ y $H^B = b$, está dada por:

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{n=1}^K \sqrt{\lambda_n} |u_n^A, w_n^B\rangle \quad \text{con } \lambda_n > 0, \quad (11)$$

donde $K \leq \min(a, b)$ es el rango de Schmidt; $|u_n^A\rangle$ y $|w_n^B\rangle$ son eigenvectores ortonormales de la matriz de densidad reducida de los sistemas A y B, respectivamente, y los diferentes λ_n son los eigenvalores del operador de densidad reducido (coeficientes de Schmidt) (Audretsch, 2007).

El número de Schmidt se define como:

$$K \equiv \frac{1}{Tr[\rho_A^2]} \equiv \frac{1}{Tr[\rho_B^2]} \equiv \frac{1}{\sum_n \lambda_n^2}, \quad (12)$$

donde ρ_A y ρ_B son los operadores de densidad reducidos de los sistemas A y B respectivamente. Si $\rho_{AB} \equiv |\psi^{AB}\rangle\langle\psi^{AB}|$, entonces:

$$\rho_A \equiv Tr_B[\rho_{AB}] = \sum_B \langle B | \rho_{AB} | B \rangle \quad y \quad \rho_B \equiv Tr_A[\rho_{AB}] = \sum_A \langle A | \rho_{AB} | A \rangle. \quad (13)$$

Tanto el operador de densidad, como los operadores de densidad reducidos, deben cumplir siempre la condición de positividad (que todos sus eigenvalores sean positivos) y que su traza sea uno (debido a las condiciones de ortonormalidad). (Audretsch, 2007) (Eberly, 2006)

Operativamente, este análisis puede realizarse para cualquier sistema $\mathcal{H}^{M \times N}$ a partir de la expresión del vector de estado en términos de las bases individuales de cada uno de los subsistemas M y N, que puede escribirse como sigue (Eberly, 2006):

$$|\Psi_{MN}\rangle = \sum_M \sum_N C(M, N) |M\rangle \otimes |N\rangle, \quad (14)$$

donde $|M\rangle$ y $|N\rangle$ son los estados de cada subsistema y $C(M, N)$ es la amplitud de probabilidad y representa elementos de una matriz \mathcal{C} :

$$C(M, N) \equiv \langle M | \mathcal{C} | N \rangle. \quad (15)$$

El operador de densidad reducido en M o en N puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\rho_{MN} \equiv |\Psi_{MN}\rangle\langle\Psi_{MN}|, \quad (16)$$

$$\rho_M \equiv \text{Tr}_N[\rho_{MN}] = \sum_N \langle N | \rho_{MN} | N \rangle, \quad (17)$$

utilizando en la ecuación (17) las definiciones (15) y (16) y sustituyendo (14) obtenemos:

$$\rho_M = \mathcal{C}\mathcal{C}^\dagger. \quad (18)$$

Y análogamente:

$$\rho_N = \mathcal{C}^\dagger\mathcal{C}. \quad (19)$$

A partir de estas expresiones puede calcularse directamente el número de Schmidt.

El rango del número de Schmidt puede ir desde uno hasta la dimensionalidad del subsistema menor ("D"). El valor de uno indica que se trata de un sistema no entrelazado, ya que solamente un estado participa en la expresión de Schmidt, es decir, solamente un eigenvalor del operador de densidad reducido es uno y los demás son cero. El valor "D" indica que el sistema está máximamente entrelazado, pues participan los "D" estados posibles en la expresión de Schmidt con el mismo peso, ya que para alcanzar el valor "D" es necesario que todos los eigenvalores del operador de densidad reducido sean iguales. (Audretsch, 2007) (Eberly, 2006)

En los sistemas en los que "M" vale tres, los sistemas $\mathcal{H}^{3 \times N}$ (asumiendo que N es mayor que tres) es posible que exista entrelazamiento en el que participen dos de los tres estados "M" y en el que participen los tres estados "M". En este caso el rango del número de Schmidt sería de uno a tres con un valor intermedio de dos

para el caso de solamente dos estados “M” participando. Esto se muestra en las siguientes expresiones:

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \rightarrow K = \frac{1}{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (1/3)^2} = 3, \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow K = \frac{1}{(1/2)^2 + (1/2)^2} = 2, \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow K = 1, \quad (22)$$

donde las expresiones (20) y (21) presentan los casos de máximo entrelazamiento para M=3 y M=2 estados participantes respectivamente y la expresión (22) presenta el caso para entrelazamiento nulo.

3.2 Vector de Bloch

Cualquier operador de densidad puede ser representado por una base de matrices ortogonales, con traza cero y Hermitianas. Para el caso de sistemas con simetría SU(2), esta base es (Audretsch, 2007):

$$\rho = \frac{1}{2}(I_2 + \vec{s}\vec{\sigma}), \quad (23)$$

en donde el vector de Bloch se define como:

$$\vec{s} \equiv s_x \hat{e}_x + s_y \hat{e}_y + s_z \hat{e}_z, \quad (24)$$

y al vector $\vec{\sigma} = \sigma_x \hat{e}_x + \sigma_y \hat{e}_y + \sigma_z \hat{e}_z$ lo conforman las matrices de Pauli:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Cualquier operador de densidad para estos sistemas puede ser escrito en términos de los componentes de este vector (Ekert & Knight, 1994):

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + s_z & s_x + is_y \\ s_x - is_y & 1 - s_z \end{bmatrix}. \quad (26)$$

El vector de Bloch posee la característica de tener magnitud uno cuando se trata de estados puros (no entrelazados) y magnitud menor a uno para estados mixtos (estados entrelazados). Para sistemas de dos estados es una herramienta muy útil, ya que permite visualizar el comportamiento del sistema compuesto de una forma sencilla en la esfera de Bloch y su magnitud puede verse como una medida de entrelazamiento (Audretsch, 2007) (Ekert & Knight, 1994).

Los eigenvalores de esta matriz contienen la información sobre el grado de entrelazamiento de los sistemas de 2x2, y pueden ser expresados en términos de los componentes del vector de Bloch (Ekert & Knight, 1994):

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}[1 + |\vec{s}|], \quad (27)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}[1 - |\vec{s}|]. \quad (28)$$

Y se puede ver claramente cómo la magnitud del vector de Bloch ofrece una medida sobre el grado de entrelazamiento del sistema. Si su magnitud es uno, entonces $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 0$, correspondiendo a un sistema no entrelazado; pero si su magnitud es cero, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$, correspondiendo a un sistema máximamente entrelazado.

Para el caso de sistemas $\mathcal{H}^{M \times N}$ en donde "M"=3, la matriz de densidad reducida tendrá una simetría SU(3). Es posible, entonces, formar una base con las matrices de Gell-Mann (29) (y la matriz identidad de 3x3). (Byrd & Khaneja, 2003)

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \hat{\lambda}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \hat{\lambda}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{\lambda}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} & \hat{\lambda}_5 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \hat{\lambda}_6 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{\lambda}_7 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \hat{\lambda}_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (29)$$

En este trabajo buscaremos encontrar una representación para sistemas con simetría SU(3) análoga a la existente para simetrías SU(2).

Es importante mencionar algunas propiedades de las matrices de Gell-Mann:

$$\text{Tr}[\hat{\lambda}_m] = 0, \quad (30)$$

$$\text{Tr}[\hat{\lambda}_m \hat{\lambda}_n] = 2\delta_{m,n}. \quad (31)$$

Capítulo 4. Transbordador de triple punto cuántico

En este capítulo se presenta el marco teórico del sistema en el cual se estudiará el fenómeno de entrelazamiento híbrido en \mathcal{H}^{3xN} . El sistema, un transbordador de triple punto cuántico, se estudió primeramente por Armour y MacKinnon en 2002 y por Donarini en 2004 desde una perspectiva mecánico-cuántica con énfasis en las propiedades de transporte electrónico. Posteriormente (Maldonado, 2011) (Villavicencio, et al., 2008) (Villavicencio, et al., 2011), se realizó una derivación alternativa a los trabajos anteriores para incluir la influencia de un campo eléctrico oscilante. Es esta derivación alternativa la que se presenta en este trabajo y, cabe mencionar, que el estudio se realiza para el caso de un sistema cerrado.

4.1 Transbordador de triple punto cuántico sin campo AC

El transbordador de triple punto cuántico que se presenta en este trabajo es el introducido en 2002 por Armour y MacKinnon (Armour & MacKinnon, 2002) (Maldonado, 2011) (Villavicencio, et al., 2008) (Villavicencio, et al., 2011). Este sistema consiste en un arreglo de tres puntos cuánticos con un solo electrón en el régimen de bloqueo de Coulomb, con un estado en cada punto cuántico y con el punto central móvil, como se muestra en la figura 2.

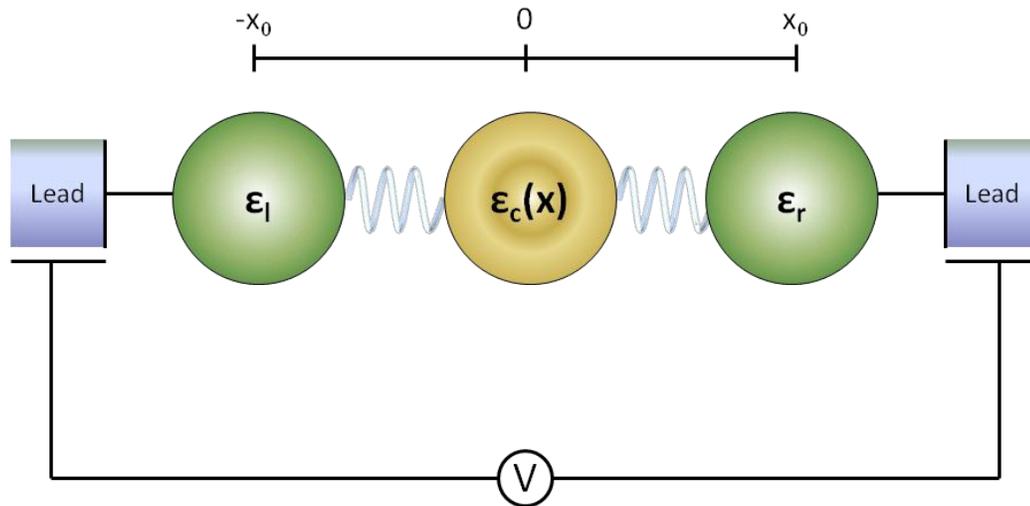


Figura 2: Transbordador de triple punto cuántico. El punto central oscilante está flanqueado por dos puntos fijos acoplados a contactos. La diferencia de potencial está dado por $eV = \epsilon_b \equiv \epsilon_l - \epsilon_r$.

ϵ_l , ϵ_c y ϵ_r son, respectivamente, las energías de los estados electrónicos $|l\rangle$, $|c\rangle$ y $|r\rangle$ de los puntos cuánticos izquierdo, central y derecho. El voltaje a través del sistema (V) se define como la diferencia de energías entre los puntos cuánticos izquierdo y derecho:

$$eV = \epsilon_b \equiv \epsilon_l - \epsilon_r. \quad (32)$$

La energía del punto central se deriva suponiendo que se encuentra entre los valores de ϵ_l y ϵ_r y que, en medio de éstas, existe un corrimiento Stark proporcional a la posición, así:

$$\epsilon_c(x) = \epsilon_l - \frac{\epsilon_b}{2x_0}(x + x_0). \quad (33)$$

El sistema se modela con el Hamiltoniano:

$$H_{TDQS} = H_0 + H_{osc} + H_{tun}. \quad (34)$$

Cada elemento de este Hamiltoniano se explicará a continuación, teniendo como base a los estados electrónicos de los puntos cuánticos $\{|l\rangle, |c\rangle, |r\rangle\}$, en donde $|l\rangle$ representa el estado electrónico del punto cuántico izquierdo, $|c\rangle$ el estado electrónico del punto cuántico central y $|r\rangle$ el estado electrónico del punto cuántico derecho.

$$H_0 = \varepsilon_l |l\rangle\langle l| + \varepsilon_c(x) |c\rangle\langle c| + \varepsilon_r |r\rangle\langle r|. \quad (35)$$

Aquí, H_0 representa el Hamiltoniano de los tres puntos cuánticos.

$$H_{osc} = \hbar\omega d^\dagger d. \quad (36)$$

H_{osc} describe la energía asociada al punto cuántico central debido a sus oscilaciones con frecuencia ω . d^\dagger y d son operadores de creación y aniquilación para fonones.

$$H_{tun} = T_l(x)[|l\rangle\langle c| + |c\rangle\langle l|] + T_r(x)[|c\rangle\langle r| + |r\rangle\langle c|]. \quad (37)$$

H_{tun} representa la energía debida al tuneo entre los tres puntos cuánticos que depende de la posición. Los puntos izquierdo y derecho están fijos a las posiciones $-x_0$ y x_0 . Como el punto central depende de la posición, entonces las amplitudes de tuneo T_l y T_r también dependerán de la posición.

Las amplitudes de tuneo están dadas por:

$$T_l = -V_0 e^{-\alpha(x_0+x)}, \quad (38)$$

$$T_r = -V_0 e^{-\alpha(x_0-x)}, \quad (39)$$

donde V_0 y α son la amplitud de tuneleo y la inversa de la longitud de tuneleo respectivamente. El operador de posición (x) está dado por:

$$x = \Delta x_{zp}(d^\dagger + d), \quad (40)$$

donde Δx_{zp} es el desplazamiento de punto cero en el oscilador armónico:

$$\Delta x_{zp} = \sqrt{\hbar/2m\omega}. \quad (41)$$

Matricialmente, este Hamiltoniano se representa de la siguiente manera:

$$H_{TDQS} = \begin{bmatrix} \langle l|H_{TDQS}|l\rangle & \langle l|H_{TDQS}|c\rangle & \langle l|H_{TDQS}|r\rangle \\ \langle c|H_{TDQS}|l\rangle & \langle c|H_{TDQS}|c\rangle & \langle c|H_{TDQS}|r\rangle \\ \langle r|H_{TDQS}|l\rangle & \langle r|H_{TDQS}|c\rangle & \langle r|H_{TDQS}|r\rangle \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Finalmente, podemos obtener una representación en la base compuesta estados electrónicos/modos de oscilación:

$$H_{TDQS}^{mn} = \langle m|H_{TDQS}|n\rangle = \begin{bmatrix} \langle m,l|H_{TDQS}|l,n\rangle & \langle m,l|H_{TDQS}|c,n\rangle & \langle m,l|H_{TDQS}|r,n\rangle \\ \langle m,c|H_{TDQS}|l,n\rangle & \langle m,c|H_{TDQS}|c,n\rangle & \langle m,c|H_{TDQS}|r,n\rangle \\ \langle m,r|H_{TDQS}|l,n\rangle & \langle m,r|H_{TDQS}|c,n\rangle & \langle m,r|H_{TDQS}|r,n\rangle \end{bmatrix}, \quad (43)$$

donde m y n son modos de oscilación. Explícitamente, los elementos de matriz resultantes son (Maldonado, 2011):

$$\langle m,l|H_{TDQS}|l,n\rangle = (\varepsilon_l + n\hbar\omega)\delta_{m,n}, \quad (44)$$

$$\langle m, r | H_{TDQS} | r, n \rangle = (\varepsilon_r + n\hbar\omega) \delta_{m,n}, \quad (45)$$

$$\langle m, c | H_{TDQS} | c, n \rangle = \left(\varepsilon_l - \frac{\varepsilon_b}{2} + n\hbar\omega \right) \delta_{m,n} - \Delta x_{zp} \frac{\varepsilon_b}{2x_0} (\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} + \sqrt{n} \delta_{m,n-1}) \quad (46)$$

$$\langle m, l | H_{TDQS} | c, n \rangle = \langle m, c | H_{TDQS} | l, n \rangle = T_l^{mn}(x), \quad (47)$$

$$\langle m, c | H_{TDQS} | r, n \rangle = \langle m, r | H_{TDQS} | c, n \rangle = T_r^{mn}(x), \quad (48)$$

$$\langle m, l | H_{TDQS} | r, n \rangle = \langle m, r | H_{TDQS} | l, n \rangle = 0. \quad (49)$$

Los elementos de matriz de tuneleo $T_l^{mn}(x)$ y $T_r^{mn}(x)$ para $m \geq n$ se obtienen con la expresión (Villavicencio, et al., 2011) (Maldonado, 2011):

$$T_l^{mn}(x) = \langle m | T_l(x) | n \rangle = -V [2^{n-m} m! n!]^{1/2} e^{-\alpha x_0} e^{\left(\frac{\hbar\alpha^2}{4m\omega}\right)} \left[-\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right]^{m-n} \sum_{k=0}^n \frac{\left[\alpha \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \right]^{2k}}{2^k k! (k+m-n)! (n-k)!} \quad (50)$$

los elementos $\langle m | T_r(x) | n \rangle$ son calculados a partir de la relación:

$$T_l^{mn}(x) = (-1)^{m-n} T_r^{mn}(x), \quad (51)$$

y para el cálculo de los elementos en los que $m < n$ basta con explotar la hermiticidad de los operadores.

4.2 Dinámica cuántica del TDQS

Cada eigenvector del TDQS en estado estacionario puede representarse como:

$$|\phi_v\rangle = \sum_n (L_{vn}|l, n\rangle + C_{vn}|c, n\rangle + R_{vn}|r, n\rangle), \quad (52)$$

en donde v indica un eigenvector particular y los coeficientes L_{vn} , C_{vn} y R_{vn} son amplitudes de probabilidad de encontrar al sistema en el sitio $|l, n\rangle$, $|c, n\rangle$ y $|r, n\rangle$ respectivamente en el eigenestado v .

Entonces, la dinámica del sistema puede ser representada mediante la superposición de todos los eigenestados del sistema:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_v |\phi_v\rangle e^{\frac{-iE_v t}{\hbar}}, \quad (53)$$

en donde v incluye al estado base y a todos los estados excitados del TDQS en estado estacionario.

Como ejemplo particular, analicemos el caso de una mezcla de eigenestados. La evolución de una mezcla 50-50 de dos eigenestados cualesquiera está dada por:

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi_m\rangle e^{-iE_m t/\hbar} + |\phi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} \right), \quad (54)$$

donde $|\phi_m\rangle$ y $|\phi_n\rangle$ son dos eigenestados de (34) y E_m y E_n las respectivas eigenenergías. La frecuencia natural de esta mezcla viene dada por:

$$\omega_s = \frac{E_n - E_m}{\hbar}, \quad (55)$$

con periodo:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_s}. \quad (56)$$

4.3 Transbordador de triple punto cuántico bajo el efecto de un campo AC

Se considera un potencial dependiente del tiempo y también periódico actuando como una oscilación de fase opuesta en los niveles de energía de los puntos cuánticos izquierdo y derecho, como se muestra en la figura 3 (Maldonado, 2011):

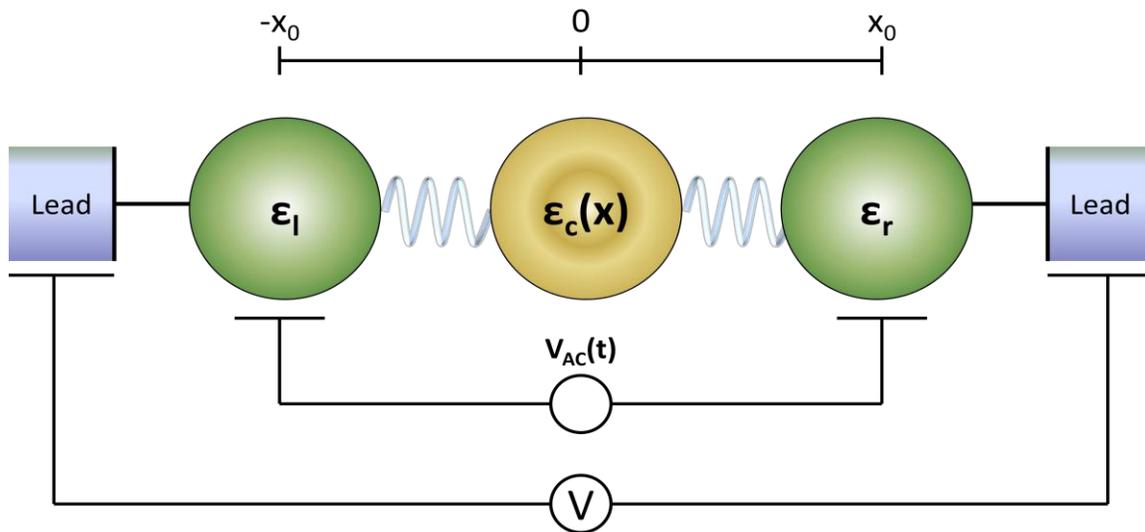


Figura 3: Transbordador de triple punto cuántico bajo la acción de un potencial periódico AC. El punto central oscilante está flanqueado por dos puntos fijos acoplados a contactos. La diferencia de potencial está dado por $eV = \epsilon_b \equiv \epsilon_l - \epsilon_r$

La modificación al sistema viene dada por un Hamiltoniano que considera los efectos del potencial AC (Maldonado, 2011) (Villavicencio, et al., 2011):

$$H_{AC}(t) = \frac{V_{AC}}{2} \cos\left(\frac{\omega_{AC}t}{2}\right) [|l\rangle\langle l| - |r\rangle\langle r|], \quad (57)$$

donde V_{AC} es la amplitud y ω_{AC} es la frecuencia del potencial aplicado. La representación matricial de este Hamiltoniano periódico viene dada por:

$$H_{AC}^{mn}(t) = \begin{bmatrix} \langle m, l | H_{AC}(t) | l, n \rangle & \langle m, l | H_{AC}(t) | c, n \rangle & \langle m, l | H_{AC}(t) | r, n \rangle \\ \langle m, c | H_{AC}(t) | l, n \rangle & \langle m, c | H_{AC}(t) | c, n \rangle & \langle m, c | H_{AC}(t) | r, n \rangle \\ \langle m, r | H_{AC}(t) | l, n \rangle & \langle m, r | H_{AC}(t) | c, n \rangle & \langle m, r | H_{AC}(t) | r, n \rangle \end{bmatrix}, \quad (58)$$

en donde:

$$\langle m, l | H_{AC}(t) | l, n \rangle = \frac{V_{AC}}{2} \cos\left(\frac{\omega_{AC}t}{2}\right) \delta_{m,n}, \quad (59)$$

$$\langle m, r | H_{AC}(t) | r, n \rangle = -\frac{V_{AC}}{2} \cos\left(\frac{\omega_{AC}t}{2}\right) \delta_{m,n}, \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \langle m, l | H_{AC}(t) | c, n \rangle &= \langle m, l | H_{AC}(t) | r, n \rangle = \langle m, c | H_{AC}(t) | l, n \rangle = \langle m, c | H_{AC}(t) | c, n \rangle = \\ &= \langle m, c | H_{AC}(t) | r, n \rangle = \langle m, r | H_{AC}(t) | l, n \rangle = \langle m, r | H_{AC}(t) | c, n \rangle = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

De tal forma que el Hamiltoniano total que describe al sistema es (Maldonado, 2011):

$$H(t) = H_{TDQS} + H_{AC}(t). \quad (62)$$

La descripción de la dinámica temporal del sistema viene dada por la ecuación de Shrödinger dependiente del tiempo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H(t)\psi(t). \quad (63)$$

Podemos expandir la solución dependiente del tiempo $|\psi(t)\rangle$ en términos de la base de estados electrónicos/modos de oscilación:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n (L_n(t)|l, n\rangle + C_n(t)|c, n\rangle + R_n(t)|r, n\rangle), \quad (64)$$

donde $L_n(t)$, $C_n(t)$ y $R_n(t)$ son coeficientes dependientes del tiempo con la información de la probabilidad de ocupación de los estados $|l, n\rangle$, $|c, n\rangle$ y $|r, n\rangle$ respectivamente.

La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para nuestro sistema es, entonces:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \left(H_{TDQS} + H_{AC}(t) \right) |\psi(t)\rangle. \quad (65)$$

Sustituyendo (64) en (65) obtenemos un sistema de ecuaciones que será resuelto con el método Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) (descrito en el apéndice C) a partir de una condición inicial.

4.4 Destrucción coherente de tuneleo

El TDQS en presencia de un potencial AC periódico ha sido estudiado desde un enfoque complementario, utilizando una transformación unitaria con la finalidad de demostrar que la corriente electrónica que en el TDQS está asociada con la emisión o absorción de ν fotones (Maldonado, 2011) (Villavicencio, et al., 2008). Esta transformación permite que la dependencia temporal del potencial AC se transfiera a los elementos de tuneleo en los puntos cuánticos, que quedarán pesados por funciones de Bessel de orden ν (Maldonado, 2011).

La transformación unitaria está dada por:

$$\hat{U} = e^{\left\{-i\frac{V_{AC}}{\omega_{AC}} \sin\left(\frac{\omega_{AC}}{2} t\right) [|l\rangle\langle l| - |r\rangle\langle r|]\right\}}, \quad (66)$$

aplicando la transformación tenemos que:

$$\hat{U}^\dagger H_{TDQS} \hat{U} = H'_{TDQS} = H'_0 + H'_{osc} + H'_{Tun}. \quad (67)$$

H_0 y H_{osc} son invariantes ante esta transformación, pero H_{Tun} no lo es. Mediante el desarrollo seguido por Maldonado Sánchez en 2011 podemos escribir (Maldonado, 2011):

$$H'_{Tun} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} (-1)^v J_v(\xi) \left\{ T_l(x) \left[|l\rangle\langle c| + |c\rangle\langle l| e^{\frac{-i\omega_{AC} vt}{2}} \right] + T_r(x) \left[|r\rangle\langle c| + |c\rangle\langle r| e^{\frac{\pm i\omega_{AC} vt}{2}} \right] \right\}, \quad (68)$$

en donde $J_v(\xi)$ es una función de Bessel de orden v evaluada en el parámetro $\xi = \frac{V_{AC}}{2\omega_{AC}}$. Los elementos de tuneleo se renormalizan entonces de la siguiente manera (Maldonado, 2011):

$$\tilde{T}_l \sim \sum_v (-1)^v J_v(\xi) T_l(x) e^{\frac{\pm i\omega_{AC}}{2}}, \quad (69)$$

$$\tilde{T}_r \sim \sum_v (-1)^v J_v(\xi) T_r(x) e^{\frac{\pm i\omega_{AC} vt}{2}}, \quad (70)$$

en donde el producto $J_v(\xi) T_{l,r}(x)$ es la amplitud de probabilidad de tuneleo entre los puntos cuánticos. La condición de destrucción coherente de tuneleo (CDT, por sus siglas en inglés) consiste en elegir el parámetro ξ de tal forma que corresponda a un cero de la función de Bessel. En este caso, como lo muestran las ecuaciones (69) y (70), el tuneleo queda suprimido o “se destruye”. Así, la corriente electrónica puede ser suprimida mediante el ajuste de los parámetros del potencial AC.

En este trabajo nos interesa estudiar el efecto del CDT tanto en el grado como en la forma del entrelazamiento de los diferentes estados participantes.

Capítulo 5. Propiedades calculadas

En este capítulo se presentan los procedimientos seguidos para obtener, explícitamente, las expresiones para el número de Schmidt y el vector de Bloch. Estas expresiones se utilizaron para obtener los resultados numéricos que se presentan en el capítulo siguiente.

Adicionalmente, se establece una relación entre el número de Schmidt y el vector de Bloch. Esto con la finalidad de cumplir con uno de los objetivos de este trabajo, que es encontrar relaciones del entrelazamiento con propiedades físicas medibles.

5.1 Expresiones para el número de Schmidt

La función de onda del sistema se expresa de la siguiente manera:

$$|\Psi_{MN}\rangle = \sum_n (L_n |l, n\rangle + C_n |c, n\rangle + R_n |r, n\rangle), \quad (71)$$

en donde el coeficiente M representa los estados electrónicos de los puntos cuánticos, $M = l, c, r$, y N a los modos de oscilación, $N = 0, 1, 2, \dots$; los coeficientes L_n , C_n y R_n son la amplitud de la probabilidad de encontrar al sistema en el estado $|l, n\rangle$, $|c, n\rangle$ o $|r, n\rangle$ respectivamente. De tal forma que el operador de densidad del sistema queda como:

$$\rho = |\Psi_{MN}\rangle\langle\Psi_{MN}| = \sum_{nn'} (L_n |l, n\rangle + C_n |c, n\rangle + R_n |r, n\rangle)(L_{n'}^* \langle l, n'| + C_{n'}^* \langle c, n'| + R_{n'}^* \langle r, n'|), \quad (72)$$

$$\rho = \sum_{nn'} (L_n L_{n'}^* |l, n\rangle\langle l, n'| + L_n C_{n'}^* |l, n\rangle\langle c, n'| + L_n R_{n'}^* |l, n\rangle\langle r, n'| + \dots). \quad (73)$$

Para obtener la matriz de densidad reducida de los estados electrónicos de los tres puntos cuánticos l , c y r , aplicaremos la traza parcial sobre los N modos de oscilación:

$$\rho_{red} = Tr_N[\rho] = \sum_n \langle n | \rho | n \rangle = \begin{bmatrix} \sum_n |L_n|^2 & \sum_n L_n C_n^* & \sum_n L_n R_n^* \\ \sum_n C_n L_n^* & \sum_n |C_n|^2 & \sum_n C_n R_n^* \\ \sum_n R_n L_n^* & \sum_n R_n C_n^* & \sum_n |R_n|^2 \end{bmatrix}, \quad (74)$$

donde la condición de ortogonalidad $\langle n' | n \rangle = \delta_{n,n'}$ aplica.

Para ver cómo se llega a este resultado de una forma más clara, podemos seguir el procedimiento sugerido en la ecuación (18) de la sección III.1. La matriz \mathcal{C} de la ecuación (15) es calculada a partir de los coeficientes L , C y R de la siguiente manera.

$$\mathcal{C}(l, n) = L_n, \quad \mathcal{C}(c, n) = C_n \quad \text{y} \quad \mathcal{C}(r, n) = R_n. \quad (75)$$

Entonces, la matriz \mathcal{C} es:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} L_0 & L_1 & \dots & L_N \\ C_0 & C_1 & \dots & C_N \\ R_0 & R_1 & \dots & R_N \end{bmatrix}, \quad (76)$$

y,

$$\mathcal{C}^\dagger = \begin{bmatrix} L_0^* & C_0^* & R_0^* \\ L_1^* & C_1^* & R_1^* \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ L_N^* & C_N^* & R_N^* \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Y así, la matriz reducida es:

$$\rho_{red} = C^\dagger C = \begin{bmatrix} \sum_n |L_n|^2 & \sum_n L_n C_n^* & \sum_n L_n R_n^* \\ \sum_n C_n L_n^* & \sum_n |C_n|^2 & \sum_n C_n R_n^* \\ \sum_n R_n L_n^* & \sum_n R_n C_n^* & \sum_n |R_n|^2 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

A partir de ρ_{red} , el número de Schmidt puede ser calculado según la ecuación (12):

$$K \equiv \frac{1}{Tr[\rho_A^2]} \equiv \frac{1}{Tr[\rho_B^2]} \equiv \frac{1}{\sum_n \lambda_n^2},$$

donde las λ_n son los eigenvalores de la matriz de densidad reducida.

5.2 Expresiones para el vector de Bloch

Utilizando la base formada por las matrices de Gell-Mann (ver sección III.2), el vector de Bloch para la simetría SU(3) se define de la siguiente manera:

$$\vec{s} \equiv s_1 \hat{e}_1 + s_2 \hat{e}_2 + s_3 \hat{e}_3 + s_4 \hat{e}_4 + s_5 \hat{e}_5 + s_6 \hat{e}_6 + s_7 \hat{e}_7 + s_8 \hat{e}_8, \quad (79)$$

$$\vec{s} \equiv \frac{\sqrt{3}}{2} Tr [\rho_{red} \vec{\lambda}], \quad (80)$$

donde:

$$\vec{\lambda} \equiv \hat{\lambda}_1 \hat{e}_1 + \hat{\lambda}_2 \hat{e}_2 + \hat{\lambda}_3 \hat{e}_3 + \hat{\lambda}_4 \hat{e}_4 + \hat{\lambda}_5 \hat{e}_5 + \hat{\lambda}_6 \hat{e}_6 + \hat{\lambda}_7 \hat{e}_7 + \hat{\lambda}_8 \hat{e}_8. \quad (81)$$

Análogamente a los sistemas de 2x2, cualquier operador de densidad en un sistema de MxM puede ser escrito en términos de una base que describa la simetría SU(M) (Byrd & Khaneja, 2003):

$$\rho_{red} \equiv \frac{1}{M} \left(I_M + \sqrt{\frac{M(M-1)}{2}} \vec{s} \cdot \vec{\hat{\lambda}} \right), \quad (82)$$

Para sistemas de 3x3 (M=3):

$$\rho_{red} \equiv \frac{1}{3} \left(I_3 + \sqrt{3} \vec{s} \cdot \vec{\hat{\lambda}} \right). \quad (83)$$

El operador de densidad reducido en N para cualquier sistema de 3xN será una matriz de 3x3 como la obtenida en (74) y (78):

$$\rho_{red} = \begin{bmatrix} \sum_N |L_N|^2 & \sum_N L_N C_N^* & \sum_N L_N R_N^* \\ \sum_N C_N L_N^* & \sum_N |C_N|^2 & \sum_N C_N R_N^* \\ \sum_N R_N L_N^* & \sum_N R_N C_N^* & \sum_N |R_N|^2 \end{bmatrix}, \quad (84)$$

donde los coeficientes L_N , C_N y R_N están directamente relacionados con parámetros físicos del sistema.

Utilizando las matrices (29) y las ecuaciones (79), (80) y (81) en la ecuación (83), obtenemos:

$$\rho_{red} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{3}s_3 + s_8 & \sqrt{3}(s_1 - is_2) & \sqrt{3}(s_7 - is_4) \\ \sqrt{3}(s_1 + is_2) & 1 - \sqrt{3}s_3 + s_8 & \sqrt{3}(s_5 - is_6) \\ \sqrt{3}(s_7 + is_4) & \sqrt{3}(s_5 + is_6) & 1 - 2s_8 \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Comparando las matrices (84) y (85) es posible determinar los coeficientes del vector de Bloch en función de los coeficientes L_N , C_N y R_N , es decir, en función de los parámetros del sistema. Tratamientos similares se han hecho en estudios de sistemas de 2x2 (Ekert et al. 1994). Las expresiones resultantes son:

$$s_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N L_N C_N^* + \sum_N C_N L_N^*), \quad s_2 = i \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N L_N C_N^* - \sum_N C_N L_N^*),$$

$$\begin{aligned}
s_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N |L_N|^2 - \sum_N |C_N|^2), & s_4 &= i \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N L_N R_N^* - \sum_N R_N L_N^*), & (86) \\
s_5 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N C_N R_N^* + \sum_N R_N C_N^*), & s_6 &= i \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N C_N R_N^* - \sum_N R_N C_N^*), \\
s_7 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N L_N R_N^* + \sum_N R_N L_N^*), & s_8 &= \frac{1}{2} (1 - 3 \sum_N |R_N|^2).
\end{aligned}$$

Para el caso particular en el que todos los coeficientes L_N, C_N y R_N sean reales, o que $L_N C_N^* = C_N L_N^*$, $L_N R_N = R_N L_N^*$ y $C_N R_N^* = R_N C_N^*$, los resultados de (86) se reducen a:

$$s_2 = s_4 = s_6 = 0; \quad s_1 = \sqrt{3} \sum_N L_N C_N; \quad s_5 = \sum_N C_N R_N; \quad s_7 = \sqrt{3} \sum_N L_N R_N. \quad (87)$$

El polinomio característico de la matriz (85) da como resultado:

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (88)$$

en donde:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = \frac{1}{3} (1 - |\vec{s}|^2), \quad (89)$$

$$a_3 = \frac{1}{9} |\vec{s}|^2 - \frac{1}{27} + \frac{s_3 s_5^2}{3\sqrt{3}} - \frac{2s_1 s_5 s_7}{3\sqrt{3}} - \frac{s_3 s_7^2}{3\sqrt{3}} - \frac{2s_1^2 s_8}{9} - \frac{2s_3^2 s_8}{9} + \frac{s_5^2 s_8}{9} + \frac{s_7^2 s_8}{9} + \frac{2s_8^3}{27}, \quad (90)$$

y,

$$|\vec{s}|^2 = |s_1|^2 + |s_2|^2 + |s_3|^2 + |s_4|^2 + |s_5|^2 + |s_6|^2 + |s_7|^2 + |s_8|^2. \quad (91)$$

Resolviendo la ecuación (88) se obtienen tres eigenvalores que siempre son reales y positivos (aunque por complejidad algebraica no puede expresarse explícitamente):

$$Z_1 \equiv (2 - 9a_2 - 27a_3), \quad Z_2 \equiv (a_1 + 3a_2), \quad (92)$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} + \left\{ \frac{1}{54}(Z_1) - \sqrt{\frac{1}{729}(Z_2)^3 + \frac{1}{2916}(Z_1)^2} \right\}^{1/3} + \left\{ \frac{1}{54}(Z_1) + \sqrt{\frac{1}{729}(Z_2)^3 + \frac{1}{2916}(Z_1)^2} \right\}^{1/3} \quad (93)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{1}{54}(Z_1) - \sqrt{\frac{1}{729}(Z_2)^3 + \frac{1}{2916}(Z_1)^2} \right\}^{1/3} + \left\{ \frac{1}{54}(Z_1) + \sqrt{\frac{1}{729}(Z_2)^3 + \frac{1}{2916}(Z_1)^2} \right\}^{1/3} \right] + \frac{i\sqrt{3}}{2} \left[- \left\{ \frac{1}{54}(Z_1) - \sqrt{\frac{1}{729}(Z_2)^3 + \frac{1}{2916}(Z_1)^2} \right\}^{1/3} + \left\{ \frac{1}{54}(Z_1) + \sqrt{\frac{1}{729}(Z_2)^3 + \frac{1}{2916}(Z_1)^2} \right\}^{1/3} \right] \quad (94)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{1}{54}(Z_1) - \sqrt{\frac{1}{729}(Z_2)^3 + \frac{1}{2916}(Z_1)^2} \right\}^{1/3} + \left\{ \frac{1}{54}(Z_1) + \sqrt{\frac{1}{729}(Z_2)^3 + \frac{1}{2916}(Z_1)^2} \right\}^{1/3} \right] - \frac{i\sqrt{3}}{2} \left[- \left\{ \frac{1}{54}(Z_1) - \sqrt{\frac{1}{729}(Z_2)^3 + \frac{1}{2916}(Z_1)^2} \right\}^{1/3} + \left\{ \frac{1}{54}(Z_1) + \sqrt{\frac{1}{729}(Z_2)^3 + \frac{1}{2916}(Z_1)^2} \right\}^{1/3} \right]. \quad (95)$$

Haciendo uso de las bien conocidas propiedades de las ecuaciones cúbicas (Spiegel, et al., 2005) y de una herramienta conocida para cuantificar el entrelazamiento (el número de Schmidt en este caso), encontramos las condiciones mostradas en la tabla 1, que deben cumplirse para cualquier sistema 3xN con coeficientes reales y el grado de entrelazamiento correspondiente.

	No entrelazados	Entrelazamiento 2xN	Entrelazamiento 3xN
a_1	-1	-1	-1
a_2	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
a_3	0	0	$-\frac{1}{27}$
$ \vec{s} $	1	$\frac{1}{2}$	0

Tabla 1: Condiciones para el vector de Bloch y coeficientes de ecuación característica respecto al fenómeno de entrelazamiento.

Estas condiciones muestran el comportamiento del sistema en función de los estados M participantes (en nuestro sistema los estados M son los estados $|l\rangle$, $|C\rangle$ y $|r\rangle$). Así, para sistemas en los que participan dos estados, el coeficiente a_3 no participa y el coeficiente a_2 alcanzará un máximo de $1/4$ siendo cero su mínimo; si participan los tres estados M, el coeficiente a_3 tendrá un rango desde cero hasta $-1/27$ de mínima a máxima participación del tercer estado respectivamente y el coeficiente a_2 podrá llegar hasta $1/3$. El coeficiente a_1 tiene un valor constante de -1 . La magnitud del vector de Bloch, $|\vec{s}|$, puede ir desde cero, para sistemas máximamente entrelazados con tres estados M participantes, hasta uno, para sistemas no entrelazados (de manera análoga a los sistemas de 2×2) y pasa por un valor intermedio de $1/2$ para entrelazamiento máximo con dos estados M participantes.

5.3 Relación entre el número de Schmidt y el vector de Bloch

Ahora encontraremos una relación entre el número de Schmidt, una medida de entrelazamiento, y el vector de Bloch, que es una observable.

Utilizando la ecuación (83), que expresa el operador de densidad reducido de 3x3 en términos de los componentes del vector de Bloch y las matrices de Gell-Mann, y la propiedad de las matrices de Gell-Mann:

$$Tr[\hat{\lambda}_m \hat{\lambda}_n] = 2\delta_{m,n}, \quad (96)$$

obtenemos lo siguiente:

$$\rho_{red}^2 = \frac{1}{9} \left[I_3 + 2\sqrt{3} \vec{s} \cdot \vec{\hat{\lambda}} + 3 (\vec{s} \cdot \vec{\hat{\lambda}})^2 \right], \quad (97)$$

$$Tr \left[(\vec{s} \cdot \vec{\hat{\lambda}})^2 \right] = 2|s_1|^2 + 2|s_2|^2 + \dots + 2|s_8|^2 = 2|\vec{s}|^2, \quad (98)$$

$$Tr [\vec{s} \cdot \vec{\hat{\lambda}}] = 0, \quad (99)$$

$$Tr[\rho_{red}^2] = \frac{1}{9} (3 + 2|\vec{s}|^2) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}|\vec{s}|^2. \quad (100)$$

Entonces, a partir de la ecuación (12):

$$K = \frac{1}{Tr[\rho_{red}^2]} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}|\vec{s}|^2}, \quad (101)$$

$$K = \frac{3}{2|\vec{s}|^2 + 1}. \quad (102)$$

Así, vemos cómo el número de Schmidt y el vector de Bloch tienen una relación Lorentziana única para todo sistema puro de $3 \times N$, independientemente de la naturaleza de los parámetros del sistema. Esta relación tiene un ancho medio al máximo medio de $1/\sqrt{2}$ (half-width at half-maximum, se hace evidente al expresar el número de Schmidt como $K \propto \frac{1}{|\bar{s}|^2 + \frac{1}{2}} = \frac{\gamma}{(x-x_0)^2 + \gamma^2}$). Graficamos esta relación en la figura 4. Puede verse cómo las propiedades presentadas en la tabla 1 se cumplen.

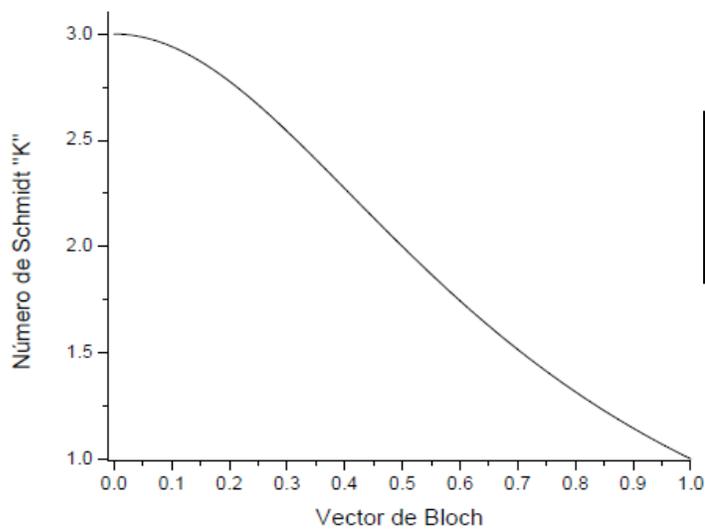


Figura 4: Número de Schmidt como función del vector de Bloch para cualquier sistema de $3 \times N$.

Capítulo 6. Resultados

En este capítulo se presentan los resultados de aplicar los formalismos y expresiones obtenidas al TDQS con y sin un potencial AC. En la sección VI.1 caracterizamos el entrelazamiento híbrido que presenta el sistema en estado estacionario, para algunos estados, mediante el número de Schmidt. También se presenta la relación cualitativa del fenómeno con la corriente electrónica del TDQS.

En la sección VI.2 se presentan los casos dinámicos. Primero, cómo evoluciona el sistema en ausencia de un potencial AC, que es el descrito en la sección IV.1, para condiciones iniciales de interés. Luego, cómo se modifica esta evolución en presencia del potencial AC presentado en la sección IV.3. Y, finalmente, veremos cómo evolucionan los estados entrelazados bajo condiciones de CDT ya explicadas en la sección IV.4. También se estudia la evolución dinámica del grado de entrelazamiento a lo largo del tiempo como función de los parámetros del TDQS (mediante un promedio temporal del número de Schmidt).

Finalmente, en la sección VI.3 se presenta la relación entre el vector de Bloch y el Número de Schmidt.

Para los cálculos que se presentan en esta sección se utilizaron las unidades $\hbar = \omega = 2m = e = 1$. Con esta selección de unidades los parámetros energéticos se dan como múltiplos de $\hbar\omega$ y los de longitud como múltiplos de Δx_{zp} . La amplitud de tuneleo para todos los casos es $V_0 = 0.5$ y la distancia entre la posición cero del punto central hasta los puntos fijos es de $x_0 = 5$.

6.1 Sistema en estado estacionario

6.1.1 Espectro de energías del TDQS sin campo AC

El espectro de energías del sistema sin campo AC, con $N=9$ estados de oscilación, para los primeros 21 eigenestados como función del voltaje ε_b se muestra en la figura 5.

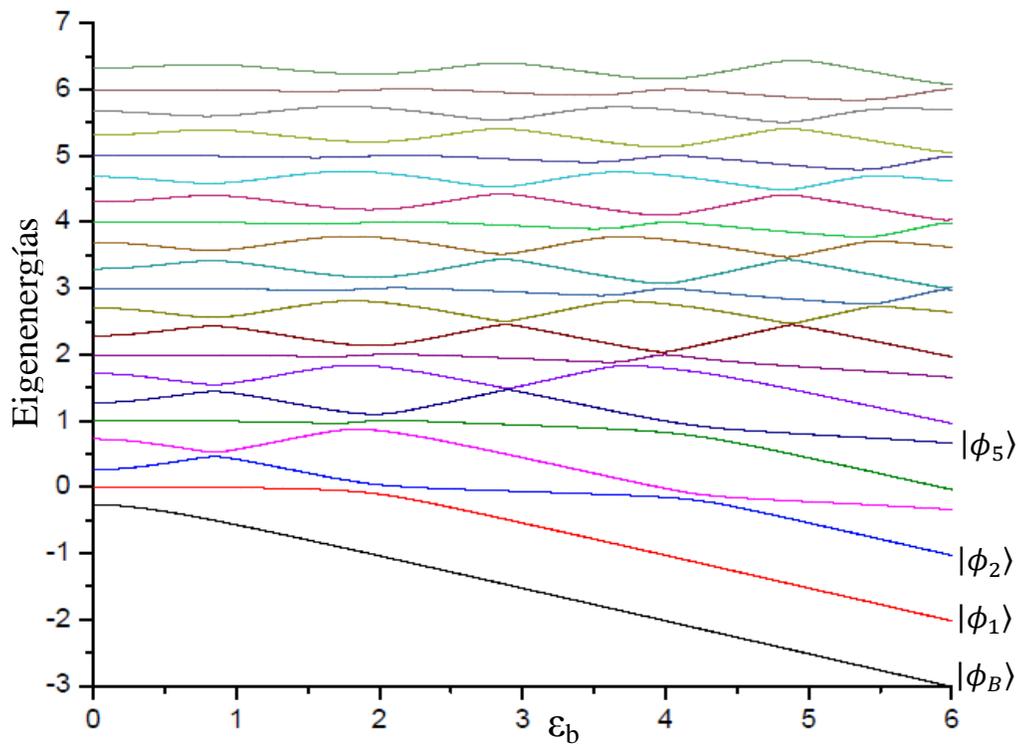


Figura 5: espectro de energías del sistema como función de ε_b en estado estacionario, $V=0.5$, $\alpha=0.2$ y nueve estados de oscilación.

En la figura 5, las curvas corresponden a los diferentes eigenestados del sistema. Se etiquetaron solamente $|\phi_B\rangle$, que corresponde al estado base, y $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$, $|\phi_5\rangle$ que corresponden al primer, segundo y quinto estados excitados, respectivamente, porque son los estados en los que analizaremos las propiedades del número de Schmidt, ya que son los estados de energías mínimas que cubren

todas las posibles formas de entrelazamiento del sistema, como se verá más adelante. Se pueden ver anti-cruces en valores específicos del voltaje ε_b . Estos anti-cruces se relacionan, como demostraremos más adelante, con el fenómeno de entrelazamiento, ya que en esas regiones es más probable que ocurran mezclas entre estados no separables que den origen al fenómeno.

6.1.2 Caracterización del entrelazamiento en el TDQS

Caracterizamos el grado de entrelazamiento en el TDQS utilizando el número de Schmidt. A partir del Hamiltoniano representado en la ecuación (43), se hizo un análisis para cada eigenestado, obteniendo así, una descripción del entrelazamiento híbrido para cada estado del sistema.

Para cada eigenestado, realizamos el tratamiento planteado en la sección V.1. Además, si tomamos los componentes $C(M,N)$ de los estados del sistema representados en la ecuación (14) (o más precisamente, de la ecuación (75)), el cálculo de $|C(M,N)|^2$ nos da la probabilidad de estar en un sitio $|M,N\rangle$ (estado electrónico, modo de oscilación).

La información sobre la probabilidad de ocupar un sitio $|M,N\rangle$ se representa en histogramas, los cuales están organizados de la siguiente manera. Los colores representan los grados de libertad electrónicos M. El azul representa el estado electrónico del punto cuántico izquierdo ($|l\rangle$), el verde corresponde al central ($|c\rangle$) y el rojo al derecho ($|r\rangle$). En el eje horizontal se informa sobre el modo de oscilación N, es decir, el otro grado de libertad. Y en el eje vertical se encuentran las probabilidades $|C(M,N)|^2$ correspondientes a cada estado electrónico/modo de oscilación. Si observamos una barra verde sobre un modo de oscilación 1, por ejemplo, el valor que leamos en el eje vertical nos informa sobre la probabilidad $|C(c,1)|^2$ de encontrar al sistema en el estado $|c,1\rangle$. Cabe añadir que *en los*

histogramas solamente se presentan los modos de oscilación de los sitios con probabilidad de ocupación significativa.

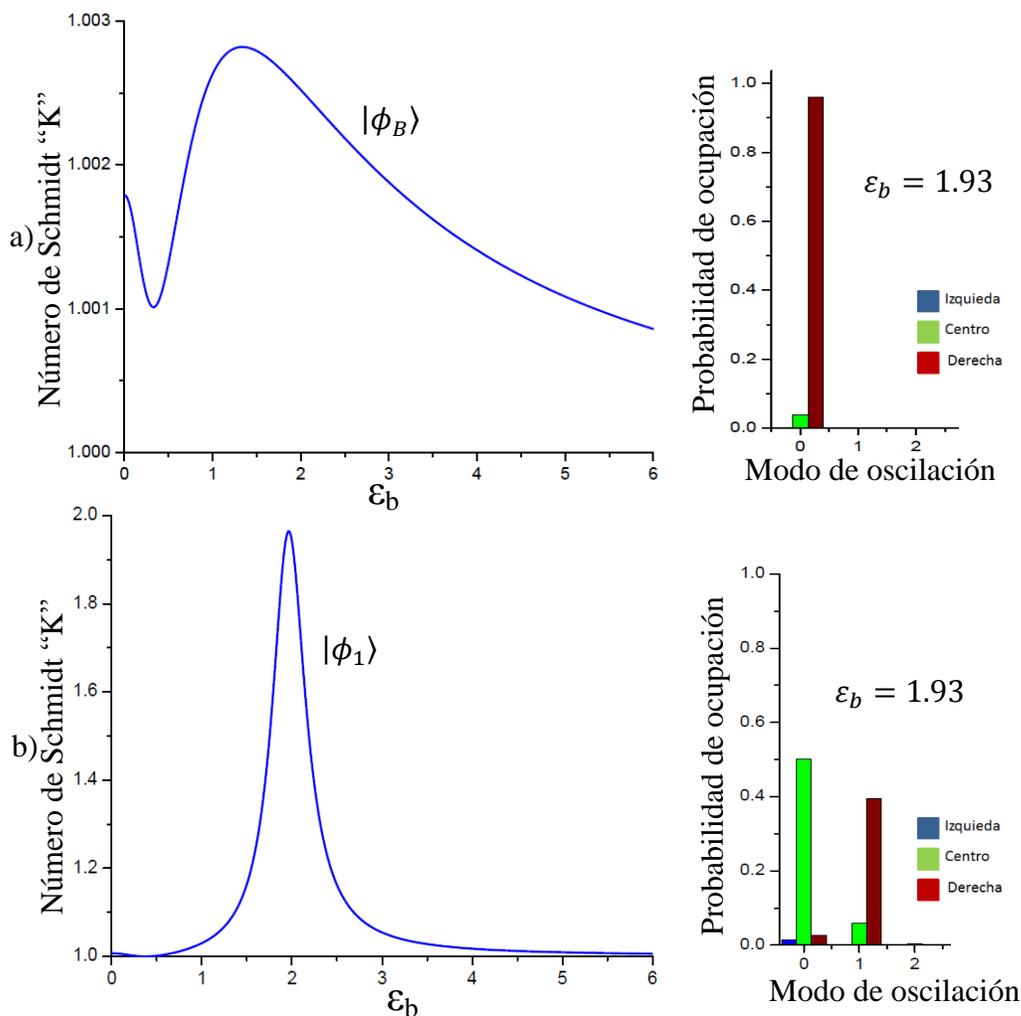


Figura 6: Número de Schmidt vs ϵ_b e histogramas de probabilidad para a) el estado base $|\phi_B\rangle$, y b) el primer estado excitado $|\phi_1\rangle$. Los histogramas en ambos casos se construyeron para un valor de $\epsilon_b=1.93$. Los otros parámetros son: $V=0.5$, $\alpha=0.2$ y $N=9$ estados de oscilación.

En la figura 6 a) vemos cómo el estado base $|\phi_B\rangle$ muestra un entrelazamiento prácticamente nulo, ya que el número de Schmidt es aproximadamente uno. El sistema se localiza en el sitio $|r,0\rangle$, como puede verse en su correspondiente

histograma. Si analizamos el estado base $|\phi_B\rangle$ en la figura 5, notaremos que no presenta ningún anti-cruce.

Comparando la figura 5, la curva correspondiente a $|\phi_1\rangle$, y la figura 6 b) notamos que, para el primer estado excitado $|\phi_1\rangle$, se alcanza un valor máximo del número de Schmidt $K=2$, y que éste corresponde a un anti-cruce del espectro de energías en $\varepsilon_b = 1.93$ y que está en la región de entrelazamiento $2 \times N$. En su histograma correspondiente se muestra la contribución de los estados $|c, 0\rangle$ y $|r, 1\rangle$ principalmente. De esta forma, el primer estado excitado adquiere en $\varepsilon_b \approx 1.93$ la forma aproximada:

$$|\phi_1\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|c, 0\rangle + |r, 1\rangle), \quad (103)$$

que corresponde a un estado de Bell (máximamente entrelazado) para un sistema de 2×2 . El estado entrelazado lo conforman estados electrónicos de puntos cuánticos vecinos y una diferencia de un modo de oscilación.

En la figura 7 mostramos la caracterización con el número de Schmidt para el segundo estado excitado $|\phi_2\rangle$. Este estado resulta interesante porque es el primero en el que aparecen tres valores máximos del número de Schmidt (todos cercanos a $K=2$) a distintos valores de ε_b que, como veremos más adelante, coinciden con máximos en la intensidad de la corriente electrónica. El análisis del segundo estado excitado, aproximado a estados de máximo entrelazamiento para sistemas de 2×2 , para los distintos valores de ε_b arroja las siguientes formas:

$$|\phi_2\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|l, 0\rangle - |r, 1\rangle) \quad \text{para } \varepsilon_b = 0.84, \quad (104)$$

$$|\phi_2\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(-|c, 0\rangle + |r, 1\rangle) \quad \text{para } \varepsilon_b = 1.93, \quad (105)$$

$$|\phi_2\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|c, 0\rangle + |r, 2\rangle) \quad \text{para } \varepsilon_b = 4.21. \quad (106)$$

El estado entrelazado en $\varepsilon_b = 0.84$ lo conforman estados electrónicos de puntos cuánticos no vecinos y una diferencia de un modo de oscilación. Para $\varepsilon_b = 1.93$ y $\varepsilon_b = 4.21$ los estados están formados por estados electrónicos de puntos cuánticos vecinos, pero la diferencia es de un modo de oscilación para el primer caso y de dos para el segundo.

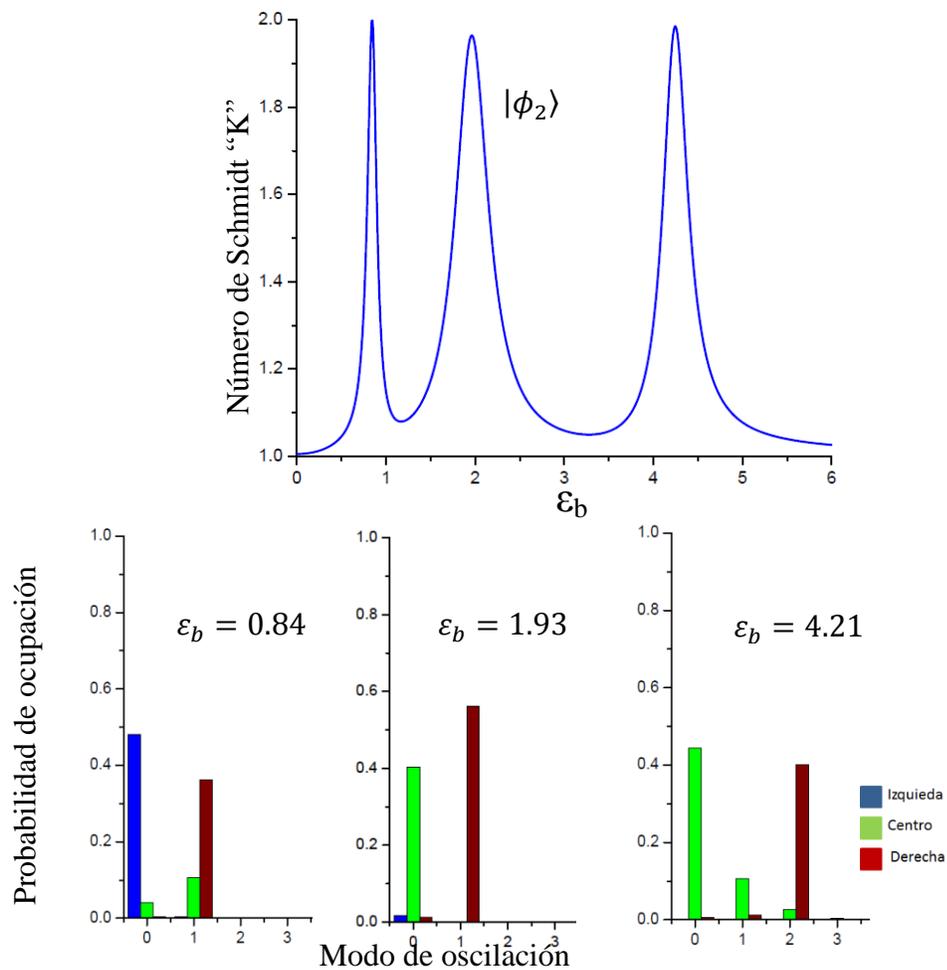


Figura 7: Número de Schmidt vs ε_b para el segundo estado excitado $|\phi_2\rangle$ con histogramas de probabilidad para valores específicos de ε_b . Los parámetros del sistema son: $V=0.5$, $\alpha=0.2$ y $N=9$ estados de oscilación.

En la figura 8 se presenta la caracterización de entrelazamiento mediante el número de Schmidt para el quinto estado excitado $|\phi_5\rangle$. En este estado, se presenta un máximo del número de Schmidt cercano a $K=3$, que involucra a los tres estados electrónicos de los puntos cuánticos cuando $\varepsilon_b = 1.93$. Los estados entrelazados que ocurren en $\varepsilon_b = 0.84$, $\varepsilon_b = 2.90$ y $\varepsilon_b = 4.21$ tienen forma cualitativamente diferente a las de $|\phi_2\rangle$. Estas formas, nuevamente aproximadas a estados de máximo entrelazamiento, son:

$$|\phi_5\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|l, 1\rangle - |r, 2\rangle) \quad \text{para } \varepsilon_b = 0.84, \quad (107)$$

$$|\phi_5\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{3}}(|l, 0\rangle + |c, 1\rangle - |r, 2\rangle) \quad \text{para } \varepsilon_b = 1.93, \quad (108)$$

$$|\phi_5\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|l, 0\rangle - |r, 3\rangle) \quad \text{para } \varepsilon_b = 2.90, \quad (109)$$

$$|\phi_5\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|c, 1\rangle - |r, 3\rangle) \quad \text{para } \varepsilon_b = 4.21. \quad (110)$$

Para $\varepsilon_b = 0.84$ el estado entrelazado está formado por estados electrónicos de puntos cuánticos no vecinos, así como cuando $\varepsilon_b = 2.90$; sin embargo, en el primer caso la diferencia es de un modo de oscilación, de 1 a 2, y en el segundo la diferencia es de tres modos de oscilación, de 0 a 3. Para $\varepsilon_b = 4.21$ participan estados electrónicos de puntos cuánticos vecinos con una diferencia de dos modos de oscilación, de 1 a 3. Y vemos como a $\varepsilon_b = 1.93$ participan los tres estados electrónicos y los tres primeros modos de oscilación. Para el quinto estado excitado participan sitios de energías más altas que en los casos anteriores.

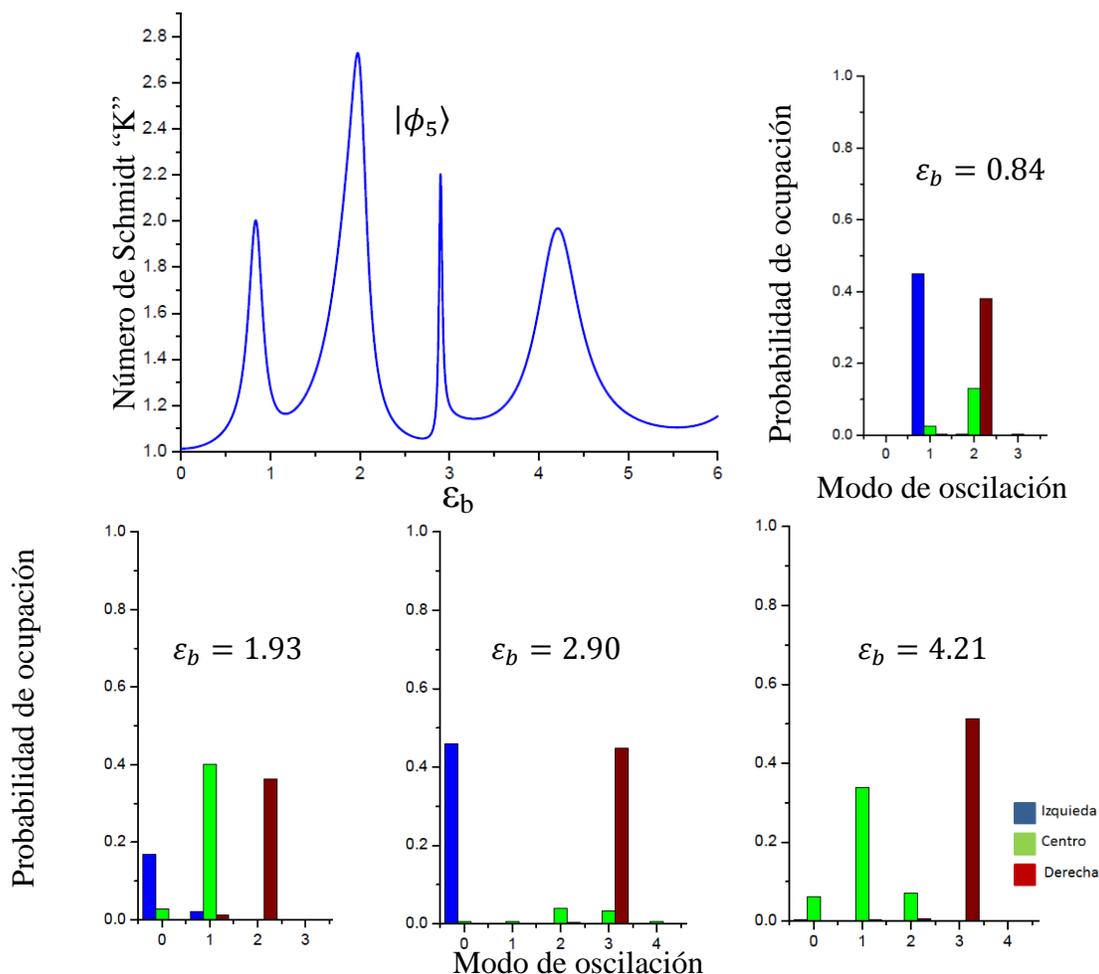


Figura 8: Número de Schmidt vs ϵ_b para el quinto estado excitado con histogramas de probabilidad para valores específicos de ϵ_b . Los parámetros del sistema son: $V=0.5$, $\alpha=0.2$ y $N=9$ estados de oscilación.

En las figuras 6, 7 y 8 se aprecia claramente cómo en los valores del número de Schmidt cercanos a dos participan principalmente dos estados electrónicos y para números mayores que dos participa otro estado más.

Ahora veamos el efecto que tiene la inversa de la longitud de tunelaje, " α " en el grado de entrelazamiento. La caracterización de entrelazamiento en función de " α " presenta un solo valor máximo para una ϵ_b fija que se repite para todos los eigenestados del sistema. Este comportamiento se muestra en la figura 9, en donde analizamos el caso para un valor fijo de $\epsilon_b = 1.93$, el número de Schmidt

en función de “ α ” para el primer (curva negra), segundo (curva roja) y quinto (curva azul) estados excitados. El comportamiento del primer y segundo estados excitados es tan similar que las curvas se superponen (parece sólo aparecer la curva roja). En el caso del quinto estado excitado el máximo se da para un número de Schmidt más alto; sin embargo, el comportamiento es, cualitativamente, el mismo. Para este valor de ε_b , que es en el que se presenta el máximo grado de entrelazamiento, el máximo de la inversa de la longitud de tuneleo se presenta aproximadamente en $\alpha=0.2$.

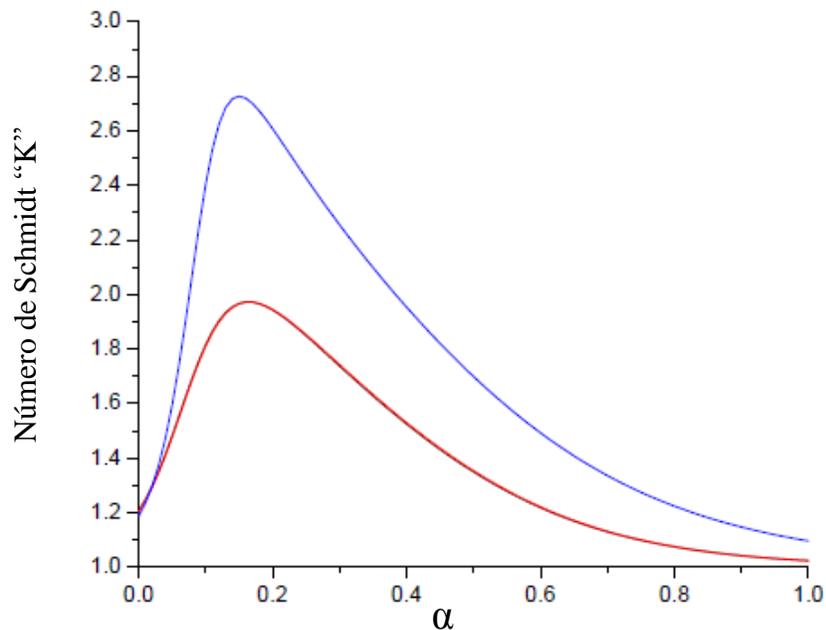


Figura 9: Comportamiento del número de Schmidt en función de α para un valor fijo de $\varepsilon_b \approx 1.93$ para el primer (negro), segundo (rojo) y quinto (azul) estados excitados. Parámetros: $V=0.5$ y $N=9$ estados de oscilación.

Para efectuar un análisis más completo del efecto de α se construyó la figura 10. En ella se presenta una gráfica de contorno del número de Schmidt “K” como función de los parámetros α y ε_b para el primer estado excitado $|\phi_1\rangle$. Puede verse cómo el efecto de α es desplazar el pico de entrelazamiento máximo a lo largo de ε_b ; sin embargo, a partir de, aproximadamente, $\alpha=0.2$ los valores de máximo entrelazamiento se estabilizan alrededor de un valor $\varepsilon_b = 1.93$.

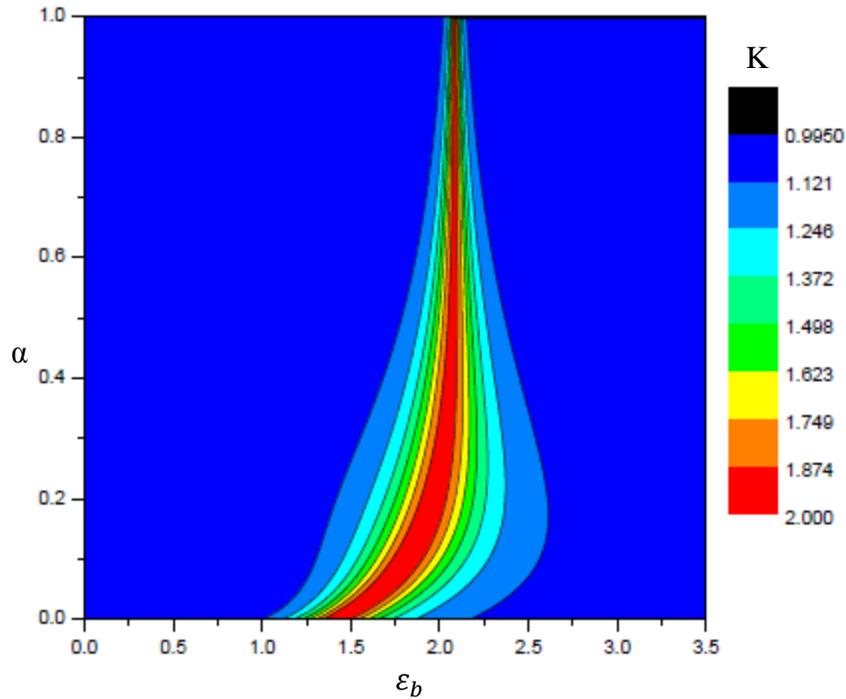


Figura 10: Curvas de contorno para el número de Schmidt en función de los parámetros “ ϵ_b ” y “ α ” para el primer estado excitado. Parámetros: $V=0.5$ y $N=9$ estados de oscilación.

Este comportamiento del parámetro de la inversa de la longitud del tuneleo puede verificarse también en la figura 12 a), que presenta los mismos parámetros que la figura 10, pero para el quinto estado excitado $|\phi_5\rangle$.

6.1.3 Relación con la corriente electrónica

Para este mismo sistema, la corriente electrónica “ I ” puede calcularse mediante la expresión (Maldonado, 2011):

$$I = e\Gamma \sum_i [\rho_{rr}^{ii}]_{avg}, \quad (111)$$

donde I es la corriente electrónica, e es la carga del electrón (1 en las unidades utilizadas), Γ representa el acoplamiento con los contactos y $\sum_i [\rho_{rr}^{ii}]_{avg}$ es un promedio sobre las poblaciones medias en el punto cuántico derecho (por lo tanto involucra a todos los estados participantes).

Con la finalidad de observar si en el TDQS existe una correlación cualitativa entre el fenómeno de correlación cuántica de entrelazamiento y una propiedad medible como la corriente electrónica, compararemos las magnitudes de ambos fenómenos en función de un mismo parámetro ε_b .

En la figura 11 se presenta esta comparación. Los máximos de corriente corresponden a los máximos de entrelazamiento y las intensidades son proporcionales. En esta figura se muestran tres ($|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ y $|\phi_5\rangle$) de los 30 estados para $N=9$ estados de oscilación; sin embargo, con estos tres estados la correlación cualitativa es evidente.

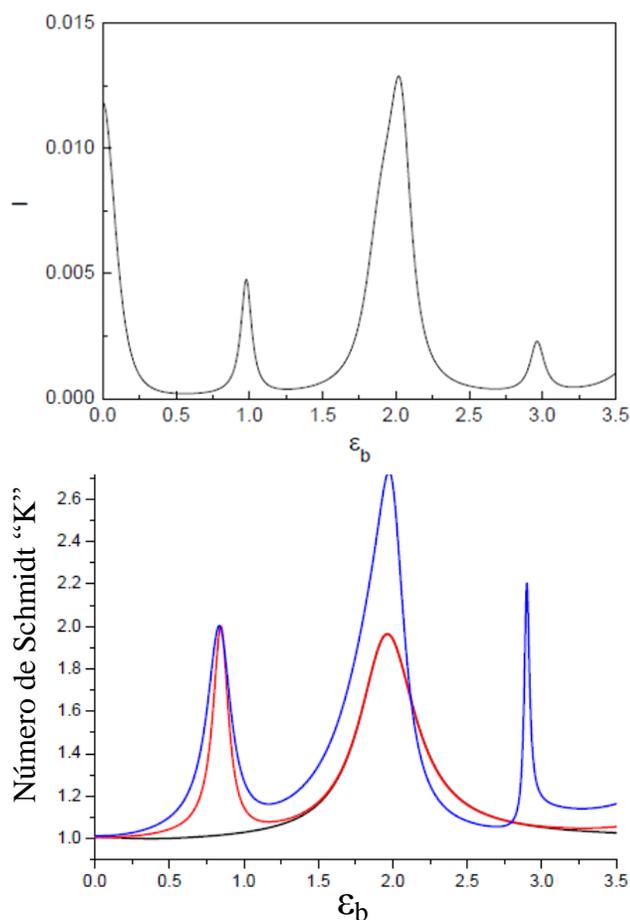


Figura 11: corriente eléctrica (arriba) (Maldonado, 2011) y primer (negro), segundo (rojo) y quinto (azul) estados excitados (abajo) calculados para los parámetros $V=0.5$, $\alpha=0.4$, $N=9$ estados de oscilación y $\Gamma=0.05$.

Para mostrar esta correlación cualitativa en un rango más amplio del parámetro ϵ_b , así como para el parámetro α se construyó la figura 12. En la figura 12 a) se muestran las curvas de nivel para el número de Schmidt en función de los parámetros ya mencionados para el quinto estado excitado $|\phi_5\rangle$ y, en la figura 12 b) (Maldonado, 2011), se presentan las curvas de nivel de la corriente electrónica "I" como función de los mismos parámetros calculadas a partir de la ecuación (111). Utilizamos el quinto estado excitado porque en éste encontramos el tipo de contribuciones que existen en todos los estados, es decir, estados entrelazados en los que participan dos y tres estados electrónicos.

Analizando la figura 12 vemos que existe un incremento en la intensidad, tanto del número de Schmidt como de la corriente electrónica, para valores similares de los parámetros del sistema. Encontramos así una correlación cualitativa entre el entrelazamiento híbrido, estados electrónicos/modos de oscilación, y la corriente electrónica, una propiedad medible, en un rango amplio de los parámetros ε_b y α

Es importante mencionar que el primer pico que aparece en todos los cálculos relacionados con la corriente electrónica en $\varepsilon_b \approx 0$ no presenta relación con el fenómeno de entrelazamiento porque este caso corresponde a la alineación de los estados de electrónicos con un mismo modo de oscilación, lo cual resulta en un estado factorizable y, por lo tanto, no entrelazado:

$$|\varphi\rangle \sim (c_l|l\rangle + c_c|c\rangle + c_r|r\rangle) \otimes |N\rangle. \quad (112)$$

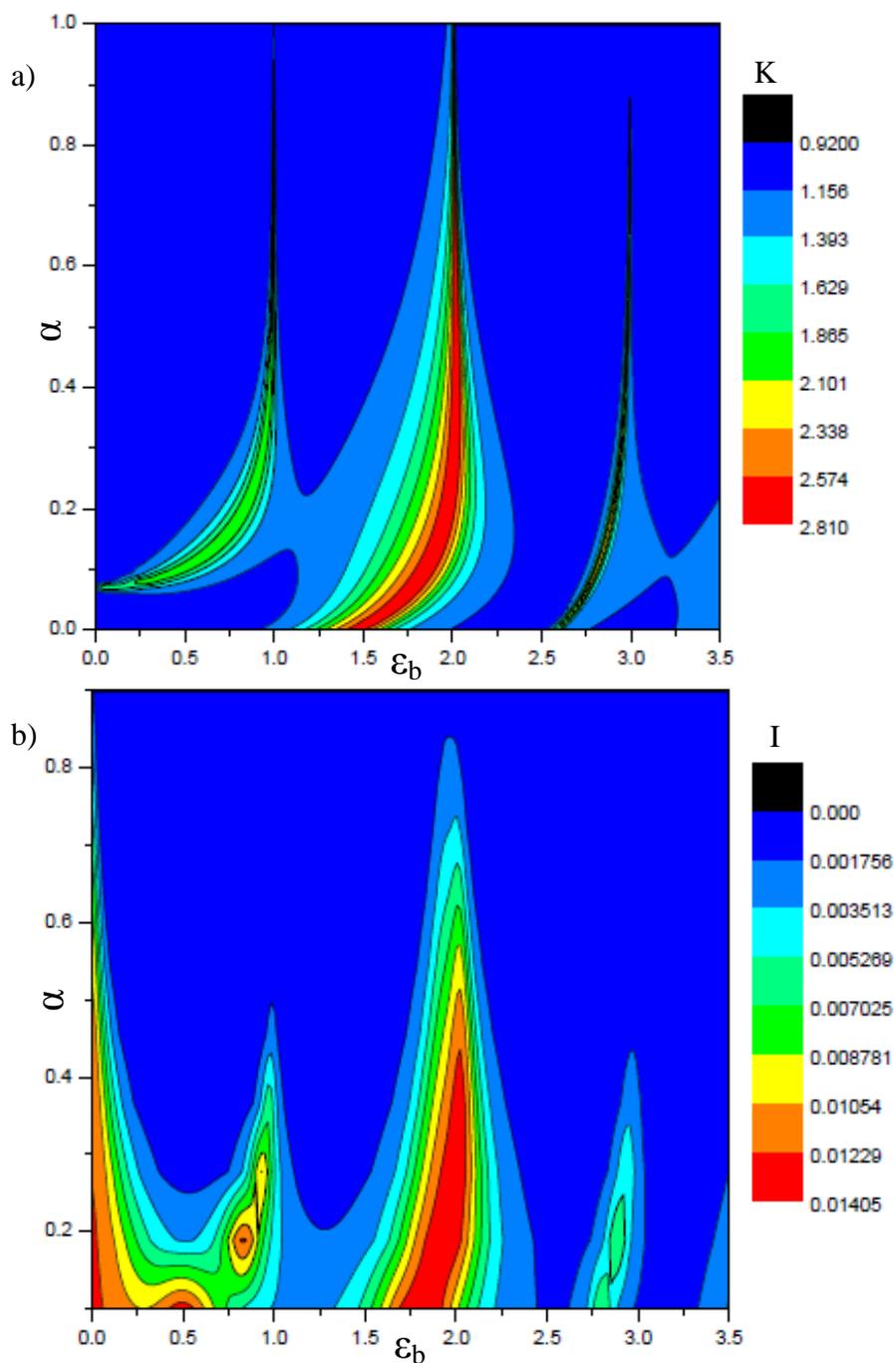


Figura 12: a) Curvas de contorno para el número de Schmidt en función de los parámetros “ ϵ_b ” y “ α ” para el quinto estado excitado con $V=0.5$ y $N=9$ nueve estados de oscilación y, b) curvas de contorno para la intensidad de la corriente electrónica calculada a partir de 111 en función de los parámetros “ ϵ_b ” y “ α ” con $V=0.5$, $N=9$ estados de oscilación y $\Gamma=0.05$. (Maldonado, 2011)

6.2 Evolución dinámica del sistema

En la sección IV.2 presentamos cómo resolver la dinámica cuántica del sistema en presencia de un potencial AC. Ahora describiremos los resultados cuantitativos de la inclusión de este potencial así como el efecto que tiene respecto a la evolución natural del sistema.

La evolución del sistema se estudiará para tres condiciones iniciales: una mezcla entre eigenestados del caso estático, un caso en donde el número de Schmidt sea dos y otra en la que el número de Schmidt sea tres. Más adelante explicaremos a detalle la forma de cada una de estas condiciones.

Antes de comenzar el análisis de la evolución dinámica, vamos a introducir una expresión que será de gran utilidad para ver la forma de los estados entrelazados:

$$|\psi_{condición,t}\rangle \sim c_{m_1 n_1} |m_1, n_1\rangle + e^{i\theta_{m_2 n_2}} c_{m_2 n_2} |m_2, n_2\rangle + e^{i\theta_{m_3 n_3}} c_{m_3 n_3} |m_3, n_3\rangle + \dots, \quad (113)$$

donde “condición” se refiere a la condición inicial, y puede ser “1” si se refiere a una mezcla de eigenestados, “2” si se refiere al caso $K=2$ o “3” si se refiere al caso $K=3$; “t” indica el tiempo al que se hace el análisis; $c_{m_1 n_1}$, $c_{m_2 n_2}$ y $c_{m_3 n_3}$ son coeficientes tales que se relacionan con los estados, que pueden ser $m = l, c, r$ y $n = 0, 1, 2, \dots, N$; $e^{i\theta_{m_2 n_2}}$ y $e^{i\theta_{m_3 n_3}}$ son fases relativas que dan origen a las coherencias del sistema.

Al utilizar esta expresión omitiremos, en ciertas ocasiones, algunos estados participantes y dejaremos solamente los más relevantes en cuestión de entrelazamiento.

Con la finalidad de ejemplificar el uso de la expresión (113), utilicemos esta expresión para ver estados de máximo entrelazamiento. El estado presentado en

la ecuación (103), $|\phi_1\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|c, 0\rangle + |r, 1\rangle)$, tendría las siguientes características:
 $c_{c0} = c_{r1} = 1/\sqrt{2}$, y $\theta_{r1} = 0$.

6.2.1 Evolución para una mezcla de eigenestados

La evolución dinámica del sistema sin la influencia del campo AC, para una mezcla de dos eigenestados, viene dada por la ecuación (54):

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi_m\rangle e^{-iE_m t/\hbar} + |\phi_n\rangle e^{-iE_n t/\hbar} \right),$$

donde $|\phi_m\rangle$ y $|\phi_n\rangle$ representan diferentes eigenestados del sistema y los valores E_m y E_n son sus respectivas eigenenergías.

Este caso se analiza para una mezcla entre el primer y segundo estados excitados ($|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$) en valores fijos ($\varepsilon_b = 1.93$, $\alpha = 0.2$, $V = 0.5$, $N = 9$) de interés de los parámetros del sistema. Como condición inicial para estas mezclas se utilizaron los valores de los eigenvectores de la misma mezcla a $t=0$:

$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle). \quad (114)$$

Para esta mezcla, cuya frecuencia natural es $\omega_s = (E_2 - E_1)/\hbar = 0.1404$ en unidades de la frecuencia del oscilador ω , el periodo es:

$$\tau = \frac{2\pi}{0.1404} = 44.75. \quad (115)$$

En la figura 13 se observa el comportamiento dinámico del número de Schmidt de este sistema sin potencial AC para un periodo completo. Aunque a un tiempo $t = \tau/2$ el número de Schmidt regresa a su valor inicial, los histogramas de probabilidad nos muestran que el estado de ocupación es otro y solamente regresa a su forma inicial, en cuanto a sitios de ocupación, tras un periodo completo. El sitio ocupado cada inicio de periodo es el $|r, 1\rangle$, y a un tiempo $t = \tau/2$ el sitio ocupado es el $|c, 0\rangle$. En tanto que los valores de máximo entrelazamiento, $K=2$, se encuentran en los tiempos $t = \tau/4 \approx 11.26$ y $t = 3\tau/4 \approx 33.52$.

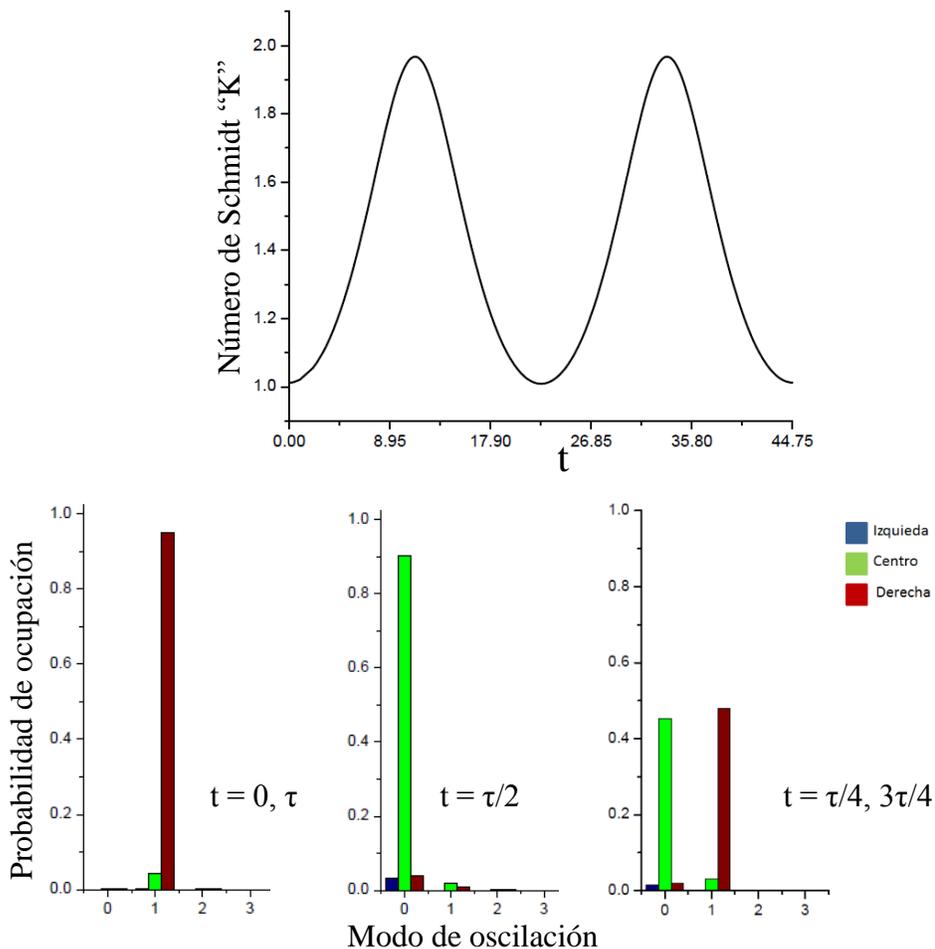


Figura 13: Dinámica del número de Schmidt sin potencial AC durante un periodo para la mezcla entre el primer y segundo estado excitado así como los sitios de ocupación a diferentes tiempos. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

La forma de estos estados entrelazados, utilizando la expresión (113) es:

$$|\psi_{1,11.26}\rangle \sim -\frac{1}{1.478}|c, 0\rangle + \frac{1}{1.450}e^{0.489\pi i}|r, 1\rangle, \quad (116)$$

$$|\psi_{1,33.52}\rangle \sim -\frac{1}{1.481}|c, 0\rangle - \frac{1}{1.450}e^{0.511\pi i}|r, 1\rangle, \quad (117)$$

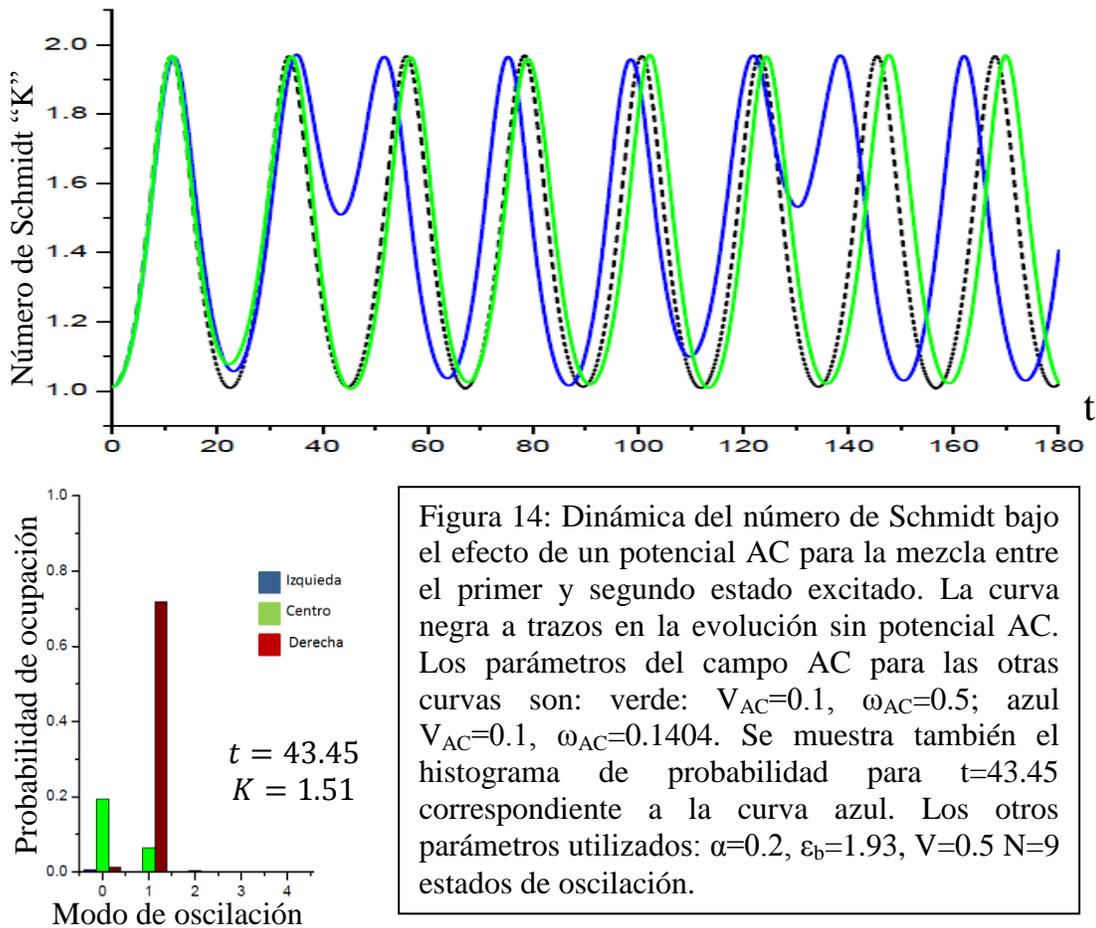
que pueden aproximarse a estados de Bell máximamente entrelazados de la forma:

$$|\psi_1\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|c, 0\rangle \pm e^{i\frac{\pi}{2}}|r, 1\rangle). \quad (118)$$

Los estados entrelazados sin potencial AC tienen contribuciones de estados electrónicos de puntos cuánticos vecinos y con una diferencia de un modo de oscilación. Esta misma forma se mantiene para los estados entrelazados cuando está presente un potencial AC, como demostraremos más adelante.

Para analizar el efecto del potencial AC sobre la mezcla de $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ se eligen los siguientes parámetros. Una amplitud de potencial $V_{AC} = 0.1 = V/5$. Para la frecuencia del potencial AC elegimos dos valores: $\omega_{AC} = 0.1404 = \omega_s$ y $\omega_{AC} = 0.5$, que es la mitad de la frecuencia del TDQS ($\omega = 1$).

El efecto de utilizar una frecuencia $\omega_{AC} = 0.5$ con una amplitud pequeña, $V_{AC} = 0.1$, causó muy poco efecto respecto a la evolución natural del sistema. En la figura 14 vemos que la curva verde, correspondiente a la evolución temporal del número de Schmidt con los parámetros antes mencionados, y la curva negra a trazos, correspondiente a la evolución natural del sistema, están cerca de superponerse. El efecto de potencial AC en este caso es simplemente desplazar lentamente el caso natural.



Introducir una frecuencia del potencial AC igual a la natural del sistema $\omega_{AC} = 0.1404$, en contraste, causó un efecto más interesante. En la curva azul de la figura 14 vemos cómo se reduce la magnitud del entrelazamiento aproximadamente cada $\Delta t \approx 86.90$. Si comparamos el histograma de probabilidad de esta figura con el de la figura 13 a $t = \tau$, vemos que el efecto de esta frecuencia es poblar el sitio $|c, 0\rangle$ cada Δt , pasando así de un entrelazamiento prácticamente nulo a uno de magnitud $K=1.51$ con la forma:

$$|\psi_{1,43.45}\rangle \sim -\frac{1}{2.274}|c, 0\rangle - \frac{1}{1.179}e^{-0.003\pi i}|r, 1\rangle. \quad (119)$$

Con la finalidad de lograr la condición de CDT, descrita en la sección IV.4, elegimos $V_{AC} = 0.67528$ para seguir trabajando con la frecuencia natural $\omega_{AC} = 0.1404$. Así, $\xi = \frac{V_{AC}}{2\omega_{AC}} = 2.4048$, que corresponde al primer cero de la función de Bessel de orden cero, $J_0(2.4048) = 0$.

Podemos observar dos efectos interesantes de trabajar bajo estas condiciones del campo AC. El primero es la destrucción del entrelazamiento en diferentes regiones, tal como se muestra en la figura 15 en regiones tales como a $t = 11$ o $t = 80$. Vemos en el histograma correspondiente a $t = 11.08$ que el sistema tiende a bajar la magnitud de entrelazamiento hasta $K=1.28$, localizándose principalmente en el sitio $|r, 1\rangle$ cuando, fuera de las condiciones de CDT, tiende a compartirse en proporciones muy similares entre los sitios $|c, 0\rangle$ y $|r, 1\rangle$, ocasionando estados con $K=2$, como los de la figura 13 a $t = 3\tau/4$. Estos estados bajo las condiciones de CDT a $t = 11.08$ adquieren la forma:

$$|\psi_{1,11.08}\rangle \sim -\frac{1}{2.912}|c, 0\rangle - \frac{1}{1.095}e^{-0.018\pi i}|r, 1\rangle. \quad (120)$$

El segundo efecto importante, es la generación de estados entrelazados a ciertos tiempos, como a $t = 45.18$. Al observar la figura 15 a este tiempo, notamos que existe un pico que sin potencial AC no existe y con los parámetros $V_{AC} = 0.1$ y $\omega_{AC} = 0.1404$ sí se genera, pero con menor intensidad que bajo las condiciones de CDT. A $t = 45.18$ el valor del número de Schmidt es $K=1.94$. La forma de este estado entrelazado es:

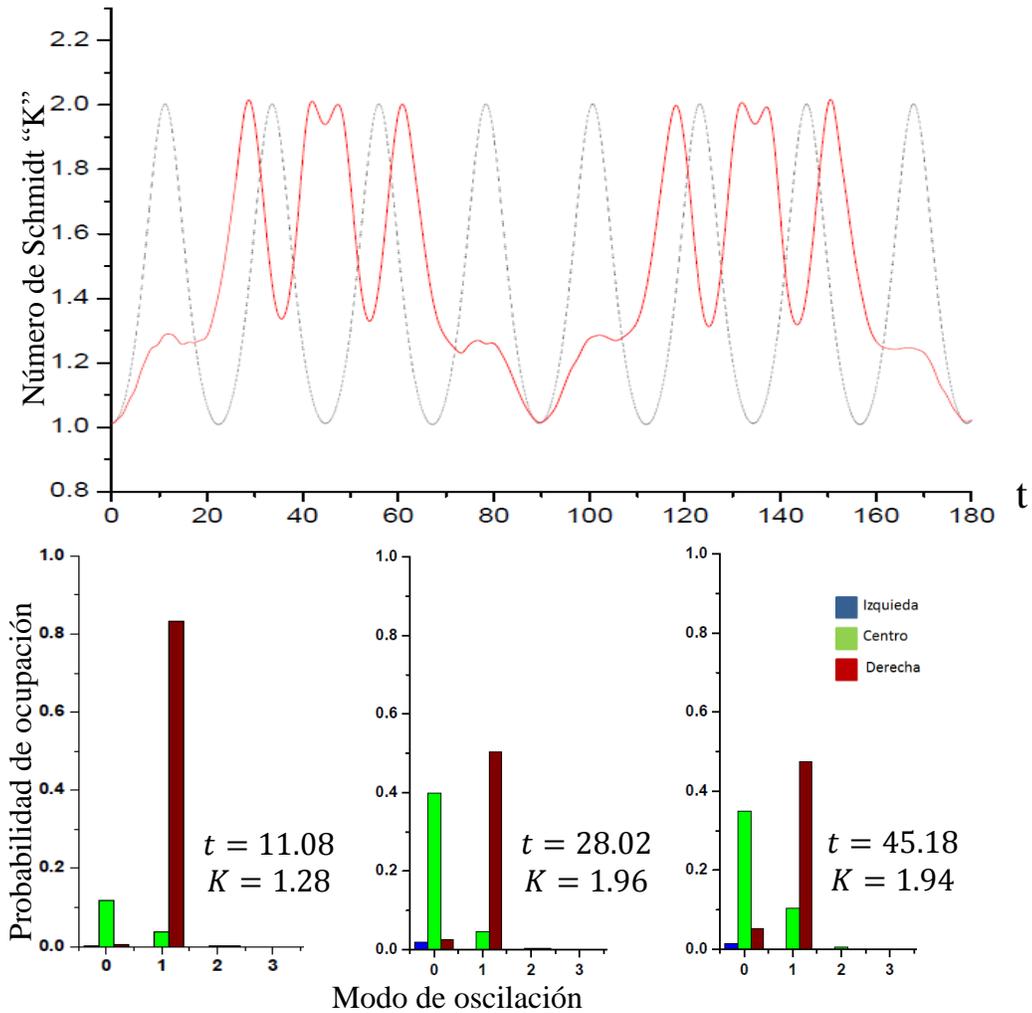


Figura 15: Dinámica del número de Schmidt bajo el efecto de un potencial AC (rojo) para la mezcla entre el primer y segundo estado excitado así como los sitios de ocupación a diferentes tiempos en los histogramas, Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación, $V_{AC}=0.65728$, $\omega_{AC}=0.1404$. La línea negra a trazos es la misma mezcla sin potencial AC

$$|\psi_{1,45.18}\rangle \sim \frac{1}{1.690} |c, 0\rangle + \frac{1}{1.452} e^{-0.036\pi i} |r, 1\rangle. \quad (121)$$

Enseguida daremos una explicación de estos efectos. Pero antes cabe mencionar que la forma de los otros estados entrelazados presentes bajo las condiciones de CDT, como en los casos de $t \approx 30$ (caso para $t = 28.02$ en la figura 15) y $t \approx 60$,

es la misma que para los picos cercanos a esos mismos tiempos en ausencia del potencial AC.

En este trabajo presentaremos solamente los efectos de la CDT en el primer cero de Bessel, ya que, dadas las energías que manejamos, tendrán un efecto muy importante y, verificando órdenes superiores, no se encontraron fenómenos diferentes. Sin embargo, daremos una explicación cualitativa de esta generación debida a órdenes superiores.

En la sección IV.4 vimos que las expresiones de tuneleo renormalizadas por funciones de Bessel tienen las formas (69) y (70), que escribimos a continuación:

$$\tilde{T}_l \sim \sum_v (-1)^v J_v(\xi) T_l(x) e^{\frac{\pm i\omega_{AC} vt}{2}},$$

$$\tilde{T}_r \sim \sum_v (-1)^v J_v(\xi) T_r(x) e^{\frac{\pm i\omega_{AC} vt}{2}}.$$

Estas expresiones, independientemente de la magnitud de los tuneleos originales $T_l(x)$ y $T_r(x)$, son proporcionales a las funciones de Bessel $J_v(\xi)$ (con $\xi = \frac{V_{AC}}{2\omega_{AC}}$). Como podemos ver en la figura 16, donde encontramos el primer cero de Bessel, $J_0(2.4048) = 0$, los órdenes superiores tienen magnitudes diferentes de cero: $J_1(2.4048) = 0.519$ y $J_2(2.4048) = 0.432$, por ejemplo. Esto indica que existe la probabilidad de que ocurran procesos de órdenes superiores, aunque requieran de mayor energía.

Estudiemos el comportamiento del sistema en el primer cero de Bessel. Los elementos de tuneleo de los estados participantes son: $T_r^{0,1} = -0.0375$ (que es el tuneleo entre los puntos cuánticos c y r para los modos de oscilación 0 y 1), $T_r^{1,2} = -0.0541$ y $T_r^{0,2} = -0.0053$. Vemos que la amplitud de probabilidad, $J_v(\xi)T_r(x)$, es cero para $J_0(2.4048) = 0$. Si se suprime el tuneleo, el sistema se

localiza y se generaran estados separables no entrelazados. Por lo tanto, las regiones en las que exista destrucción de estados entrelazados están dominadas por procesos de orden $\nu = 0$.

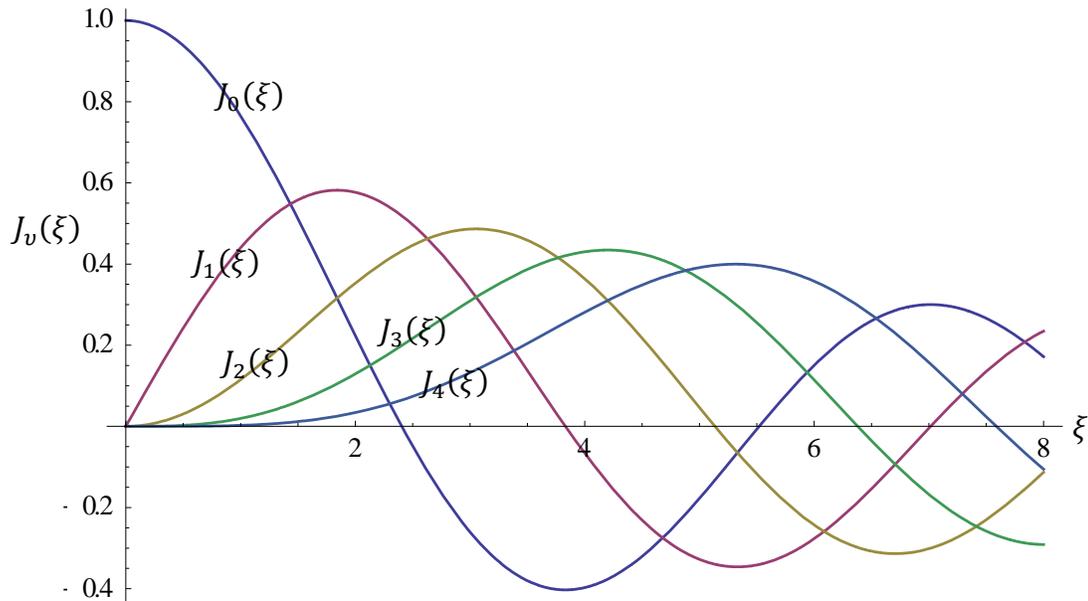


Figura 16: Funciones de Bessel de orden 0, 1, 2, 3 y 4.

Para este mismo valor de $\xi = 2.4048$, cuando $J_1(2.4048) = 0.519$ y $J_2(2.4048) = 0.432$, las amplitudes de probabilidad serán $T_r^{0,1}J_1(2.4048) = -0.0195$, $T_r^{1,2}J_1(2.4048) = -0.0281$, $T_r^{0,2}J_1(2.4048) = -0.0028$, $T_r^{0,1}J_2(2.4048) = -0.0162$, $T_r^{1,2}J_2(2.4048) = -0.0234$ y $T_r^{0,2}J_2(2.4048) = -0.0023$. Dada la magnitud de las funciones de Bessel de orden superior a $\nu = 2$ para $\xi = 2.4048$, y del rango de energías en el que estamos trabajando, estas son las transiciones más probables. Que existan transiciones implica que los estados del sistema se deslocalizan, lo que da pie a estados entrelazados. Por lo tanto, las regiones en donde existe generación de estados entrelazados, se deben a procesos en los que dominan órdenes superiores ($\nu = 1, 2, \dots$). Aunque no es posible determinar con precisión, mediante estas herramientas, a qué orden, u órdenes, corresponde la generación de estados entrelazados.

Si analizamos el comportamiento del sistema con otros parámetros, por ejemplo $J_1(3.8317) = 0$, encontraremos que las regiones donde se destruya el entrelazamiento estarán dominadas por procesos de orden $\nu = 1$, y las regiones donde se genere estarán dominadas por procesos de orden $\nu \neq 1$.

Esta explicación es aplicable para todos los casos que se estudian en las siguientes secciones bajo condiciones de CDT.

6.2.2 Evolución para un valor inicial $K=2$

Una condición inicial interesante es aquella en la que el sistema presenta un entrelazamiento híbrido máximo de $2 \times M$, es decir, en la que el número de Schmidt sea exactamente igual a dos. La condición se elige en base a una ocupación común que se ha observado en el sistema a lo largo de las pruebas anteriores, y es la siguiente:

$$|\psi_{2,t=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|c, 0\rangle + |r, 1\rangle). \quad (122)$$

Esta condición, y la que veremos en la siguiente sección, suponen una mezcla de varios eigenestados, por lo que la evolución estará dada, cualitativamente, por una expresión de la forma:

$$|\psi(t)\rangle = C_1|\phi_1\rangle e^{\frac{-iE_1t}{\hbar}} + C_2|\phi_2\rangle e^{\frac{-iE_2t}{\hbar}} + \dots + C_N|\phi_N\rangle e^{\frac{-iE_Nt}{\hbar}}, \quad (123)$$

en donde los estados $|\phi\rangle$ son los eigenestados del TDQS y los coeficientes C asignan un peso de acuerdo a la proyección del estado inicial con los eigenestados $|\phi\rangle$, $C_1 = \langle\phi_1|\psi_{condición,t=0}\rangle$ y $C_2 = \langle\phi_2|\psi_{condición,t=0}\rangle$, por ejemplo.

Independientemente del uso de los histogramas para obtener información sobre la ocupación de los estados, utilizaremos gráficas de área para observar la evolución de las ocupaciones. Estas gráficas informan sobre la probabilidad de ocupación de los estados en cada modo de oscilación particular (indicado en cada caso) a lo largo del tiempo (eje horizontal). Nuevamente, los estados electrónicos izquierda ($|l\rangle$), centro ($|c\rangle$) y derecha ($|r\rangle$) los representan los colores azul, verde y rojo, respectivamente. El eje vertical contiene la probabilidad de ocupación.

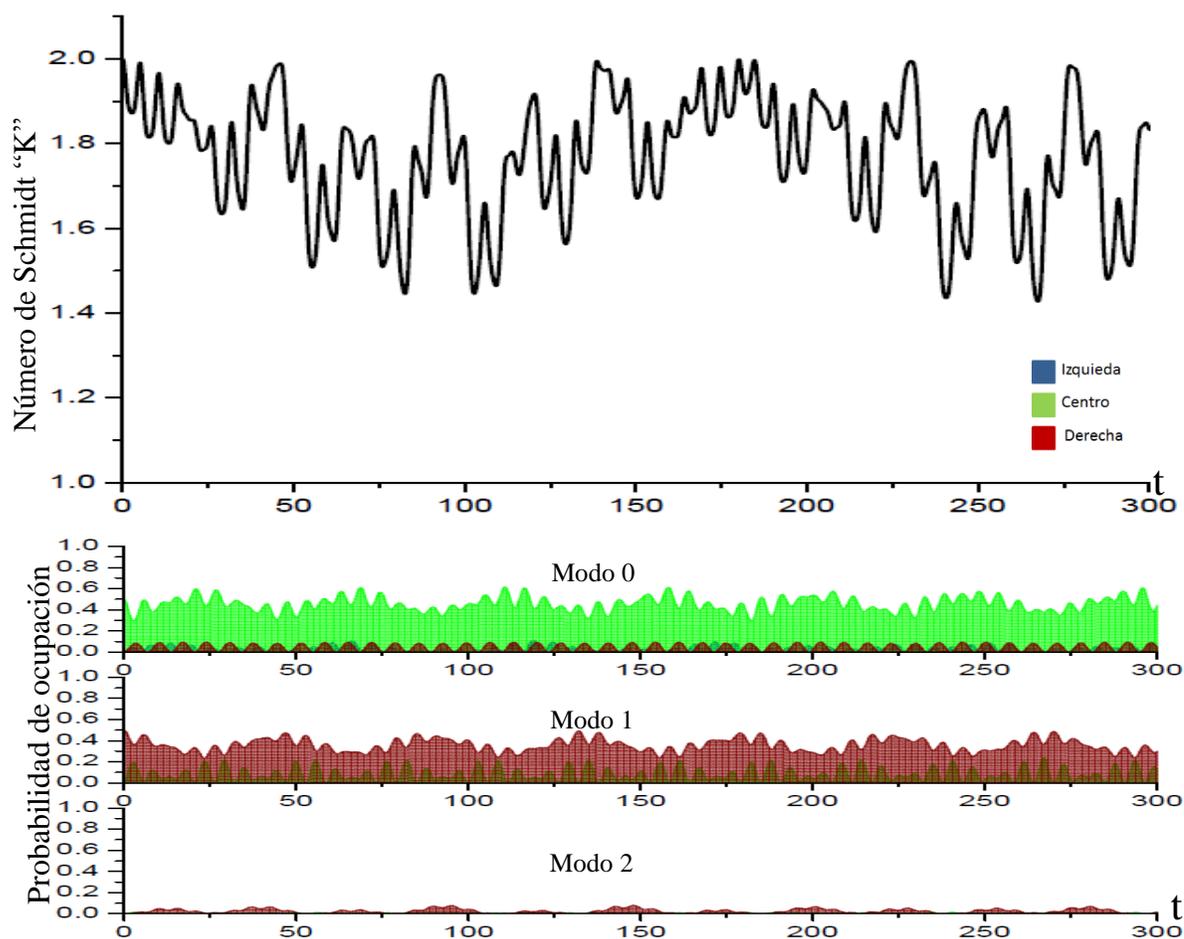
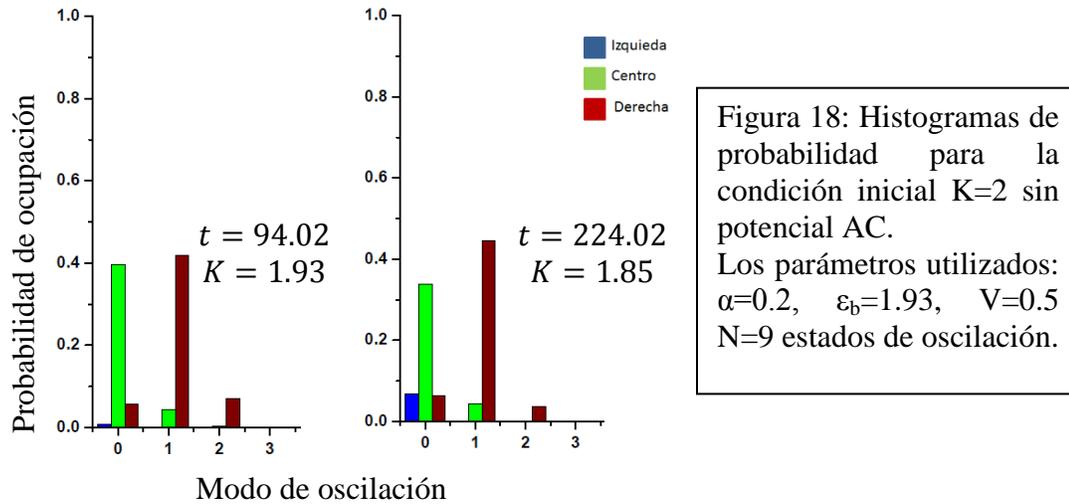


Figura 17: En la parte superior se muestra la evolución dinámica del número de Schmidt para la condición de entrelazamiento $K=2$ descrita arriba. En la parte inferior se muestra las gráficas de área de ocupación de los sitios. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

Primero estudiemos la evolución del sistema sin potencial AC. Los resultados de muestran en la figura 17, en donde vemos que los estados entrelazados se mantienen en la región de $2 \times N$. Analizando la probabilidad de ocupación de los sitios, como lo muestran las gráficas de área de la figura 17, vemos que la forma de los estados entrelazados se mantiene a lo largo del tiempo, siendo $|c, 0\rangle$ y $|r, 1\rangle$, principalmente, los sitios que participan en éste. La disminución del grado de entrelazamiento en algunas regiones se debe a la participación de los sitios $|r, 0\rangle$ y

$|c,1\rangle$, que también participan periódicamente, aunque con una magnitud radicalmente menor.



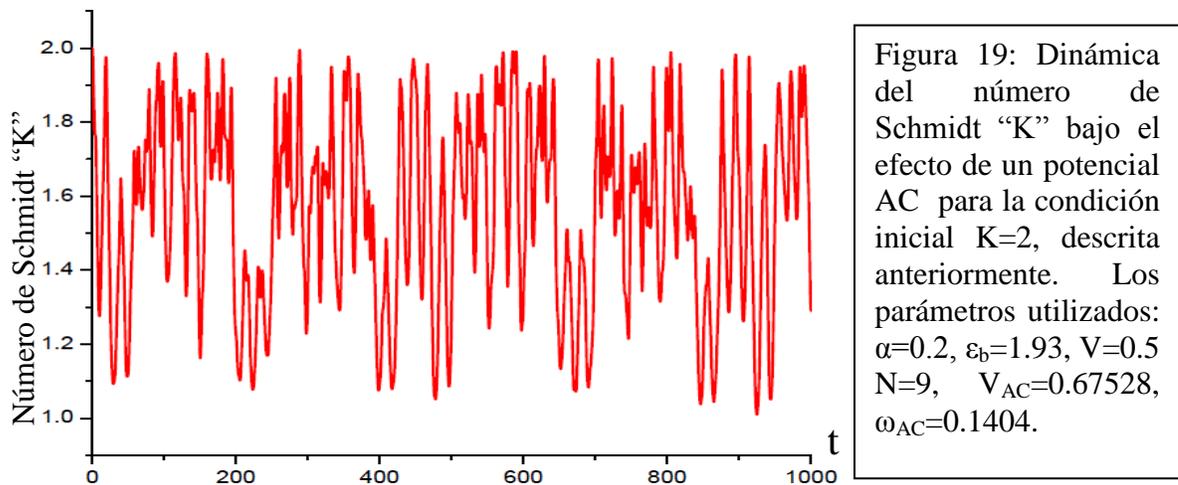
Analizamos cuantitativamente algunos de los estados presentes. Veamos la forma del entrelazamiento a $t = 94.02$ y $t = 224.02$, que cualitativamente se presenta en los histogramas de probabilidad de la figura 18. Expresados en términos de la ecuación (113), su forma es:

$$|\psi_{2,94.02}\rangle \sim -\frac{1}{1.703}|c, 0\rangle - \frac{1}{1.522}e^{-0.026\pi i}|r, 1\rangle, \quad (124)$$

$$|\psi_{2,224.02}\rangle \sim \frac{1}{1.719}|c, 0\rangle + \frac{1}{1.499}e^{0.014\pi i}|r, 1\rangle. \quad (125)$$

Los estados entrelazados sin potencial AC para esta condición inicial tienen contribuciones de estados electrónicos de puntos cuánticos vecinos y con una diferencia de un modo de oscilación. Al igual que para los estados entrelazados en la sección anterior, esta misma forma se mantiene para los estados entrelazados cuando está presente un potencial AC, como demostraremos más adelante.

Antes de pasar a análisis particulares, y *para efecto de todos los análisis en esta condición inicial y los de la siguiente sección*, es necesario hacer un comentario sobre la periodicidad del sistema con y sin la inclusión de un potencial AC. Como estas condiciones iniciales involucran la participación de varios eigenestados, como se pone de manifiesto en la expresión (123), no es sencillo ver la periodicidad (que debe cumplirse). Sin embargo, se ha verificado para cada caso presentado en este trabajo. En la figura 19 presentamos un ejemplo para la condición inicial que se estudia en esta sección en las condiciones de CDT, con una frecuencia $\omega_{AC} = 0.1404$ y una amplitud $V_{AC} = 0.67528$. En esta figura puede verificarse la periodicidad del número de Schmidt bajo el efecto de un potencial AC periódico.



Ahora analicemos el efecto del potencial AC. Primero veamos el caso para una amplitud pequeña $V_{AC} = 0.1$ y una frecuencia $\omega_{AC} = 0.5$. Tal como en el caso de la condición inicial de la sección anterior, el efecto no es muy intenso. Ciertamente, existen pequeñas regiones en donde la magnitud del número de Schmidt baja un poco, pero en la mayor parte del tiempo los valores del número de Schmidt no cambian significativamente. En la figura 20 podemos ver este comportamiento, la curva azul corresponde al sistema con potencial AC y los parámetros arriba

mencionados y la curva negra a trazos al sistema sin potencial AC. Las curvas incluso se superponen en ciertas regiones.

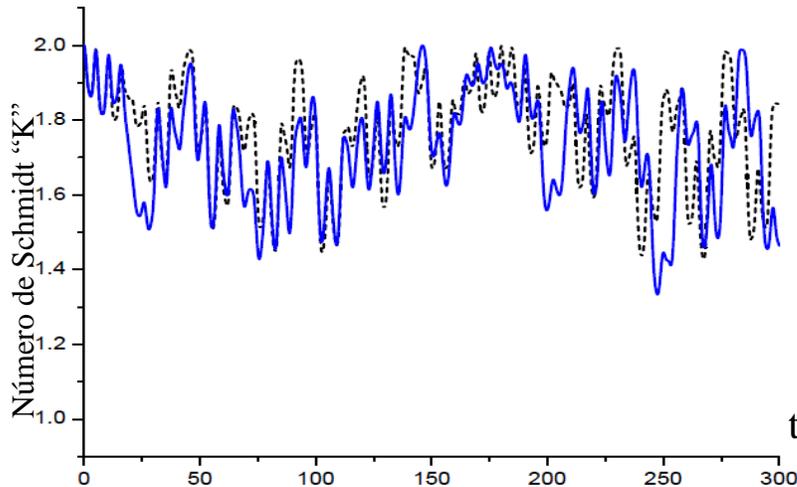


Figura 20: Dinámica del número de Schmidt “K” bajo el efecto de un potencial AC para la condición inicial $K=2$, descrita anteriormente. $V_{AC}=0.1$, $\omega_{AC}=0.5$, curva azul, y sin potencial AC, curva negra a trazos. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$, $N=9$.

Cambiando los parámetros del campo AC, notamos un efecto muy interesante al utilizar la frecuencia natural de la mezcla entre el primer y segundo estados excitados $\omega_{AC} = 0.1404$, y conservando el mismo valor de $V_{AC} = 0.1$. En este caso observamos que existen regiones en donde la magnitud del número de Schmidt baja considerablemente. Esto nos dice que, para la condición inicial que elegimos, la contribución de $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ es bastante importante. En la figura 21 podemos ver en la curva azul la evolución del número de Schmidt con este potencial AC, en la curva negra su evolución natural y en la curva verde la evolución con la misma amplitud del potencial pero con frecuencia $\omega_{AC} = 0.5$.

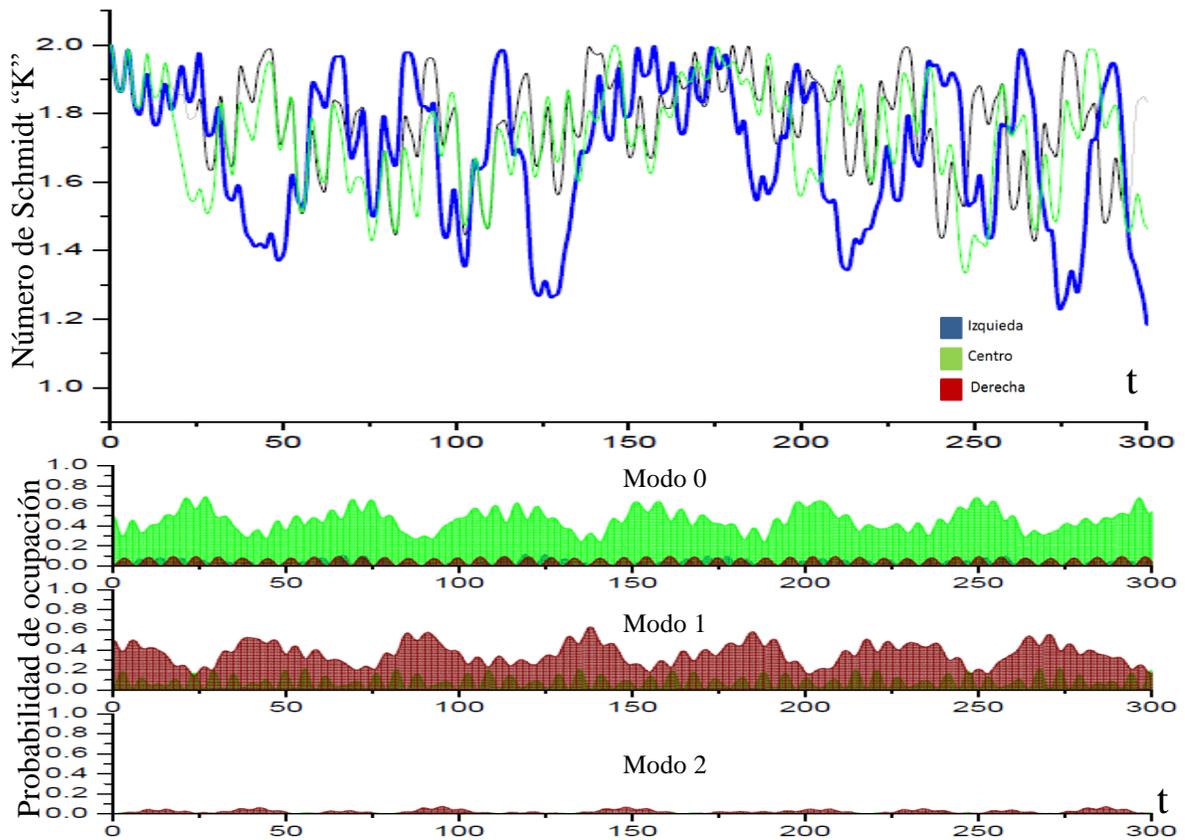


Figura 21: En la parte superior se muestra la evolución dinámica del número de Schmidt para la condición de entrelazamiento $K=2$ antes mencionada con los parámetros del campo $V_{AC} = 0.1$ y $\omega_{AC} = 0.1404$ (curva azul); $\omega_{AC} = 0.5$ (curva verde); sin AC (curva negra). En la parte inferior se muestra las gráficas de área de ocupación de los sitios para la curva azul. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\epsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

La probabilidad de ocupación que se muestra en la gráfica de área de la figura 21 puede compararse con la que muestra en la figura 19. La forma cualitativa de los estados entrelazados es la misma, básicamente participan los sitios $|c, 0\rangle$ y $|r, 1\rangle$; sin embargo, es notable cómo los máximos y los mínimos de las probabilidades de ocupación son más pronunciados en el caso de la figura 21. Este efecto, aunado a la participación en menor grado de los sitios $|r, 0\rangle$ y $|c, 1\rangle$, originan regiones con menor grado de entrelazamiento.

Veamos la forma del entrelazamiento para esta condición particular ($\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.1$) en los mismos valores del tiempo que ya analizamos en el caso sin potencial AC. Primero estudiemos su forma cualitativa. En la figura 22 se presentan los histogramas de probabilidad para estos casos, a $t = 94.02$ y $t = 224.03$. Vemos cómo el valor de K baja ligeramente a $t \approx 94$ con respecto al caso sin AC (comparar con figura 18) desde 1.93 hasta 1.80, pero la forma es cualitativamente similar. A $t \approx 224$ el cambio es un poco más pronunciado, bajando de 1.85 a 1.66. Vemos que el efecto de esta ω_{AC} para $t \approx 224$ es localizar, parcialmente, al sistema en $|c, 0\rangle$, cambiando incluso de forma cualitativa la forma de los estados entrelazados.

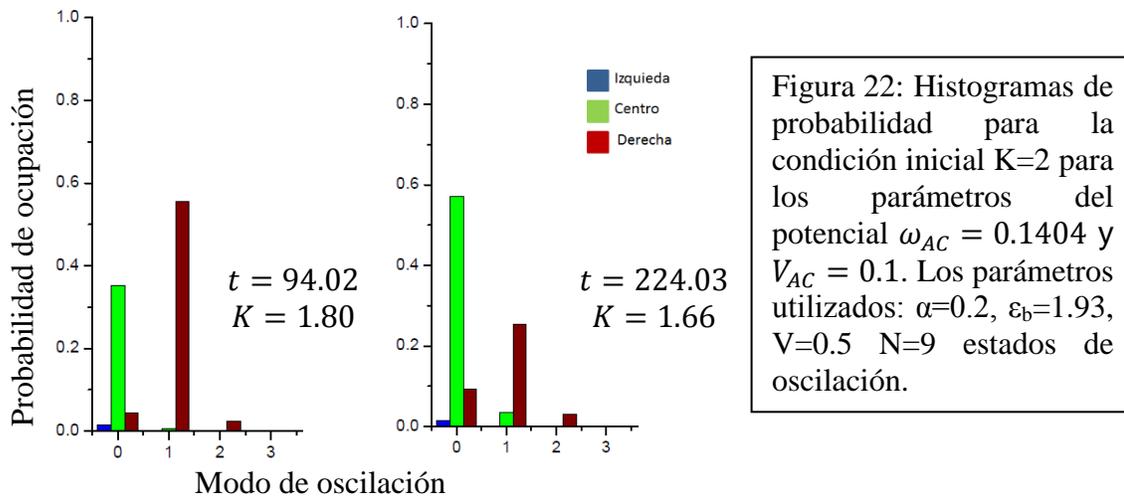


Figura 22: Histogramas de probabilidad para la condición inicial $K=2$ para los parámetros del potencial $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.1$. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

Las expresiones cuantitativas para estos casos son las siguientes:

$$|\psi_{2,94.02}\rangle \sim -\frac{1}{1.687} |c, 0\rangle - \frac{1}{1.342} e^{-0.080\pi i} |r, 1\rangle, \quad (126)$$

$$|\psi_{2,224.03}\rangle \sim \frac{1}{1.324} |c, 0\rangle - \frac{1}{1.986} e^{-0.814\pi i} |r, 1\rangle. \quad (127)$$

El estado $|\psi_{2,224.02}\rangle$ sí presenta un cambio importante. Esto puede observarse comparando las expresiones (125) y (127). El valor absoluto de los coeficientes c_{c0} y c_{r1} cambia bastante en presencia del potencial a las condiciones de (124). Además, la fase también es considerablemente mayor que sin potencial AC

Ahora modificamos nuevamente los parámetros del sistema para que coincidan con las condiciones de CDT. Elegimos nuevamente el valor de $\omega_{AC} = 0.1404$, pues en éste ocurren los fenómenos más pronunciados. Entonces, $V_{AC} = 0.67528$, de tal forma que $J_o(2.4048) = 0$.

En estas condiciones observamos claramente cómo los procesos de orden cero son los dominantes. La magnitud del número de Schmidt baja hasta cerca de uno en algunas regiones. En la figura 23 se ve claramente este fenómeno. La curva roja corresponde a las condiciones de CDT y la negra al sistema sin potencial AC.

La probabilidad de ocupación también tiene máximos y mínimos mucho más pronunciados en este caso que en cualquiera de los anteriores. En las gráficas de área de la figura 23, en las regiones del tiempo entre 25 y 50 y entre 200 y 250 (que corresponden con los mínimos de la curva roja) se aprecia claramente la localización en los sitios $|c, 0\rangle$ y $|r, 1\rangle$, respectivamente, poniendo de manifiesto el efecto de la CDT. En la región intermedia podemos ver oscilaciones menos drásticas entre la probabilidad de ocupación de los sitios $|c, 0\rangle$ y $|r, 1\rangle$, y la participación de otros sitios, como $|r, 0\rangle$ y $|c, 1\rangle$, en general disminuye. Entonces, bajo estas condiciones del potencial AC, el grado de entrelazamiento presentará disminuciones drásticas periódicamente con respecto a su evolución dinámica sin potencial AC.

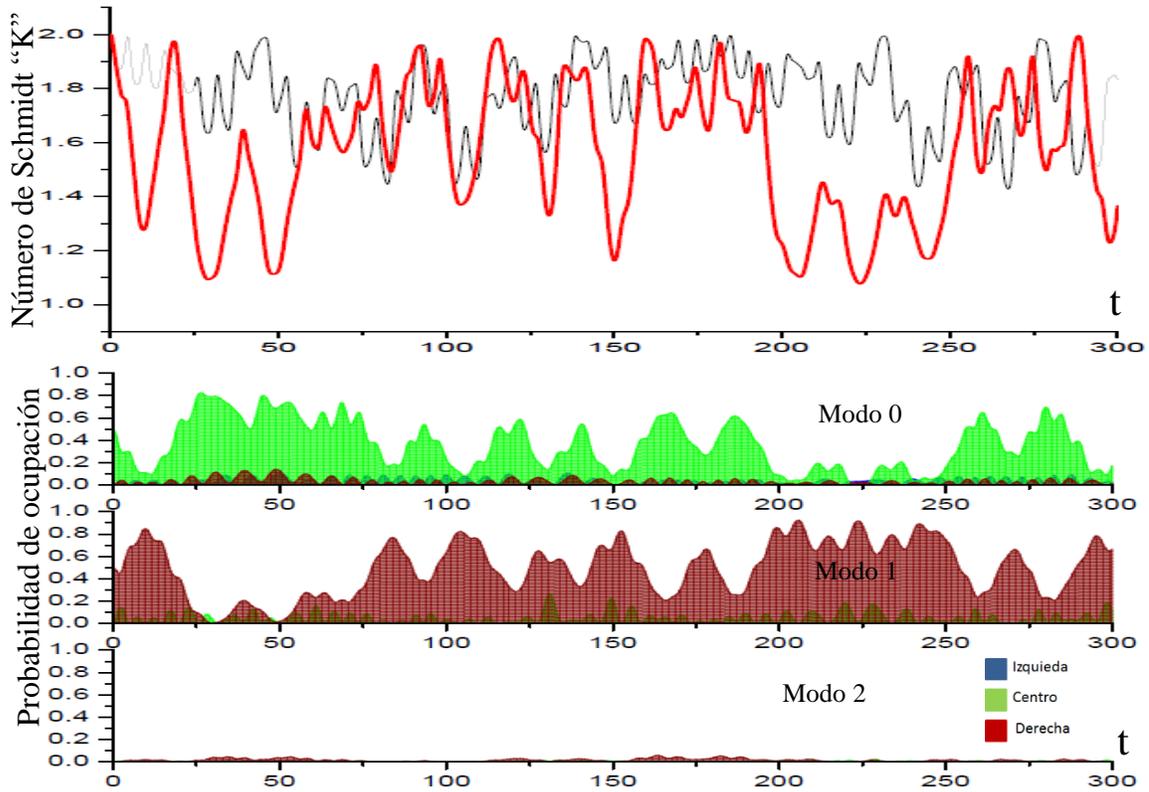
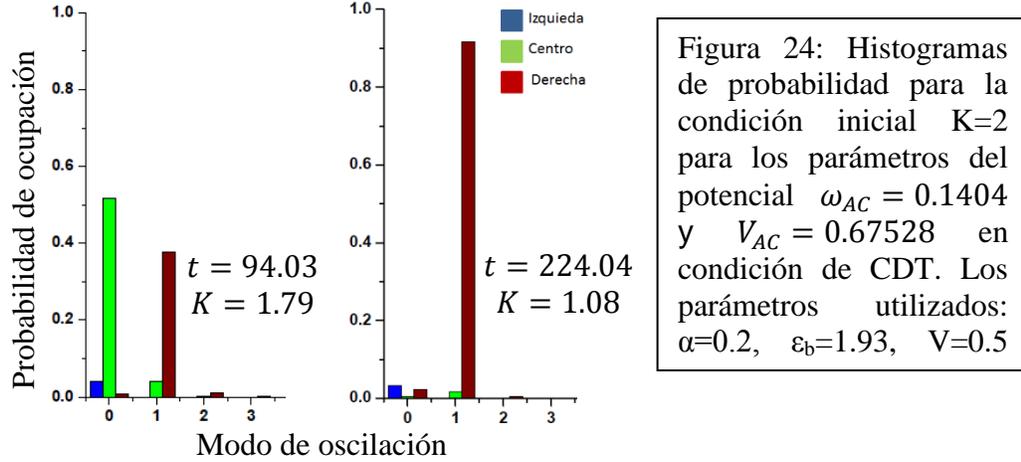


Figura 23: En la parte superior se muestra la evolución dinámica del número de Schmidt para la condición de entrelazamiento $K=2$ antes mencionada con los parámetros del campo $V_{AC} = 0.67528$ y $\omega_{AC} = 0.1404$ (curva roja) y sin AC (curva negra). En la parte inferior se muestra las gráficas de área de ocupación de los sitios para la curva roja. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

Hagamos referencia ahora a los tiempos que se estudiaron en otras condiciones. En la figura 24 se muestran los histogramas de probabilidad para $t = 94.03$ y $t = 224.04$. Vemos que el valor del número de Schmidt a $t \approx 94$ se mantiene con respecto a las otras condiciones del potencial AC estudiadas, así como la forma cualitativa de los estados entrelazados. Sin embargo, a $t \approx 224$ se manifiesta fuertemente la CDT, localizando al sistema en el estado $|r, 1\rangle$ prácticamente por completo.



La forma explícita de estos estados viene dada por las expresiones:

$$|\psi_{2,94.03}\rangle \sim -\frac{1}{1.389}|c, 0\rangle - \frac{1}{1.627}e^{-0.067\pi i}|r, 1\rangle, \quad (128)$$

$$|\psi_{2,224.04}\rangle \sim -\frac{1}{1.045}e^{-0.178\pi i}|r, 1\rangle. \quad (129)$$

Vemos que $|\psi_{2,94.03}\rangle$ es aproximadamente igual a las otras condiciones del potencial en cuanto a grado de entrelazamiento, pero $|\psi_{2,224.04}\rangle$ cambia considerablemente en las tres condiciones en las que se analizó cuantitativamente: sin AC; $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.1$; CDT con $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.67528$.

Otras condiciones de CDT se estudiaron también; sin embargo, no presentaron ningún fenómeno que no hayamos presentado anteriormente, tales como dominancia de procesos de órdenes superiores.

6.2.3 Evolución para un valor inicial $K=3$

La condición inicial en este caso es aquella en la que el sistema presenta un entrelazamiento híbrido máximo de $3 \times M$, es decir, en la que el número de Schmidt sea exactamente igual a tres, que es el máximo grado de entrelazamiento que puede presentar este sistema. La condición inicial, nuevamente, se elige en base a ocupaciones de sitios que se han observado en el sistema a lo largo de las pruebas anteriores, y es la siguiente:

$$|\psi_{3,t=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|l, 0\rangle + |c, 1\rangle + |r, 2\rangle). \quad (130)$$

Primero estudiemos la evolución natural de este sistema. El número de Schmidt oscila entre valores cercanos a $K=3$ y $K=1.5$. En la figura 25 podemos ver la evolución dinámica del número de Schmidt y de las probabilidades de ocupación. Si analizamos esta gráfica de área, vemos que las ocupaciones de los sitios $|l, 0\rangle$ y $|r, 2\rangle$ siguen un patrón bien definido que se correlaciona con las oscilaciones del número de Schmidt (ver la gráfica de la figura 25 desde $t = 0$ hasta $t \approx 280$). La región entre $t = 0$ y $t \approx 200$ presenta oscilaciones pronunciadas en el número de Schmidt, así como máximos y mínimos abruptos en las probabilidades de ocupación principalmente de los sitios $|l, 0\rangle$ y $|r, 2\rangle$ y una participación periódica más moderada del sitio $|c, 1\rangle$. Luego, entre $t \approx 200$ y $t \approx 280$, el número de Schmidt se estabiliza (respecto a la otra región) y las probabilidades de ocupación de los sitios $|l, 0\rangle$ y $|r, 2\rangle$ tienden a estabilizarse cambiando de una forma menos abrupta. Este patrón es periódico.

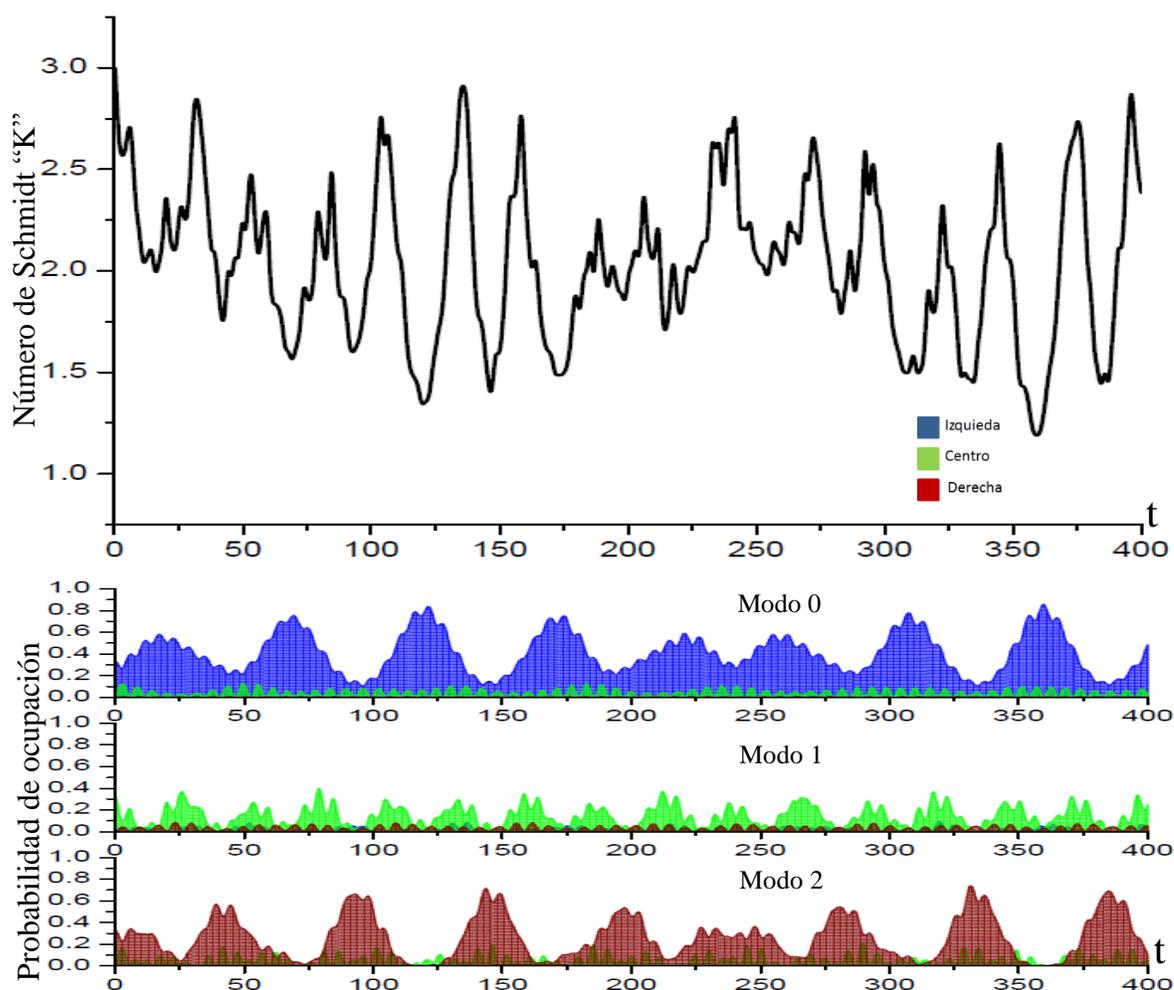


Figura 25: En la parte superior se muestra la evolución dinámica del número de Schmidt para la condición de entrelazamiento $K=3$ descrita arriba. En la parte inferior se muestra la gráfica de área de las probabilidades de ocupación. Los parámetros utilizados fueron $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

Analicemos algunos estados particulares a $t = 26.21$, $t = 134.00$ y a $t = 359.02$ con un número de Schmidt $K=2.31$, $K=2.74$ y $K=1.19$, respectivamente. Cualitativamente, los estados electrónicos se conservan en los modos de oscilación de la condición inicial. Esto puede verse en los histogramas de probabilidad de ocupación de la figura 26. Veamos ahora la forma de los estados a estos tiempos utilizando la forma de la expresión (113):

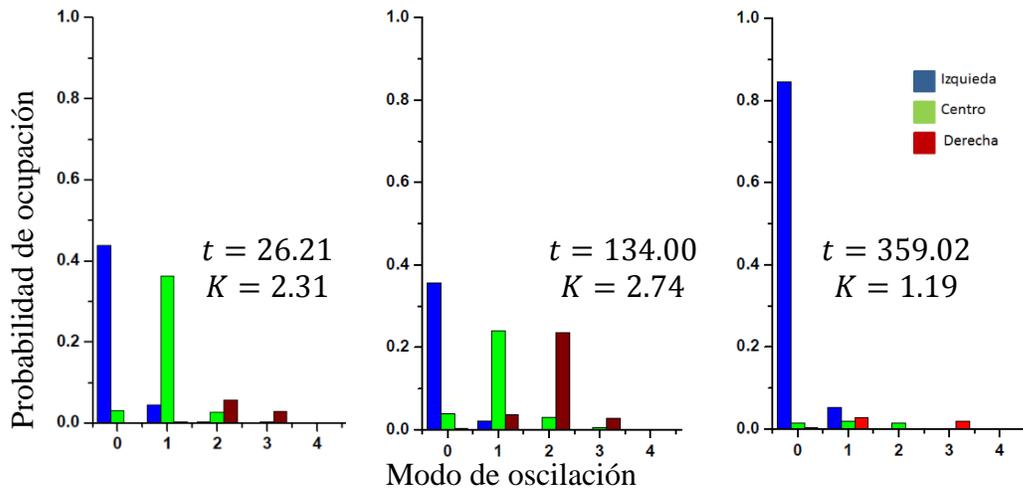


Figura 26: Histogramas de probabilidad para la condición inicial $K=3$ sin potencial AC. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

$$|\psi_{3,26.21}\rangle \sim \frac{1}{1.511} |l, 0\rangle - \frac{1}{1.654} e^{0.069\pi i} |c, 1\rangle + \frac{1}{4.271} e^{-0.010\pi i} |r, 2\rangle, \quad (131)$$

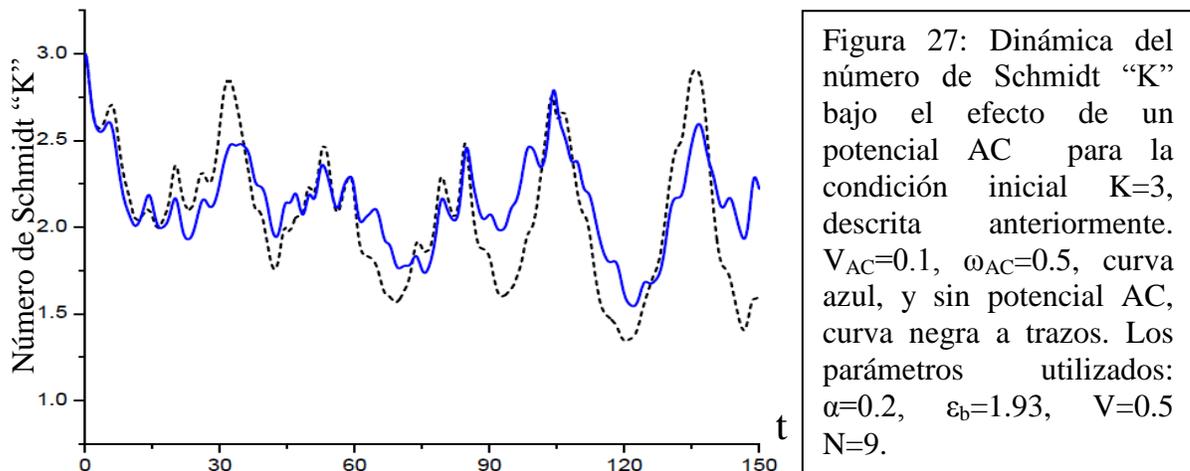
$$|\psi_{3,134.00}\rangle \sim \frac{1}{1.666} |l, 0\rangle - \frac{1}{2.014} e^{0.519\pi i} |c, 1\rangle - \frac{1}{2.074} e^{-0.890\pi i} |r, 2\rangle, \quad (132)$$

$$|\psi_{3,359.02}\rangle \sim \frac{1}{1.087} e^{0.250\pi i} |l, 0\rangle. \quad (133)$$

Vemos que, cuando participan tres sitios en los estados entrelazados, se involucran todos los tres estados electrónicos con los tres primeros modos de oscilación, esta forma de entrelazamiento es la misma para los estados entrelazados en el área de $3 \times N$ con un potencial AC.

Estudiamos ahora los efectos del potencial AC sobre este sistema. Primero aplicamos las condiciones del $V_{AC} = 0.1$ y una frecuencia $\omega_{AC} = 0.5$. De la misma forma que en los casos de las secciones pasadas, el efecto no es muy intenso. El potencial apenas modifica la magnitud del número de Schmidt, pero

cualitativamente se trata de los mismos estados que sin el potencial AC. En la figura 27 vemos este efecto.



Modifiquemos el valor de la frecuencia del potencial a $\omega_{AC} = 0.1404$, que es la frecuencia natural entre $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ con la finalidad de comprobar si, tal como sucedió con la condición de la sección anterior, la condición inicial que estamos utilizando posee una participación importante de estos dos estados excitados. Podemos ver en la figura 28 la evolución del número de Schmidt en estas condiciones del potencial AC en la curva azul y su evolución sin potencial AC en la curva negra. Notamos que para esta frecuencia del potencial AC sí existe un cambio significativo en algunas regiones. Entre $t = 200$ y $t = 275$, por ejemplo, se presenta una disminución notable de la magnitud del número de Schmidt.

Analizando el efecto de esta frecuencia del potencial ($\omega_{AC} = 0.1404$) en la probabilidad de ocupación de los sitios, es notable que incrementa sustancialmente la probabilidad de ocupación del sitio $|c, 1\rangle$. Como se puede ver al comparar las gráficas de área de las figuras 25 y 28, los máximos de probabilidad de este sitio sin potencial AC están alrededor entre 0.3 y 0.4, y con los parámetros $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.1$ rondan entre 0.7 y 0.8. Vemos que un efecto importante

de incluir el potencial AC a estas condiciones es la desaparición del comportamiento de los sitios $|l, 0\rangle$ y $|r, 2\rangle$ en la región comprendida entre $t \approx 200$ y $t \approx 280$. En general, se observa que existen estados considerablemente localizados a diferentes tiempos para los tres sitios que participan predominantemente, como a $t \approx 115$ para $|l, 0\rangle$, a $t \approx 50$ para $|c, 1\rangle$ y a $t \approx 90$ para $|r, 2\rangle$, por ejemplo.

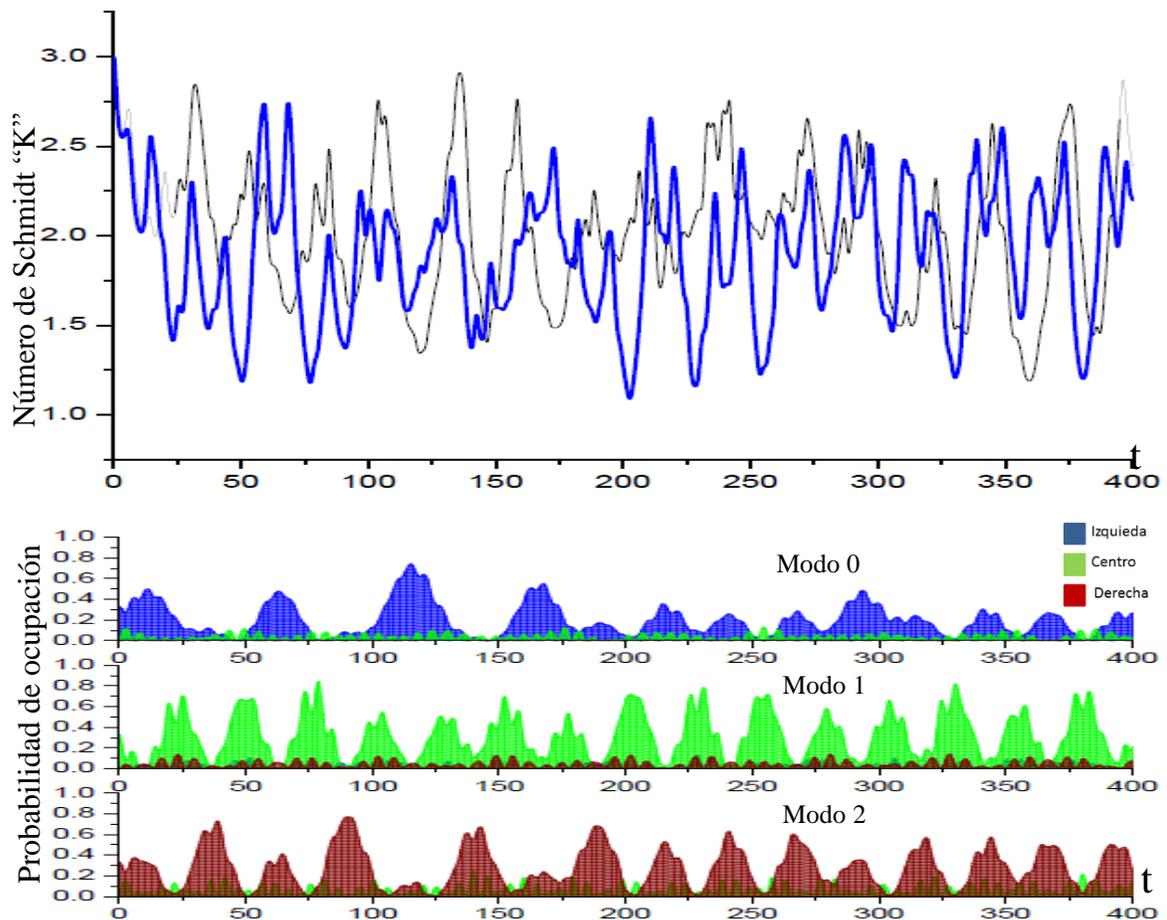


Figura 28: En la parte superior se muestra la evolución dinámica del número de Schmidt para la condición de entrelazamiento $K=3$ antes mencionada con los parámetros del campo $V_{AC} = 0.1$ y $\omega_{AC} = 0.1404$ (curva azul) y sin AC (curva negra). En la parte inferior se muestra las gráficas de área de ocupación de los sitios para la curva azul. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

Pasemos al análisis de los estados en tiempos específicos para estas mismas condiciones del potencial AC, para el análisis cualitativo nos apoyaremos en los histogramas de probabilidad de la figura 29, que corresponden a estas condiciones del potencial, y en los de la figura 26, que corresponden al caso sin potencial. A $t \approx 26.2$ el sistema tiende a localizarse en el sitio $|c, 1\rangle$ bajo el efecto del potencial, reduciendo sustancialmente la ocupación del sitio $|l, 0\rangle$, por lo que el número de Schmidt pasa de $K=2.31$ a $K=1.59$. A $t \approx 134$ el efecto del potencial es reducir la ocupación del sitio $|l, 0\rangle$, bajando el número de Schmidt de $K=2.74$ hasta $K=2.18$. Finalmente, a $t \approx 359$, el potencial reduce radicalmente la ocupación de $|l, 0\rangle$, que ahora se reparte básicamente entre los sitios $|c, 1\rangle$ y $|r, 2\rangle$, pasando de un estado con un grado de entrelazamiento prácticamente nulo a uno con $K=2.01$.

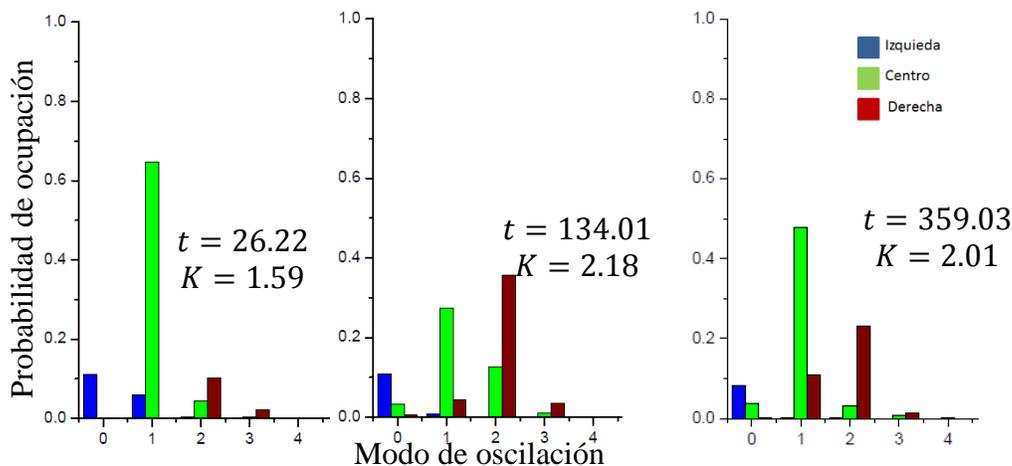


Figura 29: Histogramas de probabilidad para la condición inicial $K=3$ con los parámetros del potencial AC $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.1$. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

La forma de los estados que se presentan en la figura 29 es:

$$|\psi_{3,26.22}\rangle \sim \frac{1}{2.996} |l, 0\rangle - \frac{1}{1.243} e^{0.177\pi i} |c, 1\rangle - \frac{1}{3.144} e^{0.696\pi i} |r, 2\rangle, \quad (134)$$

$$|\psi_{3,134.01}\rangle \sim \frac{1}{3.047} |l, 0\rangle - \frac{1}{1.911} e^{0.239\pi i} |c, 1\rangle + \frac{1}{1.676} e^{-0.381\pi i} |r, 2\rangle, \quad (135)$$

$$|\psi_{3,359.03}\rangle \sim -\frac{1}{3.508} |l, 0\rangle + \frac{1}{1.447} e^{-0.667\pi i} |c, 1\rangle + \frac{1}{2.076} e^{-0.485\pi i} |r, 2\rangle. \quad (136)$$

La principal característica de los estados $|\psi_{3,t}\rangle$ bajo estas condiciones del potencial AC con respecto a los estados sin potencial AC, es la notable disminución del coeficiente c_{l0} .

Pasemos ahora a las condiciones de CDT. Estudiaremos el sistema bajo las mismas condiciones que en las secciones anteriores, esto es, la relación $\xi = \frac{V_{AC}}{2\omega_{AC}} = 2.4048$, tal que $J_0(2.4048) = 0$, con $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.67528$.

Con las condiciones de CDT utilizadas, el sistema presenta varias regiones en donde disminuye el grado de entrelazamiento. Sin embargo, en unas pocas regiones se crean estados fuertemente entrelazados donde sin potencial AC se encontraba estados muy localizados, es decir, no entrelazados. En la figura 30, a $t \approx 359$, se puede ver esta generación de estados entrelazados en la curva roja, que representa la evolución del número de Schmidt a las condiciones del CDT, y los estados localizados en la curva negra, que representa a su evolución en ausencia de potencial AC. Con respecto a la evolución del sistema a ese mismo tiempo con las condiciones del potencial $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.1$, vemos que sistema pasa de un valor cercano de $K=2$ a un valor de $K=2.57$.

Analicemos la probabilidad de ocupación de los sitios para los tres primeros modos de oscilación con la ayuda de la gráfica de área de a figura 30. Vemos que el sitio $|r, 2\rangle$ permanece con probabilidades de ocupación entre 0.3 y 0.4 la

mayoría del tiempo, no presenta oscilaciones muy abruptas ni regiones dominantes. Sin embargo, los sitios $|l, 0\rangle$ y $|c, 1\rangle$ sí presentan regiones de máximos alrededor de 0.8 y vemos que, durante la mayor parte del tiempo, no se presentan las ocupaciones de estos sitios simultáneamente. Si comparamos estas probabilidades con las del caso sin potencial AC (figura 25), notaremos que el efecto de las condiciones de CDT es básicamente anular el tuneo del estado $|l\rangle$ al estado $|c\rangle$ en ciertas regiones y del estado $|c\rangle$ al estado $|l\rangle$ en otras regiones, localizando al sistema en $|l, 0\rangle$ y en $|c, 1\rangle$, respectivamente.

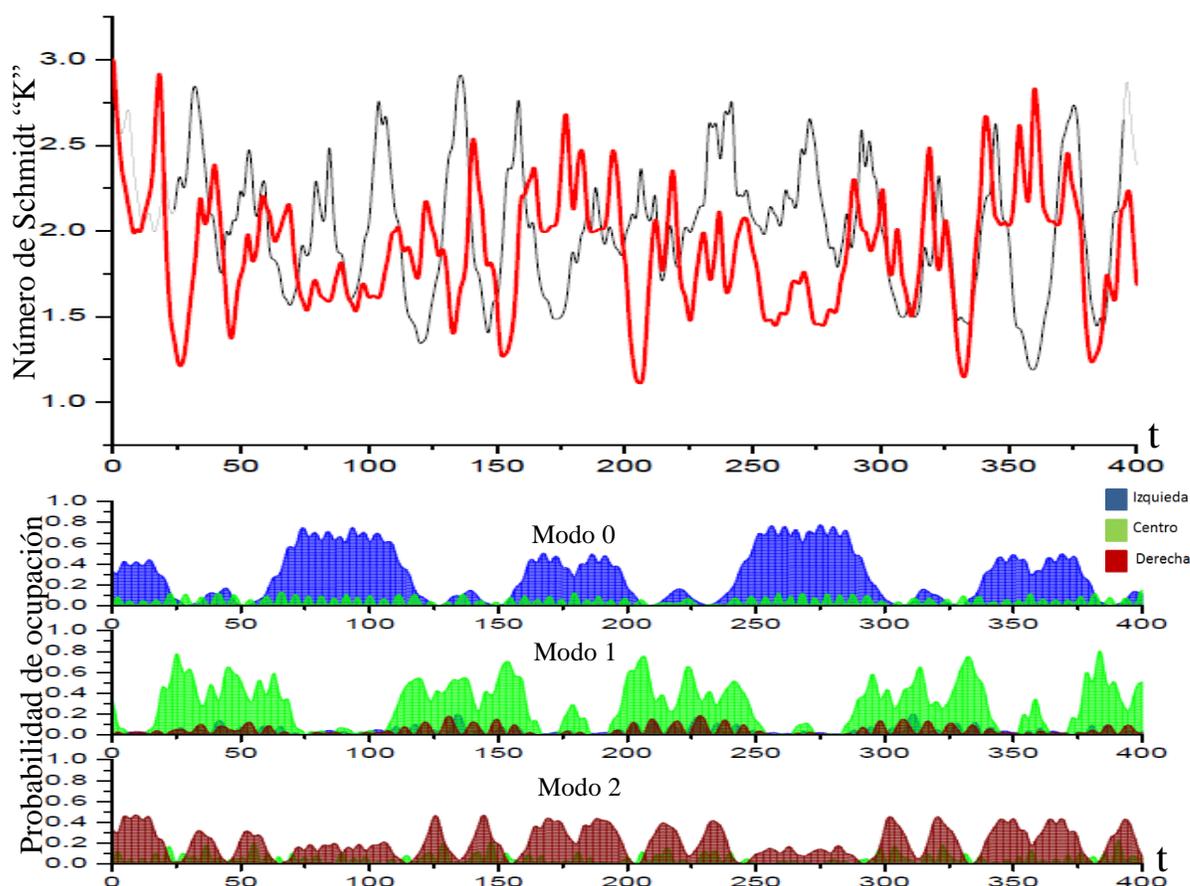


Figura 30: En la parte superior se muestra la evolución dinámica del número de Schmidt para la condición de entrelazamiento $K=3$ antes mencionada en condiciones de CDT $V_{AC} = 0.67528$ y $\omega_{AC} = 0.1404$ (curva roja) y sin AC (curva negra). En la parte inferior se muestra las gráficas de área de ocupación de los sitios para las condiciones CDT. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\epsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

Continuando con el análisis de los estados a partir de las gráficas de área (figura 30), vemos que existirán regiones en el área de entrelazamiento de $2 \times N$ en donde participarán los sitios $|l, 0\rangle$ y $|r, 2\rangle$. Existen zonas bastante regulares, como entre $t \approx 150$ y $t \approx 200$ en donde predominan estos sitios y, solamente en la parte central de esta región, encontraremos al sitio $|c, 1\rangle$, ampliando el entrelazamiento al área de $3 \times N$. Otra forma de estados entrelazados $2 \times N$ que se presentan son los que involucran a los sitios $|c, 1\rangle$ y $|r, 2\rangle$, en las zonas como la comprendida entre $t \approx 100$ y $t \approx 150$. También para estos casos el entrelazamiento puede presentarse en el área de $3 \times N$, cuando llegamos al centro de la región el sitio $|l, 0\rangle$ tendrá contribuciones importantes. Las formas de entrelazamiento $2 \times N$ con contribuciones de $|l, 0\rangle$ y $|c, 1\rangle$ pueden presentarse también, éstas cada $\Delta t \approx 50$ cuando se superponen los sitios.

Ahora veamos la forma cualitativa de los estados a los tiempos estudiados para las otras condiciones. Los histogramas de probabilidad de ocupación para las condiciones de CDT se muestran en la figura 31. Para los tiempos $t \approx 26.2$ y $t \approx 134$ el sistema tiende a localizarse en el sitio $|c, 1\rangle$, encontrando así grados de entrelazamiento $K=1.21$ y $K=1.47$ respectivamente. Esta condición solamente se había presentado en el caso de potencial AC con parámetros $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.1$ a $t \approx 26.2$. Como ya se había mencionado, el sistema a $t \approx 359$ presenta un caso de entrelazamiento en la región $3 \times N$ con un valor del número de Schmidt de $K=2.57$, contrastando con los casos sin potencial AC, en donde el sistema se encontraba localizado en $|l, 0\rangle$ y con potencial a $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.1$ en el que presentó un valor de $K=2.05$.

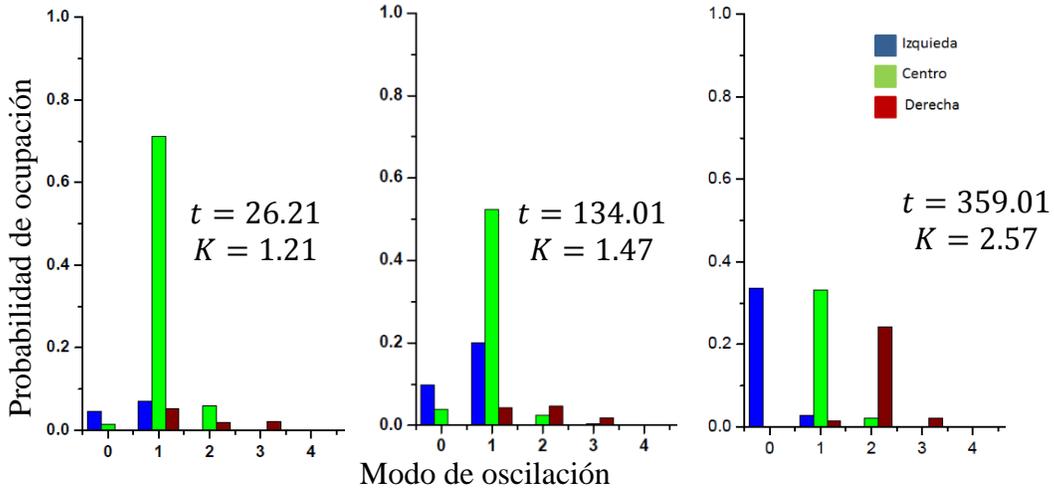


Figura 31: Histogramas de probabilidad para la condición inicial $K=3$ con los parámetros de CDT $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.67528$. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

La forma de estos estados se presenta a continuación:

$$|\psi_{3,26.21}\rangle \sim \frac{1}{4.635} |l, 0\rangle + \frac{1}{1.181} e^{-0.364\pi i} |c, 1\rangle, \quad (137)$$

$$|\psi_{3,134.02}\rangle \sim \frac{1}{3.183} |l, 0\rangle - \frac{1}{5.058} e^{-0.140\pi i} |l, 1\rangle - \frac{1}{1.382} e^{-0.854\pi i} |c, 1\rangle + \frac{1}{4.647} e^{-0.653\pi i} |r, 2\rangle, \quad (138)$$

$$|\psi_{3,359.01}\rangle \sim \frac{1}{1.723} |l, 0\rangle - \frac{1}{1.731} e^{0.105\pi i} |c, 1\rangle - \frac{1}{2.040} e^{0.284\pi i} |r, 2\rangle. \quad (139)$$

Vemos que el estado $|\psi_{3,359.01}\rangle$ se acerca a un estado de máximo entrelazamiento, en donde los coeficientes poseen el valor $c_{mn} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 1.732$, en tanto que el estado $|\psi_{3,26.21}\rangle$ puede aproximarse a un estado localizado en $|c, 1\rangle$. El estado $|\psi_{3,134.02}\rangle$, posee contribuciones importantes de diferentes sitios pero con el mismo modo de oscilación, $|l, 1\rangle$ y $|c, 1\rangle$, que son sitios separables y, por lo tanto, no entrelazados.

Cabe mencionar que, para esta condición inicial, también se corrieron pruebas para otras condiciones de CDT, pero tampoco presentaron efectos que no hayamos estudiado anteriormente.

6.2.4 Promedio temporal del número de Schmidt

Con la finalidad de estudiar el comportamiento dinámico del sistema en función de los parámetros del TDQS, voltaje ε_b e inversa de la longitud de tuneleo α , se obtuvo el promedio del número de Schmidt para un periodo natural (el primer periodo):

$$\bar{K} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} K(t) dt, \quad (140)$$

en donde τ se refiere al periodo natural del sistema y \bar{K} es el promedio en el tiempo del número de Schmidt.

Para ver con claridad los resultados, se trabaja con la condición inicial de la sección VI.2.1, que es la mezcla entre el primer y el segundo estados excitados $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$.

Analizaremos primero los resultados generales con diferentes condiciones del potencial AC y después veremos regiones particulares. En la figura 32 podemos ver los coeficientes de Schmidt promedio en función de los parámetros del sistema ε_b y α para el caso sin potencial AC en a), con $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.1$ en b) y en condiciones de CDT, $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.67528$ en c). En la figura 32 vemos regiones que claramente modifican su grado de entrelazamiento cuando se incluye el potencial AC. Con respecto a la figura 32 a), en la figura 32 b) el cambio es poco significativo. En la figura 32 c), sin embargo, que es el caso en condiciones de CDT, existen cambios drásticos.

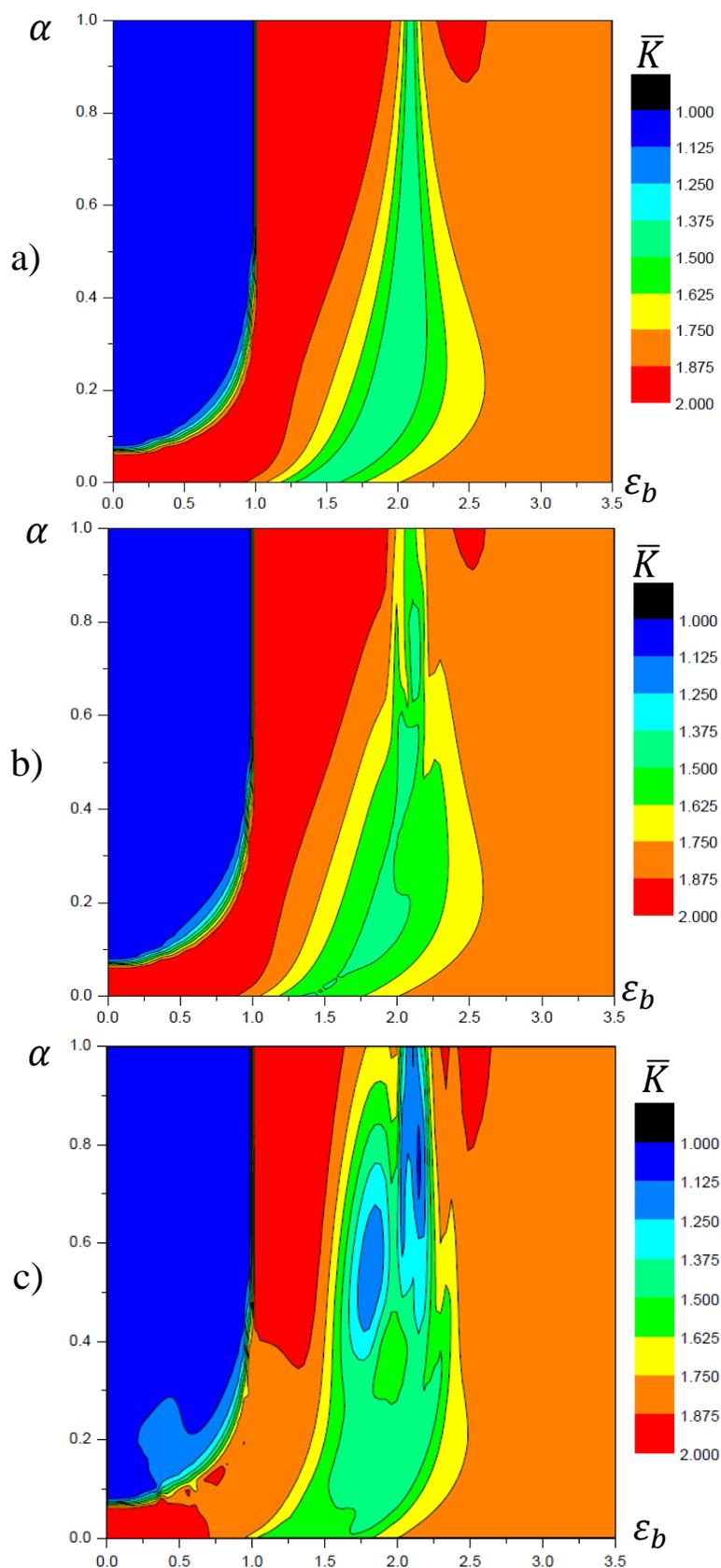


Figura 32: Número de Schmidt promedio en función de los parámetros del sistema ϵ_b y α con $N=9$ modos de oscilación para la condición inicial antes mencionada. Los parámetros del potencial AC son: a) sin AC, b) $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.1$ y c) condición de CDT $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.67528$.

Analicemos un caso interesante con más detalle. Veamos la región (región I) definida en los valores del voltaje ε_b entre 1.5 y 2.0 y la inversa de la longitud de tunelero α entre 0.4 y 0.7. Esta región se modifica en presencia del potencial AC, el grado de entrelazamiento disminuye un poco cuando $V_{AC} = 0.1$; sin embargo, cuando se elige la condición de CDT con $V_{AC} = 0.67528$, la región completa disminuye su grado de entrelazamiento radicalmente. Evidentemente, en esta región dominan los procesos a orden cero. En la figura 33 presentamos un punto de las figuras 32 en esta región, donde $\varepsilon_b = 1.75$ y $\alpha = 0.5$. Para este caso el periodo natural es $\tau = 39.04$. La curva negra representa las condiciones del potencial de la figura 32 a), la azul las de la figura 32 b) y la roja las de la figura 32 c), que son las condiciones de CDT. Es muy notable la destrucción de estados entrelazados.

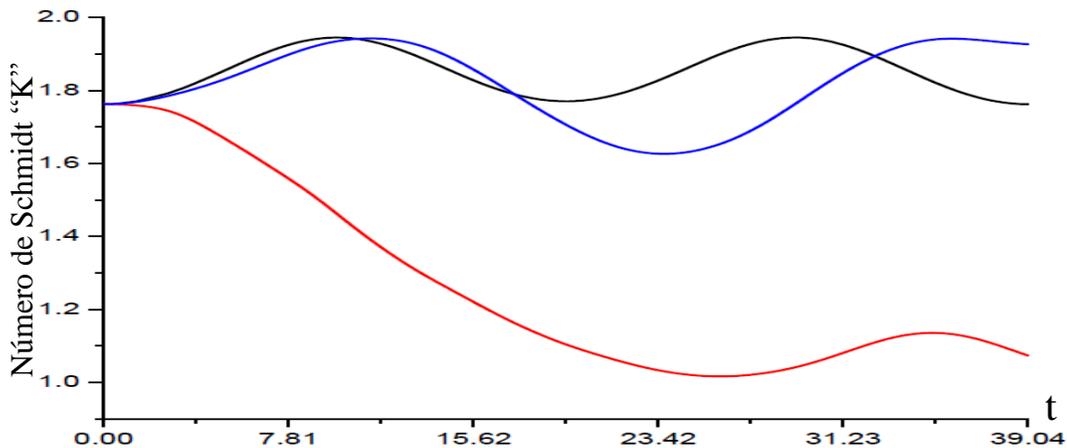


Figura 33: Evolución del número de Schmidt para los parámetros del sistema $\varepsilon_b = 1.75$, $\alpha = 0.6$ y $N=9$ estados de oscilación. La curva negra es el caso sin potencial AC, la azul con las condiciones $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.1$ y la roja para las condiciones de CDT $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.67528$. Se muestra para un periodo natural.

Para ver con más claridad el fenómeno de CDT comparamos las probabilidades de ocupación de los sitios. En la figura 34 presentamos las gráficas de área de probabilidad de ocupación de sitios. Bajo los parámetros de la condición de CDT el sistema se localiza en el sitio $|r, 1\rangle$, cuando inicialmente se repartía de una manera similar entre los sitios $|c, 0\rangle$ y $|r, 1\rangle$.

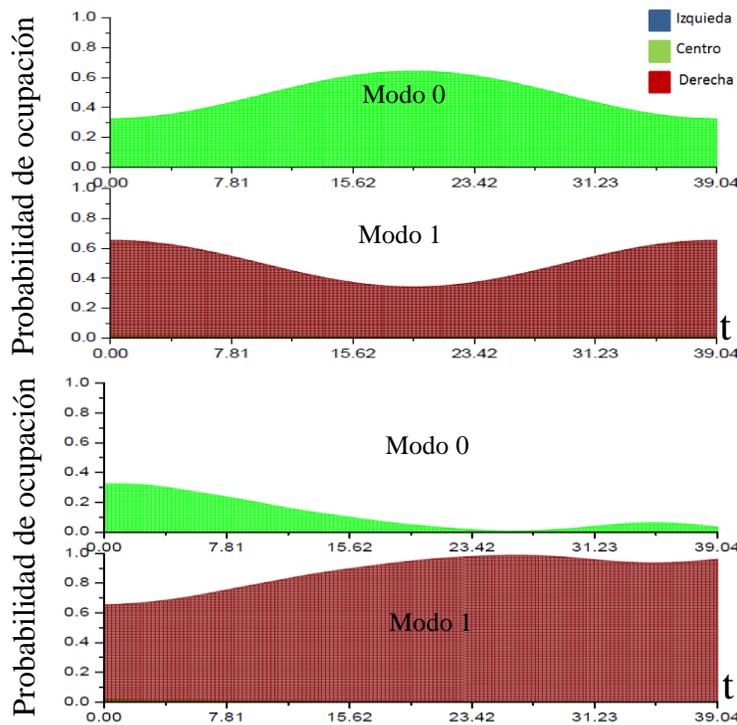


Figura 34: Probabilidad de ocupación de los sitios para los parámetros del sistema $\varepsilon_b = 1.75$, $\alpha = 0.6$ y $N=9$ estados de oscilación. La figura superior es el caso sin potencial AC y la inferior para las condiciones de CDT $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.67528$. Se muestra para un periodo natural.

Existe otra región (región II) en la que también se presenta un cambio significativo al aplicar la condición de CDT. Es la región comprendida en los valores del voltaje ε_b entre 2.1 y 2.3 y la inversa de la longitud de tuneleo α entre 0.6 y 1.0. En este caso el valor promedio del número de Schmidt también disminuye debido a la localización del sistema en un sitio específico. Analicemos las gráficas de área de probabilidad de la figura 35, que son para un punto de esta región ($\varepsilon_b = 2.2$ y $\alpha = 0.7$) y comparan la probabilidad de ocupación en el modo cero y el modo uno

del caso sin potencial AC y en condiciones de CDT. En ellas observamos que la localización en esta región ocurre en el sitio $|c, 0\rangle$.

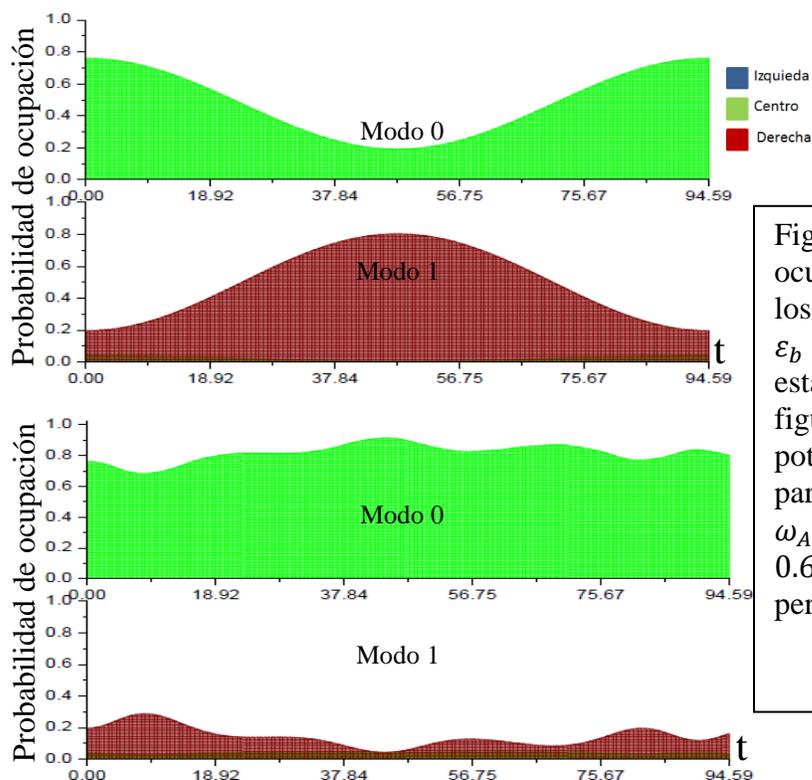


Figura 35: Probabilidad de ocupación de los sitios para los parámetros del sistema $\varepsilon_b = 2.20$, $\alpha = 0.7$ y $N=9$ estados de oscilación. La figura superior es el caso sin potencial AC y la inferior para las condiciones de CDT $\omega_{AC} = 0.1404$ y $V_{AC} = 0.67528$. Se muestra para un periodo natural.

Vemos entonces que en las condiciones de CDT el sistema se localiza en el sitio $|r, 1\rangle$ en la región I, impidiendo el tuneo del electrón de $|r\rangle$ a $|c\rangle$, y en el sitio $|c, 0\rangle$ en la región II, impidiendo el tuneo del electrón de $|c\rangle$ a $|r\rangle$.

6.3. Caracterización dinámica mediante el vector de Bloch

Mediante la relación encontrada en la sección V.3 y plasmada en la ecuación (102), así como con los componentes del vector de Bloch dados en (86), analicemos ahora el comportamiento del vector de Bloch $|\vec{s}|$ y comprobemos las propiedades encontradas en la tabla1 para el caso estacionario y para el caso dinámico sin y con potencial AC.

Para tener presentes los procedimientos utilizados en esta sección, recordemos primero la expresión (86), que son los componentes del vector de Bloch expresados en términos de los elementos del operador de densidad reducidos:

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N L_N C_N^* + \sum_N C_N L_N^*), & s_2 &= i \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N L_N C_N^* - \sum_N C_N L_N^*), \\
 s_3 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N |L_N|^2 - \sum_N |C_N|^2), & s_4 &= i \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N L_N R_N^* - \sum_N R_N L_N^*), \\
 s_5 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N C_N R_N^* + \sum_N R_N C_N^*), & s_6 &= i \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N C_N R_N^* - \sum_N R_N C_N^*), \\
 s_7 &= \frac{\sqrt{3}}{2} (\sum_N L_N R_N^* + \sum_N R_N L_N^*), & s_8 &= \frac{1}{2} (1 - 3 \sum_N |R_N|^2),
 \end{aligned}$$

y, la relación directa entre el número de Schmidt y el vector de Bloch de la ecuación (102):

$$K = \frac{3}{2|\vec{s}|^2 + 1}.$$

En la figura 36 a), b) y c) se muestra el comportamiento del vector de Bloch, en el caso estacionario, como función del voltaje ε_b para el primer, segundo y quinto estados excitados ($|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ y $|\phi_5\rangle$.) respectivamente. Para cada caso se calculó el vector de Bloch con los componentes del vector dados en (86) y con la relación

(102). Las curvas son idénticas y se superponen (por ello que parece sólo haber una). Esto resulta una comprobación alternativa de nuestros cálculos.

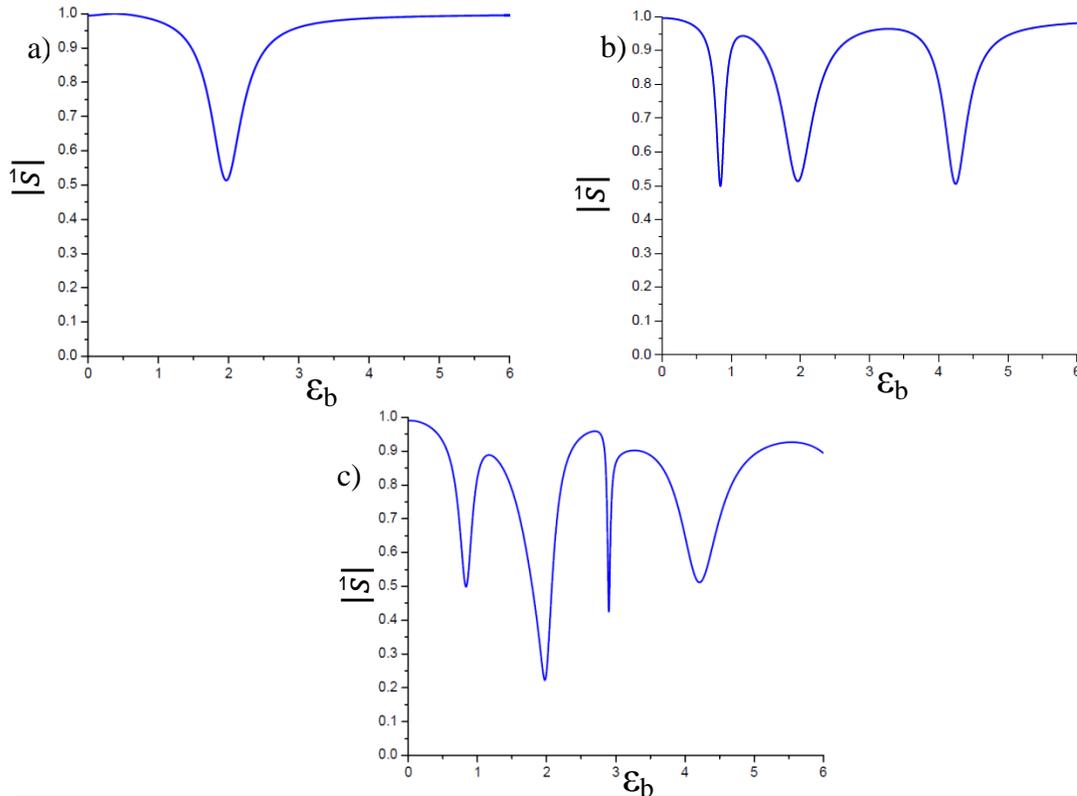


Figura 36: Vector de Bloch v.s. ϵ_b para el primer a), segundo b) y quinto c) estados excitados. La curva negra es el cálculo realizado con los componentes del vector de Bloch (86) y la azul con la relación analítica (102). Los parámetros utilizados: $V=0.5$, $\alpha=0.2$, $N=9$ modos de oscilación.

El mismo procedimiento se utiliza en el caso dinámico para comprobar la validez de las relaciones (86) y (102). Presentamos estos cálculos, que se realizaron para algunos de los casos ya estudiados en las secciones de VI.2, a manera de gráficos en la figura 37.

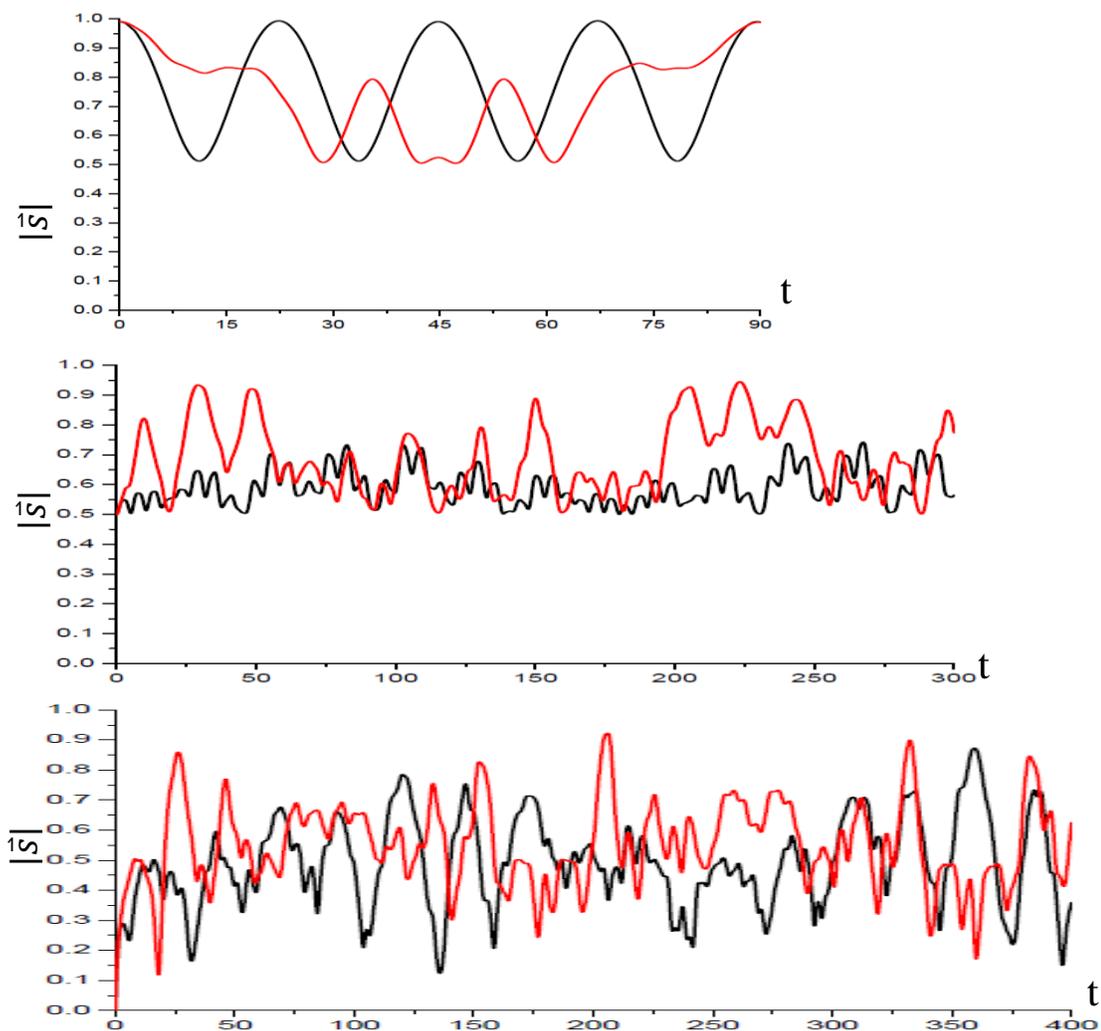


Figura 37: Evolución dinámica del vector de Bloch, las curvas negras representan los casos sin potencial AC y las rojas los casos de CDT estudiados anteriormente. La gráfica superior es para la condición inicial de la sección VI.2.1, la de la parte media para la condición inicial de la sección VI.2.2 y la inferior para la condición inicial de la sección VI.2.3. Los parámetros utilizados: $\alpha=0.2$, $\varepsilon_b=1.93$, $V=0.5$ $N=9$ estados de oscilación.

Es claro que, cuando existe un máximo entrelazamiento aproximado en donde sólo participan dos estados electrónicos (en la región de $2xN$), la magnitud del vector de Bloch llega a $\frac{1}{2}$ y, solamente cuando participan los tres estados electrónicos (en la región de $3xN$), el vector de Bloch se acerca a cero. Este comportamiento que se corresponde con las propiedades presentadas en la tabla 1 de la sección V.2 para la magnitud del vector de Bloch.

Con la relación analítica (102) entre el número de Schmidt y el vector de Bloch, podemos asegurar que la forma y el grado del entrelazamiento en cada punto de las figuras 36 y 37 corresponden con la forma y grado de entrelazamiento que encontramos en las secciones anteriores para cada caso.

Cabe recordar que la importancia del análisis del vector de Bloch es que éste es una observable que presenta una relación directa e inversamente proporcional con una medida de entrelazamiento robusta (el número de Schmidt) para cualquier sistema puro en \mathcal{H}^{3xN} , como se demostró en la sección V.1.

Capítulo 7. Conclusiones

En este trabajo se estudió la forma y el grado de entrelazamiento híbrido $3 \times N$ entre los tres estados electrónicos de los puntos cuánticos y los modos oscilación en un TDQS. Recordemos que el TDQS consiste en tres puntos cuánticos con un solo electrón en el régimen de bloqueo de Coulomb, ordenados de manera lineal con los puntos de los extremos fijos y el punto central oscilante, de tal forma que el tuneo entre los puntos cuánticos depende de la posición del punto cuántico central. El estudio se realizó para el sistema en estado estacionario primeramente y, posteriormente, para la evolución temporal del sistema sin y con un potencial AC periódico. El grado de entrelazamiento se caracterizó mediante el número de Schmidt.

Para el caso estacionario, los máximos del número de Schmidt, $K \approx 2$ para los casos en los que participan dos estados electrónicos y $K \approx 3$ para los casos en los que participan los tres estados electrónicos, se corresponden con anti-cruces del espectro de eigenenergías del sistema. El estado base $|\phi_B\rangle$ no presenta ningún grado significativo de entrelazamiento, en tanto que el primer $|\phi_1\rangle$, segundo $|\phi_2\rangle$ y quinto $|\phi_5\rangle$ estados excitados sí presentan grados importantes de entrelazamiento.

A partir de un valor de la inversa de la longitud de tuneo $\alpha \approx 0.2$, el grado de entrelazamiento máximo se estabiliza a valores fijos del voltaje ε_b . Resumamos que estos máximos se encuentran en $\varepsilon_b \approx 1.93$ para el primer estado excitado $|\phi_1\rangle$, $\varepsilon_b \approx 0.84, 1.93$ y 4.21 para el segundo estado excitado $|\phi_2\rangle$ y $\varepsilon_b \approx 0.84, 1.93, 2.90$ y 4.21 para el quinto estado excitado $|\phi_5\rangle$ (el valor del voltaje máximo estudiado es $\varepsilon_b = 6$).

Existe una relación cualitativa entre el entrelazamiento híbrido $3 \times N$ presente en el TDQS y la corriente electrónica a través de los puntos cuánticos. Comparamos los espectros obtenidos del grado de entrelazamiento con los cálculos realizados en

un trabajo anterior sobre corriente electrónica en el mismo TDQS (Maldonado, 2011) y encontramos que los máximos de corriente electrónica corresponden con máximos de entrelazamiento para los diferentes estados excitados. Todo esto en función de los parámetros del sistema: inversa de la longitud de tuneleo α y voltaje ε_b .

Para la evolución dinámica del entrelazamiento en el TDQS, utilizando como condición inicial la mezcla entre el primer y segundo estados excitados, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle)$, vemos que al utilizar la frecuencia del potencial AC, ω_{AC} , igual a la frecuencia natural de la mezcla, $\omega_s = 0.1404$, se presentan cambios significativos con respecto a la evolución sin el potencial AC. Estos cambios consisten en el aumento del grado de entrelazamiento cada determinado periodo de tiempo. Utilizando las condiciones de CDT para el primer cero de Bessel $J_0(2.4048) = 0$ (con $\omega_{AC} = \omega_s$), vemos que existen regiones donde el grado de entrelazamiento baja significativamente, por lo que dominan los procesos a orden cero, y otras en las que se generan estados entrelazados, en donde dominan los procesos de orden superior.

Para la evolución dinámica del entrelazamiento en el TDQS, utilizando como condición inicial un estado con máximo grado de entrelazamiento $K=2$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|c, 0\rangle + |r, 1\rangle)$, observamos que utilizar una frecuencia para el potencial AC igual a la frecuencia natural de la mezcla entre el primer y segundo estados excitados ($\omega_{AC} = 0.1404$) resulta en cambios significativos en el grado de entrelazamiento. Esto no pasa con otras frecuencias del potencial AC (para un mismo valor de la amplitud AC), por lo que concluimos que para esta condición inicial existe una gran participación de $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$. El efecto es la disminución del grado de entrelazamiento en algunas regiones. Este mismo efecto se presenta, con una magnitud mayor, cuando se utilizan las condiciones de CDT para esa misma

frecuencia del potencial AC. Para esta condición inicial, los procesos a orden cero son predominantes.

Para la evolución dinámica del entrelazamiento en el TDQS, utilizando como condición inicial un estado con máximo grado de entrelazamiento $K=3$, $\frac{1}{\sqrt{3}}(|l, 0\rangle + |c, 1\rangle + |r, 2\rangle)$, encontramos nuevamente que la participación del primer y segundo estados excitados es muy importante, ya que el efecto más significativo del potencial AC se presentó al utilizar la frecuencia AC con el valor de la frecuencia natural de la mezcla entre $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ ($\omega_{AC} = 0.1404$). El efecto consiste en la disminución del grado de entrelazamiento en algunas regiones y su aumento en otras. Utilizando las mismas condiciones de CDT que en los casos anteriores, vemos también disminuciones y aumentos en el grado de entrelazamiento; sin embargo, en este caso estas altas y bajas son mucho más pronunciadas que fuera de las condiciones de CDT. Existen, por lo tanto, regiones donde dominan los procesos de orden cero y regiones donde dominan procesos de orden superior.

Estudiamos los promedios temporales del número de Schmidt como función de los parámetros del TDQS, y para la condición inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle)$. Existen regiones en las que el efecto de potencial AC en condiciones de CDT para el primer cero de las funciones de Bessel disminuye drásticamente el grado de entrelazamiento. Una de estas regiones es aquella comprendida en los valores del voltaje ε_b entre 1.5 y 2.0 y una inversa de la longitud de tuneleo α entre 0.4 y 0.7, en la que bajo los parámetros de la condición de CDT el sistema se localiza en el sitio $|r, 1\rangle$, cuando sin potencial AC se reparte de una manera similar entre los sitios $|c, 0\rangle$ y $|r, 1\rangle$. La otra región importante está en los valores del voltaje ε_b entre 2.1 y 2.3 y la inversa de la longitud de tuneleo α entre 0.6 y 1.0, para la cual ocurre una localización bajo condiciones de CDT en el sitio $|c, 0\rangle$.

Existe una expresión que relaciona el número de Schmidt, una medida robusta del grado de entrelazamiento, con el vector de Bloch, una observable, para cualquier sistema de $3 \times N$: $K = \frac{3}{2|\bar{s}|^2+1}$. Además, si los coeficientes del vector de Bloch se expresan como parámetros del sistema, es posible tener un control del grado de entrelazamiento mediante el ajuste de estos parámetros.

Como trabajo futuro queda investigar el efecto del acoplamiento con contactos de los puntos cuánticos de los extremos del TDQS así como considerar la decoherencia y los efectos disipativos del entorno del oscilador, tal como se ha hecho en los trabajos de (Maldonado, 2011), (Villavicencio, et al., 2008) y (Villavicencio, et al., 2011) para el estudio de las propiedades transporte electrónico del TDQS. Además, los promedios temporales del número de Schmidt bajaron a valores cercanos a uno para la mezcla del primer y segundo estados excitados $|\phi_1\rangle$ y $|\phi_2\rangle$ cuando se utilizaron las condiciones de CDT en las regiones ya mencionadas de los parámetros ε_b y α . Un análisis profundo de estas regiones es importante, ya que son las zonas en donde es posible manipular de una manera más amplia el grado de entrelazamiento del TDQS mediante los parámetros del potencial AC.

Referencias bibliográficas

Aczel, A. (2001). Entanglement, the greatest mystery in physics. Primera ed. New York: Four walls eight eindows.

Amico, L., Fazio, R., Osterloh, A. & Verdal, V. (2008). Entanglement in many-body systems.. *Reviews of Modern Physics*, 80(2), pp. 517-576.

Armour, A. D. & MacKinnon, A. (2002). Transport via a quantum shuttle. *Physical Review B*, Volumen 66, p. 035333.

Aspect, A., Dalibard, J. & Roger, G. (1982). Experimental test of Bell's inequalities using time.varying analyzers. *Physical Review Letters*, 49(25), pp. 1804-1807.

Audretsch, J. (2007). Entangled systems, new directions in quantum physics. Primera ed. Weinheim: Wiley-VCH.

Bell, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics*, Volumen 1, pp. 195-200.

Byrd, M. S. & Khaneja, N. (2003). Characterization of the positivity of the density matrix in terms of the coherence vector representation. *Physical Review A*, Volumen 68, p. 062322.

Clauser, J. F., Horne, M. A., Shimony , A. & Holt, R. A. (1969). Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Physical Review Letters*, 23(15), pp. 880-884.

Dada, A. C. et al. (2011). Experimental high-dimensional two-photon entanglement and violation of generalized Bell inequalities. *Nature Physics*, Volumen 7, pp. 677-680.

Donarini, A. (2004). Dynamics of shuttle devices (Ph. D. Thesis). Lyngby: Technical University of Denmark.

Eberly, J. H. (2006). Schmidt analysis of pure-state entanglement. *Laser Physics*, 16(6), p. 921–926.

Einstein, A., Podolsky, B. & Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. *Physical Review*, Volumen 47, pp. 777-780.

Ekert, A. & Knight, P. L. (1994). Entangled quantum systems and the Schmidt decomposition. *Am. J. Phys.*, 63(5), pp. 415-423.

Feynman, R. P., Leighton, R. B. & Sands, M. (1964). The Feynman lectures on physics, quantum mechanics. Segunda ed. Massachusetts: Addison-Wesley publishing company.

Herrera May, A., Aguilera Cortés, L. A., Manjarrez, E. & González Palacios, M. (2010). Sistemas nanoelectromecánicos: origen, aplicaciones y desafíos. *Interciencia*, 35(3), pp. 163-170 .

Hichri, A., Jaziri, S. & Ferreira , R. (2004). Entangled Bell states of two electrons in a coupled quantum dots-phonon decoherence. *Physica E*, Volumen 24, pp. 234-243.

Karimi, E. et al. (2010). Spin-orbit hybrid entanglement of photons and quantum contextuality. *Physical Review A*, Volumen 82, p. 022115.

Kraus, B. & Cirac, J. I. (2001). Optimal creation of entanglement using a two-qubit gate. *Physical Review A*, Volumen 63, p. 062309.

Maldonado, I. (2011). Sistemas nanoelectromecánicos sometidos a campos eléctricos oscilantes (Tesis doctoral). Ensenada: CICESE.

Ma, X.-S. et al. (2012). Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward. *Nature*, Volumen 489, pp. 269-273.

Press, W. J., Flannery, B. P., Teukolsky, S. A. & Vetterling, W. (1992). Numerical recipes in fortran: the art of scientific computing. Primera ed. New York: Cambridge University Press.

Rieffel, E. & Polak, W. (2000). An introduction to quantum computing for non-physicists. *ACM Computing Surveys*, 32(3), pp. 300-335.

Rogge, M. C. & Haug, R. J. (2008). Two-path transport measurements on a triple quantum dot. *Physical Review B*, Volumen 77, p. 193306.

Röthlisberger, B. et al. (2008). Highly entangled ground states in tripartite qubit systems. *Physical Review Letters*, Volumen 100, p. 100502.

Sankar, R. (1994). Principles of quantum mechanics. Segunda ed. New York: Kluwer Academic/Plenum Publishers.

Sperling, J. & Vogel, W. (2011). Determination of the Schmidt number. *Physical Review A*, Volumen 83, p. 042315.

Spiegel, M. S., Liu, J. & Abellanas, L. (2005). Fórmulas y tablas de matemática aplicada. Segunda ed. Madrid: McGraw-Hill.

Tannor, D. (2007). Introduction to quantum mechanics, a time dependent perspective. Primera ed. Susalito (California): University Science Books.

Tóth, G. & Lent, C. S. (2001). Quantum computing with quantum-dot cellular automata. *Physical Review A*, Volumen 63, p. 052315.

Tougaw, P. D. & Lent, C. S. (1996). Dynamic behavior of quantum cellular automata. *J. Appl. Phys.*, 80(8), pp. 4722-4736.

Ursin, R. et al. (2007). Entanglement-based quantum communication over 144km. *Nature Physics*, Volumen 3, pp. 481-486.

Villavicencio, J., Maldonado, I., Cota, E. & Platero, G. (2011). Quasienergy spectrum and tunneling current in ac-driven triple quantum dot shuttles. *New Journal of Physics*, Volumen 13, p. 023032.

Villavicencio, J. et al. (2008). Tunnel spectroscopy in ac-driven quantum dot nanoresonator. *Appl. Phys. Lett.*, Volumen 92, p. 19102.

Apéndice A. Marco matemático

Espacios de Hilbert

Un espacio d-dimensional de Hilbert (\mathcal{H}_d) es un espacio vectorial lineal complejo en el cual está definido un producto escalar. Los vectores en este espacio se denotan como $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$, etc. La adición y multiplicación con números complejos, independencia lineal, la base y la dimensionalidad del espacio de Hilbert están definidas de manera análoga a los conceptos correspondientes en espacios vectoriales reales.

Un número complejo se asocia a un par de vectores $|\varphi\rangle$ y $|\psi\rangle$ como su producto escalar, que se escribe en la forma $\langle\varphi|\psi\rangle$. Utilizando la notación de Dirac, existe un espacio “ket” formado por los vectores “ket” $|\varphi\rangle$, $|\psi\rangle$... y un espacio dual “bra” formado por los vectores “bra” $\langle\varphi|$, $\langle\psi|$...

Existe una correspondencia tal entre los vectores “bra” y “ket”, si:

$$|\varphi\rangle = \alpha|\varphi_1\rangle + \beta|\varphi_2\rangle, \quad (141)$$

entonces,

$$\langle\varphi| = \alpha^*\langle\varphi_1| + \beta^*\langle\varphi_2|, \quad (142)$$

donde “*” significa el complejo conjugado.

Operadores lineales en el espacio de Hilbert

Los operadores lineales A, B,... operan sobre los vectores en el espacio de Hilbert de la siguiente manera:

- Linealidad : $A(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = \alpha A|\psi\rangle + \beta A|\phi\rangle$
- Suma: $(A + B)|\psi\rangle = A|\psi\rangle + B|\psi\rangle$
- Producto: $(AB)|\psi\rangle = A(B|\psi\rangle)$
- Eigenvector $|\psi_a\rangle$ de A, eigenvalor a de A: $A|\psi_a\rangle = a|\psi_a\rangle$
- Operador identidad: $I_a|\psi\rangle = |\psi\rangle$

Operadores Hermitianos

Un operador lineal en un espacio \mathcal{H}_d es llamado Hermitiano (H), si se cumple que:

$$H^\dagger = H, \quad (143)$$

en donde “ \dagger ” se refiere a la adjunta de un operador.

Los operadores Hermitianos juegan un papel importante en la mecánica cuántica ya que tienen una descomposición espectral con una base ortonormal ($|i\rangle$):

$$H = \sum_i r_i |i\rangle\langle i|, \quad r_i \in \mathcal{R} \quad (144)$$

y eigenvalores reales r_i .

Espacios de Hilbert compuestos

Para describir sistemas formados por dos o más subsistemas, cada uno con un \mathcal{H}_d particular y no necesariamente de la misma dimensionalidad, necesitamos definir el producto tensorial:

$$\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B, \quad (145)$$

en donde \mathcal{H}^A y \mathcal{H}^B representan los espacios de Hilbert de los subsistemas A y B respectivamente y \mathcal{H}^{AB} es, en sí mismo, otro espacio de Hilbert.

Visto matricialmente, el producto tensorial “ \otimes ” opera de la siguiente manera:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & a_{M2} & \cdots & a_{MN} \end{bmatrix} \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1N}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2N}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1}B & a_{M2}B & \cdots & a_{MN}B \end{bmatrix}. \quad (146)$$

Para cada par de vectores $|\varphi^A\rangle \in \mathcal{H}^A$ y $|\phi^B\rangle \in \mathcal{H}^B$, existe un vector producto en \mathcal{H}^{AB} , que puede ser escrito en diferentes formas:

$$|\varphi^A\rangle \otimes |\phi^B\rangle = |\varphi^A\rangle |\phi^B\rangle = |\varphi^A, \phi^B\rangle = |\varphi, \phi\rangle. \quad (147)$$

Si $\{|n^A\rangle\}$ es una base de \mathcal{H}^A y $\{|i^B\rangle\}$ es una base en \mathcal{H}^B , entonces $\{|n^A\rangle \otimes |i^B\rangle\}$ es una base en \mathcal{H}^{AB} , y todo vector $|\Psi^{AB}\rangle$ puede expandirse en términos de esa base:

$$|\Psi^{AB}\rangle = \sum_{n,i} \alpha_{n,i} |n^A\rangle \otimes |i^B\rangle, \quad (148)$$

y ésta será una base ortonormal si:

$$\langle n^A, i^B | n'^A, i'^B \rangle = \delta_{n,n'} \delta_{i,i'}. \quad (149)$$

Operadores en espacios de Hilbert compuestos

Existen dos tipos de operadores que pueden actuar en los espacios de Hilbert compuestos: los operadores producto, que actúan espacio por espacio, y los operadores generalizados, que actúan sobre todo el espacio.

- Operadores producto:

$$C^A \otimes D^B = C^A D^B, \quad (150)$$

$$[C^A D^B]|\varphi^A, \phi^B\rangle = |C^A \varphi^A, D^B \phi^B\rangle, \quad (151)$$

con las propiedades de traza y traza parcial en términos de una base ortonormal en \mathcal{H}^{AB} :

$$tr_{AB}[C^A D^B] = \sum_{n,i} C_{nn}^A D_{ii}^B = tr_A[C^A] tr_B[D^B], \quad (152)$$

$$tr_A[C^A D^B] = tr_A[C^A] D^B. \quad (153)$$

- Operadores generalizados:

$$Z^{AB} = I_d^{AB} \otimes Z^{AB} \otimes I_d^{AB} = \sum_{n,m} \sum_{i,j} \langle n^A, i^B | Z^{AB} | m^A, j^B \rangle (|n^A\rangle\langle m^A| \otimes |i^B\rangle\langle j^B|), \quad (154)$$

con las propiedades de traza y traza parcial en términos de una base ortonormal en \mathcal{H}^{AB} :

$$\text{tr}_{AB}[Z^{AB}] = \sum_{n,i} \langle n^A, i^B | Z^{AB} | n^A, i^B \rangle, \quad (155)$$

$$\text{tr}_A[Z^{AB}] = \sum_n \langle n^A | Z^{AB} | n^A \rangle. \quad (156)$$

(Audretsch, 2007)

Apéndice B. Descomposición de Schmidt

En este apéndice se demostrará que es posible escribir una ecuación de la forma de la ecuación (14) en la forma (11).

Cualquier sistema en $\mathcal{H}^{M \times N}$ puede escribirse de la forma (14):

$$|\Psi^{AB}\rangle = \sum_{m=1}^a \sum_{n=1}^b c_{m,n} |m^A, n^B\rangle, \quad (157)$$

donde $|m^A\rangle$ y $|n^B\rangle$ son bases ortonormales y $a \leq b$. Se introducirán los estados:

$$|\tilde{w}_m^B\rangle = \sum_{n=1}^b c_{m,n} |n^B\rangle, \quad (158)$$

de tal forma que:

$$|\Psi^{AB}\rangle = \sum_{m=1}^a |m^A, \tilde{w}_m^B\rangle. \quad (159)$$

Los estados $|\tilde{w}_m^B\rangle$ no son necesariamente ortogonales ni están normalizados. Sin embargo, la ecuación (14) tiene estas propiedades. Veamos ahora cómo es posible obtenerlas. Elegimos como la base ortonormal $|m^A\rangle$ de la ecuación (157) los eigenvectores $|u_m^A\rangle$ del operador reducido del subsistema A, ρ^A con eigenvalores λ_m :

$$\rho^A = \sum_{m=1}^a \lambda_m |u_m^A\rangle\langle u_m^A|. \quad (160)$$

donde $\lambda_m \geq 0$ y $\sum_{m=1}^a \lambda_m = 1$. Los eigenvalores cumplirán con $\lambda_m > 0$ mientras $1 \leq m \leq K$.

Ahora obtengamos ρ^A a partir de la ecuación (156) utilizando los eigenvectores $|u_m^A\rangle$ y efectuando la traza parcial sobre el subsistema B:

$$\begin{aligned}\rho^A &= Tr_B [\sum_{m,m'=1}^a |u_m^A, \tilde{w}_m^B\rangle \langle u_{m'}, \tilde{w}_{m'}^B|] = Tr_B [\sum_{m,m'=1}^a |u_m^A\rangle \langle u_{m'}^A| \otimes |\tilde{w}_m^B\rangle \langle \tilde{w}_{m'}^B|] = \\ &= \sum_{m,m'=1}^a |u_m^A\rangle \langle u_{m'}^A| Tr_B [|\tilde{w}_m^B\rangle \langle \tilde{w}_{m'}^B|] = \sum_{m,m'=1}^a \langle \tilde{w}_{m'}^B | \tilde{w}_m^B \rangle |u_m^A\rangle \langle u_{m'}^A|. \quad (161)\end{aligned}$$

Comparando la ecuación (161) con la (160) podemos escribir:

$$\langle \tilde{w}_{m'}^B | \tilde{w}_m^B \rangle = \lambda_m \delta_{m,m'}. \quad (162)$$

Los eigenvalores λ_m son los coeficientes de Schmidt, y $\lambda_m = 0$ para cualquier $m > K$. Entonces, podemos reescribir la ecuación (160) como:

$$\rho^A = \sum_{m=1}^K \lambda_m |u_m^A\rangle \langle u_m^A|. \quad (163)$$

Los coeficientes λ_m son también los eigenvalores del operador de densidad reducido del subsistema B:

$$\rho^B = \sum_{m=1}^K \lambda_m |w_m^B\rangle \langle w_m^B|. \quad (164)$$

De esta manera demostramos que cualquier sistema en $\mathcal{H}^{M \times N}$ puede ser escrito en términos de la descomposición de Schmidt y expresado de la forma (11):

$$|\psi^{AB}\rangle = \sum_{n=1}^K \sqrt{\lambda_n} |u_n^A, w_n^B\rangle, \quad \text{con } \lambda_n > 0.$$

(Audretsch, 2007) y (Eberly, 2006)

Apéndice C. Solución de dinámicas cuánticas mediante RK4

La ecuación que describe la dinámica de los sistemas cuánticos es la ecuación de Shcrödinger dependiente del tiempo (Tannor, 2007):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H(t)\psi(t). \quad (165)$$

La función de onda puede expandirse como una combinación lineal de los estados independientes que la conforman, de tal forma que puede escribirse como:

$$\psi(t) = \sum_m a_m(t)\varphi_m, \quad (166)$$

donde las $a_m(t)$ son coeficientes de la expansión dependientes del tiempo. Sustituyendo (165) en (166), obtenemos:

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{a}_1(t) \\ \dot{a}_2(t) \\ \dot{a}_3(t) \\ \vdots \\ \dot{a}_N(t) \end{bmatrix} = H(t) \begin{bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{bmatrix}, \quad (167)$$

$$i\hbar \dot{a}_n(t) = \sum_m H_{n,m} a_m(t). \quad (168)$$

Entonces, la ecuación (168) representa la solución de los coeficientes de expansión. Obteniendo así, un sistema de ecuaciones diferenciales lineales acopladas. (Tannor, 2007)

Para resolver este sistema pueden utilizarse métodos de integración numérica. En este trabajo utilizamos el método Runge Kutta de cuarto orden (RK4), que es un método iterativo que arroja una solución aproximada a partir de un valor inicial dado.

Tenemos la ecuación diferencial:

$$y' = f(x, y), \quad (169)$$

con la condición inicial:

$$y(x_0) = y_0. \quad (170)$$

El método RK4 para este sistema está dado por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h, \quad (171)$$

donde:

$$k_1 = f(x_i, y_i), \quad (172)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right), \quad (173)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right), \quad (174)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h), \quad (175)$$

Entonces, el valor futuro y_{i+1} es determinado por el valor presente y_i más el producto del tamaño del intervalo h por una pendiente estimada con el promedio ponderado de las pendientes k_1 , k_2 , k_3 y k_4 . (Press, et al., 1992)

La dinámica del TDQS en presencia del potencial AC queda descrita mediante los coeficientes presentados en la sección IV.3, ecuación (64). De tal forma que la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo queda como:

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{L}_0(t) \\ \dot{L}_1(t) \\ \dot{L}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{L}_N(t) \\ \dot{C}_0(t) \\ \vdots \\ \dot{C}_N(t) \\ \dot{R}_0(t) \\ \vdots \\ \dot{R}_N(t) \end{bmatrix} = \left(H_{TDQS} + H_{AC}(t) \right) \begin{bmatrix} L_0(t) \\ L_1(t) \\ L_2(t) \\ \vdots \\ L_N(t) \\ C_0(t) \\ \vdots \\ C_N(t) \\ R_0(t) \\ \vdots \\ R_N(t) \end{bmatrix}, \quad (176)$$

obteniendo un sistema de $3 \times N$ ecuaciones diferenciales, el cual, puede ser resuelto con el método RK4 utilizando una condición inicial.